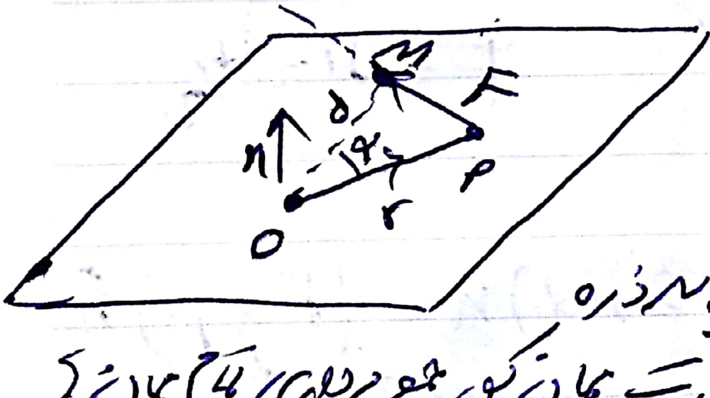
اصل اندازه حرکت زاویه‌ای (همتای قانون حرکت زاویه‌ای) (۱)

نکته: اصل تکانه حرکت خطی حرکت انتقالی مرکز جرم جسم صلب را مشخص می‌کند درحالی‌که اندازه حرکت زاویه‌ای چرخش یک جسم صلب را نسبت به مرکز جرم آن مشخص می‌کند

گشتاور نیرو حول یک نقطه: فرض کنید نیروی F بر ذره P با بردار مکان r نسبت به نقطه O وارد می‌شود در این صورت

گشتاور K_O را به رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



اگر تعداد ذرات را به n ذره افزایش دهیم در این صورت گشتاور کل جمع برداری گشتاورها خواهد شد یعنی

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

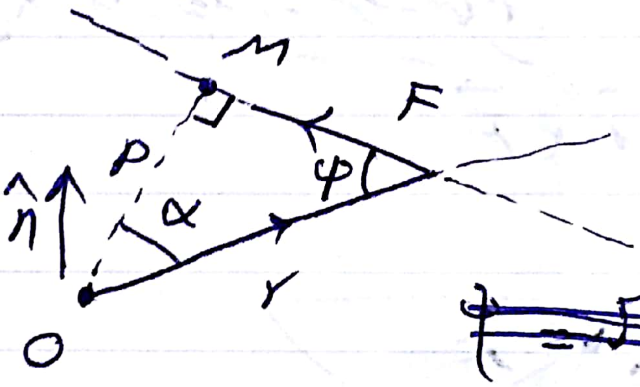
نکته: در رابطه بالا گشتاور نسبت به مرکز O است حال اگر مرکز را به نقطه A که به فاصله برداری $\vec{a}$ از O قرار دارد انتقال دهیم در این صورت

$$K_A = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i - \vec{a}) \times F_i$$

$$K_A = K_O - \vec{a} \times \vec{F}$$

بعبارت هندسی از بردار ممان ، اگر فرض کنید در صفحه P نیروی
F به ذره وارد شده باشد در امتداد $\hat{n}$ بردار عمود بر این
صفحه باشد (شکل ذیل) درای صورت داریم

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \left(rF\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha\right)\right) \times n$$



$$\cancel{\varphi = \pi - \pi/2}$$

$$\Rightarrow K_O = F(r\sin\alpha)\, n = (F \times p)\,\hat{n}$$

ضرب معمولی

در اینجا p طول فاصله عمودی از O به خط عمل F است

نکته : اگر F جهت ساعتگرد باشد (منفی) درای صورت

$$K_O = -(F \times p)\, n$$

و اگر F راست سو (مثبت) باشد

$$K_O = (F \times p)\, n$$

اگر فرض کنیم سیستم از ذرات در یک صفحه قرار داشته

باشند در واقع نیروی عمود بر آن نیز در آن صفحه عمل کند

در این صورت حرکت در دو بعد صورت می پذیرد

$$K_O = \left(\sum_{i=1}^{N} \pm F_i p_i\right) n$$

است. بنابراین در دو بعد تمام ممان ها با هم موازی هستند

ممان حول یک محور!

