# آمار و احتمالات مهندسی

# احتمالات شرطی و نابستگی

دکتر بهناز بیگدلی

دانشکده مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی شاهرود

# ساختار درس

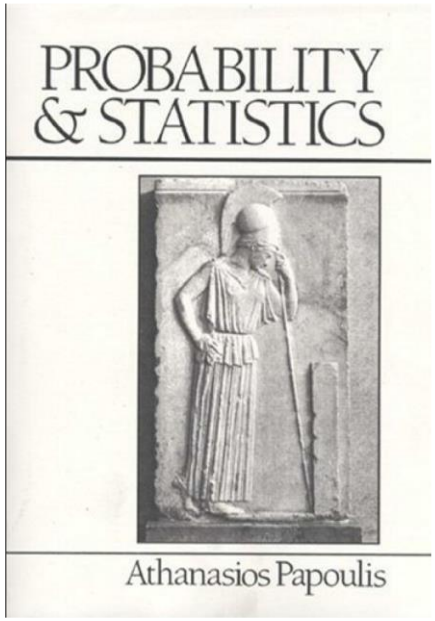
## نحوه ارزیابی

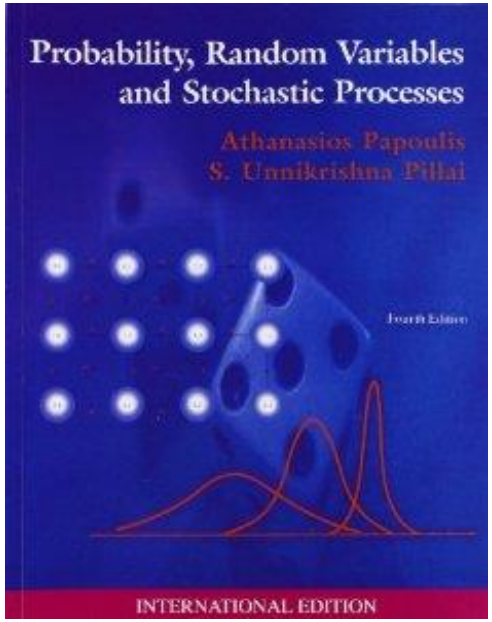
امتحان پایان ترم (۱۴)

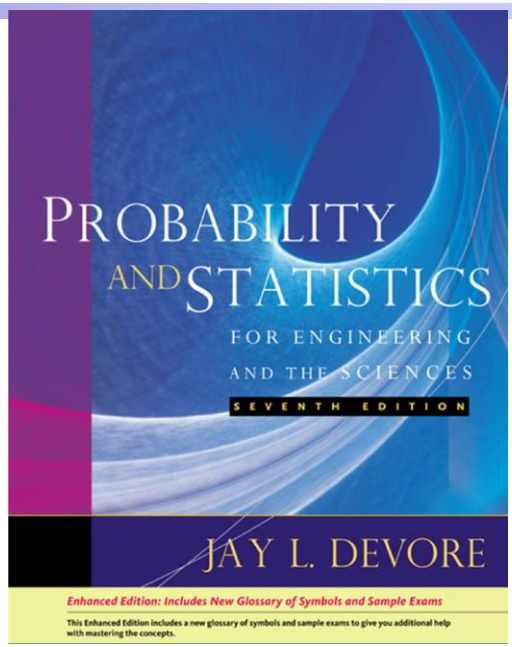
امتحان میان ترم (۴)

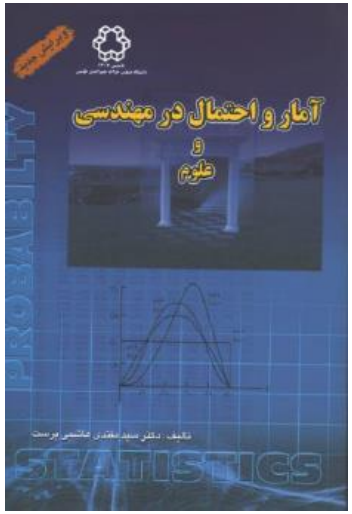
تمرینات و کوئیزها (۲)

