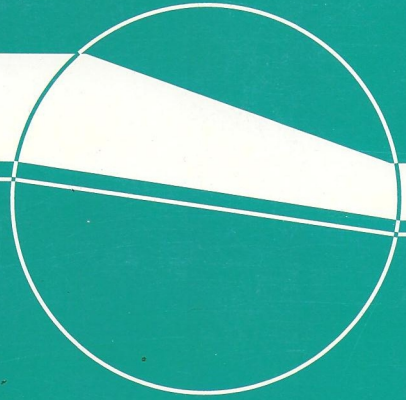


وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



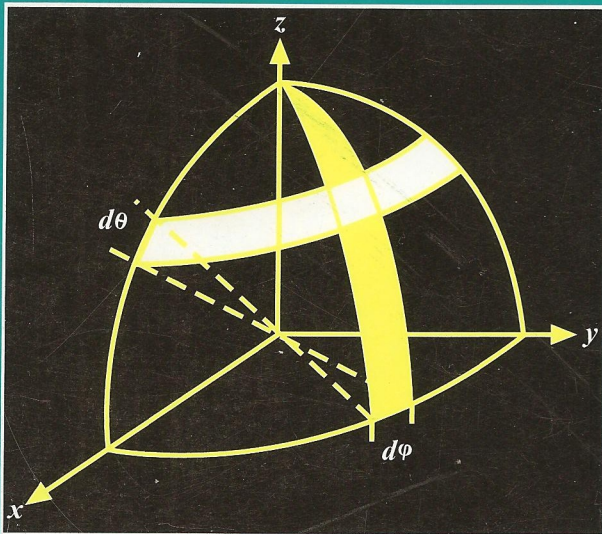
مرکز نشر دانشگاهی

جورج آرفکن

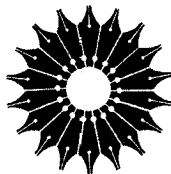


روشهای ریاضی در فیزیک

جلد اول



ترجمه اعظم پورقاسی



روشهای ریاضی در فیزیک

جلد اول

جورج آرفکن

ترجمه اعظم پورقاضی

مرکز نشر دانشگاهی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



Mathematical Methods for Physicists

Third Edition

George Arfken

Academic Press, Inc., 1985

روشهای ریاضی در فیزیک

(جلد اول، ویراست سوم)

تألیف جورج آرفکن

ترجمه اعظم پورقاضی

ویراسته بهرام معلمی
نسخه پرداز: زهرا رحیمدل قادر
حروفچین: پروین حاج اسماعیل زنجانی
ناظر چاپ: خشایار نصیری منش
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۷۷
چاپ دهم ۱۳۹۰
تعداد ۵۰۰۰
لیتوگرافی: توس
چاپ و صحافی: نقش نیزار
۱۰۶۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه روی سینما سپیده، پاساژ خیبری، تلفن: ۶۶۴۱۰۶۸۶، ۶۶۴۰۸۸۹۱

فروش اینترنتی: www.bookiup.ir

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Arfken, George Brown

آرفکن، جورج براون، ۱۹۲۲ -

روشهای ریاضی در فیزیک / جورج آرفکن؛ ترجمه اعظم پورقاضی. — [ویراست ۳]. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۷ — ج.: مصور، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۹۱۴؛ فیزیک؛ ۸۳)

ISBN 978-964-01-8158-4 (دوره)

ISBN 978-964-01-0914-4 (ج ۱)

ISBN 978-964-01-0651-8 (ج ۲)

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا.

عنوان اصلی:

ج. ۱ (چاپ دهم: ۱۳۹۰).

۱. ریاضیات. ۲. فیزیک ریاضی. الف. پورقاضی، اعظم، ۱۳۲۵ - مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.

۵۱۵/۱

QA۳۷/۲/۳۸۹

۱۳۷۷

کتابخانه ملی ایران

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار ویراست سوم
۲	پیشگفتار ویراست دوم
۳	پیشگفتار ویراست نخست
۴	۱. تحلیل برداری
۴	۱-۱ تعریفها، رهیافت بنیادی
۱۲	۲-۱ تعریفهای جامع
۱۹	۳-۱ ضرب اسکالر یا نقطه‌ای
۲۶	۴-۱ ضرب برداری
۳۶	۵-۱ ضرب سه‌گانه اسکالر، ضرب سه‌گانه برداری
۴۶	۶-۱ گرادیان ∇
۵۲	۷-۱ دیورژانس $\nabla \cdot$
۵۷	۸-۱ ناو $\nabla \times$
۶۵	۹-۱ کاربردهای ∇ متوالی
۷۰	۱۰-۱ انتگرال‌گیری برداری
۷۸	۱۱-۱ قضیه گاوس
۸۳	۱۲-۱ قضیه استوکس
۸۷	۱۳-۱ نظریه پتانسیل
۱۰۱	۱۴-۱ قانون گاوس، معادله پواسون
۱۰۶	۱۵-۱ قضیه هلمهولتز
۱۱۴	مراجع

۱۱۵	۲. دستگاههای مختصات
۱۱۶	۱-۲ مختصات خمیده خط
۱۲۲	۲-۲ عملگرهای برداری دیفرانسیلی
۱۲۸	۳-۲ دستگاههای مختصات خاص-مختصات دکارتی قائم
۱۲۹	۴-۲ مختصات اشتوانهای دوار (ρ , φ , t)
۱۳۹	۵-۲ مختصات قطبی کروی (r , θ , φ)
۱۵۱	۶-۲ جداسازی متغیرها
۱۶۱	۳. تحلیل تانسوری
۱۶۱	۱-۳ مقدمه، تعریفها
۱۶۹	۲-۳ ادغام، ضرب مستقیم
۱۷۲	۳-۳ قاعده خارج قسمت
۱۷۴	۴-۳ شبه تانسورها، تانسورهای دوگان
۱۸۵	۵-۳ دو تاییها
۱۹۰	۶-۳ نظریه کشسانی
۲۰۳	۷-۳ هموردایی لورنتسی معادلات ماکسول
۲۱۴	۸-۳ تانسورهای غیر دکارتی، مشتق گیری هموردا
۲۲۳	۹-۳ عملگرهای دیفرانسیلی تانسوری
۲۲۸	۴. دترمینانها، ماتریسها، و نظریه گروه
۲۲۸	۱-۴ دترمینانها
۲۳۹	۲-۴ ماتریسها
۲۶۲	۳-۴ ماتریسهای متعامد
۲۸۱	۴-۴ مختصات مایل
۲۸۶	۵-۴ ماتریسهای هرمیتی-ماتریسهای یکانی
۲۹۶	۶-۴ قطری کردن ماتریسها
۳۱۲	۷-۴ ویژه بردارها، ویژه مقدارها
۳۲۵	۸-۴ آشنایی با نظریه گروه
۳۳۲	۹-۴ گروههای گسسته
۳۴۲	۱۰-۴ گروههای پیوسته
۳۵۵	۱۱-۴ مولدها
۳۶۵	۱۲-۴ $SU(2)$ ، $SU(3)$ و ذرات هسته‌ای

۳۶۹	۴-۱۳ گروه همگن لورنتس
۳۷۵	مراجع
۳۷۸	۵. سریهای نامتناهی
۳۷۸	۵-۱ مفاهیم بنیادی
۳۸۳	۵-۲ آزمونهای همگرایی
۴۰۰	۵-۳ سریهای متناوب
۴۰۲	۵-۴ جبر سریها
۴۰۸	۵-۵ سری توابع
۴۱۴	۵-۶ بسط تایلور
۴۲۹	۵-۷ سری توانی
۴۴۰	۵-۸ انتگرالهای بیضوی
۴۴۸	۵-۹ اعداد برنولی، فرمولهای اویلر-مکلورن
۴۶۴	۵-۱۰ سریهای مجانبی یا نیم همگرا
۴۷۴	۵-۱۱ حاصلضربهای نامتناهی
۴۸۰	مراجع
۴۸۲	۶. تابعهای متغیر مختلط I
۴۸۳	۶-۱ جبر مختلط
۴۹۴	۶-۲ شرایط کوشی-ریمان
۵۰۰	۶-۳ قضیه انتگرال کوشی
۵۰۸	۶-۴ فرمول انتگرال کوشی
۵۱۵	۶-۵ بسط لوران
۵۲۵	۶-۶ نگاشت
۵۳۶	۶-۷ نگاشت همدیس
۵۳۸	مراجع
۵۴۰	۷. توابع متغیر مختلط II
۵۴۰	۷-۱ تکنیکها
۵۴۶	۷-۲ حساب مانده ها
۵۷۳	۷-۳ روابط پاشندگی

۵۸۲	۴-۷ روش تندترین کاهش
۵۹۳	مراجع
۵۹۴	پیوست ۱. صفرهای حقیقی یک تابع
۶۰۱	پیوست ۲. کوادراتور گاوسی
۶۱۱	فهرست راهنما

پیشگفتار ویراست سوم

مطالب زیادی که در ویراست سوم کتاب روشهای ریاضی در فیزیک افزوده یا در آنها بازنگری شده است، براساس تجربه ۱۵ ساله تدریس ویراست دوم این کتاب، پرسشهای دانشجویان دوره‌های جدید، رهنمودهای همکاران، منقدان و دانشجویان قبلی استوار بوده‌اند. این بازنگری تقریباً در تمام فصلهای کتاب صورت گرفته است؛ بسیاری فصلها به‌طور کامل از نو نوشته شده‌اند. در بیشتر فصلها مسئله‌های جدیدی آورده‌ایم که جملگی پیش از مطرح شدن در کتاب در کلاس درس آزموده شده‌اند. بخشهای جدیدی در خصوص تانسورهای غیردکارتی، نظریه پاشندگی، معادلات دیفرانسیلی مرتبه اول، کاربردهای عددی چندجمله‌ایهای چیبیشف، تبدیل سریع فوریه و توابع انتقال، به کتاب افزوده شده است.

در تمامی متن بر کاربردهای عددی و رابطه بین این روشهای ریاضی با محاسبه و آنالیز عددی بیشتر تأکید شده است.

شماری از مباحث از جمله عملگرهای هرمیتی، فضای هیلبرت و مفهوم تمامیت، با در نظر داشتن به دانشجویان فیزیک در سطح کارشناسی ارشد، به‌خصوص در فیزیک نظری، مطرح شده‌اند.

پیشگفتار ویراست دوم

ویراست دوم کتاب روشهای ریاضی در فیزیک حاوی تعدادی تغییر، مطالب افزوده شده و بهسازیهاست که براساس تجربه ویراست نخست و پیشنهادهای سازنده افراد صورت گرفته است. بازنگری اساسی در بخشهای مربوط به متغیرهای مختلط، تابع دلتای دیراک و توابع گرین انجام شده است. بخشهای تازه‌ای در خصوص مختصات مایل، سری فوریه-بسل و عملگر نردبانی تکانه زاویه‌ای افزوده شده است. ولی اکثر مطالب در چندین بخش در نظریه گروه است. این مطالب را می‌شد در یک فصل جداگانه تحت عنوان نظریه گروه ارائه کرد، ولی به نظر آمد که اضافه کردن آنها به فصل ۴ در باب ماتریسها چند مزیت دارد. با توجه به اینکه نظریه گروه را برحسب ماتریسها مطرح کرده‌ایم، این ترتیب به نظر منطقی‌تر آمد.

پیشگفتار ویراست نخست

دو درسی که مؤلف در طول چهارده سال گذشته در زمینهٔ ریاضیات برای فیزیک‌پیشگان تدریس کرده است، یکی در سطح کارشناسی و دیگری در سطح شروع تحصیلات تکمیلی، شالوده و اساس کتاب روشهای ریاضی برای فیزیک را تشکیل می‌دهد. هدف این کتاب ارائهٔ مباحثی ریاضی است که دانشجوی برای مطالعهٔ فیزیک در مراحل پایانی دورهٔ کارشناسی و ابتدای تحصیلات تکمیلی نیاز دارد، و نیز فراهم آوردن زمینه‌ای محکم برای کسانی است که به ادامهٔ مطالعات خود در ریاضیات و فیزیک نظری پیشرفته علاقه دارند. پیش‌نیاز مطالعهٔ این کتاب، تسلط بر حسابان و تمایل برای افزودن بر این پایهٔ ریاضی است.

این کتاب با در نظر گرفتن دو اصل تدوین شده است. نخست آنکه به صورتی تنظیم شود که مشوق مطالعهٔ مستقل باشد. در متن کتاب بارها به سایر بخشهای آن ارجاع داده شده است، ولی رعایت هیچ ترتیب مشخص و ثابتی برای مطالعهٔ فصل به فصل یا صفحه به صفحهٔ کتاب لازم نیست. خواننده خود، ریاضیات را زبانی زیبا و دقیق خواهد یافت. متأسفانه ظرافت و دقت غالباً به معنای دقت برای خبرگان و ابهام برای مبتدیان است. در نتیجه، در عین حال که برای نمایاندن زیبایی ذاتی ریاضیات تلاش شده است، گاهی دقت و ظرافت، با آکراه ولی به امید کشف انعطاف‌پذیری بیشتر و صراحت بیشتر برای دانشجویان، به عمد فدا شده است.

با خشکی و جدی بودن ریاضیات نیز با همین روحیه و برداشت برخورد شده است. بر این خشکی و جدیت تا آنجا تأکید نشده است که در راه کاربرد ریاضیات به صورت یک مانع ذهنی درآید. محدودیتها توضیح داده شده‌اند و در مقابل بهره‌گیری از روابط ریاضی غیرقابل درک و کور ریاضی، اخطار داده شده است.

دومین اصل اساسی که به آن توجه شده، تأکید بیشتر و بیشتری بر اصول فیزیکی در تمام متن و در ضمن مسئله‌ها، به منظور ترغیب دانشجویان و نمایش دادن ارتباط ریاضیات با علوم و مهندسی است.

این اصل، در گزینش مطالب و تشریح و تعمیم آنها نقش تعیین‌کننده‌ای داشت. مثلاً، مبحث معادلات دیفرانسیل دیگر به صورت یک رشته از راه‌حلهای برخوردار از مهارت برای معضلات انتزاعی تقریباً بی‌معنا نیست، بلکه حاوی پاسخها و خواص عمومی آن دسته از معادلات دیفرانسیلی است که دانشجوی بارها در توصیف طبیعت با آن مواجه می‌شود.

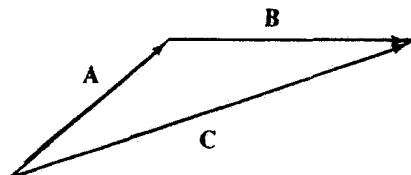
تحلیل برداری

۱-۱ تعریفها، رهیافت بنیادی

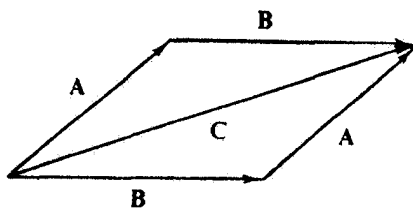
در علوم و مهندسی، بارها با کمیاتی، مانند جرم، زمان و دما روبه‌رو می‌شویم که فقط بزرگی دارند. این‌گونه کمیتهای را کمیتهای اسکالر (نرده‌ای) می‌خوانیم. در مقابل، به کمیتهای فیزیکی مهم دیگری نیز برمی‌خوریم که علاوه بر بزرگی، جهت نیز به آنها وابسته است. تغییر مکان، سرعت، شتاب، نیرو، تکانه و تکانه زاویه‌ای در این گروه دوم قرار می‌گیرند. کمیتهای واجد بزرگی و جهت را کمیتهای برداری می‌نامیم. در بررسیهای مقدماتی معمولاً بردار را به‌صورت کمیتهای دارای بزرگی و جهت تعریف می‌کنند. برای آنکه بردارها از اسکالرها تمیز داده شوند، کمیتهای برداری را با حروف سیاه، مانند \mathbf{V} ، نمایش می‌دهیم.

به عنوان اطلاعاتی تاریخی، خوب است به این نکته توجه کنیم که با وجود آنکه کمیتهای برداری که در بالا برشمردیم همگی از مکانیک گرفته شده‌اند، اما در راه تکوین مکانیک از تحلیل برداری استفاده نشده و در واقع تحلیل برداری در آن موقع هنوز به‌وجود نیامده بود. نیاز به تحلیل برداری با عنوان شدن نظریه الکترومغناطیس ماکسول و با قبول ماهیت برداری کمیتهایی نظیر میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی بروز یافت.

بردار را می‌توانیم برای راحتی به کمک پیکانی با طولی متناسب با بزرگی بردار نمایش دهیم.



شکل ۱-۱ قانون مثلثی جمع برداری.



شکل ۲-۱ قانون متوازی الاضلاع برای جمع برداری.

جهت پیکان، جهت بردار را نشان می‌دهد، سوی مثبت این جهت را نوک پیکان مشخص می‌کند. در این نمایش، جمع برداری

$$C = A + B \quad (1-1)$$

عبارت است از قرار گرفتن انتهای بردار **B** در نوک بردار **A**. در این صورت بردار **C** یا پیکانی نمایش داده می‌شود که انتهای **A** را به نوک **B** وصل می‌کند. این دستورالعمل، یعنی قانون مثلثی جمع، که معادله ۱-۱ را معنی می‌کند، در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. با کامل کردن متوازی الاضلاع، مطابق شکل ۲-۱ می‌بینیم:

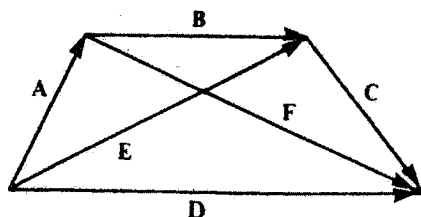
$$C = A + B = B + A \quad (2-1)$$

یعنی، جمع برداری تعویض پذیر است.
برای جمع سه بردار

$$D = A + B + C$$

مطابق شکل ۳-۱، می‌توانیم ابتدا **A** و **B** را با هم جمع کنیم

$$A + B = E$$



شکل ۳-۱ جمع برداری شرکت‌پذیر است.

سپس این مجموع به C افزوده می‌شود

$$D = E + C$$

به همین ترتیب، می‌توانیم ابتدا B و C را با هم جمع کنیم

$$B + C = F$$

آنگاه

$$D = A + F$$

در عبارت اصلی، این نکته را می‌توان چنین نمایش داد

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

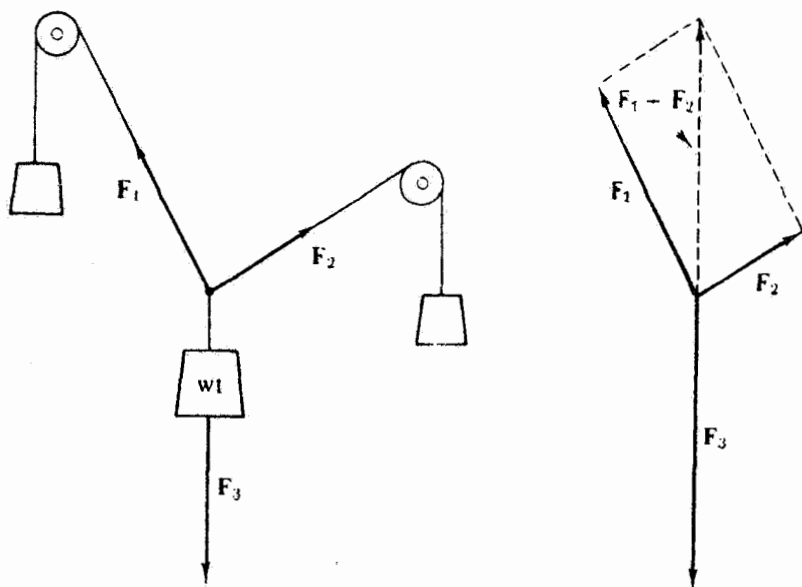
یعنی جمع برداری شرکت‌پذیر است.

وزنه‌ای که به دو ریسمان آویخته شده است، مثال فیزیکی صریحی برای قانون متوازی‌الاضلاع جمع به دست می‌دهد. اگر نقطه اتصال (O در شکل ۴-۱) در حالت تعادل باشد، جمع برداری دو نیروی F_1 و F_2 باید نیروی رو به پایین گرانی F_3 را خنثی کند. این مثال تأیید تجربی بی‌واسطه قانون متوازی‌الاضلاع جمع است.^۱

برای تفریق بردارها، ابتدا منفی یک بردار را به صورت برداری با همان بزرگی ولی در جهت عکس یا مخالف تعریف می‌کنیم. آنگاه

$$A - B = A + (-B)$$

۱. به عبارت دقیق، قانون متوازی‌الاضلاع جمع به صورت یک تعریف معرفی شد. تجربه نشان می‌دهد که اگر نیروها را بردار بگیریم، و آنها را از طریق قانون متوازی‌الاضلاع جمع کنیم، این شرط که در حالت تعادل نیروی برابند صفر است، برآورده می‌شود.



شکل ۴-۱ تعادل نیروها. $F_1 + F_2 = -F_3$

در شکل ۳-۱ داریم

$$A = E - B$$

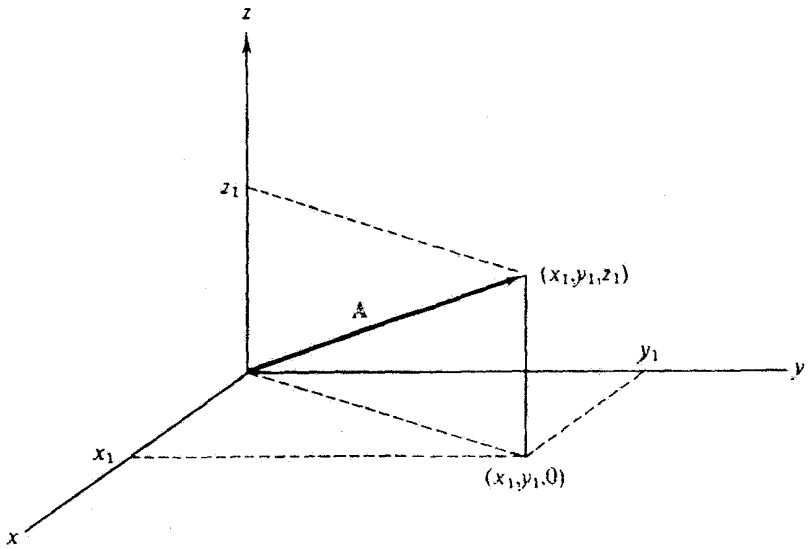
دقت کنید که با بردارها به صورت اشیایی هندسی مستقل از هر گونه دستگاه مختصات عمل کرده‌ایم. در واقع، ما هنوز دستگاه مختصاتی را معرفی نکرده‌ایم. در بخش بعد، این مفهوم استقلال از هر دستگاه مختصات مرجع را با شرح جزئیات تشریح خواهیم کرد.

نمایش بردار A به کمک پیکان، امکان دیگری فراهم می‌آورد. نقطه آغاز پیکان A (شکل ۵-۱) مبدأ، و نقطه پایان آن نقطه (x_1, y_1, z_1) است. بنابراین، اگر نقطه شروع پیکان را مبدأ بگیریم، انتهای مثبت آن را می‌توانیم با مختصات دکارتی نوک پیکان (x_1, y_1, z_1) مشخص کنیم.

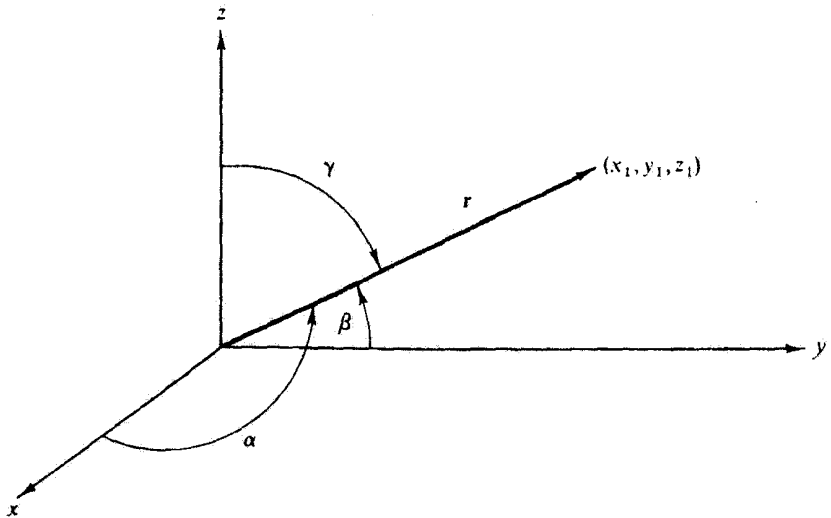
گرچه A می‌تواند نمایشگر هر گونه کمیت برداری (تکانه، میدان الکتریکی، و جز اینها) باشد، اما یک کمیت برداری با اهمیت خاص، یعنی جابه‌جایی از مبدأ تا نقطه (x_1, y_1, z_1) را با نماد خاص r نشان می‌دهیم. با این کار، می‌توانیم جابه‌جایی را یا با بردار r و یا با مجموعه (x_1, y_1, z_1) ، یعنی مختصات نقطه انتهایی آن نمایش دهیم

$$r \longleftrightarrow (x_1, y_1, z_1) \quad (3-1)$$

۱. می‌توانستیم از هر نقطه دیگری در چارچوب مرجع دکارتی شروع کنیم، مبدأ را برای راحتی اختیار کردیم.



شکل ۵-۱ مؤلفه‌های دکارتی.



شکل ۶-۱ کسینوسهای هادی.

بزرگی بردار \mathbf{r} را با r نمایش می‌دهیم و از شکل ۶-۱ می‌بریم که مابین مختصات نقطه انتهایی و بزرگی بردار رابطه زیر برقرار است:

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad y_1 = r \cos \beta, \quad z_1 = r \cos \gamma \quad (۴-۱)$$

$\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ را کسینوسهای هادی می‌گوییم که، α زاویهٔ بین بردار \mathbf{r} و محور مربوطه است، و برای β و γ هم چنین است. یک نکتهٔ دیگر هم دربارهٔ اصطلاحها بگوییم: کمیت‌های x ، y و z را مؤلفه‌های (دکارتی) \mathbf{r} یا تصویرهای \mathbf{r} می‌نامند.

اگر به همین نحو ادامه دهیم، هر بردار \mathbf{A} را می‌توانیم به مؤلفه‌هایش تجزیه (یا روی محورهای مختصات تصویر) کنیم و به دست آوریم

$$A_x = A \cos \alpha \quad (5-1)$$

که α زاویهٔ بین \mathbf{A} و محور x مثبت است. در اینجا نیز می‌توانیم بردار را یا به صورت یک تک کمیت \mathbf{A} و یا به صورت مؤلفه‌هایش (A_x, A_y, A_z) در نظر بگیریم. دقت کنید که زیرنویس x در A_x ، مؤلفهٔ x را نشان می‌دهد و نه وابستگی به متغیر x را. A_x می‌تواند تابعی از x ، y و z به صورت $A_x(x, y, z)$ باشد. انتخاب بین بهره‌گیری از \mathbf{A} یا از مؤلفه‌های آن (A_x, A_y, A_z) ، اساساً انتخابی است بین نمایش هندسی و نمایش جبری. به زبان نظریهٔ گروه (فصل ۴)، این دو نمایش یکرخیخت‌اند.

هر گونه نمایشی را که برایتان مناسبتر باشد به‌کار گیرید. نمایش هندسی "پیکانی در فضا" ممکن است به تجسم فضایی کمک کند. مجموعهٔ جبری مؤلفه‌ها معمولاً برای محاسبات جبری یا عددی دقیق مناسبتر است.

بردارها به دو صورت کاملاً متمایز در فیزیک مطرح می‌شوند. (۱) بردار \mathbf{A} می‌تواند نمایانگر تک نیرویی باشد که بر تک نقطه‌ای وارد می‌آید. نیروی گرانی که بر مرکز گرانی وارد می‌آید از این قبیل است. (۲) بردار \mathbf{A} ممکن است روی ناحیهٔ گسترده‌ای تعریف شده باشد، یعنی \mathbf{A} و مؤلفه‌هایش ممکن است تابع مکان باشند؛ به بیان دیگر $A_x = A_x(x, y, z)$ و به همین ترتیب الی‌آخر. سرعت شاره‌ای که در حجمی مفروض از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر تغییر می‌کند، و نیز میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نمونه‌هایی از این نوع به شمار می‌آیند. برخی مؤلفان بردارهایی را که روی ناحیه‌ای تعریف شده‌اند، میدان برداری می‌خوانند و به این ترتیب آنها را از نوع دیگر متمایز می‌کنند. مفهوم برداری که روی ناحیه‌ای تعریف شده و تابعی از مکان است، در بخش ۱-۲ و در بخشهای بعدی، در آنجا که از بردارها مشتق و انتگرال می‌گیریم، بسیار مهم خواهد بود.

در این مرحله بهتر است که بردار یکه‌ای در راستای هر یک از محورهای مختصات تعریف کنیم. فرض کنید \mathbf{i} برداری با بزرگی واحد در سوی مثبت راستای x ، \mathbf{j} برداری با بزرگی واحد در سوی مثبت راستای y و \mathbf{k} برداری با بزرگی واحد در سوی مثبت راستای z باشد. در این صورت، $\mathbf{i}A_x$ برداری است با بزرگی A_x در سوی مثبت راستای x . با استفاده از جمع برداری داریم

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z \quad (6-1)$$

بنابر این رابطه، یک بردار برابر است با جمع برداری مؤلفه‌هایش. دقت کنید که اگر \mathbf{A} صفر باشد، هر یک از مؤلفه‌هایش نیز باید صفر باشند، یعنی

$$A_x = A_y = A_z = 0 \quad \text{اگر } \mathbf{A} = 0 \text{ آنگاه}$$

سرانجام، با استفاده از قضیه فیثاغورث، بزرگی بردار \mathbf{A} عبارت خواهد بود از:

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1-7الف)$$

تجزیه بردار به مؤلفه‌هایش را می‌توان، مطابق مطالب فصل ۲ در دستگاههای مختصات گوناگون انجام داد. در اینجا فقط به مختصات دکارتی می‌پردازیم.

معادله ۱-۶ در واقع بیان این نکته است که سه بردار \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} فضای سه‌بعدی حقیقی ما را پدید می‌آورد. یعنی هر بردار ثابت را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} نوشت. \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} مستقل خطی‌اند (هیچیک ترکیب خطی دوتای دیگر نیست)، از این رو پایه‌ای برای فضای سه‌بعدی حقیقی ما تشکیل می‌دهند.

اکنون می‌توان جمع و تفریق بردارها را، به جای روش نموداری، برحسب مؤلفه‌های آنها انجام داد. برای $\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z$ و $\mathbf{B} = iB_x + jB_y + kB_z$ داریم

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = i(A_x \pm B_x) + j(A_y \pm B_y) + k(A_z \pm B_z) \quad (1-7ب)$$

مثال ۱-۱-۱: داریم

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

در این صورت، از معادله ۱-۷ب داریم

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 8\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

در اینجا باید تأکید کرد که بردارهای یکه i ، j و k برای راحتی کار به کار رفته‌اند. نقش آنها اساسی نیست؛ می‌توانیم بردارها را کاملاً برحسب مؤلفه‌هایشان توصیف کنیم و به کار ببریم: $A \leftrightarrow (A_x, A_y, A_z)$. این رهیافت در دو تعریف مستدل‌تر و پیچیده‌تر بردار در بخش بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت. به هر حال، i ، j و k جهت را نشان می‌دهند که در فصل ۲ از آنها بهره خواهیم گرفت.

تا اینجا عملهای جمع و تفریق بردارها را تعریف کرده‌ایم. برای ضرب، براساس کاربردهای آن، سه تعریف متفاوت ارائه می‌کنیم: یکی ضرب اسکالر یا داخلی در بخش ۱-۳، یکی هم ضرب برداری که مختص فضای سه‌بعدی در بخش ۱-۴ است، و یکی نیز ضرب مستقیم یا خارجی است که تانسور مرتبهٔ دومی را در بخش ۲-۳ می‌دهد. تقسیم بر بردار تعریف نشده است. به مسئله‌های ۲-۴، ۲-۲۱ و ۲۲ بنگرید.

مسائل

۱-۱-۱ چگونه می‌توان با داشتن $A + B$ و $A - B$ ، بردارهای A و B را یافت؟

۲-۱-۱ بردار A ، به بزرگی 1° ، با محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد. A_x ، A_y و A_z را بیابید.

۳-۱-۱ مؤلفه‌های بردار یکه‌ای واقع در صفحهٔ xy را محاسبه کنید که با جهت‌های مثبت محورهای x و y زاویهٔ مساوی می‌سازد.

۴-۱-۱ سرعت قایق بادبانی A نسبت به قایق بادبانی B ، v ، از معادلهٔ $v = v_A - v_B$ (نسبی) به‌دست می‌آید که در آن v_A سرعت A و v_B سرعت B است. اگر

$$v_A = 3^\circ \text{ km/hr} \quad \text{به طرف شرق}$$

$$v_B = 4^\circ \text{ km/hr} \quad \text{به طرف شمال}$$

سرعت A نسبت به B را تعیین کنید.

جواب: به طرف جنوب شرقی $53^\circ 1'$ ، 5° km/hr نسبی v .

۵-۱-۱ یک قایق بادبانی به مدت یک ساعت با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت (نسبت به آب) حرکت می‌کند، به‌صورتی که عقربهٔ قطب‌نما تحت زاویهٔ 40° نسبت به شمال شرقی ثابت می‌ماند. جریان آب نیز این قایق را به جلو می‌راند. قایق پس از یک ساعت در فاصلهٔ ۱۲٫۶ کیلومتری نقطهٔ شروع حرکتش قرار می‌گیرد. خطی که نقطهٔ شروع را به مکان کنونی آن وصل می‌کند، در راستای 60° شمال شرقی قرار دارد. مؤلفه‌های x (شرقی) و y (شمالی) سرعت آب را به‌دست آورید.

جواب: $v = 27.3 \text{ km/hr}$ شرقی و $v = 0 \text{ km/hr}$ شمالی.

۶-۱-۱ هر معادلهٔ برداری را می‌توان به‌صورت $A = B$ خلاصه کرد. به کمک این رابطه نشان

دهید که یک معادله برداری هم‌ارز با سه معادله اسکالر است. اگر قانون دوم نیوتون به صورت یک معادله برداری صادق باشد، نتیجه می‌گیریم که a_{xx} فقط به F_x بستگی دارد و از F_y و F_z مستقل است.

۱-۱-۷ رتوس A ، B و C یک مثلث به ترتیب با نقاط $(2, 0, -1)$ ، $(0, 1, 0)$ و $(0, -1, 0)$ مشخص می‌شوند. نقطه D را چنان بیابید که شکل $ABDC$ یک متوازی‌الاضلاع مسطح باشد. جواب: $(2, 0, -2)$.

۱-۱-۸ مثلثی به کمک رتوس سه بردار A ، B و C ، که از مبدأ رسم شده‌اند، توصیف می‌شود. برحسب A ، B و C ، نشان دهید که جمع برداری اضلاع مثلث $(AB + BC + CA)$ صفر است.

۱-۱-۹ مرکز کره‌ای به شعاع a در نقطه r_1 واقع است. (الف) معادله جبری این کره را بنویسید. (ب) معادله‌ای برداری برای این کره بنویسید.

جواب: (الف) $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2$ ؛ (ب) $r = r_1 + a$

(a همة جهتها را به خود می‌گیرد ولی بزرگی‌اش، a ، ثابت است.)

۱-۱-۱۰ یک بازتابگر سه کنج از سه سطح بازتابگر عمود بر هم تشکیل شده است. نشان دهید پرتوی نوری که بر این بازتابگر سه کنج فرود می‌آید (و به هر سه سطح برمی‌خورد) در راستای خطی موازی با خط فرود به عقب باز می‌تابد.

[راهنمایی: ابتدا اثر یک بازتابش را روی مؤلفه‌های برداری که جهت پرتو نور را توصیف می‌کند، در نظر بگیرید.]

۱-۱-۱۱ قانون هابل. هابل پی برد که کهکشانهای دور با سرعتی متناسب با فاصله آنها از مکان ما در زمین دور می‌شوند. برای کهکشان نام داریم

$$v_i = H_0 r_i$$

که مکان خودمان را در زمین مبدأ مختصات گرفته‌ایم. نشان دهید که این دور شدن کهکشانها از ما در حکم این نیست که ما در مرکز عالم هستیم. در حالت خاص، کهکشان واقع در r_1 را به عنوان مبدأ جدید در نظر بگیرید و نشان دهید که قانون هابل کماکان برقرار است.

۲-۱ تعریفهای جامع^۱

در بخش قبل بردارها را به دو طریق معادل تعریف کردیم یا نمایش دادیم: (۱) از لحاظ هندسی، با مشخص کردن بزرگی و جهت، مانند یک پیکان، و (۲) از لحاظ جبری با مشخص کردن مؤلفه‌ها نسبت به محورهای مختصات دکارتی. تعریف دوم برای مبحث تحلیل برداری در این فصل کافی

۱. این بخش اختیاری است. مطالعه آن برای بقیه بخشهای این فصل، ضروری نیست.

است. در این بخش، دو تعریف مستدلتر، جامعتر و ظریفتر ارائه می‌کنیم. ابتدا میدان برداری را برحسب رفتار مؤلفه‌های آن، تحت چرخش محورهای مختصات، تعریف می‌کنیم. این رهیافت مبتنی بر نظریه تبدیل به تحلیل تانسوری فصل ۳ هدایت می‌شود. ثانیاً، تعریف مؤلفه‌ای بخش ۱-۱ را اصلاح می‌کنیم و آن را مطابق با مفاهیم بردار و فضای برداری ریاضیدانان تعمیم می‌دهیم. این رهیافت، به فضاهای تابعی، شامل فضای هیلبرت در بخش ۹-۴، می‌انجامد.

چرخش محورهای مختصات

تعریف بردار به صورت کمیته با بزرگی و جهت، در بررسیهای پیشرفته‌تر کارساز نیست. از یک سو به کمیتهایی نظیر ثابتهای کشسانی و ضریب شکست در بلورهای ناهمسانگرد برمی‌خوریم، که بزرگی و جهت دارند ولی بردار نیستند. از سوی دیگر، رهیافت خام خود را با دشواری می‌توانیم چنان تعمیم دهیم که این کمیتهای پیچیده‌تر را نیز توصیف کند. با استفاده از بردار جابه‌جایی \mathbf{x} ، به عنوان یک نمونه، می‌خواهیم تعریف تازه‌ای برای میدان برداری به دست دهیم.

برای ارائه یک تعریف جدید مبنای فیزیکی مهمی یافت می‌شود. ما جهان مادی خود را به کمک ریاضیات توصیف می‌کنیم، ولی این جهان مادی و هر پیشگویی فیزیکی‌ای که انجام می‌دهیم باید از تحلیل ریاضی ما مستقل باشد. برخی مؤلفان سیستم فیزیکی را به یک ساختمان و تحلیل ریاضی را به داربستی که برای ساختن آن ساختمان بسته می‌شود تشبیه می‌کنند. در پایان کار داربست برداشته می‌شود و ساختمان پابرجا می‌ماند.

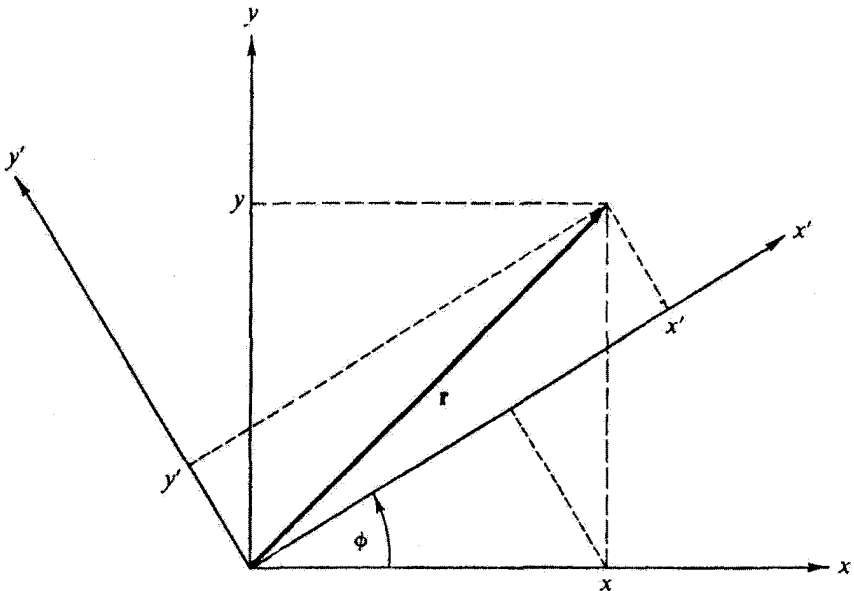
در این حالت خاص خود فرض می‌کنیم فضا همسانگرد است، یعنی، هیچ جهت مرجحی در فضا وجود ندارد و همه جهتها معادل‌اند. بنابراین سیستم فیزیکی‌ای که تحلیل می‌شود یا قانون فیزیکی‌ای که تشریح می‌شود، نمی‌تواند و نباید به سمتگیری خاصی که برای محورهای مختصات برگزیده‌ایم، بستگی داشته باشد.

اکنون به مفهوم بردار \mathbf{r} به مثابه یک شیء هندسی مستقل از دستگاه مختصات بازمی‌گردیم. \mathbf{r} را در دو دستگاه مختلف، که یکی نسبت به دیگری چرخیده باشد، در نظر می‌گیریم.

برای سادگی، نخست به حالت دوبعدی می‌پردازیم. اگر محورهای مختصات x و y به اندازه φ در سوی پادساعتگرد بچرخند، و \mathbf{r} ثابت بماند (شکل ۱-۷)، روابط زیر بین مؤلفه‌های تجزیه شده در دستگاه اصلی (بدون پریم) و مؤلفه‌های تجزیه شده در دستگاه چرخیده جدید (پریم‌دار)، برقرار است

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi\end{aligned}\quad (1-1)$$

در بخش ۱-۱ دیدیم که بردار را می‌شود به کمک مختصات یک نقطه نمایش داد؛ یعنی، مختصات با مؤلفه‌های بردار متناسب‌اند. در نتیجه مؤلفه‌های یک بردار، تحت چرخش، باید مانند



شکل ۷-۱ چرخش محورهای مختصات دکارتی حول محور z.

مختصات یک نقطه (مثل r) تبدیل شوند. بنابراین، هرگاه یک زوج کمیت $A_x(x, y)$ و $A_y(x, y)$ در دستگاه مختصات yx تحت این چرخش دستگاه مختصات به (A'_x, A'_y) تبدیل شوند، چنانکه داشته باشیم:

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \\ A'_y &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (9-1)$$

A_x و A_y ، بنا بر تعریف^۱، عبارت‌اند از مؤلفه‌های برداری چون A . اینک بردار را برحسب تبدیل مؤلفه‌های آن تحت چرخش دستگاه مختصات تعریف کرده‌ایم. اگر A_x و A_y مانند x و y ، یعنی مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی دوبعدی، تبدیل شوند، مؤلفه‌های بردار A به‌شمار می‌آیند. اگر A_x و A_y در هنگام چرخش مختصات، این ناوردایی در صورت را نشان ندهند، یک بردار را تشکیل نمی‌دهند. مؤلفه‌های میدان برداری A_x و A_y که در معادله‌های معرف، معادله ۹-۱، صدق می‌کنند، به هر نقطه در فضا یک بزرگی A و یک جهت نسبت می‌دهند. بزرگی کمیته است اسکالر یا عددی که نسبت به چرخش دستگاه مختصات ناورداست. جهت (نسبت به دستگاه بدون پریم) نیز نسبت به چرخش دستگاه مختصات ناورداست (مسئله ۱-۲-۱). در نتیجه، مؤلفه‌های یک بردار با چرخش دستگاه مختصات پریم‌دار تغییر می‌کنند. این همان چیزی است که در معادله ۹-۱

۱. تعریف متناظر برای یک کمیت اسکالر به صورت $S' = S$ است، یعنی کمیت اسکالر تحت چرخش مختصات ناورداست.

بیان می‌شود. اما تغییر با زاویه دقیقاً چنان صورت می‌گیرد که مؤلفه‌ها در دستگاه چرخیده، A'_x و A'_y ، برداری را با همان بزرگی و در همان جهت بردار حاصل از مؤلفه‌های A_x و A_y نسبت به محوره‌های مختصات x و y تعریف می‌کنند. (با مسئله ۱-۲-۱ مقایسه کنید.) مؤلفه‌های A در یک دستگاه مختصات خاص نمایش A در آن دستگاه مختصات را تشکیل می‌دهند. معادله ۱-۹، یعنی رابطه تبدیل، تضمین می‌کند که A از چرخش دستگاه مختصات مستقل باشد. برای پرداختن به سه و بعداً به چهار بعد، بهتر است که نمادگذاری جمع‌وجورتری را به‌کار ببریم. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x_1 \\ y &\rightarrow x_2\end{aligned}\quad (10-1)$$

و

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \varphi & a_{12} &= \sin \varphi \\ a_{21} &= -\sin \varphi & a_{22} &= \cos \varphi\end{aligned}\quad (11-1)$$

پس معادله ۱-۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\quad (12-1)$$

ضریب a_{iz} را می‌توان به صورت یک کسینوس هادی، یعنی کسینوس زاویه بین x'_i و x_z تعبیر کرد؛ یعنی،

$$\begin{aligned}a_{12} &= \cos(x'_1, x_2) = \sin \varphi \\ a_{21} &= \cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi\end{aligned}\quad (13-1)$$

مزیت این نمادگذاری جدید آن است که اکنون می‌توانیم از نماد مجموع‌یابی \sum بهره‌گیریم و

۱. شاید این سؤال پیش بیاید که چگونه به جای یک پارامتر φ چهار پارامتر a_{iz} جایگزین شده است. روشن است که a_{iz} ها کوچکترین مجموعه پارامترها نیستند. در دو بعد، چهار a_{iz} تحت سه قیدی‌اند که در معادله ۱۸-۱ داده می‌شود. سادگی و تناسبی که این مجموعه از کسینوسهای هادی فراهم می‌کند، کار بردشان را توجیه می‌کند. امید داریم که این سادگی در فصلهای ۳ و ۴ آشکارتر شود. برای چرخشهای سه‌بعدی (با ۹ تا a_{iz} که فقط سه‌تای آنها مستقل‌اند) توصیفهای متفاوت زیر ارائه می‌شود: (۱) زاویه‌های اولیه که در بخش ۳-۴ مورد بحث قرار می‌گیرند؛ (۲) کوآرینونها؛ (۳) پارامترهای کایلی-سکلاین. این توصیفهای متفاوت هر یک مزایا و عیوب خود را دارند.

معادله‌های ۱-۱۲ را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \quad i = 1, 2 \quad (14-1)$$

دقت کنید که i پارامتری است که اگر یک گرفته شود به یک معادله و اگر دو گرفته شود به معادله دوم می‌انجامد. البته اندیس j ، اندیس مجموع‌یابی (شاخص ظاهری) است، و درست مانند متغیر انتگرال‌گیری، به جای j می‌توان هر نماد مناسب دیگری را نشانند.

اینک تعمیم به سه، چهار یا N بعد بسیار ساده است. مجموعه N کمیت V_j را مؤلفه‌های یک بردار N بعدی V می‌نامند، اگر و فقط اگر مقدار آنها نسبت به محورهای مختصات چرخیده به کمک رابطه زیر داده شود

$$V'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15-1)$$

a_{ij} مانند قبل کسینوس زاویه بین x'_i و x_j است. حد بالای مجموع‌یابی، N ، و گستره متناظر برای i را غالباً نمی‌نویسند. معمولاً فرض می‌کنند خواننده می‌داند که فضای مورد نظر چند بعدی است. با استفاده از تعریف a_{ij} به صورت کسینوس زاویه بین جهت مثبت x'_i و جهت مثبت x_j ، می‌توانیم (در مختصات دکارتی) بنویسیم^۱

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (16-1)$$

به دقت ملاحظه کنید که اینها مشتقهای جزئی‌اند. معادله ۱-۱۵ با استفاده از معادله ۱-۱۶ به صورت زیر درمی‌آید

$$V'_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j \quad (17-1)$$

کسینوسهای هادی a_{ij} در شرط تعامد زیر صدق می‌کنند

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (18-1)$$

۱. از $x'_i = \sum a_{ik} x_k$ نسبت به x_j مشتق بگیرید. می‌باید بعد از معادله ۱-۲۱ را ببینید. در بخش ۳-۴ روش دیگری ارائه می‌شود.

یا، به همان ترتیب،

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \quad (۱۹-۱)$$

نماد δ_{jk} دلتای کرونکر و بنابر تعریف، عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= 1 & j = k & \text{ به‌ازای} \\ \delta_{jk} &= 0 & j \neq k & \text{ به‌ازای} \end{aligned} \quad (۲۰-۱)$$

خواننده با نشانیدن a_{ij} ها از معادله ۱۱-۱ در معادله‌های ۱۸-۱ و ۱۹-۱، می‌تواند به‌آسانی این معادله‌ها را اثبات کند. نتیجه برای حالت غیرصفر به‌صورت اتحاد مشهور $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ است. برای آنکه صورت کلی معادله ۱۸-۱ را اثبات کنیم، می‌توانیم از صورتهای مشتق جزئی در معادله‌های ۱۶-۱ استفاده کنیم و برسیم به

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \quad (۲۱-۱)$$

مرحله آخر از قواعد استاندارد مشتق‌گیری جزئی، و با فرض اینکه x_j تابعی است از x'_1, x'_2, \dots, x'_n ، و x'_i ، و الی‌آخر، نتیجه می‌شود. این جواب آخر، یعنی $\partial x_j / \partial x_k$ ، برابر است با δ_{jk} ، زیرا x_j و x_k به‌عنوان خطوط مختصاتی ($j \neq k$) (در دو یا سه‌بعد) عمود بر هم، یا (به‌ازای هر تعداد بعد) متعام فرض می‌شوند. همچنین، می‌توانیم x_j و x_k ($j \neq k$) را متغیرهایی کاملاً مستقل فرض کنیم. اگر $j = k$ ، روشن است که مشتق جزئی برابر ۱ می‌شود.

سرانجام، در این تعریف مجددی که برای بردار برحسب چگونگی تبدیل مؤلفه‌های آن تحت چرخش دستگاه مختصات ارائه کردیم، باید بر دو نکته تأکید کنیم:

۱. علت ارائه این تعریف مفید و مناسب بودنش برای توصیف جهان مادی ماست. معادلات برداری ما از هر دستگاه مختصاتی مستقل خواهند بود. (حتی ضرورتی ندارد که دستگاه مختصات دکارتی باشد.) معادله برداری را می‌توان همواره در هر دستگاه مختصات به‌خصوصی مشخص کرد و برای آنکه نتایج عددی به‌دست بیاوریم، نهایتاً باید معادله را در یک دستگاه مختصات خاص مشخص کنیم.

۲. این تعریف را می‌توان چنان تعمیم داد که به شاخه‌ای از ریاضیات معروف به تحلیل تانسوری راه یابد (فصل ۳).

مطالبی را که در دستور کار است نیز فهرست‌وار برمی‌شمریم. رفتار مؤلفه‌های بردار تحت چرخش مختصات را در بخش ۱-۳ برای اثبات اسکالر بودن حاصلضرب عددی، و در بخش ۱-۴

برای اثبات بردار بودن حاصلضرب برداری، و در بخش ۱-۶ برای نمایش اینکه گزاردیان یک کمیت اسکالر، $\nabla \psi$ ، بردار است، به کار خواهیم برد. بقیه مطالب این فصل بر پایه تعریفهای ساده‌تری از بردار که در بخش ۱-۱ ارائه شد، تنظیم شده است.

بردارها و فضای برداری

در ریاضیات مرسوم است که هر سه تایی مرتب از اعداد حقیقی (x_1, x_2, x_3) یک بردار، x ، نامیده شود. عدد x_n را مؤلفه n ام بردار x می‌نامند. مجموعه همه بردارهایی از این نوع (که خواص زیر در آنها صدق می‌کنند) یک فضای برداری حقیقی سه‌بعدی را تشکیل می‌دهند. پنج خاصیت زیر را به این بردارها نسبت می‌دهیم. اگر $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$ ، آنگاه

$$1. \text{ تساوی برداری: } x = y, \text{ یعنی } x_i = y_i.$$

$$2. \text{ جمع برداری: } x + y = z, \text{ یعنی } x_i + y_i = z_i, i = 1, 2, 3.$$

$$3. \text{ ضرب در یک کمیت اسکالر: } ax \leftrightarrow (ax_1, ax_2, ax_3) \text{ (} a \text{ حقیقی).}$$

$$4. \text{ منفی یک بردار: } -x \leftrightarrow (-x_1, -x_2, -x_3).$$

$$5. \text{ بردار صفر: بردار صفری وجود دارد که } (0, 0, 0) \leftrightarrow 0.$$

چون مؤلفه‌های برداری ما صرفاً عددهند، خواص زیر نیز صادق‌اند:

$$1. \text{ جمع برداری تعویض‌پذیر است: } x + y = y + x.$$

$$2. \text{ جمع بردارها شرکت‌پذیر است: } (x + y) + z = x + (y + z).$$

$$3. \text{ ضرب در کمیت‌های اسکالر توزیع‌پذیر است: } (ab)x = a(bx).$$

به علاوه، بردار صفر 0 و نیز منفی یک بردار مفروض x یکتا هستند.

تا جایی که به بردارها مربوط می‌شود، با این رهیافت صرفاً بحث مؤلفه‌های بخش ۱-۱ تدوین می‌شود. اهمیت آن در بسطهایی نهفته است که در فصلهای بعدی به آنها خواهیم پرداخت. در فصل ۴، هم نشان می‌دهیم که بردارها تحت عمل جمع یک گروه آبدلی تشکیل می‌دهند و هم اینکه بردارها فضایی خطی می‌سازند با تبدیلهایی در فضای خطی که ماتریسها آنها را توصیف می‌کنند. سرانجام، و شاید از همه مهمتر، در حوزه فیزیک پیشرفته مفهومی را که در اینجا برای بردار ارائه شد، می‌توان: (۱) به کمیت‌های مختلط^۱، (۲) به توابع، و (۳) به تعدادی نامتناهی از مؤلفه‌ها تعمیم داد. این کار ما را به فضاهای تابعی بینهایت بعدی، فضاهای هیلبرت، که در نظریه جدید کوانتومی بسیار مهم‌اند هدایت می‌کند. در بخش ۹-۴ با بسطهای تابعی و فضای هیلبرت آشنایی مختصری پیدا می‌کنیم.

۱. فضای برداری n بعدی m تاییهای حقیقی را غالباً با \mathbf{R}^n و فضای برداری n بعدی m تاییهای مختلط را با \mathbf{C}^n نشان می‌دهند.

مسائل

۱-۲-۱ الف) نشان دهید بزرگی یک بردار A ، $A = (A_x^2 + A_y^2)^{1/2}$ ، از سمتگیری دستگاه مختصات چرخیده مستقل است، یعنی

$$(A_x^2 + A_y^2)^{1/2} = (A_x'^2 + A_y'^2)^{1/2}$$

از φ ، زاویه چرخش، مستقل است. این استقلال از زاویه با بیان اینکه A تحت چرخشها ناورداست، مشخص می‌شود.

ب) در نقطه مفروض (x, y) با محور x مثبت زاویه α و با محور x' مثبت زاویه α' می‌سازد. زاویه بین x و x' برابر φ است. نشان دهید $A = A'$ هرگاه برحسب مؤلفه‌های پریم‌دار مشخص شود، همان جهتی را در فضا می‌نمایاند که وقتی برحسب مؤلفه‌های بدون پریم مشخص می‌شود. یعنی

$$\alpha' = \alpha - \varphi$$

۲-۲-۱ شرط تعامد $\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}$ را اثبات کنید. به‌عنوان مثال خاصی از این رابطه، کسینوسهای هادی بخش ۱-۱ در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

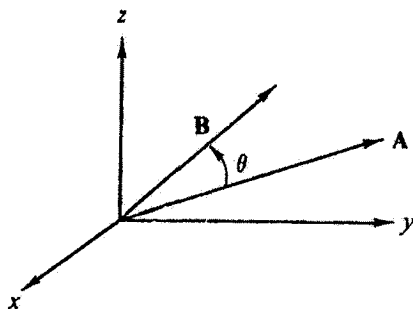
این همان نتیجه‌ای است که از معادله ۱-۷ الف نیز به‌دست می‌آید.

۳-۱ ضرب اسکالر یا نقطه‌ای

اینک، در پی تعریف بردارها، به ترکیب آنها در یکدیگر اقدام می‌کنیم. قوانین مربوط به ترکیب بردارها باید از نظر ریاضی سازگار باشد. از میان امکانهای سازگار، دو امکان را برمی‌گزینیم که هم از نظر ریاضی و هم از نظر فیزیکی جالب‌اند. در فصل ۳ با امکان سومی هم آشنا می‌شویم که به واسطه آن تانسورها را تشکیل می‌دهیم.

با ترکیب $AB \cos \theta$ ، که در آن A و B بزرگی دو بردار و θ زاویه بین آنهاست، در فیزیک خیلی برخورد می‌کنیم (شکل ۱-۸). مثلاً

$$\cos \theta \times \text{جابه‌جایی} \times \text{نیرو} = \text{کار}$$

شکل ۸-۱ ضرب اسکالر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$

معمولاً به صورت جابه‌جایی ضرب در تصویر نیرو در امتداد جابه‌جایی، تعبیر می‌شود. با در نظر داشتن چنین کاربردهایی، ضرب اسکالر، یا نقطه‌ای، یا داخلی، بنا بر تعریف، عبارت است از:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_i A_i B_i \quad (22-1)$$

حاصل ضرب اسکالر دو بردار، یک کمیت اسکالر است. توجه می‌کنیم که بنا بر این تعریف داریم: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ؛ یعنی، ضرب اسکالر تعویض‌پذیر است. بردارهای یکه \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad (22-1 \text{ الف})$$

در حالی که

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} &= 0 \end{aligned} \quad (22-1 \text{ ب})$$

اگر جهت محورها را چنان تغییر دهیم که \mathbf{A} محور x جدید را نشان دهد^۱، آنگاه

$$A_x = A, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0$$

۱

$$B_x = B \cos \theta$$

۱. ناوردایی $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ تحت چرخش محوره‌های مختصات را بعداً در همین بخش اثبات خواهیم کرد.

آنگاه از معادله ۲۲-۱ داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (۲۳-۱)$$

که می‌شود آن را تعریف دیگری برای ضرب اسکالر تلقی کرد. تعریف مؤلفه‌ای، در معادله ۲۲-۱، را می‌توان با تعریف جبری مشخص کرد. که در این صورت معادله ۲۳-۱ یک تعریف هندسی خواهد بود. یکی از متداولترین کاربردهای ضرب اسکالر در فیزیک، محاسبه کار، $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ ، به صورت حاصلضرب اسکالر نیرو در جابه‌جایی است.

مثال ۱-۳-۱: برای دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} در مثال ۱-۱-۱، $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ استفاده از معادله ۲۲-۱ داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (12 - 12 - 9) = -9$$

در این حالت تصویر \mathbf{A} روی \mathbf{B} (یا \mathbf{B} روی \mathbf{A}) منفی است. در واقع

$$|\mathbf{A}| = (36 + 16 + 9)^{1/2} = (61)^{1/2} = 7.81$$

$$|\mathbf{B}| = (4 + 9 + 9)^{1/2} = (22)^{1/2} = 4.69$$

$$\cos \theta = -0.246, \theta = 104.2^\circ$$

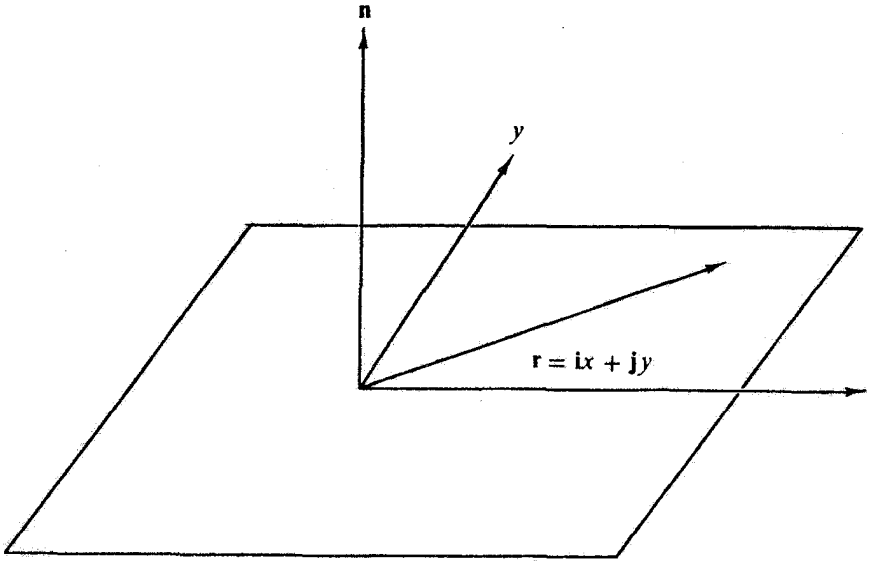
اگر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ و بدانیم که $\mathbf{A} \neq 0$ و $\mathbf{B} \neq 0$ ، آنگاه از معادله ۲۳-۱ داریم: $\cos \theta = 0$ ، یا 90° ، 270° ، θ والی آخر. بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} باید بر هم عمود باشند. یا می‌توانیم بگوییم که \mathbf{A} و \mathbf{B} متعامدند. بردارهای یکه \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} متقابلاً متعامدند. برای تعمیم این مفهوم تعامد، فرض کنید \mathbf{n} یک بردار یکه و \mathbf{r} بردار غیرصفری در صفحه yx باشد، یعنی $\mathbf{r} = ix + jy$ (شکل ۱-۹). اگر به‌ازای همه گزینیه‌های \mathbf{r} داشته باشیم

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

در این صورت \mathbf{n} باید بر صفحه yx عمود (متعامد) باشد.

اغلب اوقات بهتر است که به‌جای \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} بردارهای یکه با اندیس پایین \mathbf{e}_1 ، \mathbf{e}_2 ، \mathbf{e}_3 بگذاریم که در آن $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ، والی آخر. پس معادله‌های ۲۲-۱ الف و ب به صورت زیر درمی‌آیند

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn} \quad (۲۲-۱ ج)$$



شکل ۹-۱ یک بردار نرمال.

به‌ازای $m \neq n$ بردارهای یکه e_m و e_n متعامدند. به‌ازای $m = n$ ، هر یک از بردارها به یک به‌نجار می‌شوند، یعنی بزرگی آنها برابر واحد می‌شود. مجموعه e_m را متعامد به‌نجار می‌نامند. مزیت عمده معادله ۲۲-۱ ج نسبت به معادله‌های ۲۲-۱ الف و ب در آن است که معادله ۲۲-۱ ج را می‌توان به آسانی به فضای N بعدی تعمیم داد: $m, n = 1, 2, \dots, N$. و نکته آخری اینکه برای راحتی مجموعه‌ای از بردارهای یکه e_m را برگزیدیم که متعامدند و با این انتخاب کارها آسانتر و راحت‌تر می‌شود. بردارهای یکه نامتعامد را در بخش ۴-۴ تحت عنوان "مختصات مایل" بررسی خواهیم کرد.

خاصیت اسکالر بودن

تا اینجا هنوز نشان نداده‌ایم که کلمه اسکالر برای حاصلضرب عددی صفت موجهی است، به عبارت دیگر ثابت نکرده‌ایم که حاصلضرب اسکالر واقعاً یک کمیت اسکالر یا عددی است. برای این کار، رفتار $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ را تحت چرخش دستگاه مختصات بررسی می‌کنیم. با استفاده از معادله ۱۵-۱ داریم

$$A'_x B'_x + A'_y B'_y + A'_z B'_z = \sum_i a_{xi} A_i \sum_j A_{xj} B_j + \sum_i a_{yi} A_i \sum_j a_{yj} B_j + \sum_i a_{zi} A_i \sum_j a_{zj} B_j \quad (24-1)$$

از اندیسه‌های k و l برای مجموع‌یابی روی x ، y و z بهره می‌گیریم و می‌رسیم به

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li} A_i a_{lj} B_j \quad (25-1)$$

و پس از بازاریابی جمله‌های طرف راست، داریم

$$\begin{aligned} \sum_k A'_k B'_k &= \sum_l \sum_i \sum_j (a_{li} a_{lj}) A_i B_j \\ &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j \\ &= \sum_i A_i B_i \end{aligned} \quad (26-1)$$

به دو مرحله آخری با استفاده از معادله ۱۸-۱، یعنی شرط تعامد برحسب کسینوسهای هادی، و معادله ۲۰-۱ که معرف دلتای کرونکر است، رسیده‌ایم. تأثیر دلتای کرونکر آن است که همه جمله‌ها روی هر یک از اندیسه‌ها را حذف می‌کند جز آنها که اندیسه‌ایشان یکی است. اثر دلتا در معادله ۲۶-۱ آن است که j را i قرار می‌دهد و مجموع‌یابی روی j را حذف می‌کند. البته می‌توانستیم قرار دهیم $i = j$ و مجموع‌یابی روی i را حذف کنیم. از معادله ۲۶-۱ داریم

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_i A_i B_i \quad (27-1)$$

و این همان تعریف کمیت اسکالر است، یعنی کمیتی که تحت چرخش دستگاه مختصات ناورد می‌ماند. در روشی مشابه که همین مفهوم ناوردایی را به‌کار می‌گیرد، قرار می‌دهیم: $C = A + B$ ، و آن را در خودش ضرب نقطه‌ای می‌کنیم

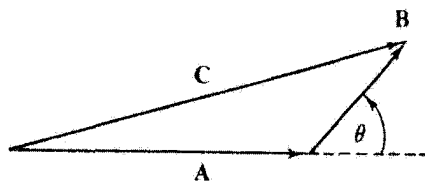
$$\begin{aligned} C \cdot C &= (A + B) \cdot (A + B) \\ &= A \cdot A + B \cdot B + 2A \cdot B \end{aligned} \quad (28-1)$$

با توجه به اینکه کمیت:

$$C \cdot C = C^2 \quad (29-1)$$

مربع بزرگی بردار C است و لذا یک کمیت ناورد است، می‌بینیم که

$$A \cdot B = \frac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2) \quad \text{ناوردا} \quad (30-1)$$



شکل ۱-۱۰ قانون کسینوسها.