مؤلفه های بردار ممان K_O در جهت بردار یکه n را ممان

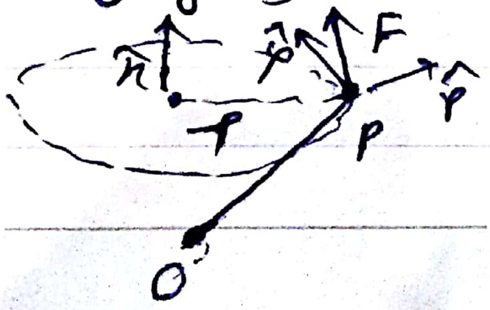
نیروی F حول محور $\hat{n}$ می نامیم که یک کمیت اسکالر است

$$\vec{K}_O \cdot \vec{n} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot n = (\vec{n} \times \vec{r}) \cdot F$$

$$= (r \sin\alpha)\,\hat{\varphi} \cdot F = p(\vec{F} \cdot \hat{\varphi})$$

در رابطه بالا p فاصله از نقطه P از محور (O,n) و $\hat{\varphi}$

بردار یکه سمتی است بنابراین $\vec{F} \cdot \hat{n}$ مؤلفه سمتی F است



مثال ۱) اگر $F=2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$ اثر در نقطه

$P=(0,3,-1)$ اثر کند در این صورت ممان نیروی F

الف) حول مبدأ

ب) در نقطه $A(-2,4,3)$ چقدر است

ج) ممان F حول محور $3\hat{i}-4\hat{k}$ چقدر است؟

$$K_O\cdot n \qquad \hat{n}=\frac{3\hat{i}-4\hat{k}}{|3\hat{i}-4\hat{k}|}$$

$$K_O\cdot n=(-7\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k})\cdot\hat{n}$$

تمرین: سیستم اگر تحت اثر میدان گرانش قرار داشته باشد نشان دهید ممان کل حاصل از اثر میدان گرانش حول هر نقطه ای برابر است با ممان حول مرکز جرم این سیستم؟

Date: Subject:

(5)

تکانه زاویه‌ای !

تکانه زاویه‌ای حول یک نقطه : فرض کنید ذره‌ای p به جرم m

در مکان r و با سرعت v قرار دارد. بنابراین تکانه زاویه‌ای

ذره p یعنی l_o حول نقطه o به رابطه زیر تعریف می‌شود

$$l_o = r \times (mv)$$

برای یک سیستم N ذره‌ای نیز

$$l_o = \sum_{i=1}^{N} r_i \times (m_i v_i)$$

و همچنین در نقطه A نیز

$$l_o = \sum_{i=1}^{N} (r_i - a) \times (m_i v_i)$$

که

$$L_A = L_o - \vec{n} \times \underline{P}$$

که $\underline{P}$ تکانه حرکتی است.

همچنین از لحاظ هندسی داریم

$$L_o = I\,(mv \times p)\,\hat{n}$$

که v بزرگی بردار $\vec{v}$ و نیز p نیز فاصله عمودی است

مثال ۱ مکان ذره P با جرم m در زمان t با

$$z=0 \qquad x=a\theta^2 \qquad y=2a\theta$$

مشخص می‌شود که $\theta(t)$ تابعی از زمان است.

مطلوبست محاسبه اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه

$B=(a,0,0)$ چقدر است؟

$$\vec{r}=a\theta^2\hat{i}+2a\theta\hat{j}$$

$$\vec{b}=a\hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{r}-\vec{b}=a\left[(\theta^2-1)\hat{i}+2\theta\hat{j}\right]$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}=2a\dot{\theta}(\theta\hat{i}+\hat{j})$$

$$L_B=(\vec{r}-\vec{b})\times(m\vec{v})$$

$$=-2ma^2(\theta^2+1)\dot{\theta}\hat{k}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای حول یک محور:

