(۲)

پایستگی تکانه خطی

یک سیستم منزوی را در نظر بگیرید (منزوی به این معنی که هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نشود)

بنابراین $F_{ext}=0$ در این صورت داریم $\frac{dP}{dt}=0 \Rightarrow P=$ ثابت

$\boxed{\text{پایستگی تکانه خطی: برای حرکت هر سیستم منزوی این تکانه خطی بقا دارد}}$

بنابراین از طرفی چون $P=MV_{cm}$ را داریم لذا برای هر سیستم منزوی این مرکز جرم سیستم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

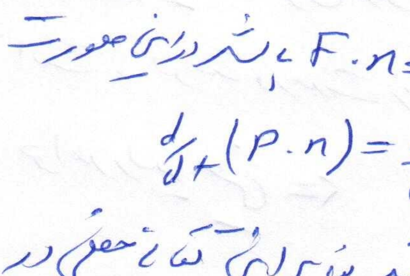
همچنین ممکن است یک مؤلفه از بردار P بقا داشته باشد در صورتی که مؤلفه‌های دیگر بقا ندارند

اثبات: اگر فرض کنیم $\hat{n}$ بردار ثابت واحد باشد به طوری که $F.n=0$ باشد در این صورت

$$\frac{d}{dt}(P.n)=\frac{dP}{dt}.n+P.\frac{dn}{dt}=\frac{dP}{dt}.n=F.n=0$$

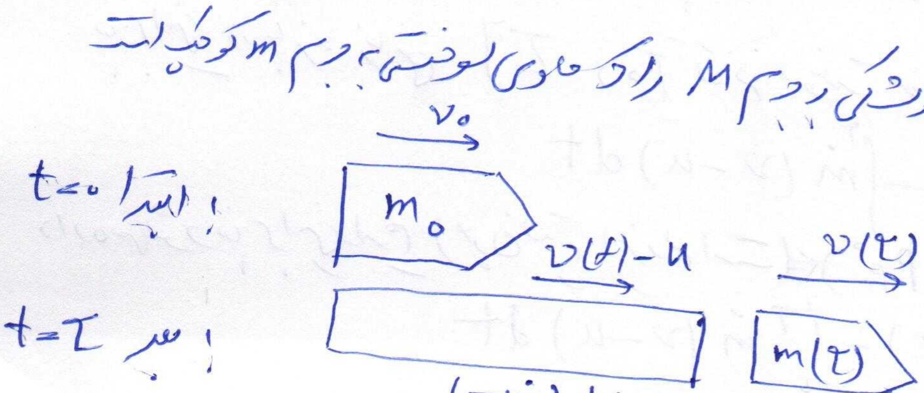
نکته: نیروی کل وارد بر سیستم اگر در یک جهت مشخص صفر باشد بنابراین تکانه خطی در آن جهت به خصوص بقا دارد.

مثال: منظومه شمسی یک سیستم منزوی است بنابراین تکانه کل بقا دارد یعنی مرکز جرم منظومه شمسی با سرعت ثابت حرکت می‌کند.



مثال: یک ملخ روی میز را در نظر بگیرید که می‌جهد. در راستای عمودی هم نیروی عمودی سطح N و هم نیروی گرانش به این ملخ وارد می‌شود بنابراین در راستای عمودی تکانه خطی بقا ندارد ولی در راستای افقی به علت اینکه هیچ نیروی خارجی به ملخ وارد نمی‌شود دارای پایستگی تکانه خطی است.

حرکت راکت: مانند شکل روبرو راکتی به جرم M را که حاوی سوختی به جرم m که کوچک است را در نظر بگیرید.