از آنجا که سمت راست معادله ۱-۳۰ ناوردا، یعنی کمیتی اسکالر است، سمت چپ یعنی $A \cdot B$ هم باید تحت چرخش دستگاه مختصات ناوردا باشد. از این رو، $A \cdot B$ اسکالر است. معادله ۱-۲۸ در واقع صورت دیگری از قانون کسینوسها به صورت زیر است:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta \quad (1-31)$$

با مقایسه معادله‌های ۱-۲۸ و ۱-۳۰ اثبات دیگری برای معادله ۱-۲۳ داریم و یا چنانچه بخواهیم، می‌توانیم به یک روش استخراج برداری برای قانون کسینوسها دست پیدا کنیم (شکل ۱-۱۰). در شاخه‌ای از نسبیت عام، مثال جالبی برای تعبیر هندسی حاصلضرب اسکالر ارائه می‌شود. کره چهاربعدی

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

را در فضای x, y, z, w در نظر بگیرید. سطح جانبی این کره چهاربعدی را می‌توانیم به کمک بردار $\mathbf{r} = (x, y, z, w)$ ، با محدودیت $|\mathbf{r}| = 1$ ، توصیف کنیم. می‌توانیم بردار یکه \mathbf{t} را چنان تشکیل دهیم که در تمامی سطح جانبی این کره چهاربعدی، بر آن مماس باشد. مثلاً

$$\mathbf{t} = (y, -x, w, -z)$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$$

یعنی بزرگی برابر یک است، و

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{r} = 0$$

یعنی در تمام سطح کره بر آن مماس است.

مشابه دوعبدي این بردار نیز یافت می‌شود، ولی مشابه سه‌بعدی آن وجود ندارد. موهایی را که بر سطح یک کره می‌زویند، نمی‌توان جملگی در یک سو شانه کرد. یک درهم‌رفتگی در موها وجود خواهد داشت.

ضرب اسکالر را، که در معادله ۱-۲۲ آمده، به دو طریق می‌توان تعمیم داد. لزومی ندارد که فضا سه‌بعدی باشد. در فضای n بعدی، معادله ۱-۲۲ کماکان صادق است و مجموع‌یابی از ۱ تا n خواهد بود، و n می‌تواند بینهایت باشد، که در آن صورت مجموع‌یابی به صورت یک رشته نامتناهی همگرا خواهد بود (بخش ۵-۲). در تعمیم دیگر، مفهوم بردار باز می‌شود و توابع را نیز دربرمی‌گیرد. مشابه تابعی ضرب نقطه‌ای یا داخلی در بخش ۹-۴ خواهد آمد.

مسائل

۱-۳-۱ کسینوس زاویه بین دو بردار

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

چقدر است؟

جواب: $\cos \theta = 0, \theta = \pi/2$.

۱-۳-۲ دو بردار، \mathbf{e}_2 و \mathbf{e}_3 ، با بزرگی واحد یا برهم عمود و یا با هم موازی‌اند. نشان دهید که $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3$ معادله ۱-۱۸، یعنی رابطه تعامد برحسب کسینوسهای تعامد، را تفسیر می‌کند.

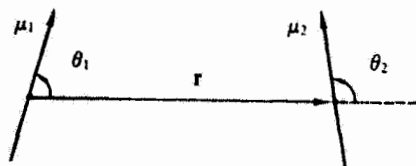
۱-۳-۳ با فرض اینکه: (الف) حاصلضرب نقطه‌ای یک بردار یکه در خودش واحد است، و (ب) این رابطه در تمام دستگاه‌های مختصات (چرخیده) صادق است، نشان دهید $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$ (که در آن دستگاه پریم‌دار، نسبت به دستگاه بدون پریم، 45° حول محور z چرخیده است) حاکی از آن است که $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$.

۱-۳-۴ بردار \mathbf{r} که از مبدأ شروع می‌شود، به نقطه (x, y, z) در فضا ختم می‌شود و آن نقطه را مشخص می‌کند. سطحی را بیابید که انتهای r را جاروب می‌کند، اگر:

(الف) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$.

(ب) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$.

بزرگی و جهت بردار \mathbf{a} ثابت است.



انرژی بر هم کنش بین دو دوقطبی با گشتاورهای μ_1 و μ_2 را می‌توان به صورت برداری:

$$V = -\frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{r^3} + \frac{3(\mu_1 \cdot r)(\mu_2 \cdot r)}{r^5}$$

و به صورت اسکالری:

$$V = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3} (\mu_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi)$$

نوشت. در اینجا، θ_1 و θ_2 زاویه‌هایی اند که μ_1 و μ_2 با r می‌سازند و φ زاویه سمتی μ_2 نسبت به صفحه $\mu_1 - r$ است. نشان دهید که این دو صورت معادل‌اند.

[راهنمایی: از معادله ۱۲-۱۹۸ (جلد دوم) بهره‌گیری کنید.]

۱-۳-۶ لوله‌ای به صورت قطری از کنار دیوار جنوبی ساختمانی پایین می‌آید و با افق زاویه 45° می‌سازد. هنگامی که به کنج دیوار می‌رسد، خم می‌شود و باز به صورت قطری از کنار یک دیوار رو به غرب به پایین می‌آید، کماکان زاویه 45° با افق می‌سازد. زاویه بین قسمتی از لوله که کنار دیوار جنوبی است با قسمتی از آنکه کنار دیوار غربی واقع شده، چقدر است؟

جواب: 120° .

۴-۱ ضرب برداری

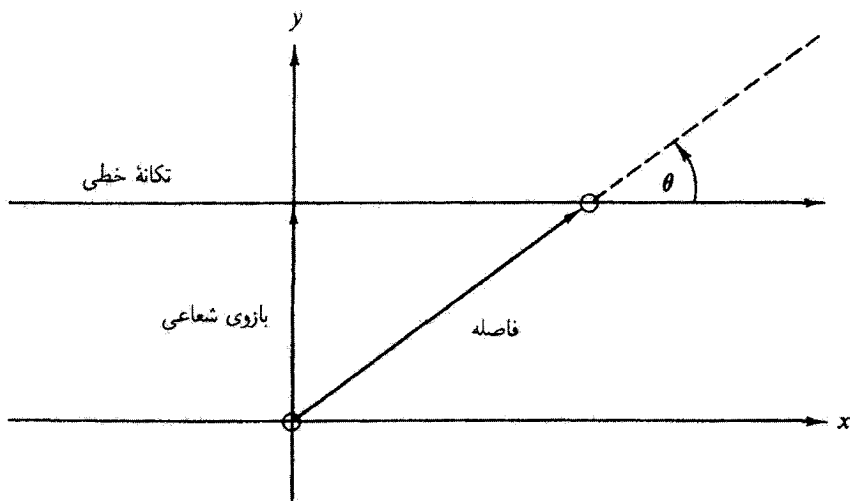
در این نوع ضرب بردارها، به جای کسینوس زاویه بین دو بردار، سینوس آن وارد می‌شود. مثلاً، تکانه زاویه‌ای یک جسم، بنابر تعریف، عبارت است از (شکل ۱-۱۱):

تکانه زاویه‌ای = بازوی شعاعی \times تکانه خطی

$$= \text{فاصله} \times \text{تکانه خطی} \times (\sin \theta)$$

ضرب برداری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، تا بررسی مسائل مربوط به کمیتهایی نظیر تکانه زاویه‌ای، گشتاور نیرو و سرعت زاویه‌ای ساده‌تر صورت پذیرد،

$$C = A \times B$$



شکل ۱-۱۱ تکانه زاویه‌ای.

که در آن

$$C = AB \sin \theta \quad (۳۲-۱)$$

در اینجا، C برخلاف حاصلضرب اسکالر، یک بردار است که به آن جهت عمود بر صفحه A و B نسبت می‌دهیم، به طوری که A ، B و C دستگاه راستگردی را تشکیل دهند. با این گزینش جهت، داریم

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad \text{یاد جا به جایی} \quad (۱-۳۲الف)$$

بنابر تعریف ضرب برداری

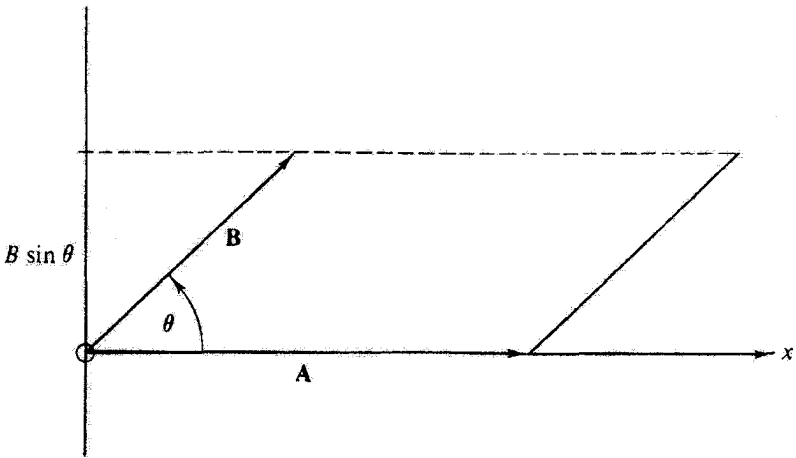
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (۱-۳۲ب)$$

در حالی که

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

و

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad (۱-۳۲ج)$$



شکل ۱۲-۱ نمایش متوازی‌الاضلاع مربوط به ضرب برداری.

رابطه بین تکانه خطی p و تکانه زاویه‌ای L (تعریف‌کننده تکانه زاویه‌ای):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

و رابطه بین سرعت خطی \mathbf{v} و سرعت زاویه‌ای ω :

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

نمونه‌هایی از ضرب برداری در فیزیک ریاضی به شمار می‌آیند. بردارهای \mathbf{v} و \mathbf{p} خواص ذره یا دستگاه فیزیکی را توصیف می‌کنند. ولی بردار مکان \mathbf{r} با انتخاب مبدأ مختصات تعیین می‌شود. به این اعتبار، ω و \mathbf{L} به انتخاب مبدأ بستگی دارند. کمیت آشنای القای مغناطیسی \mathbf{B} معمولاً از طریق معادله نیروی ضرب برداری^۱ زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

\mathbf{v} در اینجا سرعت بار الکتریکی q و \mathbf{F}_M نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک است. تعبیر و تفسیر هندسی ضرب برداری مهم تلقی می‌شود که در بخش‌های بعد از آن استفاده خواهیم کرد. \mathbf{A} و \mathbf{B} یک متوازی‌الاضلاع می‌سازند (شکل ۱۲-۱)، اگر A را قاعده این متوازی‌الاضلاع بگیریم، $B \sin \theta$ ارتفاع آن می‌شود. در نتیجه کمیت $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$ ، مساحت این

۱. در اینجا میدان الکتریکی \mathbf{E} صفر اختیار شده است.

متوازی‌الاضلاع است. اگر برای متوازی‌الاضلاعی که \mathbf{A} و \mathbf{B} آن را می‌سازند، بردار مساحتی عمود بر صفحه متوازی‌الاضلاع تعریف کنیم، بردار $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ این بردار مساحت خواهد بود. با این تعریف می‌توانیم مساحت را یک کمیت برداری بشناسیم.

به‌عنوان نکته‌ای خارج از موضوع اصلی، خاطرنشان می‌کنیم که معادله ۱-۳۲ ج و صورت تغییر یافته‌ای از معادله ۱-۳۲ ب نقطه شروعی برای عنوان کردن کوآرینونها به‌شمار می‌آید. به‌جای معادله ۱-۳۲ باید معادله $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = -\mathbf{1}$ را قرار دهیم.

برای ضرب برداری $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ تعریف دیگری نیز وجود دارد که مؤلفه‌های \mathbf{C} را مشخص می‌کند

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned} \quad (۳۳-۱)$$

یا

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j \quad i, j, k \text{ متفاوت} \quad (۳۴-۱)$$

با همه جایگشت‌های چرخه‌ای اندیسه‌های i, j و k حاصلضرب برداری \mathbf{C} را می‌توان به نحو معادلی با دترمینان^۱ زیر نمایش داد

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (۳۵-۱)$$

بسط این دترمینان برحسب سطر بالایی آن، سه مؤلفه \mathbf{C} را که در معادله ۱-۳۳ داده شده‌اند، به‌دست می‌دهد.

اگر معادله ۱-۳۲ را تعریف هندسی ضرب برداری بدانیم، معادله ۱-۳۳ تعریف جبری آن است.

۱. خلاصه‌ای درباره دترمینانها در بخش ۴-۱ آمده است.

مثال ۱-۴-۱: برای A و B مثال ۱-۱-۱

$$A = 6i + 4j + 3k$$

$$B = 2i - 3j - 3k$$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} \\ &= i(-12 + 9) - j(-18 - 6) + k(-18 - 8) \\ &= -3i + 24j - 26k \end{aligned}$$

برای آنکه هم‌ارزی معادله ۱-۳۲ و تعریف مؤلفه‌ای در معادله ۱-۳۳ را نشان دهیم، $A \cdot C$ و $B \cdot C$ را با استفاده از معادله ۱-۳۳ محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} A \cdot C &= A \cdot (A \times B) \\ &= A_x(A_y B_z - A_z B_y) + A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (36-1)$$

به همین ترتیب

$$B \cdot C = B \cdot (A \times B) = 0 \quad (37-1)$$

از معادله‌های ۱-۳۶ و ۱-۳۷ معلوم می‌شود که C هم بر A و هم بر B عمود است ($\cos \theta = 0$). در نتیجه C بر صفحه‌ای که A و B تعریف می‌کنند عمود است. جهت مثبت با در نظر گرفتن حالت‌های خاصی مانند بردارهای $k = i \times j = +A_x B_y C_z$ تعیین می‌شود. بزرگی بردار C به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} (A \times B) \cdot (A \times B) &= A^T B^T - (A \cdot B)^T \\ &= A^T B^T - A^T B^T \cos^2 \theta \\ &= A^T B^T \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (38-1)$$

بنابراین

$$C = AB \sin \theta \quad (39-1)$$

اولین مرحلهٔ پدروانه در معادلهٔ ۳۸-۱ را می‌شود با بسط دادن برحسب مؤلفه‌ها و با استفاده از معادلهٔ ۳۳-۱ به‌ازای $A \times B$ و معادلهٔ ۲۲-۱ به‌ازای ضرب نقطه‌ای ثابت کرد. معادلات ۳۶-۱ و ۳۷-۱ و ۳۹-۱، هم‌ارزی معادلات ۳۲-۱ و ۳۳-۱، یعنی دو تعریف ضرب برداری را نمایش می‌دهند.

هنوز این مسئله باقی مانده است که نشان دهیم کمیت $C = A \times B$ واقعاً یک بردار است: یعنی از قانون تبدیل برداری، معادلهٔ ۱۵-۱، پیروی می‌کند. از یک دستگاه چرخیده (پریم‌دار) شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned} C'_i &= A'_j B'_k - A'_k B'_j && i \text{ و } j \text{ و } k \text{ با ترتیب چرخه‌ای} \\ &= \sum_l a_{jl} A_l \sum_m a_{km} B_m - \sum_l a_{kl} A_l \sum_m a_{jm} B_m && (۴۰-۱) \\ &= \sum_{l,m} (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m \end{aligned}$$

ترکیبی از کسینوسهای هادی که در پرانتزها آمده است، به‌ازای $m = l$ صفر می‌شود. بنابراین، با هر انتخابی برای i ، j و k مقادیر معینی خواهند داشت و شش ترکیب غیرصفر برای l و m داریم. اگر بگیریم $i = ۳$ ، خواهیم داشت: $j = ۱$ و $k = ۲$ (ترتیب چرخه‌ای)، و ترکیبهای زیر را برای کسینوسهای هادی به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a_{۱۱} a_{۲۲} - a_{۲۱} a_{۱۲} &= a_{۳۳} \\ a_{۱۲} a_{۲۱} - a_{۲۲} a_{۱۱} &= a_{۳۲} && (۴۱-۱) \\ a_{۱۲} a_{۲۲} - a_{۲۲} a_{۱۲} &= a_{۳۱} \end{aligned}$$

و قرینه‌های جبری این ترکیبها را نیز می‌یابیم. معادلات ۴۱-۱ اتحادهایی‌اند که برای کسینوسهای هادی برقرارند. درستی این اتحادها را می‌توانیم با استفاده از دترمینانها و ماتریسها تحقیق کنیم (مسئله ۳-۳-۴). در معادلهٔ ۴۱-۱ می‌نشانیم

$$\begin{aligned} C'_۳ &= a_{۳۳} A_۱ B_۲ + a_{۳۲} A_۲ B_۱ + a_{۳۱} A_۲ B_۲ \\ &\quad - a_{۳۲} A_۲ B_۱ - a_{۳۳} A_۱ B_۲ - a_{۳۱} A_۲ B_۲ \\ &= a_{۳۱} C_۱ + a_{۳۲} C_۲ + a_{۳۳} C_۳ \\ &= \sum_n a_{۳n} C_n && (۴۲-۱) \end{aligned}$$

با جایگشت اندیسها، $C'_۱$ و $C'_۲$ را نیز محاسبه می‌کنیم، می‌بینیم که معادلهٔ ۱۵-۱ برقرار است و C واقعاً یک بردار است. باید بگوییم که ماهیت برداری ضرب برداری اتفاقی است که به ماهیت

سه بعدی فضای معمولی مربوط می‌شود.^۱ در فصل ۳ خواهیم دید که ضرب برداری را می‌توانیم به صورت یک تانسور مرتبه دوی پادمتقارن نیز به حساب آوریم!

اگر بردار را به همان صورت قسمت آخر بخش ۱-۲، به صورت یک سه تایی مرتب از اعداد (یا توابع) تعریف کنیم، بدون هیچ دشواری می‌توانیم ضرب برداری را نیز بردار بدانیم. عمل ضرب برداری، دو سه تایی، A و B را روی سه تایی سوم یعنی C می‌نگارد که بنا به تعریف یک بردار است. به این ترتیب، تا اینجا بردارها را به دو صورت می‌توانیم در هم ضرب کنیم، در فصل ۳ با صورت سومی برای ضرب بردارها آشنا می‌شویم. اما تقسیم بر بردار چگونه صورت می‌گیرد؟ اثبات می‌شود که خارج قسمت B/A به طور یکتایی مشخص نمی‌شود. (مسئله ۴-۲-۱۹) مگر آنکه فرض کنیم A و B موازی‌اند. از این رو تقسیم یک بردار بر بردار دیگر تعریف نمی‌شود.

مسائل

۱-۴-۱ دو بردار A و B به صورت زیر مفروض‌اند

$$A = 2i + 4j + 6k$$

$$B = 3i - 3j - 5k$$

حاصلضربهای اسکالر و برداری $A \cdot B$ و $A \times B$ را محاسبه کنید.

۱-۴-۲ با بسط دادن A ، B و C در $C = A \times B$ بر حسب مؤلفه‌های دکارتی، هم‌ارزی

معادله ۱-۴-۲ و تعریف مؤلفه‌ای در معادله ۱-۳-۳ را نشان دهید.

۱-۴-۳ با استفاده از بردار $C = A + B$ ، نشان دهید که عبارت $C \times C$ به رابطه پادتعویض‌پذیری

زیر منجر می‌شود:

$$A \times B = -B \times A$$

۱-۴-۴ نشان دهید

$$(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2 \quad (\text{الف})$$

$$(A - B) \times (A + B) = 2A \times B \quad (\text{ب})$$

درستی قوانین توزیع‌پذیری مورد نیاز، یعنی

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

۱. معادله ۱-۴-۱، به خصوص فقط در فضای سه بعدی برقرار است. از نظر فنی در فضای هفت بعدی R^7 نیز می‌توانیم یک ضرب برداری تعریف کنیم، ولی این ضرب برداری خواص غیرقابل قبول (آسیب‌شناختی) پیدا می‌کند.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

را می‌توانید (اگر بخواهید) از طریق بسط دادن برحسب مؤلفه‌های دکارتی به آسانی تحقیق کنید.
۵-۴-۱ سه بردار زیر مفروض است

$$\mathbf{P} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{Q} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

از بین این سه بردار، دو بردار بر هم عمود و دو بردار موازی یا پادموازی را بیابید.
۶-۴-۱ دو بردار $\mathbf{P} = iP_x + jP_y$ و $\mathbf{Q} = iQ_x + jQ_y$ ، دو بردار غیرموازی (و غیر پادموازی) در صفحه xy ؛ نشان دهید $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ در جهت z است.

۷-۴-۱ ثابت کنید: $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (AB)^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$.
۸-۴-۱ با بهره‌گیری از بردارهای

$$\mathbf{P} = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{i} \cos \varphi - \mathbf{j} \sin \varphi$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi$$

اتحادهای مثلثاتی آشنای زیر را اثبات کنید:

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

۹-۴-۱ (الف) بردار \mathbf{A} را چنان بیابید که بر دو بردار زیر عمود باشند

$$\mathbf{U} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(ب) A چگونه برداری باشد تا افزون بر برخورداری از شرایط بالا، بزرگی واحد نیز داشته باشد. ۱-۴-۱۰ اگر چاربردار a, b, c, d جمله‌گی در یک صفحه واقع باشند، نشان دهید:

$$(a \times b) \times (c \times d) = 0$$

[راهنمایی: جهت بردارهای حاصلضرب برداری را در نظر بگیرید.]

۱-۴-۱۱ مختصات سه رأس یک مثلث عبارت‌اند از $(2, 1, 5)$ ، $(5, 2, 8)$ و $(4, 8, 2)$.

مساحت این مثلث را با استفاده از روشهای برداری محاسبه کنید.

۱-۴-۱۲ رأسهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به ترتیب عبارت‌اند از: $(1, 0, 0)$ ، $(2, -1, 0)$ ،

$(0, -1, 1)$ و $(-1, 0, 1)$. بردار مساحت مثلث ABD و مثلث BCD را محاسبه کنید. آیا

این دو بردار با هم برابرند؟

جواب: ABD مساحت $= -1/2(i + j + 2k)$.

۱-۴-۱۳ مبدأ و سه بردار A, B, C (که نقطه آغاز جمله‌گی آنها مبدأ مختصات است) یک

چهاروجهی را تعریف می‌کنند. با مثبت گرفتن جهت بروسو، مساحت برداری کل چهاروجه این

چهاروجهی را محاسبه کنید.

یادآوری: این نتیجه در بخش ۱-۱۱ به هر سطح بسته‌ای تعمیم داده خواهد شد.

۱-۴-۱۴ اضلاع و زوایای مثلث کروی ABC را که به کمک سه بردار زیر تعریف می‌شود، بیابید

$$A = (1, 0, 0)$$

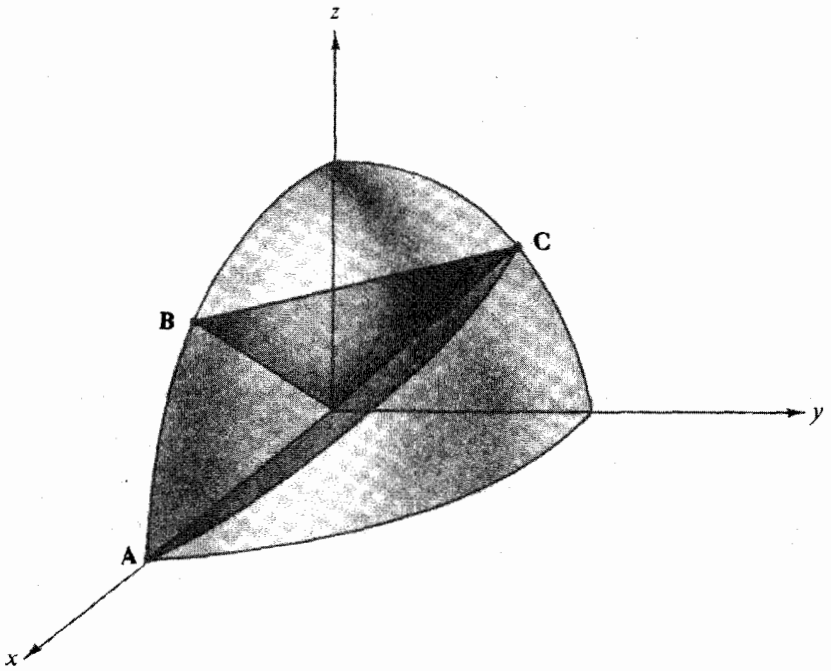
$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$C = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

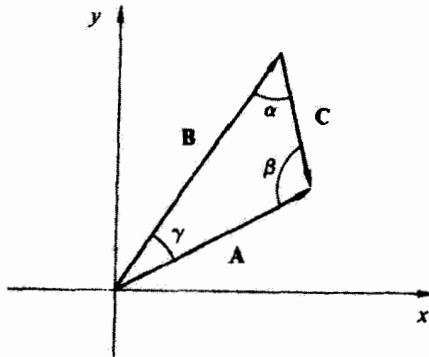
هر یک از این بردارها از مبدأ شروع می‌شود (شکل ۱-۱۳).

۱-۴-۱۵ قانون سینوسها را استخراج کنید:

$$\frac{\sin \alpha}{|A|} = \frac{\sin \beta}{|B|} = \frac{\sin \gamma}{|C|}$$



شکل ۱-۱۳ مثلث کروی.



۱-۴-۱۶ القای مغناطیسی B به کمک معادله نیروی لورنتس تعریف می شود:

$$F = q(v \times B)$$

با انجام سه آزمایش پی می بریم که

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = 2\mathbf{k} - 4\mathbf{j} \quad \text{اگر } \mathbf{v} = \mathbf{i} \text{ آنگاه}$$

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k} \quad \text{اگر } \mathbf{v} = \mathbf{j} \text{ آنگاه}$$

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{j} - 2\mathbf{i} \quad \text{و اگر } \mathbf{v} = \mathbf{k} \text{ آنگاه}$$

با استفاده از نتایج این سه آزمایش مجزا، القای مغناطیسی \mathbf{B} را محاسبه کنید.

۵-۱ ضرب سه‌گانه اسکالر، ضرب سه‌گانه برداری ضرب سه‌گانه اسکالر

در بخش‌های ۱-۳ و ۱-۴، با دو نوع ضربی که در اینجا مطرح است، آشنا شدیم. اما، با ترکیب سه بردار به صورت $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ و $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ آنقدر مواجه می‌شویم که خوب است آنها را بیشتر بررسی کنیم. ترکیب

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

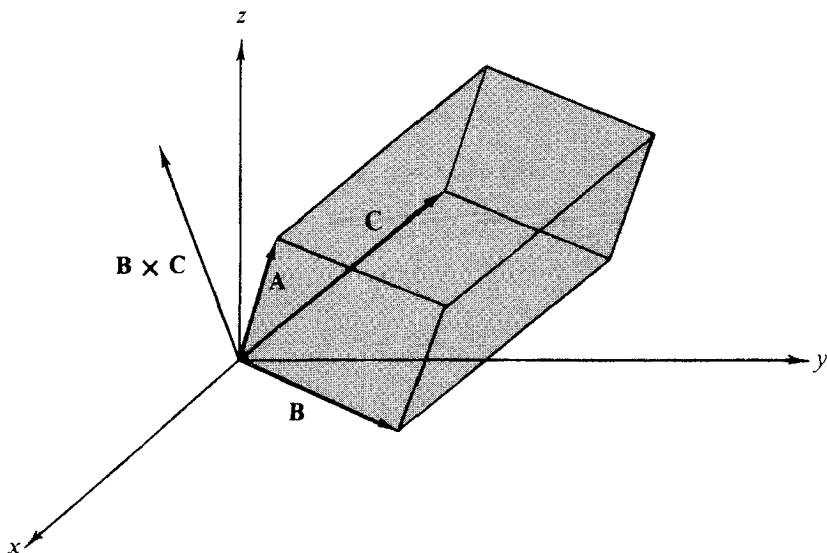
را ضرب سه‌گانه اسکالر می‌نامند؛ $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ یک بردار است که حاصلضرب نقطه‌ای آن با \mathbf{A} یک کمیت عددی با اسکالر است. دقت کنید که $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ نشانگر یک کمیت عددی است که در یک بردار ضرب برداری شده است؛ این عمل تعریف نشده است. بنابراین، اگر بپذیریم از چنین تعبیر تعریف‌نشده‌ای اجتناب کنیم، می‌توانیم پرانترها را برداریم و ضرب سه‌گانه اسکالر را به صورت $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ بنویسیم.

با استفاده از معادله ۱-۳۳، برای ضرب برداری، و معادله ۱-۲۲ برای ضرب نقطه‌ای، می‌رسیم

به

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\ &= -\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{B} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} \end{aligned} \quad (43-1)$$

والی آخر، مرتبه بالای تقارنی که در بسط مؤلفه‌ای بروز می‌کند، شایان توجه است. هر یک از جمله‌ها حاوی عوامل A_i ، B_j و C_k است. اگر i ، j و k به ترتیب چرخه‌ای باشند (x, y, z) ، علامت مثبت است. اگر ترتیب ضرب پادچرخه‌ای باشد، علامت منفی خواهد بود. به علاوه، جای



شکل ۱۴-۱ نمایش متوازی‌السطوحی ضرب سه‌گانه اسکالر.

نقطه و ضربدر را می‌شود تعویض کرد:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (۴۴-۱)$$

دترمینان زیر بسط مؤلفه‌ای معادله ۴۳-۱ را به نحو مناسبی نمایش می‌دهد:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (۴۵-۱)$$

قواعد مربوط به تعویض سطرها و ستونهای دترمینان^۱، جایگشتهایی را که در معادله ۴۳-۱ برشمرده شده‌اند، به سرعت تأیید می‌کند؛ تقارن \mathbf{A} و \mathbf{B} و \mathbf{C} در دترمینان نیز رابطه ۴۴-۱ را تأیید می‌کند.

ضربهای سه‌گانه‌ای که در بخش ۴-۱ نمایشگر عمود بودن $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ بر \mathbf{A} و \mathbf{B} بودند، حالت‌های خاصی از نتیجه کلی (معادله ۴۳-۱) به‌شمار می‌آیند.

ضرب سه‌گانه اسکالر تعبیر هندسی مستقیمی دارد. می‌توان چنین تعبیر کرد که سه بردار \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} ، بنا بر تعریف، تعبیر یک متوازی‌السطوح هستند (شکل ۱۴-۱):

۱. خلاصه‌ای از خواص دترمینانها را در بخش ۱-۴ خواهید یافت.

$$|\mathbf{B} \times \mathbf{C}| = BC \sin \theta$$

$$= \text{مساحت قاعده متوازی السطوح} \quad (۴۶-۱)$$

عمود بودن جهت این بردار بر قاعده، آشکار است. ضرب نقطه‌ای \mathbf{A} در این بردار، به معنای ضرب کردن مساحت قاعده در تصویر \mathbf{A} بر روی خط عمود بر قاعده، یا حاصلضرب قاعده در ارتفاع است. بنابراین:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = C \text{ و } \mathbf{B}, \mathbf{A} \text{ توسط } \mathbf{A}$$

حجم متوازی السطوحی که توسط \mathbf{A}, \mathbf{B} و \mathbf{C}

تعریف شده باشد.

مثال ۱-۵-۱ در متوازی السطوحی به‌ازای:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

داریم:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (۴۷-۱)$$

با بسط این دترمینان برحسب کهاد سطر اول، داریم

$$1(0 + 1) - 2(0 - 1) - 1(0 - 1) = 4$$

این حجم متوازی السطوحی است که توسط \mathbf{A}, \mathbf{B} و \mathbf{C} تعریف می‌شود. یادآوری می‌کنیم که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ممکن است در بعضی موارد منفی باشد! این مشکل و تفسیر آن در فصل ۳ بررسی می‌شود.

یکی از کاربردهای مهم و جالب توجه ضرب سه‌گانه اسکالر ساختن شبکه وارون بلور است. فرض کنید \mathbf{a}, \mathbf{b} و \mathbf{c} سه برداری باشند که شبکه بلور را تعریف می‌کنند (لزومی ندارد که این بردارها

بر هم عمود باشند). می‌توان برداری را که یک نقطه شبکه را به نقطه دیگر شبکه متصل می‌کند، به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{r} = n_a \mathbf{a} + n_b \mathbf{b} + n_c \mathbf{c} \quad (48-1)$$

که در آن n_c و n_b ، n_a اعداد صحیح‌اند. با این بردارها می‌توانیم بردارهای زیر را تشکیل دهیم

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \quad (الف\ 48-1)$$

می‌بینیم که \mathbf{a}' بر صفحه \mathbf{b} و \mathbf{c} عمود و بزرگی آن با a^{-1} متناسب است. در واقع، به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = 1 \quad (ب\ 48-1)$$

در حالی که

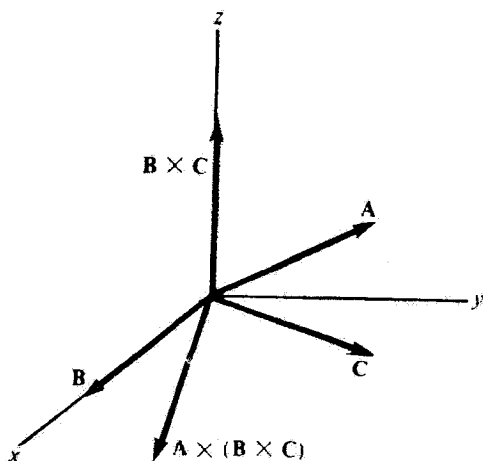
$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (ج\ 48-1)$$

نام شبکه وارون از معادله‌های 48-1 ب و 48-1 ج استخراج شده است. گاهی فضایی ریاضی را که این شبکه وارون در آن تعریف می‌شود، براساس روابطی که بین آنها و تحلیل فوریه در فصلهای ۱۴ و ۱۵ برقرار است، فضای فوریه می‌نامند. شبکه وارون در بررسی مسائل مربوط به پراکندگی موج توسط صفحات متفاوت بلور مفید واقع می‌شود. جزئیات مشروحتر در این باره را می‌توان در کتابی تحت عنوان "اصول فیزیک نوین" یافت. ما بار دیگر در بررسی دستگاههای مختصات مایل در بخش ۴-۴ با شبکه وارون روبه‌رو می‌شویم.

ضرب سه‌گانه برداری

دومین ضرب سه‌گانه مورد توجه، عبارت $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ است. در این عبارت، پراترها را باید نکه داشت. حالت خاص زیر این موضوع را به‌خوبی نشان می‌دهد

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad (49-1)$$



شکل ۱-۱۵ B و C در صفحه xy واقع‌اند. $B \times C$ بر صفحه xy عمود است، و در شکل در راستای محور z نمایش داده شده است. $A \times (B \times C)$ بر محور z عمود، و از این رو در صفحه xy واقع است.

ولی

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

این واقعیت که ضرب سه‌گانه برداری یک بردار است، از تعریف ضرب برداری نتیجه می‌شود. جهت این بردار بر A و بر $B \times C$ عمود است. صفحه B و C بر $B \times C$ عمود است؛ در نتیجه $A \times (B \times C)$ در این صفحه واقع است. در حالت خاص، اگر B و C در صفحه xy واقع باشند، $B \times C$ در جهت z و $A \times (B \times C)$ باز در صفحه xy واقع است (شکل ۱-۱۵). یعنی، $A \times (B \times C)$ ترکیب خطی B و C است. پی می‌بریم که:

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (۱-۵)$$

این رابطه را گاهی قاعدهٔ بک-کب ($BAC - CAB$) می‌نامند. درستی این قاعده را می‌توانیم با روش مستقیم بسط برحسب مؤلفه‌های دکارتی تحقیق کنیم، که البته روش چندان جالبی نیست (مسئله ۱-۵-۲).

مضمون مسئله ۳-۴-۸ روش دیگری برای استخراج این قاعده با استفاده از ϵ_{ijk} لوی-چی ویتا است.

شاید بتوان گفت که قاعدهٔ بک-کب مهمترین اتحاد برداری است. با توجه به آنکه در مسائل و استدلالهای بعدی بارها این قاعده به‌کار خواهد رفت، توصیه می‌شود آن را به‌خاطر بسپارید. در اینجا خاطر نشان می‌کنیم که با توجه به آنکه بردارها از مختصات مستقل‌اند، معادلات برداری نیز از دستگاه مختصات مستقل هستند. دستگاه مختصات فقط مؤلفه‌ها را مشخص می‌کند. اگر

یک معادله برداری را بتوان در مختصات دکارتی اثبات کرد، این معادله در هر یک از دستگاههای مختصاتی که در فصل ۲ معرفی خواهیم کرد، اثبات شده و صادق است.

مثال ۱-۵-۲ ضرب سه‌گانه برداری: برای سه بردار مثال ۱-۵-۱ با استفاده از معادله ۱-۵-۵ داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{j} + \mathbf{k})(1 - 2) - (\mathbf{i} - \mathbf{j})(2 - 1) \\ &= -\mathbf{i} - \mathbf{k} \end{aligned}$$

به تفصیل خواهیم داشت:

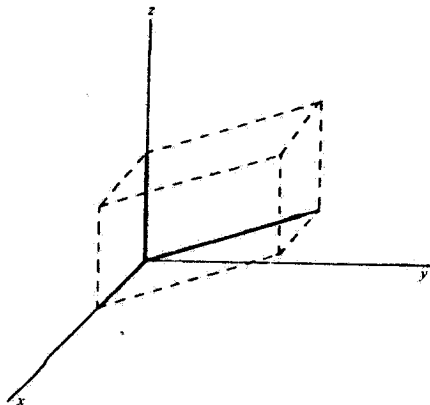
$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$$

ضربهای پیچیده‌تر دیگر را می‌توانیم با بهره‌گیری از ضربهای سه‌گانه برداری و اسکالر ساده کنیم.

مسائل

۱-۵-۱ یکی از رأسهای یک متوازی‌السطوح شیشه‌ای در مبدأ واقع است. سه رأس مجاور آن در



$(0, 3, 1)$ و $(0, 0, 2)$ هستند. تمام طولها برحسب سانتی متر است. با به کار بردن ضرب سه گانه اسکالر محاسبه کنید که چند سانتی متر مکعب شیشه در این متوازی السطوح به کار رفته است.

۱-۵-۲ با بسط مستقیم برحسب مؤلفه های دکارتی، درستی بسط زیر را برای ضرب سه گانه برداری تحقیق کنید

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

۱-۵-۳ نشان دهید که گام نخست در معادله ۱-۳۸، یعنی

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

با قاعدهٔ بک-کب ضرب سه گانه برداری سازگار است.

۱-۵-۴ با سه بردار \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} ، به قرار زیر:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$$

(الف) ضرب سه گانه اسکالر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ را محاسبه کنید. با توجه به $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ ، نتیجه ای را که برای ضرب سه گانه اسکالر به دست آورده اید از نظر هندسی تفسیر کنید. (ب) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ را محاسبه کنید.

۱-۵-۵ تکانه زاویه ای \mathbf{L} ذره با رابطه $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ بیان می شود، که در آن \mathbf{p} تکانه خطی است. با در نظر گرفتن رابطه بین سرعت خطی و سرعت زاویه ای، $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ، نشان دهید که:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}^2[\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\omega})]$$

در اینجا \mathbf{r}_0 بردار یکه در جهت \mathbf{r} است. این رابطه به ازای $\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ، به صورت $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ ساده می شود، که در آن I ، گشتاور لختی با کمیت $m\mathbf{r}^2$ بیان می شود. این نتیجه در بخش ۴-۶ تعمیم داده می شود و بنابر تعریف عبارت است از تانسور لختی.

۵-۱-۶ انرژی جنبشی هر تک ذره با رابطه $T = \frac{1}{2}mv^2$ بیان می شود. این رابطه برای حرکت چرخشی به صورت $\frac{1}{2}m(\omega \times r)^2$ درمی آید. نشان دهید که

$$T = \frac{1}{2}m[r^2\omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2]$$

این رابطه به ازای $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ به صورت $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ ساده می شود، که در آن گشتاور لختی با کمیت mr^2 بیان می شود.
۵-۱-۷ نشان دهید که

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

۵-۱-۸ بردار \mathbf{A} به دو بردار یکی شعاعی \mathbf{A}_r و دیگری مماسی \mathbf{A}_t تجزیه شده است. اگر بردار \mathbf{r}_0 در جهت شعاعی را با \mathbf{r}_0 نمایش دهیم، نشان دهید که
(الف) $\mathbf{A}_r = \mathbf{r}_0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0)$

و

$$\mathbf{A}_t = -\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{A})$$

۵-۱-۹ ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه سه بردار (غیرصفر) \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} هم صفحه باشند، آن است که حاصلضرب سه گانه اسکالر

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$$

۵-۱-۱۰ سه بردار \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} به صورت زیر مفروض اند

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

کمتهای $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ و $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ، $\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ و $\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ و $\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ را محاسبه کنید.
۵-۱-۱۱ بردار \mathbf{D} ترکیب خطی سه بردار غیرصفر هم صفحه (و نامتعامد) است:

$$\mathbf{D} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}$$

نشان دهید که ضربیها برابر خارج قسمت ضربهای سه‌گانه اسکالر به صورت زیرند:

$$a = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}$$

۱۲-۵-۱ نشان دهید که:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

۱۳-۵-۱ نشان دهید که:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})\mathbf{D}$$

۱۴-۵-۱ در مثلثی کروی، مانند مثلث شکل ۱۳-۱، نشان دهید:

$$\frac{\sin A}{\sin \overline{BC}} = \frac{\sin B}{\sin \overline{CA}} = \frac{\sin C}{\sin \overline{AB}}$$

که در آن $\sin A$ سینوس زاویه رأس A و \overline{BC} ضلع روبه‌رو به آن (برحسب رادیان) است.

[راهنمایی: از مسئله ۱۳-۵-۱ بهره‌گیرید.]

۱۵-۵-۱ با فرض اینکه:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$$

نشان دهید:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y} = \delta_{xy} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})^{-1} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'} \quad (\text{ج})$$

۱۶-۵-۱ اگر داشته باشیم: $(x, y = a, b, c)$ و $x' \cdot y = \delta_{xy}$ ثابت کنید که:

$$a' = \frac{b \times c}{a \cdot b \times c}$$

(این عکس مسئله ۱۵-۵-۱ است.)

۱۷-۵-۱ نشان دهید که می‌توان هر بردار V را توسط رابطه زیر برحسب بردارهای وارون a' , b' و c' نمایش داد:

$$V = (V \cdot a)a' + (V \cdot b)b' + (V \cdot c)c'$$

۱۸-۵-۱ بار الکتریکی q_1 که با سرعت v_1 حرکت می‌کند، یک میدان مغناطیسی B ایجاد می‌کند، که با رابطه زیر بیان می‌شود

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{v \times r_0}{r^2} \text{ (برحسب واحدهای mks)}$$

که در آن r_0 از q_1 به سوی نقطه‌ای است که در آن B اندازه‌گیری می‌شود (قانون بیوساوار). (الف) نشان دهید نیرویی مغناطیسی که بر بار دوم q_2 ، با سرعت v_2 وارد می‌آید، از ضرب سه‌گانه اسکالر زیر به دست می‌آید

$$F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v_2 \times (v_1 \times r_0)$$

(ب) نیروی مغناطیسی متناظر F_1 را بنویسید که q_2 بر q_1 وارد می‌کند. بردار یکه شعاعی را که از آن بهره می‌گیرید، تعریف کنید. F_1 و F_2 را با یکدیگر مقایسه کنید. (ج) در حالتی که q_1 و q_2 روی مسیرهای موازی مجاور یکدیگر حرکت کنند، F_1 و F_2 را محاسبه کنید.

جواب:

(ب) $F_1 = -\mu_0 / 4\pi q_1 q_2 / r^2 v_1 \times (v_2 \times r_0)$ در حالت کلی، هیچ رابطه ساده‌ای

بین F_1 و F_2 برقرار نیست. به خصوص، قانون سوم نیوتون $F_1 = -F_2$ برقرار نیست.

(ج) $F_1 = \mu_0 / 4\pi q_1 q_2 / r^2 v^2 r_0 = -F_2$

رپایش متقابل.

۱-۶ گرادیان ∇

فرض کنید $\varphi(x, y, z)$ تابع نقطه‌ای اسکالر باشد؛ یعنی تابعی که مقدارش به مقدار مختصات (x, y, z) بستگی دارد. این تابع به عنوان یک اسکالر باید در هر نقطه معلوم فضا، دارای مقدار مشخصی مستقل از چرخش دستگاه مختصات باشد، یعنی

$$\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \quad (51-1)$$

با مشتق‌گیری نسبت به x'_i ، و با استفاده از قواعد مشتق‌گیری جزء به جزء و با توجه به معادله ۱-۱۶، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial x'_i} &= \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x'_i} \\ &= \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (52-1)$$

از مقایسه با قانون تبدیل برداری، معادله ۱-۱۷، پی می‌بریم که برداری با مؤلفه‌های $\partial \varphi / \partial x_j$ تشکیل داده‌ایم. این بردار را گرادیان φ می‌نامیم. یکی از نمادهای مناسب برای این بردار، عبارت است از

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (53-1)$$

یا

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (54-1)$$

$\nabla \varphi$ (که آن را $\nabla \varphi$ نیز می‌خوانیم) گرادیان تابع اسکالر φ ، و ∇ (یا ∇) خود یک عملگر دیفرانسیلی است (که بر روی اسکالر φ عمل می‌کند، یا از آن مشتق می‌گیرد). باید خاطرنشان کنیم که این عملگر موجودی دورگه است که هم باید از قوانین مربوط به عملیات برداری، و هم از قوانین مربوط به مشتق‌گیری جزئی پیروی کند.

مثال ۱-۶-۱ گرادیان تابعی از r : اینک به محاسبه گرادیان $f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ اقدام می‌کنیم:

$$\nabla f(r) = \mathbf{i} \frac{\partial f(r)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f(r)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f(r)}{\partial z}$$

وابستگی $f(r)$ به x از طریق وابستگی r به x است. بنابراین^۱ داریم

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

با استفاده از وابستگی r به x ، y و z ، داریم

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}$$

پس

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{x}{r}$$

با جایگشت مختصات ($x \rightarrow z$ و $z \rightarrow y$ و $y \rightarrow x$)، مشتقهای نسبت به y و z را نیز به دست می‌آوریم؛ در نتیجه

$$\begin{aligned} \nabla f(r) &= (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{df}{dr} \\ &= \mathbf{r}_0 \frac{df}{dr} \end{aligned}$$

در اینجا \mathbf{r}_0 بردار یکه (\mathbf{r}/r) در جهت مثبت شعاعی است. شیب تابعی از r برداری است در جهت (مثبت یا منفی) شعاعی. در بخش ۵-۲ خواهیم دید که \mathbf{r}_0 یکی از سه بردار یکه متعامد بهنجار مختصات قطبی کروی است.

یک تعبیر هندسی

یکی از کاربردهای مهم $\nabla\varphi$ آن است که آن را در نموی از طول

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz \quad (55-1)$$

۱. این حالت خاصی است از قاعده زنجیری مشتقگیری جزئی

$$\frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

در اینجا $\partial f/\partial r = df/dr$ و $\partial f/\partial \theta = \partial f/\partial \varphi = 0$

ضرب نقطه‌ای کنیم. به این ترتیب، می‌رسیم به

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \\ &= d\varphi\end{aligned}\quad (56-1)$$

که عبارت است از تغییر تابع اسکالر φ متناظر با تغییر مکان $d\mathbf{r}$. اینک دو نقطه P و Q را بر روی سطح

$$\varphi(x, y, z) = C, \text{ const.}$$

چنان در نظر می‌گیریم که نقطه Q به فاصله $d\mathbf{r}$ از P واقع باشد. در این صورت، اگر از P به Q برویم، تغییری که در $\varphi(x, y, z) = C$ روی می‌دهد، عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned}d\varphi &= (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0\end{aligned}\quad (57-1)$$

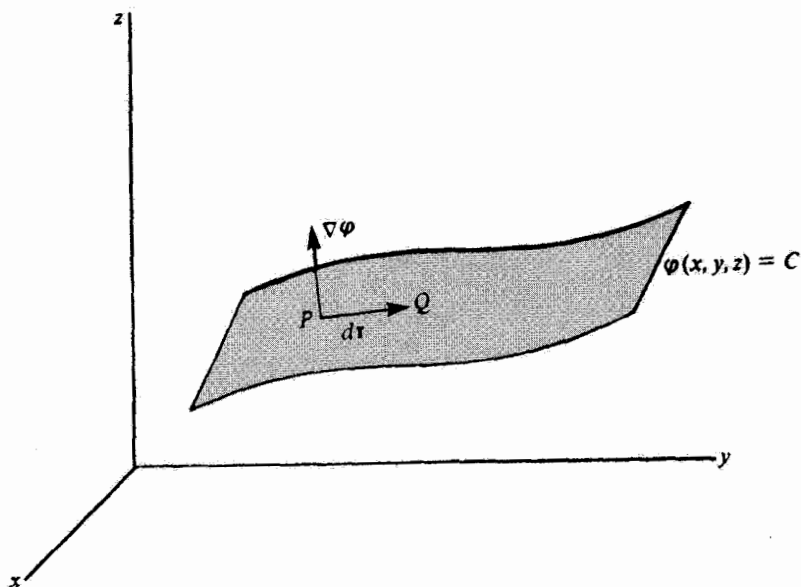
زیرا بر روی سطح $\varphi(x, y, z) = C$ باقی مانده‌ایم. این نتیجه نشان می‌دهد که $\nabla\varphi$ بر $d\mathbf{r}$ عمود است. نقطه Q در روی سطح می‌تواند در هر جهت دلخواهی از P باشد؛ یعنی $d\mathbf{r}$ می‌تواند در هر جهت اختیاری روی سطح $\varphi(x, y, z) = C$ وجود داشته باشد؛ از این رو $\nabla\varphi$ بر سطح $\varphi = \text{const.}$ عمود است (شکل ۱۶-۱).

اینک اگر $d\mathbf{r}$ یک نقطه از سطح $\varphi = C_1$ را به نقطه‌ای روی سطح مجاور $\varphi = C_2$ متصل کند (شکل ۱۷-۱ الف)، داریم

$$\begin{aligned}d\varphi &= C_2 - C_1 = \Delta C \\ &= (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}\quad (58-1)$$

به‌ازای هر $d\varphi$ مفروض، $|d\mathbf{r}|$ وقتی کمینه است که $d\mathbf{r}$ با $\nabla\varphi$ موازی باشد ($\cos\theta = 1$)؛ به‌ازای یک مقدار مفروض $|d\mathbf{r}|$ نیز تغییر در تابع اسکالر φ به‌شرطی بیشینه خواهد بود که $d\mathbf{r}$ با $\nabla\varphi$ موازی باشد. به این اعتبار، $\nabla\varphi$ برداری است در جهت بیشینه‌آهنگ تغییر فضایی φ . این شناسایی در فصل ۲، به هنگام بررسی دستگاههای مختصات غیردکارتی، به‌کار می‌آید.

این تعبیر $\nabla\varphi$ را می‌توان با استفاده از حساب بردشهای تحت قید نیز به‌دست آورد (مسئله ۱۷-۹).



شکل ۱۶-۱. نم طول dr ، روی سطح $\varphi = C$.

مثال ۱-۶-۲: به عنوان مثالی از تعبیر بالا، و نیز ادامه مسئله ۱-۶-۱، سطوح متشکل از پوسته‌های کروی هم‌مرکز را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۷-۱ ب). داریم

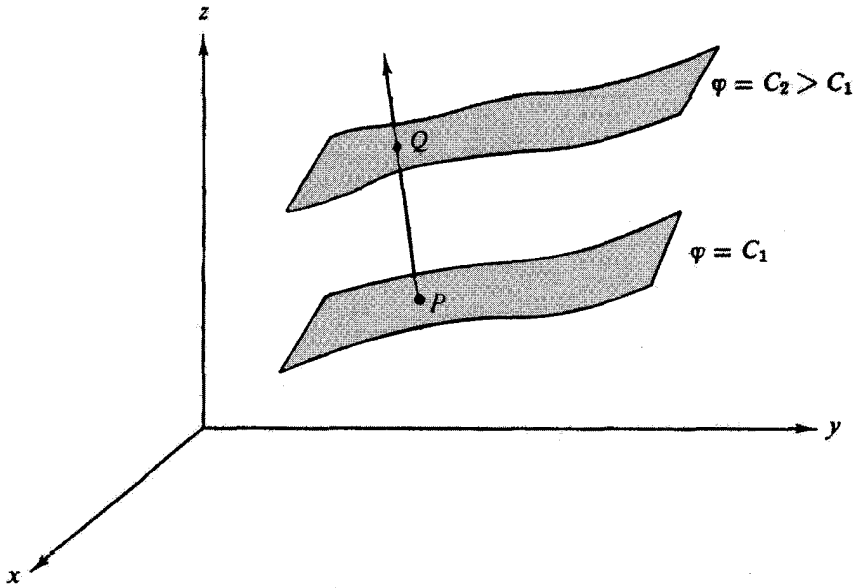
$$\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r_i = C_i$$

که در آن شعاع r_i برابر است با ثابت C_i . $\Delta C = \Delta \varphi = \Delta r_i$ ، یعنی فاصله بین دو پوسته است. از مسئله ۱-۶-۱ داریم:

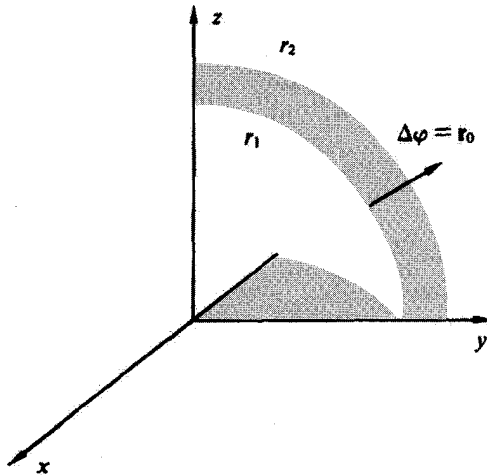
$$\nabla \varphi(r) = \mathbf{r}_0 \frac{d\varphi(r)}{dr} = \mathbf{r}_0$$

گرادیان در جهت شعاعی و عمود بر سطح کروی $\varphi = C$ است. شیب یک اسکالر، در فیزیک، برای بیان رابطه میدان نیرو با میدان پتانسیل بینهایت، از اهمیت برخوردار است.

$$\text{نیرو} = -\nabla (\text{پتانسیل}) \quad (۵۹-۱)$$



شکل ۱۷-۱ الف گرادیان.



شکل ۱۷-۱ ب گرادیان $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
 پوسته‌های کروی: $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r_2 = C_2$
 $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r_1 = C_1$

میدانهای گرانشی و الکتروستاتیکی از جمله میدانهایی اند که از این خاصیت برخوردارند. باید گفت که علامت منفی در معادله ۱-۵۹ برای آن است که آب به سوی پایین روان شود و نه به بالا. در بخش ۱-۱۳، بار دیگر معادله ۱-۵۹ را در حوزه وسیعتری بررسی خواهیم کرد.

مسائل

۱-۶-۱ به ازای $S(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-2/3}$ ؛ (الف) ∇S را در نقطه $(1, 2, 3)$ محاسبه کنید. (ب) بزرگی گرادیان S ، یعنی $|\nabla S|$ ، را در نقطه $(1, 2, 3)$ محاسبه کنید. (ج) کسینوسهای هادی ∇S را در نقطه $(1, 2, 3)$ به دست آورید.
۱-۶-۲ (الف) بردار یکه عمود بر سطح

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

را در نقطه $(1, 1, 1)$ بیابید. (ب) معادله صفحه مماس بر این سطح در نقطه $(1, 1, 1)$ را بنویسید.

جواب: (الف) $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$. (ب) $x + y + z = 3$.

۱-۶-۳ بردار $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{i}(x_1 - x_2) + \mathbf{j}(y_1 - y_2) + \mathbf{k}(z_1 - z_2)$ مفروض است. نشان دهید کمیت $\nabla \cdot \mathbf{r}_{12}$ (گرادیان بزرگی r_{12} نسبت به x_1, y_1, z_1 و x_2, y_2, z_2) بردار یکه‌ای است در جهت \mathbf{r}_{12} .
۱-۶-۴ تابع برداری \mathbf{F} هم به مختصات فضایی (x, y, z) ، و هم به زمان t بستگی دارد؛ نشان دهید:

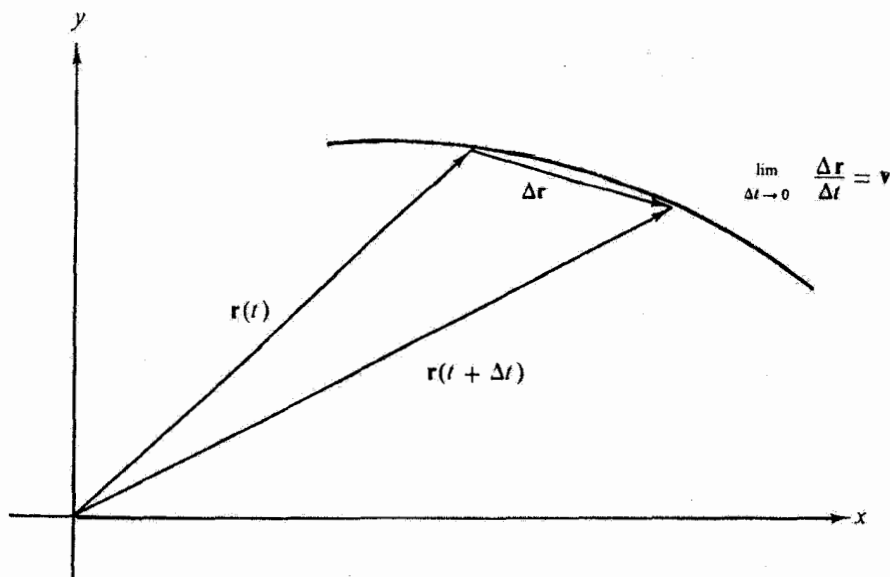
$$d\mathbf{F} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dt$$

۱-۶-۵ نشان دهید: $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$ ، که در آن u و v توابع اسکالر مشتق‌پذیری از x, y, z هستند.

۱-۶-۶ (الف) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آنکه مابین $u(x, y, z)$ و $v(x, y, z)$ از طریق عبارتی مانند $f(u, v) = 0$ رابطه برقرار شود، آن است که $(\nabla u) \times (\nabla v) = 0$. (ب) به ازای $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ ، نشان دهید که شرط $(\nabla u \times \nabla v) = 0$ به زاكوبی دوبعدی زیر منجر می‌شود:

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

فرض کنید u و v مشتق‌پذیرند.



شکل ۱۸-۱ مشتق‌گیری از یک بردار.

۷-۱ دیورژانس ∇

مشتق‌گیری از یک تابع برداری تعمیم ساده‌ای از مشتق‌گیری کمیت‌های اسکالر یا عددی است. فرض کنید مکان یک ماهواره در لحظه t با بردار $\mathbf{r}(t)$ بیان شود،

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \mathbf{v} \quad \text{سرعت خطی}$$

در اینجا نیز، از لحاظ نموداری، مطابق شکل ۱۸-۱، گرادیان یک منحنی، یا مدار و یا مسیر را داریم.

اگر $\mathbf{r}(t)$ را به مؤلفه‌های دکارتی تجزیه کنیم، $d\mathbf{r}/dt$ همواره مستقیماً به صورت جمع برداری سه مشتق اسکالر (در فضای سه بعدی) در می‌آید. در سایر دستگاه‌های مختصات (فصل ۲)، وضعیت کمی پیچیده‌تر می‌شود، زیرا جهت بردارهای یکه در این دستگاه‌ها ثابت نیست. در سطور آتی نشان خواهیم داد که مشتق‌گیری نسبت به مختصات فضایی نیز مشابه با مشتق‌گیری نسبت به زمان صورت می‌گیرد.

در بخش ۶-۱، ∇ به صورت یک عملگر برداری تعریف شد. اینک با در نظر گرفتن هر دو جنبه‌ی خواص برداری و مشتق‌گیری از این بردار، حاصل اعمال آن بر یک بردار دیگر را بررسی

می‌کنیم. نخست حاصلضرب داخلی آن را با یک بردار دیگر، به قرار زیر به دست می‌آوریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (۶۰-۱)$$

که به آن دیورژانس \mathbf{V} می‌گویند. این کمیت، مطابق بحث بخش ۱-۳، کمیتی اسکالر است. مثال ۱-۷-۱: $\nabla \cdot \mathbf{r}$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (ix + jy + kz) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \end{aligned}$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = ۳$$

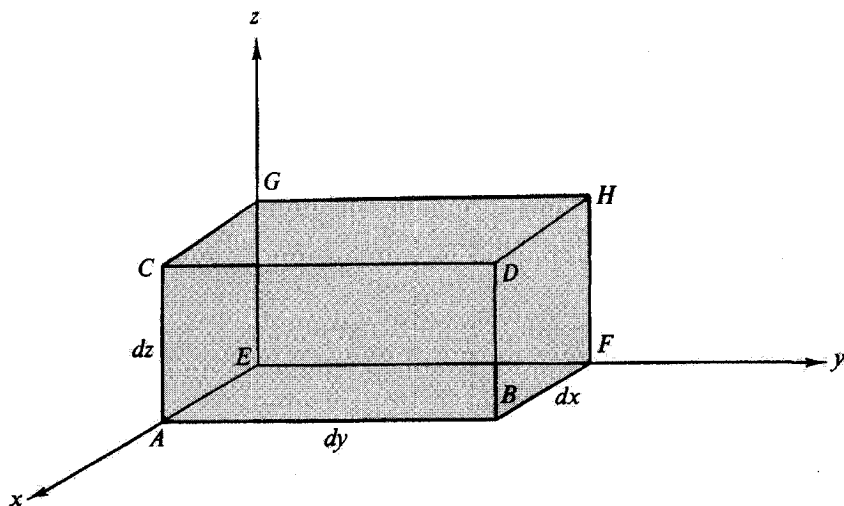
مثال ۲-۷-۱: با تعمیم مثال ۱-۷-۱، داریم

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r}f(r) &= \frac{\partial}{\partial x}[xf(r)] + \frac{\partial}{\partial y}[yf(r)] + \frac{\partial}{\partial z}[zf(r)] \\ &= ۳f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{y^2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{z^2}{r} \frac{df}{dr} \\ &= ۳f(r) + r \frac{df}{dr} \end{aligned}$$

محاسبه مشتقهای جزئی معادله دوم در مثال ۲-۷-۱، در مثال ۱-۶-۱ محاسبه شده‌اند. در حالت خاص، اگر $f(r) = r^{n-1}$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r}r^{n-1} &= \nabla \cdot \mathbf{r}_o r^n \\ &= ۳r^{n-1} + (n-1)r^{n-1} \quad (۱-۶۰ الف) \\ &= (n+۲)r^{n-1} \end{aligned}$$

این دیورژانس به ازای $n = -۲$ صفر می‌شود؛ از این نتیجه مهم در بخش ۱-۱۴ استفاده می‌شود.



شکل ۱۹-۱ مکعب مستطیل دیفرانسیلی (در یک هشتم اول یا مثبت).

یک تعبیر فیزیکی

برای آنکه تصویری از معنای فیزیکی دیورژانس کسب کنیم، $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\mathbf{v}(x, y, z)$ سرعت در یک شاره تراکم‌پذیر و $\rho(x, y, z)$ چگالی آن در نقطه (x, y, z) است. حجم کوچک $dx dy dz$ را، مطابق شکل ۱۹-۱، در نظر می‌گیریم. شاره‌ای که در واحد زمان (در جهت مثبت x) از وجه $EFGH$ ، به درون این حجم جاری می‌شود، یعنی آهنگ شارش به درون از وجه $EFGH$ ، عبارت است از $dy dz \cdot \rho v_x|_{x=0}$. مؤلفه‌های ρv_y و ρv_z شارش که بر این وجه مماس‌اند، در شارش از این وجه به درون حجم نقشی ندارند. آهنگ شارش به خارج (باز هم در جهت مثبت x) از وجه $ABCD$ عبارت است از $dy dz \cdot \rho v_x|_{x=dx}$. این کمیت را به صورت سری مکولون^۱ (بخش ۵-۶) بسط می‌دهیم تا این دو شار را با هم مقایسه و آهنگ شارش خالص خروجی را محاسبه کنیم. می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} (ABCD \text{ آهنگ شارش خروجی}) &= \rho v_x|_{x=dx} dy dz \\ &= \left[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx \right]_{x=0} dy dz \end{aligned}$$

در اینجا جمله مشتق، نخستین جمله تصحیحی است که امکان غیریکتواخت بودن چگالی یا

۱. بسط مکولون برای یک متغیر را در معادله ۸۸-۵ آورده‌ایم. در اینجا، به جای نمو x در معادله ۸۸-۵، dx را قرار می‌دهیم، و نسبت به x مشتق جزئی می‌گیریم؛ زیرا ρv_x ممکن است به y و z نیز وابسته باشد.