طبق تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای L_O نسبت به بردار

یکه $\hat{n}$ را اندازه حرکت زاویه‌ای حول محور $(O,\hat{n})$ می‌

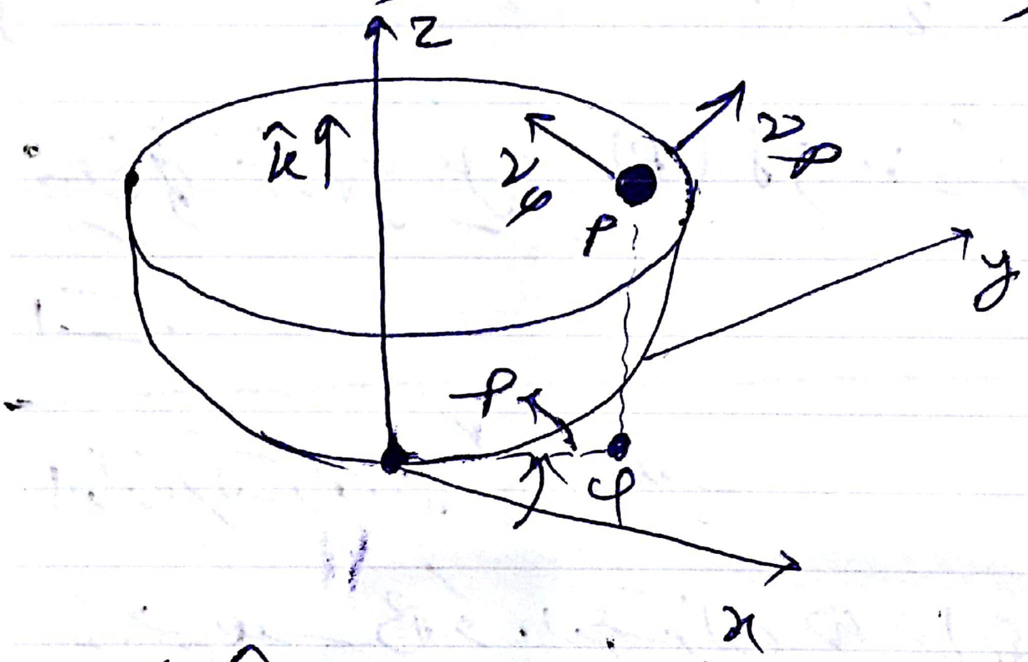
نامیم $\hat{n}\cdot L_O$ یک کمیت اسکالر است.

در این صورت

$$\vec{L}_o \cdot \hat{n} = m\rho\,(\vec{v}\cdot\hat{\varphi})$$

که $\vec{v}\cdot\hat{\varphi}$ مولفه سمتی بردار $\vec{v}$ خواهد شد.

مثال: ذره p به جرم m درون کاسه‌ای کروی می‌لغزد را در نظر بگیرید. در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای این ذره را حول محور تقارن این کاسه بدست آورید؟



$$\vec{v}\cdot\hat{\varphi} = v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$$

$$L_o\cdot\hat{k} = m\rho(v\cdot\hat{\varphi}) = m\rho^2\dot{\varphi}$$

برای انرژی جنبشی

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[v_\varphi^2 + v_\rho^2\right]$$

(8) Date Subject:

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$$

$$v_\rho = \dot{\rho}\hat{\rho} + \dot{z}\hat{k}$$

به علت اینکه z در مختصات شکل به ρ بستگی دارد

بنابراین $z = f(\rho)$ ، $\dot{z} = f'(\rho)\dot{\rho}$

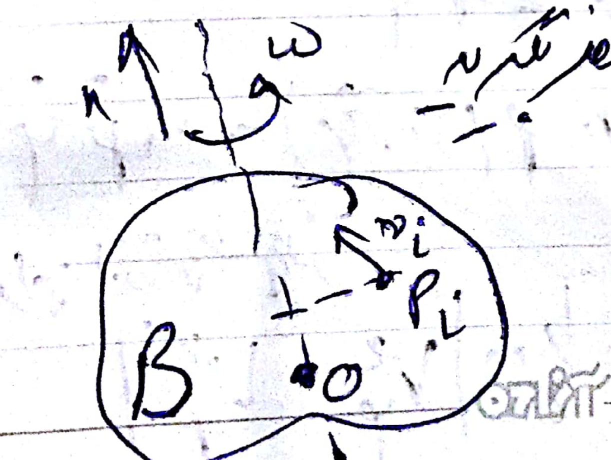
می‌باشد که $(')$ مشتق‌گیری نسبت به ρ است.