(۲)

حال فرض کنید زمانی که سوخت با سرعت u به عقب خارج می‌شود سیستم در حالت سکون باشد

بنابراین داریم

$$Mv + m(v-u) = 0$$

(راکت نیز سیستم منزوی است)

$$\Rightarrow v = \left(\frac{m}{m+M}\right) u$$

که سرعت پیشران

نکته! برای یک راکت واقعی سوخت در یک دوره زمانی خارج می‌شود (سوخته می‌شود)

برای راکت واقعی (شکل قبل) ابتدا جرم راکت و سوخت را m_0 و سرعت اولیه آن را v_0 در نظر بگیرید. اکنون موتور روشن شده و سوخت با سرعت u نسبت به راکت در حال خارج شدن است. سوخت در مدت زمان T سوزانده خواهد شد و در پایان جرم راکت به مقدار m_1 خواهد رسید یعنی ⇐

$$\begin{array}{ll} t=0 & m_0 \\ t=T & m_1 \end{array} \Rightarrow P_0 = m_0 v_0$$

حال در بازه زمانی $[0, T]$ یک زمان τ را در نظر بگیرید در این زمان

$$t=\tau \quad m(\tau) \Rightarrow P = m(\tau)v(\tau) + P_{burned}$$

جرم سوخت مصرف نشده + جرم راکت

تکانه مربوط به سوخت مصرف نشده + راکت

تکانه مربوط به سوخت مصرف شده

حال برای محاسبه P_{burned} دقت کنید که در بازه زمانی $[t, t+dt]$ جرم از دست رفته برابر با $-\dot{m}(t)dt$ است که با سرعت $v(t)-u$ در حال خارج شدن از سیستم است

بنابراین در بازه زمانی $[0, \tau]$ تکانه سوخت مصرف شده برابر است با

$$P_{burned} = -\int_0^{\tau} \dot{m}(v-u)\,dt$$

داریم و بنا بر پایستگی تکانه (چون سیستم ایزوله است) ⇐ $(P_i = P_f)$

$$m_0 v_0 = m(\tau)v(\tau) - \int_0^{\tau} \dot{m}(v-u)\,dt$$

(3)

$$\int_0^T \left[\frac{d}{dt}(mv) - \dot{m}(v-u)\right] dt = 0$$

معادله موشک

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(mv) - \dot{m}(v-u) = 0 \Rightarrow \boxed{m\frac{dv}{dt} = -\dot{m}u}$$

بدون حضور گرانش

نیروی پیشران

$$\Rightarrow \int dv = \int \frac{-\dot{m}u}{m} dt = -u\int \frac{dm}{m} = -u\ln m + \text{ثابت}$$

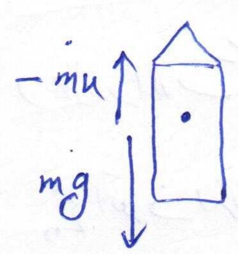
$$\Rightarrow v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

در زمان T

$$\Rightarrow \Delta v = v_1 - v_0 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$$

اکنون حضور گرانش را نیز لحاظ می کنیم

$$m\frac{dv}{dt} = -\dot{m}u - mg$$



$$\int dv = \int\left[\frac{-\dot{m}u}{m} - g\right] dt = -u\ln m + gt + \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt$$

$$\xrightarrow{t=T} \Delta v = v_1 - v_0 = u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gT$$

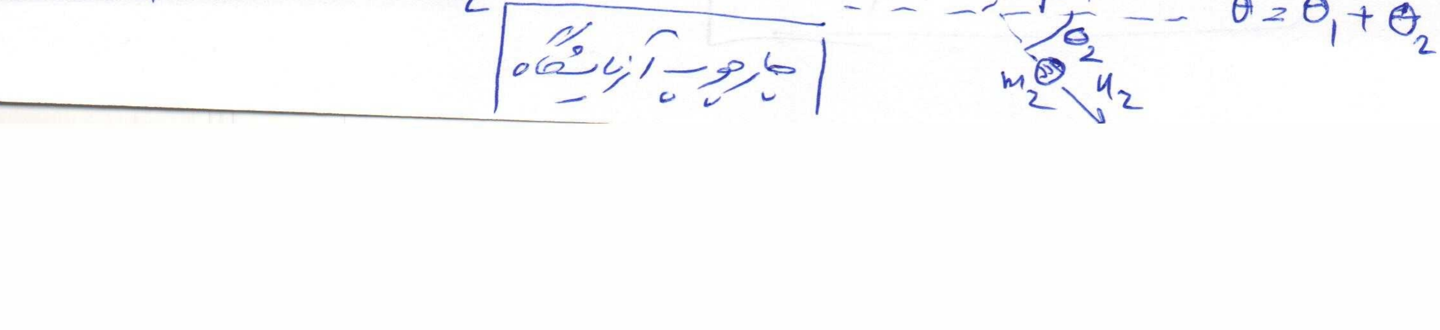
نکته: اگر زمان T خیلی کوتاه باشد در این صورت $-\dot{m}u < mg$ یعنی $\Delta v < 0$ می شود

