آمار و احتمالات مهندسی

احتمال و فضای نمونه

دکتر بهناز بیگدلی

دانشکده مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی شاهرود

ساختار درس

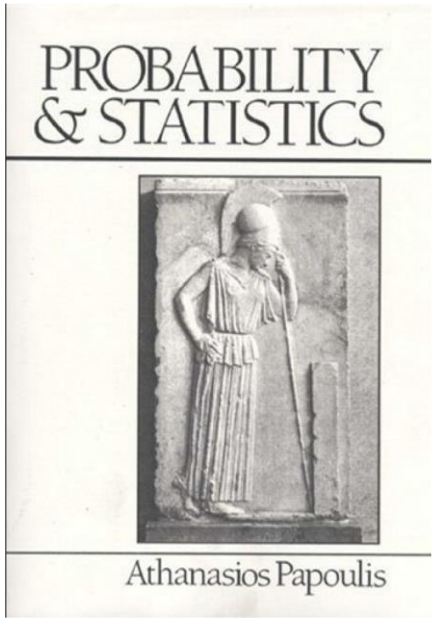
نحوه ارزیابی

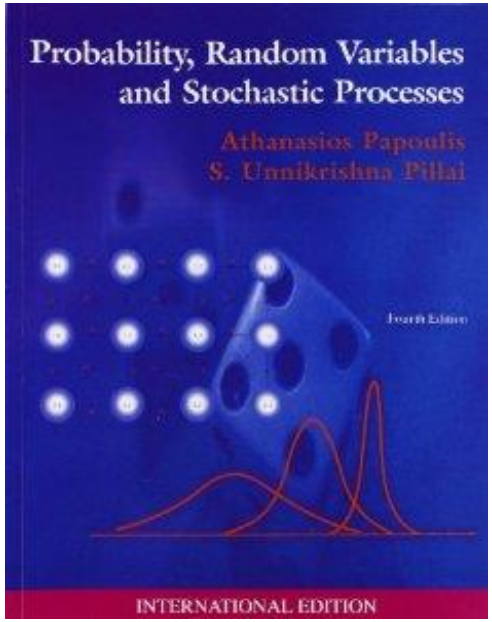
امتحان پایان ترم (۱۴)

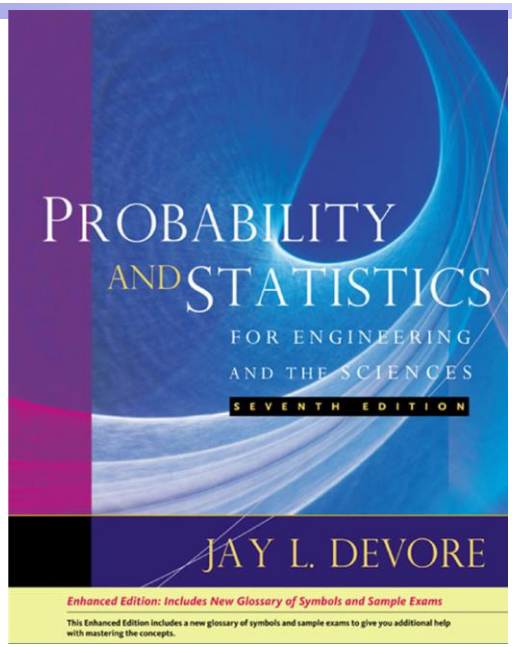
امتحان میان ترم (۴)

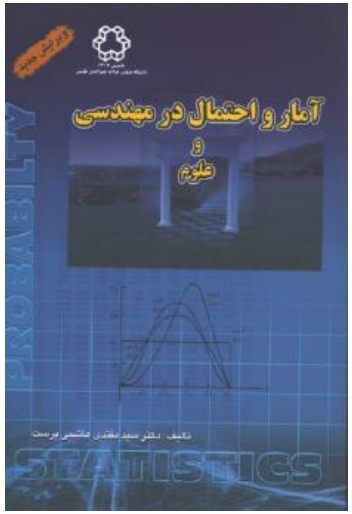
تمرینات و کوئیزها (۲)