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + \left(f'(\rho)\dot{\rho}\right)^2 + \left(\rho\dot{\varphi}\right)^2\right]$$

همچنین انرژی پتانسیل نیز $V = mgf(\rho)$ است.

اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم صلب

یک جسم صلب B که با سرعت زاویه‌ای ω حول محور $\{O, n\}$ می‌چرخد را در نظر بگیرید



$$L_0 \cdot n = \left(\sum_{i=1}^{N} l_0^{(i)}\right)\cdot \hat{n}$$ در این صورت

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(l_0^{(i)}\cdot \hat{n}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i \left(v_i \cdot \hat{\varphi}\right)$$

$$v_i \cdot \hat{\varphi} = \omega \rho_i$$ به علت اینکه

بنابراین داریم

$$\vec{L}_0 \cdot \hat{n} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2\right)\omega = I\omega$$

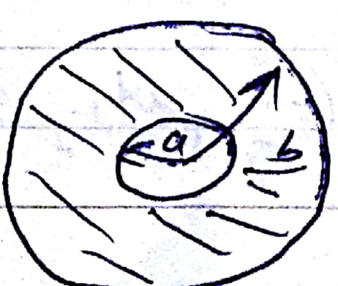
که I همان ممان اینرسی حول محور گذرا از O و $\hat{n}$ است.

همچنین بردار اندازه حرکت زاویه‌ای با رابطه

$$L_0 = (I\omega)\hat{n}$$

داده خواهد شد.

مثال: یک کره توخالی به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b که از جسمی با چگالی ثابت ρ تشکیل شده است را در نظر بگیرید.



Date: Subject:

(۱۵)

مثال این کره را حول محور ثابتی که از مرکزش می‌گذرد در حال

سرعت زاویه‌ای Ω می‌چرخانیم مطلوب است اندازه حرکت

زاویه‌ای حول این محور؟

$$I = \frac{2}{5}Mb^2 - \frac{2}{5}ma^2$$

$$M = 4\rho b^3/3 \quad , \quad m = 4\rho a^3/3$$

بنابراین

$$I = \frac{8\rho}{15}(b^5 - a^5)$$

$$L = I\omega = \frac{8\rho}{15}(b^5 - a^5)\Omega$$

اصل بقای زاویه‌ای!

سیستم متشکل از ذرات $P_1, P_2, \ldots, P_n$ با جرم‌های m_1, m_2 و

... m_n با سرعت‌های $v_1, v_2, \ldots, v_n$ را در نظر بگیرید

اگر فرض کنید به این سیستم نیروهای خارجی F_i و نیروهای

داخلی G_{ij} وارد می‌شود در این صورت

Date: (11) Subject:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i + \sum_{j=1}^{N} G_{ij}$$

$$G_{ij}\,(i=j) = 0$$ برای

است نیروهای اندازه حرکت زاویه‌ای حول محور O

برای این سیستم با رابطه زیر نوشته خواهد شد

$$\frac{dL_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} r_i \times (m_i v_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ r_i \times \left(m_i \frac{dv_i}{dt}\right) + \underbrace{\dot{r}_i}_{v_i} \times (m_i v_i) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} r_i \times \left(m_i \frac{dv_i}{dt}\right)$$

لازم به ذکر است $\dot{r}_i \times m_i v_i = v_i \times m v_i = 0$

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} r_i \times \left\{ F_i + \sum_{j=1}^{N} G_{ij} \right\} =$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_i \times F_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} r_i \times G_{ij}$$

$$= K_O + \sum_{i=2}^{N} \left(\sum_{j=1}^{i-1} (r_i \times G_{ij} + r_j \times G_{ji}) \right.$$

در اصل قبل می‌توان نوشت

$$r_i \times G_{ij} + r_j \times G_{ji} =$$

$$r_i \times G_{ij} - r_j \times G_{ij} = (r_i - r_j) \times G_{ij} = 0$$

به علت اینکه G_{ij} موازی با $(r_i - r_j)$ است

$$\frac{dL_0}{dt} = K_0 \Rightarrow$$ اصل تکانه زاویه‌ای

قضیه: اصل اندازه حرکت زاویه‌ای حول هر محوری برقرار است.