این بدان معناست که موشک نمی تواند از زمین جدا شود و به علت منفی بودن سرعت

برای جدا شدن موشک لازم است $-\dot{m}u > mg$ باشد $\Leftarrow$ $\Delta v > 0$ در زمان

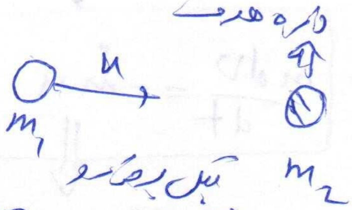
$t=T$ این سرعت به مقدار بیشینه خود خواهد رسید $v_{max} = u\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) - gT$

نظریه برخورد: فرض کنید دو ذره m_1 و m_2 با یکدیگر برخورد می کنند.



(4)

همانطور که از شکل پیداست سرعت‌های اولیه ذرات قبل برخورد متفاوت از سرعت‌های ذرات بعد از برخورد است



نکته: ابتدا ذره دوم ساکن است

بعد از برخورد

$$P_{\text{قبل}} = P_{\text{بعد}} \Rightarrow m_1\vec{u} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

به طور کلی انرژی در همه سیستم‌ها باید حفظ شود بنابراین می‌توان رابطه زیر را برای انرژی جنبشی در نظر گرفت

$$\frac{1}{2}m_1u^2 + Q = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$u = |\vec{u}| \qquad u_1 = |\vec{u}_1| \qquad u_2 = |\vec{u}_2|$$

در رابطه بالا Q انرژی بدست آمده در اثر برخورد است. اگر برخورد رخ داد و داشتیم به علت اینکه معمولاً انرژی به شکل گرما آزاد شد لذا $Q<0$ منفی است.

برخورد الاستیک $\Leftarrow$ $Q = 0$ (در واقع در پراکندگی الاستیک پراکندگی را در برخورد) هیچ اتلاف انرژی صورت نمی‌پذیرد. بنابراین داریم

پایستگی انرژی $\Leftarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}m_1u^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2}$

پایستگی تکانه $\Leftarrow$ $\boxed{m_1\vec{u} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}$

با گرفتن ضرب داخلی از دو طرف رابطه پایستگی تکانه خطی داریم

$$m_1\vec{u} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \Rightarrow m_1^2u^2 = (m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2)\cdot(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2)$$

$$\Rightarrow m_1^2u^2 = m_1^2u_1^2 + 2m_1m_2\,\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 + m_2^2u_2^2$$

اکنون با حذف u^2 از طرفین معادله‌های مربوط به پایستگی انرژی داریم

$$2m_1\,\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = (m_1 - m_2)u_2^2$$