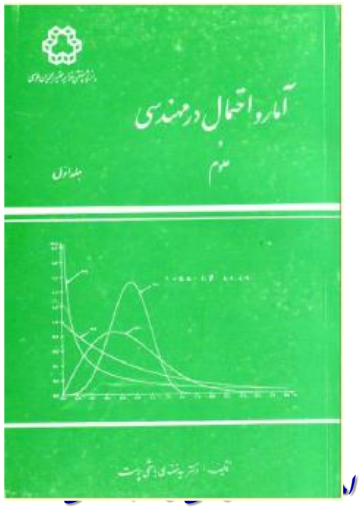
# منابع


PROBABILITY
& STATISTICS
Athanasios Papoulis


Probability, Random Variables
and Stochastic Processes
Athanasios Papoulis
S. Unnikrishna Pillai
Fourth Edition
INTERNATIONAL EDITION


PROBABILITY
AND STATISTICS
FOR ENGINEERING
AND THE SCIENCES
SEVENTH EDITION
JAY L. DEVORE
Enhanced Edition: Includes New Glossary of Symbols and Sample Exams
This Enhanced Edition includes a new glossary of symbols and sample exams to give you additional help with mastering the concepts.


آمار و احتمال در مهندسی
و
علوم


آمار و احتمال در مهندسی

# فهرست و عناوین درس

I. بخش اول: آمار مقدماتی (توصیفی)

1. آمار مقدماتی
2. اندازه‌گیری پراکندگی، گشاورها، چولگی و کشیدگی
3. برازش خط و منحنی بر داده‌ها
4. توزیع‌های دو بعدی و ضریب همبستگی

II. احتمال

1. احتمال و فضای نمونه
2. فضای نمونه با عناصر متعدد
3. احتمالات شرطی و نابستگی
4. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی
5. توزیع‌های گسسته
6. توزیع‌های پیوسته مهم
7. نظریه برآورد
8. آزمون‌های فرض

# احتمالات شرطی و نابستگی

## فهرست مطالب این فصل:

۱- احتمال شرطی
۲- نابستگی یا مستقل بودن
۳- قضیه فرمول بیز (قانون اول)
۴- قضیه بیز (قانون دوم)
۵- آزمایش برنولی
۶- چند رابطه مهم

# احتمال شرطی

✓ احتمال شرطی پیشامد $A$ به شرط وقوع پیشامد $B$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B)>0$$

# احتمال شرطی

✓ نکته اگر $P(A) \neq 0$ از $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ نتیجه می‌شود که:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

✓ اگر $P(B) = 0$ باشد نتیجه می‌شود که $P(A \cap B) = 0$ در این صورت $P(A|B)$ تعریف نشده است.

# احتمال شرطی

✓ مثال: یک ظرف شامل ۱۰ مهره سفید و ۵ مهره قرمز و ۱۰ مهره سیاه است. یک مهره به تصادف از ظرف بیرون می‌کشیم و مشاهده می‌کنیم سیاه نیست. حساب کنید احتمال اینکه قرمز باشد چقدر است؟

✓ جواب: اگر $R$ پیشامد وقوع مهره قرمز باشد و $B'$ پیشامد سیاه نبودن باشد مهره باشد، داریم:

$$P(B') = \frac{15}{25}, \qquad P(R \cap B') = P(R) = \frac{5}{25}$$

$$P(R|B') = \frac{P(R \cap B')}{P(B')} = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{1}{3}$$

# احتمال شرطی

✓ اگر پیشامدهای $A_1$، $A_2$، ...، $A_k$ دوبه دو مجزا باشند. احتمال شرطی $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ به شرط $B$ برابر با:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i \mid B\right] = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap B\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

# نابستگی یا مستقل بودن

✓ دو پیشامد $A$ و $B$ را مستقل گوییم، اگر رخ داد یکی تأثیری در دیگری نداشته باشد. یعنی $P(A|B)=P(A)$ و $P(B|A)=P(B)$ ,

بنابراین $A$ و $B$ مستقل‌اند اگر:

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)=P(A).P(B)$$

# مفهوم نابستگی در احتمالات شرطی

✓ دو پیشامد $A$ و $B$ را مستقل گوییم،

$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$$

# قضیه فرمول بیز (قانون اول)

✓ (قانون جمع احتمالات) فرض کنید پیشامدهای $A_1$، $A_2$، ...، $A_k$ پیشامدهای دو به دو مجزا از هم و اجتماع آنها $S$ باشد و $A$ یک پیشامد دلخواه از $S$ باشد آنگاه:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(A|A_i)P(A_i)$$