سرعت و یا هر دو^۱ را مطرح می‌کند. جمله مرتبه صفر $\rho v_x|_{x=}$ (متناظر با شارش یکنواخت) حذف می‌شود.

$$|_{x=} \text{آهنگ خالص شارش خروجی} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx dy dz$$

این نتیجه را به صورت زیر نیز می‌توانیم به دست آوریم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho v_x(\Delta x, 0, 0) - \rho v_x(0, 0, 0)}{\Delta x} \equiv \left. \frac{\partial[\rho v_x(x, y, z)]}{\partial x} \right|_{y=0, z=0}$$

محور x با دو محور دیگر فرقی ندارد. نتیجه‌ای که برای دو وجه عمود بر محور x به دست آوردیم باید برای دو وجه عمود بر محور y نیز، با تعویض x و y و تغییر متغیرهای متناظر در y و z یعنی $x \rightarrow y$ و $y \rightarrow x$ ، کماکان برقرار باشد. این یک جایگشت چرخه‌ای مختصات است. جایگشت چرخه‌ای بعدی، نتیجهٔ مربوط به دو وجه دیگر مکعب مستطیل را به دست می‌دهد. با جمع کردن آهنگ خالص شارش خروجی از سه زوج وجه عنصر حجم مورد نظر، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \text{شار خروجی خالص} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right] dx dy dz \\ &= \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dx dy dz \end{aligned} \quad (۶۱-۱)$$

در نتیجه، شارش برونسوی خالص شاره تراکم‌ناپذیر از عنصر حجم $dx dy dz$ به‌ازای واحد حجم و در واحد زمان عبارت است از $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ ، وجه تسمیهٔ دیورژانس (واگرایی) نیز همین است. معادلهٔ پیوستگی یکی از کاربردهای بی‌واسطهٔ دیورژانس به‌شمار می‌آید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (۶۲-۱)$$

این معادله صرفاً حاکی از آن است که شارش به خارج حجم باعث کاهش چگالی درون حجم می‌شود. توجه کنید که ρ در معادلهٔ ۶۲-۱ تابعی است از زمان و مکان: $\rho(x, y, z, t)$. دیورژانس در مسائل گوناگون فیزیک، از چگالی جریان احتمال در مکانیک کوانتومی تا نشت نوترون در رآکتور هسته‌ای، ظاهر می‌شود.

۱. به بیان دقیقتر، ρv_x مقدار متوسط روی وجه $EFGH$ ، و عبارت $(\partial/\partial x)(\rho v_x) dx$ نیز مقدار متوسط روی وجه $ABCD$ است. با در نظر گرفتن یک حجم دیفرانسیلی کوچک اختیاری، می‌توانیم مقادیر متوسط را برابر مقادیری بگیریم که در رابطه نوشته شده است.

ترکیب $\nabla \cdot (f\mathbf{V})$ را، که در آن f تابعی اسکالر و \mathbf{V} یک تابع برداری است، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (f\mathbf{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fV_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fV_z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}V_x + f\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}V_y + f\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}V_z + f\frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{V} + f\nabla \cdot \mathbf{V}\end{aligned}\quad (۱-۶۲الف)$$

و این عبارت درست همان چیزی است که از مشتق یک حاصلضرب انتظار داریم. دقت کنید که ∇ به عنوان یک عملگر مشتق‌گیری هم از f ، هم از \mathbf{V} مشتق می‌گیرد و به عنوان یک بردار در هر یک از جمله‌ها در \mathbf{V} ضرب داخلی می‌شود. در حالت خاصی که دیورژانس یک بردار صفر باشد، یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۱-۶۳)$$

می‌گوییم که \mathbf{B} سیمولوله‌ای است؛ این اصطلاح از مبحث مغناطیس گرفته شده که در آن \mathbf{B} القای مغناطیسی، و معادله ۱-۶۳ یکی از معادله‌های ماکسول است. اگر برداری سیمولوله‌ای باشد، می‌توان آن را به صورت تاور بردار دیگری به نام پتانسیل برداری نوشت. در بخش ۱-۱۳ به محاسبه پتانسیل برداری خواهیم پرداخت.

مسائل

۱-۷-۱ معادله حرکت ذره‌ای در مدار دایره‌ای، عبارت است از: $\mathbf{r} = i\mathbf{r} \cos \omega t + j\mathbf{r} \sin \omega t$ (الف) $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ را محاسبه کنید. (ب) نشان دهید: $\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = 0$. شعاع، r ، و سرعت زاویه‌ای، ω ثابت‌اند.

یادآوری: $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ و $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2$

جواب: (الف) $k\omega r^2$.

۱-۷-۲ بردار \mathbf{A} در قانون تبدیل برداری، معادله ۱-۱۵، صدق می‌کند. با محاسبه مستقیم نشان دهید که مشتق زمانی آن، یعنی $d\mathbf{A}/dt$ ، نیز در معادله ۱-۱۵ صدق می‌کند و در نتیجه بردار است. ۱-۷-۳ با مشتق گرفتن از مؤلفه‌ها نشان دهید که درست مانند مشتق‌گیری از حاصلضرب دو تابع جبری، داریم:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (الف)$$

$$\cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (\text{ب})$$

۴-۷-۱ در فصل ۲ خواهیم دید که بردارهای یکه در دستگاههای مختصات غیردکارتی معمولاً تابعی از متغیرهای مختصاتی‌اند، $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q_1, q_2, q_3)$ ، ولی $|\mathbf{e}_i| = 1$. نشان دهید که یا $\partial \mathbf{e}_i / \partial q_j = 0$ و یا $\partial \mathbf{e}_i / \partial q_j$ بر \mathbf{e}_i عمود است.

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \quad \text{که ثابت کنید}$$

[راهنمایی: این عبارت را به صورت یک ضرب سه‌گانه اسکالر بگیرید.]

۶-۷-۱ میدان الکتروستاتیکی بار نقطه‌ای q عبارت است از:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{r^2}$$

دیورژانس \mathbf{E} را محاسبه کنید. مقدار این دیورژانس در مبدأ چقدر است؟

۸-۱ تاو $\nabla \times$

عمل دیگری که برای عملگر برداری ∇ می‌توان تعریف کرد، عبارت است از ضرب برداری این عملگر در یک بردار. در این صورت، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (۶۴-۱)$$

که تاو \mathbf{V} نامیده می‌شود. در ضمن بسط این دترمینان و همین‌طور در هر عمل دیگری که متضمن ∇ باشد، باید ماهیت مشتق‌گیری ∇ را نیز در نظر داشته باشیم. در حالت خاص، $\mathbf{V} \times \nabla$ فقط به صورت یک عملگر یعنی یک عملگر دیفرانسیلی برداری جدید، تعریف می‌شود. این عملگر در حالت کلی، مطمئناً با عبارت $\nabla \times \mathbf{V}$ برابر نیست.^۱ در مورد دترمینان معادله ۶۴-۱، باید آن را از بالا به پایین بسط داد؛ به طوری که مشتقها، مطابق معادله ۶۴-۱، همواره در وسط هر جمله موجود باشند. اگر ∇ را در حاصلضرب یک کمیت اسکالر و یک کمیت برداری ضرب برداری کنیم، می‌توانیم نشان دهیم که

۱. در همین زمینه اگر \mathbf{A} یک عملگر دیفرانسیلی باشد لزوماً نباید $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$. به‌ویژه برای عملگر تکانه زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی، یعنی $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ ، می‌رسیم به $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$.

$$\begin{aligned} \nabla \times (f\mathbf{V})|_x &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(fV_z) - \frac{\partial}{\partial z}(fV_y) \right] \\ &= \left(f \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} V_z - f \frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} V_y \right) \\ &= f \nabla \times \mathbf{V}|_x - (\nabla f) \times \mathbf{V}|_x \end{aligned} \quad (۶۵-۱)$$

با جایگشت مختصات $x \rightarrow y$ و $y \rightarrow z$ و $z \rightarrow x$ مؤلفه y و سپس با جایگشت بار دوم، مؤلفه z را به دست می‌آوریم

$$\nabla \times (f\mathbf{V}) = f \nabla \times \mathbf{V} + (\nabla f) \times \mathbf{V} \quad (۶۶-۱)$$

این رابطه شبیه به ضرب برداری معادله ۱-۶۲ الف است. در اینجا نیز ∇ به عنوان یک عملگر مشتق‌گیری هم از f و هم از \mathbf{V} مشتق می‌گیرد و به عنوان یک بردار در هر جمله، در \mathbf{V} ضرب برداری می‌شود.

مثال ۱-۸۸-۱: عبارت $\nabla \times r f(r)$ را حساب کنید.
از معادله ۱-۶۶ داریم

$$\nabla \times r f(r) = f(r) \nabla \times \mathbf{r} + [\nabla f(r)] \times \mathbf{r} \quad (۶۷-۱)$$

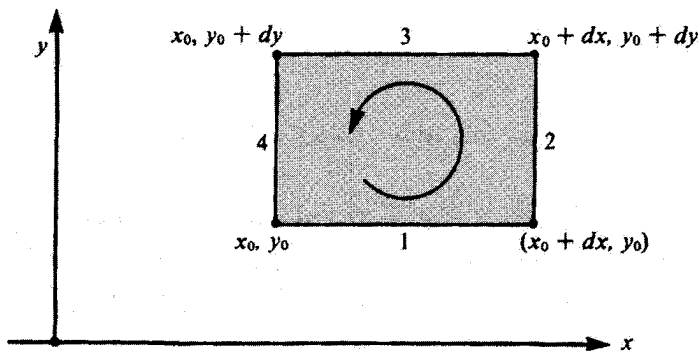
ابتدا می‌نویسیم:

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad (۶۸-۱)$$

در این صورت، با بهره‌گیری از $\nabla f(r) = \mathbf{r}_0 \cdot (df/dr)$ (مثال ۱-۶۶) می‌رسیم به:

$$\nabla \times r f(r) = \frac{df}{dr} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (۶۹-۱)$$

حاصلضرب برداری صفر می‌شود، زیرا $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cdot r$ و $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$.
برای آنکه مفهوم فیزیکی تاو را بهتر درک کنیم، می‌توانیم چرخش شاره پیرامون حلقه دیفرانسیلی در صفحه xy را در نظر بگیریم (شکل ۱-۲۰).
گرچه در بخش ۱-۱۰ نشان خواهیم داد که چرخش توسط انتگرال $\int \mathbf{V} \cdot d\lambda$ بیان می‌شود،



شکل ۱-۲۰ چرخش پیرامون یک حلقه دیفرانسیلی.

اما در اینجا ما انتگرالهای اسکالر هم ارز این انتگرال را محاسبه می‌کنیم. چرخش، بنابر تعریف، عبارت است از:

$$\begin{aligned} \text{چرخش}_{\text{مربع}} &= \int_1 V_x(x, y) d\lambda_x + \int_2 V_y(x, y) d\lambda_y \\ &+ \int_3 V_x(x, y) d\lambda_x + \int_4 V_y(x, y) d\lambda_y \end{aligned} \quad (70-1)$$

شماره‌های ۱، ۲، ۳، و ۴ پاره‌خطهای شماره‌دار شکل ۱-۲۰ را نشان می‌دهند. در انتگرال اول داریم $d\lambda_x = +dx$ ولی در انتگرال سوم $d\lambda_x = -dx$ ؛ زیرا پاره‌خط سوم در جهت x منفی پیموده می‌شود. به همین ترتیب، برای انتگرال دوم داریم: $d\lambda_y = +dy$ و برای انتگرال چهارم $d\lambda_y = -dy$. اینک، انتگرالده‌ها را به کمک بسط تیلور^۱ برحسب فاصله تا نقطه (x_0, y_0) می‌نویسیم و جابه‌جایی پاره‌خط ۳ از ۱ و پاره‌خط ۲ از ۴ را به حساب می‌آوریم. با این کار برای پاره‌خطهای دیفرانسیلی داریم:

$$\begin{aligned} \text{چرخش}_{\text{مربع}} &= V_x(x_0, y_0) dx + \left[V_y(x_0, y_0) + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \right] dy \\ &+ \left[V_y(x_0, y_0) + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \right] (-dx) + V_y(x_0, y_0) (-dy) \\ &= \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (71-1)$$

۱. $V_y(x_0 + dx, y_0) = V_y(x_0, y_0) + (\partial V_y / \partial x)_{x_0, y_0} dx + \dots$

در حد $dx \rightarrow 0$ جمله‌های از مرتبه بالاتر حذف می‌شوند. جمله تصحیحی که وردش V_y برحسب y در آن منظور می‌شود، با جمله تصحیحی مربوط به انتگرال چهارم حذف می‌شود (بخش ۵-۶).

طرفین را بر $dx dy$ تقسیم می‌کنیم:

$$|\nabla \times \mathbf{V}| = \text{چرخش به‌ازای واحد مساحت} \quad (۷۲-۱)$$

چرخش^۱ پیرامون سطح دیفرانسیلی در صفحه xy برابر مؤلفه z بردار $\nabla \times \mathbf{V}$ است. علی‌الاصول، تاو یعنی $\nabla \times \mathbf{V}$ در نقطه (x_0, y_0) را می‌شود از طریق نصب یک چرخ پروانه کوچک در آن نقطه در درون شاره متحرک اندازه گرفت. دوران چرخ پروانه کوچک مقیاسی برای تاو خواهد بود.

در بخش ۱۲-۱، از معادله ۷۱-۱ برای استخراج قضیه استوکس استفاده خواهیم کرد. اگر تاو بردار \mathbf{V} صفر شود، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (۷۳-۱)$$

\mathbf{V} را غیرچرخشی می‌نامند. مهمترین مثالهایی که در فیزیک می‌توان برای بردارهای غیرچرخشی آورد، نیروهای گرانشی و الکتروستاتیکی است. در هر یک از این دو حالت داریم

$$\mathbf{V} = C \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} = C \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (۷۴-۱)$$

که در آن C ثابت و \mathbf{r}_0 بردار یکه در جهت شعاعی برونسوست. C برای نیروی گرانشی، بنابر قانون گرانش عمومی نیوتون به صورت $C = -Gm_1m_2$ بیان می‌شود. در مورد نیروی الکتروستاتیکی از قانون کولن (برحسب یکاهای mks) داریم: $C = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$. می‌توان، از طریق بسط مستقیم برحسب مؤلفه‌های دکارتی، نشان داد که نیروی \mathbf{V} در معادله ۷۴-۱ غیرچرخشی است، این کار در مثال ۱۸-۱ انجام شد. این موضوع در فصل ۲ در رهیافت متفاوتی ثابت می‌شود، که در آن تاو یعنی $\nabla \times \mathbf{X}$ برحسب مختصات قطبی کروی مشخص می‌شود. در بخش ۱۳-۱ خواهیم دید که هرگاه برداری غیرچرخشی باشد، می‌توانیم آن را به صورت (منفی) گرادیان یک پتانسیل اسکالر بنویسیم. در بخش ۱۵-۱ ثابت خواهیم کرد که هر برداری را (تحت شرایط معین در بینهایت) می‌توانیم چنان به دو جزء تجزیه کنیم که یکی غیرچرخشی و دیگری سیمولوله‌ای باشد. این قضیه در مبحث میدانهای الکترومغناطیسی متناظر است با تجزیه به میدان الکتریکی غیرچرخشی و میدان مغناطیسی سیمولوله‌ای.

برای موجهای محیط کشسان، اگر جابه‌جایی \mathbf{u} غیرچرخشی باشد، $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ، امواج تخت (یا امواج کروی در فواصل زیاد) طولی می‌شوند. اگر \mathbf{u} سیمولوله‌ای باشد، $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ، امواج عرضی می‌شوند. جابه‌جایی را که از آشفتگی زلزله حادث می‌شود، می‌توان به دو جزء یکی

۱. در دینامیک شاره‌ها، $\nabla \times \mathbf{V}$ را "تاو سرعت" یا "تاوایی" می‌نامند.

سیمولهای و دیگری غیرچرخشی تجزیه کرد (با بخش ۱-۱۵ مقایسه کنید). جزء غیرچرخشی امواج زمین لرزه‌ای طولی (اولیه) P را ایجاد می‌کند. جزء سیمولهای به امواج عرضی کندتر (ثانویه) S منجر می‌شوند (مسئله ۳-۶-۸).

با استفاده از گرادیان، دیورژانس، تاو و قاعدهٔ بک‌کب می‌توانیم درستی شمار زیادی اتحاد برداری مفید را اثبات یا تحقیق کنیم. برای اثبات درستی هر اتحاد، همواره می‌توانیم از بسط کامل برحسب مؤلفه‌های دکارتی استفاده کنیم. در بعضی حالتها، می‌توان با استفاده از بینش دقیق به جای جابه‌جا کردنهای متداول مؤلفه‌های دکارتی، به روشهای بسیار کوتاهتری برای تحقیق درستی اتحادهای دست یافت.

به یاد داشته باشید که ∇ یک عملگر برداری است؛ یعنی موجود دو رگه‌ای که از دو دسته قواعد پیروی می‌کند:

۱. قواعد برداری

۲. قواعد مشتق‌گیری جزئی، از آن جمله مشتق‌گیری از حاصلضرب.

مثال ۱-۸-۲: گرادیان حاصلضرب نقطه‌ای: درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (۷۵-۱)$$

در این مثال خاص از این نکته بهره می‌گیریم که $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ از نوع جمله‌هایی است که در بسط بک‌کب حاصلضرب سه‌گانهٔ برداری، معادلهٔ ۱-۵، ظاهر می‌شود. مثلاً

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

که در آن ∇ فقط از \mathbf{B} مشتق می‌گیرد نه از \mathbf{A} . با استفاده از خاصیت جابه‌جایی عوامل ضرب اسکالر، می‌توانیم \mathbf{A} و \mathbf{B} را با یکدیگر تعویض کنیم و بنویسیم

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

که در آن ∇ فقط از \mathbf{A} مشتق می‌گیرد و نه از \mathbf{B} . با جمع کردن این دو معادله، ∇ از هر دو عامل ضرب $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ مشتق می‌گیرد، و در نتیجه اتحاد معادلهٔ ۱-۷۵ به دست می‌آید. از این اتحاد بارها در نظریهٔ پیشرفتهٔ الکترومغناطیس استفاده می‌شود. مسئله ۱-۸-۱۵ مثال ساده‌ای برای کاربرد این اتحاد است.

مسائل

۱-۸-۱ با دوران مختصات نشان دهید که تاو یک بردار، مانند یک بردار تبدیل می‌شود. [راهنمایی: هر وقت لازم باشد، می‌توانید از اتحادهای معادله ۱-۴۱ برای کسینوسهای هادی استفاده کنید.]

۲-۸-۱ نشان دهید که اگر \mathbf{u} و \mathbf{v} غیرچرخشی باشند، $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ سیمولوله‌ای است.

۳-۸-۱ نشان دهید که اگر \mathbf{A} غیرچرخشی باشد، $\mathbf{A} \times \mathbf{r}$ سیمولوله‌ای است.

۴-۸-۱ جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. نشان دهید که سرعت خطی \mathbf{v} سیمولوله‌ای است.

۵-۸-۱ تابع برداری $\mathbf{f}(x, y, z)$ غیرچرخشی نیست، ولی حاصلضرب \mathbf{f} در تابع اسکالر $g(x, y, z)$ غیرچرخشی است. نشان دهید

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0$$

۶-۸-۱ اگر $\mathbf{V} = iV_x(x, y) + jV_y(x, y)$ و $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$ ، ثابت کنید که $\nabla \times \mathbf{V}$ بر \mathbf{V} عمود است.

۷-۸-۱ تکانه زاویه‌ای در مکانیک کلاسیک از رابطه $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ به دست می‌آید، که در آن \mathbf{p} تکانه خطی است. در مکانیک کوانتومی به جای \mathbf{p} عملگر $-i\nabla$ را قرار می‌دهیم (بخش ۱۵-۶). نشان دهید که مؤلفه‌های دکارتی عملگر تکانه زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی (برحسب واحد \hbar) عبارت‌اند از

$$L_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$L_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

۸-۸-۱ با بهره‌گیری از عملگرهای تکانه زاویه‌ای که قبلاً داده شدند، نشان دهید که این عملگرها در رابطه‌های جابه‌جایی به صورت زیر صدق می‌کنند

$$[L_x, L_y] \equiv L_x L_y - L_y L_x = iL_z$$

و در نتیجه داریم

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$$

بعداً، در مسئله ۴-۲-۱۵ و مسئله بعد از آن، و در بخش ۱۲-۷، این روابط جابه‌جایی را به عنوان روابط معرف عملگر تکانه زاویه‌ای به‌کار خواهیم برد.

۸-۱-۹ با بهره‌گیری از نماد کروشه جابه‌جایی $[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x$ بردار تکانه زاویه‌ای \mathbf{L} در رابطه $[L_x, L_y] = iL_z$ و غیره، یا $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$ صدق می‌کند. دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} با یکدیگر و با \mathbf{L} جابه‌جا می‌شوند؛ یعنی، $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{L}] = [\mathbf{b}, \mathbf{L}] = 0$. نشان دهید:

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{L}] = i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{L}$$

۸-۱-۱۰ با محاسبه تک‌تک جمله‌های اتحاد برداری زیر برای بردارهای $\mathbf{A} = iA_x(x, y, z)$ و $\mathbf{B} = iB_x(x, y, z)$ ، درستی این اتحاد را تحقیق کنید:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

۸-۱-۱۱ اتحاد برداری زیر را ثابت کنید

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

۸-۱-۱۲ اتحاد برداری مربوط به مثال ۱-۸-۲ را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \times \nabla) \times \mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

این اتحاد را ثابت کنید.

۸-۱-۱۳ اتحاد زیر را ثابت کنید

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla(A^2) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

۸-۱-۱۴ اگر \mathbf{A} و \mathbf{B} بردارهای ثابتی باشند، نشان دهید

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

۱۵-۸-۱ گشتاور مغناطیسی حاصل از نوعی توزیع جریانهای الکتریکی، ثابت و برابر با \mathbf{m} است. نیرویی که در القای مغناطیسی خارجی \mathbf{B} بر \mathbf{m} وارد می‌آید، عبارت است از:

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m})$$

نشان دهید

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

یادآوری: اگر میدانها را مستقل از زمان بگیریم، از معادله‌های ماکسول نتیجه می‌گیریم که $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ، علاوه بر این، $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

۱۶-۸-۱ یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور \mathbf{p} در مبدأ واقع است. این دوقطبی در \mathbf{r} ، یک پتانسیل الکتریکی به قرار

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ایجاد می‌کند. میدان الکتریکی $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ را در \mathbf{r} محاسبه کنید.

۱۷-۸-۱ پتانسیل برداری \mathbf{A} یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور دوقطبی \mathbf{m} ، از رابطه $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)(\mathbf{m} \times \mathbf{r}/r^2)$ به دست می‌آید. نشان دهید که القای مغناطیسی $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ عبارت است از:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3}$$

یادآوری: فرایند حدی که دوقطبیهای نقطه‌ای را می‌دهد، برای دوقطبی الکتریکی در بخش ۱-۱۲ و برای دوقطبی مغناطیسی در بخش ۵-۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. ۱۸-۸-۱ سرعت شارش دویعدی یک مایع، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{V} = iu(x, y) - jv(x, y)$$

اگر این مایع تراکم‌ناپذیر و شارش غیرچرخشی داشته باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

این رابطه‌ها عبارت‌اند از شرایط کوشی-ریمان در بخش ۶-۲.

۱-۸-۱۹ در محاسبه چهار انتگرال مربوط به چرخش در این بخش از جمله‌هایی مانند $\partial V_x / \partial x$ و $\partial V_y / \partial y$ و همه مشتقات مرتبه دوم چشمپوشی شده است. نشان دهید که وقتی چهار انتگرال را با هم جمع می‌کنیم $\partial V_x / \partial x$ و $\partial V_y / \partial y$ و مشتقات دوم نیز در کران $dx \rightarrow 0$ و $dy \rightarrow 0$ حذف می‌شوند.

[راهنمایی: چرخش به ازای واحد مساحت را محاسبه کنید، سپس کران $dx \rightarrow 0$ و $dy \rightarrow 0$ را بگیرید.]

۹-۱ کاربردهای ∇ متوالی

تا اینجا گرادینان، دیورژانس و تاو را تعریف کرده‌ایم، و به ترتیب، کمیت‌هایی برداری، اسکالر و برداری به دست آورده‌ایم. بار دیگر عملگر ∇ را روی هر یک از این کمیتها اعمال می‌کنیم و می‌رسیم به (الف) $\nabla \cdot \nabla \varphi$ ، (ب) $\nabla \times \nabla \varphi$ ، (ج) $\nabla \nabla \cdot \mathbf{V}$ ، (د) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V}$ ، (ه) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$ هر پنج عبارت حاوی مشتقات مرتبه دوم‌اند و جملگی در معادله‌های دیفرانسیلی مرتبه دوم فیزیک ریاضی، به خصوص، در نظریه الکترومغناطیس ظاهر می‌شوند.

عبارت اول، یعنی $\nabla \cdot \nabla \varphi$ ، دیورژانس یک گرادینان، را لاپلاسی φ می‌نامند. داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \varphi &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (۱-۷۶ الف)$$

اگر φ پتانسیل الکتروستاتیکی باشد، داریم

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (۱-۷۶ ب)$$

که همان معادله لاپلاس در مبحث الکتروستاتیک است. ترکیب $\nabla \cdot \nabla$ را اغلب به صورت ∇^2 می‌نویسند.

مثال ۱-۹-۱: $\nabla \cdot \nabla g(r)$ را محاسبه کنید. با مراجعه به مثالهای ۱-۶-۱ و ۱-۷-۲، داریم

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla g(r) &= \nabla \cdot \mathbf{r}_0 \frac{dg}{dr} \\ &= \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2} \end{aligned}$$

که در آن به جای $f(r)$ در مثال ۷-۲، $(1/r) \cdot dg/dr$ را قرار داده‌ایم. اگر $g(r) = r^n$ ، آنگاه

$$\nabla \cdot \nabla r^n = n(n+1)r^{n-2}$$

این عبارت به‌ازای $n = 0$ [$g(r) = \text{const.}$] و به‌ازای $n = -1$ صفر می‌شود. یعنی $g(r) = 1/r$ یکی از جوابهای معادلهٔ لاپلاس، $\nabla^2 g(r) = 0$ ، است. این عبارت به‌ازای $r \neq 0$ برقرار است. در $r = 0$ ، با یک تابع دلتای دیراک سروکار داریم (معادلهٔ ۱-۱۷۳ و بخش ۸-۷ را ببینید). عبارت (ب) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\nabla \times \nabla \varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

با بسط این دترمینان، داریم

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \varphi &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (77-1)$$

با این فرض که ترتیب مشتق‌گیری جزئی را بتوان تعویض کرد. اگر مشتقهای جزئی دوم φ تابعهای پیوسته‌ای باشند، این امکان وجود دارد. بنابراین، از معادلهٔ ۷۷-۱ نتیجه می‌گیریم که تاوگرادیان متحد با صفر است. یعنی همهٔ گرادیانها، غیرچرخشی‌اند. توجه کنید که صفر در معادلهٔ ۷۷-۱ مستقل از شرایط فیزیکی و به‌صورت یک اتحاد ریاضی به‌دست آمد. در حالی که صفر در معادلهٔ ۷۶-۱ پیامدی از شرایط فیزیکی است.

عبارت (د) یک ضرب سه‌گانهٔ اسکالر است که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (78-1)$$

در اینجا نیز با فرض پیوسته بودن توابع، ترتیب مشتق‌گیری اهمیتی ندارد و می‌رسیم به

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (۷۹-۱)$$

دیورژانس یک تاو برابر صفر است، یا به عبارت دیگر تاوها جملگی سیملوله‌ای‌اند. در بخش ۱-۱۵ در قضیهٔ هلمهولتز، خواهیم دید که بردارها را می‌توان به دو جزء، یکی سیملوله‌ای و دیگری غیرچرخشی، تجزیه کرد.

دو عبارت دیگر در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V} \quad (۸۰-۱)$$

این اتحاد با استفادهٔ مستقیم از معادلهٔ ۱-۵۰، قاعدهٔ بک-کب، به دست می‌آید، که ما آن را چنان بازنویسی کرده‌ایم که بردار \mathbf{V} همواره آخر هر جمله نوشته شود. جملهٔ $\nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$ در سیاههٔ ما موجود نبود؛ این جمله را می‌شود به کمک معادلهٔ ۱-۸۰ تعریف کرد. اگر \mathbf{V} را در دستگاه مختصات دکارتی بنویسیم که در آن بردارهای یکه هم از نظر جهت و هم از نظر بزرگی ثابت‌اند، عملگر $\nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$ که یک لاپلاسی برداری است، به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{V} = i \nabla \cdot \nabla V_x + j \nabla \cdot \nabla V_y + k \nabla \cdot \nabla V_z$$

که حاصل جمع برداری لاپلاسیهای اسکالر معمولی است. می‌توان معادلهٔ ۱-۸۰ را به صورت یک اتحاد برداری با بسط برحسب مؤلفه‌های دکارتی اثبات کرد.

مثال ۱-۹-۲ معادلهٔ موج الکترومغناطیسی: یکی از کاربردهای مهم این رابطهٔ برداری (معادلهٔ ۱-۸۰)، استخراج معادلهٔ موج الکترومغناطیسی است. معادله‌های ماکسول در خلأ به صورت زیر در می‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۱-۸۱ الف)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (۱-۸۱ ب)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۱-۸۱ ج)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۱-۸۱ د)$$

در اینجا، \mathbf{E} میدان الکتریکی، \mathbf{B} القای مغناطیسی، ϵ_0 گذردهی الکتریکی و μ_0 تراوایی مغناطیسی (برحسب یکاهای mks یا SI) است. فرض کنید که \mathbf{B} را از معادله‌های ۱-۸۱ ج و

۸۱-۱ د حذف کنیم. برای این کار تاو دو طرف معادله ۸۱-۱ د و مشتق زمانی دو طرف معادله ۸۱-۱ ج را محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه مشتقهای زمانی و فضایی جابه‌جا می‌شوند، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۸۲-۱)$$

و می‌رسیم به

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (۸۳-۱)$$

با استفاده از معادله‌های ۸۰-۱ و ۸۱-۱ ب، خواهیم داشت

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (۸۴-۱)$$

این عبارت معادله موج برداری الکترومغناطیسی است. اگر \mathbf{E} در دستگاه مختصات دکارتی نوشته شود، معادله ۸۴-۱ به سه معادله موج اسکالر جداگانه که هریک شامل یک لاپلاسی اسکالر است، تبدیل می‌شود.

مسائل

۱-۹-۱ درستی معادله ۸۰-۱ را از طریق بسط مستقیم در مختصات دکارتی اثبات کنید.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$$

۲-۹-۱ نشان دهید که اتحاد

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$$

را می‌توان به کمک قاعده بک‌کب برای ضرب سه‌گانه برداری اثبات کرد. هر تغییری که در ترتیب عوامل در جمله‌های بک و کب انجام داده‌اید، توجیه کنید.

۳-۹-۱ ثابت کنید: $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$.

۴-۹-۱ می‌دانیم که تاو \mathbf{F} با تاو \mathbf{G} برابرست. نشان دهید که اختلاف بین \mathbf{F} و \mathbf{G} یا یک مقدار ثابت و یا گرادیان یک تابع اسکالر است.

۵-۹-۱ معادله ناویه-استوکس در دینامیک شاره‌ها حاوی جمله غیرخطی $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ است. نشان دهید که تاو این جمله را می‌توان به صورت $[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]$ نوشت.

۶-۹-۱ در معادله ناویه-استوکس در دینامیک شاره‌ها، برای شارش پایای یک شاره چسبنده تراکم ناپذیر، به جمله‌ای به صورت

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]$$

می‌رسیم که در آن \mathbf{v} چسبندگی شاره است. نشان دهید که این جمله در حالت خاص:

$$\mathbf{v} = iv(y, z)$$

صفر می‌شود.

۷-۹-۱ ثابت کنید که اگر u و v توابع اسکالر مشتق‌پذیر باشند، $(\nabla u) \times (\nabla v)$ سیمولوله‌ای است.

۸-۹-۱ φ یک تابع اسکالر است که در معادله لاپلاس $\nabla^2 \varphi = 0$ صدق می‌کند. نشان دهید که

$\nabla \varphi$ هم سیمولوله‌ای و هم غیرچرخشی است.

۹-۹-۱ برای تابع اسکالر ψ ، نشان دهید که

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)\psi = r^2 \nabla^2 \psi - r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

(این اتحاد را در مختصات قطبی کروی، بخش ۲-۵، راحت‌تر می‌توان اثبات کرد.)

۱۰-۹-۱ شرط تعادل برای یک جرم منزوی (غیرچرخان) نظیر یک ستاره عبارت است از

$$\nabla P + \rho \nabla \varphi = 0$$

که در آن P فشار کل، ρ چگالی و φ پتانسیل گرانشی است. نشان دهید که در هر نقطه بردار

عمود بر سطح با فشار ثابت، با بردار عمود بر سطح پتانسیل گرانشی ثابت موازی است.

۱۱-۹-۱ در نظریهٔ پاولی دربارهٔ الکترون، به عبارت زیر برمی‌خوریم

$$(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\psi$$

که در آن ψ یک تابع اسکالر است. \mathbf{A} پتانسیل برداری مغناطیسی است که مابین آن و القای

مغناطیسی، رابطهٔ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ برقرار است. با این فرض که $\mathbf{p} = -i\nabla$ ، نشان دهید که این

رابطه به صورت $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho$ ساده می‌شود.
 ۱-۹-۱۲ نشان دهید که هر یک از جوابهای معادله

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} = 0$$

خودبه‌خود در معادله برداری هلمهولتز

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$$

و شرط سیمپولوله‌ای زیر صدق می‌کند

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

[راهنمایی: $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ را روی معادله اول اعمال کنید].
 ۱-۹-۱۳ نظریهٔ رسانش گرمایی به معادلهٔ زیر منجر می‌شود

$$\nabla^2 \Psi = k |\nabla \Phi|^2$$

که در آن Φ پتانسیلی است که در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند: $\nabla^2 \Phi = 0$. نشان دهید که

$$\Psi = \frac{1}{4} k \Phi^2$$

یکی از جوابهای این معادله است.

۱-۱۰ انتگرال‌گیری برداری

مرحلهٔ بعدی، پس از مشتق‌گیری از بردارها، انتگرال گرفتن از آنهاست. نخست به انتگرالهای خطی می‌پردازیم، سپس انتگرالهای سطحی و حجمی را از نظر می‌گذرانیم. در هر حالت، روش کار به این ترتیب است که انتگرال برداری به انتگرالهای اسکالری که فرض می‌شود خواننده با آنها آشناست ساده می‌شود.

انتگرال‌های خطی

با استفاده از نمو طول $d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$ ، به انتگرال‌های خطی زیر برمی‌خوریم:

$$\int_c \varphi d\mathbf{r} \quad (۱-۸۵الف)$$

$$\int_c \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (۱-۸۵ب)$$

$$\int_c \mathbf{V} \times d\mathbf{r} \quad (۱-۸۵ج)$$

که در هر یک، انتگرال روی پربندی گرفته می‌شود که ممکن است باز (با نقطه ابتدایی و نقطه انتهایی جدا از هم) یا بسته (به شکل یک حلقه) باشد. انتگرال دوم، معادله ۱-۸۵ب، به اعتبار تعبیر فیزیکی آن، که بعداً شرح خواهیم داد، از دو انتگرال دیگر به مراتب مهمتر است.

φ در انتگرال اول یک تابع اسکالر است، در نتیجه این انتگرال به صورت زیر ساده می‌شود

$$\begin{aligned} \int_c \varphi d\mathbf{r} = & \mathbf{i} \int_c \varphi(x, y, z) dx + \mathbf{j} \int_c \varphi(x, y, z) dy \\ & + \mathbf{k} \int_c \varphi(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (۱-۸۶)$$

در این جداسازی از رابطه

$$\int \mathbf{i} \varphi dx = \mathbf{i} \int \varphi dx \quad (۱-۸۷)$$

استفاده شده است. علت مجاز بودن این کار آن است که بردارهای \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} هم از نظر جهت و هم از نظر بزرگی ثابت‌اند. این موضوع که در اینجا بدیهی به نظر می‌رسد، در دستگاہهای غیردکارتی که در فصل ۲ با آنها آشنا می‌شویم، صادق نیست.

سه انتگرال سمت راست معادله ۱-۸۶، انتگرال‌های اسکالر معمولی‌اند، و برای اجتناب از پیچیدگیها فرض می‌کنیم که ریمانی‌اند. ولی توجه داشته باشید که انتگرال نسبت به x را نمی‌توانیم محاسبه کنیم، مگر آنکه y و z بر حسب x معلوم باشند؛ همین امر درباره انتگرال‌های نسبت به y و z صادق است. برای این منظور کافی است C ، مسیر انتگرال‌گیری، مشخص شود. مقدار انتگرال‌ها به C ، یعنی پربند انتخابی، بستگی دارد، مگر برای برخی انتگرال‌دها که دارای خواص مخصوصی‌اند که باعث می‌شوند انتگرال فقط به نقطه‌های اولیه و انتهایی وابسته باشد. برای نمونه، اگر حالت خاص $\varphi = 1$ را در نظر بگیریم، معادله ۱-۸۵الف همان فاصله برداری از نقطه ابتدایی پربند C

به نقطه انتهایی آن است، که در نتیجه مستقل از مسیری است که دو نقطه ابتدایی و انتهایی را به هم متصل می‌کند. با در نظر داشتن عبارت $dr = i dx + j dy + k dz$ ، انتگرالهای دوم و سوم نیز به انتگرالهای اسکالر ساده می‌شوند. این انتگرالها نیز مانند معادله ۱-۸۵الف در حالت کلی به مسیر انتخابی بستگی دارند. انتگرال دوم (معادله ۱-۸۵ب) درست به همان صورتی است که در محاسبه کار انجام شده به وسیله یک نیرو به دست می‌آوریم، که آن نیز به مسیر بستگی دارد

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1-88\text{الف})$$

$$= \int F_x(x, y, z) dx + \int F_y(x, y, z) dy + \int F_z(x, y, z) dz$$

در این عبارت، \mathbf{F} نیروی وارد بر ذره است.

مثال ۱-۱۰-۱: نیروی وارد بر ذره‌ای عبارت است از $\mathbf{F} = -iy + jx$. می‌خواهیم کاری را که در رفتن از مبدأ به نقطه (۱، ۱) انجام می‌شود، محاسبه کنیم.

$$W = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (-y dx + x dy) \quad (1-88\text{ب})$$

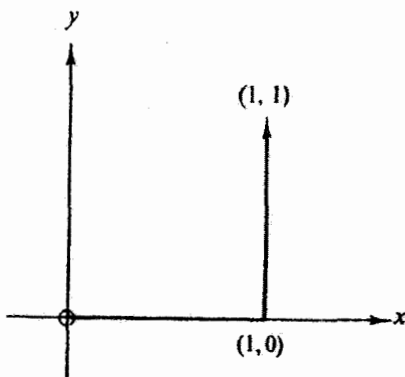
دو انتگرال را از هم جدا می‌کنیم، و می‌رسیم به:

$$W = - \int_0^1 y dx + \int_0^1 x dy \quad (1-88\text{ج})$$

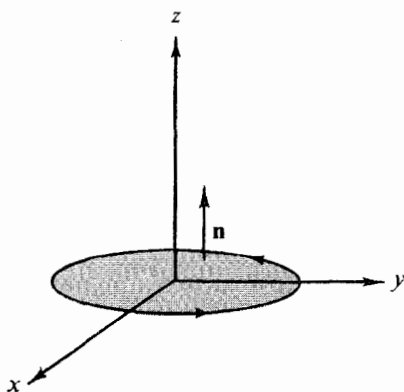
انتگرال اول را نمی‌توانیم محاسبه کنیم، مگر آنکه مشخص کنیم وقتی x از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، y چه مقداری می‌گیرد. همین‌طور برای محاسبه انتگرال دوم باید x به صورت تابعی از y باشد. نخست مسیری را که در شکل ۱-۲۱ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. در نتیجه با توجه به اینکه در قطعه اول مسیر $y = 0$ و در قطعه دوم $x = 1$ داریم

$$W = - \int_0^1 0 dx + \int_0^1 1 dy = 1 \quad (1-88\text{د})$$

اگر مسیر $[x = 0, 0 \leq y \leq 1]$ و $[x = 1, y = 1, 0 \leq x \leq 1]$ را برگزینیم، آنگاه از معادله ۱-۸۸ج می‌رسیم به $W = -1$. در نتیجه، کاری که این نیرو انجام می‌دهد به مسیر بستگی دارد.



شکل ۱-۲۱ مسیر انتگرال گیری.



شکل ۱-۲۲ قاعده دست راست برای جهت قائم مثبت.

انتگرالهای سطحی

انتگرالهای سطحی نیز به همان صورتهای انتگرالهای خطی ظاهر می‌شوند، که در آنها عنصر مساحت، $d\sigma$ ، نیز مانند نمو طول، کمیتی برداری^۱ است. این عنصر مساحت را اغلب به صورت $\mathbf{n} dA$ می‌نویسند که در آن \mathbf{n} بردار یکه (عمود بر سطح) در جهت مثبت است.^۲ از دو قرارداد برای اختیار جهت مثبت بهره می‌گیرند. قرارداد نخست برای وقتی است که سطح بسته باشد، که براساس آن عمود برونسو را مثبت می‌گیریم. قرارداد دوم برای سطح باز است. براساس این قرارداد، عمود مثبت به جهتی بستگی دارد که منحنی محیطی پیموده می‌شود. اگر انگشتان دست راست را در جهت پیمایش منحنی محیطی قرار دهیم، شست ما جهت مثبت عمود را مشخص می‌کند. مثلاً، اگر دایره واقع در صفحه xy (شکل ۱-۲۲) طوری پیموده شود که از محور x به

۱. یادآوری می‌کنیم که مساحت (یک متوازی‌الاضلاع) در بخش ۱-۴ با یک ضرب سمگانه برداری نمایش داده شد.
 ۲. بزرگی \mathbf{n} همواره برابر یک است؛ ولی جهت آن می‌تواند تابعی از مکان باشد.

محور y ، و سپس به $-x$ و پس از آن به $-y$ و باز به محور x برسیم، عمود مثبت (برای دستگاه مختصات راستگرد) در جهت محور z مثبت خواهد بود. به خواننده توصیه می‌شود که اگر روزی با سطحهای یک رو از قبیل نوار مزیبوس روبه‌رو شد، یا از طریق بریدن این نوارها، آنها را به سطحهای خوش‌رفتار منطقی تبدیل کند و یا آنها را با برجسب غیرعادی و معیوب به نزدیکترین بخش ریاضی بفرستد.

مانند انتگرالهای خطی در معادله‌های ۱-۸۵ الف، ب و ج، انتگرالهای سطحی نیز به یکی از صورتهای زیرند:

$$\int \varphi d\sigma$$

$$\int \mathbf{V} \cdot d\sigma$$

$$\int \mathbf{V} \times d\sigma$$

در این حالت نیز، حاصلضرب نقطه‌ای بسیار متداولتر از دوای دیگر است.

انتگرال سطحی $\int \mathbf{V} \cdot d\sigma$ را می‌توان به صورت شارش یا شار تعبیر کرد که از یک سطح معین می‌گذرد. این همان کاری است که در بخش ۷-۱ برای دستیابی به معنای واژه دیورژانس انجام دادیم. در بخش ۱۱-۱ نیز، در قضیه گاوس از همین تعبیر استفاده می‌شود. توجه کنید که مؤلفه مماسی سرعت، هم از نظر فیزیکی و هم با استفاده از ضرب داخلی، سهمی در شاری که از سطح می‌گذرد، ندارد.

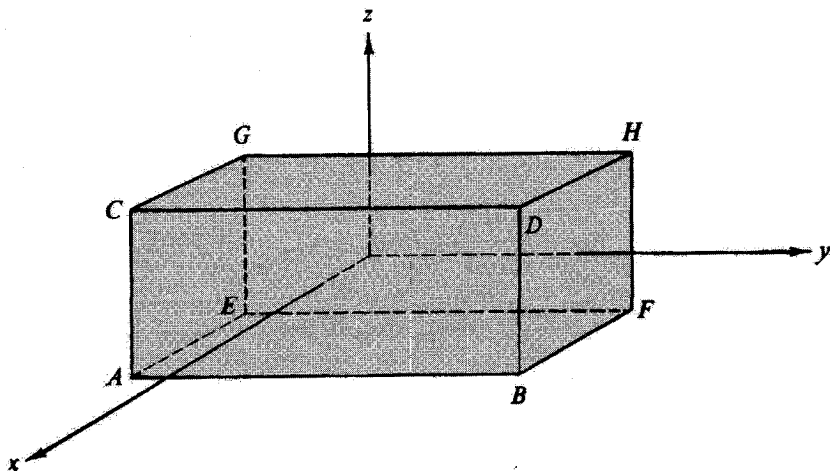
انتگرالهای حجمی

انتگرالهای حجمی تا حدودی ساده‌ترند، زیرا عنصر حجم $d\tau$ یک کمیت اسکالر است.^۱ داریم:

$$\int_V \mathbf{V} d\tau = \mathbf{i} \int_V V_x d\tau + \mathbf{j} \int_V V_y d\tau + \mathbf{k} \int_V V_z d\tau \quad (۸۹-۱)$$

که باز هم یک انتگرال برداری به صورت حاصل جمع برداری سه انتگرال اسکالر ساده شده است.

۱. نمادهای d^3x و $d^3\tau$ نیز بارها برای نمایش یک عنصر حجم در فضای x (xyz یا $x_1x_2x_3$) به‌کار می‌روند.



شکل ۱-۲۳ مکعب مستطیل ديفرانسیلی (مبدأ در مرکز مکعب مستطیل).

تعريف انتگرالی گرادیان، دیورژانس و تاو

یکی از کاربردهای جالب انتگرالهای سطحی و حجمی در ارائه تعریفهای دیگری برای روابط ديفرانسیلی است. می‌رسیم به:

$$\nabla \varphi = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \varphi d\sigma}{\int d\tau} \quad (90-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\sigma}{\int d\tau} \quad (91-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int d\sigma \times \mathbf{V}}{\int d\tau} \quad (92-1)$$

در این سه معادله برابر حجم ناحیه کوچکی از فضا و $d\sigma$ عنصر بردار مساحت این حجم است. متحد بودن معادله ۹۱-۱ با دیورژانس \mathbf{V} در بخش ۱-۷ ثابت شد. در اینجا نشان می‌دهیم که معادله ۹۰-۱ با تعریف قبلی که برای $\nabla \varphi$ (در معادله ۱-۵۳) دادیم، سازگار است. $\int d\tau$ را برای سادگی برابر حجم ديفرانسیلی $dx dy dz$ می‌گیریم (شکل ۱-۲۳). این بار مبدأ را در مرکز هندسی عنصر حجم قرار می‌دهیم. انتگرال سطحی به شش انتگرال که هر یک روی یکی از شش رخ محاسبه می‌شود، تبدیل می‌شود. یادآوری می‌کنیم که $d\sigma$ برونسوست، در نتیجه برای سطح

برای سطح $ABDC$ داریم $d\sigma \cdot \mathbf{i} = -|d\sigma|$ و برای سطح $ABDC$ داریم $d\sigma \cdot \mathbf{i} = +|d\sigma|$. می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \int \varphi d\sigma &= -\mathbf{i} \int_{EFGH} \left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{\gamma} \right) dy dz + \mathbf{i} \int_{ABDC} \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{\gamma} \right) dy dz \\ &\quad - \mathbf{j} \int_{AEGC} \left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{\gamma} \right) dx dz + \mathbf{j} \int_{BFHD} \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{\gamma} \right) dx dz \\ &\quad - \mathbf{k} \int_{ABFE} \left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{\gamma} \right) dx dy + \mathbf{k} \int_{CDHG} \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{\gamma} \right) dx dy \end{aligned}$$

هر یک از انتگرالدها را حول مبدأ به صورت سری مکولون بسط می‌دهیم و با در نظر گرفتن دو جمله اول بسط، هر انتگرالده را در مبدأ محاسبه می‌کنیم؛ به اضافه یک جمله تصحیحی برای منظور کردن جابه‌جایی (مثلاً $\pm dx/2$) مرکز رخ مربوط از مبدأ^۱. با توجه به اینکه حجم کل دارای اندازه دیفرانسیلی است ($\int d\tau = dx dy dz$)، علامتهای انتگرال در طرف راست معادله را برمی‌داریم و می‌رسیم به

$$\int \varphi d\sigma = \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (۹۳-۱)$$

با تقسیم طرفین بر

$$\int d\tau = dx dy dz$$

درستی معادله ۹۰-۱ اثبات می‌شود. چشمپوشی از جمله‌های تصحیحی بالاتر از مشتقهای مرتبه اول، باعث شد که اثبات بالا بسیار ساده شود. این جمله‌های اضافی که با تعمیم بسط تایلور در بخش ۵-۶ معرفی خواهند شد، در حد:

$$\int d\tau \rightarrow 0 \quad (dx \rightarrow 0, dy \rightarrow 0, dz \rightarrow 0)$$

صفر می‌شوند. به همین دلیل، هم در معادله‌های ۹۰-۱، ۹۱-۱ و ۹۲-۱ این حد منظور شده است.

اتحاد ۹۲-۱ نیز دقیقاً به همین روش با استفاده از حجم دیفرانسیلی $dx dy dz$ اثبات می‌شود.

۱. مبدأ را در مرکز هندسی قرار داده‌ایم.

مسائل

۱-۱۰-۱ میدان نیرویی را که بر یک نوسانگر خطی دویعدی وارد می‌شود، می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$\mathbf{F} = -ikx - jky$$

کاری را که در رفتن از نقطه $(1, 1)$ به نقطه $(4, 4)$ در مقابل این نیرو در هر یک از مسیرهای خط راست زیر انجام می‌شود، محاسبه کنید: (الف) $(4, 4) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (1, 1)$ ؛ (ب) $(1, 1) \rightarrow (4, 4)$ ؛ (ج) $(1, 1) \rightarrow (4, 4)$ در امتداد خط $x = y$.
برای این کار باید انتگرال

$$-\int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

را در طول هر مسیر محاسبه کنید.
۱-۱۰-۲ کاری را که در مقابل میدان نیروی

$$\mathbf{F} = \frac{-iy}{x^2 + y^2} + \frac{jx}{x^2 + y^2}$$

روی دایره واحد در صفحه xy : (الف) در جهت پادساعتگرد از 0° تا 180° ؛ (ب) در جهت ساعتگرد از 180° تا 0° ؛ انجام می‌شود، محاسبه کنید. توجه کنید که کار انجام شده به مسیر بستگی دارد.
۱-۱۰-۳ کاری را که در رفتن از نقطه $(1, 1)$ به نقطه $(3, 3)$ انجام می‌دهید، محاسبه کنید. نیرویی را که اعمال می‌کنید، به قرار

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}(x - y) + \mathbf{j}(x + y)$$

بگیرید. مسیری را که اختیار می‌کنید، به وضوح مشخص کنید. توجه کنید که این میدان نیرو ناپایستار است.

۱-۱۰-۴ $\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید.

نادآوری: نماد \oint به معنای بسته بودن حلقه مسیر انتگرال‌گیری است.

۱-۱۰-۵ عبارت:

$$\frac{1}{3} \int_{\sigma} \mathbf{r} \cdot d\sigma$$

را روی مکعب واحد که با نقطه $(0, 0, 0)$ و نقطه‌های به فاصله واحد از این نقطه روی هر یک از محورهای x ، y و z تعریف می‌شود، محاسبه کنید. توجه کنید که: (الف) $\mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ برای سه تا از سطوح برابر صفر است، و (ب) سهم هر یک از سه سطح دیگر در انتگرال برابر است. ۱-۶ از طریق بسط انتگرال سطحی، نشان دهید که

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\int_S d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V}}{\int d\tau} = \nabla \times \mathbf{V}$$

[راهنمایی: حجم دیفرانسیلی $dx dy dz$ را اختیار کنید.]

۱۱-۱ قضیه گاوس

در این بخش به رابطه مفیدی بین انتگرال سطحی یک بردار و انتگرال حجمی دیورژانس آن بردار می‌رسیم. فرض می‌کنیم که بردار \mathbf{V} و مشتقهای مرتبه اول آن در ناحیه مورد نظر پیوسته باشند. در این صورت، بنابه قضیه گاوس، داریم

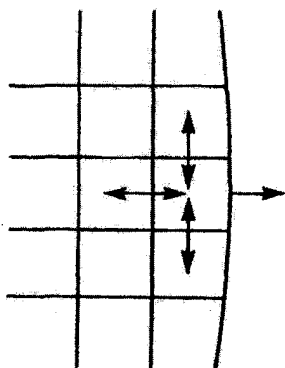
$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau \quad (۱-۹۴\text{الف})$$

به عبارت دیگر، انتگرال سطحی یک بردار روی یک سطح بسته برابر است با انتگرال حجمی دیورژانس آن بردار روی حجم محاط شده درون سطح.

فرض کنید که حجم V را به تعداد زیادی متوازی‌السطوح (دیفرانسیلی) کوچک تقسیم کنیم. با استفاده از استدلالهای بخش ۱-۷، معادله ۱-۶۱، برای هر متوازی‌الاضلاع، از طریق تعویض با pV یا \mathbf{V} می‌رسیم به

$$\sum_{\text{شرط}} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau \quad (۱-۹۴\text{ب})$$

که در آن مجموع‌یابی روی شش رخ متوازی‌السطوح است. اگر سهم همه متوازی‌السطوحها را با هم جمع کنیم، پی می‌بریم که جمله‌های $\mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ برای همه رخدای درونی (دوتا دوتا) با هم حذف می‌شوند، و تنها سهم سطوح بیرونی باقی می‌ماند (شکل ۱-۲۴). مانند تعریف انتگرال ریمان به صورت حد یک مجموع، در اینجا نیز حد مجموع را وقتی که شمار متوازی‌السطوحها به بینهایت



شکل ۲۴-۱ حذف دقیق $d\sigma$ ها روی سطوح درونی. روی سطح بیرونی حذفی صورت نمی‌گیرد.

$(\rightarrow \infty)$ و ابعاد آنها به صفر $(\rightarrow 0)$ میل می‌کند محاسبه می‌کنیم

$$\sum_{\text{سطوحی بیرونی}} \mathbf{V} \cdot d\sigma = \sum_{\text{حجمها}} \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$$

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau$$

که در نتیجه معادله ۱-۹۴ الف، قضیه گاوس به دست می‌آید.

در معادله ۱-۶۱ اثبات شد که $\nabla \cdot \mathbf{V}$ از دیدگاه فیزیک برابر است با شارش برونسوی خالص شاره از یکای حجم. از این رو انتگرال حجمی آن کل شارش برونسوی خالص را بیان می‌کند. $\int \mathbf{V} \cdot d\sigma$ هم طریق دیگری است برای بیان همین کمیت، و این برابری، همان قضیه گاوس است.

قضیه گرین

صورت دیگری از قضیه گاوس نیز بارها مورد استفاده قرار می‌گیرد، که آن را قضیه گرین می‌نامند. اتحادهای زیر را می‌توانیم برای دو تابع اسکالر u و v بنویسیم

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = u \nabla \cdot \nabla v + (\nabla u) \cdot (\nabla v) \quad (۹۵-۱)$$

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = v \nabla \cdot \nabla u + (\nabla v) \cdot (\nabla u) \quad (۹۶-۱)$$

معادله ۱-۹۶ را از معادله ۱-۹۵ کم می‌کنیم و (با فرض اینکه u و v و مشتقهای آنها پیوسته باشند) روی یک حجم انتگرال می‌گیریم، سپس با بهره‌گیری از معادله ۱-۹۴ (قضیه گاوس) می‌رسیم به

$$\int_V (u \nabla \cdot \nabla v - v \nabla \cdot \nabla u) d\tau = \int_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\sigma \quad (۹۷-۱)$$

این عبارت، قضیه گرین است. از این قضیه برای بررسی توابع گرین در فصلهای ۸ و ۱۶ استفاده خواهیم کرد. صورت دیگری از قضیه گرین که با استفاده از معادله ۱-۹۵ به تنهایی استخراج می شود، به شکل زیر است

$$\int_S u \nabla v \cdot d\sigma = \int_V u \nabla \cdot \nabla v d\tau + \int_V \nabla u \cdot \nabla v d\tau \quad (۹۸-۱)$$

این عبارت صورتی از قضیه گرین است که در بخش ۱-۱۵ به کار خواهیم برد.

صورت‌های دیگر قضیه گاوس

معادله ۱-۹۴ که حاوی دیورانس است، از صورت‌های دیگر قضیه گاوس بسیار مهمتر است، ولی صورت‌هایی از این قضیه، حاوی گرادیان و تاو، نیز به کار می‌رود. فرض کنید

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V(x, y, z)\mathbf{a} \quad (۹۹-۱)$$

که در آن \mathbf{a} برداری است با بزرگی ثابت و جهت ثابت ولی اختیاری. (جهت را اختیار می‌کنیم، ولی پس از اختیار کردنش، دیگر آن را ثابت نگه می‌داریم.)

معادله ۱-۹۴ با استفاده از معادله ۱-۶۲ الف به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \int_S V d\sigma &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} V d\tau \\ &= \mathbf{a} \cdot \int_V \nabla V d\tau \end{aligned} \quad (۱۰۰-۱)$$

این معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathbf{a} \cdot \left[\int_S V d\sigma - \int_V \nabla V d\tau \right] = 0 \quad (۱۰۱-۱)$$

از آنجا که $|\mathbf{a}| \neq 0$ و جهت آن ثابت است، یعنی کسینوس زاویه بین این بردار و یک بردار دیگر نمی‌تواند همواره (برای همه جهتهای اختیار شده) صفر باشد، جمله داخل کروشه باید صفر باشد.^۱ در نتیجه

$$\int_S V d\sigma = \int_V \nabla V d\tau \quad (۱۰۲-۱)$$

۱. استفاده از ماهیت اختیاری بودن بخشی از یک مسئله، تکنیک ماهرانه‌ای است که غالباً به کار می‌رود. در بخش‌های ۱-۱۲ و ۱-۱۳ نیز بردار اختیاری را به کار خواهیم برد. با مثالهای دیگری نیز در بخش ۱-۱۴ (که انتگرالدها را برابر می‌گیریم) و در قاعده خارج قسمت بخش ۳-۳، روبه‌رو می‌شویم.

با بهره‌گیری از عبارت $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{P}$ ، که در آن \mathbf{a} بردار ثابتی است و با روشی مشابه می‌توانیم نشان دهیم که

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{P} = \int_V \nabla \times \mathbf{P} d\tau \quad (103-1)$$

در نظریهٔ کیرشهوف دربارهٔ پراش، این دو صورت اخیر قضیهٔ گاوس به‌کار می‌روند. از این صورتها برای اثبات معادله‌های ۹۰-۱ و ۹۲-۱ نیز می‌توان استفاده کرد. قضیهٔ گاوس را می‌توان به دیادیکیها یا تانسورها نیز تعمیم داد (بخش ۵-۳ را ببینید).

مسائل

۱-۱۱-۱ با استفاده از قضیهٔ گاوس ثابت کنید که برای سطح بسته S داریم

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

۲-۱۱-۱ نشان دهید که

$$\frac{1}{3} \int_S \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = V$$

که در آن V حجمی است که توسط سطح بسته S محاط شده است. یادآوری: این تعمیم مسئلهٔ ۵-۱۰-۱ است.

۳-۱۱-۱ اگر $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، نشان دهید که برای هر سطح بسته S داریم:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

۴-۱۱-۱ فرض کنید که ψ یکی از جوابهای معادلهٔ لاپلاس در داخل حجم V باشد (و مشتقهایی از آن که در لاپلاسی ظاهر می‌شوند پیوسته باشند). ثابت کنید که انتگرال مشتق قائم ψ ($\partial\psi/\partial n$) یا $(\nabla\psi \cdot \mathbf{n})$ روی هر سطح بسته در داخل V ، صفر است. ۵-۱۱-۱ در تشابه با تعریفهای انتگرالی گرادیان، دیورژانس و تاو در بخش ۱-۱۰، نشان دهید:

$$\nabla^2 \varphi = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \nabla \varphi \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau}$$

۶-۱۱-۱ بردار جابه‌جایی الکتریکی، \mathbf{D} ، در معادلهٔ ماکسول $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ صدق می‌کند، که در آن چگالی بار (به‌ازای یکای حجم) است. در مرز بین دو محیط، چگالی بار سطحی σ (به‌ازای واحد مساحت) وجود دارد. نشان دهید که یک شرط مرزی برای \mathbf{D} به‌قرار زیر وجود دارد:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma$$

که در آن \mathbf{n} بردار یکهٔ عمود بر سطح و به سوی بیرون از محیط اول است. [راهنمایی: قرص بسیار کوچکی مانند شکل زیر در نظر بگیرید.]



۷-۱۱-۱ در معادلهٔ ۶۲-۱ الف به‌جای \mathbf{V} میدان الکتریکی \mathbf{E} و به جای f پتانسیل الکتروستاتیکی φ را بنشانید و نشان دهید:

$$\int \rho \varphi d\tau = \epsilon_0 \int E^2 d\tau$$

این اتحاد متناظر با یک انتگرال‌گیری جزء به جزء سه‌بعدی است.

[راهنمایی: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ، $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ می‌توانید فرض کنید که φ به‌ازای مقادیر بزرگ r دست‌کم مانند r^{-1} صفر می‌شود.]

۸-۱۱-۱ توزیع خاصی از جریانهای الکتریکی حالت پایا در فضا جایگزیده است. سطح مرزی را آنقدر دور اختیار می‌کنیم که چگالی جریان \mathbf{J} در همه جای سطح برابر صفر باشد؛ نشان دهید که

$$\int \mathbf{J} d\tau = 0$$

[راهنمایی: هر بار یکی از مؤلفه‌های \mathbf{J} را در نظر بگیرید. با داشتن $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ نشان دهید:

$$\mathbf{J} = \nabla \cdot m; \mathbf{J}$$

۹-۱۱-۱ می‌توان نشان داد که برای ایجاد دستگاه جایگزیده‌ای از جریانهای الکتریکی پایا (با چگالی جریان \mathbf{J}) و میدانهای مغناطیسی باید کاری انجام داد که عبارت است از:

$$W = \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau$$

این رابطه را به رابطهٔ زیر تبدیل کنید

$$W = \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d\tau$$

که در آن \mathbf{A} پتانسیل برداری مغناطیسی است: $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

[راه‌نمایی: در معادلهٔ ماکسول جملهٔ مربوط به جریان جابه‌جایی را صفر بگیرید: $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$. اگر میدانها و جریانها جایگزیده باشند، می‌توانیم سطح مرزی را چندان دور بگیریم که انتگرال میدانها و جریانها روی آن صفر شود.]
۱-۱۱-۱ قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ گرین را اثبات کنید:

$$\int (v \mathcal{L} u - u \mathcal{L} v) d\tau = \int p(v \nabla u - u \nabla v) \cdot d\sigma$$

که در آن \mathcal{L} عملگر خودالحاقی است (بخش ۱-۹)

$$\mathcal{L} = \nabla \cdot [p(\mathbf{r}) \nabla] + q(\mathbf{r})$$

p ، q ، u و v توابعی از مکان‌اند؛ p و q مشتق‌های مرتبهٔ اول پیوسته، و u و v مشتق‌های مرتبهٔ دوم پیوسته دارند.

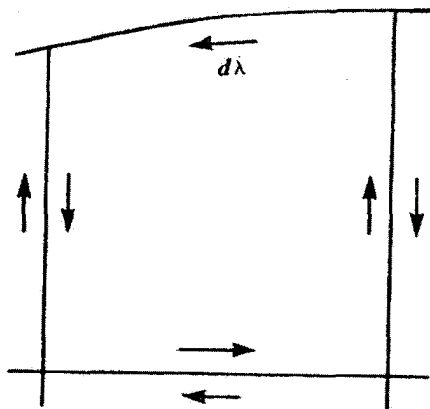
یادآوری: به قضیهٔ تعمیم یافتهٔ گرین در بخشهای ۸-۷ و ۱۶-۶ برمی‌خوریم.

۱-۱۲ قضیهٔ استوکس

قضیهٔ گاوس انتگرال حجمی مشتق یک تابع را به انتگرال آن تابع روی سطح بسته‌ای که آن حجم را احاطه می‌کند مربوط می‌کند. در اینجا رابطه‌ای مشابه آن بین انتگرال سطحی مشتق یک تابع و انتگرال خطی آن تابع روی مسیری که محیط آن سطح را تشکیل می‌دهد، در نظر می‌گیریم. این سطح را به شبکه‌ای از مستطیلهایی تقسیم می‌کنیم که مساحت آنها به قدر دلخواه کوچک باشند. در بخش ۱-۸ نشان دادیم که چرخش حول چنین مستطیل دیفرانسیلی (در صفحهٔ xy) برابر است با $\int \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}$. از معادلهٔ ۱-۷۱ برای یکی از مستطیلهای دیفرانسیلی داریم:

$$\sum_{\text{چهار ضلع}} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\sigma \quad (1-104)$$

بنابر تعریف انتگرال ریمان، روی همهٔ مستطیلهای کوچک جمع می‌زنیم. سهم همهٔ سطحها با هم جمع می‌شوند (سمت راست معادلهٔ ۱-۱۰۴). انتگرالهای خطی (سمت چپ معادلهٔ ۱-۱۰۴) روی همهٔ پاره‌خطهای داخلی با یکدیگر حذف می‌شوند. تنها انتگرال خطی روی محیط باقی می‌ماند (شکل ۱-۲۵). مطابق معمول، در حد که تعداد مستطیلهای بینهایت میل می‌کند و $d\mathbf{x} \rightarrow 0$



شکل ۲۵-۱ حذف دقیق انتگرالهای روی مسیره‌های داخلی. حذفی روی مسیر خارجی صورت نمی‌گیرد.

$dy \rightarrow 0$ داریم

$$\sum_{\text{پاره‌خطهای بیرونی}} \mathbf{V} \cdot d\lambda = \sum_{\text{مسطیها}} \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\sigma$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\oint \mathbf{V} \cdot d\lambda = \int_s \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\sigma \quad (105-1)$$

این عبارت، بیان قضیه استوکس است. انتگرال سطحی سمت راست روی سطحی است که محیط یا پربند انتگرال خطی سمت چپ آن را محاط می‌کند.