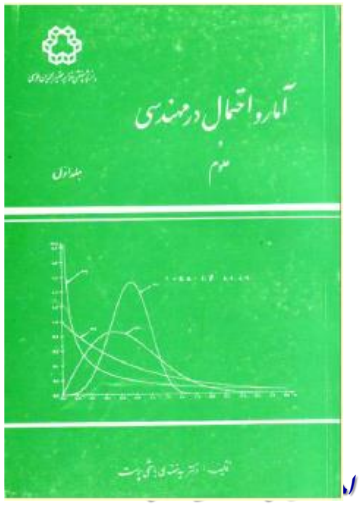
منابع


PROBABILITY
& STATISTICS
Athanasios Papoulis


Probability, Random Variables
and Stochastic Processes
Athanasios Papoulis
S. Unnikrishna Pillai
Fourth Edition
INTERNATIONAL EDITION


PROBABILITY
AND STATISTICS
FOR ENGINEERING
AND THE SCIENCES
SEVENTH EDITION
JAY L. DEVORE
Enhanced Edition: Includes New Glossary of Symbols and Sample Exams
This Enhanced Edition includes a new glossary of symbols and sample exams to give you additional help with mastering the concepts.


آمار و احتمال در مهندسی
و
علوم


آمار و احتمال در مهندسی

فهرست و عناوین درس

I. بخش اول: آمار مقدماتی (توصیفی)

1. آمار مقدماتی
2. اندازه‌گیری پراکندگی، گشاورها، چولگی و کشیدگی
3. برازش خط و منحنی بر داده‌ها
4. توزیع‌های دو بعدی و ضریب همبستگی

II. احتمال

1. احتمال و فضای نمونه
2. فضای نمونه با عناصر متعدد
3. احتمالات شرطی و نابستگی
4. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی
5. توزیع‌های گسسته
6. توزیع‌های پیوسته مهم
7. نظریه برآورد
8. آزمون‌های فرض

احتمال و فضای نمونه

فهرست مطالب این فصل:

۱- فضای نمونه

۲- فضای نمونه و پیشامد

۳- تابع احتمال

۴- احتمالات در فضاهای نمونه گسسته

۵- قوانین و قضایای احتمال

فضای نمونه

✓ تعریف آزمایش تصادفی:

آزمایشی است که به نتایج مختلف مانند W_1 و W_2 و ... منجر شود W_i را برآمدهای (Outcome) حاصل از آزمایش گفته می‌شود.

✓ فضای نمونه(Sample Space):

مجموعه‌ای است مانند Ω که متشکل از کلیه برآمدهای یک آزمایش تصادفی است.

$$\Omega = \{ H, TH, TTH, \ldots \}$$

فضای نمونه

- ✓ مجموعه‌ای از همه برآمدهای ممکن یک تجربه تصادفی را فضای نمونه می‌گویند. و آن را با علامت Ω نمایش می‌دهند.

- ✓ یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا شیر ظاهر شود. فضای نمونه را بنویسید.

- ✓ که Ω گسسته و نامتناهی شمارا است.

$$\Omega = \{ H, TH, TTH, \ldots \}$$

فضای نمونه

✓ مثال:

۱- آزمایش تصادفی پرتاپ یک سکه

$$\Omega = \{H, T\}$$

۲- آزمایش تصادفی پرتاپ یک سکه و تاس با هم

$$\Omega = \{(1,H),(2,H),(3,H),(4,H),(5,H),(6,H),$$
$$(1,T),(2,T),(3,T),(4,T),(5,T),(6,T)\}$$

۳- آزمایش تصادفی انتخاب یک نقطه داخل دایره‌ای به شعاع واحد

$$\Omega = \{(x,y)|x^2 + y^2 < 1\}$$

فضای نمونه

✓ اگر تعداد عناصر فضای نمونه قابل شمارش باشد، فضای نمونه گسسته خواهیم داشت.

$$\Omega = \{H, T\}$$

✓ اگر تعداد عناصر فضای نمونه قابل شمارش نباشد، فضای نمونه پیوسته خواهیم داشت.

$$\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$$

پیشامد

✓ تعریف پیشامد (Event):

مجموعه‌ای است مانند E که زیرمجموعه فضای نمونه Ω است.