برهان:

$$A\cap S=A \quad , \quad \bigcup_{i=1}^{k}A_i=S$$

$$A=A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=A\cap(A_1\cup A_2\cup....\cup A_k)$$

$$=(A\cap A_1)\cup(A\cap A_2)\cup....\cup(A\cap A_k)$$

پیشامدهای طرف راست رابطه اخیر دوبه دو مجزا هستند. طبق اصول قبل

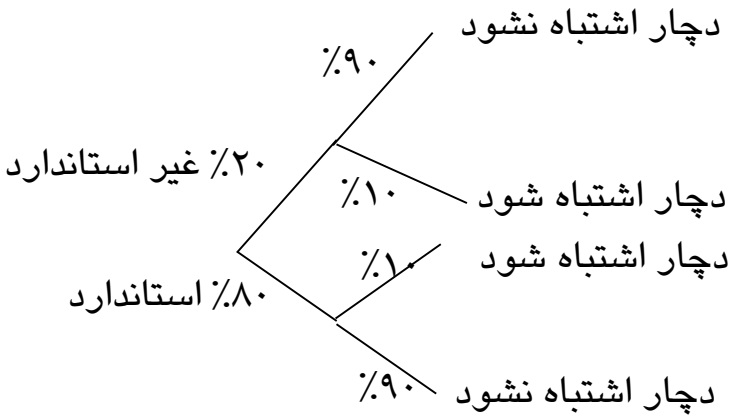
$$P(A)=P(A\cap A_1)+P(A\cap A_2)+....+P(A\cap A_k)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}P(A\cap A_i)=\sum_{i=1}^{k}P(A|A_i)P(A_i)$$

# قضیه فرمول بیز (قانون اول)

- **مثال**: به طور کلی ۲۰٪ از لیوان‌های بلور تولید شده در یک کارخانه غیر استاندارد می‌باشد. هریک از اقلام پس از تولید کنترل شده و به دو گروه استاندارد و غیر استاندارد طبقه‌بندی می‌شود. اگر مامور کنترل در تشخیص هر یک از دو گروه ۱۰٪ اشتباه کند، چه درصدی از لیوان‌ها را استاندارد طبقه‌بندی خواهد نمود؟

- **جواب**: نمودار درختی مساله به شکل زیر است.




$$P(A) = P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) = 0.2 \times 0.1 + 0.8 \times 0.9 = 0.74$$

# قضیه بیز (قانون دوم)

✓ اگر پیشامدهای $A_1$، $A_2$، ...، $A_k$ دو به دو مجزا و $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$ باشد احتمال شرطی هریک از $A$ ها به شرط اتفاق پیشامد $A$ از $S$ برابر با:

$$P[A_i \mid A] = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)}$$

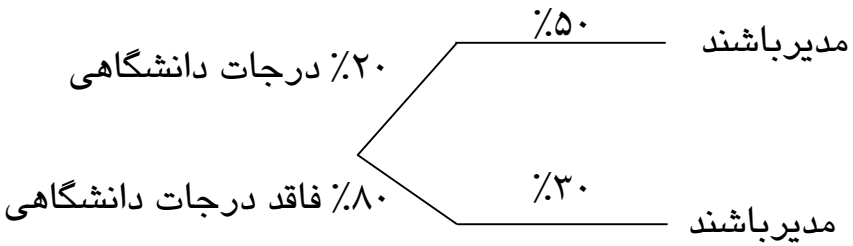
✓ با توجه به فرمول قضیه قبل

$$P[A_i \mid A] = \frac{P(A \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A \mid A_i)P(A_i)}$$

# قضیه بیز (قانون دوم)

- ✓ **مثال**: شرکتی ۸۰۰ کارمند دارد، ۲۰٪ دارای درجات دانشگاهی ولی نیمی از آنها در سیستم‌های غیر مدیریتی کار می‌کنند. ۳۰٪ کارمندان بدون درجات دانشگاهی در سمت‌های مدیریتی کار می‌کنند. اگر یکی از کارمندان که به طور تصادفی انتخاب شده است، مدیر باشد، احتمال آنکه دانشگاهی باشد کدام است؟

- ✓ **جواب**: نمودار درختی مساله به شکل زیر است.




$$P(\text{دانشگاهی}|\text{مدیر}) = \frac{P(\text{دانشگاهی و مدیر})}{P(\text{مدیر باشد})} = \frac{0.5 \times 0.2}{0.5 \times 0.2 + 0.8 \times 0.3} = 0.29$$

# قضیه

- ✓ دو پیشامد $A$ و $B$ را نابسته باشد، آنگاه دو پیشامد $A$ و $B'$ را نابسته می‌باشد.