اثبات: محور A را در نظر بگیرید

$$K_A = K_0 - a \times F$$

$$L_A = L_0 - a \times P$$

$$\dot{L}_A = \frac{dL_A}{dt} = \frac{dL_0}{dt} - (\dot{a} \times p - a \times \dot{p})$$

$$\Rightarrow K_A - \dot{L}_A = (K_0 - \dot{L}_0) - a \times (F - \dot{p})$$

جمله $R \times M\dot{V}$ سمت انتقالی دیگر O با جمعیت

مرجحات حرکت دور O محسوب می‌شوند علاوه برای

$$K_O = \frac{d}{dt}\left(MR \times \dot{V}\right) + \frac{dL_G}{dt}$$

$$= MR \times \dot{V} + \frac{dL_G}{dt}$$

$$\boxed{K_O = K_G + R \times F} \Leftarrow \text{از طرفی}$$

$$\Rightarrow K_G = \frac{dL_G}{dt} + R \times \left(M\dot{V} - F\right)$$

$$= \frac{dL_G}{dt}$$

بنابراین برای یک جسم صلب

$$M\frac{dV}{dt} = F \qquad \frac{dL_G}{dt} = K_G$$

را می‌توان در نظر گرفت

چون $\dot{P} = F$ و نیز $K_O = \dot{L}_O$ است بنابراین

$$K_A = \dot{L}_A$$

خواهد شد.

اندازه حرکت زاویه‌ای حول مرکز جرم

سیستم اگر با جرم کل M و نیز مرکز جرم G که

با فاصله R و نیز سرعت V مشخص شده است را

در نظر بگیرید در این صورت

$$L_O = R \times (MV) + L_G$$

خواهد بود.

اثبات:

$$L_G = \sum_{i=1}^{N} m_i (r_i - R) \times (v_i - V)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i r_i \times v_i - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i\right) \times V$$

$$- R \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i v_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) R \times V$$

$$= L_O - R \times (MV)$$

(1)

بقای اندازه حرکت زاویه‌ای

در سیستم‌هایی که یک سیستم ایزوله است را در نظر بگیرید. در این صورت L_A همان کل حول نقطه A از

نیروهای خارجی است که به صفر میل می‌کند $rF_{ext} = 0$ بنابراین $\frac{dL_A}{dt} = 0$

خواهد بود. در استدلال‌های بعد $\frac{dL_a}{dt} = 0$ می‌باشد.

بقای اندازه حرکت زاویه‌ای: برای یک سیستم ایزوله تکانه زاویه‌ای حول هر نقطه ثابتی

بقا دارد. همچنین اندازه حرکت سیستم حول مرکز جرم آن نیز بقا دارد.

مثال: منظومه شمسی: تکانه زاویه‌ای حول هر نقطه‌ای یا مرکز جرم آن دارای بقا است.

نکته: علاوه بر این اندازه حرکت این جسم حول مرکز آن حتی با وجود نیروی خارجی نیز ممکن است بقا داشته باشد

مثلاً: برای هر سیستم تحت نیروی گرانش یکنواخت $K_c = 0$ می‌باشد در این صورت L_c بقا دارد.

$$\left(\frac{dL_c}{dt} = 0\right)$$

تکانه زاویه‌ای برای نیروهای مرکزگرا

در مورد یک ذره P که در نیروی مرکزگرا قرار دارد $K_O = r \times F = 0$ می‌شود یعنی r

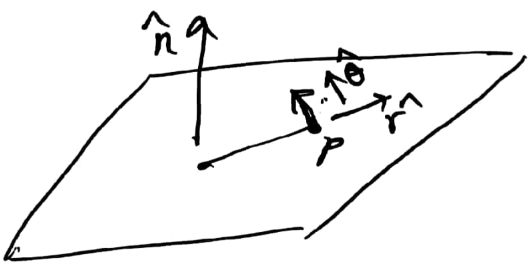
و F با یکدیگر موازی هستند و این رابطه نشان می‌دهد که $\frac{dL_O}{dt} = 0$ و L_O دارای بقا است.