حال با استفاده از تعریف ضرب داخلی $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = u_1u_2\cos\theta$ که θ زاویه بین u_1 و u_2 است داریم

$$\boxed{\cos\theta = \frac{(m_1 - m_2)u_2}{2m_1u_1}}$$

مثال: توپی به جرم m_1 با انرژی E با توپ دیگری که ساکن است برخورد الاستیک می‌کند. اگر دو توپ نسبت به هم با زاویه $\theta=120^\circ$ دور شوند مطلوبست انرژی هر یک از دو توپ را حساب کنید؟

$$\cos(120^\circ) = \frac{(m_1-m_2)u_2}{2m_1u_1} = \frac{(m-4m)u_2}{2mu_1}$$

$$\Rightarrow u_1/u_2 = 3$$

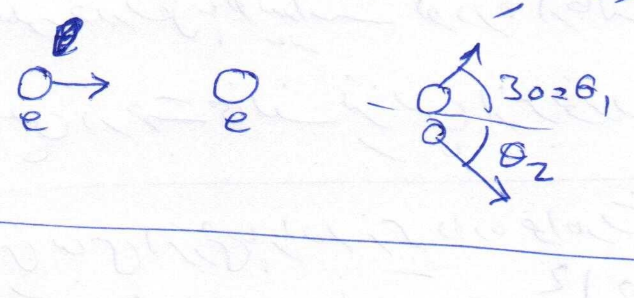
$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}mu_1^2}{\frac{1}{2}(4m)\cdot u_2^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

چون جمع کل دو انرژی جنبشی قبل و بعد با هم برابر است

$$\Rightarrow E_2 = E - E_1 = E - \frac{9}{4}E_2 \Rightarrow \frac{13}{4}E_2 = E \Rightarrow E_2 = \frac{4}{13}E$$

$$\Rightarrow E_1 = E - E_2 = E - \frac{4}{13}E = \frac{9}{13}E$$

تمرین: فرض کنید الکترونی با انرژی E با یک الکترون ساکن برخورد کشسان کند اگر الکترون فرودی با زاویه $\theta_1=30^\circ$ منحرف شود در این صورت انرژی تک تک الکترون‌ها بعد از برخورد چقدر است؟



برخورد در چارچوب سیستم با تکانهٔ صفر

فرض کنید دو ذره از یک سیستم منزوی که مرکز جرم آنها با سرعت ثابت حرکت می‌کند را طوری در نظر بگیریم که مرکز آنها یعنی G ساکن باشد (یعنی چارچوبی انتخاب کنیم که G در آن ساکن باشد)

در این چارچوب تکانهٔ خطی کل برای دو ذره برابر با صفر است $\Longleftarrow$ چارچوب تکانهٔ صفر

برای مثال در همان مسئلهٔ پراکندگی سرعت مرکز جرم در چارچوب آزمایشگاه برابر است با

$$P = m_1 u \Rightarrow \boxed{V = \frac{m_1 u}{m_1+m_2}}$$

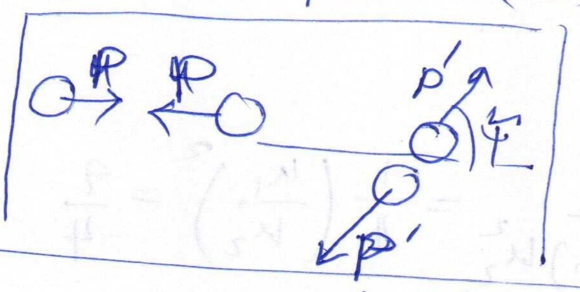
$\Longleftarrow$ سرعت مرکز جرم نسبت به چارچوب آزمایشگاه

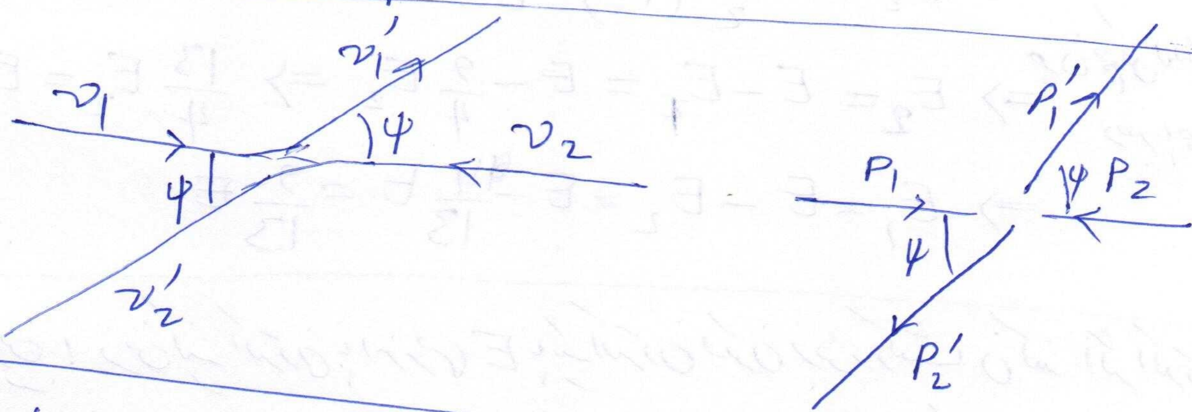
(۶)