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B)$$

$$P(A) \times \{1 - P(B)\} = P(A) \times P(B')$$

- ✓ که نشان می دهد که دو پیشامد $A$ و $B'$ را نابسته می‌باشد.

# آزمایش برنولی

✓ در آزمایش‌های برنولی فضا نمونه را به دو قسمت تقسیم می‌کنند.

$$\Omega = \{S, F\}$$

پیروزی شکست

# آزمایش برنولی

- در آزمایشی که با احتمال $p$ نتیجه $S$ و با احتمال $q$ نتیجه $F$ به دست می‌آید($p+q=1$) احتمال رخ دادن $r$ بار $S$ و $n-r$ بار $F$ در $n$ مرتبه تکرار آزمایش برابر است با:

$$P(F\text{ بار } n-r, S\text{ بار } r) = C_n^r p^r q^{n-r}$$

- نکته: نتیجه آزمایش در هر بار مستقل از دفعات دیگر است.

# آزمایش برنولی

✓ مثال: احتمال بدست آوردن حداقل ۴ بار مجموع ۷ در ۵ بار پرتاب یک جفت تاس چقدر است؟

✓ جواب: در شش حالت مجموع ۷ می‌شود.

$$P(\text{مجموع } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P = \sum_{i=4}^{5} C_5^i \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{5-i}$$

# آزمایش برنولی

✓ تعداد شکست‌ها قبل از رسیدن به r امین پیروزی=Y

$$P(Y=k) = P\left(\text{شکست } k \text{ , } S \text{ بار } r-1\right) \times \text{یک پیروزی} = \left[C_{k+r-1}^{r-1} p^{r-1} q^{k}\right] \times p$$

احتمال اینکه k بار شکست بخوریم تا به r امین پیروزی برسیم.

$$P(Y=k) = C_{k+r-1}^{r-1} p^{r} q^{k}$$

# آزمایش برنولی

✓ مثال: احتمال اینکه شخصی بیشتر از نه بار بازی رولت روسی را انجام دهد و زنده بماند چقدر است؟

✓ جواب:

$$P(Y \geq 10), \qquad r = 1, \qquad = \sum_{k=10}^{\infty} C_{k+r-1}^{r-1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \times \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}{1 - \frac{5}{6}} = 0.16$$

# تعمیم آزمایش برنولی

✓ یک آزمایش تنها منتهی به $P$ نتیجه به صورت $A_1$، $A_2$، ...، $A_p$ می‌شود، بطوریکه :

$$P(A_i) = P_i, \qquad \sum_{i=1}^{p} P_i = 1$$

این آزمایش $N$بار بطور نابسته تکرار می‌شود، احتمال اینکه $r_1$ بار $E_1$ و $r_2$ بار $E_2$ و $r_p$بار $E_p$ رخ دهد، برابر است با:

$$P(E_p \text{ بار } r_p, \ldots, E_2 \text{ بار } r_2, E_1 \text{ بار } r_1) = C_N^{r_1, r_2, \ldots, r_p} P_1^{r_1} P_2^{r_2} \ldots P_p^{r_p}$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_p = N$$

# تعمیم آزمایش برنولی

✓ مثال: در ۱۰ بار پرتاب یک تاس احتمال اینکه:

$E_1 = \{1,2\}$ بار 2, $P_1 = \frac{1}{3}$

$E_2 = \{3,4\}$ بار 3, $P_2 = \frac{1}{3}$

$E_3 = \{5\}$ بار 4, $P_3 = \frac{1}{6}$

$E_4 = \{6\}$ بار 1, $P_4 = \frac{1}{6}$

✓ جواب:

$$\frac{10!}{2! \times 3! \times 4! \times 1!} \times (\frac{1}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^3 \times (\frac{1}{6})^4 \times (\frac{1}{6})^1 = 0.0066$$