محدودیت این روش نمایش قضیه استوکس در آن است که در آن از بسط مکلورن $\mathbf{V}(x, y, z)$ بهره بردیم که در معادله ۷۱-۱ در بخش ۸-۱ به دست آوردیم. در حالی که فقط لازم است تا $\mathbf{V}(x, y, z)$ وجود داشته و روی سطح انتگرال‌پذیر باشد. در بخش ۳-۶ اثباتی برای قضیه انتگرال کوشی ارائه می‌شود؛ این اثبات شبیه به اثباتی است که در اینجا برای قضیه استوکس ارائه شد، با این تفاوت که در آن از شرایطی استفاده می‌شود که کمتر محدودکننده است.

روشن است که قضیه استوکس برای سطوح باز به کار می‌رود. هر سطح بسته‌ای را می‌توانیم به صورت حالت حدی سطح بازی در نظر بگیریم که در آن گشودگی سطح (و در نتیجه لبه‌اش) به صفر میل می‌کند. این نکته در مسئله ۷-۱۲-۱ مطرح می‌شود.

سایر صورتهای قضیه استوکس

در این جا نیز مانند قضیه گاوس، می‌توانیم روابط دیگری بین انتگرالهای سطحی و خطی استخراج

کنیم. می‌رسیم به

$$\int_S d\sigma \times \nabla \varphi = \oint \varphi d\lambda \quad (106-1)$$

و

$$\int_S (d\sigma \times \nabla) \times \mathbf{P} = \oint d\lambda \times \mathbf{P} \quad (107-1)$$

درستی اتحاد ۱۰۶-۱ را می‌توان به سادگی تحقیق کرد. به این ترتیب که، شبیه به بخش ۱-۱۱، تعویض $\mathbf{V} = \mathbf{a}\varphi$ را انجام می‌دهیم که در آن \mathbf{a} برداری است با بزرگی و جهت ثابت. در قضیه استوکس، معادله ۱۰۵-۱ می‌نشانیم

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{a}\varphi) \cdot d\sigma &= - \int_S \mathbf{a} \times \nabla \varphi \cdot d\sigma \\ &= -\mathbf{a} \cdot \int_S \nabla \varphi \times d\sigma \end{aligned} \quad (108-1)$$

برای انتگرال خطی داریم

$$\oint \mathbf{a}\varphi \cdot d\lambda = \mathbf{a} \cdot \oint \varphi d\lambda \quad (109-1)$$

می‌رسیم به

$$\mathbf{a} \cdot \left(\oint \varphi d\lambda + \int_S \nabla \varphi \times d\sigma \right) = 0 \quad (110-1)$$

از آنجا که گزینش جهت \mathbf{a} اختیاری است، عبارت درون پرانتز باید صفر شود؛ به این ترتیب معادله ۱۰۶-۱ اثبات شده است. معادله ۱۰۷-۱ را نیز می‌توان به‌طور مشابهی و با استفاده از $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{P}$ که در آن \mathbf{a} بردار ثابتی است، استخراج کرد.

قضیه‌های گاوس و استوکس، هر دو، در محاسبات برداری از اهمیت بسیار زیادی برخوردارند. توانایی و کارایی این دو قضیه تا حدودی در مسئله‌های بخشهای ۱-۱۱ و ۱-۱۲ و نیز در ارائه نظریه پتانسیل در بخشهای ۱-۱۳ و ۱-۱۴ نمایش داده شده است.

مسائل

۱-۱۲-۱ داریم $\mathbf{t} = -iy + jx$. به کمک قضیه استوکس نشان دهید که انتگرال روی یک منحنی

بسته پیوسته در صفحه xy : عبارت است از مساحت محاط شده درون آن منحنی

$$\frac{1}{2} \oint \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx) = A$$

۲-۱۲-۱ در محاسبه گشتاور مغناطیسی یک حلقه جریان به انتگرال خطی زیر برمی‌خوریم

$$\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

(الف) این انتگرال را روی محیط یک حلقه جریان (در صفحه xy) محاسبه کنید و نشان دهید که بزرگی عددی یا اسکالر این انتگرال خطی دو برابر مساحت احاطه شده است.

(ب) محیط یک بیضی، بنابر تعریف، عبارت است از $\mathbf{r} = ia \cos \theta + jb \sin \theta$ با استفاده از بند (الف) نشان دهید که مساحت بیضی برابر πab است.

۳-۱۲-۱ با استفاده از قضیه استوکس به صورت معادله ۱-۱۰۷

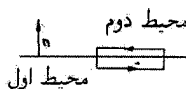
$$\int_S (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times \mathbf{P} = \oint d\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{P}$$

$\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید. حلقه را به‌طور کامل در صفحه xy بگیرید.

۴-۱۲-۱ میدان مغناطیسی \mathbf{H} در حالت پایا در معادله ماکسول $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ صدق می‌کند، که در آن \mathbf{J} چگالی جریان (به‌ازای یک مترمربع) است. درمرز بین دو محیط، یک چگالی جریان سطحی \mathbf{K} (به‌ازای یک متر) وجود دارد. نشان دهید شرط مرزی روی \mathbf{H} به‌صورت زیر است

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

که در آن \mathbf{n} بردار یکه عمود برسطح و به سوی بیرون محیط است. [راهنمایی: حلقه باریکی عمود بر مرز مشترک، مانند شکل، در نظر بگیرید.]



۵-۱۲-۱ با استفاده از معادله ماکسول، $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ، که در آن \mathbf{J} چگالی جریان است و $\mathbf{E} = 0$ ، نشان دهید:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I$$

که در آن I جریان الکتریکی خالص محصور در انتگرال خطی است. این دو معادله صورتهای دیرانسیلی و انتگرالی قانون آمپر در مبحث مغناطیس اند.

۱-۱۲-۶ جریان الکتریکی در حلقه به شعاع R ، القای مغناطیسی \mathbf{B} را تولید می کند. نشان دهید که بزرگی پتانسیل برداری \mathbf{A} ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) در حلقه عبارت است از:

$$|\mathbf{A}| = \frac{\varphi}{2\pi R}$$

که در آن φ کل شار مغناطیسی است که از حلقه می گذرد. یادآوری: \mathbf{A} بر حلقه مماس است.

۱-۱۲-۷ هر گاه S سطح بسته ای باشد، ثابت کنید:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\sigma = 0$$

۱-۱۲-۸ $\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ (در مسئله ۱-۱۰-۴) را توسط قضیه استوکس محاسبه کنید.

۱-۱۲-۹ ثابت کنید:

$$\oint u \nabla v \cdot d\lambda = - \oint v \nabla u \cdot d\lambda$$

۱-۱۲-۱۰ ثابت کنید:

$$\oint u \nabla v \cdot d\lambda = \int_S (\nabla u) \times (\nabla v) \cdot d\sigma$$

۱-۱۳ نظریه پتانسیل

پتانسیل اسکالر

اگر بتوانیم در ناحیه S از فضا، نیروی را به صورت منفی شیب یک تابع اسکالر φ بنویسیم:

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi \quad (۱-۱۱۱)$$

φ را پتانسیل اسکالر می نامیم. نیروی \mathbf{F} را که به صورت منفی شیب یک پتانسیل اسکالری تک مقدار ظاهر می شود، نیروی پایستار می نامیم. می خواهیم بدانیم چه وقت پتانسیل اسکالر وجود دارد.

برای آنکه به این سؤال پاسخ دهیم، دو رابطهٔ دیگر را استخراج می‌کنیم که معادل معادلهٔ ۱۱۱-۱ هستند. این معادله‌ها عبارت‌اند از

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (112-1)$$

و

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (113-1)$$

برای هر مسیر بسته در ناحیهٔ S . در صفحات بعدی نشان می‌دهیم که هر یک از این سه معادله بر وجود دو معادلهٔ دیگر دلالت می‌کند. ابتدا معادلهٔ زیر را می‌نویسیم

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi \quad (114-1)$$

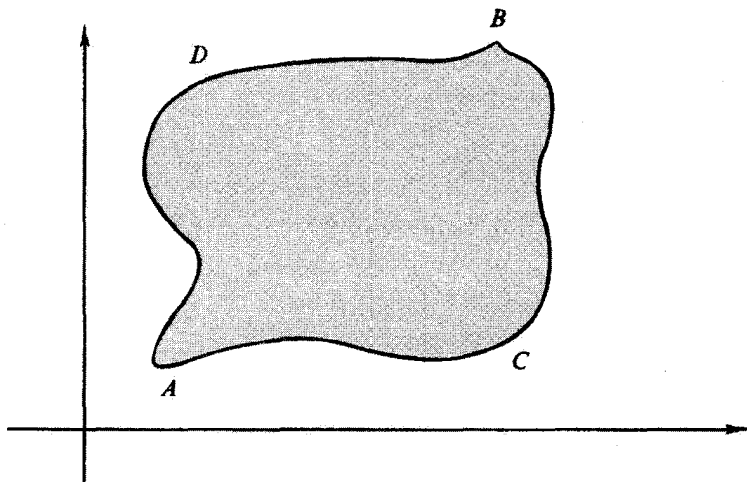
در این صورت، با استفاده از معادلهٔ ۷۷-۱ داریم

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla\varphi = \mathbf{0} \quad (115-1)$$

در نتیجه، از معادلهٔ ۱۱۱-۱، معادلهٔ ۱۱۲-۱ به دست می‌آید. اینک انتگرال خطی را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از معادلهٔ ۵۶-۱ داریم

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \oint d\varphi \end{aligned} \quad (116-1)$$

انتگرال $d\varphi$ برابر φ است. با توجه به آنکه این انتگرال روی یک حلقهٔ بسته گرفته می‌شود، نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بر هم منطبق‌اند و برای همهٔ مسیرهای بسته در ناحیهٔ S که معادلهٔ ۱۱۱-۱ برای آنها برقرار است، مقدار صفر را به دست می‌آوریم. در اینجا این نکتهٔ مهم را یادآوری می‌کنیم که تابع پتانسیل باید تک‌مقدار، و معادلهٔ ۱۱۱-۱ برای همهٔ نقاط درون S برقرار باشد. این مسئله‌ای است که در هنگام استفاده از پتانسیل مغناطیسی اسکالر پیش می‌آید؛ تا زمانی که جریان خالصی که محاط می‌شود صفر باشد، این روش کاملاً معتبر است ولی به محض آنکه مسیری را در فضا برگزینیم که جریان خالصی را دور بزند، پتانسیل مغناطیسی اسکالری دیگر تک‌مقدار نیست و این تحلیل دیگر کاربرد ندارد.



شکل ۱-۲۶ مسیره‌های مختلف برای انجام کار.

در ادامه اثبات هم‌ارزی سه رابطه ۱۱۱-۱ تا ۱۱۳-۱، فرض می‌کنیم که معادله ۱۱۳-۱ برقرار باشد. اگر برای همه مسیره‌های موجود در S داشته باشیم: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که مقدار انتگرالی که بین دو نقطه مشخص A و B گرفته می‌شود، از مسیر مستقل است (شکل ۱-۲۶). چون:

$$\oint_{ACBDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (117-1)$$

بنابراین

$$\int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{BDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (118-1)$$

با معکوس کردن جهت انتگرال‌گیری، علامت انتگرال را نیز تعویض می‌کنیم. از نظر فیزیکی، این امر یعنی اینکه کار انجام شده در انتقال از A به B ، از مسیر مستقل و کار انجام شده در یک مسیر بسته برابر صفر است. به همین دلیل هم، چنین نیرویی را پایستار می‌نامند: انرژی پایسته می‌ماند. از معادله ۱۱۸-۱ نتیجه می‌گیریم که کار انجام شده فقط به نقاط انتهایی A و B وابسته است. یعنی

$$\text{کاری که نیرو انجام می‌دهد} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(A) - \varphi(B) \quad (119-1)$$

معادله ۱۱۹-۱ پتانسیل اسکالر (یا به عبارت دقیقتر، اختلاف پتانسیل اسکالر بین نقاط A و B)

را تعریف می‌کند و ابزاری برای محاسبه پتانسیل است. اگر نقطه B را متغیر، مثلاً یا مختصات (x, y, z) بگیریم، آنگاه مشتق‌گیری از معادله ۱۱۹-۱ نسبت به x, y, z و ϕ به معادله ۱۱۱-۱ منجر می‌شود.

انتخاب علامت سمت راست اختیاری است. در اینجا علامت را چنان اختیار کرده‌ایم که با معادله ۱۱۱-۱ سازگار باشد و تضمین کند که آب به پایین جاری شود نه بالا. معادله ۱۱۹-۱ برای نقاط A و B که به اندازه dr از هم جدا شده باشند، به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -d\phi \\ &= -\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (120-1)$$

این رابطه را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$(\mathbf{F} + \nabla\phi) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (121-1)$$

و با توجه به آنکه $d\mathbf{r}$ اختیاری است، معادله ۱۱۱-۱ به دست می‌آید. اگر داشته باشیم:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (122-1)$$

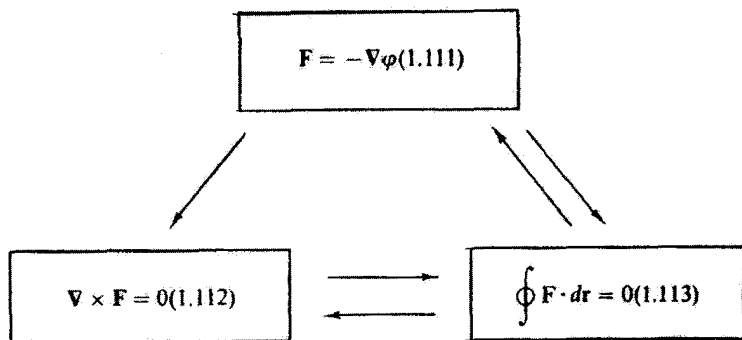
با استفاده از قضیه استوکس (معادله ۱۰۹-۱):

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (123-1)$$

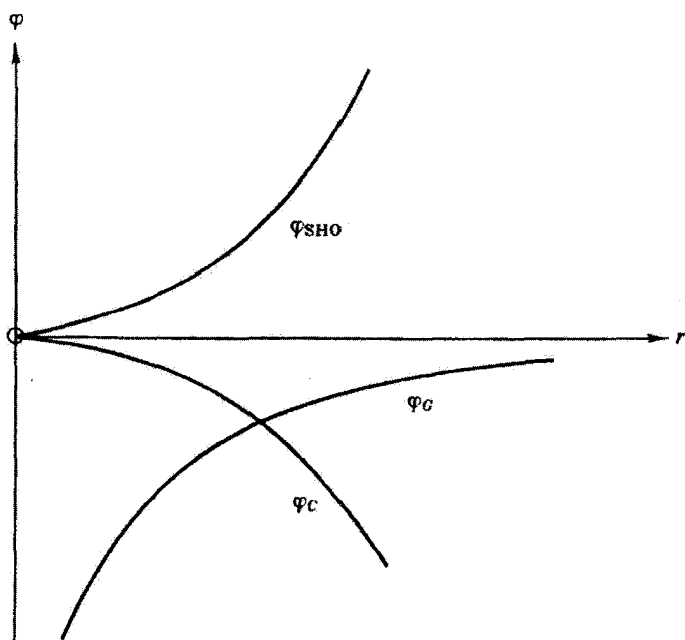
می‌توانیم به معادله ۱۱۲-۱ برسیم. به این ترتیب که مسیرانتگرال‌گیری را طوری اختیار می‌کنیم که محیط سطح دیفرانسیلی اختیاری $d\boldsymbol{\sigma}$ باشد، آنگاه انتگرالده انتگرال سطحی صفر خواهد شد. به این ترتیب، از معادله ۱۱۳-۱ به معادله ۱۱۴-۱ رسیده‌ایم.

سرانجام، اگر $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ، برای استخراج معادله ۱۱۳-۱ کافی است بیان قضیه استوکس (معادله ۱۲۳-۱) را وارون کنیم. سپس با استفاده از معادله‌های ۱۱۹-۱ تا ۱۲۱-۱ به عبارت اولیه $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ می‌رسیم. این هم‌ارزی سه‌گانه را در شکل ۲۷-۱ مشاهده می‌کنید.

جمع‌بندی مطالب بالا به این قرار است که تابع پتانسیل اسکالر تک‌مقدار ϕ فقط و فقط وقتی وجود خواهد داشت که \mathbf{F} غیرچرخشی یا کار انجام شده در هر مسیر بسته صفر باشد. میدانهای گرانشی و الکتروستاتیکی که معادله ۷۵-۱ آنها را بیان می‌کنند، غیرچرخشی و در نتیجه پایستارند.



شکل ۱-۲۷ فرمولبندیهای هم‌ارز.



شکل ۱-۲۸ انرژی پتانسیل (گرانشی، مرکزگریز و نوسانگر هماهنگ ساده) بر حسب فاصله.

پتانسیلهای گرانشی و الکتروستاتیکی وجود دارند. اکنون با محاسبه کار انجام شده (معادله ۱-۱۱۹) به تعیین سه پتانسیل می‌پردازیم (شکل ۱-۲۸).

مثال ۱-۱۳-۱ پتانسیل گرانشی: پتانسیل اسکالر نیروی گرانشی وارد بر یکای جرم m_1 را بیابید

$$F_G = -\frac{Gm_1m_2r_0}{r^2} = -\frac{kr_0}{r^2} \quad \text{شعاعی برونسو} \quad (1-124)$$

با انتگرال‌گیری از معادله ۱-۱۲۴، از بینهایت تا مکان r ، می‌رسیم به:

$$\varphi_G(r) - \varphi_G(\infty) = - \int_{\infty}^r \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = + \int_r^{\infty} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۲۵-۱)$$

با استفاده از عبارت اعمال شده $\mathbf{F}_G = -\mathbf{F}$ ، و مقایسه با معادله ۱-۸۸، نتیجه می‌گیریم که پتانسیل عبارت است از کاری که برای آوردن یکای جرم از بینهایت باید انجام دهیم. (می‌توانیم فقط اختلاف پتانسیل را تعریف کنیم. در اینجا به اختیار خود بینهایت را در صفر پتانسیل قرار داده‌ایم.) انتگرال سمت راست معادله ۱-۱۲۵ منفی است، یعنی $\varphi_G(r)$ منفی است. با توجه به آنکه \mathbf{F}_G شعاعی است، فقط در صورتی مقداری برای φ به دست می‌آوریم که $d\mathbf{r}$ شعاعی باشد، یعنی

$$\begin{aligned} \varphi_G(r) &= \int_r^{\infty} -\frac{k dr}{r^2} = -\frac{k}{r} \\ &= -\frac{Gm_1 m_2}{r} \end{aligned}$$

علامت منفی قسمت آخری عبارت بالا یکی از نتایج ربایشی بودن نیروی گرانی است.

مثال ۱-۱۳-۲ پتانسیل مرکزگرنی: پتانسیل اسکالر مربوط به نیروی مرکزگرنی وارد بر یکای جرم $F_G = \omega^2 r$ را که شعاعی برونسوست بیابید. از نظر فیزیکی، این وضعیتی است که بر روی یک صفحهٔ مدور (قرص) بزرگ افقی چرخان در یک شهر بازی می‌توان به آن برخورد کرد. به ترتیب مثال ۱-۱۳-۱ عمل می‌کنیم، ولی انتگرال را از مبدأ به بیرون می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\varphi_G(0) = 0$ داریم

$$\varphi_G(r) = - \int_0^r \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

اگر علامت را عوض کنیم و $\mathbf{F}_{SHO} = -kr$ را در نظر بگیریم، برای پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده می‌رسیم به:

$$\varphi_{SHO} = \frac{1}{2}kr^2$$

پتانسیلهای گرانشی، مرکزگرنی و نوسانگر هماهنگ ساده در شکل ۱-۲۸ نشان داده شده است. روشن است که پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده پایداری را نمایش می‌دهد و یک نیروی بازگرداننده را توصیف می‌کند. پتانسیل مرکزگرنی نمایانگر وضعیتی ناپایدار است.

ترمودینامیک-دیفرانسیل کامل

در مبحث ترمودینامیک، که برخی آن را جستجویی برای دیفرانسیلهای کامل می خوانند، با معادله هایی به صورت زیر روبه رو می شویم

$$df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (۱۲۶-۱)$$

مسئله معمول آن است که تعیین کنیم آیا $\int (P(x, y)dx + Q(x, y)dy)$ فقط به نقاط انتهایی وابسته است یا خیر. یعنی، آیا df در واقع یک دیفرانسیل کامل است یا خیر. شرط لازم و کافی به این قرار است که

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (۱۲۶-الف)$$

یا

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \quad (۱۲۶-ب)$$

شرط برقراری معادلات ۱۲۶-ب آن است که رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (۱۲۶-ج)$$

ولی این رابطه دقیقاً مشابه معادله ۱۱۶-۱، یعنی شرط مربوط به غیرچرخشی بودن \mathbf{F} است. در واقع مؤلفه z معادله ۱۱۵-۱ می دهد:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (۱۲۶-د)$$

پتانسیل برداری

در بعضی شاخه های فیزیک، به خصوص در نظریه الکترومغناطیس، وارد شدن پتانسیل برداری \mathbf{A} ، چنانکه میدان (نیروی) \mathbf{B} از رابطه زیر به دست آید، سودمند خواهد بود:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۱۲۷-۱)$$

روشن است که اگر معادله ۱-۱۲۷ برقرار باشد، از معادله ۱-۷۹ داریم: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و \mathbf{B} سیمپولهای است. در اینجا می‌خواهیم عکس این استدلال را بیاوریم و نشان دهیم که اگر \mathbf{B} سیمپولهای باشد، پتانسیل برداری \mathbf{A} وجود دارد. برای آنکه نشان دهیم \mathbf{A} وجود دارد، عملاً به محاسبه آن می‌پردازیم. فرض کنید برداری $\mathbf{B} = ib_1 + jb_2 + kb_3$ و بردار مجهول ما عبارت است از: $\mathbf{A} = ia_1 + ja_2 + ka_3$. از معادله ۱-۱۲۷ داریم

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1 \quad (1-128 \text{ الف})$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = b_2 \quad (1-128 \text{ ب})$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = b_3 \quad (1-128 \text{ ج})$$

فرض کنید دستگاه مختصات چنان اختیار شده که \mathbf{A} با صفحه xy موازی باشد، یعنی $a_3 = 0$. در این صورت

$$b_2 = -\frac{\partial a_2}{\partial x} \quad (1-129)$$

$$b_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x}$$

به کمک انتگرال‌گیری می‌رسیم به:

$$a_2 = \int_{x_0}^x b_2 dx + f_2(y, z) \quad (1-130)$$

$$a_2 = -\int_{x_0}^x b_3 dx + f_2(y, z)$$

که در آن f_2 و f_3 توابع اختیاری از y و z اند ولی به x وابسته نیستند. درستی این جواب را می‌توانیم با مشتق‌گیری از این دو معادله و به دست آوردن معادله ۱-۱۲۹ بیازماییم. معادله ۱-۱۲۸ الف

۱. روشن است که برای هر نقطه‌ای می‌توانیم این کار را انجام دهیم. اما اینکه این رابطه به‌ازای همه نقاط صادق، یعنی \mathbf{A} دو بعدی باشد، به هیچ‌وجه بدیهی نیست. برای توجیه می‌توان گفت که این رابطه درست است چون با مشکلی رویه‌رو نمی‌شویم، یعنی معادله ۱-۱۳۴ در معادله ۱-۱۲۷ صدق می‌کند.

استفاده از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_r}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} &= - \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial b_r}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) dx + \frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial b_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \end{aligned} \quad (131-1)$$

با انتگرال گیری نسبت به x می رسمیم به:

$$\frac{\partial a_r}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = b_1(x, y, z) - b_1(x_0, y, z) + \frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \quad (132-1)$$

با توجه به آنکه f_r و f_y تابعی اختیاری از y و z اند، می توانیم چنان انتخاب کنیم که:

$$\begin{aligned} f_r &= 0 \\ f_y &= \int_{y_0}^y b_1(x_0, y, z) dy \end{aligned} \quad (133-1)$$

که در نتیجه، سمت راست معادله ۱۳۲-۱ ساده می شود و به صورت $b_1(x, y, z)$ در می آید که با معادله ۱۲۸-۱ الف سازگار است. با استفاده از f_r و f_y از معادله ۱۳۳-۱ می توانیم \mathbf{A} را به دست آوریم:

$$\mathbf{A} = \mathbf{j} \int_{x_0}^x b_r(x, y, z) dx + \mathbf{k} \left[\int_{y_0}^y b_1(x_0, y, z) dy - \int_{x_0}^x b_r(x, y, z) dx \right] \quad (134-1)$$

این جواب هنوز کامل نشده است. به این عبارت می توانیم هر بردار ثابتی را بیفزاییم، زیرا \mathbf{B} مشتق است. از این مهمتر، می توانیم گرادیان هر تابع اسکالر، $\nabla \varphi$ ، را به این جواب بیفزاییم بدون آنکه در \mathbf{B} تغییری حاصل شود. دیگر اینکه توابع f_r و f_y یکتا نیستند. می توانستیم توابع دیگری را اختیار کنیم. در بخش ۱۵-۱ خواهیم دید که می توانیم \mathbf{A} را طوری تعیین کنیم که $\nabla \cdot \mathbf{A}$ نیز مشخص باشد.

مثال ۱۳-۱-۳ پتانسیل برداری مغناطیسی برای میدان مغناطیسی ثابت: برای آنکه روش رسیدن به پتانسیل برداری مغناطیسی را نشان دهیم، حالت خاص، ولی باز هم مهم القای مغناطیسی

ثابت را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{B} = kB_z \quad (۱۳۵-۱)$$

که در آن B_z ثابت است. معادله ۱۲۸-۱ به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_r}{\partial y} - \frac{\partial a_r}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_r}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial a_r}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} &= B_z \end{aligned} \quad (۱۳۶-۱)$$

اگر مانند قبل بگیریم $a_1 = 0$ ، از معادله ۱۳۴-۱ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{j} \int^x B_z dx \\ &= \mathbf{j} x B_z \end{aligned} \quad (۱۳۷-۱)$$

که در آن ثابت انتگرال‌گیری را صفر گرفته‌ایم. به سادگی می‌توان نشان داد که این \mathbf{A} در معادله ۱۲۷-۱ صدق می‌کند.

برای آنکه نشان دهیم گزینه $a_1 = 0$ جواب منحصر به فرد نیست، و یا دست‌کم این گزینه الزامی نیست، فرض می‌کنیم $a_r = 0$. از معادله ۱۳۶-۱ می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_r}{\partial z} &= 0 & (\text{الف } ۱۳۸-۱) \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} &= 0 & (\text{ب } ۱۳۸-۱) \\ \frac{\partial a_r}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} &= B_z & (\text{ج } ۱۳۸-۱) \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که a_1 و a_r از z مستقل‌اند، یا

$$a_1 = a_1(x, y), \quad a_r = a_r(x, y) \quad (۱۳۹-۱)$$

اگر بگیریم

$$a_r = p \int^x B_z dx = px B_z \quad (۱۴۰-۱)$$

$$a_1 = (p-1) \int^y B_z dy = (p-1)yB_z \quad (141-1)$$

که در آن p ثابت است، و در معادله ۱۳۸-۱ صدق می‌کند. در نتیجه،

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}(p-1)yB_z + \mathbf{j}pxB_z \quad (142-1)$$

باز هم می‌بینیم که معادلات ۱۲۷-۱، ۱۳۵-۱ و ۱۴۲-۱ سازگارند. از مقایسه معادله‌های ۱۳۷-۱ و ۱۴۲-۱ فوری بی‌می‌بریم که \mathbf{A} یکتا نیست. تفاوت بین معادله‌های ۱۳۷-۱ و ۱۴۲-۱ و ظهور پارامتر p در معادله ۱۴۲-۱ را می‌توانیم با نوشتن معادله ۱۴۲-۱ به صورت زیر توجیه کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{\gamma}(\mathbf{i}y - \mathbf{j}x)B_z \\ &+ \left(p - \frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{i}y + \mathbf{j}x)B_z \quad (143-1) \\ &= -\frac{1}{\gamma}(\mathbf{i}y - \mathbf{j}x)B_z + \left(p - \frac{1}{\gamma}\right)B_z \nabla \varphi \end{aligned}$$

که در آن

$$\varphi = xy \quad (144-1)$$

جمله اول \mathbf{A} متناظر است با صورت معمولی زیر، به ازای \mathbf{B} ثابت:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\gamma}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \quad (145-1)$$

جمع‌بندی مبحث پتانسیل برداری: اگر بردار \mathbf{B} سیمولوله‌ای باشد، یک پتانسیل برداری \mathbf{A} چنان وجود خواهد داشت که $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. پتانسیل برداری \mathbf{A} را می‌توان با دقتی برابر گرادیان یک تابع اسکالر تعیین کرد. این گرادیان متناظر است با انتخاب صفر پتانسیل، یعنی ثابت انتگرال‌گیری برای پتانسیل اسکالر.

در مسائل زیادی، پتانسیل برداری مغناطیسی \mathbf{A} با استفاده از توزیع جریانی که القای مغناطیسی \mathbf{B} را ایجاد می‌کند، محاسبه می‌شود. برای این کار باید معادله (برداری) پواسون را حل کرد (مسئله ۱-۱۴-۴).

مسائل

۱-۱۳-۱ اگر نیروی \mathbf{F} به صورت زیر معلوم باشد:

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)$$

عبارتهای زیر را بیابید:

(الف) $\nabla \cdot \mathbf{F}$; (ب) $\nabla \times \mathbf{F}$; (ج) پتانسیل اسکالر $\varphi(x, y, z)$ ، به گونه‌ای که $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ ؛
(د) پتانسیل اسکالر، به ازای چه مقداری برای نمای n هم در مبدأ و هم در بینهایت واگرا می‌شود؟

جواب: (الف) $(2n+3)r^{2n}$ ، (ب) ۰، (ج) $n \neq -1$ ، $-\frac{1}{2n+2}r^{2n+2}$ ، (د) $n = -1$ ، $\varphi = -\ln r$

۱-۱۳-۲ کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت (در سرتاسر حجم خود) باردار شده است. پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(r)$ را به ازای $0 \leq r \leq \infty$ به دست آورید.

[راه‌نمایی: در بخش ۱-۱۴ نشان داده می‌شود که نیروی کولنی وارد بر بار آزمون در $r = r_0$ فقط به بار در فواصل کمتر از r_0 بستگی دارد و از بار واقع در فواصل بزرگتر از r_0 مستقل است. توجه کنید که این مطلب فقط برای توزیع بار با تقارن کروی صادق است.]

۱-۱۳-۳ محاسبه حرکت یک ذره در یک پتانسیل معلوم مسئله‌ای معمولی در مکانیک کلاسیک است. بنابر قانون گاوس، در بخش ۱-۱۴ نیروی گرانشی وارد بر یکای جرم m به فاصله r از مرکز کره جرم‌دار غیرچرخان با چگالی یکنواخت (ρ_0) از ربایش جرم واقع در $r \leq r_0$ حاصل می‌شود. جرم واقع در $r > r_0$ نقشی در این نیرو ندارد.

(الف) نشان دهید که $\mathbf{F}/m_0 = -(\frac{4}{3}\pi G\rho_0)r$ که در آن $a \leq r \leq \infty$ که در آن شعاع کره است.

(ب) پتانسیل گرانشی متناظر را در $a \leq r \leq \infty$ بیابید.

(ج) تصور کنید که یک سوراخ قائم در زمین حفر شده باشد، به طوری که سوراخ از مرکز کره زمین بگذرد و تا طرف مقابل روی کره زمین ادامه داشته باشد. با چشمپوشی از چرخش زمین و با فرض اینکه چگالی ثابت و برابر $\rho_0 = 5.5 \text{ g/cm}^3$ باشد، ماهیت حرکت ذره‌ای را که در این سوراخ رها شده باشد، تعیین کنید. دوره حرکت این ذره چقدر است؟

یادآوری: $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$ عملاً تقریب ضعیفی است. با توجه به متغیر بودن چگالی تقریب $\mathbf{F} = \text{const.}$ در نیمه خارجی خط شعاعی و $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$ در نیمه درونی آن، تقریب به مراتب بهتری است.

۱-۱۳-۴ مبدأ مختصات دکارتی را در مرکز زمین بگیرید. ماه را روی محور z به فاصله ثابت R (فاصله مرکز تا مرکز) از مبدأ بگیرید. نیرویی کشندی که ماه بر ذرات واقع بر سطح زمین (در نقطه

(z, y, x) وارد می‌آورد، عبارت است از

$$F_x = -GMm \frac{x}{R^3}, \quad F_y = -GMm \frac{y}{R^3}, \quad F_z = +GMm \frac{z}{R^3}$$

پتانسیلی را محاسبه کنید که این نیروی کشندی را می‌دهد.

$$\text{جواب: } -GMm/R^3(z^2 - 1/2x^2 - 1/2y^2)$$

این عبارت برحسب چند جمله‌ایهای لژاندر در فصل ۱۲ به صورت زیر در می‌آید

$$\left(-\frac{GMm}{R^3}\right) r^2 P_2(\cos \theta)$$

۵-۱۳-۱ مؤلفه‌های القای مغناطیسی \mathbf{B} حاصل از سیم مستقیم و دراز حامل جریان I عبارت‌اند از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

پتانسیل برداری مغناطیسی \mathbf{A} را بیابید.

$$\text{جواب: } \mathbf{A} = -k(\mu_0 I / 2\pi) \ln(x^2 + y^2) \quad (\text{این جواب یکتا نیست}).$$

۶-۱۳-۱ اگر داشته باشیم

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}_0}{r^3} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

بردار \mathbf{A} را چنان بیابید که $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. یکی از جوابهای ممکن به صورت زیر است

$$\mathbf{A} = \frac{i y z}{r(x^2 + y^2)} - \frac{j x z}{r(x^2 + y^2)}$$

۷-۱۳-۱ نشان دهید هر بردار ثابت \mathbf{B} (در هر جهتی) در دو معادله زیر صدق می‌کند

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\gamma} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

۸-۱۳-۱ بردار \mathbf{B} به صورت حاصلضرب دو گرادیان تعریف می‌شود

$$\mathbf{B} = (\nabla u) \times (\nabla v)$$

که در آن u و v توابعی اسکالرند.

(الف) نشان دهید \mathbf{B} سیمولوله‌ای است.

(ب) نشان دهید:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r}(u\nabla v - v\nabla u)$$

پتانسیل برداری مربوط به \mathbf{B} است، به گونه‌ای که

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

۹-۱۳-۱ مابین القای مغناطیسی \mathbf{B} و پتانسیل برداری مغناطیسی رابطه $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ برقرار است. از قضیه استوکس داریم

$$\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

نشان دهید که دو طرف این معادله تحت تبدیل پیمانه‌ای $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\varphi$ ناورد است.

یادآوری: تابع ψ را تک مقدار بگیرید. تبدیل پیمانه‌ای نام در مسئله ۳-۷-۴ بررسی می‌شود.

۱۰-۱۳-۱ برای میدان الکتریکی \mathbf{E} و پتانسیل برداری مغناطیسی \mathbf{A} ، نشان دهید $[\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t]$ غیرچرخشی است، و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

۱۱-۱۳-۱ نیروی کل وارد بر بار q که با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند، به قرار زیر است

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

با استفاده از پتانسیلهای اسکالر و برداری، نشان دهید

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right]$$

توجه داشته باشید که در اینجا، به جای مشتق زمانی پاره‌ای A در مسئله ۱-۱۳-۱، مشتق زمانی کامل داریم.

۱۴-۱ قانون گاوس، معادله پواسون

قانون گاوس

بار الکتریکی نقطه‌ای q را در مبدأ دستگاه مختصات در نظر بگیرید. این بار، میدان الکتریکی E را به قرار زیر تولید می‌کند^۱

$$E = \frac{q\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (146-1)$$

اکنون به استخراج قانون گاوس می‌پردازیم. بنابراین قانون، انتگرال سطحی

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} q \\ \epsilon_0 \end{cases} \quad (147-1)$$

برابر q/ϵ_0 است در صورتی که سطح بسته S مبدأ را (که q در آن واقع است) دربر بگیرد، و صفر است اگر این سطح مبدأ را در بر نگیرد (شکل ۱-۲۹). سطح بسته S می‌تواند هر سطح بسته‌ای باشد، نیازی نیست که کروی باشد.

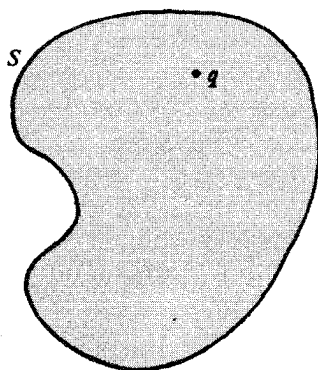
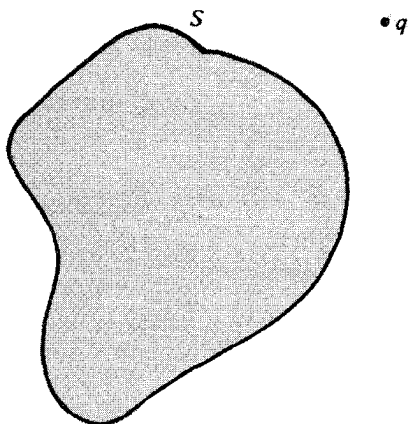
با به‌کار بردن قضیه گاوس، معادله ۱-۹۴ (و با چشمپوشی از $q/4\pi\epsilon_0$)، با استفاده از مثال ۱-۷-۲، می‌رسیم به:

$$\int_S \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^2} = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_0}{r^2} \right) d\tau = 0 \quad (148-1)$$

به شرط آنکه سطح S مبدأ را دربر نگیرد که در آن انتگرالده تعریف نشده است. به این ترتیب قسمت دوم قانون گاوس اثبات شد.

برای اثبات قسمت اول، که در آن سطح S مبدأ را دربر می‌گیرد، به این ترتیب عمل می‌کنیم که مبدأ را با کره کوچک S' به شعاع δ احاطه می‌کنیم (شکل ۱-۳۰). برای آنکه سؤال پیش نیاید که چه چیز در داخل و چه چیز در خارج است، فرض کنید حجم خارج سطح بیرونی

۱. میدان الکتریکی E به‌صورت نیروی وارد بر بار آزمون ساکن و کوچک q به‌ازای یکای بار تعریف می‌شود: $E = F/q$. نیرویی که q بر q_1 وارد می‌آورد، بنابر قانون کولن عبارت است از $F = (qq_1/4\pi\epsilon_0)(\mathbf{r}_0/r^2)$. وقتی این نیرو را بر q_1 تقسیم می‌کنیم، معادله ۱-۱۴۶ به‌دست می‌آید.

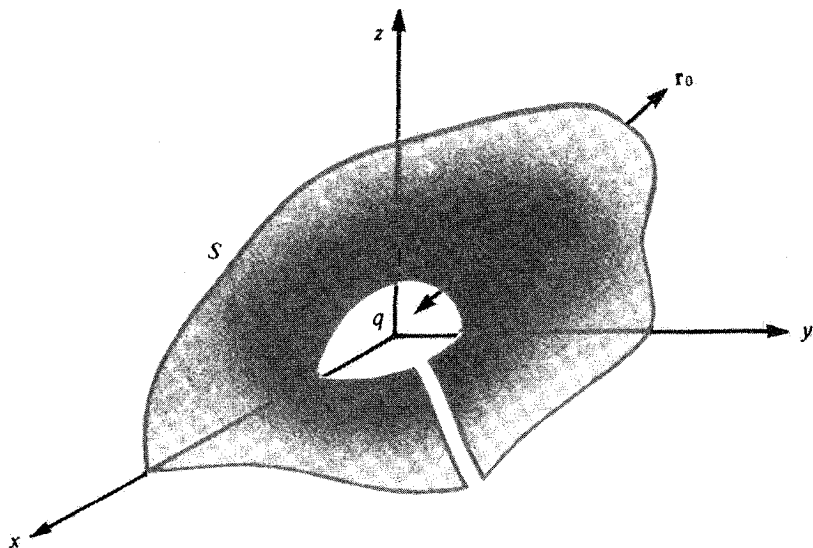


شکل ۱-۲۹

S را از طریق سوراخ کوچکی به حجم داخل سطح $S' (r < \delta)$ متصل کرده‌ایم. این کار دو سطح S و S' را به یکدیگر متصل می‌کند و ترکیب آنها را به صورت یک سطح بسته همبند ساده در می‌آورد. سطح داخلی را عمداً کروی گرفته‌ایم تا بتوانیم انتگرال روی آن را محاسبه کنیم. اکنون می‌توانیم قضیه گاوس را بدون هیچ مشکلی برای حجم محصور بین S و S' به کار ببریم. داریم

$$\int_S \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^2} + \int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = 0 \quad (1-149)$$

با استفاده از $d\boldsymbol{\sigma}' = -\mathbf{r}_0 \delta^2 d\Omega$ که در آن $d\Omega$ عنصر زاویه فضایی است، می‌توانیم



شکل ۱-۳۰ حذف مبدأ.

انتگرال دوم را محاسبه کنیم. علت ظهور علامت منفی این است که در بخش ۱-۱۰ قرارداد کردیم که عمود مثبت \mathbf{r}'_0 را برونسو از حجم بگیریم. در این حالت، \mathbf{r}'_0 برونسو در جهت شعاعی منفی، $\mathbf{r}'_0 = -\mathbf{r}_0$ است. با انتگرال گیری روی کل زاویه فضایی، داریم

$$\int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\sigma'}{\delta^2} = - \int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 \delta^2 d\Omega}{\delta^2} = -4\pi \quad (150-1)$$

که از شعاع، یعنی δ ، مستقل است. با ثابتی که در معادله ۱-۱۴۶ داشتیم، می‌رسیم به:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (151-1)$$

و به این ترتیب، اثبات قانون گاوس تکمیل می‌شود. دقیقاً توجه کنید که هر چند سطح S می‌تواند کروی باشد، ولی نیازی نیست که حتماً کروی باشد.

اندکی فراتر می‌رویم و یک توزیع بار را چنان در نظر می‌گیریم که:

$$q = \int_V \rho d\tau \quad (152-1)$$

معادله ۱-۱۵۱ هنوز برقرار و q در آن برابر کل بار توزیع شده‌ای است که سطح S آن را احاطه کرده است.

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad (1-153)$$

با استفاده از قضیه گاوس:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad (1-154)$$

با توجه به آنکه حجم مورد نظر کاملاً اختیاری است، مقادیر انتگرالده باید با هم برابر باشند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-155)$$

این عبارت، یکی از معادله‌های ماکسول است. اگر استدلال را عکس کنیم، می‌توانیم قانون گاوس را بی‌واسطه از معادله ماکسول به دست آوریم.

معادله پواسون

اگر به جای \mathbf{E} ، $-\nabla\varphi$ قرار دهیم، معادله ۱-۱۵۵ به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-156)$$

این عبارت، معادله پواسون است. در شرایطی که $\rho = 0$ ، این معادله به معادله مشهورتر زیر تبدیل می‌شود، که همان معادله لاپلاس است:

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = 0 \quad (1-157)$$

در بررسی دستگاههای مختصات مختلف (فصل ۲) به فراوانی با معادله لاپلاس و توابع خاص ریاضی فیزیک که به صورت جواب این معادله ظاهر می‌شوند، سروکار پیدا خواهیم کرد. معادله پواسون در ارائه و تشریح نظریه توابع گرین (بخشهای ۸-۷ و ۱۶-۵ جلد دوم) سهم عمده‌ای ایفا می‌کند.

با مقایسه قانون نیروی الکتروستاتیکی کولن و قانون نیوتون درباره گرانش عمومی:

$$\mathbf{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_0.$$

نتیجه می‌گیریم که کل نظریه پتانسیل در این بخش درباره پتانسیل گرانشی نیز صادق است. مثلاً معادله پواسون گرانشی به‌قرار زیر است

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = +4\pi G \rho \quad (الف-۱۵۶)$$

که در آن ρ چگالی جرمی است.

مسائل

۱-۱۴-۱ قانون گاوس را برای حالتی دوبعدی به‌دست آورید، که در آن:

$$\varphi = -q \frac{\ln \rho}{2\pi\epsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi = q \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

در اینجا q بار واقع در مبدأ است، و با اگر دستگاه دوبعدی برشی با ضخامت واحد از یک دستگاه (استوانه‌ای دوار) سه‌بعدی باشد، q بار خطی به‌ازای یکای طول است. متغیر ρ به‌صورت شعاعی و برونسو از خط بار اندازه‌گیری می‌شود. ρ_0 برداریکه متناظر است (بخش ۲-۴).
۱-۱۴-۲ (الف) نشان دهید که قانون گاوس را می‌توان از معادله ماکسول به‌قرار زیر به‌دست آورد

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

که در آن ρ همان چگالی بار متداول است.

(ب) با فرض اینکه میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q تقارن کروی دارد، نشان دهید که از قانون گاوس می‌توان عبارت عکس مجذوری کولن را به‌قرار زیر به‌دست آورد

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

۱-۱۴-۳ نشان دهید که مقدار پتانسیل الکتروستاتیکی φ در هر نقطه P برابر است با میانگین پتانسیل روی سطح کروی به مرکز P . هیچ بار الکتریکی روی کره یا درون آن موجود نیست.

[راهنمایی: از قضیه گرین، معادله ۱-۹۷، بهره گیرید و در آن قرار دهید $v = \varphi$. همچنین به معادله ۱-۱۷۳ در بخش ۱-۱۵ توجه کنید].

۱-۱۴-۴ با استفاده از معادلات ماکسول نشان دهید که پتانسیل برداری مغناطیسی A ، دستگاهی از جریانهای پایا در معادله برداری پواسون صدق می‌کند

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J$$

مشروط بر آنکه قرارداد کنیم $\nabla \cdot A = 0$.

۱-۱۵ قضیه هلمهولتز

در بخش ۱-۱۳ تأکید کردیم که انتخاب پتانسیل برداری مغناطیسی A منحصر به فرد نیست. دیورژانس A هنوز نامعین است. در این بخش دو قضیه درباره دیورژانس و تویک بردار را بیان می‌کنیم. قضیه اول به قرار زیر است:

اگر دیورژانس و تویک بردار در ناحیه‌ای معلوم و مؤلفه عمودی آن در مرز نیز مشخص باشد، آن بردار به صورت یکتا تعیین خواهد شد.
فرض کنید

$$\nabla \cdot V_1 = s$$

$$\nabla \times V_1 = c \quad (1-158)$$

که در آن s را می‌توان چگالی چشمه (بار) و c را چگالی چرخش (جریان) تعبیر کرد. علاوه بر این، فرض می‌کنیم مؤلفه عمودی V_{1n} در مرز معلوم باشد؛ می‌خواهیم نشان دهیم که V_1 یکتاست. برای این کار فرض می‌کنیم بردار دیگری مانند V_2 وجود دارد که در معادله ۱-۱۵۸ صدق می‌کند و همین مؤلفه عمودی روی مرز در آن وجود دارد؛ سپس نشان می‌دهیم که $V_1 - V_2 = 0$. فرض کنید

$$W = V_1 - V_2$$

در این صورت

$$\nabla \cdot W = 0 \quad (1-159)$$

و

$$\nabla \times W = 0 \quad (1-160)$$

با توجه به آنکه \mathbf{W} غیرچرخشی است، می‌توانیم (با استفاده از بخش ۱-۱۳) بنویسیم

$$\mathbf{W} = -\nabla\varphi \quad (۱۶۱-۱)$$

این عبارت را در معادله ۱-۱۵۹ می‌نشانیم و می‌رسیم به

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = 0 \quad (۱۶۲-۱)$$

که همان معادله لاپلاس است.

اکنون از قضیه گرین به شکلی که در معادله ۱-۹۸ داده شد، استفاده می‌کنیم و u و v هر دو را با φ برابر قرار می‌دهیم. با توجه به آنکه در مرز داریم:

$$W_n = V_{1n} - V_{2n} = 0 \quad (۱۶۳-۱)$$

قضیه گرین به صورت زیر ساده می‌شود

$$\int_V (\nabla\varphi) \cdot (\nabla\varphi) d\tau = \int_V \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} d\tau = 0 \quad (۱۶۴-۱)$$

کمیت $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = W^2$ نامنفی است؛ بنابراین باید در همه نقاط داشته باشیم:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0 \quad (۱۶۵-۱)$$

پس، \mathbf{V}_1 یکتاست و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

رابطه $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، برای پتانسیل برداری مغناطیسی \mathbf{A} ، تاو را مشخص می‌کند. غالباً برای راحتی قرار می‌دهیم $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (با مسئله ۱-۱۴-۴ مقایسه کنید). آنگاه \mathbf{A} (با داشتن شرایط مرزی) معین می‌شود.

این قضیه را می‌توانیم به صورت یک قضیه یکتایی برای جوابهای معادله لاپلاس بنویسیم (مسئله ۱-۱۵-۱). این صورت قضیه یکتایی در حل مسائل الکتروستاتیک و سایر مسائل شرایط مرزی معادله لاپلاس اهمیت زیادی دارد. اگر بتوانیم جوابی برای معادله لاپلاس بیابیم که در شرایط مرزی لازم صدق کند، این جواب، همان جواب کامل است. در بخشهای ۱۲-۳ و ۱۲-۵ بار دیگر به این مسئله‌های شرایط مرزی می‌پردازیم.

قضیه هلمهولتز

دومین قضیه‌ای که ثابت می‌کنیم، قضیه هلمهولتز است:

اگر بردار \mathbf{V} در معادله ۱-۱۵۸ صدق کند و چگالیهای چشمه و چرخشی، هر دو، در بینهایت صفر شوند، می‌توان آن را به صورت مجموع این دو جزء، یکی غیرچرخشی و دیگری سیملوله‌ای نوشت.

روشن است که اگر بتوانیم بردار \mathbf{V} را به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (۱-۱۶۶)$$

قضیه هلمهولتز اثبات شده است. زیرا $-\nabla\varphi$ غیرچرخشی و $\nabla \times \mathbf{A}$ سیملوله‌ای است. این روند را ادامه می‌دهیم تا معادله ۱-۱۶۶ را ثابت کنیم.

\mathbf{V} بردار معلومی است. دیورژانس و تاو آن را محاسبه می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = s(\mathbf{r}) \quad (۱-۱۶۶\text{الف})$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{c}(\mathbf{r}) \quad (۱-۱۶۶\text{ب})$$

که در آن $s(\mathbf{r})$ و $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ توابع معلومی از مکان‌اند. با استفاده از این دو تابع، یک پتانسیل اسکالر $\varphi(\mathbf{r}_1)$ به صورت زیر:

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2 \quad (۱-۱۶۷\text{الف})$$

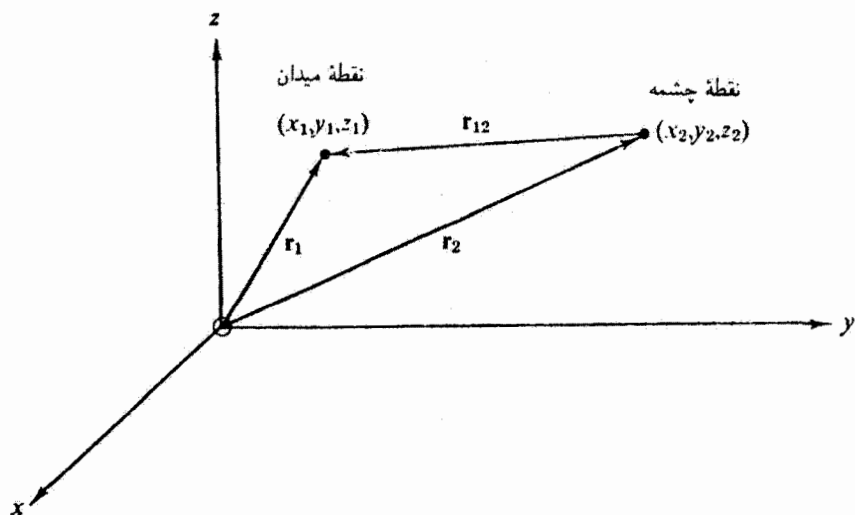
و یک پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$ به صورت:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2 \quad (۱-۱۶۷\text{ب})$$

تعریف می‌کنیم. در اینجا شناسه \mathbf{r}_1 نقطه میدان با مختصات (x_1, y_1, z_1) و نقطه چشمه با مختصات (x_2, y_2, z_2) را مشخص می‌کنند. در حالی که

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \quad (۱-۱۶۸)$$

جهتی که به r_{12} وابسته می‌شود در راستای خط بین چشمه و میدان، و از چشمه به سوی نقطه میدان است. از نظر برداری، مطابق شکل ۱-۳۱، داریم: $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. البته s و \mathbf{c} باید



شکل ۱-۳۱ نقاط میدان و چشمه.

با سرعت کافی به سوی صفر میل کنند که انتگرالها وجود داشته باشند. بسط واقعی و محاسبه انتگرالهایی نظیر معادله‌های ۱-۱۶۷ الف و ب در بخش ۱۲-۱ خواهد آمد.

∇ ، با استفاده از قضیه یکتایی که در آغاز این بخش اثبات شد، توسط دیورژانس آن یعنی s ، و تاو آن یعنی c (و شرایط مرزی) به صورت یکتا مشخص می‌شود. به معادله ۱-۱۶۶ باز می‌گردیم؛ با توجه به آنکه دیورژانس تاو صفر می‌شود، داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \nabla \varphi \quad (\text{الف } ۱۶۹-۱)$$

و نیز با توجه به آنکه تاو گرادیان صفر است:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{ب } ۱۶۹-۱)$$

اگر بتوانیم نشان دهیم:

$$-\nabla \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}_1) = s(\mathbf{r}_1) \quad (\text{ج } ۱۶۹-۱)$$

و

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{c}(\mathbf{r}_1) \quad (\text{د } ۱۶۹-۱)$$

نتیجه می‌گیریم که \mathbf{V} بنابر معادله ۱-۱۶۶، دیورژانس و تاو صحیح را دارد؛ این توصیف دارای سازگاری ذاتی است و درستی معادله ۱-۱۶۶ تحقیق شده است.^۱
 نخست دیورژانس \mathbf{V} را در نظر می‌گیریم

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \int \frac{s(\mathbf{r}_r)}{r_{1r}} d\tau_r \quad (170-1)$$

عملگر لاپلاسی $\nabla \cdot \nabla$ یا ∇^2 روی مختصات میدان، یعنی (x_1, y_1, z_1) ، عمل می‌کند. از این رو با انتگرال‌گیری نسبت به (x_r, y_r, z_r) جابه‌جا می‌شود. داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}_r) \nabla_r^2 \left(\frac{1}{r_{1r}} \right) d\tau_r \quad (171-1)$$

با استفاده از مثال ۱-۶-۱ و اثبات قانون گاوس در بخش ۱-۱۴، بسته به اینکه انتگرال‌گیری شامل مبدأ $r = 0$ باشد یا خیر، داریم

$$\int \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau = - \int \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_0}{r^3} \right) d\tau = \begin{cases} -4\pi & \\ 0 & \end{cases} \quad (172-1)$$

این نتیجه‌گیری را با معرفی تابع دلتای دیراک $\delta(r)$ به‌نحو مناسبتری به‌قرار زیر می‌توان بیان کرد:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r) \quad (173-1)$$

تابع دلتای دیراک از طریق خواصی تعریف می‌شود که به آن نسبت داده‌اند:

$$\delta(r) = 0, \quad r \neq 0 \quad (الف) \quad (174-1)$$

$$\int f(r) \delta(r) d\tau = f(0) \quad (ب) \quad (174-1)$$

که در آن $f(r)$ می‌تواند هر تابع خوش‌تعریفی باشد و حجم انتگرال‌گیری شامل مبدأ نیز هست. به عنوان حالتی خاص از معادله ۱-۱۷۴، ب، داریم

$$\int \delta(r) d\tau = 1 \quad (175-1)$$

۱. به‌نحوی کاملاً هم‌ارز، می‌توانستیم معادله ۱-۱۶۹ ج یعنی معادله یواسون را حل کنیم و جواب را با پتانسیلی که معرفی کرده‌ایم، یعنی معادله ۱-۱۶۷ الف، مقایسه کنیم. جواب معادله یواسون در بخش ۸-۷ خواهد آمد.
 ۲. با بخش ۸-۷، که در آن تابع دلتای دیراک به‌صورت جامع‌تری بررسی شده است، مقایسه کنید.

این کمیت $\delta(r)$ در واقع اصلاً یک تابع نیست، زیرا در $r = 0$ تعریف نشده است (نامتناهی است). با همه اینها، خاصیت اساسی معادله ۱-۱۷۴ را می‌شود به صورت حد دنباله‌ای از توابع یا یک توزیع، به صورت دقیق اثبات کرد. این اثبات در بخش ۸-۷ ارائه شده است. در اینجا ما تابع دلتا را برحسب خواص معرف آن به‌کار خواهیم برد.

پیش از آنکه معادله ۱-۱۷۳ را به‌کار ببریم، باید دو تغییر جزئی در آن انجام دهیم. نخست آنکه چشمه در r_2 است نه در مبدأ. یعنی، در قانون گاوس فقط به شرطی 4π به‌دست می‌آوریم که سطح مرزی نقطه $r = r_2$ را در بر بگیرد. برای آنکه این نکته رعایت شود، معادله ۱-۱۷۳ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) = -4\pi\delta(r_1 - r_2) \quad (1-176)$$

این انتقال چشمه به نقطه r_2 را می‌شود در معادله معرف تابع دلتا ۱-۱۷۴ به صورت زیر اعمال کرد

$$\delta(r_1 - r_2) = 0 \quad r_1 \neq r_2 \quad (1-177 \text{ الف})$$

$$\int f(r_1)\delta(r_1 - r_2)dr_1 = f(r_2) \quad (1-177 \text{ ب})$$

تغییر دوم آنکه، با توجه به این نکته که دوبار مشتق‌گیری از r_{12}^{-1} نسبت به x_2, y_2, z_2 با دو بار مشتق‌گیری نسبت به x_1, y_1, z_1 برابر است، داریم

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) &= \nabla_2^2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) = -4\pi\delta(r_1 - r_2) \\ &= -4\pi\delta(r_2 - r_1) \end{aligned} \quad (1-178)$$

از خواص معرف دلتا نیز به همین سادگی می‌توانستیم نتیجه بگیریم که

$$\delta(r_2 - r_1) = \delta(r_1 - r_2) \quad (1-179)$$

معادله ۱-۱۷۱ را بازنویسی می‌کنیم؛ با استفاده از تابع دلتای دیراک می‌توانیم از طریق انتگرال‌گیری برسیم به

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= -\frac{1}{4\pi} \int s(r_2) \nabla_2^2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) dr_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int s(r_2) (-4\pi) \delta(r_2 - r_1) dr_2 \\ &= s(r_1) \end{aligned} \quad (1-180)$$

در مرحله آخر، با استفاده از معادله ۱-۱۷۷ ب، اندیسه‌های ۱ و ۲ را تعویض کرده‌ایم. معادله ۱-۱۸۰ نشان می‌دهد که صورتبندی که برای \mathbf{V} و برای پتانسیل اسکالر φ فرض کردیم، با دیورژانس مفروض (در معادله ۱-۱۶۶ الف) سازگار است.

برای آنکه اثبات قضیه هلمهولتز کامل شود، باید نشان دهیم که فرضیات ما با معادله ۱-۱۶۶ ب نیز سازگار است، یعنی تاو \mathbf{V} با $\mathbf{c}(\mathbf{r}_1)$ برابر است. از معادله ۱-۱۶۶، داریم

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}\end{aligned}\quad (181-1)$$

جمله اول، یعنی $\nabla \nabla \cdot \mathbf{V}$ ، با استفاده از معادله ۱-۱۶۷ ب، عبارت زیر را می‌دهد

$$4\pi \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} = \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \nabla_1 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_1 \quad (182-1)$$

یکبار دیگر مشتق‌های مرتبه دوم نسبت به x_1 ، y_1 و z_1 را با مشتق‌های مرتبه دوم نسبت به x_2 ، y_2 و z_2 تعویض می‌کنیم^۱، و از هر مؤلفه معادله ۱-۱۸۲ انتگرال جزء به جزء می‌گیریم:

$$\begin{aligned}4\pi \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \Big|_x &= \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_1 \\ &= \int \nabla_1 \cdot \left[\mathbf{c}(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) \right] d\tau_1 - \int [\nabla_1 \cdot \mathbf{c}(\mathbf{r}_1)] \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_1\end{aligned}\quad (183-1)$$

انتگرال دوم صفر می‌شود، زیرا چگالی چرخش \mathbf{c} سیمولوله‌ای است.^۲ انتگرال اول را می‌توان به کمک قضیه گاوس به یک انتگرال سطحی تبدیل کرد. اگر \mathbf{c} در فضا کراندار باشد، یا به‌ازای مقادیر بزرگ r سریعتر از $1/r$ صفر شود، چنانکه انتگرال معادله ۱-۱۶۷ ب وجود داشته باشد، آنگاه انتگرال اول در طرف راست معادله ۱-۱۸۳ نیز با انتخاب سطحی به‌اندازه کافی بزرگ، صفر می‌شود. اکنون با توجه به آنکه $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ، معادله ۱-۱۸۱ به صورت زیر ساده می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{V} = -\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_1) \nabla_1^2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_1 \quad (184-1)$$

که این دقیقاً مشابه معادله ۱-۱۷۱ است؛ با این تفاوت که در آن به جای اسکالر $s(\mathbf{r}_2)$ ، چگالی چرخش برداری $\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)$ قرار گرفته است. بار دیگر، مانند قبل، به عنوان روش مناسبی برای

۱. با این کار از ایجاد تانسور $\nabla_2 \mathbf{c}(\mathbf{r}_2)$ اجتناب شده است.

۲. یادآوری می‌شود که $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{V}$ مفروض است.

حل انتگرال، تابع دلتای دیراک را به کار می‌بریم و به این نتیجه می‌رسیم که معادله ۱-۱۸۴ به معادله ۱-۱۵۸ تبدیل می‌شود. می‌بینیم که صورتبندی مفروض برای V که در معادله ۱-۱۶۶ داده شد و برای پتانسیل برداری A که در معادله ۱-۱۶۷ ب داده شد، با معادله ۱-۱۵۸ که تاو V را مشخص می‌کند سازگار است.

به این ترتیب، اثبات قضیه هلمهولتز کامل می‌شود. این قضیه نشان می‌دهد که یک بردار را می‌شود به اجزای غیرچرخشی و سیملوله‌ای تجزیه کرد. با بهره‌گیری از این قضیه در مورد میدان الکترومغناطیسی، بردار میدان V را به یک میدان الکتریکی غیرچرخشی E که توسط پتانسیل اسکالر φ به دست می‌آید، و یک میدان القای مغناطیسی سیملوله‌ای B که توسط پتانسیل برداری A داده می‌شود، تجزیه می‌کنیم. چگالی چشمه، $s(r)$ را می‌توانیم به عنوان چگالی بار الکتریکی (تقسیم بر گذردهی الکتریکی ϵ) تعبیر کنیم و چگالی چرخش $c(r)$ چگالی جریان الکتریکی (ضربدر تراوایی مغناطیسی μ) می‌شود.

مسائل

۱-۱۵-۱ در این بخش به طور ضمنی اثبات شده است که یک تابع به صورت یکتا تعیین می‌شود اگر بدانیم که: (الف) در معادله لاپلاس صدق می‌کند. (ب) مجموعه کاملی از شرایط مرزی در آن صدق می‌کنند. این اثبات را به طور صریح بنویسید.

۱-۱۵-۲ (الف) با فرض اینکه P یکی از جوابهای معادله برداری پواسون، $\nabla^2 P(r_1) = -V(r_1)$ باشد، اثبات دیگری برای قضیه هلمهولتز ارائه کنید و نشان دهید که V را می‌شود به صورت زیر نوشت

$$V = -\nabla^2 \varphi + \nabla \times A$$

که در آن

$$A = \nabla \times P$$

و

$$\varphi = \nabla \cdot P$$

(ب) با حل معادله برداری پواسون می‌رسیم به:

$$P(r_1) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{V(r_2)}{r_{12}} d\tau_2$$

نشان دهید که اگر این جواب را در عبارتهای مربوط به φ و A در بند (الف) بنشانیم، عبارتهایی را که در بخش ۱-۱۵ برای φ و A داده شده است، به دست می آوریم.

مراجع

- Davis Harry F and Arthur D Snider, *Introduction to Vector Analysis*, 4th ed. Boston: Allyn & Bacon (1979).
- Kellogg O D, *Foundations of Potential Theory*, New York, Dover, (1929).
- کتابی درسی کلاسیک درباره نظریه پتانسیل است (چاپ اول در سال ۱۹۲۹ منتشر شده است).
- Marion J B, *Principles of Vector Analysis*, New York: Academic Press, (1965).
- ارائه نسبتاً پیشرفته‌ای از تحلیل برداری که به سوی تحلیل تانسوری متمایل است. چرخشها و تبدیلهای دیگری همراه با ماتریسهای مربوط توضیح داده شده است.
- Wrede R C, *Introduction to Vector and Tensor Analysis*, New York, Wiley (1963), تجدید چاپ New York: Dover (1972).
- این کتاب حاوی تاریخچه‌ای جالب و بحثی جامع و مفید درباره مشتق‌گیری از بردارها و کاربردهای آن در مکانیک است.