در چارچوب (CM) (چارچوب تکانه صفر) تکانه‌های اولیه P_1 و P_2 و تکانه‌های نهایی P'_1 و P'_2 برای دو ذره باید روابط زیر را ارضا کنند در این صورت داریم

$$P_1 + P_2 = 0 \qquad P'_1 + P'_2 = 0$$

بنابراین می‌توان گفت در چارچوب (CM) دو ذره با سرعت‌هایی برابر در جهت‌های مخالف به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند.





همانطور که در شکل بالا پیداست دو ذره از حالت اول در جهت مخالف به هم برخورد کرده ولی در جهت مخالف نیز پس از برخورد دور می‌شوند

بنابراین پایستگی انرژی با رابطه زیر داده خواهد شد

دقت کنید اندازه تکانه‌ها ($P_1=P_2$) $P'_1=P'_2$

$$\frac{1}{2}m_1|v_1|^2+\frac{1}{2}m_2|v_2|^2+Q=\frac{1}{2}m_1|v'_1|^2+\frac{1}{2}m_2|v'_2|^2$$

همچنین رابطه بالا را می‌توان با تعریف $P=mv$ به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{p^2}{2m_1}+\frac{p^2}{2m_2}+Q=\frac{p'^2}{2m_1}+\frac{p'^2}{2m_2}$$

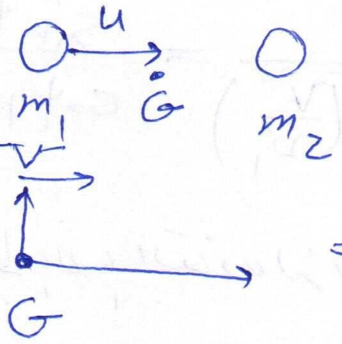
$$\Rightarrow p'^2=p^2+\left(\frac{2Qm_1m_2}{m_1+m_2}\right)$$

نکته: بنابراین اگر $p<p'$ باشد یعنی $Q>0$ در این صورت برخورد غیر الاستیک است

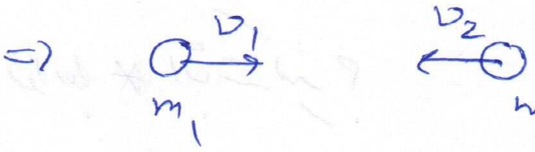
برای برخورد الاستیک ($Q=0$) داریم $p'=p$ یعنی چهار تکانه بزرگی یکسانی دارند

(7)

جمل سوالی که مطرح می‌شود این است که مقدار تکانه در (ZM) برابر با چند است؟



(در چارچوب آزمایشگاه)



از نظر ناظر در مرکز جرم داریم ⇐

$$v_1 = u - \underset{\text{سرعت مرکز جرم}}{V} \qquad v_2 = -V$$

بنابراین تکانه در ZM برابر است با

$$P = m_2 v_2 = m_2\left(\frac{m_1 u}{m_1+m_2}\right) = \frac{m_1 m_2 u}{m_1+m_2}$$