$$E = \{some\ variable\} \subset \Omega$$

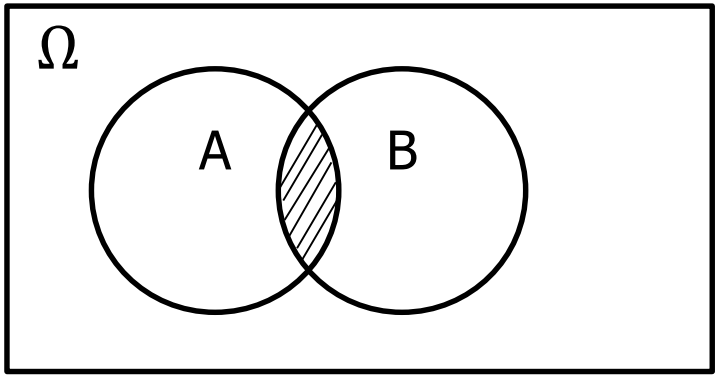
✓ رخ دادن یک پیشامد یعنی منجر شدن آزمایش تصادفی به یکی از عناصر Ω

- پیشامد قطعی: Ω
- پیشامد غیر ممکن: ϕ

پیشامد

✓ اشتراک دو پیشامد:

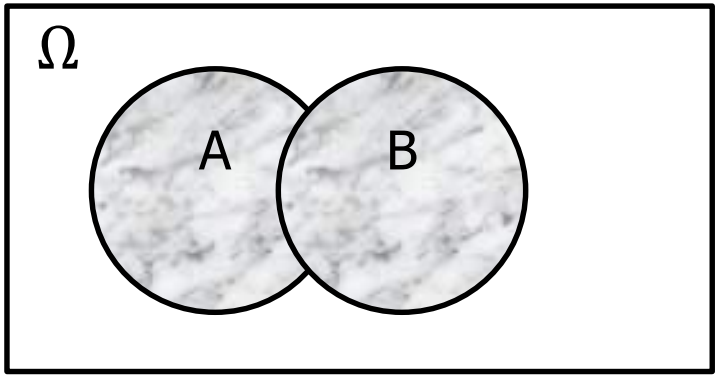
این پیشامد را با $A \cap B$ نمایش می‌دهیم و به معنای وقوع همزمان هر دو پیشامد است.



پیشامد

✓ اجتماع دو پیشامد:

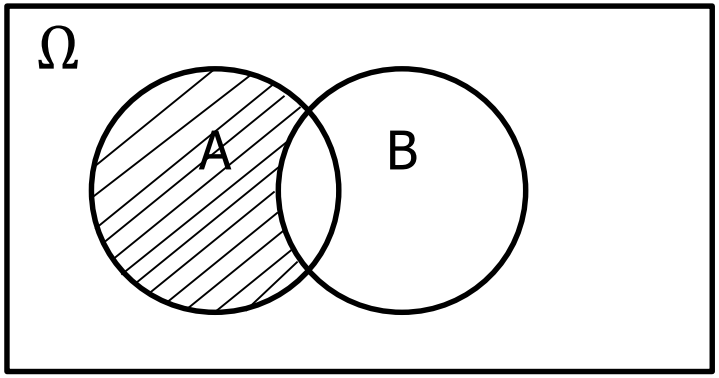
این پیشامد را با $A \cup B$ نمایش می‌دهیم و به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد است.



پیشامد

✓ تفاضل دو پیشامد:

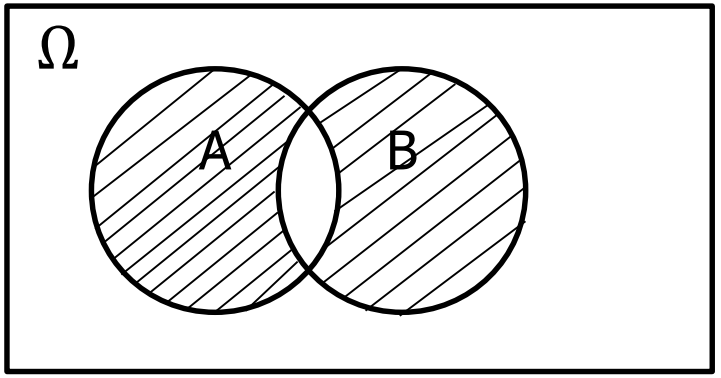
این پیشامد را با $A - B$ نمایش می‌دهیم و به معنای وقوع فقط A و نه B است.



پیشامد

✓ تفاضل متقارن پیشامد:

این پیشامد را با $A\Delta B$ نمایش می‌دهیم و به معنای وقوع فقط یکی از دو پیشامد است.