دستگاههای مختصات

مطالب فصل ۱ تقریباً به طور کامل به دستگاههای مختصات دکارتی اختصاص یافت. دستگاه مختصات دکارتی نسبت به دستگاههای دیگر این مزیت منحصر به فرد را دارد که در آن هم جهت و هم بزرگی هر سه بردار یکه \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} ثابت اند. با فاصله شعاعی r آشنا شدیم ولی حتی این بردار نیز به صورت تابعی از x ، y و z مورد بررسی قرار گرفت. متأسفانه حل همه مسئله‌های فیزیک در دستگاه مختصات دکارتی آسان نیست. مثلاً اگر مسئله نیرویی مرکزی $\mathbf{F} = \mathbf{r}_0 F(r)$ ، مانند نیروی گرانشی یا نیروی الکتروستاتیکی مورد نظر باشد، ممکن است مختصات دکارتی برخلاف معمول برای حل آن نامناسب باشد. جمله بندی این مسئله به نحو بارزی آشکار می‌کند که باید از دستگاه مختصاتی، بهره گرفته شود که در آن فاصله شعاعی به عنوان یکی از مختصات در نظر گرفته شده باشد یعنی دستگاه مختصات قطبی.

نکته مهم آن است که باید دستگاه مختصاتی را اختیار کرد که با مسئله همساز باشد، به گونه‌ای که از هر قید یا تقارن موجود در مسئله بهره کامل برده شود. در این صورت، می‌توان امید داشت که حل مسئله آسانتر از وقتی است که بخواهیم آن را به اجبار در چارچوب دکارتی حل کنیم. "ساده‌تر بودن حل مسئله" اغلب به این معناست که معادله دیفرانسیلی داریم که در دستگاه مختصات جدید به معادله‌های دیفرانسیل معمولی عمدتاً "به شکل استاندارد" قابل تجزیه است. تکنیک جداسازی متغیرها در بخش ۲-۶ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

دستگاههای مختصاتی که بیشتر مورد نظرد، عبارت‌اند از دستگاههایی که معادله

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (۱-۲)$$

در آنها قابل جداسازی است. معادله ۱-۲ خیلی کلی‌تر از آن است که ظاهراً به نظر می‌آید. به این ترتیب که

اگر $k^2 = 0$ ، آنگاه معادله ۱-۲ معادله لاپلاس است؛
 اگر $k^2 = (+)\text{const.}$ ، آنگاه معادله ۱-۲ معادله هلمهولتز است؛
 اگر $k^2 = (-)\text{const.}$ ، آنگاه معادله ۱-۲ (جزء فضایی) معادله پخش است؛
 اگر انرژی جنبشی $k^2 = \text{const.} \times$ ، آنگاه معادله ۱-۲ معادله موج شرودینگر است.

نشان داده شده است که یازده دستگاه مختصاتی وجود دارد که در آنها معادله ۱-۲ قابل جداسازی است و جملگی آنها را می‌توان به عنوان حالت‌های خاصی از دستگاه بیضوار هم‌کانون مطرح کرد.^۱ طبیعی است که استفاده از دستگاه مختصات غیردکارتی چندان هم بی‌زحمت نباشد. ما هنوز عبارتهای مربوط به گرادیان، دیورژانس و یا تاو را در هیچیک از دستگاههای مختصات غیردکارتی به دست نیاورده‌ایم. در بخش ۲-۲ صورت خیلی کلی این عبارتها را استخراج خواهیم کرد. نخست باید دستگاهی از مختصات خمیده خط تشکیل دهیم، دستگاهی که چندان کلی باشد که هر یک از دستگاههای خاص مورد نظر را بتوانیم حالت خاصی از آن بدانیم. حالت خاص مختصات استوانه‌ای دوار را در بخش ۲-۴ و مختصات قطبی کروی را در بخش ۲-۵ بررسی خواهیم کرد.

۱-۲ مختصات خمیده خط

در مختصات دکارتی با سه خانواده از صفحات متقابلاً عمود بر هم سروکار داریم: $x = \text{const.}$ ، $y = \text{const.}$ و $z = \text{const.}$ فرض کنید که بر این دستگاه سه خانواده دیگر از سطوح را بیفزاییم. نیازی نیست که سطوح مربوط به هر خانواده با یکدیگر موازی و یا این سطوح به شکل صفحه باشند. اگر تجسم چنین خانواده‌هایی از سطوح دشوار باشد، شکل مربوط به یک دستگاه مختصات به‌خصوص، از قبیل شکل ۲-۳، می‌تواند مفید واقع شود. ضرورتی ندارد که سه خانواده جدید از سطوح متقابلاً بر هم عمود باشند، ولی برای رعایت سادگی، بی‌درنگ این شرط را برقرار می‌کنیم (معادله ۱-۲). هر نقطه (x, y, z) را می‌توانیم محل برخورد سه صفحه در مختصات دکارتی یا محل برخورد سه سطحی بدانیم که مختصات جدید خمیده خط را می‌سازند. اگر سطوح مختصاتی خمیده خط را با $q_1 = \text{const.}$ ، $q_2 = \text{const.}$ و $q_3 = \text{const.}$ توصیف کنیم، می‌توانیم نقطه

1. L P Eisenhart, *Phys Rev*, 45, 427 (1934).

مورد نظر را توسط (q_1, q_2, q_3) یا (x, y, z) مشخص کنیم. یعنی، علی‌الاصول می‌توانیم بنویسیم

مختصات خمیده خط عام	مختصات استوانه‌ای دوار	
q_1, q_2, q_3	ρ, φ, z	
$x = x(q_1, q_2, q_3)$	$x = \rho \cos \varphi$	(۲-۲)
$y = y(q_1, q_2, q_3)$	$y = \rho \sin \varphi$	
$z = z(q_1, q_2, q_3)$	$z = z$	

با مشخص کردن x و y و z بر حسب q ها، به روابط معکوس می‌رسیم:

$q_1 = q_1(x, y, z)$	$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$	
$q_2 = q_2(x, y, z)$	$\varphi = \arctan(y/x)$	(۳-۲)
$q_3 = q_3(x, y, z)$	$z = z$	

معادلات تبدیل مختصات استوانه‌ای دوار (بخش ۲-۴) به‌عنوان مثال خاصی از q_1 و q_2 و q_3 کلی و انتزاعی در معادلات ۲-۲ و ۳-۲ ارائه شده است. برای هر خانواده از سطوح $q_i = \text{const.}$ می‌توانیم بردار یکه e_i را که بر سطح $q_i = \text{const.}$ عمود و در جهت افزایش q_i است، تعریف کنیم. در نتیجه هر بردار \mathbf{V} را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{V} = e_1 V_1 + e_2 V_2 + e_3 V_3$$

با دیفرانسیل‌گیری از x در معادله ۲-۲ داریم

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \quad (۴-۲)$$

و همین‌طور برای دیفرانسیل y و z . مجذور فاصله بین دو نقطه مجاور، بتایر قضیه فیثاغورث، در مختصات دکارتی به‌قرار زیر است

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (الف ۴-۲)$$

فرض می‌کنیم که در فضای مختصات خمیده خط مورد نظر، عنصر فاصله را بتوان به صورت مجذوری کلی نوشت:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}dq_1^2 + g_{12}dq_1dq_2 + g_{13}dq_1dq_3 \\ &+ g_{21}dq_2dq_1 + g_{22}dq_2^2 + g_{23}dq_2dq_3 \\ &+ g_{31}dq_3dq_1 + g_{32}dq_3dq_2 + g_{33}dq_3^2 \end{aligned} \quad (5-2)$$

$$= \sum_{ij} g_{ij}dq_i dq_j$$

فضاهایی را که در آنها معادله ۵-۲ عبارت مجازی است، فضاهای متریک یا ریمانی می‌نامند. معادله ۴-۲ را به توان دو می‌رسانیم و همراه با نتیجه متناظر برای dy^2 و dz^2 در معادله ۴-۲ الف می‌نشانیم و ضرایب $dq_i dq_j$ را با ضرایب مربوط در معادله ۵-۲ برابر می‌نهمیم^۱، می‌رسیم به:

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \quad (6-2)$$

حال به بررسی ضرایب g_{ij} می‌پردازیم. می‌توانیم این ضرایب را مشخص‌کننده ماهیت دستگاه مختصات (q_1, q_2, q_3) بدانیم. این ضرایب را مشترکاً متریک می‌نامند؛ در بخش ۳-۳ نشان داده خواهد شد که متریک یک تانسور مرتبه دو است.^۲ مؤلفه‌های متریک را در نسبت عام خواص ماده تعیین می‌کنند. در این مبحث هندسه و فیزیک درهم ادغام می‌شوند. اکنون توجه خود را به دستگاههای مختصات متعامد (سطوح متقابلاً عمود بر هم) معطوف می‌کنیم، که منظور از آنها عبارت است از (مسئله ۲-۱-۱):^۳

$$g_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad (7-2)$$

دستگاههای مختصات نامتعامد به طور نسبتاً مشروح در بخشهای ۳-۸ و ۳-۹ در چارچوب تحلیل تانسوری و در بخش ۴-۴ به طریق تحلیل ماتریسی بررسی می‌شوند. اکنون برای ساده‌تر کردن

۱. dq ها اختیاری‌اند. مثلاً اگر قرار دهیم $dq_2 = dq_3 = 0$ ، فقط g_{11} باقی می‌ماند. باید بگوییم که معادله ۶-۲ را می‌توان به روش دقیقتری و با استفاده از نمادگذاری ماتریسی فصل ۴ از معادله ۴-۲ استخراج کرد. علاوه بر این، نمادگذاری ماتریسی مستقیماً به درمیان زاكوبی (مسئله ۲-۱-۵) منجر می‌شود.
۲. ماهیت تانسوری مجموعه g_{ij} به کمک قاعده خارج قسمت (بخش ۳-۳) مشخص می‌شود. سپس قانون تبدیل تانسوری معادله ۶-۲ را می‌دهد.
۳. در کیهانشناسی نسبیتی، عناصر غیرقطری متریک g_{ij} را معمولاً صفر می‌گیرند؛ به اعتبار این فرض فیزیکی که هیچ چرخش و هیچگونه کرنش برشی وجود ندارد (بخش ۳-۶).

نمادگذاری می‌گیریم $g_{ii} = h_i^2$ در نتیجه

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \quad (۸-۲)$$

در بخشهای بعد دستگاههای مختصات خاصی را با مشخص کردن این عاملهای مقیاس، یعنی h_1 ، h_2 و h_3 توصیف خواهیم کرد. برعکس، می‌توان عاملهای مقیاس را به کمک رابطه زیر برای هر dq_i معلوم، مشخص کرد

$$ds_i = h_i dq_i \quad (۹-۲)$$

که در آن بقیه q ها ثابت نگه داشته می‌شوند. توجه داشته باشید که سه مختصه خمیده خط q_1 ، q_2 و q_3 نباید الزاماً طول باشند. عاملهای مقیاس h_i ممکن است تابع q ها باشند و می‌توانند بعد داشته باشند. حاصلضرب $h_i dq_i$ باید بعد طول داشته باشد. بردار دیفرانسیل فاصله $d\mathbf{r}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= h_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \sum_i h_i dq_i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

انتگرال خطی با استفاده از این صورت مؤلفه خمیده خطی برای $d\mathbf{r}$ ، به صورت زیر در می‌آید

$$\int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \int V_i h_i dq_i$$

می‌توانیم عناصر مساحت و حجم را با استفاده مستقیم از معادله ۹-۲ به صورت زیر بنویسیم

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j \quad (۱۰-۲)$$

و

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (۱۱-۲)$$

بدیهی است که عبارتهای مربوط به معادله‌های ۱۰-۲ و ۱۱-۲ با نتایج استفاده از معادلات تبدیل، معادله ۲-۲ و ژاکوبی سازگار است.

عنصر مساحت را می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۲-۱۰ به صورت زیر بسط داد

$$\begin{aligned} d\sigma &= ds_r ds_\varphi e_1 + ds_\varphi ds_\lambda e_2 + ds_\lambda ds_r e_3 \\ &= h_r h_\varphi dq_r dq_\varphi e_1 + h_r h_\lambda dq_\varphi dq_\lambda e_2 \\ &\quad + h_\lambda h_r dq_\lambda dq_r e_3 \end{aligned}$$

انتگرال سطحی به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int V_\lambda h_r h_\varphi dq_r dq_\varphi + \int V_r h_r h_\lambda dq_\varphi dq_\lambda \\ &\quad + \int V_r h_\lambda h_r dq_\lambda dq_r \end{aligned}$$

در بخشهای ۲-۴ و ۲-۵ مثالهایی از این انتگرالهای خطی و سطحی خواهیم آورد. معادلات مربوط به محاسبات برداری در مختصات خمیده خط متعامد شکل جدیدی به خود می‌گیرند که در بخش بعد به آنها خواهیم پرداخت. در هر حال دانشجو در این مرحله باید به وضوح درک کند که جبر برداری در مختصات خمیده خط متعامد و مختصات دکارتی یکسان است. در حالت خاص، برای ضرب نقطه‌ای داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (۲-۱۱ الف)$$

که در آن زیرنویسها مؤلفه‌های خمیده خط را مشخص می‌کنند. برای ضرب برداری، درست مانند معادلهٔ ۱-۳۵، داریم:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (۲-۱۱ ب)$$

مسائل

۲-۱-۱ نشان دهید که اگر فقط دستگاههای مختصات متعامد را در نظر بگیریم، به ازای $i \neq j$ خواهیم داشت: $g_{ij} = 0$ (معادلهٔ ۲-۷).

[راهنمایی: مثلی به اضلاع ds_λ ، ds_r و ds_φ ترسیم کنید. چه رابطهٔ $g_{ij} = 0$ برقرار باشد یا نباشد، باید معادلهٔ ۲-۹ برقرار باشد. سپس ds^2 حاصل از معادلهٔ ۲-۵ را با محاسبه‌ای که با

استفاده از قانون کسینوسها انجام می‌دهید، مقایسه کنید. نشان دهید: $\cos \theta_{12} = g_{12} / \sqrt{g_{11}g_{22}}$.
 ۲-۱-۲ در دستگاه مختصات قطبی کروی داریم: $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ و $q_3 = \varphi$. معادلات تبدیل
 متناظر با معادله ۲-۲ عبارت‌اند از

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

(الف) عاملهای مقیاس h_r , h_θ و h_φ مختصات قطبی کروی را محاسبه کنید. (ب) عاملهای
 مقیاسی را که در بند الف محاسبه کرده‌اید، با رابطه $ds_i = h_i dq_i$ مقایسه کنید.
 ۳-۱-۲ دستگاه مختصات u , v و z که به دفعات در الکتروستاتیک و در دینامیک شارها به‌کار
 می‌رود، به قرار زیر تعریف می‌شود

$$xy = u$$

$$x^2 - y^2 = v$$

$$z = z$$

این دستگاه u , v و z متعامد است. (الف) ماهیت هر یک از سه خانواده از سطوح مختصاتی را
 به اختصار توصیف کنید. (ب) با ترسیم فصل مشترک سطوح u ثابت و سطوح v ثابت با صفحه xy
 این دستگاه را در صفحه xy ترسیم کنید. (ج) جهت بردارهای یکه \mathbf{u}_0 و \mathbf{v}_0 را در هر
 چهار ربع مشخص کنید. (د) سرانجام، آیا این دستگاه u , v و z راستگرد ($\mathbf{u}_0 \times \mathbf{v}_0 = +\mathbf{k}$)
 است یا چپگرد ($\mathbf{u}_0 \times \mathbf{v}_0 = -\mathbf{k}$)؟

۴-۱-۲ دستگاه مختصات استوانه‌ای بیضوی از سه خانواده از سطوح زیر تشکیل شده است:

$$\frac{x^2}{a^2 \cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2 u} = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} + \frac{y^2}{a^2 \sin^2 v} = 1 \quad (\text{ب})$$

$$z = z \quad (\text{ج})$$

فصل مشترک سطوح مختصاتی $u = \text{const.}$ و $v = \text{const.}$ با ربع اول صفحه xy ترسیم
 کنید. بردارهای یکه \mathbf{u}_0 و \mathbf{v}_0 را نشان دهید. گستره u عبارت است از $0 \leq u < \infty$. گستره v
 عبارت است از $0 < v \leq 2\pi$.

۵-۱-۲ یک دستگاه متعامد دوبعدی به کمک مختصات q_1 و q_2 توصیف می‌شود. نشان دهید که

ژاکوبی عبارت است از:

$$J \left(\frac{x, y}{q_1, q_2} \right) = h_1 h_2$$

که با معادله ۲-۱۰ سازگار است.

[راهنمایی: بهتر است که از مجذور دو طرف این معادله بهره گیریم.]

۲-۱-۶ در فضای مینکوفسکی تعریف می‌کنیم: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ و $x_4 = ict$. علت آوردن این تعریف آن است که بازه فضا-زمان $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ (سرعت نور c) به صورت $ds^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2$ درآید. نشان دهید که متریک فضای مینکوفسکی عبارت است از $g_{ij} = \delta_{ij}$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

این عبارت مزیت بهره‌گیری از فضای مینکوفسکی در نظریه نسبیت خاص را نشان می‌دهد: این دستگاه، دکارتی چهاربعدی است. در بخشهای ۳-۷ و ۴-۱۲ برای توصیف تبدیلهای لورنتس، فضای مینکوفسکی را به‌کار خواهیم برد.

۲-۲ عملگرهای برداری دیفرانسیلی

گرادیان

نقطه شروع محاسبه عملگرهای گرادیان، دیورژانس و تاو در مختصات خمیده خط، تعبیری است که از گرادیان به عنوان برداری داریم که بزرگی و جهت آهنگ تغییر فضایی آن بیشینه است (با بخش ۱-۶ مقایسه کنید). مؤلفه $\nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$ در جهت عمود بر خانواده سطوح $q_1 = \text{const.}$ ، با استفاده از این تعبیر، به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla\psi \Big|_1 = \frac{\partial\psi}{\partial s_1} = \frac{\partial\psi}{h_1 \partial q_1} \quad (12-2)$$

زیرا این عبارت برابر است با آهنگ تغییر ψ به‌ازای تغییر در q_1 ، در حالی که q_2 و q_3 ثابت باشند. کمیت ds_1 ، طول دیفرانسیلی در جهت افزایش q_1 است (با معادله ۲-۹ مقایسه کنید).

۱. با توجه به آنکه φ را به‌طور قراردادی برای نشان دادن مختصه سمتی به‌کار می‌برند، در اینجا از به‌کار بردن آن در نامگذاری توابع اجتناب کرده‌ایم.

بخش ۱-۲ بردار یکه e_1 را در همین جهت تعریف کردیم. معادله ۱۲-۲ را برای q_2 و q_3 تکرار می‌کنیم و سه معادله را به صورت برداری با هم جمع می‌کنیم. می‌بینیم که گرادیان به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \nabla\psi(q_1, q_2, q_3) &= e_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} + e_2 \frac{\partial\psi}{\partial s_2} + e_3 \frac{\partial\psi}{\partial s_3} \\ &= e_1 \frac{\partial\psi}{h_1 \partial q_1} + e_2 \frac{\partial\psi}{h_2 \partial q_2} + e_3 \frac{\partial\psi}{h_3 \partial q_3} \end{aligned} \quad (13-2)$$

در مسئله ۴-۲-۲ روش دیگری برای استخراج صورت عملگری گرادیان در مختصات خمیده خط پیشنهاد شده است که از این تعبیر فیزیکی گرادیان، مستقل است.

دیورژانس

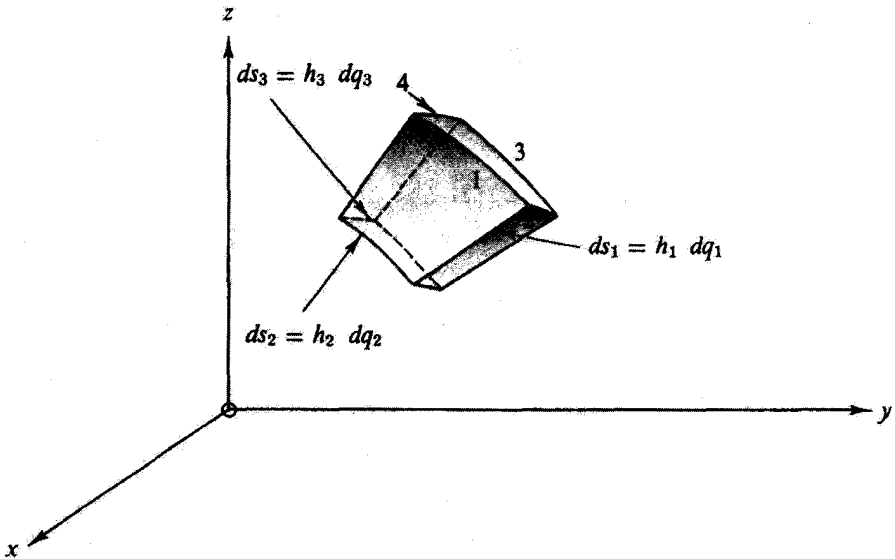
عملگر دیورژانس را می‌توان از تعریف دوم (معادله ۹۱-۱) در فصل یک و یا از قضیه گاوس در بخش ۱۱-۱ به دست آورد. در اینجا از معادله ۹۱-۱ استفاده می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\sigma}{\int d\tau} \quad (14-2)$$

که در آن حجم دیفرانسیلی عبارت است از: $h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$ (شکل ۱-۲). توجه کنید که جهت‌های مثبت چنان اختیار شده‌اند که (q_1, q_2, q_3) یا (e_1, e_2, e_3) یک مجموعه راستگرد تشکیل دهند: $e_1 \times e_2 = e_3$.

انتگرال سطحی برای دو وجه $q_1 = \text{const.}$ دقیقاً مانند بخش‌های ۷-۱ و ۱۰-۱، عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \left[V_1 h_2 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 \right] dq_2 dq_3 - V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3 \end{aligned} \quad (15-2)$$



شکل ۱-۲ عنصر حجم خمیده خط.

با افزودن نتایج مشابه مربوط به یک جهت سطح دیگر، می‌رسیم به

$$\int \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\sigma \quad (۱۶-۲)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] dq_1 dq_2 dq_3$$

با تقسیم بر حجم دیفرانسیلی (معادله ۱۴-۲)، خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] \quad (۱۷-۲)$$

V_i در معادله ۱۷-۲ مؤلفه \mathbf{V} در جهت e_i ، یعنی جهت افزایش q_i است؛ یعنی $V_i = e_i \cdot \mathbf{V}$.
با ترکیب معادله‌های ۱۳-۲ و ۱۷-۲ و با استفاده از $\mathbf{V} = \nabla \psi(q_1, q_2, q_3)$ می‌توانیم

لاپلاسی را به دست آوریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \nabla \psi(q_1, q_2, q_3) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (الف ۱۸-۲)$$

تاو

سرانجام، برای محاسبه $\nabla \times \mathbf{V}$ از قضیه استوکس (بخش ۱-۱۲) بهره می‌گیریم و مانند دیورژانس محاسبه را در حدی انجام می‌دهیم که مساحت سطح بسیار کوچک باشد. مؤلفه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم. نخست عنصر سطح دیفرانسیلی در سطح خمیده $q_1 = \text{const.}$ را در نظر می‌گیریم. قضیه استوکس با استفاده از (قضیه مقدار متوسط در محاسبات انتگرالی)

$$\int_s \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\sigma = \nabla \times \mathbf{V} \Big|_s h_2 h_3 dq_2 dq_3 \quad (ب ۱۸-۲)$$

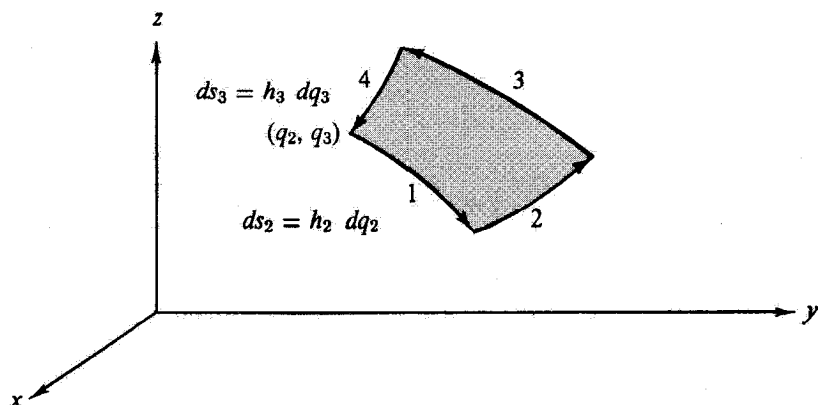
به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \times \mathbf{V} \Big|_s h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۹-۲)$$

که در آن انتگرال خطی در سطح $q_1 = \text{const.}$ است. با دنبال کردن حلقه (۱، ۲، ۳، ۴) در شکل ۲-۲ داریم

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\mathbf{r} &= V_r h_r dq_r + \left[V_r h_r + \frac{\partial}{\partial q_r} (V_r h_r) dq_r \right] dq_r \\ &\quad - \left[V_r h_r + \frac{\partial}{\partial q_r} (V_r h_r) dq_r \right] dq_r - V_r h_r dq_r \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial q_r} (h_r V_r) - \frac{\partial}{\partial q_r} (h_r V_r) \right] dq_r dq_r \end{aligned} \quad (۲۰-۲)$$

در بخشهای ۱ و ۲ که در جهت مثبت پیش می‌رویم، علامت مثبت را اختیار می‌کنیم و در بخشهای ۳ و ۴ چون در جهت منفی پیش می‌رویم علامت منفی را اختیار می‌کنیم. جمله‌های



شکل ۲-۲ عنصر سطح خمیده خط.

از مرتبه بالاتر در بسط مکلاورن یا تیلور حذف شده‌اند. این جمله‌ها در حد، که سطح به بینهایت کوچک میل می‌کند ($dq_2 \rightarrow 0$ و $dq_3 \rightarrow 0$)، صفر می‌شوند. از معادله ۱۹-۲ داریم

$$\nabla \times \mathbf{V} \Big|_1 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_3 V_3) \right] \quad (21-2)$$

به کمک جایگشت دوری اندیسیها می‌توانیم دو مؤلفه دیگر $\nabla \times \mathbf{V}$ را نیز به دست آوریم. در اینجا نیز مانند فصل یک بهتر است که تاو را به صورت دترمینان بنویسیم:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 h_1 & \mathbf{e}_2 h_2 & \mathbf{e}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \quad (22-2)$$

به یاد داشته باشید که به جهت وجود عملگرهای دیفرانسیلی در این دترمینان، باید آن را از بالا به پایین بسط داد. توجه کنید که این معادله با معادله ۱۱-۲، برای ضرب برداری، همسان نیست. ∇ یک بردار معمولی نیست؛ بلکه عملگری برداری است.

تعبیر هندسی گرادیان و استفاده از قضیه‌های گاوس و استوکس (یا تعریف انتگرالی دیورژانس و تاو) این امکان را فراهم می‌آورند که بتوانیم کمیت‌های گرادیان، دیورژانس و تاو را به دست آوریم، بدون آنکه ناگزیر باشیم از بردارهای یکه \mathbf{e}_i مشتق بگیریم. راه‌های دیگری نیز برای به دست آوردن گرادیان، دیورژانس و تاو یافت می‌شود که براساس مشتق‌گیری مستقیم از \mathbf{e}_i استوارند. در یکی از این رهیافتها، \mathbf{e}_i های یک دستگاه مختصات خاص را به مؤلفه‌های دکارتی تجزیه می‌کنند

(مسئله‌های ۱-۴-۲ و ۱-۵-۲)، سپس از این صورت‌های دکارتی مشتق می‌گیرند (مسئله‌های ۲-۴-۲ و ۲-۵-۲). نکته اصلی در این محاسبه در این است که مشتق i و j و k دکارتی صفر می‌شوند، زیرا i و j و k هم از لحاظ بزرگی و هم از لحاظ جهت ثابت‌اند. در رهیافت دوم $\partial^2 r / \partial q_i \partial q_j$ را با $\partial^2 r / \partial q_i \partial q_j$ برابر می‌گیرند و از آنجا مشتق e_i در یک عبارت کلی خمیده خط را به دست می‌آورند.^۱ مسئله‌های ۳-۲-۲ و ۴-۲-۲ با این روش حل می‌شوند.

مسائل

۱-۲-۲ استدلالی ارائه کنید که نشان دهد حاصلضربهای اسکالر و برداری (که شامل ∇ نیستند) در مختصات خمیده خط متعامد نیز درست مانند مختصات دکارتی انجام می‌شود، و عاملهای مقیاس در آنها ظاهر نمی‌شوند.

۲-۲-۲ بردار یکه e_1 را در جهت افزایش q_1 بگیریید و نشان دهید که

$$\nabla \cdot e_1 = \frac{1}{h_1 h_r h_r} \frac{\partial (h_r h_r)}{\partial q_1} \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times e_1 = \frac{1}{h_1} \left[e_r \frac{\partial h_1}{h_r \partial q_r} - e_r \frac{\partial h_1}{h_r \partial q_r} \right] \quad (\text{ب})$$

توجه کنید که هر چند e_1 بردار یکه است، دیورژانس و تاوان الزاماً صفر نیست. ۳-۲-۲ نشان دهید که بردارهای یکه متعامد را می‌توان به کمک رابطه زیر تعریف کرد

$$e_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial r}{\partial q_i} \quad (\text{الف})$$

به خصوص نشان دهید که $e_i \cdot e_i = 1$ ، به عبارتی برای h_i می‌انجامد که با معادله ۶-۲ سازگار است.

معادله الف را می‌توان نقطه شروع استخراج رابطه زیر گرفت

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_j} = e_j \frac{\partial h_j}{h_i \partial q_i} \quad i \neq j$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_i} = - \sum_{j \neq i} e_j \frac{\partial h_i}{h_j \partial q_j}$$

۳-۲-۲ با استفاده مستقیم از معادله ۱-۹۰

$$\nabla \psi = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \psi d\sigma}{\int d\tau}$$

رابطه زیر را استخراج کنید

$$\nabla \psi = e_1 \frac{\partial \psi}{h_1 \partial q_1} + e_2 \frac{\partial \psi}{h_2 \partial q_2} + e_r \frac{\partial \psi}{h_r \partial q_r}$$

[راهنمایی: در محاسبه انتگرال سطحی به جمله‌هایی شبیه به $(h_1 h_2 h_r)^{-1} (\partial / \partial q_1) (e_1 h_2 h_r)$ برمی‌خوریم. استفاده از نتایجی که در مسئله ۳-۲-۲ برشمرده شده‌اند، مفید خواهد بود. وقتی که سهم هر سه زوج از صفحات را به هم اضافه کنیم، جمله‌های زائد حذف می‌شوند].

۳-۲ دستگاههای مختصات خاص-مختصات دکارتی قائم

همانگونه که در بخش ۱-۲ توضیح داده شد، یازده دستگاه مختصات وجود دارد که در آنها معادله سه‌بعدی هلمهولتز را می‌توان به سه معادله دیفرانسیل معمولی تجزیه کرد. برخی از این دستگاههای مختصاتی در تکوین تاریخی مکانیک کوانتومی به‌طور فراگیری به‌کار رفته‌اند. دستگاههای دیگری، از قبیل مختصات دوقطبی، نیازهای خاصی را برآورده می‌کنند. در این فصل فقط به سه دستگاه مختصات، یعنی (۱) مختصات دکارتی، (۲) مختصات قطبی کروی و (۳) مختصات استوانه‌ای دوار می‌پردازیم؛ اولاً به این دلیل که به دستگاههای دیگر به‌ندرت نیاز پیدا می‌شود و دلیل مهمتر اینکه تکامل ماشینهای محاسب سریع و ابداع تکنیکهای برنامه‌ریزی کارا نیاز به این دستگاههای مختصات را کاهش داده است. خصوصیتها و شرح جزئیات دستگاههای مختصات دیگر را می‌توانید در دو ویرایش اول همین کتاب و یا در مراجع دیگر^۱ بیابید.

1. Morse and Feshbach, Margenau and Murphy.

مختصات دکارتی قائم

این همان مختصاتی است که شالوده فصل یک را تشکیل می‌دهد. در این دستگاه که از همه دستگاههای دیگر ساده‌تر است، داریم

$$\begin{aligned} h_1 &= h_x = 1 \\ h_2 &= h_y = 1 \\ h_3 &= h_z = 1 \end{aligned} \quad (23-2)$$

خانواده‌های سطوح مختصاتی عبارت‌اند از سه مجموعه از صفحات موازی: $x = \text{const.}$ ، $y = \text{const.}$ و $z = \text{const.}$ دستگاه مختصات دکارتی از این نظر که در آن همه h_i ها ثابت باشند، منحصر به فرد است. این خاصیت در مبحث تانسورها در فصل ۳ مزیت عمده‌ای به حساب می‌آید. همچنین توجه کنید که جهت e_1, e_2, e_3 یا i, j, k ثابت است. با استفاده از معادله‌های ۱۳-۲، ۱۷-۲، ۱۸-۲ الف و ۲۲-۲ می‌توانیم نتایج فصل ۱ را به دست آوریم

$$\nabla \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial y} + k \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (24-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (25-2)$$

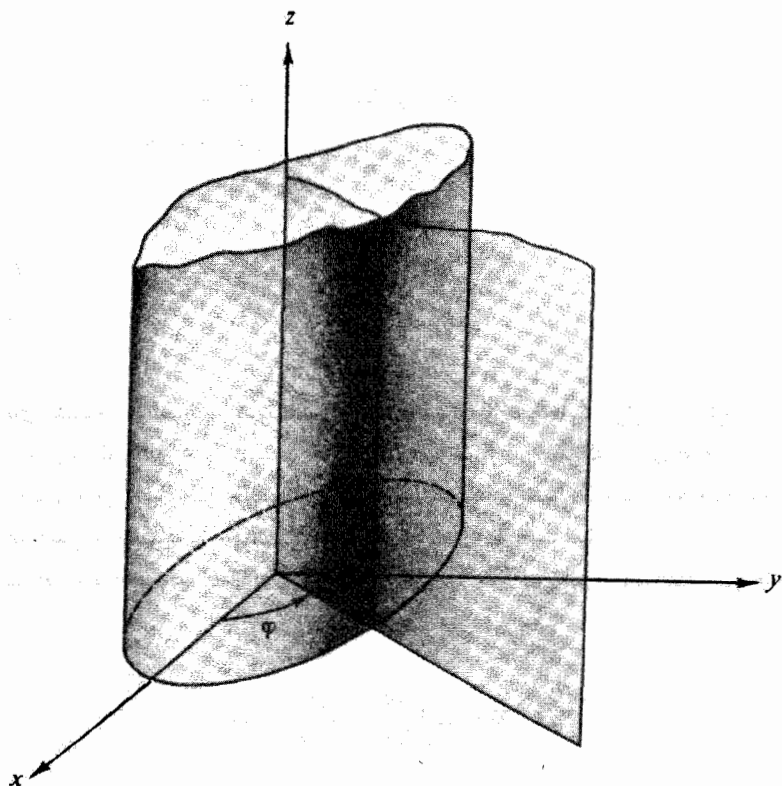
$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (26-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (27-2)$$

۴-۲ مختصات استوانه‌ای دوار (ρ, φ, z)

در دستگاه مختصات استوانه‌ای دوار سه مختصه خمیده خط (q_1, q_2, q_3) را با (ρ, φ, z) نشان می‌دهیم. سطوح مختصاتی که در شکل ۳-۲ نمایش داده شده‌اند، عبارت‌اند از ۱. استوانه‌های دوار قائم حول یک محور z مشترک

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = \text{const.}$$



شکل ۲-۳ مختصات استوانه‌ای دوار.

۲. نیم‌صفحاتی که از محور z می‌گذرند

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \text{const.}$$

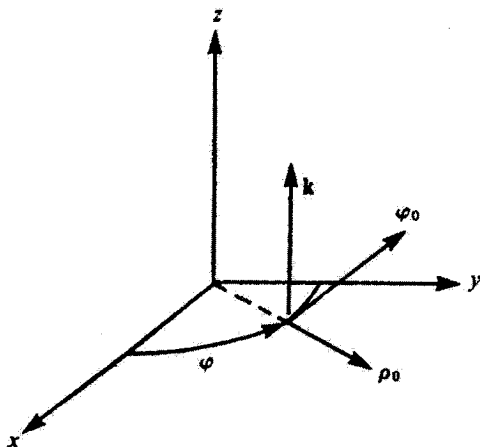
۳. صفحاتی موازی با صفحه xy ، درست مانند دستگاه دکارتی

$$z = \text{const.}$$

کرانه‌های ρ ، φ و z عبارت‌اند از

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

خاطر نشان می‌شود که ρ را برای فاصله قائم از محور z به‌کار می‌بریم، تا r همواره فاصله تا مبدأ را نشان دهد.



شکل ۲-۴ بردارهای یکه در مختصات استوانه‌ای دوار.

از معادلات مربوط به ρ و φ (یا مستقیماً از شکل ۲-۳) به روابط تبدیل زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad (28-2)$$

محور z بی‌تغییر می‌ماند. این دستگاه در واقع یک دستگاه خمیده خط دویبعدی است، که همراه با یک محور z دکارتی، دستگاهی سه‌بعدی را تشکیل داده است.

عاملهای مقیاس با استفاده از معادله ۲-۲۸ یا عناصر طول ds_i عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} h_1 &= h_\rho = 1 \\ h_2 &= h_\varphi = \rho \\ h_3 &= h_z = 1 \end{aligned} \quad (29-2)$$

بردارهای یکه e_1, e_2, e_3 با ρ_0 و φ_0 و k نمایش داده می‌شوند (شکل ۲-۴). بردار یکه ρ_0 بر سطح استوانه‌ای عمود و در جهت افزایش شعاع ρ است. بردار یکه φ_0 که بر سطح استوانه‌ای مماس است بر نیم‌صفحه $\varphi = \text{const.}$ و در جهت افزایش زاویه سمتی φ است. بردار یکه سوم، یعنی k ، همان بردار یکه معمولی دستگاه دکارتی است.

جابه‌جایی دیفرانسیلی $d\mathbf{r}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \rho_0 ds_\rho + \varphi_0 ds_\varphi + k dz \\ &= \rho_0 d\rho + \varphi_0 \rho d\varphi + k dz \end{aligned} \quad (30-2)$$

عملگرهای دیفرانسیلی شامل ∇ ، از معادله‌های ۲-۱۳، ۲-۱۷، ۲-۱۸ الف و ۲-۲۲ به دست می‌آیند

$$\nabla\psi(\rho, \varphi, z) = \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \varphi_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + k \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (31-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (32-2)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (33-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho\varphi_0 & k \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix} \quad (34-2)$$

سرانجام، مؤلفه‌های لابلای برداری، که در مسائلی نظیر موجبر دوار یا کاواک بازآواگر استوانه‌ای مطرح می‌شود، عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{V} \Big|_\rho &= \nabla^2 V_\rho - \frac{1}{\rho^2} V_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} \\ \nabla^2 \mathbf{V} \Big|_\varphi &= \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{\rho^2} V_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi} \\ \nabla^2 \mathbf{V} \Big|_z &= \nabla^2 V_z \end{aligned} \quad (35-2)$$

علت عمده این امر که مؤلفه z به این صورت در می‌آید، آن است که محور z محوری دکارتی است؛ یعنی

$$\begin{aligned} \nabla^2(\rho_0 V_\rho + \varphi_0 V_\varphi + k V_z) &= \nabla^2(\rho_0 V_\rho + \varphi_0 V_\varphi) + k \nabla^2 V_z \\ &= \rho_0 f(V_\rho, V_\varphi) + \varphi_0 g(V_\rho, V_\varphi) + k \nabla^2 V_z \end{aligned}$$

عملگر ∇^2 وقتی روی بردارهای یک‌ه ρ_0 و φ_0 عمل می‌کند، حاصل در صفحه $\rho_0 \varphi_0$ می‌ماند. این رفتار در جمله سیستمهای استوانه‌ای صادق است.

مثال ۲-۴-۱ جمله ناویه-استوکس: معادله ناویه-استوکس در دینامیک شاره‌ها حاوی جمله غیرخطی زیر است

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]$$

که در آن \mathbf{v} سرعت شاره است. برای شاره‌ای که در داخل یک لوله استوانه‌ای در جهت z جاری است، داریم

$$\mathbf{v} = kv(\rho)$$

از معادله ۲-۳۴ داریم

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho\varphi_0 & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(\rho) \end{vmatrix} \\ &= -\varphi_0 \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_0 & \varphi_0 & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & v \\ 0 & -\frac{\partial v}{\partial \rho} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho_0 v(\rho) \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{aligned}$$

سرانجام

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho\varphi_0 & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v \frac{\partial v}{\partial \rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

جمله غیرخطی برای این حالت خاص صفر می‌شود.

مسائل

۱-۴-۲ بردارهای یک‌کسته استوانه‌ای دوار را به مؤلفه‌های دکارتی تجزیه کنید (شکل ۵-۲).

جواب :

$$\rho_0 = i \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$\varphi_0 = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$$

$$k_0 = k$$

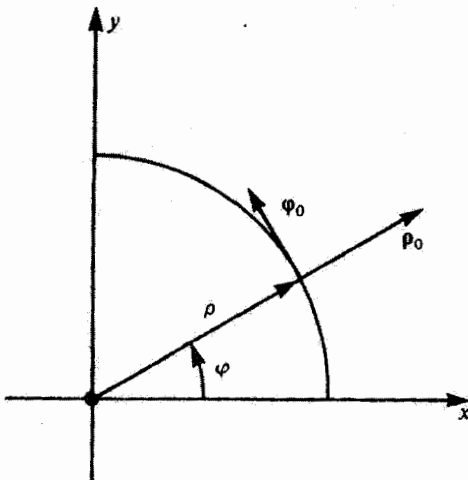
۲-۴-۲ بردارهای یک‌کسته دکارتی را برحسب مؤلفه‌های استوانه‌ای دوار تجزیه کنید.

جواب :

$$i = \rho_0 \cos \varphi - \varphi_0 \sin \varphi$$

$$j = \rho_0 \sin \varphi + \varphi_0 \cos \varphi$$

$$k = k_0$$



شکل ۵-۲

۳-۴-۲ با استفاده از نتایج مسئله ۱-۴-۲، نشان دهید که

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi} = \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} = -\rho_0.$$

همچنین نشان دهید که بقیه مشتق‌های اول بردارهای یکه استوانه‌ای دوار نسبت به مختصات استوانه‌ای دوار، جملگی صفر می‌شوند.

۴-۴-۲ $\nabla \cdot \mathbf{V}$ (در معادله ۳۲-۲) را با عملگر گرادین (در معادله ۳۱-۲):

$$\nabla = \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

که در \mathbf{V} ضرب نقطه‌ای شده باشد، مقایسه کنید. توجه داشته باشید که عملگرهای دیفرانسیلی ∇ هم از بردارهای یکه مشتق می‌گیرند و هم از مؤلفه‌های \mathbf{V} .

[راهنمایی: $\rho_0 V_\rho \cdot (\partial/\partial \varphi)(1/\rho) \cdot \varphi_0$ به صورت $\rho_0 V_\rho \cdot (\partial/\partial \varphi)(1/\rho) \cdot \varphi_0$ در می‌آید و صفر نمی‌شود.]

۵-۴-۲ الف) نشان دهید که $\mathbf{r} = \rho_0 \rho + k z$. (ب) محاسبه را به طور کامل برحسب مختصات استوانه‌ای دوار انجام دهید و نشان دهید:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

۶-۴-۲ الف) نشان دهید که حاصل عمل پاریته (یعنی معکوس کردن نسبت به مبدأ) روی نقطه (ρ, φ, z) نسبت به محورهای ثابت x, y, z ، شامل تبدیلهای زیر است

$$\rho \rightarrow \rho$$

$$\varphi \rightarrow \varphi \pm \pi$$

$$z \rightarrow -z$$

(ب) نشان دهید که ρ_0 و φ_0 پاریته فرد دارند (جهت آنها معکوس می‌شود) و k پاریته زوج دارد. یادآوری: بردارهای یکه \hat{z} و $\hat{\rho}$ ثابت می‌مانند.

۷-۴-۲ جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول یک محور ثابت می‌چرخد. ω را در امتداد محور Z بگیرید. \mathbf{r} را برحسب مختصات استوانه‌ای دوار مشخص کنید و مختصات استوانه‌ای دوار را به کار ببرید. الف) $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ را محاسبه کنید. (ب) $\nabla \times \mathbf{v}$ را محاسبه کنید.

جواب :

$$\mathbf{v} = \dot{\varphi}_0 \omega \rho \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega \quad (\text{ب})$$

۸-۴-۲ ذره متحرکی را در فضا در نظر بگیرید. مؤلفه‌های استوانه‌ای دوار سرعت و شتاب این ذره را محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{\rho} & a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ v_\varphi &= \rho \dot{\varphi} & a_\varphi &= \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \\ v_z &= \dot{z} & a_z &= \ddot{z} \end{aligned}$$

راهنمایی:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \rho_0(t) \rho(t) + \mathbf{k}z(t) \\ &= [\mathbf{i} \cos \varphi(t) + \mathbf{j} \sin \varphi(t)] \rho(t) + \mathbf{k}z(t) \end{aligned}$$

یادآوری: $\dot{\rho} = d\rho/dt$ ، $\ddot{\rho} = d^2\rho/dt^2$ و مانند آنها.۹-۴-۲ در مختصات استوانه‌ای، معادله لاپلاس را به‌ازای $\psi = \psi(\rho)$ حل کنید.جواب: $\psi = k \ln(\rho/\rho_0)$.

۱۰-۴-۲ تابع برداری به‌خصوصی در مختصات استوانه‌ای دوار قائم به قرار زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{V}(\rho, \varphi) = \rho_0 V_\rho(\rho, \varphi) + \varphi_0 V_\varphi(\rho, \varphi)$$

نشان دهید $\nabla \times \mathbf{V}$ فقط مؤلفه z دارد. توجه کنید که این نتیجه برای هر برداری که مقید به سطح $q_3 = \text{const}$ باشد، در صورت استقلال حاصلضریبهای $h_1 V_1$ و $h_2 V_2$ از q_3 برقرار است.

۱۱-۴-۲ معادله ناوییه-استوکس برای جریان یک شاره چسبنده تراکم‌ناپذیر به رابطه زیر می‌انجامد:

$$-\nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v})$$

که در آن η چسبندگی (ویسکوزیته) و ρ چگالی شاره است. سرعت v را برای شار محوری در یک لوله استوانه‌ای به صورت زیر می‌نویسیم

$$v = kv(\rho)$$

از مثال ۱-۴-۲ برای این سرعت، داریم

$$\nabla \times (v \times (\nabla \times v)) = 0$$

نشان دهید که معادله

$$\nabla^2(\nabla \times v) = 0$$

به معادله دیفرانسیل زیر می‌انجامد

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{dv}{d\rho} = 0$$

و نیز نشان دهید که

$$v = v_0 + a_2 \rho^2$$

در این معادله دیفرانسیل صدق می‌کند. ۱۲-۴-۲ سیم رسانایی در راستای محور z حامل جریان I است. پتانسیل برداری مغناطیسی حاصل، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$A = k \frac{\mu I}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

نشان دهید که القای مغناطیسی B عبارت است از:

$$B = \varphi_0 \frac{\mu I}{2\pi \rho}$$

۱۳-۴-۲ نیرویی با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$F = -i \frac{y}{x^2 + y^2} + j \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(الف) \mathbf{F} را در مختصات استوانه‌ای دوار مشخص کنید. بندهای (ب) و (ج) را به‌طور کامل در مختصات استوانه‌ای دوار حل کنید. (ب) \mathbf{F} را محاسبه کنید. (ج) کاری را که نیروی \mathbf{F} در یک بار دور زدن دایره واحد به‌طور چپگرد انجام می‌دهد، محاسبه کنید. (د) تفاوت بین نتایج بندهای (ب) و (ج) را چگونه توجیه می‌کنید.

۱۴-۴-۲ برای یک موج عرضی الکترومغناطیسی (TEM) در یک موجبر هم‌محور، میدان الکتریکی به‌صورت $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho, \varphi)e^{i(kz - \omega t)}$ و میدان القای مغناطیسی به‌صورت $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, \varphi)e^{i(kz - \omega t)}$ بیان می‌شود. موج عرضی است، از این رو \mathbf{E} و \mathbf{B} هیچیک مؤلفه z ندارند. این دو میدان در معادله برداری لاپلاسی صدق می‌کنند:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\rho, \varphi) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\rho, \varphi) = 0$$

(الف) نشان دهید که جوابهای این دو معادله عبارت‌اند از $\mathbf{E} = \rho_0 E_0 (a/\rho) e^{i(kz - \omega t)}$ و $\mathbf{B} = \varphi_0 B_0 (a/\rho) e^{i(kz - \omega t)}$ ، که در آن a شعاع رسانای داخلی و E_0 و B_0 دامنه‌اند. (ب) با فرض اینکه داخل موجبر خلأ است، تحقیق کنید که رابطه زیر در معادله ماکسول صدق می‌کنند:

$$B_0 / E_0 = k / \omega = \mu_0 \epsilon_0 (\omega / k) = 1/c$$

۱۵-۴-۲ در محاسبه اثر تنگش در دینامیک شارهای مغناطیسی محاسبه $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ لازم می‌شود. نشان دهید که اگر القای مغناطیسی \mathbf{B} به‌صورت $\mathbf{B} = \varphi_0 B_\varphi(\rho)$ باشد، داریم

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = -\rho_0 B_\varphi' / \rho$$

۱۶-۴-۲ در جسم صلبی که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، سرعت خطی ذرات از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{v} = \varphi_0 \rho \omega$$

انتگرال $\oint \mathbf{v} \cdot d\lambda$ را پیرامون دایره‌ای در صفحه xy محاسبه و تحقیق کنید که

$$\frac{\oint \mathbf{v} \cdot d\lambda}{\text{مساحت}} = \nabla \times \mathbf{v} \Big|_z$$

۵-۲ مختصات قطبی کروی (r, θ, φ)

در دستگاه مختصات قطبی کروی، (q_1, q_2, q_3) را با (r, θ, φ) نمایش می‌دهیم، این دستگاه شامل سه خانواده از سطوح زیر است:
 ۱. کره‌های هم‌مرکز حول مبدأ:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \text{const.}$$

۲. مخروطهای دوار قائم حول محور (قطبی) z با رأس واقع در مبدأ:

$$\theta = \arccos \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \text{const.}$$

۳. نیم‌صفحاتی که از محور (قطبی) z می‌گذرند:

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \text{const.}$$

به اعتبار تعریفهایی که برای θ ، زاویه قطبی، و φ زاویه سمتی اختیار کرده‌ایم، محور z متمایز شده و نحوه عمل با آن با دو محور دیگر فرق می‌کند. معادلات تبدیل متناظر با معادله ۲-۲ عبارت‌اند از

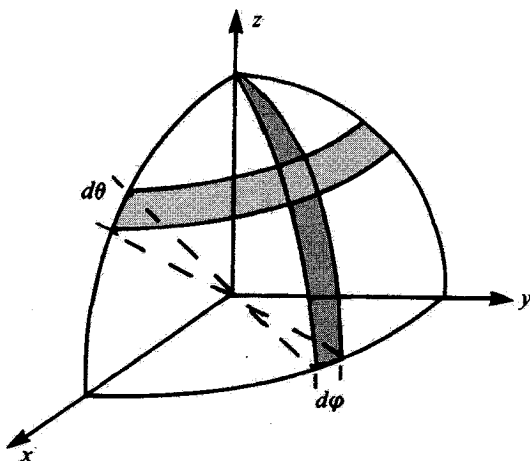
$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (۲۶-۲)$$

که در آن θ را از محور z مثبت و φ را در صفحه xy از محور x مثبت اندازه می‌گیریم. گستره مقادیر عبارت‌اند از $0 \leq r < \infty$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. از معادله ۲-۶ داریم

$$\begin{aligned} h_1 &= h_r = 1 \\ h_2 &= h_\theta = r \\ h_3 &= h_\varphi = r \sin \theta \end{aligned} \quad (۲۷-۲)$$

از این رو عنصر خط به قرار زیر است

$$dr = r_0 dr + \theta_0 r d\theta + \varphi_0 r \sin \theta d\varphi$$



شکل ۲-۶ عنصر مساحت در مختصات قطبی کروی.

عنصر مساحت در این دستگاه مختصات کروی (به ازای $r = \text{const.}$) عبارت است از:

$$dA = d\sigma_{\theta\varphi} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2-38)$$

این سطح در شکل ۲-۶ دوبار هاشور خورده است. اگر روی زاویه سمتی φ انتگرال بگیریم، پی می‌بریم که عنصر مساحت به صورت حلقه‌ای به عرض $d\theta$ در می‌آید

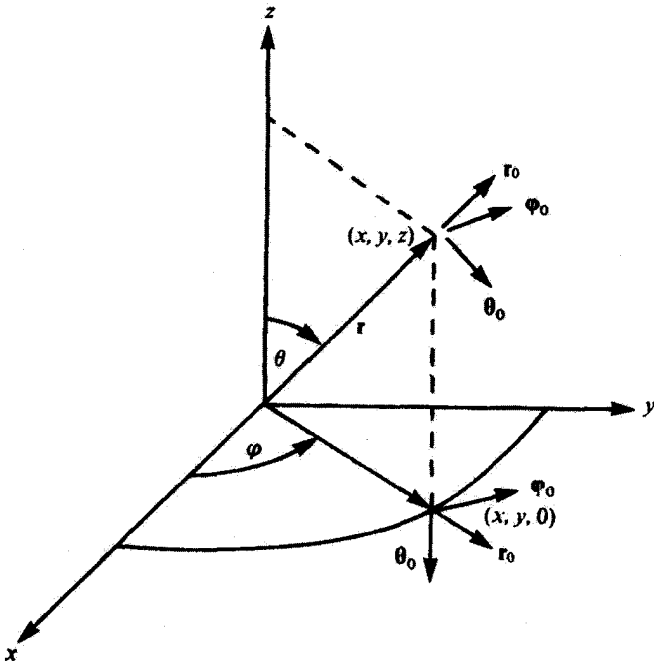
$$dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (2-39)$$

در مسائلی که در مختصات قطبی کروی با تقارن سمتی مطرح می‌شوند، مانند پراکندگی باریکه ناقطبیده ذرات هسته‌ای، بارها و بارها به این عنصر مساحت برمی‌خوریم. عنصر زاویه فضایی $d\Omega$ ، بنابراین تعریف رادیان فضایی، یا استرادیان، عبارت است از:

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2-40)$$

با انتگرال‌گیری روی کل سطح کره، می‌رسیم به:

$$\int d\Omega = 4\pi$$



شکل ۷-۲ مختصات قطبی کروی.

عنصر حجم با استفاده از معادله ۱۱-۲، به قرار زیر است

$$\begin{aligned} d\tau &= r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= r^2 dr d\Omega \end{aligned} \quad (۴۱-۲)$$

بردارهای یکه مختصات قطبی کروی در شکل ۷-۲ نشان داده شده‌اند. باید تأکید شود که با تغییر زاویه‌های θ و φ ، جهت بردارهای یکه r_0 ، θ_0 و φ_0 تغییر می‌کند. به خصوص آنکه مشتق‌های بردارهای یکه مختصات قطبی کروی نسبت به θ و φ صفر نیست (مسئله ۲-۵-۲). این نکته را که بردارهای یکه با مکان تغییر می‌کنند، نباید به هنگام مشتق‌گیری از بردارها در مختصات قطبی کروی (یا هر دستگاه غیر دکارتی دیگری) از نظر دور داشت. برحسب بردارهای یکه دکارتی i ، j و k ، با جهت ثابت، داریم

$$\begin{aligned} r_0 &= i \sin \theta \cos \varphi + j \sin \theta \sin \varphi + k \cos \theta \\ \theta_0 &= i \cos \theta \cos \varphi + j \cos \theta \sin \varphi - k \sin \theta \\ \varphi_0 &= -i \sin \varphi + j \cos \varphi \end{aligned} \quad (۴۲-۲)$$

توجه کنید که به این ترتیب هر بردار معلوم را می‌توانیم به چند طریق (اما هم‌ارز) نمایش دهیم. مثلاً بردار مکان \mathbf{r} را می‌توان به یکی از صورتهای زیر نوشت

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r_0 \cdot \mathbf{r} \\ &= r_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= ix + jy + kz \\ &= ir \sin \theta \cos \varphi + jr \sin \theta \sin \varphi + kr \cos \theta\end{aligned}\quad (۴۳-۲)$$

در هر مسئله مناسبترین صورت برای آن مسئله را اختیار می‌کنیم.

بردارهای یک‌گانه مختصات خمیده خط e_1, e_2, e_3 در بخش ۲-۲ را با r_0, θ_0, φ_0 تعویض می‌کنیم و می‌رسیم به

$$\nabla \psi = r_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \theta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \varphi_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (۴۴-۲)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (۴۵-۲)$$

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] \quad (۴۶-۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r_0 & r\theta_0 & r \sin \theta \varphi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & rV_\theta & r \sin \theta V_\varphi \end{vmatrix} \quad (۴۷-۲)$$

گاه به لاپلاسی برداری $\nabla^2 \mathbf{V}$ در مختصات قطبی کروی نیز نیاز پیدا می‌کنیم. بهترین راه برای بدست آوردن این عملگر، بهره‌گیری از اتحاد برداری معادله ۱-۸۰ است. در اینجا برای کاربردهای آتی، این عملگر را می‌نویسیم:

$$\nabla^2 \mathbf{V} \Big|_r = \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) V_r + \left(-\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \right) V_\theta + \left(-\frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) V_\varphi \quad (48-2)$$

$$= \nabla^2 V_r - \frac{2}{r^2} V_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} V_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^2 \mathbf{V} \Big|_\theta = \nabla^2 V_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \quad (49-2)$$

$$\nabla^2 \mathbf{V} \Big|_\varphi = \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \quad (50-2)$$

این عبارتها که مؤلفه‌های $\nabla^2 \mathbf{V}$ را می‌دهند، با آنکه آشکارا نایسامان و درهم و برهم‌اند، ولی گاهی به آنها نیاز پیدا می‌شود. هیچ تضمینی وجود ندارد که طبیعت همواره ساده باشد.

مثال ۱-۵-۲: برخی نتایج را که در فصل یک به کمک عملیات دشواری در مختصات دکارتی به دست آوردیم، می‌توانیم با واری معادلات ۲-۴۴ تا ۲-۴۷ به سادگی به دست آوریم. از معادله ۲-۴۴ داریم

$$\nabla f(r) = \mathbf{r}_o \frac{df}{dr} \quad (51-2)$$

$$\nabla r^n = \mathbf{r}_o n r^{n-1}$$

از معادله ۲-۴۵، داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{r}_o f(r) = \frac{2}{r} f(r) + \frac{df}{dr} \quad (52-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r}_o r^n = (n+2)r^{n-1}$$

از معادله ۲-۴۶، داریم

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2} \quad (53-2)$$

$$\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2} \quad (54-2)$$

سرانجام، از معادلهٔ ۲-۴۷ داریم

$$\nabla \times \mathbf{r}_0 \cdot f(r) = 0 \quad (55-2)$$

مثال ۲-۵۲ پتانسیل برداری مغناطیسی: در محاسبهٔ پتانسیل برداری مغناطیسی یک تک حلقهٔ جریان در صفحهٔ xy به محاسبهٔ بردار زیر نیاز پیدا می‌کنیم

$$\mathbf{V} = \nabla \times [\nabla \times \varphi_0 A_\varphi(r, \theta)] \quad (56-2)$$

این بردار در مختصات قطبی کروی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathbf{V} = \nabla \times \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r_0 & r\theta_0 & r \sin \theta \varphi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \sin \theta A_\varphi(r, \theta) \end{vmatrix} \quad (57-2)$$

$$= \nabla \times \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[r_0 \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\varphi) - r\theta_0 \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\varphi) \right]$$

یک بار دیگر تاو می‌گیریم و می‌رسیم به:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r_0 & r\theta_0 & r \sin \theta \varphi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\varphi) & -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\varphi) & 0 \end{vmatrix} \quad (58-2)$$

با بسط این دترمینان می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -\varphi_0 \cdot \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) \right] \right\} \\ &= -\varphi_0 \cdot \left[\nabla^2 A_\varphi(r, \theta) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\varphi(r, \theta) \right] \end{aligned}$$

در فصل ۱۲ خواهیم دید که ∇ به معادله همبسته لژاندر منجر می شود و A_φ را می توان به کمک یک سری از چند جمله ایهای همبسته لژاندر نوشت.

مسائل

۱-۵-۲ بردارهای یکه قطبی کروی را به مؤلفه های دکارتی تجزیه کنید.

جواب :

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta$$

$$\theta_0 = \mathbf{i} \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{k} \sin \theta$$

$$\varphi_0 = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi$$

۲-۵-۲ (الف) با استفاده از نتایج مسئله ۱-۵-۲، مشتقهای جزئی r_0 ، θ_0 و φ_0 را نسبت به r ، θ و φ محاسبه کنید. (ب) با استفاده از نتایج بند (الف) و بردار ∇ (بالاترین آهنگ تغییر فضایی) به صورت زیر

$$\mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} + \theta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$\nabla \cdot \nabla \psi$ را محاسبه کنید. این روش دیگری است برای استخراج لاپلاسی.

یادآوری: مشتقگیرهای ∇ سمت چپ، قبل از آنکه بردارهای یکه در هم ضرب نقطه ای شوند، روی بردارهای یکه ∇ سمت راست عمل می کنند.

۳-۵-۲ جسم صلبی با سرعت زاویه ای ثابت ω حول یک محور ثابت می چرخد. ω را در راستای محور z اختیار کنید. با استفاده از مختصات قطبی کروی: (الف) $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ را محاسبه کنید. (ب) $\nabla \times \mathbf{v}$ را محاسبه کنید.

جواب : (الف) $\mathbf{v} = \varphi_0 \omega r \sin \theta$

(ب) $\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega$

۴-۵-۲ دستگاه مختصات (x, y, z) حول محوری که با بردار یکه \mathbf{n} تعریف می شود، در جهت پادساعتگرد به اندازه زاویه Φ می چرخد و دستگاه (x', y', z') را می دهد. بردار یکه شعاعی بر حسب مختصات جدید به قرار زیر است:

$$\mathbf{r}' = r \cos \Phi \mathbf{e}_r + r \sin \Phi \mathbf{e}_\theta + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) (1 - \cos \Phi)$$

(الف) این عبارت را با استفاده از ملاحظات هندسی استخراج کنید. (ب) نشان دهید که این عبارت به ازای $n = k$ به قراری که انتظار می رود ساده می شود. جواب در بخش ۳-۴ به شکل ماتریسی داده شده است. (ج) تحقیق کنید که $r'^2 = r^2$.

۵-۵-۲ بردارهای یک‌دگارتی زیر را به مؤلفه‌های قطبی کروی تجزیه کنید.

$$\mathbf{i} = r_0 \sin \theta \cos \varphi + \theta_0 \cos \theta \cos \varphi - \varphi_0 \sin \varphi$$

$$\mathbf{j} = r_0 \sin \theta \sin \varphi + \theta_0 \cos \theta \sin \varphi + \varphi_0 \cos \varphi$$

$$\mathbf{k} = r_0 \cos \theta - \theta_0 \sin \theta$$

۶-۵-۲ جهت برداری با زاویه‌های θ_1 و φ_1 مشخص شده است. زاویه‌های متناظر برای یک بردار دیگر عبارت‌اند از θ_2 و φ_2 . نشان دهید که کسینوس زاویه بین دو بردار γ با رابطه زیر داده می شود:

$$\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

شکل ۱۶-۱۲ را ببینید.

۷-۵-۲ بردار \mathbf{V} مؤلفه شعاعی ندارد. اگر مؤلفه مماسی تاو آن صفر باشد، وابستگی شعاعی مؤلفه مماسی \mathbf{V} به چه صورتی در می آید؟

۸-۵-۲ در فیزیک جدید بر خاصیت پاریته یعنی اینکه کمیتی تحت وارونی دستگاه مختصات ناوردا بماند یا تغییر علامت دهد تأکید زیادی می شود. وارونی در مختصات دکارتی عبارت است از: $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$. (الف) نشان دهید که وارونی (یعنی انعکاس از طریق مبدأ) نقطه (r, θ, φ) نسبت به محورهای x , y و z ثابت شامل تبدیلهای زیر است

$$r \rightarrow r$$

$$\theta \rightarrow \pi - \theta$$

$$\varphi \rightarrow \varphi \pm \pi$$

(ب) نشان دهید که r_0 و φ_0 پاریته فرد دارند (تغییر جهت می دهند) و θ_0 پاریته زوج دارد.

۹-۵-۲ برای هر بردار \mathbf{A} داریم

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{A}$$

(الف) این اتحاد را در مختصات دکارتی اثبات کنید. (ب) این اتحاد را در مختصات قطبی کروی اثبات کنید (∇ در معادله ۴۴-۲ داده شده است). $\nabla \mathbf{r}$ به زبان دوتاییها یا دو برداریها (بخش ۵-۳) یک عامل خنثی یا دوتایی یکه است.

۱۰-۵-۲ ذره‌ای در فضا حرکت می‌کند. مؤلفه‌های مختصات کروی سرعت و شتاب آن را به دست بیاورید:

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

راهنمایی:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0(t)r(t) \\ &= [\mathbf{i} \sin \theta(t) \cos \varphi(t) + \mathbf{j} \sin \theta(t) \sin \varphi(t) + \mathbf{k} \cos \theta(t)]r(t) \end{aligned}$$

یادآوری: با استفاده از تکنیکهای لاگرانژی بخش ۱۷-۳ می‌توانیم به صورت دقیقتری به این نتایج دست یابیم. نقطه بالای \dot{r} به معنای مشتق زمانی است: $\dot{r} = dr/dt$. این نمادگذاری را نیوتون ابداع کرده است.

۱۱-۵-۲ ذره m تحت تأثیر یک نیروی مرکزی مطابق قانون دوم نیوتون حرکت می‌کند

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 f(r)$$

نشان دهید که $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}$ بردار ثابتی است و تفسیر هندسی این نتیجه قانون دوم کپلر را می‌دهد.