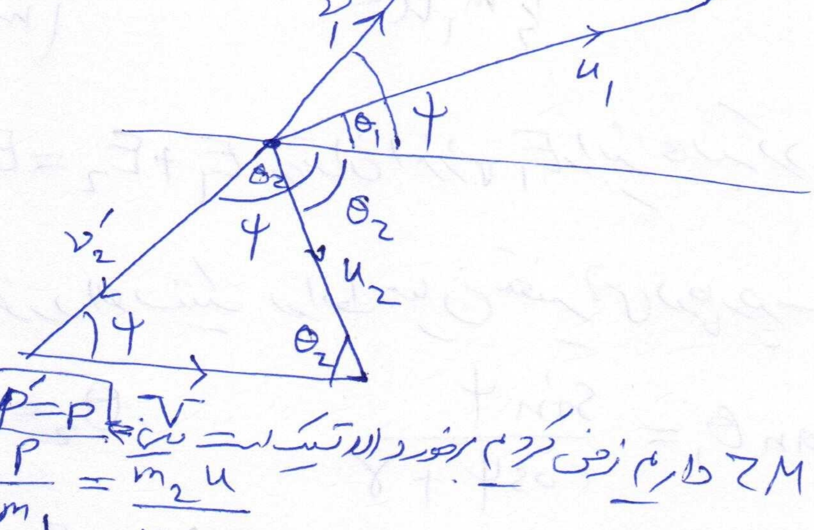
بازگشت به چارچوب آزمایشگاه از چارچوب ZM

با دقت اگر سرعت چارچوب ZM نسبت به چارچوب Lab (آزمایشگاه) برابر با V است

بنابراین سرعت‌های نهایی u_1 و u_2 در دستگاه Lab با ~~…~~ روابط زیر به سرعت‌های نهایی در دستگاه ZM یعنی v_1' و v_2' مربوط می‌شوند

(*) $u_1 = v_1' + V$

$u_2 = v_2' + V$



$\boxed{P' = P}$ ⇐ در چارچوب ZM داریم (فرض کردیم برخورد الاستیک است)

$$v_1' = \frac{P}{m_1} = \frac{m_2 u}{m_1+m_2}$$

⇐

$$v_2' = \frac{P}{m_2} = \frac{m_1 u}{m_1+m_2} = V$$

(8)

همان طور که از شکل پیداست زاویه پراکندگی θ_1 در دستگاه Lab به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\tan\theta_1 = \frac{v'_1 \sin\phi}{v'_1\cos\phi + V} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \left(\frac{V}{v'_1}\right)} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + (m_1/m_2)}$$

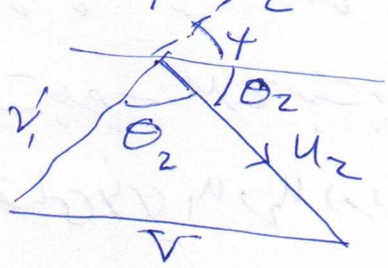
تمرین: رابطه بالا را با استفاده از روابط * اثبات کنید.

همچنین $\theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \phi)$ می‌باشد بنابراین داریم

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}\right)\cot\left(\frac{1}{2}\phi\right)$$

تمرین: رابطه بالا را اثبات کنید.

از طرفی با توجه به شکل $u_2 = 2V\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)$ می‌باشد بنابراین



$$\cancel{\vec{V} = V\hat{x}}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{V}$$

$$|u_2| = \sqrt{v'^2_2 + V^2 + 2 v'_2 V \cos\phi}$$

$$\frac{\frac{1}{2} m_2 u_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 u^2}$$

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} m_2 \left(2V\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)\right)^2}{\frac{1}{2} m_1 u^2} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\phi\right)$$

و پس از رابطه $E_1 + E_2 = E_0$ می‌توان انرژی E_1 را نیز حساب کرد.

به طور کلی در برخورد الاستیک روابط میان متغیرهای دو چارچوب به صورت زیر هستند

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \gamma} \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \phi)$$

$$\tan\theta = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\cot\left(\frac{1}{2}\phi\right) \qquad \frac{E_2}{E_0} = \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\phi\right)$$

که $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$ می‌باشد.