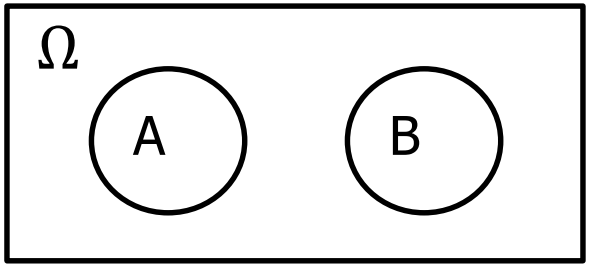


$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

پیشامد

✓ دو پیشامد ناسازگار یا جدا (Disjoint):

دو پیشامد را جدا گوییم هرگاه اشتراک آنها تهی باشد(رخ دادن توام آنها امکان پذیر نیست).

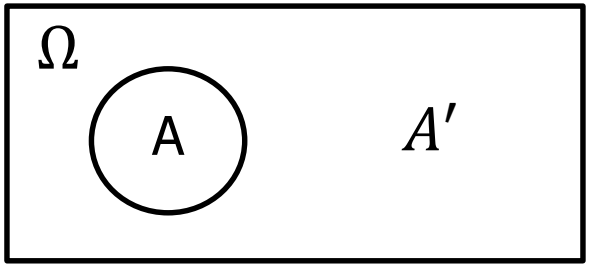


$$A \cap B = \phi$$

پیشامد

✓ مکمل پیشامد:

این پیشامد را با A' نمایش می‌دهیم.



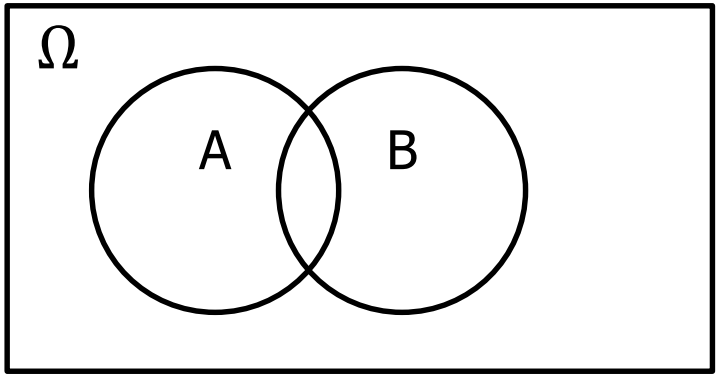
$$A \cap A' = \phi$$

$$A \cup A' = \Omega$$

پیشامد

✓ مکمل پیشامد:

قوانین پیشامدهای مکمل.



$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

تابع احتمال

✓ تعریف احتمال:

✓ تابعی است مانند P که به هر پیشامد، عددی حقیقی مثل P(E) را با سه شرط زیر نسبت می‌دهد.

غیرمنفی بودن

$$P(E) \geq 0$$

نرمالیزه

$$P(\Omega) = 1$$

n می‌تواند بینهایت باشد

$$E_i \cap E_j = \phi \Rightarrow P\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots\} = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

قوانین و قضایای احتمال

۱- اگر نتیجه آزمایش بتواند به صورت یکی از N برآمد مختلف هم شانس باشد، و اگر n تا از این برآمدها با هم پیشامد A را تشکیل دهند، آنگاه احتمال پیشامد A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

اثبات:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \qquad E_i = \{\omega_i\}, i = 1,2, \dots, N$$

$$P(\Omega) = 1 \rightarrow \ P(E_1 \cup E_2 \dots \cup E_N) = 1 \rightarrow NP(E_i) = 1 \rightarrow P(E_i) = \frac{1}{N}$$

$$P(A) = P(E_1 \cup E_2 \dots \cup E_N) = P(E_1) + P(E_2) + .. + P(E_n) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N} = \frac{n}{N}$$

قوانین و قضایای احتمال

۲- اگر پیشامد A و A' را داشته باشیم خواهیم داشت:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} A \cap A' = \phi \\ A \cup A' = \Omega \end{array}\right\} \rightarrow P(\Omega) = P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(A')$$

قوانین و قضایای احتمال

۳- احتمال یک پیشامد تهی صفر است.

$$P(\phi) = 0$$

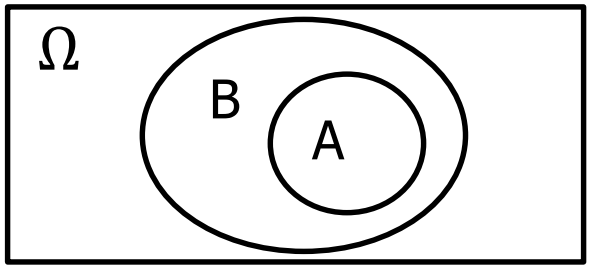
اثبات:

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \phi) = P(\Omega) + P(\phi) = 1 \rightarrow P(\phi) = 0$$

قوانین و قضایای احتمال

۴- اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ی Ω باشند و $A \subseteq B$ باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$P(A) \leq P(B)$$



اثبات:

$$B = A \cup (B \cap A') \rightarrow P(B) = P(A) + P(B \cap A') \rightarrow P(B) \geq P(A)$$

قوانین و قضایای احتمال

۵-برای هر پیشامد A خواهیم داشت:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

اثبات:

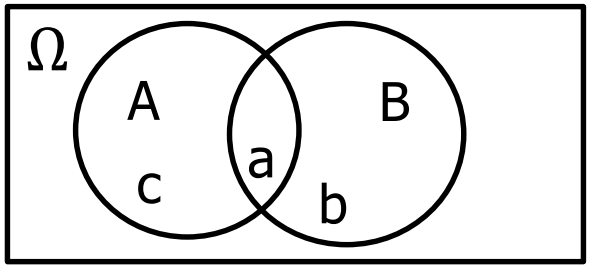
با استفاده از قضیه ۴ خواهیم داشت:

$$\phi \subseteq A \subseteq \Omega \rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

قوانین و قضایای احتمال

۶-برای دو پیشامد A و B خواهیم داشت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



اثبات:

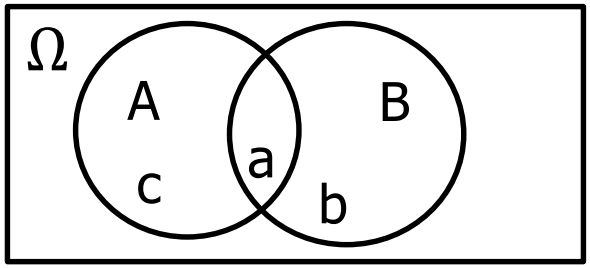
$$P(A \cap B) = a \qquad P(A' \cap B) = b \qquad P(A \cap B') = c$$

$$P(A \cup B) = a + b + c = (a + c) + (a + b) - a = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قوانین و قضایای احتمال

۷-برای دو پیشامد A و B خواهیم داشت:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$



اثبات:

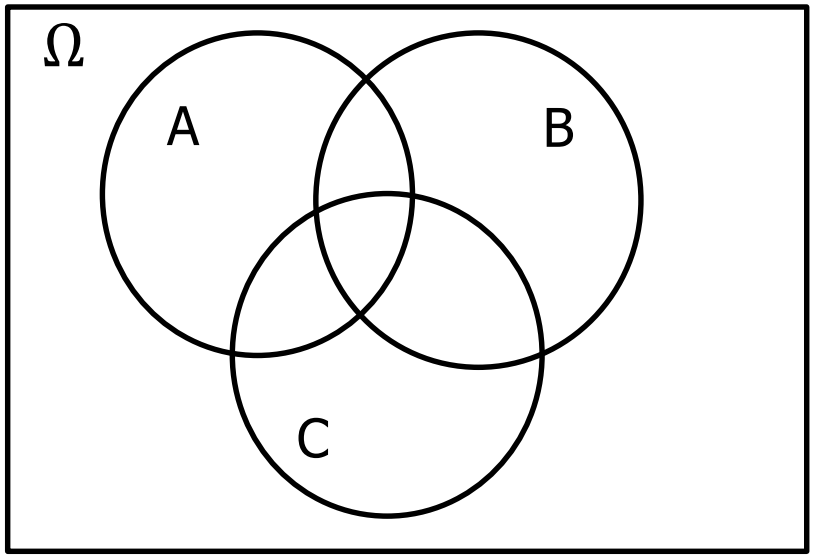
$$P(A \cap B) = a \qquad P(A \cap B') = c$$

$$P(A \cap B') = c = (a + c) - a = P(A) - P(A \cap B)$$

قوانین و قضایای احتمال

۸-برای سه پیشامد A و B و C خواهیم داشت:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



قوانین و قضایای احتمال

۹- دو پیشامد مستقل:

دوپیشامد A, B را مستقل گویند هرگاه وقوع یکی تاثیری در وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

قوانین و قضایای احتمال

۱۰- سه پیشامد مستقل:

سه پیشامد A, B, C را مستقل گویند هرگاه شرایط زیر همگی برقرار باشد.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