۱۲-۵-۲ $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ را بر حسب مختصات قطبی کروی بنویسید

جواب:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

[راهنمایی: ∇_{xyz} را با $\nabla_{r\theta\varphi}$ برابر بگیرید.]
 ۱۳-۵-۲ با استفاده از مسئله ۲-۵-۱۲، نشان دهید:

$$-i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

این عملگر کوانتومی با مؤلفه z تکانه زاویه‌ای متناظر است.

۱۴-۵-۲ عملگر تکانه زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی، بنا بر تعریف، عبارت است از: $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ ؛ نشان دهید:

$$L_x + iL_y = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{الف})$$

$$L_x - iL_y = -e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{ب})$$

این عبارتها عملگرهای فزاینده و کاهنده بخشهای ۱۲-۶ و ۷ هستند.

۱۵-۵-۲ برای عملگر تکانه زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی: $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ ، در مختصات قطبی کروی نشان دهید: $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$.

[راهنمایی: \mathbf{L} را برحسب مختصات قطبی کروی بنویسید، ولی ضرب برداری را برحسب مؤلفه‌های دکارتی محاسبه کنید.]

۱۶-۵-۲ (الف) با استفاده از معادله ۲-۴۴ نشان دهید:

$$\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla) = i \left(\theta_0 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \varphi_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

(ب) با تجزیه θ_0 و φ_0 برحسب مؤلفه‌های دکارتی، L_x ، L_y و L_z را برحسب θ و φ و مشتق نسبت به آنها مشخص کنید. (ج) با بهره‌گیری از: $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ ، نشان دهید:

$$\begin{aligned} L^2 &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &= -r^2 \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

۱۷-۵-۲ با بهره‌گیری از $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ ، اتحادهای عملگری زیر را اثبات کنید

$$\nabla = \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{L}}{r^2} \quad (\text{الف})$$

$$r \nabla^2 - \nabla \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) = -i \nabla \times \mathbf{L} \quad (\text{ب})$$

اتحاد دوم برای برقراری ارتباط بین تکانه زاویه‌ای و معادله دیفرانسیل لژاندر به‌کار می‌رود (مسئله ۱-۳-۸).

۱۸-۵-۲ نشان دهید که سه عبارت زیر برای کمیت $\nabla^2 \psi(r)$ (در مختصات کروی) هم‌ارزند.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right] \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\psi(r)] \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (\text{ج})$$

به‌خصوص که عبارت دوم برای اثبات تناظر بین توصیف دکارتی یک مسئله با توصیف قطبی کروی آن سودمند است. این تناظر در مسئله ۸-۶-۱۱ تعمیم داده می‌شود.

۱۹-۵-۲ در یکی از مدل‌های هاله خورشیدی فرض می‌شود که معادله حالت مانای شارش گرما، یعنی عبارت زیر، در آن صدق می‌کند:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0$$

که در آن k ، یعنی رسانندگی گرمایی با $T^{5/2}$ متناسب است. با فرض اینکه دمای T با r^n متناسب باشد، نشان دهید $T = T_0 (r_0/r)^{2/7}$ در معادله شارش گرما صدق می‌کند.

۲۰-۵-۲ میدان نیرویی (در مختصات قطبی کروی) به‌قرار زیر است

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_0 \cdot \frac{2P \cos \theta}{r^3} + \theta_0 \cdot \frac{P}{r^2} \sin \theta \quad r \geq \frac{P}{\gamma}$$

(الف) با محاسبه $\nabla \times \mathbf{F}$ امکان وجود یک پتانسیل را بررسی کنید. (ب) $\oint \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$ را روی دایره واحد در صفحه $\theta = \pi/2$ محاسبه کنید. این محاسبه درباره پایستار یا ناپایستار بودن نیرو چه اطلاعاتی به ما می‌دهد؟ (ج) اگر باور می‌کنید که \mathbf{F} را می‌شود به صورت $\mathbf{F} = -\nabla \psi$ توصیف کرد، ψ را بیابید. در غیر این صورت، فقط بگویید که هیچ پتانسیل قابل قبولی وجود ندارد.

۲۱-۵-۲ (الف) نشان دهید که $\mathbf{A} = -\varphi_0 \cdot \cot \theta / r$ ، یکی از جوابهای معادله $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{r}_0 / r^2$

است. (ب) نشان دهید این جواب که برحسب مختصات قطبی کروی است، با جوابی که در مسئله ۱-۱۳-۵ به دست آمد، یعنی

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} \frac{yz}{r(x^2 + y^2)} - \mathbf{j} \frac{xz}{r(x^2 + y^2)}$$

سازگار است. توجه کنید که این جواب به ازای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ (متناظر با $x, y = 0$) واگرا می شود. (ج) سرانجام نشان دهید که $\mathbf{A} = -\theta_0 \varphi \sin \theta / r$ نیز یکی از جوابهاست. توجه داشته باشید که این جواب (به ازای $r \neq 0$) واگرا نیست، ولی به ازای هیچیک از زاویه های سمتی ممکن تک مقدار نیست.

۲-۵-۲ پتانسیل برداری مغناطیسی \mathbf{A} به قرار زیر داده شده است

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^2}$$

نشان دهید که این پتانسیل برداری به القای مغناطیسی \mathbf{B} ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی نقطه ای با گشتاور دوقطبی \mathbf{m} منجر می شود.

جواب: به ازای $\mathbf{m} = km$ خواهیم داشت:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{r}_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^2} + \theta_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2}$$

با معادله های ۱۲-۱۳۶ و ۱۲-۱۳۷ مقایسه کنید.

۲-۵-۲ تابش دوقطبی الکتریکی در فاصله زیادی از منبع آن، دارای میدانهایی به قرار زیر است:

$$\mathbf{E} = a_E \sin \theta \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \theta_0, \quad \mathbf{B} = a_B \sin \theta \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \varphi_0$$

نشان دهید که معادلات ماکسول

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

به شرطی صادق اند که بگیریم

$$\frac{a_E}{a_B} = \frac{\omega}{k} = c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$$

[راه‌نمایی: چون r بزرگ است، می‌توانیم از جمله‌هایی از مرتبه r^{-2} صرف‌نظر کنیم].
 ۲-۵-۲ پتانسیل برداری مغناطیسی مربوط به پوستهٔ کروی چرخانی که به‌طور پیوسته باردار شده باشد، به‌قرار زیر است

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \varphi_0 \frac{\mu_0 a^2 \sigma \omega}{3} \cdot \frac{\sin \theta}{r^2} & r > a \\ \varphi_0 \frac{\mu_0 a \sigma \omega}{3} \cdot r \cos \theta & r < a \end{cases}$$

a شعاع پوستهٔ کروی، σ چگالی سطحی بار و ω سرعت زاویه‌ای است القای مغناطیسی $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ را به‌دست آورید.

جواب :

$$\begin{aligned} B_r(r, \theta) &= \frac{2\mu_0 a^2 \sigma \omega}{3} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} & r > a \\ B_\theta(r, \theta) &= \frac{\mu_0 a^2 \sigma \omega}{3} \cdot \frac{\sin \theta}{r^2} & r > a \\ \mathbf{B} &= k \frac{2\mu_0 a \sigma \omega}{3} & r < a \end{aligned}$$

۲-۵-۲ الف) توضیح دهید که به چه دلیل ∇^2 در مختصات قطبی تخت از ∇^2 در مختصات استوانه‌ای دوار با $z = \text{const.}$ به‌دست می‌آید. ب) توضیح دهید که چرا ∇^2 در مختصات قطبی کروی با محدود کردن θ به $\pi/2$ به‌صورت ∇^2 در مختصات قطبی تخت منجر نمی‌شود. یادآوری:

$$\nabla^2(\rho, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

۲-۶ جداسازی متغیرها

مختصات دکارتی

معادلهٔ هلمهولتز (معادلهٔ ۲-۱) در مختصات دکارتی با استفاده از معادلهٔ ۲-۲۶ برای لاپلاسی، به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (۲-۵۹)$$

نخست k^2 را ثابت می‌گیریم. شاید آسانترین روش حل یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای نظیر ۲-۵۹، تجزیه آن به مجموعه‌ای از معادله‌های دیفرانسیل معمولی باشد. برای این کار به طریق زیر عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (۲-۶۰)$$

و در معادله ۲-۵۹ می‌نشانیم. از کجا می‌دانیم که معادله ۲-۶۰ صحیح است؟ پاسخ، صرفاً این است که مطمئن نیستیم. بلکه با این منطق پیش می‌رویم که امتحان می‌کنیم ببینیم صحیح است یا نه. اگر روش ما توفیق‌آمیز بود، درستی معادله ۲-۶۰ واقعیت پیدا می‌کند. اگر توفیق‌آمیز نبود، خیلی زود مشخص می‌شود و به روشهای دیگر از قبیل توابع گرین، تبدیلهای انتگرالی و یا روشهای عددی روی می‌آوریم. پس از نشان دادن صورت مفروض ψ از معادله ۲-۶۰، در معادله ۲-۵۹ داریم

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0 \quad (۲-۶۱)$$

بر $\psi = XYZ$ تقسیم می‌کنیم. جملات را مرتب می‌کنیم و می‌رسیم به:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (۲-۶۲)$$

معادله ۲-۶۲ یک مرحله از جداسازی متغیرها را نشان می‌دهد. سمت چپ این معادله تابعی است فقط از x ، در حالی سمت راست فقط به y و z وابسته است. به این ترتیب، معادله ۲-۶۲ یک پارادوکس است. تابعی از x با تابعی از y و z برابر شده است، در حالی که x ، y و z جملگی مختصاتی مستقل از یکدیگرند. این استقلال به معنای آن است که رفتار x به‌عنوان یک متغیر مستقل تحت تأثیر y یا z نیست. پارادوکس فقط با مساوی قرار دادن دو طرف معادله با یک ثابت برطرف می‌شود، این ثابت را ثابت جداسازی می‌خوانند. می‌گیریم:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2 \quad (۲-۶۳)$$

$$-k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -l^2 \quad (۲-۶۴)$$

۱. انتخاب علامت که در این مرحله کاملاً اختیاری است، در هر مسئله خاص چنان صورت می‌گیرد که شرایط مرزی خاص مسئله ارضا شود.

اینک توجه خود را به معادله ۶۴-۲ معطوف می‌کنیم و می‌رسیم به:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 + l^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (۶۵-۲)$$

و مرحله دوم جداسازی انجام می‌شود. در اینجا تابعی از y با تابعی از z برابر شده است و با همان پارادوکس مواجهیم. این پارادوکس را نیز مانند قبل با مساوی قرار دادن دو طرف با یک ثابت جداسازی دیگر، در اینجا $-m^2$ ، برطرف می‌کنیم

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2 \quad (۶۶-۲)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -n^2 \quad (۶۷-۲)$$

که در آن ثابت n^2 را به صورت $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$ معرفی کرده‌ایم تا مجموعه متقارنی از معادلات به دست آوریم. اکنون به جای معادله ۵۹-۲ سه معادله دیفرانسیل معمولی (۶۳-۲، ۶۴-۲، ۶۶-۲) داریم. فرض ما (معادله ۶۰-۲) توفیق‌آمیز بوده و در نتیجه درستی آن اثبات شده است. جواب معادله به مقدار ثابتهای جداسازی بستگی دارد؛ به همین دلیل جواب را با l ، m و n مشخص می‌کنیم، یعنی

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = X_l(x)Y_m(y)Z_n(z) \quad (۶۸-۲)$$

l ، m و n را می‌توانیم چنان اختیار کنیم که در شرایط مسئله مورد نظر و شرط $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$ صدق کنند؛ معادله ۶۸-۲ جواب معادله ۱-۲ است، به شرط آنکه $X_l(x)$ جواب معادله ۶۳-۲ و $Y_m(y)$ جواب معادله ۶۶-۲، و الی آخر، باشد. کلی‌ترین جواب معادله ۱-۲ ترکیب خطی جوابهای ψ_{lmn} است

$$\Psi = \sum_{l,m,n} a_{lmn} \psi_{lmn} \quad (۶۹-۲)$$

و سرانجام ضرایب ثابت a_{lmn} را چنان اختیار می‌کنیم که Ψ در شرایط مرزی مسئله صدق کند.

عملگرهای خطی

چطور چنین چیزی ممکن است؟ چه توجیهی برای نوشتن معادله ۶۹-۲ وجود دارد؟ آن توجیه در این نکته نهفته است که $\nabla^2 + k^2$ یک عملگر (دیفرانسیلی) خطی است. عملگر خطی، مطابق

تعریف، عبارت است از عملگری که دارای دو خاصیت زیر باشد

$$\mathcal{L}(a\psi) = a\mathcal{L}\psi$$

که در آن a ثابت است و

$$\mathcal{L}(\psi_1 + \psi_2) = \mathcal{L}\psi_1 + \mathcal{L}\psi_2$$

مشتقهای d^n/dx^n و انتگرال $\int [] dx$ نمونه‌هایی از عملگرهای خطی اند. مجذور $()^2$ و سینوس نمونه‌هایی از عملگرهای غیرخطی اند. به‌طور کلی، داریم: $(ax)^2 \neq ax^2$ و $\sin(\theta + \varphi) \neq \sin\theta + \sin\varphi$. از خواص معرف یک عملگر خطی پی می‌بریم که هر ترکیب خطی از جوابهای یک معادله دیفرانسیل خطی نیز جواب معادله است. ظاهر عملگر $\nabla^2 + k^2$ به‌وضوح نشان می‌دهد که این عملگر هر دو خاصیت یک عملگر خطی را دارا، و بنابراین یک عملگر خطی است. در نتیجه معادله ۲-۶۹ با به‌کار بردن بدون واسطه این دو خاصیت معرف^۱ به‌دست می‌آید.

می‌توانیم معادله هلمهولتز را تعمیم دهیم. فرایند جداسازی برای k^2 به‌صورت زیر نیز توفیق‌آمیز خواهد بود

$$k^2 = f(x) + g(y) + h(z) + k'^2 \quad (70-2)$$

که در آن k'^2 یک ثابت جدید است.

برای این معادله به‌جای معادله ۲-۶۳ به‌سادگی به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + f(x) = -l^2 \quad (71-2)$$

برای X, Y, Z جوابهایی متفاوت با قبل به‌دست می‌آید، ولی شگرد تفکیک معادله دیفرانسیل پاره‌ای و گرفتن ترکیب خطی جوابها به‌عنوان جواب کلی به همان صورت قبل خواهد بود. شاید برای خواننده، این بخش با موضوع فصل بی‌ارتباط به‌نظر آید، لذا متذکر می‌شویم که شگرد جداسازی متغیرهای یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای نمایش دادن فایده دستگاههای مختصات خمیده خط ارائه شده است. جواب معادلات دیفرانسیلی معمولی به‌دست آمده در فصلهای ۸ تا ۱۳ محاسبه می‌شود.

۱. عملگرهای خطی به‌ویژه به این لحاظ مورد توجه ما هستند که کمیت‌های فیزیکی در مکانیک کوانتومی توسط عملگرهایی خطی که در یک فضای هیلبرت مختلط با ابعاد نامتناهی عمل می‌کنند، نشان داده می‌شوند.

مختصات استوانه‌ای دوار

معادله هلمهولتز برای تابع ψ وابسته به ρ, φ و z به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla^2 \psi(\rho, \varphi, z) + k^2 \psi(\rho, \varphi, z) = 0 \quad (۷۲-۲)$$

یا

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (۷۳-۲)$$

در اینجا نیز مانند قبل، ψ را به صورت حاصلضرب زیر می‌نویسیم

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (۷۴-۲)$$

این عبارت را در معادله ۷۳-۲ می‌نشانیم و می‌رسیم به:

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{PZ}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + P\Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 P\Phi Z = 0 \quad (۷۵-۲)$$

مشتق‌های جزئی جملگی به مشتق‌های معمولی تبدیل شده‌اند. با تقسیم کردن بر $P\Phi Z$ و بردن مشتق‌گیرهای نسبت به z به سمت راست، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (۷۶-۲)$$

بار دیگر به یک پارادوکس برمی‌خوریم. تابعی از z در طرف راست به تابعی از ρ و φ در طرف چپ وابسته است. با مساوی گرفتن دو طرف معادله ۷۶-۲ با یک مقدار ثابت، این پارادوکس را حذف می‌کنیم. این ثابت را $-l^2$ می‌گیریم. ^۱ در نتیجه

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2 Z \quad (۷۷-۲)$$

و

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -l^2 \quad (۷۸-۲)$$

۱. انتخاب علامت ثابت جداسازی اختیاری است. برای مختصه محوری z به این دلیل علامت منفی را برمی‌گزینیم که معمولاً انتظار داریم نوعی وابستگی نمایی به z (از معادله ۷۷-۲) به دست آوریم. برای مختصه سمتی φ به این دلیل علامت مثبت را اختیار می‌کنیم که انتظار داریم (از معادله ۷۸-۲) وابستگی دوره‌ای به φ به دست آوریم.

$k^2 + l^2$ را برابر n^2 می‌گیریم؛ معادله را در ρ^2 ضرب و جملات را مرتب می‌کنیم و می‌رسیم به:

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + n^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (79-2)$$

سمت راست را m^2 می‌گیریم و می‌رسیم به

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi \quad (80-2)$$

سرانجام، برای وابستگی به ρ به دست می‌آوریم

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2) P = 0 \quad (81-2)$$

این عبارت، معادله دیفرانسیل بسل است. جوابهای این معادله و خواص آنها در فصل ۱۱ ارائه شده است.

به این ترتیب، به جای معادله هلمهولتز که در اصل یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای سه‌بعدی است، سه معادله دیفرانسیل معمولی معادله‌های ۷۷-۲، ۸۰-۲ و ۸۱-۲ به دست آورده‌ایم. یکی از جوابهای معادله هلمهولتز به قرار زیر است

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \quad [74-2]$$

اگر هر یک از ویژه جوابهای P ، Φ و Z را با اندیسی مشخص کنیم، کلی‌ترین جواب معادله هلمهولتز را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی این جوابهای حاصل ضربی بنویسیم.

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m,n} a_{mn} P_{mn}(\rho)\Phi_m(\varphi)Z_n(z) \quad (82-2)$$

مختصات قطبی کروی

باز هم سعی می‌کنیم معادله ۱-۲ را به ازای k^2 ثابت، این بار در مختصات قطبی کروی، تفکیک کنیم. با استفاده از معادله ۲-۴۶، می‌رسیم به

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] = -k^2 \psi \quad (83-2)$$

اکنون در تشابه با معادله ۲-۶۰ جواب زیر را امتحان می‌کنیم

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (۱۴-۲)$$

این جواب را در معادله ۲-۸۳ می‌نشانیم و بر $R\Theta\Phi$ تقسیم می‌کنیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k^2 \quad (۱۵-۲)$$

توجه کنید که همه مشتق‌گیرهای جزئی به مشتق‌گیرهای معمولی تبدیل شده‌اند. برای منزوی کردن $(1/\Phi)(d^2\Phi/d\varphi^2)$ در $r^2 \sin^2 \theta$ ضرب می‌کنیم و می‌رسیم به:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = r^2 \sin^2 \theta \left[-k^2 - \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] \quad (۱۶-۲)$$

در معادله ۲-۸۶ تابعی فقط از φ با تابعی فقط از r و θ برابر نهاده شده است. با توجه به اینکه θ و φ متغیرهایی مستقل از یکدیگرند، دو طرف معادله ۲-۸۶ را با یک ثابت برابر می‌نیم. بررسی مختصری در اینجا، تجزیه و تحلیل بعدی ساده‌تر می‌شود. تقریباً در تمام مسائل فیزیکی، φ نمایانگر زاویه سمتی است. این نکته ایجاب می‌کند که جواب دوره‌ای باشد نه نمایی. با در نظر داشتن این موضوع، ثابت جداسازی را $-m^2$ می‌گیریم. هر ثابت دیگری را نیز می‌توانستیم در نظر بگیریم، ولی با $-m^2$ محاسبات ساده‌تر می‌شود. به این ترتیب، داریم:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (۱۷-۲)$$

و

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} = -k^2 \quad (۱۸-۲)$$

معادله ۲-۸۸ را در r^2 ضرب می‌کنیم و جملات را مرتب می‌کنیم، می‌رسیم به:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k^2 = -\frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \quad (۱۹-۲)$$

۱. در اینجا برای جدا کردن متغیر فقط یک ترتیب وجود ندارد. در بسیاری از کتابهای مکانیک کوانتومی وابستگی به r را اول جدا می‌کنند.

بار دیگر، متغیرها از یکدیگر جدا شدند. دو طرف این رابطه را با ثابت Q برابر می‌گیریم و سرانجام می‌رسیم به:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta + Q\Theta = 0 \quad (90-2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{QR}{r^2} = 0 \quad (91-2)$$

یک بار دیگر به جای یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای با سه متغیر، سه معادله دیفرانسیل معمولی به دست آورده‌ایم. در فصل‌های ۱۱ و ۱۲ جوابهای این معادلات دیفرانسیلی معمولی را بررسی خواهیم کرد. مثلاً در فصل ۱۲ خواهیم دید که معادله ۹۰-۲ به ازای $Q = l(l+1)$ ، که در آن l یک عدد درست است، همان معادله همبسته لژاندر است. معادله ۹۱-۲ به ازای k^2 ثابت (مثبت) معادله کروی بسل بخش ۱۱-۷ می‌شود.

باز هم کلی‌ترین جواب را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\psi_{Qm}(r, \theta, \varphi) = \sum_{Q,m} a_{Qm} R_Q(r) \Theta_{Qm}(\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (92-2)$$

محدودیت ثابت بودن k^2 برای امکانپذیر بودن فرایند جداسازی الزامی نیست. این فرایند برای صورت کلی k^2 ، به صورت زیر نیز انجام‌شدنی است:

$$k^2 = f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\varphi) + k'^2 \quad (93-2)$$

در مسئله اتم هیدروژن که یکی از مهمترین حالت‌هایی است که معادله موج شرودینگر پاسخ بسته‌ای دارد، داریم $k^2 = f(r)$. معادله ۹۱-۲ برای اتم هیدروژن معادله همبسته لاگر می‌شود.

جداسازی متغیرها در مختصات قطبی کروی از این نظر اهمیت فراوان دارد که اولاً شرط $k^2 = k^2(r)$ در حیطه گسترده‌ای از فیزیک، یعنی در بخش عمده‌ای از نظریه‌های گرانش، الکتروستاتیک، فیزیک اتمی و فیزیک هسته‌ای برقرار است. ثانیاً با $k^2 = k^2(r)$ وابستگی زاویه‌ای به صورت معادله‌های ۸۷-۲ و ۹۰-۲ جدا می‌شود و این معادله‌ها را می‌توان به طور کامل حل کرد.

در بخش ۸-۳ بار دیگر جداسازی متغیرها و بررسی معادله‌های دیفرانسیلی معمولی حاصل مطرح خواهد شد.

مسائل

۱-۶-۲ با اعمال عملگر $\nabla^2 + k^2$ روی تابع کلی $a_1\psi_1(x, y, z) + a_2\psi_2(x, y, z)$ نشان دهید که این عملگر خطی است، یعنی

$$(\nabla^2 + k^2)(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = a_1(\nabla^2 + k^2)\psi_1 + a_2(\nabla^2 + k^2)\psi_2$$

۲-۶-۲ نشان دهید که اگر k^2 در معادله هلمهولتز

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

به $k^2 + f(\rho) + (1/\rho^2)g(\varphi) + h(z)$ تعمیم یابد، باز هم این معادله در مختصات استوانه‌ای دوار تفکیک پذیر است.

۳-۶-۲ در معادله هلمهولتز در مختصات قطبی کروی متغیرها را چنان تفکیک کنید که وابستگی شعاعی اول جدا شود، نشان دهید که معادله‌های تفکیک شده‌ای که به دست آورده‌اید، به همان صورت معادله‌های ۲-۸۷، ۲-۹۰ و ۲-۹۱ هستند.

۴-۶-۲ ثابت کنید که معادله

$$\nabla^2\psi(r, \theta, \varphi) + \left[k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\varphi) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0$$

(در مختصات قطبی کروی) تفکیک پذیر است. توابع f, g, h و هر یک تابعی از تنها متغیری‌اند که در رابطه مشخص شده است؛ k^2 ثابت است.

۵-۶-۲ یک ذره اتمی در جعبه مکعب مستطیلی به یالهای a, b و c محبوس است، این ذره در مکانیک کوانتومی توسط تابع موج ψ توصیف می‌شود که در معادله شرودینگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

صدق می‌کند. تابع موج باید روی هر یک از رخهای جعبه صفر باشد (ولی نباید متحد با صفر شود). این شرط محدودیت‌هایی روی ثابت‌هایی جداسازی و در نتیجه روی انرژی E اعمال می‌کند. کمترین مقداری که E می‌تواند داشته باشد تا چنین جوابی وجود داشته باشد، چقدر است؟

$$\text{جواب: } E = \pi^2\hbar^2/2m(1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2)$$

۶-۶-۲ معادله رسانش گرما در یک جامد کروی شکل همگن با پخشندگی گرمایی ثابت K و بدون

چشمه گرما به صورت زیر در می آید

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = K \nabla^2 T(r, t)$$

برای این معادله جوابی به صورت

$$T = R(r)T(t)$$

در نظر بگیرید و متغیرها را از هم جدا کنید. نشان دهید که معادله شعاعی به شکل استاندارد زیر در می آید

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [\alpha^2 r^2 - n(n+1)]R = 0 \quad n = \text{عدد است}$$

جوابهای این معادله را توابع کروی بسل می نامند.

۲-۶-۷ متغیرهای معادله پخش گرما در مسئله ۲-۶-۶ را در مختصات استوانه ای دوار تفکیک کنید. فرض کنید که از آثار انتهایی می توانید صرف نظر کنید و $T = T(\rho, t)$ را به صورت $T = T(\rho, t)$ بگیرید. مسئله های دیگری درباره جداسازی متغیرها در انتهای بخش ۸-۳ (جلد دوم) آمده است.

مراجع

Margenau H and G M Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, 2nd ed Princeton, N J: D Van Nostrand (1956).

فصل ۵ این کتاب به مختصات خمیده خط و ۱۳ دستگاه مختصات خاص می پردازد.

Morse P M and H Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, New York, McGraw-Hill (1953).

در فصل ۵ این کتاب چند دستگاه مختصات مختلف توصیف می شود. دقیقاً توجه کنید که این کتاب حتی برای مختصات دکارتی نیز فراتر از کاربرد دستگاههای مختصات راستگرد نمی رود. در بقیه قسمتهای این کتاب عالی (و مشکل) نمونه هایی از کاربردهای دستگاههای مختصات مختلف در حل مسائل فیزیکی ارائه شده است.

یازده دستگاه مختصات متعامد بسیار جذاب دیگر که البته مورد استفاده چندانی ندارند در ویرایش دوم (۱۹۷۰) کتاب حاضر ارائه شده است.

تحلیل تانسوری

۱-۳ مقدمه، تعریفها

تانسورها در بسیاری از حوزه‌های علم فیزیک، از جمله نسبیت عام و نظریه الکترومغناطیس، از اهمیت برخوردارند. جامد ناهمسانگرد یکی از قلمروهایی است که در آن ظهور کمیت‌های تانسوری متداولتر است. خواص کشسانی، اپتیکی، الکتریکی و مغناطیسی جامد ناهمسانگرد می‌توانند متضمن تانسورها باشند. در بخش ۳-۶ خواص کشسانی را به‌طور نسبتاً مشروح بررسی خواهیم کرد. به عنوان معرفی و آشنایی اولیه، جاری شدن جریان الکتریکی را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم قانون اهم را به‌صورت معمولی آن به‌قرار زیر بنویسیم:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (۱-۳)$$

که در آن چگالی جریان، \mathbf{J} ، و میدان الکتریکی، \mathbf{E} ، هر دو کمیت‌هایی برداری‌اند.^۱ اگر محیط همسانگرد باشد، رسانندگی الکتریکی، σ ، کمیتی اسکالر است و مثلاً برای مؤلفه x داریم:

$$J_x = \sigma E_x \quad (۲-۳)$$

۱. در بخش ۴-۶ با مثال دیگری از این نوع معادله فیزیکی روبرو خواهیم شد.

اما، اگر محیط ما مانند اکثر بلورها یا پلاسمایی در حضور میدان مغناطیسی، ناهمسانگرد باشد، چگالی جریان در جهت x ممکن است علاوه بر میدان الکتریکی در جهت x ، به میدان در جهت y و z نیز بستگی داشته باشد. با فرض اینکه رابطه بین چگالی جریان و میدان الکتریکی خطی باشد باید به جای معادله ۲-۳ معادله زیر را بنویسیم

$$J_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \quad (3-3)$$

و در حالت کلی

$$J_i = \sum_k \sigma_{ik}E_k \quad (4-3)$$

رسانندگی σ که در فضای سه بعدی معمولی اسکالر است، به مجموعه نه عنصر σ_{ik} به قرار زیر تبدیل می شود

$$\sigma \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (5-3)$$

در بخش ۳-۳ نشان خواهیم داد که این آرایه نه عنصری یک تانسور تشکیل می دهد.

معادله ۱-۳ را به این صورت تعمیم می دهیم که اگر رابطه $A = BC$ برای دو بردار ناموازی A و C در همه سمتگیریهای یک دستگاه دکارتی برقرار باشد، B یک تانسور (مرتبه دو) است. این گزاره را در بخش ۳-۳ اثبات خواهیم کرد. مسائل فیزیکی دیگری که متضمن تانسورها هستند، عبارت اند از کشسانی (بخش ۳-۶)، الکترومغناطیس (بخش ۳-۷)، ماتریس لختی (بخش ۴-۶) و از همه مهمتر نسبیت عام.

در فصل یک، کمیتی که تحت چرخش دستگاه مختصات تغییر نکند، یعنی کمیت ناورد، کمیتی عددی یا اسکالر خوانده شد. کمیتی که مؤلفه های آن مانند مؤلفه های فاصله یک نقطه از مبدايي که اختیار کرده ایم، تبدیل شود (معادله ۱-۹ در بخش ۱-۲) بردار نامیده شد. این خاصیت تبدیل را مشخصه معرف یک بردار می گیریم. تبدیل مؤلفه های بردار تحت چرخش مختصات، بردار را به عنوان یک شیء هندسی (نظیر پیکان در فضا)، مستقل از سمتگیری دستگاه مرجع، حفظ می کنند.

در این تعریف تبدیل بردار به صورت زیر

$$A'_i = \sum_j a_{ij}A_j \quad (6-3)$$

که در آن a_{ij} کسینوس زاویه بین محور x'_i و محور x_j است، احتمالاً ابهامی وجود دارد. اگر نخست بردار فاصله دیفرانسیلی dx را در نظر بگیریم، می‌توانیم dx'_i را از طریق مشتق‌گیری جزئی به صورت تابعی از متغیرهای غیربردار بنویسیم

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad (7-3)$$

اگر داشته باشیم

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad (8-3)$$

معادله‌های ۶-۳ و ۷-۳ سازگارند. هر مجموعه‌ای از کمیت‌های A_j را که بنابر رابطه زیر تبدیل شود، بردار پادوردا می‌نامند

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j \quad (9-3)$$

ولی ما قبلاً با تبدیل برداری اندکی متفاوت نیز برخوردیم. گرادیان یک کمیت عددی، $\nabla\varphi$ ، بنابر تعریف عبارت است از:

$$\nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \quad (10-3)$$

(که در آن به جای x ، y و z از x_1 ، x_2 و x_3 بهره گرفته‌ایم) با استفاده از رابطه

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi(x', y', z') = \varphi'$$

کمیت اسکالر φ ، به صورت تبدیل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (11-3)$$

توجه کنید که این معادله با معادله ۹-۳ از این نظر تفاوت دارد که در آن $\partial x_j / \partial x'_i$ به جای $\partial x'_i / \partial x_j$ قرار گرفته است. معادله ۱۱-۳ را معادله معرف یک بردار هموردا و گرادیان را پیش‌نمونه این بردار می‌گیریم.

در مختصات دکارتی داریم:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = a_{ij} \quad (۱۲-۳)$$

ما بین تبدیلهای پادوردا و هموردا هیچ فرقی وجود ندارد. در سایر دستگاہها، معادله ۱۲-۳ در حالت کلی برقرار نیست و تمایز مابین پادوردایی و هموردایی واقعی است و باید مورد توجه قرار گیرد. این تمایز در فضای خمیده ریمانی در نسبیت عام از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مختصات مایل در بخش ۴-۴ مثال بسیار ساده‌تری از این تمایز را نشان می‌دهند.

در ادامه این بخش مؤلفه‌های یک بردار پادوردا را با شاخص بالا، یعنی به صورت A^i نمایش می‌دهیم و از شاخص زیر برای مؤلفه‌های بردار هموردا به صورت A_i استفاده می‌شود.^۱

تعریف تانسورهای مرتبه دو

برای آنکه تا حدودی از بیم و ایهام در مقابل واژه تانسور بکاهیم، ابتدا می‌گوییم که کمیت عددی را تانسور مرتبه صفر و بردار را تانسور مرتبه یک می‌نامیم. در این صورت تانسورهای مرتبه دو پادوردا، آمیخته و هموردا را، بنابر تعریف، به کمک معادله‌های زیر بیان می‌کنیم

$$A'^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}$$

$$B_j'^i = \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B_l^k \quad (۱۳-۳)$$

$$C'_{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} C_{kl}$$

روشن است که مرتبه تانسور عبارت است از تعداد مشتقهای جزئی (یا کسینوسهای هادی) که در تعریف آمده‌اند: صفر برای اسکالر، یک برای بردار، دو برای تانسور مرتبه دو، و الی آخر. هر یک از شاخصها (چه شاخص بالا و چه شاخص زیر) از یک تا تعداد بعدهای فضا را به خود می‌گیرد. تعداد شاخصها (یعنی مرتبه تانسور) مستقل از بعد فضا است. مشاهده می‌کنیم که A^{kl} نسبت به هر دو شاخص خود پادوردا و C_{kl} نسبت به هر دو شاخص خود همورداست و B_i^k نسبت به اولین شاخص یعنی k به صورت پادوردا و نسبت به شاخص دوم یعنی i به صورت هموردا تبدیل

۱. یعنی، مختصات (x, y, z) را باید به صورت (x^1, x^2, x^3) نوشت، زیرا Γ به صورت یک بردار پادوردا تبدیل می‌شود. به زودی تمام توجه خود را به تانسورهای دکارتی معطوف می‌کنیم (که دیگر وجه تمایز بین هموردایی و پادوردایی از میان می‌رود) از این رو کماکان شاخصهای مربوط به مختصات را به صورت شاخص زیر می‌نویسیم. با این کار از ایهامی که در به‌کار بردن x^i هم برای مجذور x و هم برای y پیش می‌آید، اجتناب می‌شود.

می‌شود. بار دیگر خاطر نشان می‌کنیم که در مختصات دکارتی هر سه شکل تانسور مرتبه دو یعنی پادوردا، آمیخته و هموردا با هم یکسان‌اند.

قانونهای تبدیل در معادله ۱۳-۳ برای مؤلفه‌های یک تانسور درست مانند قانونهای تبدیل مؤلفه‌های یک بردار، کمیتها (و خواص) را ارائه می‌کنند که به اختیار کردن چارچوب مرجع بستگی ندارد. این همان چیزی است که به تحلیل تانسوری در فیزیک اهمیت می‌بخشد. استقلال از چارچوب مرجع (یا ناوردایی) خصوصیتی است که برای بیان و بررسی قوانین فراگیر فیزیک به آن نیاز داریم.

تانسور مرتبه دوم \mathbf{A} (با مؤلفه‌های A^{kl}) را می‌توان به راحتی از طریق نوشتن مؤلفه‌ها در یک آرایه مربعی (3×3) برای فضای سه‌بعدی) به قرار زیر نمایش داد

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \quad (14-3)$$

منظور این نیست که هر آرایه مربعی از اعداد یا توابع یک تانسور تشکیل می‌دهد. شرط اساسی آن است که مؤلفه‌ها بنا بر معادله ۱۳-۳ تبدیل شوند.

معادلات تبدیلی که تاکنون به دست آورده‌ایم به‌زبان تحلیل ماتریسی در بخش ۴-۳ (در مختصات دکارتی) یک تبدیل تشابهی متعامد است. در بخش ۴-۶ برای یک تانسور مرتبه دو (یعنی تانسور لختی) یک تعبیر هندسی ارائه خواهد شد.

جمع و تفریق تانسورها

جمع و تفریق تانسورها نیز درست مانند بردارها برحسب عناصر تانسوری تعریف می‌شود. برای آنکه دو تانسور را با هم جمع و یا از هم کم کنیم، باید عناصر متناظر را با هم جمع و یا از هم کم کنیم. اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (15-3)$$

داریم

$$A^{ij} + B^{ij} = C^{ij}$$

البته روشن است که \mathbf{A} و \mathbf{B} باید تانسورهایی هم‌مرتبه باشند و هر دو باید در یک فضا با شمار یکسانی از ابعاد تعریف شده باشند.

قرارداد جمع

در تحلیل تانسوری متداول است که با استفاده از یک قرارداد جمع معادلهٔ ۳-۱۳ و معادله‌های تانسوری بعدی را به صورتی فشرده‌تر (و برای دانشجوی مبتدی، مبهم‌تر و پیچیده‌تر) در می‌آورند. با در نظر گرفتن تمایز مابین هموردایی و یادوردایی، قرارداد می‌کنیم که هرگاه شاخصی در یک طرف یک معادله دوبار ظاهر شود، یک بار به صورت شاخص بالا و یک بار به صورت شاخص زیر، به طور خودبه‌خود روی آن شاخص جمع بزنیم. با این قرارداد، عبارت دوم در معادلهٔ ۳-۱۳ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$B_j^i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B_l^k \quad (۱۶-۳)$$

که در طرف راست روی شاخصهای k و l جمع زده می‌شود. این قرارداد را قرارداد جمع می‌نامند.^۱ برای آنکه چگونگی به‌کار بردن قرارداد جمع و برخی از شگردهای تحلیل تانسوری را به نمایش بگذاریم، نشان می‌دهیم که نماد آشنای دلتای کرونکر δ_{kl} در واقع یک تانسور آمیختهٔ مرتبهٔ دو δ_l^k است.^۲ سؤال این است که آیا δ_l^k مطابق معادلهٔ ۳-۱۳ تبدیل می‌شود یا خیر؟ این معیاری است که تانسور بودن یک کمیت را مشخص می‌کند. با به‌کار بردن قرارداد جمع و با استفاده از تعریف دلتای کرونکر، داریم

$$\delta_l^k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \quad (۱۷-۳)$$

اکنون با در نظر گرفتن قاعدهٔ مشتق‌گیری پاره‌ای (قاعدهٔ زنجیری) داریم

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} \quad (۱۸-۳)$$

x'_j و x'_i مختصه‌های مستقل از یکدیگرند. بنابراین، وردش یکی نسبت به دیگری اگر فرق داشته باشند برابر صفر، و اگر یکسان باشند برابر یک است، یعنی

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = \delta_j^i \quad (۱۹-۳)$$

۱. در این متن شاید بهتر باشد $\partial x'_i / \partial x_k$ را به صورت تانسور a_k^i و $\partial x_l / \partial x'_j$ را به صورت تانسور b_j^l بنویسیم.
 ۲. عملاً تانسوری مانند \mathbf{A} را با مشخص کردن یک مؤلفهٔ نوعی آن، مثلاً A_{ij} ، مطرح می‌کنند. این کار تا جایی که از به‌کار بردن رابطه‌های بی‌معنایی نظیر $\mathbf{A} = A_{ij}$ اجتناب شود، مشکلی ایجاد نمی‌کند.

$$\delta_j^i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \delta_l^k$$

این نشان می‌دهد که کمیت‌های δ_l^k واقعاً مؤلفه‌های یک تانسور آمیخته مرتبه دوم‌اند. توجه داشته باشید که این نتیجه‌گیری مستقل از تعداد ابعاد فضا است.

دلتهای کرونگر خاصیت جالب توجه دیگری نیز دارد، و آن این است که در جمله دستگاههای چرخیده مختصاتی مؤلفه‌های یکسانی دارد، به همین دلیل آنرا همسانگرد می‌نامند. در بخش ۳-۴ با یک تانسور مرتبه سوم همسانگرد و سه تانسور مرتبه چهارم همسانگرد برخورد خواهیم خورد. هیچ تانسور مرتبه یک (بردار) همسانگردی وجود ندارد.

تقارن-پادتقارن

در توصیف تانسور ترتیب ظهور شاخصها اهمیت دارد. در حالت کلی A^{mn} مستقل از A^{nm} است، ولی مواردی پیش می‌آید که به نحو خاصی مورد توجه هستند. اگر داشته باشیم:

$$A^{mn} = A^{nm} \quad (20-3)$$

تانسور را متقارن می‌خوانیم. از سوی دیگر اگر داشته باشیم

$$A^{mn} = -A^{nm} \quad (21-3)$$

تانسور پادمتقارن است. روشن است که هر تانسوری (با مرتبه دو) را می‌توان به کمک اتحاد زیر به دو جزء، متقارن و پادمتقارن، تجزیه کرد:

$$A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm}) \quad (22-3)$$

جمله اول سمت راست معادله ۲۲-۳ یک تانسور متقارن و دومی یک تانسور پادمتقارن است. در نظریه کشسانی (بخش ۳-۶) باز هم با این تجزیه به اجزای متقارن و پادمتقارن سروکار پیدا خواهیم کرد. مشابه این عمل، تجزیه به اجزای متقارن و پادمتقارن در مورد توابع در مکانیک کوانتومی از اهمیت زیادی برخوردار است.

اسپینورها

زمانی تصور می‌شد که دستگاه متشکل از اسکالرها، بردارها، تانسورهای مرتبه دوم و الی آخر، یک دستگاه ریاضی کامل است، یعنی دستگاهی است که برای توصیف شرایط فیزیکی مستقل

از انتخاب خاص چارچوب مرجع کفایت می‌کند. ولی عالم (و فیزیک ریاضی) به این سادگی نیست. مثلاً در قلمرو ذرات بنیادی، ذرات با اسپین صفر^۱ (مزونهای π و ذرات α) را می‌توان به کمک کمیت‌های اسکالر و ذرات با اسپین یک (دوترونها) را توسط بردارها، و ذرات با اسپین دو (گراویتونهای فرضی) را توسط تانسورها توصیف کرد. متداولترین ذرات یعنی الکترونها، پروتونها و نوترونها که جملگی اسپین $1/2$ دارند در این فهرست نمی‌گنجد. توصیف صحیح این ذرات به کمک اسپینورها انجام می‌شود. اسپینور، کمیت اسکالر، بردار یا تانسور نیست. در بخش ۴-۱۰ در مبحث نظریه گروه اسپینور را به اختصار توصیف خواهیم کرد.

مسائل

۳-۱-۱ نشان دهید که اگر مؤلفه‌های تانسوری از هر مرتبه در یک دستگاه مختصات خاص صفر باشند، این مؤلفه‌ها در هر دستگاه مختصات دیگری صفر خواهند بود.
یادآوری: این نکته در فضای خمیده چهاربعدی نسبت‌عام اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. اگر کمیتی که به شکل یک تانسور توصیف شده است، در یک دستگاه مختصات وجود داشته باشد، در تمام دستگاههای مختصات وجود خواهد داشت و نمی‌تواند (مانند نیروهای مرکزگیز و کوریولیس در مکانیک نیوتونی) پیامد یک انتخاب خاص دستگاه مختصات باشد.
۳-۱-۲ در یک دستگاه مختصات خاص مؤلفه‌های تانسور **A** با مؤلفه‌های متناظر تانسور **B** برابرند، یعنی

$$A_{ij}^{\circ} = B_{ij}^{\circ}$$

نشان دهید که تانسورهای **A** و **B** در جمله دستگاههای مختصات با هم برابرند، یعنی در تمام دستگاههای مختصات داریم: $A_{ij} = B_{ij}$.

۳-۱-۳ سه مؤلفه اول یک بردار چهاربعدی در دو چارچوب مرجع صفرند. اگر چارچوب مرجع دوم صرفاً یک چرخش چارچوب مرجع اول حول محور x نباشد، یعنی دست‌کم یکی از ضرایب a_{i4} ($i = 1, 2, 3$) غیرصفر باشد. نشان دهید که مؤلفه چهارم در تمام چارچوبهای مرجع صفر است. این نکته به زبان مکانیک نسبیتی به معنای آن است که اگر تکانه در دو چارچوب لورنتسی پایسته باشد، انرژی در تمام چارچوبهای لورنتسی پایسته خواهد بود.

۳-۱-۴ با بررسی رفتار یک تانسور مرتبه دوم کلی تحت چرخشهای 90° و 180° حول محورهای مختصات، نشان دهید که یک تانسور مرتبه دوم همسانگرد در فضای سه‌بعدی باید مضربی از δ_{ij} باشد.

۱. اسپین ذرات، تکانه زاویه‌ای ذاتی آنها (برحسب یکای \hbar) است. این تکانه با تکانه زاویه‌ای مداری کلاسیکی که از حرکت ناشی می‌شود، فرق می‌کند.

۳-۱-۵ تانسور خشم مرتبه چهارم چهار بعدی ریمان-کریستوفل در نسبییت عام R_{iklm} ، در رابطه‌های تقارنی زیر صدق می‌کند

$$R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm}$$

که در آن شاخصها اعداد از یک تا چهار را به خود می‌گیرند. نشان دهید که تعداد مؤلفه‌های مستقل از ۲۵۶ به ۳۶ کاهش می‌یابد و شرط

$$R_{iklm} = R_{lmik}$$

تعداد مؤلفه‌های مستقل را به ۲۱ کاهش می‌دهد. سرانجام، نشان دهید که اگر مؤلفه‌ها در اتحاد $R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0$ صدق کنند، تعداد مؤلفه‌های مستقل به ۲۰ می‌رسد. یادآوری: اتحاد سه جمله‌ای آخر فقط اگر همه چهار شاخص با هم متفاوت باشند، حاوی اطلاعات جدیدی است. این اتحاد یک سوم از تعداد مؤلفه‌های مستقلی را که دارای این شرط هستند، کم می‌کند.

۳-۱-۶ T_{iklm} نسبت به هر زوج شاخص از چهار شاخص خود پادمتقارن است. این تانسور (در فضای سه بعدی) چند مؤلفه مستقل دارد؟

۳-۲ ادغام، ضرب مستقیم

ادغام

در بررسی بردارها، با جمع کردن حاصلضرب مؤلفه‌های متناظر، یک ضرب اسکالر تعریف کردیم (بخش ۳-۱)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \quad (\text{قرارداد جمع}) \quad (۳-۲۳)$$

در تحلیل تانسوری با تعمیم این عبارت، فرایندی به نام ادغام را تعریف می‌کنیم. دو شاخص، یکی پادوردا و دیگری هموردا را با یکدیگر برابر می‌گیریم؛ با این کار (همانگونه که از قرارداد جمع برمی‌آید) روش این شاخص تکرار شده جمع می‌زنیم. مثلاً، تانسور مرتبه دوم آمیخته B_j^i را ادغام می‌کنیم. با استفاده از معادله ۳-۱۸، داریم

$$\begin{aligned} B_j^i \rightarrow B_i^i &= \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_i} B_l^k \\ &= \frac{\partial x_l}{\partial x_k} B_l^k \end{aligned} \quad (۳-۲۴)$$

با بهره‌گیری از معادله ۳-۱۹، داریم

$$B_i^{\prime i} = \delta_k^l B_l^k = B_k^k \quad (25-3)$$

تانسور آمیخته مرتبه دوم ادغام شده ما ناوردا و در نتیجه اسکالر است.^۱ این دقیقاً همان چیزی است که ما در بخش ۱-۳ در مبحث حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار و در بخش ۱-۷ برای دیورژانس یک بردار به دست آوردیم. ادغام به طور کلی دو واحد از مرتبه تانسور کم می‌کند. در بخش ۳-۶ نمونه‌ای از کاربرد ادغام را خواهیم دید.

ضرب مستقیم

مؤلفه‌های بردار (تانسور مرتبه یک) هموردای a_i و بردار (تانسور مرتبه یک) پادوردای b^j را می‌توان در یکدیگر ضرب کرد و جمله‌هایی به صورت کلی $a_i b^j$ به دست آورد. با استفاده از معادله ۳-۱۳ می‌توان نشان داد که این جمله‌ها یک تانسور مرتبه دو را تشکیل می‌دهند، زیرا داریم

$$\begin{aligned} a_i' b^{\prime j} &= \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} a_k \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} b^l \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} (a_k b^l) \end{aligned} \quad (26-3)$$

در اینجا نیز در نتیجه ادغام، درست مانند معادله‌های ۳-۲۴ و ۳-۲۵ می‌رسیم به:

$$a_i' b^{\prime i} = a_k b^k \quad (27-3)$$

که همان ضرب اسکالر معمولی دو بردار است.

عمل الحاق دو بردار a_i و b^j را به صورتی که در بند پیش انجام شد، ضرب مستقیم دو بردار می‌نامند. حاصلضرب مستقیم دو بردار، یک تانسور مرتبه دوم است. در این معنا، می‌توانیم به $\nabla \mathbf{E}$ که در چارچوب تحلیل برداری تعریف نشده بود، معنایی نسبت دهیم. به طور کلی، حاصلضرب مستقیم دو تانسور، عبارت است از تانسوری که مرتبه آن مجموع مرتبه‌های دو تانسور اولیه است، یعنی

$$A_j^i B^{kl} = C_j^{ikl} \quad (28-3 \text{ الف})$$

۱. در تحلیل ماتریسی این کمیت اسکالر همان رد ماتریس است (بخش ۴-۲).

که در آن C_j^{ikl} تانسوری از مرتبه چهار است. از معادله‌های ۳-۱۳ داریم:

$$C_j^{'ikl} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_n}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_p} \frac{\partial x'_l}{\partial x_q} C_n^{mpq} \quad (۲۸-۳)$$

ضرب مستقیم در فیزیک ریاضی شگردی است برای ایجاد تانسورهای جدید با مرتبه بالاتر. مسئله ۳-۲-۱ نیز صورت خاصی است از ضرب مستقیم که در آن ∇ عامل اول است. کاربردهای این عمل در بخش ۳-۷ آمده است.

اگر T یک تانسور دکارتی مرتبه n باشد، $(\partial/\partial x_i)T_{jkl\dots}$ که یکی از عناصر ∇T است، یک تانسور دکارتی مرتبه $n+1$ است (مسئله ۳-۲-۱). ولی $(\partial/\partial x_i)T_{jkl\dots}$ تحت تبدیلهای کلی تر تانسور نیست. در دستگاههای غیردکارتی، $\partial/\partial x'_i$ روی مشتقهای پاره‌ای $\partial x_p/\partial x'_q$ عمل می‌کند و رابطه ساده تبدیل برداری را برهم می‌زند.

تا اینجا وجه تمایز بین تبدیلهای هموردا و پادوردا را حفظ کردیم، زیرا این دو در فضای غیردکارتی از هم متمایزند و این تمایز در نسبیت عام اهمیت زیادی دارد. در بخشهای ۳-۸ و ۳-۹ به گسترش رابطه‌های دیفرانسیلی تانسورهای غیردکارتی خواهیم پرداخت. ولی فعلاً به دلیل سادگی زیادی که حاصل می‌شود، فقط تانسورهای دکارتی را در نظر می‌گیریم. در نتیجه، همانگونه که در بخش ۳-۱ تذکر داده شد، تمایز بین هموردایی و پادوردایی از میان می‌رود و از این پس همه شاخصها را به صورت شاخص زیر می‌نویسیم. قرارداد جمع و عمل ادغام را برای تانسورهای دکارتی دوباره بیان می‌کنیم.

قرارداد جمع

هنگامی که یک شاخص زیر (حرفی نه عددی) دوبار در یک سمت معادله‌ای ظاهر شود، منظور آن است که روی آن باید جمع زده شود.

ادغام

ادغام عبارت است از برابر هم قراردادن دو شاخص (زیر) نایکسان و در نتیجه مجموع‌یابی‌ای که قرارداد جمع ایجاب می‌کند.

مسائل

۳-۲-۱ اگر $T_{\dots i}$ تانسوری از مرتبه n باشد، نشان دهید که $\partial T_{\dots i}/\partial x_j$ (در مختصات دکارتی) تانسوری از مرتبه $n+1$ خواهد بود.

یادآوری: ضرایب a_{ij} در دستگاه مختصات غیردکارتی به‌طور کلی توابعی از مختصات‌اند، و مشتق ساده یک تانسور مرتبه n تانسور نیست، مگر در حالت خاص $n=0$. فقط در این حالت است که مشتق، بنابر معادله ۳-۱۱، یک بردار (تانسور مرتبه ۱) همورداست.

۲-۲-۳ اگر $T_{ijk\dots}$ تانسوری از مرتبه n باشد، نشان دهید که $\sum \partial T_{ijk\dots} / \partial x_j$ (در مختصات دکارتی) تانسوری از مرتبه $n - 1$ است.
 ۳-۲-۳ عملگر

$$\nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

را می‌توان با استفاده از $x_4 = ict$ به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

این عملگر لاپلاسی چهاربعدي است که معمولاً دالامبری نامیده می‌شود و با \square^2 نمایش داده می‌شود. نشان دهید که این عملگر اسکالر است.

۳-۳ قاعده خارج قسمت

اگر A_i و B_j بردار باشند، مطابق بخش ۲-۳، به آسانی می‌توانیم، نشان دهیم که $A_i B_j$ یک تانسور مرتبه دو است. در اینجا با تعدادی از روابط عکس سروکار داریم. معادلاتی به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$K_i A_i = B \quad (الف ۲۹-۳)$$

$$K_{ij} A_j = B_i \quad (ب ۲۹-۳)$$

$$K_{ij} A_{jk} = B_{ik} \quad (ج ۲۹-۳)$$

$$K_{ijkl} A_{ij} = B_{kl} \quad (د ۲۹-۳)$$

$$K_{ij} A_k = B_{ijk} \quad (ه ۲۹-۳)$$

A و B در هر یک از این عبارتها تانسورهای معمولی‌اند که مرتبه آنها توسط تعداد شاخصها مشخص می‌شود و A اختیاری است. K در هر حالت کمیتی نامعلوم است. می‌خواهیم خواص تبدیلی K را مشخص کنیم. بنابر قاعده خارج قسمت اگر معادله مورد نظر در جمله دستگانه‌های مختصات دکارتی (چرخیده) برقرار باشد، K تانسوری است از مرتبه‌ای که نشان داده شده است. اهمیت این قاعده در فیزیک نظری در آن است که به کمک آن می‌توان ماهیت تانسوری کمیتها را تعیین کرد. مسئله ۱-۳-۳ این موضوع را به سادگی نمایش می‌دهد. قاعده خارج قسمت (معادله ۲۹-۳ ب) نشان می‌دهد که ماتریس لختی که در معادله تکانه زاویه‌ای، $L = I\omega$ ، که در بخش ۶-۴ ظاهر

می‌شود، یک تانسور است. در بخش ۳-۶ با استفاده از معادله ۳-۲۹ د ماهیت تانسوری "ثابت" c_{ijkl} در قانون تعمیم یافته هوک مشخص می‌شود.

برای اثبات قاعده خارج قسمت، معادله ۳-۲۹ ب را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم. در دستگاه مختصات پریم دار، با استفاده از خواص تبدیلی بردار B داریم:

$$K'_{ij}A'_j = B'_i = a_{ik}B_k \quad (30-3)$$

با توجه به آنکه این معادله در تمام دستگاههای مختصات دکارتی چرخیده برقرار است، داریم:

$$a_{ik}B_k = a_{ik}(K_{kl}A_l) \quad (31-3)$$

اکنون A را بار دیگر به دستگاه مختصات پریم دار تبدیل می‌کنیم^۱ (با معادله ۳-۹ مقایسه کنید)، داریم

$$K'_{ij}A'_j = a_{ik}K_{kl}a_{jl}A'_j \quad (32-3)$$

با مرتب کردن جملات می‌رسیم به:

$$(K'_{ij} - a_{ik}a_{jl}K_{kl})A'_j = 0 \quad (33-3)$$

این رابطه باید به‌ازای همه مقادیر i و در همه دستگاههای مختصات پریم دار برقرار باشد. با توجه به آنکه A'_j اختیاری است^۲، نتیجه می‌گیریم

$$K'_{ij} = a_{ik}a_{jl}K_{kl} \quad (34-3)$$

که این همان تعریف تانسور مرتبه دو است.

۱. به ترتیب شاخصها در کسینوس هادی a_{jl} در این تبدیل وارون دقیقاً توجه کنید. داریم:

$$A_l = \sum_j \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} A'_j = \sum_j a_{jl} A'_j$$

۲. مثلاً می‌توانیم بگیریم $A'_1 = 1$ و $A'_m = 0$ (به‌ازای $m \neq 1$). در این صورت معادله $K'_{i1} = a_{ik}a_{j1}K_{kl}$ بدون واسطه حاصل می‌شود. بقیه معادله‌های ۳-۳۴ با انتخابهای خاص دیگر برای A'_j به دست می‌آیند.

سایر معادلات که صورتهای دیگر قاعده خارج قسمت را ارائه می‌کنند نیز، به طریق مشابه اثبات می‌شوند. یک نقطه ضعف جزئی وجود دارد، و آن این است که قاعده خارج قسمت را نمی‌توان به‌ازای $B = 0$ به‌کار برد. خواص تبدیلی صفر نامعین است.

مسائل

۱-۳-۳ جمع‌زنی دوگانه $K_{ij}A_iB_j$ برای هر دو بردار A_i و B_j ناورداست. ثابت کنید K_{ij} تانسوری مرتبه دوم است.

یادآوری: این نتیجه در رابطه $ds^2 = g_{ij}dx_i dx_j$ (ناوردا) نشان می‌دهد که "متریک" g_{ij} یک تانسور است.

۲-۳-۳ معادله $K_{ij}A_jk = B_{ik}$ برای تمام سمتگیریهای دستگاه مختصات برقرار است. اگر A و B تانسورهایی از مرتبه دوم باشند، نشان دهید که K نیز یک تانسور مرتبه دوم است.

۳-۳-۳ جزء نمایی یک موج تخت عبارت است از $\exp[i(k \cdot r - \omega t)]$. اگر $k \cdot r - \omega t$ تحت تبدیلهای لورنتس (بخش ۷-۳) اسکالر باشد، نشان دهید که $k_\mu = (k_1, k_2, k_3, i\omega/c)$ برداری است در فضای مینکوفسکی.

یادآوری: با ضرب کردن در \hbar بردار $(p, iE/c)$ را در فضای مینکوفسکی به‌دست می‌آوریم.

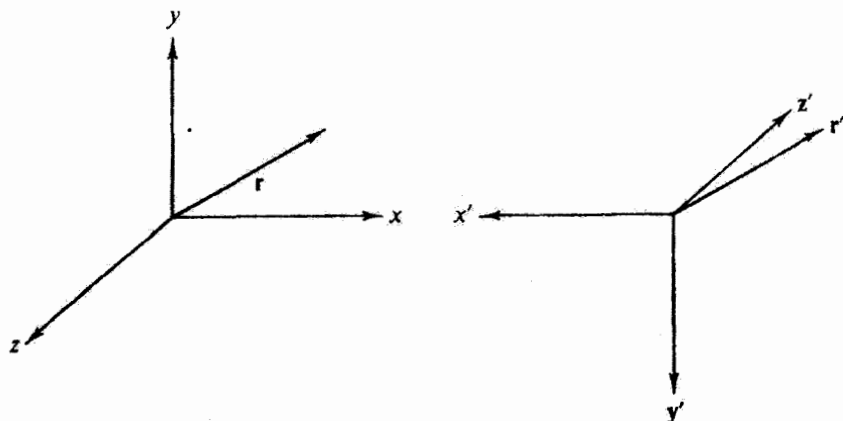
۴-۳ شبه‌تانسورها، تانسورهای دوگان

تبدیلهای مختصاتی‌ای که تا اینجا مطرح شده‌اند، به چرخش محض منجر می‌شوند. اینک اثر انعکاس و وارونی را بررسی می‌کنیم. اگر ضرایب تبدیل به‌صورت $a_{ij} = -\delta_{ij}$ باشند، از معادله ۷-۳ داریم

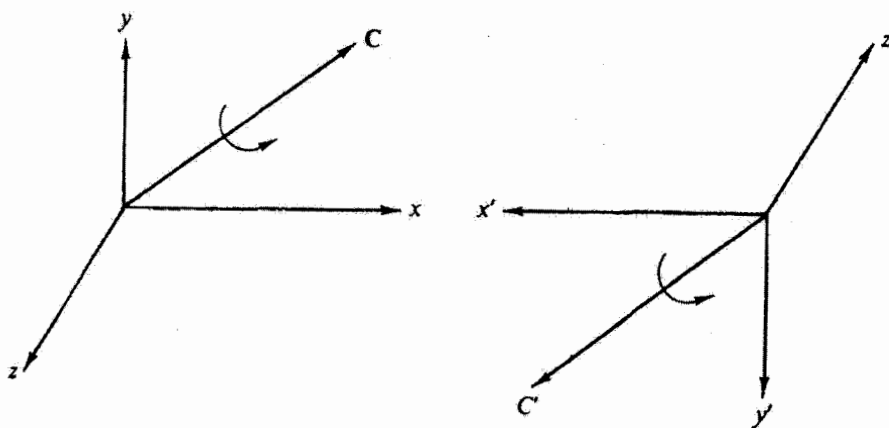
$$x'_i = -x_i \quad (35-3)$$

که یک وارونی است. توجه کنید که این تبدیل، دستگاه مختصات راستگرد اولیه را به یک دستگاه مختصات چپگرد تغییر می‌دهد.^۱ بردار نمونه ما، Γ با مؤلفه‌های (x_1, x_2, x_3) به بردار $\Gamma' = (x'_1, x'_2, x'_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$ تبدیل می‌شود. این بردار جدید، یعنی Γ' نسبت به مجموعه محورهای تبدیل‌یافته جدید، دارای مؤلفه‌های منفی است. مطابق شکل ۱-۳، با وارون کردن جهت محورهای مختصات و تغییر علامت مؤلفه‌ها می‌رسیم به: $\Gamma' = \Gamma$. بردار (که به‌صورت پیکانی است در فضا) دقیقاً به همان صورتی که قبل از انجام تبدیل بود، می‌ماند. بردار مکان Γ همه بردارهای دیگری را که مؤلفه‌های آنها به این صورت رفتار می‌کنند (یعنی با وارونی محورهای مختصات تغییر علامت می‌دهند) بردارهای قطبی می‌نامند.

۱. این عمل یک وارونی دستگاه مختصات یا محورهای مختصات است، موجودات دنیای فیزیکی ثابت می‌مانند.



شکل ۳-۱. وارونی مختصات دکارتی—بردار قطبی.



شکل ۳-۲. وارونی مختصات دکارتی—بردار محوری.

در بردارهایی که به صورت حاصلضرب برداری دو بردار قطبی تعریف شده باشند، تفاوتی اساسی به وجود می‌آید. اگر A و B دو بردار قطبی باشند، بردار $C = A \times B$ را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های C با استفاده از معادله ۱-۳۳ در بخش ۱-۴ به قرار زیرند

$$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \quad (3-36)$$

والی آخر. حال، پس از وارون کردن محورهای مختصات می‌رسیم به: $A_i \rightarrow -A'_i$ و $B_j \rightarrow -B'_j$ ولی از تعریف C_k داریم: $C_k \rightarrow +C'_k$ ، یعنی بردار حاصلضرب برداری C تحت وارونی، مانند یک بردار قطبی رفتار نمی‌کنند. برای متمایز کردن این بردارها، آنها را بردارهای محوری یا شبه‌بردار می‌نامیم (شکل ۳-۲). با توجه به اینکه این ضربهای برداری غالباً از توصیف چرخش ناشی می‌شوند،

از اصطلاح بردار محوری بارها و بارها استفاده خواهد شد. در زیر نمونه‌ای از این بردارها آمده است.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{سرعت زاویه‌ای}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{تکانه زاویه‌ای}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad \text{گشتاور}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{میدان القای مغناطیسی } \mathbf{B}$$

در رابطه $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ، سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ بردار محوری و بردارهای \mathbf{r} و $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ بردارهای قطبی‌اند. با وجود آنکه معمولاً از بردارهای محوری ذکری به میان نمی‌آید، ولی روشن است که در فیزیک مقدماتی بردارهای محوری زیادی مطرح می‌شوند. هر بردار محوری \mathbf{C} در دستگاه مختصات راستگرد یک سوی چرخش با خود همراه دارد که توسط قاعده دست راست مشخص می‌شود (با بخش ۱-۴ مقایسه کنید). سوی چرخش در دستگاه وارون شده چپگرد، چپگرد است. سوی چرخش در شکل ۲-۳ توسط بردارهای خمیده نمایش داده شده است.