در مختصات قطبی (r, θ) داریم

$$\vec{r} = r\hat{r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta}$$

در این صورت

$$L_O = \vec{r}\times(m\vec{v}) = m(r\hat{r})\times(\dot{r}\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\,\hat{n}$$



که $\hat{n} = (\hat{r}\times\hat{\theta})$ عمود بر صفحه حرکت است.

بنابراین

$$L_O\cdot\hat{n} = L = mr^2\dot{\theta}$$

دارای بقا است که L یک مقدار ثابت است.

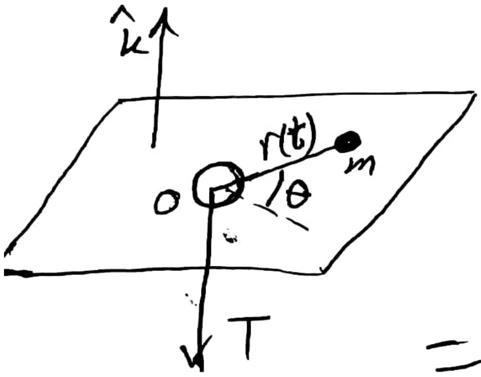
بقای اندازه حرکت زاویه ای حول یک محور

اجازه دهید $\hat n$ بردار یکه و A یک نقطه ثابت، بنابراین ($\hat n$ و A) یک محور ثابت فرض می‌شوند

در نتیجه
$$\frac{d}{dt}\left(\vec L_A\cdot\hat n\right) = \frac{dL_A}{dt}\cdot n + L_A\cdot\frac{dn_A}{dt} = \frac{dL_A}{dt}\cdot n = K_A\cdot\hat n$$

بنابراین زمانی که $K_A\cdot\hat n = 0$ برابر صفر باشد در این صورت $\vec L_A\cdot\hat n$ بقا دارد.

مثال: هل دادن یک ذره به داخل یک حفره



شکل مقابل را در نظر بگیرید که یک ذره روی میز قرار دارد. ذره را داخل سوراخی که روی میز قرار دارد هدایت می‌کنیم (البته با یک طناب با جرم ناچیز) فرض کنید در زمان اولیه توپ در مسیر حرکت دایره ای باشد با سرعت u در شعاع a باشد. مطلوب است سرعت توپ و کشش طناب در هر زمانی چقدر است؟

حل: ابتدا باید بدانیم کدام مولفه اندازه حرکت زاویه ای بقا دارد.

نکته: به علت اینکه به ذره P نیروی عمود بر سطح و نیروی گرانش وارد می‌شود (البته در راستای $\hat k$) بنابراین هیچ نیروی خالصی ناشی از حفره به ذره وارد نمی‌شود لذا در راستای $\hat k$ بقا اندازه حرکت زاویه ای داریم. ($K_0 = 0$)