قوانین و قضایای احتمال

۱۱- قوانین دمورگان

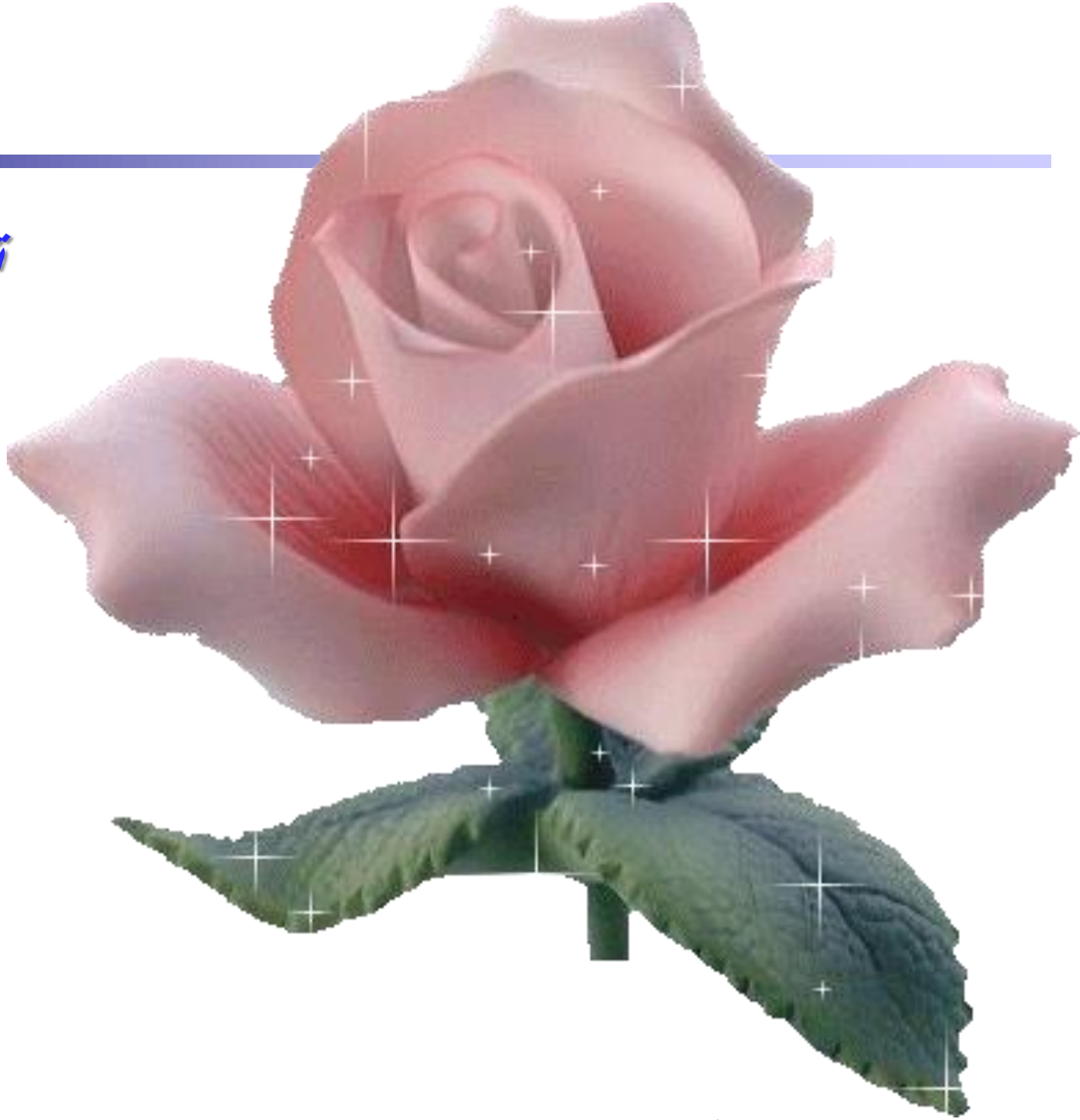
$$P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i'] = P[\bigcap_{i=1}^{n} A_i]'$$

$$P[\bigcap_{i=1}^{n} A_i'] = P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]'$$

قوانین و قضایای احتمال

۱۱- قوانین دمورگان

برای دو پیشامد

$$\begin{cases} P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) \\ P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) \end{cases}$$

تشکر از توجه شما