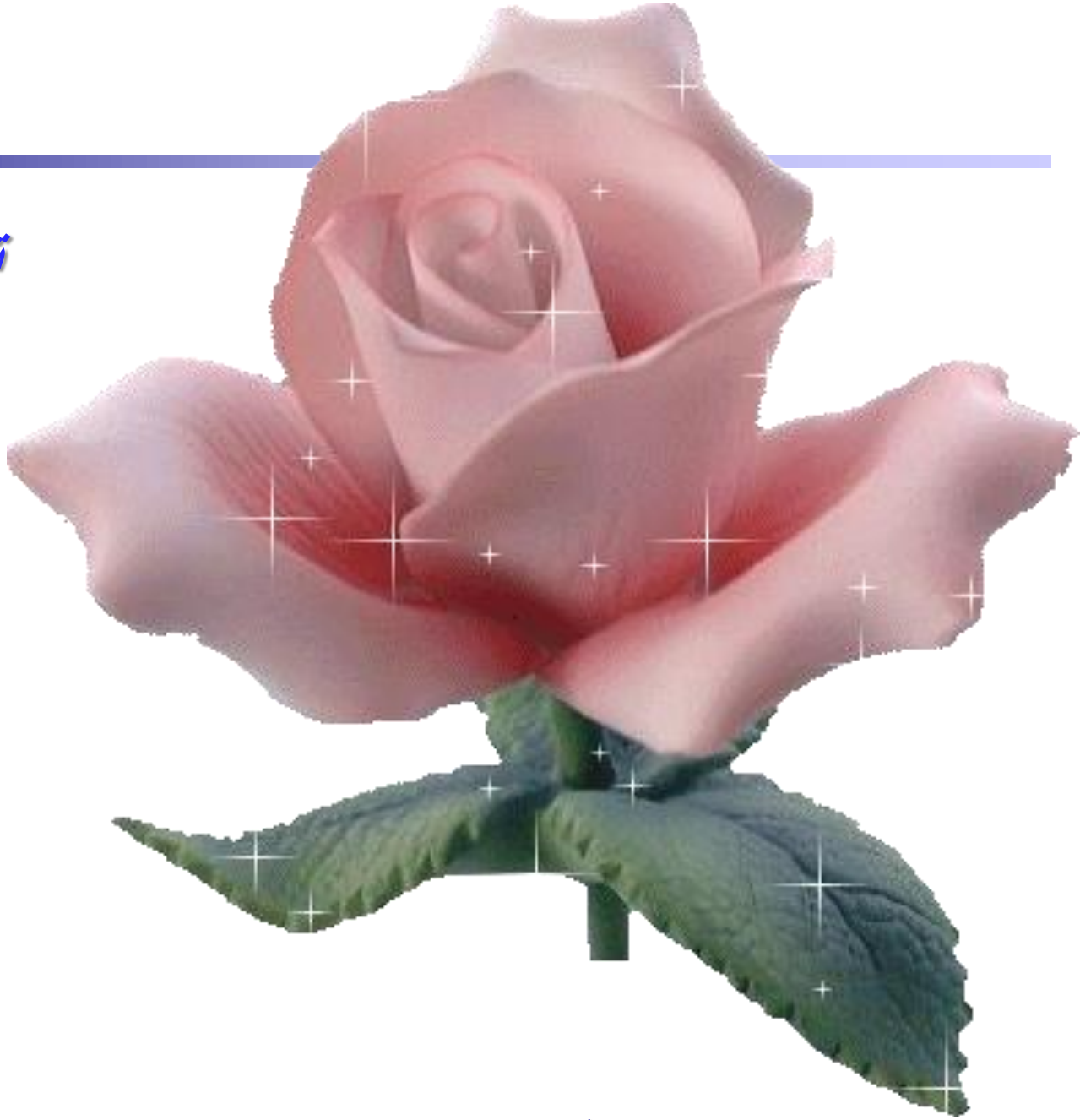
# چند رابطه مهم

✓ می‌توان گفت

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B) \qquad P(A|B) = 1 - P(A'|B)$$

$$P(B'|A) = 1 - P(B|A) \qquad P(B|A) = 1 - P(B'|A)$$

✓ ولی نمی‌توان گفت

$$P(A|B') \neq 1 - P(A|B) \qquad P(B|A') \neq 1 - P(B|A)$$

## تشکر از توجه شما