$$L_0\cdot\hat k = mr^2\dot\theta = L$$

با استفاده از شرایط اولیه ($r=a$ $t=0$ $\dot\theta=\frac{u}{a}$) داریم

$$L = mau \Rightarrow \boxed{mr^2\dot\theta = mau}$$

مخصوصا سرعت ذره P در زمان t نیز

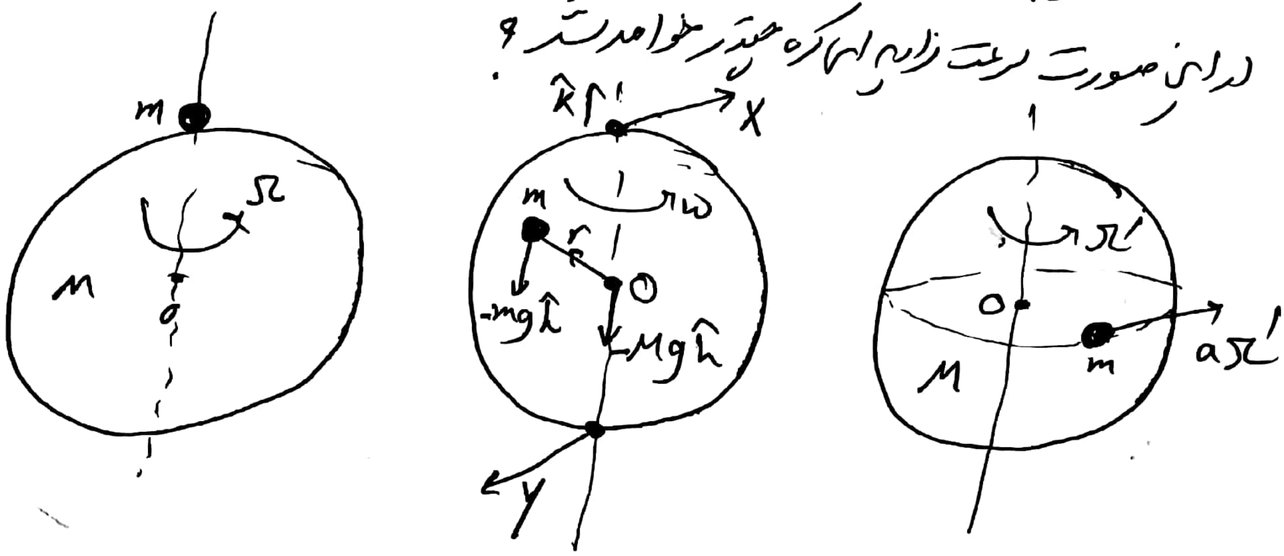
$$v = \dot r\hat r + (r\dot\theta)\hat\theta = \dot r\hat r + \left(\frac{au}{r}\right)\hat\theta$$

همچنین T کشش طناب نیز

$$ma = T$$
$$m(\ddot r - r\dot\theta^2) = -T$$

$$(3)\quad T=m(r\dot{\theta}^2-\ddot{r})=m\left(\frac{a^2u^2}{r^3}-\ddot{r}\right)$$

مثال ۱: سوسک را روی کره در نظر بگیرید که در ابتدا روی قطب شمال این کره قرار دارد. در ابتدا این کره با سرعت زاویه‌ای Ω حول محوری که از قطب جنوب و شمال آن رد می‌شود می‌چرخد اگر سوسک شروع به حرکت روی این کره کند و به سمت استوای کره نزدیک شود و سرانجام بنشیند در این صورت سرعت زاویه این کره چقدر خواهد شد؟



ابتدا باید دید کدام مولفه اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است؟

$$K_O=0\times(-Mg\hat{k})+r\times(-mg\hat{k})+(a\hat{k})\times X+(-a\hat{k})\times Y$$

از شکل پیداست

در رابطه بالا X و Y نیروهای شتری هستند که برای نقاط تعادلی بکار می‌روند

رابطه بالا نشان می‌دهد که $K_O\cdot\hat{k}=0$ است

بنابراین $L_O\cdot\hat{k}$ ثابت است

حالت اولیه

$$L_O\cdot\hat{k}=(I\Omega\hat{k})\cdot\hat{k}=\left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\Omega$$

حالت ثانویه

$$L_O\cdot\hat{k}=\left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\Omega'+ma(\Omega' a)=\frac{1}{5}(2M+5m)a^2\Omega'$$

$$\boxed{\begin{aligned}L_O\cdot\hat{k}&=mp(v\cdot\hat{\phi})\\&=ma(\Omega a)\end{aligned}}$$ از رابطه استفاده شده

(4) چون رابطه $L_0 \cdot \hat{k}$ ثابت دارد لذا داریم

$$(L_0\cdot\hat{k})_i = (L_0\cdot\hat{k})_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}(2M+5m)a^2\Omega' = \frac{2}{5}Ma^2\Omega$$