تمایز بین بردارهای قطبی و محوری را به کمک بازتابش نیز می‌توان نمایش داد. بردار قطبی در آینه مانند یک پیکان فیزیکی واقعی منعکس می‌شود (شکل ۳-۳ الف). در شکل‌های ۱-۳ و ۲-۳ مختصات وارون شده‌اند، و دنیای فیزیکی ثابت باقی مانده است. در اینجا محورهای مختصات ثابت می‌مانند و دنیا در آینه‌ای در صفحه yz بازتاب پیدا می‌کند. به عبارت دقیقتر، در این نمایش محورها را ثابت نگه می‌داریم و علامت مؤلفه‌های بردار را تغییر می‌دهیم. برای آینه‌ای در صفحه xz به دست می‌آوریم $-P_y \rightarrow P_y$. داریم

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

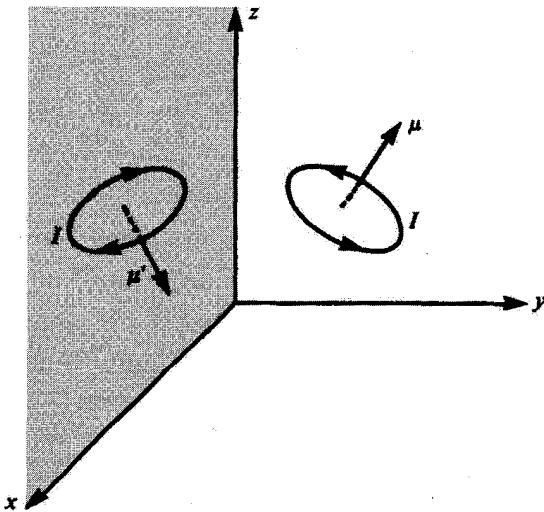
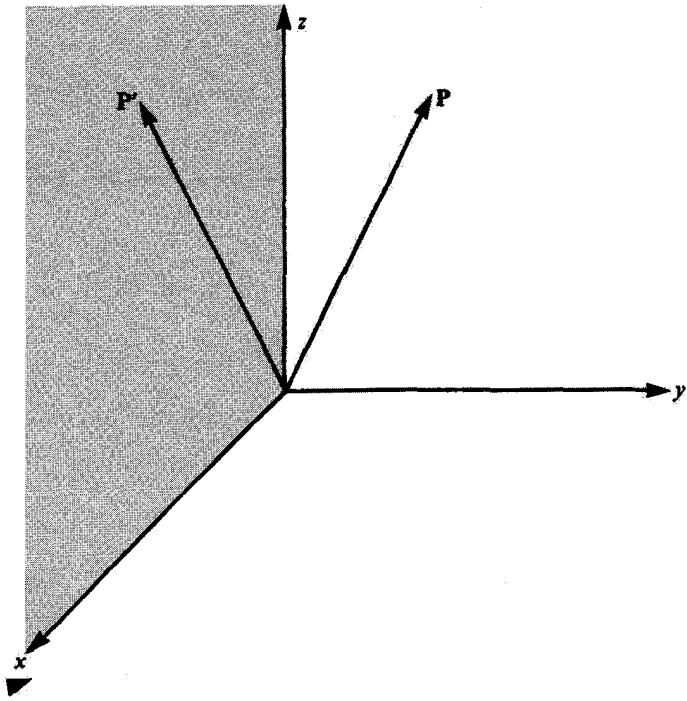
$$\mathbf{P}' = (P_x, -P_y, P_z) \quad \text{بردار قطبی}$$

یک بردار محوری مانند میدان مغناطیسی \mathbf{H} یا گشتاور مغناطیسی $\boldsymbol{\mu}$ (که برابر است با مساحت حلقه جریان ضربدر جریان) تحت بازتابش، به نحوی کاملاً متفاوت رفتار می‌کند. میدان مغناطیسی \mathbf{H} و گشتاور مغناطیسی $\boldsymbol{\mu}$ حاصل از یک بار الکتریکی را که در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند در نظر بگیرید (مسئله ۵-۸-۴ و مثال ۱۲-۵-۱). سوی چرخش بار در بازتابش برعکس می‌شود. این دو حلقه جریان و گشتاورهای مغناطیسی حاصل در شکل ۳-۳ ب نشان داده شده‌اند. داریم

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$$

$$\boldsymbol{\mu}' = (-\mu_x, \mu_y, -\mu_z)$$

اگر معتقد باشیم که ما چه دستگاه مختصات چپگرد به‌کار بریم و چه راستگرد، هیچ تفاوتی



شکل ۳-۳ (الف) آینه‌ای در صفحه xz : (ب) آینه‌ای در صفحه xz .

نمی‌کند، جمع کردن یک بردار محوری با یک بردار قطبی بی‌معنا خواهد بود. در معادله برداری $A = B$ ، بردارهای A و B یا هر دو قطبی و یا هر دو محوری‌اند.^۱ محدودیتی مشابه برای کمیت‌های اسکالر و شبه‌اسکالر‌ها و به‌طور کلی برای تانسورها و شبه‌تانسورها وجود دارد که در ادامه بررسی خواهیم کرد.

شبه‌اسکالر‌ها، شبه‌بردارها و شبه‌تانسورها معمولاً به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} S' &= |a|S \\ C'_i &= |a|a_{ij}C_j \\ A'_{ij} &= |a|a_{ik}a_{jl}A_{kl} \end{aligned} \quad (37-3)$$

که در آن $|a|$ دترمینان^۲ آرایهٔ ضرایب a_{mn} است. این دترمینان برای وارونی به‌قرار زیر است

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad (38-3)$$

برای بازتابش یکی از محورها، مثلاً محور x ، داریم

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (39-3)$$

و باز داریم $|a| = -1$. از سوی دیگر، $|a|$ برای جملهٔ چرخشهای محض همواره برابر $+1$ است. این موضوع را در بخش ۳-۴ به‌طور جامع‌تری بررسی خواهیم کرد. کمیت‌هایی را که مطابق معادلهٔ ۳۷-۳ تبدیل می‌شوند، اغلب چگالی تانسوری می‌خوانند. این کمیتها تا جایی که تنها چرخشها مورد نظر باشند به‌صورت تانسورهای معمولی‌اند، و فقط وقتی با تانسورها تفاوت پیدا می‌کنند که بازتابشها یا وارونیهایی مختصات مطرح شوند، که در آن صورت نیز تنها اختلافی که با تانسورها پیدا می‌کنند، ظهور یک علامت منفی اضافی است که از دترمینان $|a|$ ناشی می‌شود.

در فصل یک نشان داده شد که ضرب سه‌گانهٔ اسکالر $S = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ (تحت چرخشها) اسکالر است. اکنون اگر تبدیل ۳-۳ را در نظر بگیریم، می‌بینیم که $S \rightarrow -S$ ، و این امر ثابت می‌کند که ضرب سه‌گانهٔ اسکالر در واقع یک شبه‌اسکالر است: شباهت هندسی ضرب سه‌گانهٔ اسکالر با حجم

۱. یک حالت استثناء مهم در برهم‌کنشهای ضعیف در واپاشی بتا پیش می‌آید. در اینجا عالم، دستگاههای چپگرد و راستگرد را از هم تمیز می‌دهد، و ما برهم‌کنشهای برداری محوری و قطبی را با هم جمع می‌کنیم.
۲. دترمینان در بخش ۱-۴ توصیف شده است.

نشانه‌هایی از رفتار شبه‌اسکالر حجم را نمایش می‌دهد. اگر هر سه پارامتر حجم، یعنی طول، عرض و ارتفاع از فاصله‌های مثبت به فاصله‌های منفی تبدیل شوند، حاصلضرب آنها منفی خواهد شد.

نماد لوی-چی‌ویتا

برای کاربردهای بعدی، بهتر است که با نماد سه‌بعدی لوی-چی‌ویتا، ε_{ijk} ، به‌قرار زیر آشنا شویم:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1 & (40-3) \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 \text{ های دیگر}\end{aligned}$$

توجه کنید که ε_{ijk} نسبت به هر زوج از شاخصها پادمتقارن است. اکنون فرض کنید که شبه‌تانسور مرتبه سه δ_{ijk} در یک دستگاه مختصات خاص برابر ε_{ijk} است. در نتیجه، با استفاده از تعریف شبه‌تانسور داریم:

$$\delta'_{ijk} = |a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \varepsilon_{pqr} \quad (41-3)$$

حال با بسط مستقیم دترمینان داریم

$$a_{1p} a_{2q} a_{3r} \varepsilon_{pqr} = |a| \quad (42-3)$$

که در نتیجه: $\delta'_{123} = |a|^3 = 1 = \varepsilon_{123}$. به همین ترتیب، بقیه مؤلفه‌ها را یکی پس از دیگری محاسبه می‌کنیم. برای چرخشها و بازتابشها می‌رسیم به:

$$\delta'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \quad (43-3)$$

در نتیجه ε_{ijk} یک شبه‌تانسور است. ^۱د^۲ علاوه بر این، می‌بینیم که این شبه‌تانسور همسانگرد است

۱. موارد کاربرد ε_{ijk} بسیار فراتر از چیزی است که در این بخش مطرح شده است. مثلاً ماتریسهای M_k در مسئله ۴-۲-۱۶ از رابطه $(M_k)_{ij} = -i\varepsilon_{ijk}$ استخراج می‌شوند. بخش عمده‌ای از تحلیل برداری را می‌توان با استفاده از ε_{ijk} و اتحاد مسئله ۳-۴-۴ به‌صورتی بسیار فشرده نوشت. مقاله زیر را ببینید.

Evet A A, "Permutation Symbol Approach to Elementary Vector Analysis." *Am J Phys*, 34 503 (1966).

۲. مقدار عددی ε_{ijk} به‌کمک ضرب سه‌گانه اسکالری بردارهای یکه مختصاتی زیر داده می‌شود

$$e_i \cdot e_j \times e_k$$

از این دیدگاه، هر یک از عناصر ε_{ijk} یک شبه‌اسکالر است، ولی ε_{ijk} جمعاً یک شبه‌تانسور مرتبه سه را تشکیل می‌دهد.

و در همه دستگاههای مختصات دکارتی مؤلفه‌های یکسانی دارد.

تانسورهای دوگان

برای هر تانسور مرتبه دوم پادمتقارن C_{ij} (در فضای سه‌بعدی) می‌توانیم یک شبه‌بردار دوگان C_i به صورت زیر تعریف کنیم

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ijk} C_{jk} \quad (44-3)$$

C_{jk} پادمتقارن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & -C_{r1} \\ -C_{12} & 0 & C_{rr} \\ C_{r1} & -C_{rr} & 0 \end{pmatrix} \quad (45-3)$$

روشن است که C_i تحت چرخش باید مانند برداری تبدیل شود که از ادغام دوگانه (شبه) تانسور رتبه پنج $\varepsilon_{ijk} C_{mn}$ به دست می‌آید و ماهیت شبه‌برداری آن به ε_{ijk} مربوط می‌شود. به بیان دقیقتر، مؤلفه‌های C به قرار زیرند

$$(C_1, C_r, C_r) = (C_{rr}, C_{r1}, C_{12}) \quad (46-3)$$

به ترتیب چرخه‌ای شاخصها که از ترتیب چرخه‌ای مؤلفه‌های ε_{ijk} حادث می‌شود، توجه کنید. این دوگانگی که به کمک رابطه ۴۶-۳ داده شده است، به این معناست که ضرب برداری سه‌بعدی را می‌توانیم بسته به اینکه آن را به چه صورتی بنویسیم، یک شبه‌بردار یا یک تانسور مرتبه دوم پادمتقارن بدانیم.

برای سه بردار (قطبی) A, B و C می‌توانیم تانسور زیر را تعریف کنیم:

$$V_{ijk} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_j & B_j & C_j \\ A_k & B_k & C_k \end{vmatrix} \quad (47-3)$$

$$= A_i B_j C_k - A_i B_k C_j + \dots$$

با تعمیم تجزیه و تحلیل بخش ۱-۳ دیده می‌شود که هر جمله $A_p B_q C_r$ یک تانسور مرتبه سه است، که در نتیجه ثابت می‌شود V_{ijk} یک تانسور مرتبه سه است. از صورت دترمینانی V_{ijk}

نتیجه می‌گیریم که این تانسور پادمتقارن کامل است، یعنی با تعویض هر زوج از شاخصهایش که به معنای تعویض دو سطر درمیتان است، تغییر علامت می‌دهد. کمیت دوگان آن، یعنی

$$V = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} V_{ijk} \quad (48-3)$$

اشکارا یک شبه اسکالر است. با بسط این رابطه، داریم

$$V = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad (49-3)$$

که همان ضرب سه‌گانه اسکالری است که با آن آشناییم.

می‌خواهیم این تحلیل برداری دوگانی را، به منظور استفاده در بخش ۳-۷ برای نوشتن معادله‌های هموردای ماکسول، به فضای چهاربعدی تعمیم دهیم؛ بالاخص می‌خواهیم نشان دهیم که عنصر حجم چهاربعدی $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ ، یک شبه‌اسکالر است.

شبه چهاربعدی ε_{ijk} ، یعنی علامت لوی-چیویتا ε_{ijkl} را معرفی می‌کنیم. ε_{ijkl} نسبت به هر چهار شاخص پادمتقارن کامل است. اگر $(ijkl)$ جایگشت زوجی^۱ از $(1, 2, 3, 4)$ باشد، ε_{ijkl} مطابق تعریف، برابر $+1$ ، و اگر جایگشت فردی باشد برابر -1 است. با استدلالی مشابه آنکه برای اثبات ماهیت ε_{ijk} ارائه شد، می‌توان ثابت کرد که ε_{ijkl} لوی-چیویتا یک شبه‌تانسور مرتبه چهار است. با استفاده از بردارهای قطبی A, B, C, D تانسور مرتبه چهار زیر را معرفی می‌کنیم

$$H_{ijkl} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \\ A_k & B_k & C_k & D_k \\ A_l & B_l & C_l & D_l \end{vmatrix} \quad (50-3)$$

می‌توانیم کمیت دوگان زیر را تعریف کنیم

$$H = \frac{1}{4!} \varepsilon_{ijkl} H_{ijkl} \quad (51-3)$$

۱. جایگشت فرد عبارت است از جایگشتی که متضمن تعداد فردی از تعویض شاخصهای مجاور باشد، مانند $(1, 2, 3, 4) \rightarrow (1, 2, 4, 3)$. جایگشت زوج شامل تعداد زوجی از تعویض شاخصهای مجاور است (در واقع به مجاور بودن شاخصها هم نیازی نیست).

در واقع با یک ادغام چهارتایی، مرتبه را به صفر رسانده‌ایم. به دلیل ماهیت شبه‌بودن ϵ_{ijkl} ، نتیجه می‌گیریم که H شبه‌اسکالر است. حال اگر A, B, C و D جابه‌جاییهای بینهایت کوچکی در امتداد چهارمحور مختصاتی (در فضای مینکوفسکی) باشند، داریم:

$$\begin{aligned} A &= (dx_1, 0, 0, 0) \\ B &= (0, dx_2, 0, 0) \end{aligned} \quad (52-3)$$

و

$$H = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (53-3)$$

که در نتیجه ثابت می‌شود عنصر حجم چهاربعدی یک شبه‌اسکالر است. از این نتیجه در بخش ۷-۳ استفاده خواهیم کرد. این نتیجه را می‌شد از نتایج حاصل از نظریهٔ نسبیت خاص نیز به دست آورد. انقباض لورنتس-فیتز-جرالد $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ با اتساع زمانی dx_4 به حالت تعادل درمی‌آید. با تعمیم ریاضی فضای سه‌بعدی به سادگی به فضای چهاربعدی راه یافتیم، که در واقع به همین سادگی می‌توانیم فضاها ۵، ۶ یا N بعدی را نیز بررسی کنیم. این عمل پیامد تواناییهای نوعی تجزیه و تحلیل مؤلفه‌ای است. در مفهوم فیزیکی این فضای چهاربعدی را معمولاً فضای مینکوفسکی می‌گویند

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict) \quad (54-3)$$

که در آن t زمان است. این همان ادغام فضا و زمان است که در نسبیت خاص حاصل می‌شود. تبدیلهایی که چرخشهای فضای چهاربعدی را توصیف می‌کنند، تبدیلهای لورنتس نسبیت خاص هستند. تبدیلهای لورنتس را در بخشهای ۷-۳ و ۱۳-۴ خواهیم دید.

تانسورهای تحویل‌ناپذیر

تانسورهای دکارتی برای برخی کاربردها، به خصوص در نظریهٔ کوانتومی تکانهٔ زاویه‌ای، چندان مناسب نیستند. تانسور مرتبهٔ دوم کلی A_{ij} به زبان ریاضی تحویل‌پذیر است؛ به این معنا که می‌توان آن را به اجزایی با مرتبهٔ تانسوری پایینتر تجزیه کرد. در واقع ما قبلاً این کار را کرده‌ایم. به اعتبار معادلهٔ ۲۵-۳، می‌دانیم که

$$A = A_{ii} \quad (55-3)$$

یعنی رد A_{ij} کمیتی اسکالر است.^۱

۱. در بخش ۳-۴ رهیافت متفاوتی که در آن از ماتریسها استفاده شده است داده می‌شود (مسئلهٔ ۹-۳-۴).

هم اینک نشان دادیم که جزء پادمتقارن تانسور A_{ij} ، یعنی

$$B_{ij} = \frac{1}{4}(A_{ij} - A_{ji}) \quad (56-3)$$

هم‌ارز یک (شبه) بردار است، یعنی

$$B_{ij} = C_k \quad \text{با جایگشت چرخه‌ای } i, j \text{ و } k \quad (57-3)$$

اگر کمیت اسکالر A و بردار C_k را از تانسور اصلی کم کنیم، یک تانسور مرتبهٔ دوم متقارن با رد صفر، S_{ij} ، به قرار زیر به دست می‌آوریم

$$S_{ij} = \frac{1}{4}(A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3}A\delta_{ij} \quad (58-3)$$

که پنج مؤلفهٔ مستقل دارد. سرانجام تانسور دکارتی اولیه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A_{ij} = \frac{1}{3}A\delta_{ij} + C_k + S_{ij} \quad (59-3)$$

سه کمیت A ، C_k و S_{ij} به ترتیب تانسورهای کروی با مرتبهٔ صفر، یک و دو را تشکیل می‌دهند که مانند هماهنگهای کروی Y_L^M (فصل ۱۲) به ازای $L = 0, 1, 2$ تبدیل می‌شوند. ژر در کتاب خود (که در فهرست مراجع فصل ۱۲ معرفی شده است) شرح جامعتری از تانسورهای کروی و کاربرد آنها ارائه کرده است.

تانسور متقارن چارقطبی الکتریکی نمونهٔ خاصی است از تحویل‌پذیری بالا

$$Q_{ij} = \int (\epsilon x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(x_1, x_2, x_3) d^3x$$

جملهٔ $r^2 \delta_{ij}$ - کاستن رد اسکالر (یعنی سه جملهٔ $j = i$) را نمایش می‌دهد. رد Q_{ij} حاصل صفر است. تانسور کرنش در بخش ۳-۶ مثال دیگری برای این عمل تحویل است (مسئلهٔ ۳-۶-۷).

مسائل

۱-۴-۳ آرایهٔ مربعی پادمتقارن زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} \circ & C_r & -C_r \\ -C_r & \circ & C_1 \\ C_r & -C_1 & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & C_{1r} & C_{1r} \\ -C_{1r} & \circ & C_{rr} \\ -C_{1r} & -C_{rr} & \circ \end{pmatrix}$$

که در آن (C_1, C_2, C_3) یک شبه بردار است. با فرض اینکه رابطه

$$C_i = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} C_{jk}$$

در تمام دستگاههای مختصات برقرار باشد، ثابت کنید که C_{jk} تانسور است. (این عبارت صورت دیگری از قضیه خارج قسمت است.)

۲-۴-۳ نشان دهید که ضرب برداری مختص به فضای سه بعدی است، یعنی فقط در سه بعد می‌توانیم یک تناظر یک به یک مابین مؤلفه‌های یک تانسور پادمتقارن (مرتبه دوم) و مؤلفه‌های یک بردار برقرار کنیم.

۳-۴-۳ نشان دهید که: (الف) $\delta_{ii} = 3$; (ب) $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0$; (ج) $\delta_{ij} \varepsilon_{jpk} = \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jpq}$; (د) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jzk} = 6$.
۴-۴-۳ نشان دهید که

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$$

۵-۴-۳ (الف) مؤلفه‌های بردار ضرب برداری $C, C = A \times B$ ، را برحسب ε_{ijk} و مؤلفه‌های A و B بیان کنید. (ب) با استفاده از پادمتقارن ε_{ijk} نشان دهید که $A \cdot A \times B = 0$.

جواب: (الف) $C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$

۶-۴-۳ (الف) نشان دهید که تانسور (ماتریس) لختی بخش ۴-۶ را برای ذره‌ای به جرم m در (x_1, x_2, x_3) می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I_{ij} = m(x_n x_n \delta_{ij} - x_i x_j)$$

(ب) نشان دهید:

$$I_{ij} = -M_{il} M_{lj} = -m \varepsilon_{ilk} x_k \varepsilon_{ljm} x_m$$

که در آن $M_{il} = m^{1/2} \varepsilon_{ilk} x_k$. این ادغام دو بردار مرتبه دو و شبیه به ضرب ماتریسی بخش ۴-۲ است.

۷-۴-۳ $\nabla \cdot \nabla \times A$ و $\nabla \times \nabla \varphi$ را برحسب نماد ε_{ijk} چنان بنویسید که مشخص شود هر یک از این عبارتها صفر است.

جواب :

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$$

$$(\nabla \times \nabla \varphi)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi$$

۳-۴-۸ ضرب برداری را برحسب نماد لوی-چی ویتا (ε_{ijk}) بیان و قاعدهٔ بک-کب، معادلهٔ ۱-۵۰ را استخراج کنید.

[راهنمایی: از رابطهٔ مسئلهٔ ۳-۴-۴ بهره گیرید.]

۳-۴-۹ تحقیق کنید که هر یک از تانسورهای مرتبهٔ چهار زیر همسانگرد است، یعنی مؤلفه‌های آن مستقل از هر چرخش دستگاه مختصات ثابت می‌ماند. (الف) $A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$ ؛

(ب) $B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$ ؛ (ج) $C_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$.

۳-۴-۱۰ نشان دهید که نماد دوشاخه لوی-چی ویتا، ε_{ij} ، (در فضای دوبعدی) یک شبه‌تانسور مرتبهٔ دو است. آیا این امر واقعیت یکتایی δ_{ij} (موضوع مسئلهٔ ۳-۱-۴) را نقض می‌کند؟

۳-۴-۱۱ (الف) ε_{ij} را به کمک یک ماتریس 2×2 نمایش دهید، و یا استفاده از ماتریس چرخش 2×2 ، در بخش ۳-۴، نشان دهید که ε_{ij} تحت تبدیل تشابهی متعامد ناورداست.

(ب) ماهیت شبه‌بودن ε_{ij} را با استفاده از ماتریس تبدیل $(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & -1 \end{smallmatrix})$ نمایش دهید.

۳-۴-۱۲ به‌ازای $A_k = 1/\sqrt{2} \varepsilon_{ijk} B_{ij}$ ، که در آن B پادمتقارن است، $B_{ij} = -B_{ji}$ ، نشان دهید:

$$B_{mn} = \varepsilon_{mnk} A_k$$

۳-۴-۱۳ نشان دهید که اتحاد برداری

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

(مسئلهٔ ۱-۵-۱۲) مستقیماً از توصیف ضرب برداری به کمک ε_{ijk} و اتحاد مسئلهٔ ۳-۴-۴ نتیجه می‌شود.

۳-۵ دوتاییها

گاهی، به‌خصوص در متون درسی قدیمی‌تر، به دوتاییها اشاره می‌شود. دوتایی ابزار است نه چندان کارآمد برای تعمیم تحلیل برداری معمولی به تانسورهای مرتبهٔ دوم.

با الحاق دو بردار i و j به یکدیگر و تشکیل ترکیب ij یک دوتایی به دست می آوریم. در ضرب (اسکالر یا برداری) دوتایی از سمت چپ، فقط عضو سمت چپی دوتایی وارد ضرب می شود و عضو سمت راستی مطلقاً تک باقی می ماند

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot ij &= [(iA_x + jA_y + kA_z) \cdot ij] \\ &= A_x j \end{aligned} \quad (۶۰-۳)$$

در ضرب از سمت راست، درست برعکس این موضوع برقرار است، یعنی

$$\begin{aligned} ij \cdot \mathbf{A} &= [ij \cdot (iA_x + jA_y + kA_z)] \\ &= iA_y \end{aligned} \quad (۶۱-۳)$$

با توجه به این روابط مشاهده می کنیم که این عمل ضرب به طور کلی تعویض ناپذیر است. باید قویاً تأکید کنیم که i و j در دوتایی ij روی یکدیگر عمل نمی کنند. اگر ضرایب اسکالری داشته باشند، ضرایب در یکدیگر ضرب می شوند ولی برای خود بردارهای یکه هیچ نوع ضربی، نه نقطه ای و نه برداری، بین آنها انجام نمی شود؛ آنها صرفاً کنار هم نوشته می شوند. همانگونه که هم اینک نشان دادیم، ترتیب بردارهای یکه مهم است، یعنی $ij \neq ji$. به این ترتیب، یک کمیت مرکب در اختیار داریم که به ترتیب اجزاء بستگی دارد. این وابستگی به ترتیب را، در مطالعه ماتریسها (فصل ۴) و کمیت های مختلط (فصل ۶) نیز خواهیم دید؛ عدد مختلط اسماً زوج مرتبی (دارای ترتیب) از اعداد حقیقی است.

نحوه ساختن دوتایی را تعمیم می دهیم و دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} را به یکدیگر ملحق می کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{AB} &= (iA_x + jA_y + kA_z)(iB_x + jB_y + kB_z) \\ &= iiA_x B_x + ijA_x B_y + ikA_x B_z \\ &\quad + jiA_y B_x + jjA_y B_y + jkA_y B_z \\ &\quad + kiA_z B_x + kjA_z B_y + kkA_z B_z \end{aligned} \quad (۶۲-۳)$$

کمیت $\mathbf{T} = \mathbf{AB}$ یک دوتایی است که همان طور که دیدیم، ترکیبی است از دوتاییها. قبلاً ثابت کرده ایم (در بخش ۲-۳) که این حاصل ضرب دو بردار، یعنی \mathbf{AB} ، یک تانسور مرتبه دوم است. به این ترتیب، دوتاییها تانسورهای مرتبه دوم اند که به صورتی نوشته شده اند که در آنها ماهیت برداری ایقانشده می ماند ولی خواص تبدیل تانسوری مخفی مانده است.

قبلاً گفتیم که ضرب یک بردار در یک دوتایی تعویض پذیر نیست، ولی یک حالت خاص مهم وجود دارد که در آن این عمل تعویض پذیر است. دوتایی \mathbf{AB} را چنان در نظر می گیریم که به ازای

هر بردار اختیاری داشته باشیم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{a} \quad (۶۳-۳)$$

اگر $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ آنگاه،

$$\begin{aligned} A_x \mathbf{B} &= \mathbf{AB}_x \\ iA_x B_x + jA_x B_y + kA_x B_z &= iA_x B_x + jA_y B_x + kA_z B_x \end{aligned} \quad (۶۴-۳)$$

با برابر قرار دادن مؤلفه‌ها با یکدیگر، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} A_x B_x &= A_x B_x \\ A_x B_y &= A_y B_x \\ A_x B_z &= A_z B_x \end{aligned} \quad (۶۵-۳)$$

این روابط نشان می‌دهند که $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$ ، که در آن c یک کمیت ثابت است. به زبان دیگر، اگر ضرب دوتایی در هر بردار اختیاری تعویض‌پذیر باشد، دوتایی باید متقارن باشد و ضریب دوتایی \mathbf{pq} با ضریب دوتایی \mathbf{qp} برابر شود. برعکس، اگر دوتایی متقارن باشد، باید ضرب آن در هر بردار اختیاری تعویض‌پذیر باشد.

یکی از بارزترین خواص دوتایی متقارن آن است که همواره می‌توان با انتخاب صحیح محورهای مختصات، آن را به شکل پهنجار یا قطری درآورد:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\rightarrow iiT_{xx} \\ &+ jjT_{yy} \\ &+ kkT_{zz} \end{aligned} \quad (۶۶-۳)$$

که در آن ضرایب غیرقطری جملگی صفرند. تبدیل مختصاتی که دوتایی را به این صورت قطری در می‌آورد به تبدیل به محورهای اصلی معروف است. این تبدیل را در بخش ۶-۴ به‌طور نسبتاً مشروح بررسی خواهیم کرد.

دوتایی متقارن تعبیر هندسی جالب توجه و مفیدی دارد. برای سادگی فرض می‌کنیم که دوتایی متقارن \mathbf{T} به شکل قطری درآورده شده باشد. در این صورت با استفاده از \mathbf{r} بردار فاصله متداول معادلهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} = \lambda \quad (۶۷-۳)$$

این معادله طول r را بسته به جهت آن محدود می‌کند. با بسط معادله ۶۷-۳ داریم:

$$(ix + jy + kz) \cdot (iT_{xx} + jT_{yy} + kT_{zz}) \cdot (ix + jy + kz) = 1$$

$$x^2 T_{xx} + y^2 T_{yy} + z^2 T_{zz} = 1 \quad (68-3)$$

اگر $T_{xx} > 0$ ، $T_{yy} > 0$ و $T_{zz} > 0$ ، آنگاه معادله ۶۸-۳ بیضیواری را تعریف می‌کند که نیم‌محورهای a ، b و c آن از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$a = T_{xx}^{-1/2}, \quad b = T_{yy}^{-1/2}, \quad c = T_{zz}^{-1/2} \quad (69-3)$$

برای تانسور لختی بخش ۶-۴، از تعریف عناصر قطری (معادله ۱۳۹-۴) مربوطه، روشن است که این عناصر مثبت‌اند. قطری کردن دوتایی متناظر است با سمت‌یابی کردن بیضیوار دوتایی به صورتی که محورهای آن در راستای محورهای مختصات باشند.

اگر \mathbf{U} یک دوتایی پادمتقارن باشد

$$U_{xx} = 0 \quad \text{و جز آن}$$

$$U_{xy} = -U_{yx} \quad \text{و جز آن}$$

در این صورت به‌ازای هر بردار \mathbf{a} داریم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{a} \quad (70-3)$$

ضرب بردار در دوتایی پادمتقارن از قاعده پاد تعویض‌پذیری پیروی می‌کند (مسئله ۳-۴-۵الف). کار کردن با دوتاییها پیچیده‌تر از تحلیل تانسوری معمولی است (البته به شرط آنکه مفهوم تبدیل تحت چرخش مختصات کاملاً درک شده باشد). علاوه بر این، دوتاییها برای نمایش تانسورهای مرتبه سه و بالاتر بسیار دست و پاگیرند، از این رو در ادامه این فصل به تحلیل تانسوری باز می‌گردیم و نمادگذاری دوتایی را بیشتر ادامه نمی‌دهیم.

مسائل

۱-۵-۳ اگر \mathbf{A} و \mathbf{B} ، مطابق معادله‌های ۶-۳ و ۸-۳، مانند بردار تبدیل شوند، نشان دهید که دوتایی \mathbf{AB} در قانون تبدیل تانسوری، معادله ۱۳-۳ صدق می‌کند.

۲-۵-۳ نشان دهید که $\mathbf{I} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ یک دوتایی یکه است، به این معنا که برای هر بردار \mathbf{V} داریم

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}$$

هر یک از دوتاییهای \mathbf{ii} و غیره، مثالهای خاصی از عملگر تصویری در مکانیک کوانتومی اند.

۳-۵-۳ نشان دهید که $\nabla \mathbf{r}$ برابر است با دوتایی یکه \mathbf{I} .

۴-۵-۳ اگر \mathbf{U} یک دوتایی پادمتقارن و \mathbf{V} یک بردار باشد، نشان دهید: (الف) $\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ ؛

(ب) $\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$.

۵-۵-۳ مابین بردارهای دوبعدی $\mathbf{r} = \mathbf{ix} + \mathbf{jy}$ و $\mathbf{t} = -\mathbf{yi} + \mathbf{jx}$ می توان توسط معادله تانسوری

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{t}$ رابطه برقرار کرد. (الف) با استفاده از توصیف مؤلفه‌ای که قبلاً برای تانسور ارائه کردیم،

تانسور \mathbf{U} را به دست آورید. (ب) \mathbf{U} را به عنوان یک دوتایی به دست آورید.

۶-۵-۳ در بررسی برهم‌کنش بین مولکولها، یک دوتایی از بردارهای یکه فاصله نسبی \mathbf{e}_{12} به دست

می آید

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

این دوتایی به صورت زیر است:

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - 3\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12}$$

نشان دهید که

$$\text{Tr} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = 6$$

$\mathbf{I} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ یعنی یکه است؛ یعنی

۷-۵-۳ نشان دهید که قضیه گاوس برای دوتاییها صادق است، یعنی

$$\int_s d\sigma \cdot \mathbf{D} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} d\tau$$

۸-۵-۳ نشان دهید که

$$\int_s d\sigma \cdot \nabla \mathbf{E} + \int_s d\sigma \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \int_s d\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

تابع E یک تابع برداری از مکان است. انتگرال‌گیری روی یک سطح بسته ساده صورت می‌گیرد. این ترکیب نسبتاً بعید از انتگرال‌های سطحی در واقع در نظریه برداری پراش کیرشهوف ظاهر می‌شود. ۹-۵-۳ نشان دهید که تانسورهای یکه متقارن با رد صفر زیر

$$\begin{aligned} t^o &= (\mathbf{2kk} - \mathbf{ii} - \mathbf{jj})/\sqrt{6} \\ t^{\pm 1} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{ik} + \mathbf{ki}) - i \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) \\ t^{\pm 2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{ii} - \mathbf{jj}) \pm i \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) \end{aligned}$$

در رابطه ادغام دوگانه زیر صدق می‌کنند

$$t_{ij}^{m*} t_{ij}^n = \delta_{mn}$$

از این تانسورهای یکه در تعریف هماهنگهای کروی تانسوری که تعمیم هماهنگهای کروی برداری بخش ۱۱-۱۲ است، استفاده می‌شود. هماهنگهای کروی تانسوری به‌نوبه خود در توصیف امواج گرانشی به‌کار می‌آیند.

۱۰-۵-۳ جرم m به‌آرامی (با شتاب صفر) به‌بالای سطح شیب‌داری (که با افق زاویه θ می‌سازد) کشیده می‌شود. ضریب اصطکاک متعارف برابر μ است، $f = \mu N$ که در آن N نیروی عمودی است. دستگاه مختصاتی تعریف کنید و این معادله اصطکاک اسکالری را به‌صورت یک معادله برداری چنان بازنویسی کنید که در آن کمیت اسکالر μ با یک دوتایی تعویض شده باشد. ۱۱-۵-۳ با ترکیب هر دو بردار \mathbf{AB} می‌توان یک دوتایی ساخت، ولی هر دوتایی‌ای را نمی‌توان به دو بردار تجزیه کرد. نشان دهید که دوتایی دوبعدی

$$\mathbf{A} = \mathbf{ij} - \mathbf{ji}$$

را نمی‌توان به دو بردار دوبعدی تجزیه کرد.

۶-۳ نظریه کشسانی

وقتی جسم کشسانی تحت تأثیر یک نیروی خارجی یا تنش قرار می‌گیرد، تغییر شکل می‌دهد یا دستخوش کرنش می‌شود. بررسی کشسانی برحسب تانسور، طبیعتاً در سه بخش انجام می‌شود: (الف) توصیف کرنش یا تغییر شکل ماده کشسان؛ (ب) توصیف نیرو یا تنش که تغییر شکل را به‌وجود می‌آورد؛ و (ج) قانون تعمیم‌یافته هوک به‌صورت تانسوری که مابین تنش و کرنش رابطه برقرار می‌کند.

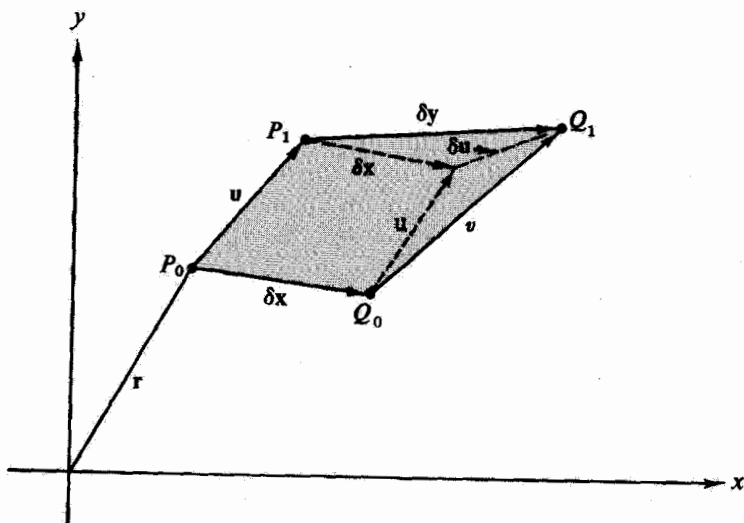
گرش کشسان: تغییر شکل

برای توصیف تغییر شکل جسم کشسان تحت تأثیر تنش خارجی، می‌توانیم تغییر در مکان نسبی اجزای جسم را مشخص کنیم (شکل ۳-۴). نقطه P_0 را در مکان \mathbf{r} نسبت به مبدأ ثابت و نقطه Q_0 را به فاصله $\delta \mathbf{x}$ از P_0 در نظر بگیرید. مختصات Q_0 نسبت به P_0 در حالت غیرگرشی، عبارت‌اند از δx_i . در حالت گرشی که P_0 به اندازه \mathbf{u} جابه‌جا شده به نقطه P_1 رفته، و نقطه Q_0 به اندازه \mathbf{v} جابه‌جا شده به نقطه Q_1 رفته است، مختصات Q_1 نسبت به P_1 عبارت‌اند از $\delta y_i = \delta x_i + \delta u_i$. تغییر مکان Q نسبت به P عبارت است از δu_i . با چشمپوشی از مشتقاتی مرتبه دوم و بالاتر، بسط سه‌بعدی تیلور (۵-۱۰۹) را به‌دست می‌آوریم:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k \quad (۷۱-۳)$$

با توجه به آنکه u_i مؤلفه یک بردار است، $\partial u_i / \partial x_k$ مؤلفه یک تانسور مرتبه دو، یعنی $\nabla \mathbf{u}$ است.



شکل ۳-۴ گرش کشسان.

۱. تحدید به جملات مرتبه اول محدودیتی نسبتاً اساسی است و در عمل به‌معنای کرنشهای نسبی کمتر از شاید یک‌درصد است.

با تجزیه این تانسور به دو جزء متقارن و پادمتقارن داریم:

$$\delta u_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \delta x_k - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k = \eta_{ik} \delta x_k - \xi_{ik} \delta x_k \quad (72-3)$$

می‌توان نشان داد که جزء پادمتقارن ξ_{ik} یک چرخش محض است (و به هیچوجه یک تغییر شکل نیست). با استفاده از بخش ۳-۴ می‌توانیم بردار محوری ξ را به ξ_{ij} مربوط کنیم

$$\xi = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (73-3)$$

که به این ترتیب جابه‌جایی $\delta \mathbf{u}$ متناظر با جزء پادمتقارن $-\xi_{ik} dx_k$ ، عبارت خواهد بود از

$$\delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u}) \times \delta \mathbf{x} \quad (74-3)$$

که این چرخشی است به اندازه $|\nabla \times \mathbf{u}|$ رادیان حول محوری در جهت $(\nabla \times \mathbf{u})$ که از نقطه P می‌گذرد. معادله ۷۴-۳ انتگرال زمانی رابطه $\mathbf{v}(t) = \omega(t) \times \mathbf{r}$ است.

جزء متقارن، یعنی تانسور η_{ij} ، تانسور کرنش محض است. عناصر قطری η_{ik} (یعنی η_{11} ، η_{22} و η_{33}) کشیدگیها، و عناصر غیرقطری، کرنشهای برشی را نشان می‌دهند.^۱ برای نشان دادن این موضوع، فرض می‌کنیم $P_0 Q_0$ موازی محور x باشد، یعنی $\delta \mathbf{x} = i \delta x_1$ از معادله ۷۲-۳ داریم

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \eta_{11} \delta x_1 \\ \delta u_2 &= \eta_{21} \delta x_1 \\ \delta u_3 &= \eta_{31} \delta x_1 \end{aligned} \quad (75-3)$$

به این ترتیب، جابه‌جایی در حالت کرنشی عبارت است از

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= \delta x_1 + \delta u_1 = (1 + \eta_{11}) \delta x_1 \\ \delta y_2 &= \delta u_2 = \eta_{21} \delta x_1 \\ \delta y_3 &= \delta u_3 = \eta_{31} \delta x_1 \end{aligned} \quad (76-3)$$

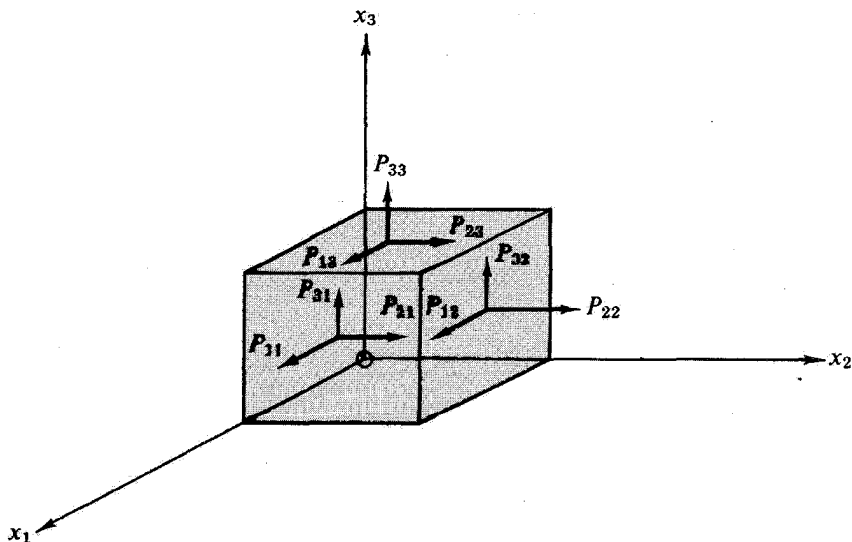
۱. روشن است که عناصر غیرقطری در یک گاز یا مایع معمولی (که نمی‌تواند کرنشهای برشی را تحمل کند) باید صفر باشند.

برای بردار $\delta x = i\delta x_1$ جمله قطری η_{11} در مؤلفه یک δy سهم است (یعنی کشیدگی را نمایش می‌دهد) و η_{21} و η_{31} به ترتیب در δy_2 و δy_3 سهم‌اند و برش را نمایش می‌دهند.

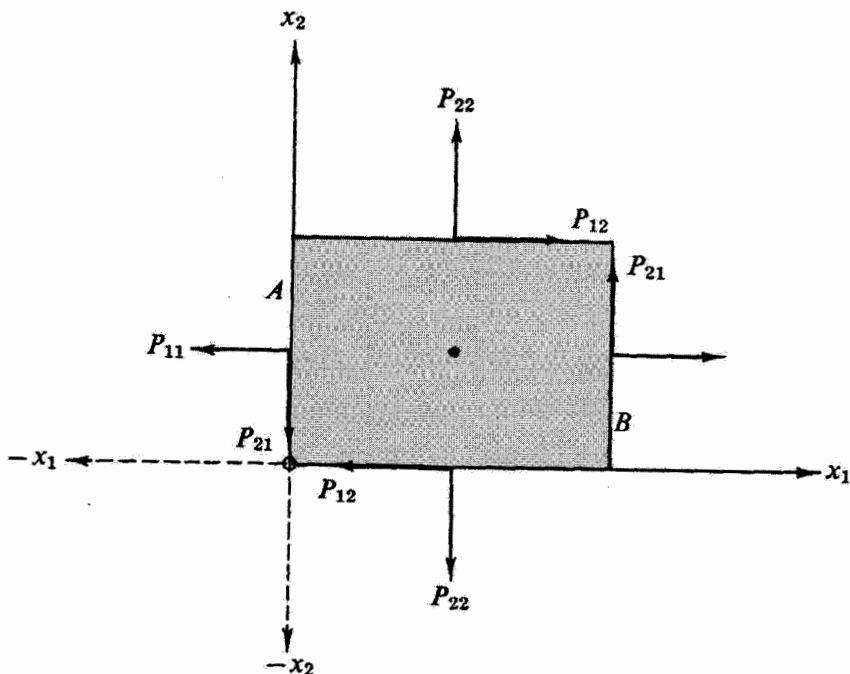
تنش-نیرو

در تعریف تنشها یا نیروها باید دقت کرد. با مراجعه به شکل ۵-۳، که حجمی دیفرانسیلی را نشان می‌دهد، می‌بینیم که نیرویی که در جهت x_i بر سطح dA وارد می‌آید که خط عمود بر آن در جهت x_j قرار دارد، عبارت است از $P_{ij} dA$. P_{ij} ها در واقع "فشار" اند؛ به این معنا که نیرو تقسیم بر مساحت‌اند. منظورمان از به کار بردن واژه تنش یا نیرو آن است که P_{ij} را در مساحت دیفرانسیلی مربوط ضرب کنیم. این حاصلضربها نیروهایی‌اند که بر متوازی‌السطوح کوچک در شکل ۵-۳ وارد می‌آیند. برای وضوح بیشتر شکل، تنها نیروهای وارد بر سه رخ روبه‌رو نشان داده شده است. اگر تنشها را همگن بگیریم، نیروی وارد بر رخیهای مقابل، مطابق شکل ۶-۳، علامت مخالف یکدیگر دارند. توجه کنید که P_{21} برشی است که (در جهت x_2) بر رخ B وارد می‌آید. اگر نیرو همگن باشد، A باید همین تنش برشی P_{21} را بر محیط خارج وارد کند. بنابراین، تنش وارد بر رخ A از سوی محیط خارج عکس این تنش، یعنی P_{21} در جهت روبه پایین (جهت $-x_2$) است. باید دقیقاً توجه کرد که این استدلال براساس سه فرض زیر استوار است:

۱. وجود تنش همگن در سرتاسر جسم؛
۲. برقراری ترازمندی ایستا؛
۳. عدم نیروهای وارد بر جسم (مانند گرانش وارد بر جرم درون متوازی‌السطوح) و گشتاورهای



شکل ۵-۳ تنشها.



شکل ۶-۳ تنشهای همگن-تغییر علامت.

وارد بر جسم (نظیر میدان مغناطیسی خارجی وارد بر حوزه‌های مغناطیسی). با این فرضها یک محدودیت دیگر نیز روی P_{ij} ها وضع می‌شود. گشتاور خالص حول محور x_3 وارد بر متوازی‌السطوحی را که در شکل‌های ۵-۳ و ۷-۳ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. گشتاور خالص ناشی از فشارهای عمودی P_{ii} صفر است. بازوی گشتاوری تنشهای برشی P_{31} و P_{32} نیز صفر است. تنشهای برشی P_{13} و P_{23} با تنشهای مساوی و مخالف بر رخ پایینی (در $x_3 = 0$) به حالت تعادل در می‌آیند. گشتاورهای باقیمانده، عبارت‌اند از

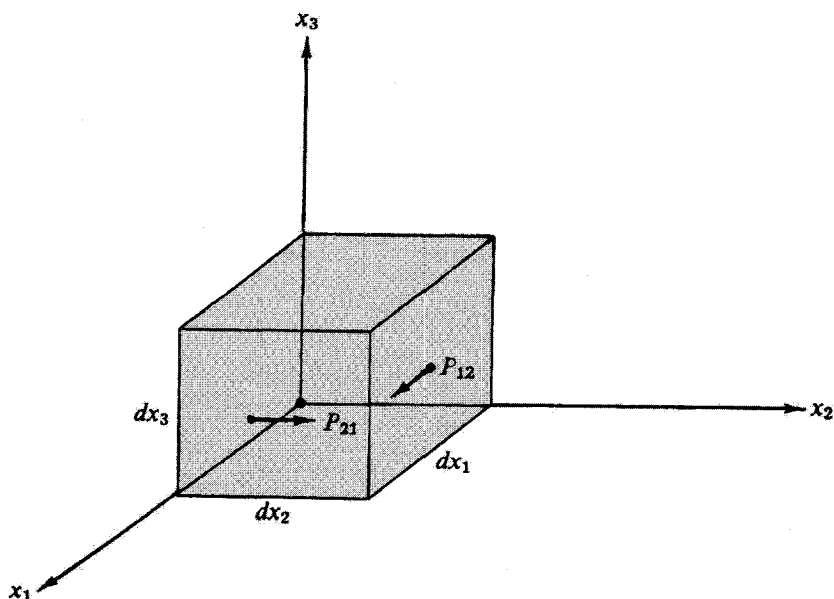
$$P_{21}(dx_2 dx_3) dx_1$$

و

$$P_{12}(dx_1 dx_3) dx_2 \tag{۷۷-۳}$$

که در غیاب چرخش حول محور x_3 باید با یکدیگر به حالت تعادل در آیند:

$$P_{21} dx_2 dx_3 dx_1 = P_{12} dx_1 dx_3 dx_2$$



شکل ۷-۳ تنشهای همگن-توازن گشتاورها.

در نتیجه،

$$P_{21} = P_{12} \quad (78-3)$$

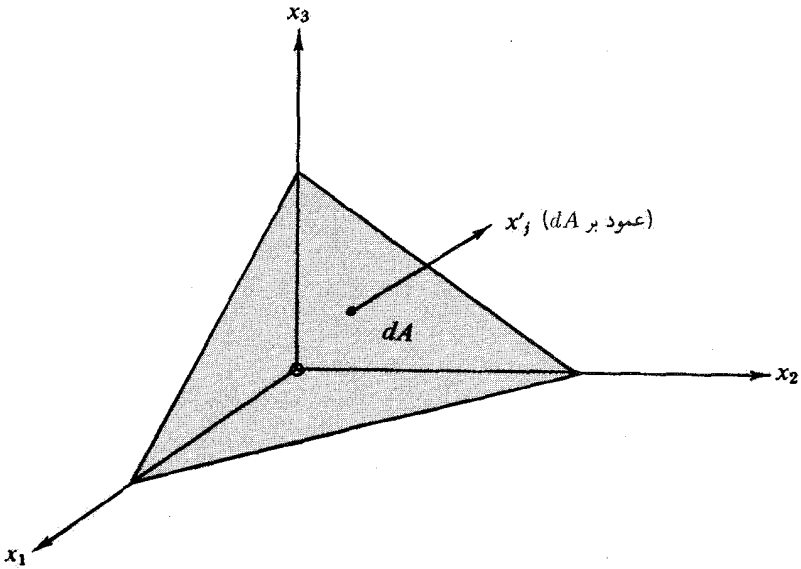
و در حالت کلی، با تکرار این استدلال برای فقدان چرخش حول x_2 و x_3 می‌رسیم به:

$$P_{ij} = P_{ji} \quad (79-3)$$

بنابراین آرایه تنشها (یا فشارها)، P_{ij} ، متقارن است. تساویهای رابطه ۷۹-۳ به بزرگیها مربوط می‌شود نه به جهتها؛ جهت را شاخص اول بیان می‌کند. اینک نشان می‌دهیم که این آرایه یک تانسور است. یک چهاروجهی بینهایت کوچک یا یک رخ مایل به مساحت dA و با بردار عمود در جهت x_j مانند شکل ۸-۳ در نظر می‌گیریم. نیروی وارد بر رخ مایل عبارت است از $P'_{ij} dA$. نیروهای وارد بر رخیهای $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ و $x_3 = 0$ به ترتیب عبارت‌اند از

$$P_{m1}(a_{j1} dA)$$

$$P_{m2}(a_{j2} dA)$$



شکل ۸-۳ چهاروجهی ديفرانسیلی-توازن نیروها.

و

$$P_{m\tau}(a_{j\tau} dA)$$

که در آن $a_{jk} dA$ مساحت رخ $x_k = 0$ است که از تصویر کردن مساحت dA روی صفحه $x_k = 0$ به دست می آید. a_{jk} کسینوس هادی معمولی، یعنی کسینوس زاویه بین محورهای x'_j و x_k است.

نیروی $P_{m\tau} a_{j\tau} dA$ در راستای x_m است. مؤلفه این نیرو در جهت x'_i عبارت است از $a_{im} a_{j\tau} P_{m\tau} dA$ (بدون قرارداد جمع). حال اگر روی m جمع بزنیم، عبارت حاصل، مجموع مؤلفه x'_i سه نیروی وارد بر رخ عقبی $x_1 = 0$ در جهت x'_i است. سرانجام، در حالت تعادل ایستا، نیروی کل در امتداد x'_i با جمع زدن رری هر سه رخ $x_k = 0$ به قرار زیر به دست می آید

$$a_{im} a_{jk} P_{mk} dA = P'_{ij} dA \quad (۸۰-۳)$$

با توجه به آنکه مساحت dA اختیاری است،

$$P'_{ij} = a_{im} a_{jk} P_{mk} \quad (۸۱-۳)$$

و با توجه به تعریف تانسور، ثابت می شود که P_{mk} یک تانسور است.

خاطر نشان می‌کنیم که اثبات تانسور بودن تانسور کرنش با یک استدلال اساساً ریاضی و مستقل از فیزیک صورت گرفت. در حالی که تانسور بودن P_{ij} به کمک استدلالهای فیزیکی (یعنی ترازمندی) که مستقیماً به تعریف تانسور انجامید، اثبات شد.

رابطه‌های تنش-کرنش، قانون هوک نخست یک جامد کشسان همسانگرد را در نظر می‌گیریم. پس از آن به حالت کلی ناهمسانگرد بازمی‌گردیم. میلهٔ یکنواختی را به موازات محور x_2 در نظر بگیرید.^۱ حال اثر تک‌تک تنشهای کششی کوچک P_{11} ، P_{22} و P_{33} را بر طول میله بررسی می‌کنیم. با اعمال تنش کششی کوچک P_{11} داریم:

$$E\eta_{11} = P_{11} \quad (۳-۸۲الف)$$

که در آن E مدول یانگ است. با اعمال تنش کششی کوچک P_{22} ، انتظار انقباضی در راستای محور x را داریم، از این رو می‌نویسیم

$$E\eta_{11} = -\sigma P_{22} \quad (۳-۸۲ب)$$

علامت منفی نشانگر انقباض است. σ نسبت بواسون است. برای P_{33} هم معادلهٔ مشابهی وجود دارد. اثر توأم P_{11} و P_{22} و P_{33} به صورت زیر است:

$$E\eta_{11} = P_{11} - \sigma P_{22} - \sigma P_{33} \quad (۳-۸۳)$$

تا اینجا توجه ما معطوف به تنشهای کوچک و کرنشهای کوچک بوده است، به‌گونه‌ای که رابطه‌ای خطی بین تنش و کرنش برقرار باشد. معادلهٔ ۳-۸۳ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$E\eta_{11} = (1 + \sigma)P_{11} - \sigma(P_{11} + P_{22} + P_{33}) \quad (۳-۸۴)$$

معادله‌های مشابهی نیز برای $E\eta_{22}$ و $E\eta_{33}$ به دست می‌آید.

قبلاً در همین بخش ثابت کردیم که η_{ij} و P_{ij} تانسوراند. مؤلفه‌های غیرقطری این تانسورها به دلیل تقارن صفرند. اینک محورها را می‌چرخانیم تا معادلهٔ ۳-۸۴ را به یک دستگاه مختصات

۱. با این گزینه خاص، با دستگاهی آغاز می‌کنیم که در فصل ۴ آن را دستگاه محورهای اصلی خواهیم نامید. در این دستگاه مختصات خاص، کرنشهای برشی صفرند.

دکارتی با سمتگیری اختیاری تعمیم دهیم. داریم

$$\begin{aligned}\eta'_{ij} &= a_{ik} a_{jk} \eta_{kk} \\ P'_{ij} &= a_{ik} a_{jk} P_{kk}\end{aligned}\quad (۸۵-۳)$$

معادله ۸۴-۳ را در $a_{i2} a_{j1}$ و معادله متناظر برای $E\eta_{22}$ را در $a_{i2} a_{j2}$ و معادله متناظر برای $E\eta_{22}$ را در $a_{i2} a_{j2}$ ضرب می‌کنیم، و سه معادله حاصل را با هم جمع می‌کنیم و می‌رسیم به:

$$E a_{ik} a_{jk} \eta_{kk} = (1 + \sigma) a_{ik} a_{jk} P_{kk} - \sigma (P_{nn}) a_{ik} a_{jk} \quad (۸۶-۳)$$

با استفاده از معادله‌های ۸۵-۳ و ۱۸-۳ خواهیم داشت:

$$E\eta'_{ij} = (1 + \sigma) P'_{ij} - \sigma (P'_{mm}) \delta_{ij} \quad (۸۷-۳)$$

که در آن

$$(P'_{mm}) = (P_{nn}) = P_{11} + P_{22} + P_{33} \quad (۸۸-۳)$$

تانسور ادغام شده (و در نتیجه ناوردای) P_{ij} است.

بیشتر اوقات بهتر است که تنشهای P_{ik} را برحسب کرنشها مشخص کنیم. برای این کار، در معادله ۸۷-۳ قرار می‌دهیم $j = i$ و معادله را ادغام می‌کنیم، می‌رسیم به:

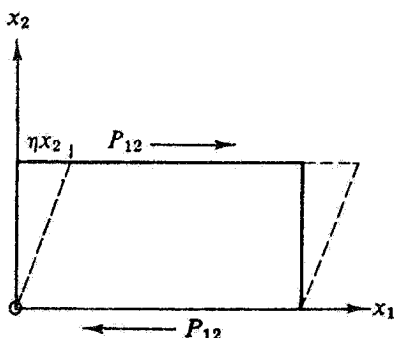
$$\begin{aligned}E\eta_{jj} &= (1 + \sigma) P_{jj} - 3\sigma P_{jj} \\ &= (1 - 2\sigma) P_{jj}\end{aligned}\quad (۸۹-۳)$$

که در آن نوشتن پریمها بی‌مورد بوده و آنها را حذف کرده‌ایم. معادله ۸۹-۳ را در معادله ۸۷-۳ می‌نشانیم، و می‌رسیم به:

$$(1 + \sigma) P_{ij} = E\eta_{ij} + \frac{E\sigma}{1 - 2\sigma} \eta_{mm} \delta_{ij} \quad (۹۰-۳)$$

یا

$$P_{ij} = 2\mu \eta_{ij} + \lambda \eta_{mm} \delta_{ij} \quad (۹۱-۳)$$



شکل ۹-۳ تنش برشی-برشی کرنش برشی.

که در آن به λ و μ ثابتهای لامه می‌گویند و عبارت‌اند از

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (92-3)$$

ثابت μ را می‌توان با سختی (صلبیت) یا مدول برشی یکی گرفت. متوازی‌السطوحی را در نظر بگیرید که در صفحه $(x_3 = 0)$ ثابت شده باشد و بر آن تنش مماسی P_{12} وارد آید. جابه‌جایی (δu) در شکل ۹-۳ برابر است با $(\eta x_2, 0, 0)$. تانسور کرنشی، بنابر معادله ۳-۷۲، از این قرار است که $\eta_{ij} = 0$ ، به استثنای $\eta_{12} = \eta_{21} = (1/2)\eta$. از معادله ۳-۹۱ داریم

$$P_{12} = 2\mu \cdot \frac{1}{2}\eta = \mu\eta \quad (93-3)$$

و این عبارت نشان می‌دهد که μ نسبت تنش برشی به کرنش برشی است. اگر کرنش تقارن کروی داشته باشد، مثلاً حالت فشار هیدروستاتیکی، داریم

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33}; \quad \eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{23} = 0 \quad (94-3)$$

در این صورت معادله ۳-۹۱ به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} P_{11} &= 3\lambda\eta_{11} + 2\mu\eta_{11} \\ &= 3k\eta_{11} \end{aligned} \quad (95-3)$$

که در آن

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (96-3)$$

با توجه به آنکه $3\eta_{11}$ تغییر نسبی مرتبه اول در حجم است، k را با مدول حجمی یکی می‌گیریم.

قانون تعمیم‌یافته هوک

رابطه خطی تنش-کرنش را به‌طور کلی با قانون تعمیم‌یافته هوک مشخص می‌کنیم، که هم جامدهای همسانگرد و هم جامدهای ناهمسانگرد را شامل می‌شود.

$$P_{ij} = c_{ijkl}\eta_{kl} \quad (97-3)$$

که در آن c_{ijkl} با استفاده از قاعده خارج قسمت، معادله ۳-۲۹، یک تانسور مرتبه چهارم است. از آنجا که تانسور تنش P_{ij} و تانسور کرنش η_{kl} هر دو متقارن‌اند، داریم

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk} \quad (98-3)$$

که تعداد مؤلفه‌های مستقل را از $81(3^4)$ به ۳۶ کاهش می‌دهد. علاوه بر این می‌توان نشان داد که^۱

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (99-3)$$

که این رابطه باز هم از تعداد مؤلفه‌های مستقل می‌کاهد و آن را به ۲۱ می‌رساند. اگر رابطه کلی تانسوری (معادله ۳-۹۷) را برای یک جسم همسانگرد بنویسیم، تانسور ثابت کشسانی c_{ijkl} باید ترکیب خطی کلی‌ترین تانسورهای همسانگرد مرتبه چهارم باشد. با استفاده از نتایج مسئله ۳-۴-۹، داریم

$$c_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + c[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}] \quad (100-3)$$

با نشان دادن در معادله ۳-۹۷، مانند قبل، می‌رسیم به:

$$P_{ij} = a\delta_{ij}\eta_{kk} + b(\eta_{ij} + \eta_{ji}) + c(\eta_{ij} - \eta_{ji}) \quad (101-3)$$

با توجه به آنکه η_{ji} متقارن است، این رابطه به قرار زیر ساده می‌شود

$$P_{ij} = a\eta_{kk}\delta_{ij} + 2b\eta_{ij}$$

۱. با مطالب کتاب زیر مقایسه کنید

که با معادله ۳-۹۱ سازگاری کامل دارد.

در مسائل به بررسی بیشتر خواص و کاربردهای تانسور مرتبه چهارم قانون هوک خواهیم پرداخت.

مبحث کشسانی که در اینجا ارائه شد، کلاً در چارچوب دکارتی بود تا محاسبات ریاضی در آن آسانتر باشد. ولی گاهی در دنیای فیزیکی واقعی، مسائل دستگاههای مختصات دیگری را می‌طلبند. مثلاً به‌طور کلی در بررسی نوسانهای آزاد زمین، رابطه کشسانی این بخش و معادلات حرکت را برحسب مختصات قطبی کروی بازنویسی می‌کنیم. پیامد آن مجموعه پیچیده‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم پاره‌ای همزمان است که تنها با انتگرال‌گیری عددی (بخش ۸-۸) قابل حل است. مقایسه بین چنین نتایج نظری-عددی و اندازه‌گیریها لرزه‌شناختی نوسانهای آزاد زمین کشسان، اطلاعاتی درباره ساختار داخلی زمین برای ما فراهم کرده است.

مسائل

۳-۶-۱ c_{ijkl} ، تانسور مرتبه چهار سه‌بعدی تنش-کرنش در رابطه‌های زیر صدق می‌کند

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl}$$

(الف) نشان دهید کاربرد این شرایط تقارنی، تعداد عناصر یا مؤلفه‌های مستقل c_{ijkl} را از ۸۱ به ۳۶ می‌رساند. (ب) علاوه بر اینها، اگر بدانیم که

$$c_{ijkl} = c_{klij}$$

نشان دهید تعداد مؤلفه‌های مستقل کاهش یافته و به ۲۱ می‌رسد.

۳-۶-۲ (الف) با چه استدلالی می‌توانید نشان دهید که σ نسبت پواسون نامنفی است؟ (ب) با فرض اینکه μ ، مدول برشی، و k مدول حجمی هر دو نامنفی باشند، حد بالایی برای مقدار نسبت پواسون را به دست آورید

جواب: (ب) $\sigma < 1/2$.

۳-۶-۳ انرژی پتانسیل کشسان (به‌ازای واحد حجم) جسم همسانگرد کشسانی را که اندکی کرنش یافته، محاسبه کنید.

جواب: $W/V = (1/2)\lambda(\eta_{ii})^2 + \mu\eta_{ij}\eta_{ij}$

۳-۶-۴ چگالی انرژی پتانسیل جامد کشسان دستخوش کرنش از رابطه زیر به دست می‌آید

$$P \cdot E = \frac{1}{V} c_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl}$$

اگر جامد مورد نظر دارای تقارن مکعبی باشد، (الف) نشان دهید که هر c_{ijkl} که در آن تعداد دفعاتی که یک شاخص (۱، ۲، ۳ یا x, y, z) پدیدار می‌شود فرد باشد، صفر است، یعنی، مثلاً

$$c_{1112} = 0$$

[راهنمایی: نسبت به مختصه‌ای که به تعداد فرد ظاهر شده است بازتاب دهید.]
(ب) نشان دهید که فقط سه مقدار متمایز برای ثابتهای کشسان ناصفر باقی می‌ماند

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333}$$

$$c_{1122} = c_{2211} = c_{1133}, \quad \text{و جز اینها}$$

$$c_{1212} = c_{1221} = c_{1313}, \quad \text{و جز اینها}$$

$$= c_{2121}, \quad \text{و جز اینها}$$

که جمعاً ۲۱ عنصر ناصفر می‌شود.

۳-۶-۵ اگر نیروی اتمی بین هر دو اتم در جسم کشسان در امتداد خطی باشد که دو اتم را به یکدیگر متصل می‌کند، و هر اتم یک مرکز تقارن باشد، آنگاه کوشی نشان می‌دهد که $c_{ijkl} = c_{kjit}$. با این فرض که: (الف) جسم کشسان همسانگرد باشد، و (ب) شرط تقارن کوشی برقرار باشد، نشان دهید که c_{ijkl} ، تانسور ثابت کشسانی تحت جمله جایگشتهای شاخصها کاملاً متقارن است.

۳-۶-۶ اگر جسم کشسانی همسانگرد باشد، c_{ijkl} ، ۲۱ مؤلفه غیرصفر خواهد داشت. این ۲۱ مؤلفه را برحسب E مدول یانگ و σ نسبت پواسون مشخص کنید.