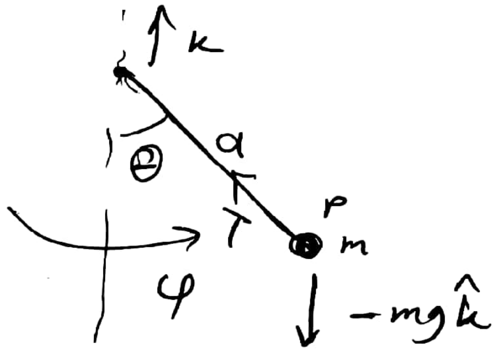
$$\Rightarrow \boxed{\Omega' = \left(\frac{2M}{2M+5m}\right)\Omega}$$

تمرین! تفاوت در انرژی های جنبشی قبل و بعد را مشخص کنید؟

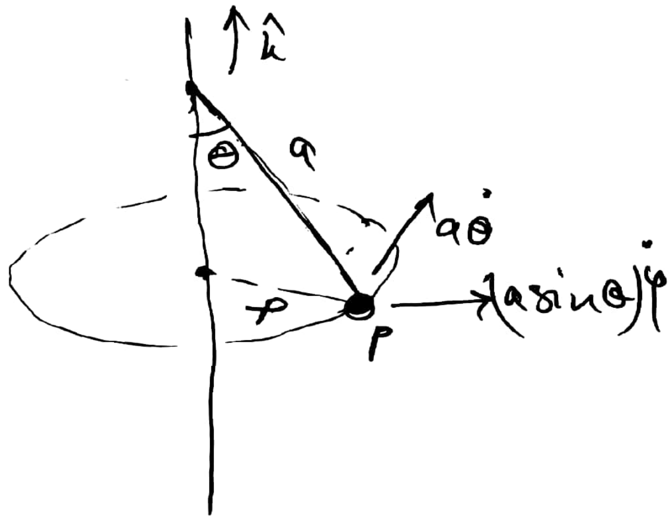
تمرین! آیا با داشتن معادلات بقای تکانه زاویه ای و بقای انرژی می توان حرکت این سیستم را کامل بررسی کرد؟

مثال! پاندول کروی

یک ذره P به جرم m که از یک نقطه ثابت O با یک میله با جرم ناچیز و طول a آویزان شده است را در نظر بگیرید. نشان دهید اندازه حرکت زاویه ای حول محور عمودی که از نقطه O می گذرد ثابت دارد؟ همچنین معادلات مربوط به بقای انرژی را نیز برای این سیستم بنویسید.



نمودار نیروهای خارجی



نمودار سرعت

فرض کنید در لحظه اولیه $\theta=\alpha$ ، $t=0$ و $v=u$ باشد.

$$K_O = r\times(-mg\hat{k}) + r\times T = -mg\,\hat{r}\times\hat{k}$$

$$K_O\cdot n = K_O\cdot\hat{k} = 0$$

(5)

بنابراین $L_0 \cdot k$ مقداری پایاست

$$L_0 \cdot k = m\rho(v \cdot \hat{\varphi}) = m(a\sin\theta)(a\sin\theta\,\dot{\varphi}) = ma^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

$$\boxed{v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = a\sin\theta\,\dot{\varphi}} \qquad \boxed{v_\theta = a\dot{\theta}}$$

تکانه زاویه‌ای ⇐ $ma^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = L = m\sin\alpha\, u$ ⇐ تمرین: نشان دهید

$$T = \frac{1}{2}m\left((a\dot{\theta})^2 + (a\sin\theta\,\dot{\varphi})^2\right)$$ ⇐ از طریق انرژی جنبشی

$$V = -mg(a\cos\theta)$$ ⇐ انرژی پتانسیل

$$E = T + V \Rightarrow \frac{1}{2}m\left((a\dot{\theta})^2 + (a\sin\theta\,\dot{\varphi})^2\right) - mga\cos\theta = E$$

$$E = \frac{1}{2}mu^2 - mga\cos\alpha$$ ⇐ شرایط اولیه

بنابراین داریم $ma^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = ma\sin\alpha\, u$

$$\frac{m}{2}\left(\cancel{m}(a\dot{\theta})^2 + a^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - mga\cos\theta = \frac{1}{2}mu^2 - mga\cos\alpha$$

تمرین! آیا این دو معادله برای توصیف کامل حرکت کافی است؟