جواب:

$$c_{1111} = E \frac{(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$$

$$c_{1122} = E \frac{\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} = \lambda$$

$$c_{1212} = E \frac{1}{2(1 + \sigma)} = \mu$$

۳-۶-۷ تانسور کرنش اصلی $\partial u_i / \partial x_k$ به زبان بخش ۳-۴ تحویل‌پذیر است. در قسمت اول بخش ۳-۶ یک تحویل جزئی، یعنی تفکیک ξ_{ik} پادمتقارن صورت گرفته است. با تکمیل تحویل

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta/3 & 0 & 0 \\ 0 & \eta/3 & 0 \\ 0 & 0 & \eta/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{11} - \eta/3 & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} - \eta/3 & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} - \eta/3 \end{pmatrix}$$

که در آن η همان η_{ii} ادغام شده (اسکالر) است. (الف) نشان دهید که تانسور $\eta\delta_{ij} = (\eta/3)v_{ij}$ توصیف‌کننده تغییر حجم است نه تغییر شکل. (ب) نشان دهید که تانسور دوم، یعنی $s_{ij} = \eta_{ij} - (\eta/3)\eta\delta_{ij}$ تغییر شکل (برش) را توصیف می‌کند و نه تغییر حجم تا مرتبه اول را.

یادآوری: نظریه کشسانی در این بخش یک نظریه مرتبه اول است. از جملات مرتبه دوم و بالاتر صرف‌نظر کنید.

۳-۸ الف) معادله موج را در محیط کشسان به دست آورید.

$$m\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \left(k + \frac{4}{3}\mu\right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

[راهنمایی: نیروی خالص وارد بر مکعب واحد (به جرم m) را در نظر بگیرید.]

(ب) اگر جابه‌جایی \mathbf{u} غیرچرخشی باشد، نشان دهید که امواج کشسان با سرعت $v = [(k + (4/3)\mu)/m]^{1/2}$ انتشار می‌یابند و طولی‌اند (امواج تخت یا امواج کروی در فاصله دور از منبع). (ج) اگر جابه‌جایی \mathbf{u} سیمولوله‌ای باشد، نشان دهید که امواج با سرعت $v = (\mu/m)^{1/2}$ منتشر می‌شوند و عرضی‌اند (امواج تخت یا امواج کروی در فاصله دور از منبع).

۷-۳ هموردایی لورنتسی معادلات ماکسول

اگر قرار باشد که یک قانون فیزیکی در همهٔ سم‌گیریهای مختصات خاص (حقیقی) صادق (یعنی تحت چرخشهای ناوردا) باشد، باید جمله‌های معادلهٔ مربوط، تحت چرخشها هموردا باشند (بخشهای ۱-۲ و ۱-۳). این بدان معناست که ما قانونهای فیزیکی را به صورت ریاضی اسکالر = اسکالر، بردار = بردار، تانسور مرتبهٔ دو = تانسور مرتبهٔ دو و مانند اینها، می‌نویسیم. به طور مشابه، اگر قرار باشد یک قانون در تمام دستگاههای لخت برقرار باشد، باید جمله‌های آن تحت تبدیلهای لورنتس هموردا باشند.

با استفاده از فضای مینکوفسکی $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$ یک فضای دکارتی چهاربعدی داریم که در آن متریک برابر است با $g_{ij} = \delta_{ij}$ (بخش ۱-۲). تبدیل لورنتس

در این فضای مختلط چهاربعدی به شکل یک "چرخش" است.^۱
در اینجا معادلات ماکسول

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۱۰۲-۳ \text{ الف})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \quad (۱۰۲-۳ \text{ ب})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۱۰۲-۳ \text{ ج})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۱۰۲-۳ \text{ د})$$

و رابطه‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (۱۰۳-۳)$$

نمادها همان معنای معمول خود را دارند که قبلاً با آنها آشنا شده‌ایم. برای سادگی معادلات را در خلأ می‌گیریم ($\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$).

فرض می‌کنیم که معادله‌های ماکسول در تمام دستگاههای لخت برقرار باشند؛ یعنی معادلات ماکسول با نسبیّت خاص سازگارند. (در واقع، لورنتس و پوانکاره پیش از آنکه اینشتین نظریه نسبیّت خاص خود را عرضه کند، هموردایی معادلات ماکسول تحت تبدیلهای لورنتس را نشان داده بودند.) هدف بی‌واسطه ما بازنویسی معادلات ماکسول به صورت معادلات تانسوری در فضای مینکوفسکی است. با این کار، هموردایی لورنتسی تصریح می‌شود. می‌توانیم برحسب پتانسیل برداری مغناطیسی و پتانسیل اسکالر بنویسیم^۲

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۱۰۴-۳)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

تاو \mathbf{A} در معادله ۱۰۴-۳ مشخص می‌شود، ولی دیورژانس آن هنوز تعریف نشده است (با بخشهای ۱-۱۳ و ۱-۱۵ مقایسه کنید). می‌توانیم محدودیت زیر را که برای کاربردهای بعدی نیز

۱. در بخش ۴-۱۳، تبدیل لورنتس در فضای مینکوفسکی به کمک نظریه گروهها استخراج می‌شود. فصل ۶ کتاب زیر را نیز نگاه کنید

Goldstein H, *Classical Mechanics*, Cambridge, Mass, Addison-Wesley (1951).

معادله تانسوری مربوط به یک فوتون، $\sum x_\lambda^2 = 0$ ، مستقل از چارچوب مرجع به تبدیلهای لورنتس می‌انجامد.

۲. با بخش ۱-۱۳، به خصوص مسئله ۱-۱۳-۱۰، مقایسه کنید.

مناسب است، بر پتانسیل برداری \mathbf{A} وضع کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (105-3)$$

این رابطه لورنتس است. این رابطه، تفکیک معادلات دیفرانسیل مربوط به \mathbf{A} و φ را که بعداً به دست می آوریم، عملی می کند. پتانسیلهای \mathbf{A} و φ باز هم کاملاً تعیین نشده اند. هنوز آزادی عملی باقی مانده است که در مسئله ۳-۷-۴ مطرح می شود.

اکنون معادلات ماکسول را برحسب پتانسیلهای \mathbf{A} و φ می نویسیم. از معادله ۳-۱۰۲ ج برحسب $\nabla \cdot \mathbf{D}$ و معادله ۳-۱۰۴، داریم

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (106-3)$$

و از معادله ۳-۱۰۲ ب، برحسب $\nabla \times \mathbf{H}$ و معادله ۳-۱۰۴ و معادله ۱-۸۰ فصل یک، به دست می آوریم:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \{ \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \} = \frac{\rho \mathbf{v}}{\epsilon_0} \quad (107-3)$$

با استفاده از معادله ۳-۱۰۵، رابطه لورنتس و رابطه $1/c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ ، می رسمیم به

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A} = -\mu_0 \rho \mathbf{v} \quad (108-3)$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

عملگر دیفرانسیلی

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

در فضای مینکوفسکی به صورت زیر در می آید

$$\sum_{\lambda=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}$$

در اینجا، همانگونه که در نظریهٔ نسبیت متداول است، برای نمایش مجموع‌یابی از ۱ تا ۴ از شاخصهای یونانی بهره خواهیم برد. مجموع‌یابی زیر لاپلاسی چهاربعدی است:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda}^2}$$

که معمولاً دالامبری خوانده و با نماد \square^2 نمایش داده می‌شود. به آسانی می‌توان ثابت کرد که این عملگر یک کمیت اسکالر است (مسئله ۳-۲-۳).

کمیت‌های زیر را با رعایت سادگی تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \frac{A_x}{\mu_0 c} = c\epsilon_0 A_x & A_3 &\equiv \frac{A_z}{\mu_0 c} = c\epsilon_0 A_z \\ A_2 &\equiv \frac{A_y}{\mu_0 c} = c\epsilon_0 A_y & A_4 &\equiv i\epsilon_0 \varphi \end{aligned} \quad (109-3)$$

علاوه بر این، اگر قرار دهیم

$$\frac{\rho v_x}{c} \equiv i_1, \quad \frac{\rho v_y}{c} \equiv i_2, \quad \frac{\rho v_z}{c} \equiv i_3, \quad i\rho \equiv i_4 \quad (110-3)$$

می‌توان معادلهٔ ۱۰۸-۳ را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda}^2} A_{\mu} = -i_{\mu} \quad (111-3)$$

معادلهٔ ۱۱۱-۳ ظاهراً شبیه یک معادلهٔ تانسوری است، ولی این شباهت برای اثبات کافی نیست. برای آنکه تانسوری بودن این معادله را ثابت کنیم، نخست خواص تبدیلی جریان تعمیم‌یافتهٔ i_{μ} را بررسی می‌کنیم.

با توجه به آنکه عنصر بار الکتریکی de کمیتی ناورد است، داریم

$$de = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \quad \text{ناوردا} \quad (112-3)$$

در بخش ۳-۴ دیدیم که عنصر حجم چهاربعدی $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ نیز ناورد است. با مقایسهٔ این دو عبارت، یعنی معادله‌های ۵۳-۳ و ۱۱۲-۳، پی می‌بریم که چگالی بار، ρ ، به همان شکلی تبدیل می‌شود که dx_4 ، مؤلفهٔ چهارم بردار چهاربعدی dx_{λ} تبدیل می‌شود. قرار دادیم $i\rho = i_4$

در نتیجه ثابت می‌شود که i_2 مؤلفه چهارم یک بردار چهاربعدی است. اجزای دیگر $3-110$ را می‌توانیم به صورت زیر بسط دهیم

$$i_1 = \frac{\rho v_x}{c} = \frac{\rho}{c} \frac{dx_1}{dt} = \frac{i\rho}{ic} \frac{dx_1}{dt} \quad (113-3)$$

$$= i_2 \frac{dx_1}{dx_2}$$

هم اکنون نشان دادیم که i_2 مانند dx_2 تبدیل می‌شود، در نتیجه از معادله $3-113$ بر می‌آید که i_1 مانند dx_1 تبدیل می‌شود. برای i_2 و i_3 نیز می‌توانیم نتایج مشابهی به دست آوریم و به این ترتیب ثابت می‌شود که i_λ مانند dx_λ تبدیل می‌شود، یعنی i_λ بردار برداری چهاربعدی در فضای مینکوفسکی، است.

فرض می‌شود معادله $3-111$ ، که مستقیماً از معادلات ماکسول، معادله $3-102$ به دست می‌آید، در همه دستگاههای دکارتی (یعنی همه چارچوبهای لورنتس) برقرار باشد. در نتیجه، A_μ نیز با استفاده از قاعده خارج قسمت در بخش $3-3$ یک بردار است و معادله $3-111$ یک معادله تانسوری موجه است.

اکنون به عقب برمی‌گردیم؛ معادله $3-104$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم (همراه با جایگشتهای دوری)

$$i\varepsilon_0 E_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\frac{1}{\mu_0 c} B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3) \quad (114-3)$$

با استفاده از بردار A_λ ، تانسور مرتبه دوم پادمتقارن زیر را تعریف می‌کنیم

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} \equiv f_{\mu\lambda} = -f_{\lambda\mu}$$

مؤلفه‌های این تانسور عبارت‌اند از

$$f_{\mu\lambda} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (115-3)$$

توجه کنید که \mathbf{E} و \mathbf{B} در فضای چهاربعدی مینکوفسکی دیگر بردار نیستند، بلکه همراه یکدیگر تانسور مرتبهٔ دومی را تشکیل می‌دهند. دو معادلهٔ ناهمگن ماکسول (یعنی معادله‌های ۱۰۲-۳ ب و ۱۰۲-۳ ج) را می‌توانیم به کمک این تانسور با هم ترکیب کنیم و به صورت یک معادلهٔ تانسوری بنویسیم

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = i_\lambda \quad (116-3)$$

سمت چپ معادلهٔ ۱۱۶-۳ دیورژانس چهاربعدی یک تانسور است که در نتیجه به صورت یک بردار درمی‌آید. روشن است که این بردار معادل است با ادغام تانسور رتبهٔ سه $\partial f_{\lambda\mu}/\partial x_\nu$ (با مسئله‌های ۱-۲-۳ و ۲-۲-۳ مقایسه کنید). دو معادلهٔ همگن ماکسول ۱۰۲-۳ الف برحسب $\nabla \times \mathbf{E}$ و ۱۰۲-۳ د برحسب $\nabla \cdot \mathbf{B}$ را می‌توان به صورت معادلهٔ تانسوری زیر نوشت

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} = 0 \quad (117-3)$$

برای معادلهٔ ۱۰۲-۳ د و سه معادله به صورت

$$\frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_4} = 0 \quad (118-3)$$

برای معادلهٔ ۱۰۲-۳ الف. (معادلهٔ دوم از جایگشت شاخصهای ۱۲۴ و معادلهٔ سوم از جایگشت شاخصهای ۱۳۴ به دست می‌آید.) از آنجا که

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \equiv t_{\lambda\mu\nu}$$

یک تانسور (مرتبهٔ سه) است، معادله‌های ۱۰۲-۳ الف و ۱۰۲-۳ د صورت تانسوری زیر را پیدا می‌کنند

$$t_{\lambda\mu\nu} + t_{\nu\lambda\mu} + t_{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (119-3)$$

خواننده با توجه به معادله‌های ۱۱۷-۳ و ۱۱۸-۳ پی می‌برد که شاخصهای λ ، μ و ν با هم فرق دارند. در واقع اگر دو تا از شاخصها با هم برابر باشند، معادلهٔ ۱۱۹-۳ خودبه‌خود به صورت $0 = 0$ درمی‌آید. در مسئلهٔ ۱۴-۷-۳ با صورت دیگری از معادلهٔ ۱۱۹-۳ سروکار پیدا خواهیم کرد.

تبدیل لورنتس E و B

هدف اصلی ما از نوشتن معادلات ماکسول به صورت تانسوری با ساختن معادله‌های تانسوری $f_{\mu\nu}$ و تانسور چاربردارها و تانسور می‌پردازیم

”کسینوسهای هادی“ برای تبدیل لورنتس متناظر با حرکت با سرعت v در راستای محور z (یا x_3) عبارت‌اند از^۱

$$a_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad (۱۲۰-۳)$$

که در آن

$$\beta = \frac{v}{c}$$

و

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (۱۲۱-۳)$$

با استفاده از خواص تانسوری، می‌توانیم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در دستگاه متحرک برحسب مقدار این میدانها در چارچوب مرجع اصلی بنویسیم. از معادلات ۱۳-۳ و ۱۱۵-۳ و ۱۲۰-۳ می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (E_x - vB_y) \\ E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (E_y + vB_x) \\ E'_z &= E_z \end{aligned} \quad (۱۲۲-۳)$$

۱. نظریه‌های جدید الکترودینامیک کوانتومی و ذرات بنیادی را بیشتر به این صورت ”آشکارا هموردا“ می‌نویسند، تا سازگاری با نسبیت خاص تضمین شود. متقابلاً پافشاری بر نوشتن چنین صورتهای تانسوری راهنمای مفیدی برای پرداختن این نظریه‌ها بوده است.

۲. در بخش ۴-۱۳ تبدیل لورنتس را به کمک نظریه گروه استخراج می‌کنیم. فصل ۶ کتاب گلداشتاین را نیز ببینید.

$$B'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_x + \frac{v}{c^2} E_y \right)$$

$$B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_y - \frac{v}{c^2} E_x \right) \quad (۱۲۳-۳)$$

$$B'_z = B_z$$

باید انتظار جفت شدن \mathbf{E} و \mathbf{B} را داشته باشیم. مثلاً، فرض کنید میدان الکتریکی در دستگاه غیرپایه دار صفر باشد

$$E_x = E_y = E_z = 0$$

روشن است که هیچ نیرویی بر ذره باردار ساکن وارد نخواهد آمد. اگر این ذره با سرعت کم v در راستای محور z حرکت کند، ناظری که همراه با ذره حرکت می‌کند، میدانی (که نیرویی بر این ذره باردار وارد می‌آورد) اندازه می‌گیرد که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$E'_x = -vB_y$$

$$E'_y = vB_x$$

که در آن \mathbf{B} میدان القای مغناطیسی در دستگاه غیرپایه دار است. این معادلات را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

یا

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۱۲۴-۳)$$

این معادله معمولاً، برای تعریف، عملی القای مغناطیسی \mathbf{B} به کار می‌رود.

ناوردهای الکترومغناطیسی

سرانجام با استفاده از خواص تانسوری (یا برداری) می‌توانیم تعداد زیادی از کمیت‌های ناوردا بسازیم.

۱. اگر سرعت چندان هم کوچک نباشد (تا بتوان از v^2/c^2 چشم پوشید) به تبدیل نسبی نیرو نیاز خواهیم داشت.

مهمتر از همه، ضرب اسکالر دو بردار چهاربعدی یا دو چاربردار A_λ و i_λ است. داریم:

$$\begin{aligned} A_\lambda i_\lambda &= c\varepsilon_0 A_x \frac{\rho v_x}{c} + c\varepsilon_0 A_y \frac{\rho v_y}{c} \\ &\quad + c\varepsilon_0 A_z \frac{\rho v_z}{c} + i\varepsilon_0 \varphi i \rho \\ &= \varepsilon_0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \rho \varphi) \quad \text{نوردا} \end{aligned} \quad (۱۲۵-۳)$$

که در آن \mathbf{A} پتانسیل برداری مغناطیسی معمولی و \mathbf{J} چگالی جریان معمولی است. جمله آخر، یعنی $\rho \varphi$ جفت‌شدگی الکتریکی معمولی با بعد انرژی به‌ازای واحد حجم است. در نتیجه، این کمیت نوردای اسکالر چگالی انرژی است. حاصلضرب $\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ برهم‌کنش دینامیکی میدان و جریان را می‌دهد. نوردای $A_\lambda i_\lambda$ در لاگرانژی الکترومغناطیسی در مسائل ۱۷-۳-۶ و ۱۷-۵-۱ ظاهر می‌شود.

در مسائل ۳-۷-۹ و ۳-۷-۱۱ نورداهای الکترومغناطیسی دیگری را خواهیم دید.

مسائل

۳-۷-۱ الف) نشان دهید که هر چاربردار فضای مینکوفسکی را می‌توان به یک بردار فضای سه‌بعدی معمولی و یک کمیت اسکالر فضای سه‌بعدی معمولی تجزیه کرد. مثلاً، (\mathbf{r}, ict) ، $(\rho v/c, i\rho)$ ، $(\mathbf{k}, i\omega/c)$ ، $(\mathbf{p}, iE/c)$ ، $(c\varepsilon_0 \mathbf{A}, i\varepsilon_0 \varphi)$.

[راهنمایی: یک چرخش مختصات فضای سه‌بعدی در زمان ثابت را در نظر بگیرید.]
 ب) نشان دهید که عکس بند الف) صحیح نیست — هر سه — بردار به‌اضافه یک کمیت اسکالر یک چاربردار مینکوفسکی نمی‌سازد.
 ۳-۷-۲ الف) نشان دهید که

$$\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

ب) نشان دهید که چگونه می‌توانیم معادله تانسوری بالا را به‌صورت بیان پیوستگی بار و جریان در فضای سه‌بعدی معمولی و زمان تفسیر کنیم. (ج) اگر بدانیم که این معادله در تمام چارچوبهای مرجع لورنتسی برقرار است، چرا نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که i_μ یک بردار است؟
 ۳-۷-۳ معادله ۳-۵-۱، شرط لورنتس را به‌صورت یک معادله تانسوری در فضای مینکوفسکی بنویسید.

۳-۷-۴ یک تبدیل پیمانه‌ای شامل تغییراتی در پتانسیل اسکالر φ_1 و پتانسیل برداری \mathbf{A}_1 به شرح

زیر است

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \nabla \chi$$

تابع جدید χ باید در معادله موج همگن زیر صدق کند

$$\nabla^2 \chi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

نشان دهید که: (الف) رابطه لورنتس تغییری نمی‌کند. (ب) پتانسیل‌های جدید در همان معادله موجهای غیرهمگنی صدق می‌کنند که پتانسیل‌های قبلی در آنها صدق می‌کردند. (ج) میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} بدون تغییر می‌مانند. ناوردایی نظریه الکترومغناطیسی تحت این تبدیل را ناوردایی پیمانه‌ای می‌خوانند.

۳-۷-۵ ذره باردار با بار q و جرم m از معادله هموردای لورنتس

$$dp_\mu/d\tau = (q/\epsilon_0 m_0 c) f_{\mu\nu} p_\nu$$

پیروی می‌کند که در آن بردار تکانه چهاربعدی $(p_1, p_2, p_3, iE/c)$ و زمان متعارف و $d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ یک کمیت اسکالر لورنتسی است. نشان دهید که رابطه‌های فضا-زمان صریح عبارت‌اند از

$$d\mathbf{p}/dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$dE/dt = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

۳-۷-۶ با استفاده از عناصر ماتریسی تبدیل لورنتس (معادله ۳-۱۲۰) قانون جمع سرعت‌های اینشتین را به دست آورید

$$u' = \frac{u - v}{1 - (uv/c^2)} \quad \text{یا} \quad u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)}$$

که در آن $u' = ic dx'_1/dx'_4$ و $u = ic dx_1/dx_4$

[راهنمایی: اگر $L_{12}(v)$ ماتریسی باشد که دستگاه ۱ را به دستگاه ۲ و $L_{23}(u')$ ماتریسی باشد که دستگاه ۲ را به دستگاه ۳ تبدیل می‌کند، و $L_{13}(u)$ ماتریسی باشد که دستگاه ۱ را

مستقیماً به دستگاه ۳ می‌برد، آنگاه $L_{12}(u) = L_{22}(u')L_{12}(v)$. قانون جمع سرعت‌های اینشتین را از این رابطه ماتریسی به دست آورید.
 ۷-۷-۳ برای تانسور مرتبه دوم چهار بعدی \mathbf{B} می‌توانیم تانسور دوگان \mathbf{B}^* را با مؤلفه‌هایی به صورت زیر تعریف کنیم

$$B_{ij}^* = \frac{1}{2!} \varepsilon_{ijkl} B_{kl}$$

نشان دهید که \mathbf{B}^* : (الف) تحت چرخش، مانند یک تانسور مرتبه دوم تبدیل می‌شود. (ب) تحت وارونی، مانند یک شبه‌تانسور تبدیل می‌شود.

یادآوری: ستاره در اینجا به معنای همیوخ مختلط نیست.

۸-۷-۳ برای تانسور الکترومغناطیسی \mathbf{f} در معادله ۱۱۵-۳، \mathbf{f}^* را به دست آورید

جواب:

$$\mathbf{f}^* = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}$$

دوگان گرفتن از تانسور \mathbf{f} متناظر است با

$$c\mathbf{B} \rightarrow -i\mathbf{E}$$

$$-i\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}$$

این تبدیل که گاهی "تبدیل دوگانی" خوانده می‌شود، معادله‌های ماکسول در خلأ ($\rho = 0$) را ناوردانگه می‌دارد.

۹-۷-۳ روشن است که $\varepsilon_{\mu\nu\sigma} f_{\mu\lambda} f_{\nu\sigma}$ به عنوان ادغام چهارگانه یک شبه‌تانسور مرتبه چهارم و دو تانسور مرتبه دوم یک شبه‌اسکالر است. این شبه‌اسکالر را محاسبه کنید.

۱۰-۷-۳ اگر در یک چارچوب لورنتسی خاص، میدان الکترومغناطیسی الکتریکی محض (یا مغناطیسی محض) باشد، نشان دهید که \mathbf{E} و \mathbf{B} در سایر دستگاه‌های مرجع لورنتسی متعامدند.

(ب) برعکس، اگر \mathbf{E} و \mathbf{B} در یک چارچوب لورنتسی خاص متعامد باشند، یک دستگاه مرجع لورنتسی وجود دارد که در آن \mathbf{E} (یا \mathbf{B}) صفر است. این دستگاه مرجع را بیابید.

۱۱-۷-۳ نشان دهید که $E^2 - c^2 B^2$ یک ناوردای اسکالر است.

۱۲-۷-۳ از آنجا که (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) یک بردار است، $dx_\mu dx_\mu$ یک کمیت اسکالر

است. این کمیت اسکالر را برای یک ذره متحرک در دو دستگاه مختصات مختلف محاسبه کنید: (الف) دستگاه مختصاتی که نسبت به شما ثابت باشد (دستگاه آزمایشگاه)، و (ب) دستگاه مختصاتی که همراه با ذره متحرک (با سرعت v نسبت به شما) در حرکت باشد. نمو زمان را در دستگاه ذره با $d\tau$ و در دستگاه آزمایشگاه با dt بنمایانید، و نشان دهید که

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$d\tau$ یا τ زمان صحیح ذره، یک کمیت ناوردای لورنتسی است. ۳-۷-۱۳ عبارت اسکالر

$$-\frac{1}{4\varepsilon_0}f_{\mu\nu}f_{\mu\nu} + \frac{1}{\varepsilon_0}i_{\mu}A_{\mu}$$

را برحسب میدانها و پتانسیلها بسط دهید. عبارت حاصل، چگالی لاگرانژی است که در مسئله ۱۷-۱۵ به کار می رود.

۳-۷-۱۴ نشان دهید که معادله ۳-۱۱۹ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}} = 0$$

۳-۸ تانسورهای غیردکارتی، مشتق گیری هموردا

در بخش ۳-۱ متمایز بودن تبدیلیهای پادوردا و هموردا اثبات شد. پس از آن برای رعایت سادگی توجه خود را فقط به مختصات دکارتی (که در آن این تمایز از بین می رود) معطوف کردیم. اینک در این دو بخش پایانی این فصل، به مختصات غیردکارتی باز می گردیم و وابستگیهای هموردا و پادوردا را از یکدیگر تمیز می دهیم. در اینجا نیز مانند بخش ۳-۱، شاخصهای نشانگر وابستگیهای پادوردا را با شاخصهای بالا و شاخصهای نشانگر وابستگیهای هموردا را توسط شاخصهای زیر نمایش خواهیم داد. از تانسور متریک بخش ۲-۱ برای مربوط کردن شاخصهای پادوردا و هموردا به یکدیگر استفاده می کنیم.

تأکید این بخش بر مشتق گیری است که سرانجام به تعریف مشتق هموردا می رسد. در بخش ۳-۲ دیدیم که مشتق یک بردار در مختصات دکارتی یک تانسور مرتبه دوم داد. مشتق هموردا یک بردار در مختصات غیردکارتی، یک تانسور مرتبه دوم می دهد.

تانسور متریک، بالا بردن و پایین بردن شاخصها در آغاز بردارهای پایه ϵ_i را چنان تعریف می‌کنیم که جابه‌جایی بینهایت کوچک dr از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$dr = \epsilon_1 dq^1 + \epsilon_2 dq^2 + \epsilon_3 dq^3 \quad (۱۲۶-۳)$$

برای راحتی $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ را چنان می‌گیریم که مجموعه راستگردی را تشکیل دهند. ضرورتی ندارد این بردارها متعامد باشند. مختصات مایل بخش ۴-۴ نمونه مطلوبی از دستگاههای نامتعامد است. تحدید به فضای سه‌بعدی نیز فقط برای میحث ضرب برداری و تاو مورد نیاز است. در سایر موارد، ϵ_i ها می‌توانند در فضای N بعدی تعریف شده باشند که شامل فضازمان چهاربعدی نسبیت‌عام و خاص نیز می‌شود. بردارهای پایه ϵ_i را می‌توان به مثابه مسئله ۲-۲-۳ با رابطه زیر مشخص کرد

$$\epsilon_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad (۱۲۷-۳)$$

ولی به هر حال توجه داشته باشید که ضرورتی ندارد بزرگی ϵ_i ها واحد باشد. بردارهای یکه با استفاده از مسئله ۲-۲-۳ عبارت‌اند از

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad (\text{بدون مجموع‌یابی})$$

به‌این ترتیب، داریم

$$\epsilon_i = h_i \mathbf{e}_i \quad (\text{بدون مجموع‌یابی}) \quad (۱۲۸-۳)$$

ϵ_i ها توسط عاملهای مقیاس h_i در بخش ۲-۲ به بردارهای یکه \mathbf{e}_i مربوط می‌شوند. \mathbf{e}_i ها بدون بعدند، ϵ_i ها ابعاد h_i ها را دارند. به عنوان یک مثال خاص، در مختصات قطبی کروی داریم

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= 1 \mathbf{e}_r \\ \epsilon_\theta &= r \mathbf{e}_\theta \\ \epsilon_\varphi &= r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (۱۲۹-۳)$$

مجذور جابه‌جایی دیفرانسیلی را مانند بخش ۱-۲ تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= dr \cdot dr = (\epsilon_i dq^i)^2 \\ &= \epsilon_i \cdot \epsilon_j dq^i dq^j \end{aligned} \quad (۱۳۰-۳)$$

با مقایسه این رابطه با $(ds)^2$ در بخش ۱-۲، یعنی معادله ۲-۴ پی می‌بریم که $\epsilon_i \cdot \epsilon_j$ با تانسور همورداری متریک متحد است:

$$\epsilon_i \cdot \epsilon_j = g_{ij} \quad (۱۳۱-۳)$$

روشن است که g_{ij} متقارن است. ماهیت تانسوری g_{ij} از قاعده خارج قسمت نتیجه می‌شود (مسئله ۳-۱-۳). از رابطه

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (۱۳۲-۳)$$

برای تعریف تانسور پادوردای متناظر، g^{ik} ، استفاده می‌کنیم. g^{ik} پادوردا به عنوان وارون g_{kj} هموردا مطرح می‌شود.^۱ از این g^{ik} پادوردا به نحوی که بعداً نشان خواهیم داد، برای بالا بردن شاخصها و تبدیل یک شاخص هموردا به یک شاخص پادوردا استفاده می‌کنیم. به همین ترتیب، از g_{kj} هموردا برای پایین بردن شاخصها استفاده می‌کنیم. انتخاب g^{ik} و g_{kj} برای عمل بالا بردن-پایین بردن اختیاری است. هر تانسور رتبه دویی (و وارون آن) همین کار را می‌کند. به خصوص داریم

$$g^{ij} \epsilon_j = \epsilon^i \quad \begin{array}{l} \text{که بردارهای پایه هموردا و پادوردا} \\ \text{را به هم مربوط می‌کند} \end{array} \quad (۱۳۳-۳)$$

$$g^{ij} F_j = F^i \quad \begin{array}{l} \text{که مؤلفه‌های بردارهای هموردا} \\ \text{و پادوردا را به هم مربوط می‌کند} \end{array}$$

علاوه بر این، به عنوان رابطه‌های متناظر برای پایین آوردن شاخصها داریم

$$\begin{aligned} g_{ij} \epsilon^j &= \epsilon_i \\ g_{ij} F^j &= F_i \end{aligned} \quad (۱۳۴-۳)$$

به‌عنوان مثالی از این تبدیلهای، با صورت پادوردای بردار آغاز می‌کنیم

$$\mathbf{F} = F^i \epsilon_i \quad (۱۳۵-۳)$$

از معادله‌های ۱۳۳-۳ و ۱۳۴-۳ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_j g^{ji} g_{ik} \epsilon^k \\ &= F_j \epsilon^j \end{aligned} \quad (۱۳۶-۳)$$

۱. اگر تانسور g_{kj} را به صورت یک ماتریس بنویسیم، تانسور g^{ik} ماتریس وارون آن خواهد بود.

که مساوی آخری از معادله ۳-۱۳۲ حاصل می‌شود. معادله ۳-۱۳۵ نمایش پادوردای F است. معادله ۳-۱۳۶ نمایش هموردای متناظر همان بردار F را می‌دهد. نمونه‌هایی از چنین نمایشهایی در بخش ۴-۴، تحت عنوان "مختصات مایل" ارائه می‌شود.

بار دیگر یادآوری کنیم که بزرگی ϵ_i و ϵ^j واحد نیستند. این موضوع را می‌توان در معادله ۳-۱۲۹ و در تانسور متریک برای مختصات قطبی کروی و وارون آن، g^{ij} ، مشاهده کرد:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

مشتقها، نمادهای کریستوفل

دیفرانسیل یک کمیت اسکالر را محاسبه می‌کنیم

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} dq^i \quad (۳-۱۳۷)$$

با استفاده از قاعده خارج قسمت و با توجه به اینکه dq^i ها مؤلفه‌های یک بردار پادوردا هستند، پی می‌بریم که مشتقهای پاره‌ای $\partial \psi / \partial q^i$ باید یک بردار هموردا تشکیل دهند. گرادیان یک کمیت اسکالر عبارت است از

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \epsilon^i \quad (۳-۱۳۸)$$

خواننده باید متوجه باشد که $\partial \psi / \partial q^i$ مؤلفه‌های گرادیان بخش ۲-۲ نیستند، زیرا، به‌ازای مقادیر ϵ^i در بخش ۲-۲، $\epsilon^i \neq e_i$.

اکنون مشتق یک بردار را در نظر می‌گیریم. با وضعیت به‌مراتب پیچیده‌تری روبه‌رو می‌شویم، زیرا بردارهای پایه ϵ_i به‌طور کلی ثابت نیستند. به‌یاد داشته باشید که دیگر توجه خود را به مختصات دکارتی و i و j و k خوب و مناسب محدود نکرده‌ایم! با مشتق‌گیری مستقیم، می‌رسیم به:

$$\frac{\partial V}{\partial q^j} = \frac{\partial V^i}{\partial q^j} \epsilon_i + V^i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^j} \quad (۳-۱۳۹)$$

$\partial \epsilon_i / \partial q^j$ ترکیب خطی خاصی از ϵ_k خواهد بود، که در آن ضرایب به شاخصهای i و j مربوط

به مشتق پاره‌ای و شاخص k ، مربوط به بردار پایه بستگی دارد. می‌نویسیم:

$$\frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \epsilon_k \quad (۳-۱۴۰ الف)$$

در ϵ^m ضرب می‌کنیم و می‌رسیم به:

$$\Gamma_{ij}^m = \epsilon^m \cdot \frac{\partial \epsilon^i}{\partial q^j} \quad (۳-۱۴۰ ب)$$

Γ_{ij}^k نماد کریستوفل (نوع دوم) است. این نماد را "ضریب اتصال" نیز می‌نامند. این Γ_{ij}^k ها تانسورهای مرتبه سوم نیستند و $\partial V^i / \partial q^j$ های معادله ۳-۱۳۹ تانسورهای مرتبه دوم نیستند. معادله ۳-۱۴۰ را باید با نتیجه‌ای که در مسئله ۲-۲-۳ به آن اشاره شده است، مقایسه کرد (با به یاد داشتن اینکه به طور کلی، $\epsilon_i \neq e_i$). در مختصات دکارتی برای همه مقادیر شاخصهای i ، j و k داریم: $\Gamma_{ij}^k = 0$. نماد سه این شاخصه کریستوفل را می‌توان با کمک شگردهای فصل ۲ محاسبه کرد. این محاسبه موضوع مسئله ۳-۸-۷ را تشکیل می‌دهد. معادله ۳-۱۵۳ در انتهای این بخش راه حل ساده‌تری فراهم می‌کند. با استفاده از معادله ۳-۱۲۷، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^j} &= \frac{\partial^r \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial \epsilon_j}{\partial q^i} \\ &= \Gamma_{ji}^k \epsilon_k \end{aligned} \quad (۳-۱۴۱)$$

بنابراین، نمادهای کریستوفل نسبت به دو شاخص پایین خود متقارن‌اند:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (۳-۱۴۲)$$

مشتق هموردا

معادله ۳-۱۳۹ را می‌توان به کمک نمادهای کریستوفل به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial V}{\partial q^j} = \frac{\partial V^i}{\partial q^j} \epsilon_i + V^i \Gamma_{ij}^k \epsilon_k \quad (۳-۱۴۳)$$

که در آن i و k در جمله آخر شاخصهای ظاهری‌اند. با تعویض i و k (فقط در جمله آخر)، داریم

$$\frac{\partial V}{\partial q^j} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \right) \epsilon_i \quad (۳-۱۴۴)$$

کمیت داخل برانتز را مشتق هموردا می‌خوانند و آن را با V_{ij}^i نمایش می‌دهند. داریم:

$$V_{ij}^i \equiv \frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \quad (۱۴۵-۳)$$

زیرنویس j ; نشانگر مشتق‌گیری نسبت به q^j است. دیفرانسیل dV به صورت زیر در می‌آید

$$dV = \frac{\partial V}{\partial q^j} dq^j = [V_{ij}^i dq^j] \epsilon_i \quad (۱۴۶-۳)$$

مقایسه با معادله ۱۲۶-۳ یا ۱۳۵-۳ نشان می‌دهد که کمیت داخل کروشها ϵ_i امین مؤلفه پادوردای یک بردار است. از آنجا که (باز هم به کمک معادله ۱۲۶-۳) می‌دانیم که dq^j ، ϵ_i امین مؤلفه پادوردای یک بردار است، V_{ij}^i باید (با استفاده از قاعده خارج قسمت) مؤلفه (ij) ام یک تانسور مرتبه دوم آمیخته باشد. مشتقهای هموردای مؤلفه‌های پادوردای یک بردار، یک تانسور آمیخته مرتبه دوم، V_{ij}^i ، می‌سازند.

از آنجا که نمادهای کریستوفل در مختصات دکارتی صفر می‌شوند، مشتق هموردا و مشتق پاره‌ای معمولی یکی می‌شوند

$$\frac{\partial V^i}{\partial q^j} = V_{ij}^i \quad (\text{در مختصات دکارتی}) \quad (۱۴۷-۳)$$

مشتق هموردای بردار هموردای V_i از رابطه زیر به دست می‌آید (مسئله ۳-۸-۸)

$$V_{i;j} = \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k \quad (۱۴۸-۳)$$

$V_{i;j}$ نیز مانند V_{ij}^i یک تانسور مرتبه دوم است.

اهمیت فیزیکی مشتق هموردا در آن است که:

تعویض سازگارانه مشتقهای پاره‌ای معمولی با مشتقهای هموردا (صورت مؤلفه‌ای) قانونهای فیزیک را از فضازمان تخت به فضازمان خمیده (ریمانی) در نسبیت عام می‌برد. این جابه‌جایی را می‌توان در واقع یک بیان ریاضی اصل هم‌ارزی اینشتین دانست.^۱

۱. نقل از صفحه ۳۸۷ کتاب

نمادهای کریستوفل به عنوان مشتقهای تانسور متریک

بیشتر وقتها داشتن عبارتی که نمادهای کریستوفل را برحسب مشتقهای تانسور متریک بیان کند، مفید است. به عنوان نخستین گام، نماد کریستوفل نوع اول $[ij, k]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[ij, k] \equiv g_{mk} \Gamma^m_{ij} \quad (۱۴۹-۳)$$

این $[ij, k]$ یک تانسور مرتبه سوم نیست. از معادله ۳-۱۴۰ ب داریم

$$\begin{aligned} [ij, k] &= g_{mk} \epsilon^m \cdot \frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^j} \\ &= \epsilon_k \cdot \frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^j} \end{aligned} \quad (۱۵۰-۳)$$

اکنون از $g_{ij} = \epsilon_i \cdot \epsilon_j$ در معادله ۳-۱۳۱ مشتق می‌گیریم، با استفاده از معادله ۳-۱۵۰، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} &= \frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^k} \cdot \epsilon_j + \epsilon_i \frac{\partial \epsilon_j}{\partial q^k} \\ &= [ik, j] + [jk, i] \end{aligned} \quad (۱۵۱-۳)$$

در نتیجه

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\} \quad (۱۵۲-۳)$$

و

$$\begin{aligned} \Gamma^s_{ij} &= g^{ks} [ij, k] \\ &= \frac{1}{2} g^{ks} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\} \end{aligned} \quad (۱۵۳-۳)$$

در بخش بعد این نمادهای کریستوفل و مشتقهای هموردا را به‌کار خواهیم برد.

مسائل

۱-۸-۳ عاملهای مقیاس h_i مسئله ۲-۲-۳ در معادلات ۳-۱۲۸ و ۳-۱۲۹ به‌کار رفته‌اند. در بخش ۲-۲ توجه خود را به دستگاههای مختصات متعامد محدود کردیم، ولی معادله ۳-۱۲۸ در

دستگاههای نامتعامد نیز برقرار است. برقرار بودن معادله ۳-۱۲۸ در دستگاههای نامتعامد را اثبات کنید.

۳-۸-۲ (الف) نشان دهید: $\epsilon^i \cdot \epsilon_j = \delta_j^i$ (ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) نشان دهید:

$$F^i = \mathbf{F} \cdot \epsilon^i \quad \text{و} \quad F_i = \mathbf{F} \cdot \epsilon_i$$

۳-۸-۳ در حالت خاص فضای سه‌بعدی (با $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ و ϵ_r که معرف یک دستگاه مختصات راستگرد و نه لزوماً متعامدند) نشان دهید که:

$$\epsilon^i = \frac{\epsilon_j \times \epsilon_k}{\epsilon_j \times \epsilon_k \cdot \epsilon_i} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (\text{و جایگشتهای دوری})$$

یادآوری: این بردارهای پایه پادوردا ϵ^i فضای شبکه وارون بخشهای ۱-۵ و ۴-۴ را تعریف می‌کنند.

۳-۸-۴ ثابت کنید که تانسور متریک پادوردا از رابطه زیر به دست می‌آید

$$g^{ij} = \epsilon^i \cdot \epsilon^j$$

۳-۸-۵ (الف) اگر بردارهای هموردای ϵ_i متعامد باشند، نشان دهید که (الف) g_{ij} قطری است؛ (ب) (بدون مجموع‌یابی) $g^{ii} = 1/g_{ii}$ ؛ (ج) $|\epsilon^i| = 1/|\epsilon_i|$.

۳-۸-۶ تانسورهای متریک هموردا و پادوردا را برای مختصات استوانه‌ای دوار استخراج کنید.

۳-۸-۷ سمت راست معادله ۳-۱۳۸

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \epsilon^i$$

را به پایه‌های ϵ_i تبدیل و تحقیق کنید که این عبارت با گرادینانی که در بخش ۲-۲ (برای مختصات متعامد) به دست آوردیم، سازگار است.

۳-۸-۸ $\partial \epsilon_i / \partial q^j$ را برای مختصات قطبی کروی حساب و با استفاده از آن Γ_{ij}^k مختصات قطبی کروی را محاسبه کنید.

یادآوری: مسئله ۲-۵-۱ راهی برای محاسبه مشتقهای پاره‌ای مورد نیاز ارائه می‌کند. به یاد داشته باشید که

$$\epsilon_r = r \sin \theta \epsilon_\phi, \quad \epsilon_\theta = r \epsilon_\theta, \quad \text{ولی} \quad \epsilon_\phi = r \epsilon_\phi$$

۹-۸-۳ نشان دهید که مشتق هموردای یک بردار هموردا از رابطه زیر به دست می آید

$$V_{i;j} \equiv \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma^k_{ij}$$

راهنمایی: از رابطه زیر مشتق بگیرید

$$\epsilon^i \cdot \epsilon_j = \delta^i_j$$

۱۰-۸-۳ با اثبات رابطه

$$\frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_s \Gamma^s_{ij} = g_{ik} \left\{ \frac{\partial V^k}{\partial q^j} + V^m \Gamma^k_{mj} \right\}$$

درستی رابطه $V_{i;j} = g_{ik} V^k_{ij}$ را تحقیق کنید.

۱۱-۸-۳ با استفاده از تانسور متریک g_{ij} در مختصات استوانه دوار Γ^k_{ij} را در این دستگاه محاسبه کنید.

یادآوری: فقط سه Γ غیر صفر وجود دارد.

۱۲-۸-۳ با استفاده از Γ^k_{ij} در مسئله ۱-۸-۳، مشتقات هموردای V^i_{ij} بردار V را در مختصات استوانه‌ای دوار بنویسید.

۱۳-۸-۳ بلور سه میلی با استفاده از یک دستگاه مختصات مایل توصیف می‌شود. سه بردار پایه هموردا عبارت‌اند از

$$\epsilon_1 = 1.5\mathbf{i}$$

$$\epsilon_2 = 0.4\mathbf{i} + 1.6\mathbf{j}$$

و

$$\epsilon_3 = 0.2\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j} + 1.0\mathbf{k}$$

(الف) عناصر تانسور متریک هموردای g_{ij} را محاسبه کنید. (ب) نماد سه شاخصه کریستوفل Γ^k_{ij} را محاسبه کنید. (این محاسبه به کمک واریسی انجام می‌شود.) (ج) با استفاده از شکل ضرب برداری در مسئله ۳-۸-۳، بردار پایه پادوردای ϵ^3 را محاسبه کنید. (د) با استفاده از صورتهای صریح ϵ^3 و ϵ_i ، تحقیق کنید که $\epsilon^3 \cdot \epsilon_i = \delta^3_i$.

یادآوری: اگر لازم باشد، می‌توانید تانسور متریک پادوردا را با یافتن وارون g_{ij} و یا با یافتن ϵ^i و به کار بردن $\epsilon^{ij} = \epsilon^i \cdot \epsilon^j$ تعیین کنید.
۱۴-۸-۳ تحقیق کنید که

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\}$$

[راهنمایی: معادله ۱۵۱-۳ را در طرف راست بنشانید و نشان دهید که این اتحاد برقرار است.]

۹-۳ عملگرهای دیفرانسیلی تانسوری

در این بخش با بهره‌گیری از مشتق هموردای بخش ۸-۳، عملهای دیفرانسیلی برداری بخش ۲-۲ را به صورت تانسوری کلی استخراج می‌کنیم.

دیورژانس

با تعویض مشتق پاره‌ای با مشتق هموردا، دیورژانس را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = V_{;i}^i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ik}^i \quad (154-3)$$

Γ_{ik}^i را توسط معادله ۱۵۳-۳ مشخص می‌کنیم، و می‌رسیم به

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left\{ \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^m} \right\} \quad (155-3)$$

وقتی g^{im} را ادغام می‌کنیم، دو جمله آخر درون آکولاد با یکدیگر حذف می‌شوند، زیرا

$$g^{im} \frac{\partial g_{km}}{\partial q^i} = g^{mi} \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^m} = g^{im} \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^m} \quad (156-3)$$

در نتیجه

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} \quad (157-3)$$

با استفاده از نظریهٔ دترمینانها، در بخش ۱-۴ داریم

$$\frac{\partial g}{\partial q^k} = g g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} \quad (158-3)$$

که در آن g دترمینان متریک است: $g = \det(g_{ij})$. این نتیجه را در معادله ۱۵۷-۳ می‌نشانیم، و می‌رسیم به

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial q^k} = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial g^{1/2}}{\partial q^k} \quad (159-3)$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = V^i_{;i} = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} (g^{1/2} V^k) \quad (160-3)$$

برای مقایسه این نتیجه با معادله ۱۷-۲، توجه کنید که $h_1 h_2 h_3 = g^{1/2}$ و (ضریب پادوردای ϵ_i) $V^i = V_i/h_i$ (بدون مجموع‌یابی) که در آن V_i ضریب e_i در بخش ۲-۲ است.

لاپلاسی

به کمک تعویض بردار \mathbf{V} در $\nabla \cdot \mathbf{V}$ با $\nabla \psi$ ، لاپلاسی $\nabla \cdot \nabla \psi$ را به دست می‌آوریم. در اینجا V^i پادوردا را داریم. با استفاده از تانسور متریک برای تولید $\nabla \psi$ پادوردا تعویض زیر را انجام می‌دهیم

$$V^i \rightarrow g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial q^k}$$

در نتیجه، لاپلاسی $\nabla \cdot \nabla \psi$ به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(g^{1/2} g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \right) \quad (161-3)$$

تانسور متریک برای دستگاه‌های متعامد بخش ۲-۲ قطری است و g^{ii} پادوردا به صورت زیر در می‌آید

$$g^{ii} = (h_i)^{-2}$$

معادله ۱۶۱-۳ به صورت زیر ساده می‌شود

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \right)$$

که با معادله ۲-۱۸ الف سازگار است.

تا و

اختلاف بین دو مشتق که در تاو ظاهر می‌شود (معادله ۲-۲۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial V_i}{\partial q^j} - \frac{\partial V_j}{\partial q^i}$$

بار دیگر یادآور می‌شویم که مؤلفه‌های V_i در اینجا ضرایب بردارهای پایه (غیر یکه) پادوردی $\mathbf{e}_i \cdot V_i$ بخش ۲-۲ ضرایب بردارهای یکه \mathbf{e}_i هستند. با جمع و تفریق کردن به دست می‌آوریم

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} &= \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} + V_k \Gamma_{ji}^k & (۱۶۲-۳) \\ &= V_{i;j} - V_{j;i} \end{aligned}$$

فرق مشخصه بین مشتقهای تاو به تفاوت بین مشتقهای هموردا تبدیل می‌شود، که در نتیجه معلوم می‌شود که یک تانسور مرتبه دوم (هموردا نسبت به هر دو شاخص) است. همانگونه که در بخش ۳-۴ مورد تأکید قرار گرفت، صورت خاص برداری تاو فقط در دستگاه سه بعدی وجود دارد. از معادله ۳-۱۵۳ آشکار است که همه نمادهای سه شاخصه کریستوفل در فضای مینکوفسکی

($g_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}$) و در فضا زمان حقیقی در نسبت خاص با مشخصه زیر، صفرند

$$g_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

در اینجا داریم

$$x_0 = ct, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

به این ترتیب، تعمیم عملگرهای دیفرانسیلی به صورت تانسوری کلی تکمیل می‌شود (گرایان در بخش ۳-۸ ارائه شد). این صورتی دیفرانسیلی علاوه بر زمینه‌های کشسانی و الکترومغناطیس در مکانیک (مکانیک لاگرانژی، مکانیک هامیلتونی، و معادله‌های اویلر درباره چرخش جسم صلب) و مکانیک شاره‌ها و شاید مهمتر از همه در فضا زمان خمیده نظریه نوین گرانش، کاربرد دارد.

مسائل

۳-۹-۲ درستی معادله ۳-۱۵۸

$$\frac{\partial g}{\partial q^k} = g g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k}$$

را برای حالت خاص مختصات قطبی کروی تحقیق کنید.

۳-۹-۳ از دیورژانس در نمادگذاری تانسوری، معادله ۳-۱۶۰، آغاز کنید و دیورژانس یک بردار را در مختصات قطبی کروی، معادله ۲-۴۵، به دست آورید.

۳-۹-۴ بردار هموردای A_i گرادیان یک کمیت اسکالر است. نشان دهید که اختلاف بین مشتقهای هموردای $A_{i;j} - A_{j;i}$ صفر است.

مراجع

Heitler W, *The Quantum Theory of Radiation*, 2nd ed, Oxford: Oxford University Press (1947).

New York: Dover (1983) تجدید چاپ توسط:

Jeffreys Harold, *Cartesian Tensors*, Cambridge: Cambridge University Press (1952).

در این کتاب تانسورهای دکارتی و کاربردهای آن در صورتهای بسیار متنوعی از زمینههای فیزیک کلاسیک به نحو تابناکی مورد بحث قرار گرفته است.

Lawden Derek F, *An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*, 3rd ed, New York: Wiley (1982).

Misner C W, Thorne K S and Wheeler, J A, *Gravitation*, San Francisco: W H Freeman (1973), 387.

Moller C, *The Theory of Relativity*, Oxford: Oxford University Press (1972) تجدید چاپ (1955).

بیشتر کتابهای درسی درباره نسبیت عام شامل مبحثی در باب تحلیل تانسوری است. فصل چهار این کتاب به محاسبات تانسوری، از آن جمله مبحث تانسورهای دوگان، می پردازد. تعمیم به دستگاههای غیردکارتی که مورد نیاز نسبیت عام است، در فصل ۹ ارائه شده است.

Panofsky W K H and M Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd ed, Reading, Mass: Addison Wesley (1962).

در این کتاب هموردایی لورنتسی معادلههای ماکسول هم برای خلأ و هم برای محیط مادی مطرح شده است. پانوفسکی و فیلیپس به جای فضای میتکوفسکی از تانسورهای پادوردا و هموردا استفاده

می‌کنند. هیتلر و استراتون همین مبحث را با استفاده از فضای مینکوفسکی ارائه می‌کنند

Sokolnikoff I S, *Tensor Analysis – Theory and Applications*, 2nd ed, New York, Wiley (1964).

این کتاب به خصوص از این نظر که تحلیل تانسوری را به هندسه‌های نااقلیدسی تعمیم داده است، مفید واقع می‌شود.

Stratton J A, *Electromagnetic Theory*, New York: McGraw-Hill (1941).

Weinberg S, *Gravitation and Cosmology; Principles and Applications of the Genral Theory of Relativity*, New York, Wiley (1972).

این کتاب و کتاب میسنر، تورن و ویلر دو کتاب درسی برتر در نسبیت عام و کیهانشناسی است (با تانسورهایی در فضای غیردکارتی).

دترمینانها، ماتریسها، و نظریهٔ گروه

”قضاوت مبتنی بر معیارهای مشخص در خصوص چیزهای منظم و متقارن و آراسته در موارد فراوانی راهنمایی عالی به چگونگی کارهای طبیعت را جا انداخته است.“

موری گلمان

۱-۴ دترمینانها

بررسی خود را در مورد ماتریسها با جمعیندی برخی خواص دترمینانها شروع می‌کنیم، تا اندازه‌ای به این دلیل که دترمینانها در تحلیل ماتریسی مفیدند و تا حدودی هم به خاطر آنکه نشان دهندهٔ برعکس، ماتریسها چه چیزی نیستند. مفهوم ”دترمینان“ و نماد آن را لایب‌نیتس آورده است.

خواص

دترمینان عبارت است از: (۱) آرایه‌ای مربعی از اعداد یا توابع، که (۲) می‌توان آن را مطابق قاعدهٔ زیر در هم ترکیب کرد. داریم

$$D_i = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (1-4)$$

تعداد ستونها (و یا سطرها)ی آرایه را گاهی مرتبهٔ دترمینان می‌نامند. مقدار دترمینان D ، برحسب عناصر a_i, b_j و الی آخر به قرار زیر است:

$$D = \sum_{i,j,k,\dots} \varepsilon_{ijk\dots} a_i b_j c_k \dots \quad (2-4)$$

که $\varepsilon_{ijk\dots}$ مشابه نماد لوی-چی ویتا در بخش ۳-۴، به‌ازای جایگشتهای زوج آرایهٔ $(1, 2, 3, \dots, n)$ برابر $+1$ ، و به‌ازای جایگشتهای فرد این آرایه برابر -1 است، و اگر دو شاخص با هم برابر باشند، صفر است. در حالت خاص، برای دترمینان مرتبهٔ سوم:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (3-4)$$

به‌رابطهٔ زیر برای شش جمله در مجموع بایی، می‌انجامد

$$D = +a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \quad (4-4)$$

بنابراین، دترمینان مرتبهٔ سوم عبارت است از این ترکیب خطی خاص از حاصلضربها. هر حاصلضرب فقط و فقط یک عنصر از هر سطر و از هر ستون دارد. حاصلضربهایی که ترتیب عواملشان جایگشت زوجی از سطرها را نمایش می‌دهد (توجه کنید که ستونها به‌ترتیب a, b, c یا $1, 2, 3$ در نظر گرفته شده‌اند) با علامت $+$ ، و آنها که ترتیب عواملشان جایگشت فردی از سطرها را نمایش می‌دهد، با علامت $-$ در نظر گرفته می‌شوند. معادلهٔ ۳-۴ را می‌توان نمادگذاری کوتاه‌نوشته برای معادلهٔ ۴-۴ دانست. تعداد جمله‌ها در مجموع (معادلهٔ ۲-۴) برای دترمینان مرتبهٔ ۴ عبارت از ۲۴ و در دترمینان مرتبهٔ n عبارت از $n!$ است. با توجه به ظاهر شدن علامتهای منفی در

۱. هر تک جابه‌جایی سادهٔ عناصر متوالی در آرایهٔ خطی $abcd\dots$ ، به یک جایگشت فرد آرایهٔ اصلی می‌انجامد: $abcd \rightarrow bacd$. دو جابه‌جایی از این نوع، جایگشت زوج را می‌دهد. به‌طور کلی، تعداد فردی از چنین جابه‌جاییها دو عنصر یا یکدیگر، به یک جایگشت فرد، و تعداد زوجی از این جابه‌جاییها به یک جایگشت زوج می‌انجامد.

معادلهٔ ۴-۴ (و احتمالاً در تک تک عناصر a_i ، b_j و ...)، تعداد زیادی از جمله‌ها می‌توانند یکدیگر را حذف کنند. این احتمال کم نیست که مقدار دترمینانهای شامل اعداد بزرگ، خیلی کوچک باشد. چند خاصیت مفید دترمینانهای مرتبهٔ n را می‌توان از معادلهٔ ۴-۴ به دست آورد. در اینجا نیز به عنوان حالتی خاص، از معادلهٔ ۴-۴ برای نمایش این خاصیتها استفاده می‌شود.

بسط لاپلاس برحسب کهادها

معادلهٔ ۴-۴ را می‌شود به صورت زیر نوشت

$$D = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \quad (5-4)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

در حالت کلی، دترمینان مرتبهٔ n را می‌توان به صورت ترکیب خطی حاصلضرب عناصر هر سطر (یا هر ستون) در دترمینانهایی از مرتبهٔ $(n-1)$ بسط داد، که دترمینانهای اخیر از حذف سطر و ستونی از دترمینان اصلی تشکیل شده‌اند، که عنصر اصلی در آن ظاهر می‌شود. این آرایهٔ تقلیل یافته (در مثال بالا، 2×2) را "کهاد" می‌نامند. حاصلضرب متناظر با عنصری را که در سطر i ام و ستون j ام آمده است، باید با علامت $(-1)^{i+j}$ منظور کرد. کهاد همراه با علامت $(-1)^{i+j}$ را هم عامل می‌نامند. کهادی را که از حذف سطر i ام و ستون j ام به دست می‌آید، با M_{ij} و هم عامل متناظر با آن را با c_{ij} نشان می‌دهیم؛ در این صورت معادلهٔ ۵-۴ به صورت زیر در می‌آید

$$D = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} a_i M_{i1} = \sum_{i=1}^r a_i C_{i1}$$

در این رابطه، که برحسب ستون اول بسط داده‌ایم، داریم $j=1$ و مجموع‌یابی روی i صورت می‌گیرد.

می‌توان از بسط لاپلاس برای محاسبهٔ دترمینانهای با مرتبهٔ بالا، واجد تعداد زیادی عنصر صفر، استفاده کرد. مثلاً، برای یافتن مقدار دترمینان زیر:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (6-4)$$

آن را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم،

$$D = (-1)^{1+2} \times (1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (۷-۴)$$

بار دیگر برحسب سطر اول بسط می‌دهیم، می‌رسیم به

$$D = (-1) \times (-1)^{1+1} \times (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (۸-۴)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

این دترمینان D (معادله ۶-۴) از یکی از ماتریسهای دیراک، که در نظریه الکترونی نسبیتی دیراک ظاهر می‌شود، تشکیل شده است.

پادتقارن

اگر جای دو سطر (یا دو ستون) یک دترمینان را با هم عوض کنیم، علامت دترمینان عوض می‌شود. این خاصیت ناشی از ماهیت فرد-زوج ε لوی-چیویتا در معادله ۲-۴، و یا صریحاً ناشی از خصلت معادله‌های ۳-۴ و ۴-۴ است.^۱

از این خاصیت در بخش ۳-۴ برای به دست آوردن ترکیب خطی کاملاً پادمتقارن بهره گرفتیم. در مکانیک کوانتومی نیز بارها از آن برای تشکیل تابع موج بس‌ذره‌ای استفاده می‌شود، که باید، بنابر اصل طرد پاولی، نسبت به جابه‌جایی هر دو ذره همسان با اسپین $1/2$ (دو الکترون، دو پروتون، دو نوترون و مانند آنها) پادمتقارن باشد.

یکی از حالت‌های خاص پادتقارن این است که هر دترمینانی که دو سطر مساوی و یا دو ستون مساوی داشته باشد، برابر صفر است.

اگر همه عناصر یک سطر، یا همه عناصر یک ستون در یک دترمینان صفر باشند آن دترمینان برابر صفر است.

اگر همه عناصر روی یک سطر یا همه عناصر روی یک ستون دترمینان را در یک مقدار ثابت ضرب کنیم، خود دترمینان در آن مقدار ثابت ضرب می‌شود.

اگر به عناصر یک سطر مضربی از عناصر یک سطر دیگر (ستون به ستون) اضافه کنیم، یا

۱. تغییر علامت در مورد تعویض دو سطر (یا دو ستون) مجاور نسبتاً بدیهی است، زیرا یک جایگشت فرد به شمار می‌آید. خواننده می‌تواند نشان دهد که تعویض هر دو سطر یک جایگشت فرد است.

به عناصر یک ستون مضربی از عناصر ستون دیگری را (سطر به سطر) بیفزاییم، مقدار دترمینان تغییری نمی‌کند.

داریم

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (9-4)$$

با بهره‌گیری از بسط لاپلاس روی دترمینان سمت راست، می‌رسیم به

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (10-4)$$

دترمینان دوم سمت راست معادلهٔ ۱۰-۴، با توجه به خاصیت پادتقارن، صفر است. در نتیجه، درستی معادلهٔ ۹-۴ اثبات می‌شود.

دترمینانی که دو سطر یا دو ستون آن با هم متناسب باشند، صفر است. چند رابطهٔ مفید مابین دترمینانهای ماتریسها را در مسئله‌های بخشهای ۲-۴ و ۵-۴ خواهید یافت.

جواب مجموعه‌ای از معادلات همگن

یکی از کاربردهای عمدهٔ دترمینانها عبارت است از برقراری شرایطی که تحت آن مجموعه‌ای از معادله‌های جبری خطی همگن دارای جواب ناصفرند. فرض کنید سه معادلهٔ همگن و سه مجهول (یا n معادله و n مجهول) داریم

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

(۱۱-۴)

مسئله عبارت است از اینکه تعیین کنیم جز جواب صفر $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 0$ ، جواب دیگری وجود دارد یا خیر؟

دترمینان ضرایب معادله‌های ۱۱-۴ را تشکیل می‌دهیم، سپس آن را در x ضرب می‌کنیم

$$x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

اکنون با اضافه کردن ستون اول به y برابر ستون دوم و z برابر ستون سوم، خواهیم داشت:

$$x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (12-4)$$

این رابطه را با استفاده از معادله ۹-۴ به دست آورده‌ایم، اما با توجه به معادله ۱۱-۴، همه عناصر ستون اول صفر می‌شوند. در نتیجه

$$x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (13-4)$$

بنابراین، تنها اگر دترمینان ضرایب صفر باشد، $x(z, y_1)$ می‌تواند غیر صفر باشد. برعکس، می‌توان نشان داد که اگر دترمینان ضرایب صفر باشد، در واقع یک جواب ناصفر وجود خواهد داشت. در بخش ۸-۶، از این خاصیت برای اثبات وابستگی خطی یا استقلال خطی مجموعه‌ای از توابع بهره برده‌ایم.

جواب مجموعه‌ای از معادلات ناهمگن

اگر معادلات جبری خطی ما ناهمگن باشند، یعنی اگر به جای صفرهای سمت راست معادله ۱۱-۴، به ترتیب، d_1 ، d_2 و d_3 را قرار دهیم، آنگاه از معادله ۱۲-۴، به جای معادله ۱۳-۴، معادله زیر را به دست می‌آوریم^۱

$$x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (14-4)$$

اگر دترمینان ضرایب (مخرج کسر) صفر شود، مجموعه معادلات ناهمگن هیچ جوابی نخواهد داشت، مگر آنکه صورت کسرها نیز صفر شوند. در این صورت، می‌توان جواب را به دست آورد. ولی جواب منحصر به فرد نخواهد بود (یک مثال خاص از این حالت را در مسئله ۳-۱۴ مشاهده کنید).

جواب دترمینانی که در معادله ۱۴-۴ به دست آمد، برای محاسبات عددی بسیار دست و پا گیر و فاقد کارایی است. این دترمینان ممکن است حاوی اعداد بزرگ با علامتهای مختلف باشد،

۱. مشابه برداری معادله ۱۴-۴، در قالب مسئله ۱-۵-۱۳، آمده است.

و خطای نسبی در عمل تقریب دو عدد بزرگ ممکن است چندان زیاد باشد که ارزش جواب را از بین ببرد. علاوه بر این، ممکن است بخواهیم این روش دترمینانی را که در اینجا برای سه معادله و سه مجهول به دست آمد، برای مثلاً ۲۰ معادله و ۲۰ مجهول به کار گیریم. با توجه به تعریف دترمینان (معادله ۴-۲)، دترمینان مرتبه n دارای $n!$ جمله است. اگر بنا باشد که کامپیوتری با سرعت زیاد، این $n!$ جمله را با آهنگ هر جمله در یک میکروثانیه محاسبه کند، این محاسبه ۲۰! میکروثانیه یا ۷۷۰۰۰۰ سال به طول خواهد انجامید. باید روش بهتری برای این محاسبه وجود داشته باشد.

در واقع، روشهای بهتری هم وجود دارد. یکی از بهترین روشها، فرایند حذف مستقیم است که غالباً به آن روش حذفی گاوس می‌گویند. برای نشان دادن این روش، مجموعه معادله‌های زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۴-۱-۱ حذف گاوس: دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$3x + 2y + z = 11$$

$$2x + 3y + z = 13 \quad (15-4)$$

$$x + y + 4z = 12$$

به تناسب و برای دستیابی به دقت عددی بهینه، معادلات را چنان آرایش می‌دهند که بزرگترین ضرایب روی قطر اصلی (از گوشه چپ بالا به گوشه راست پایین) قرار گیرند. این کار برای مجموعه مورد نظر انجام شده است.

شگرد گاوس به این صورت است که با استفاده از معادله اول، نخستین مجهول را از بقیه معادله‌ها حذف می‌کند. سپس از معادله دوم (به صورت جدید آن) برای حذف y از معادله آخر بهره‌گیری می‌شود. در حالت کلی، این کار را تا آخرین معادله مجموعه انجام می‌دهیم. در آخرین معادله، آخرین مجهول تعیین می‌شود، سپس به معادلات قبلی بازمی‌گردیم و مجهولها را یکی پس از دیگری محاسبه می‌کنیم.

هر سطر را بر اولین ضریب آن تقسیم می‌کنیم، معادله ۴-۱۵ به صورت زیر در می‌آید

$$x + 0.6667y + 0.3333z = 3.6667$$

$$x + 1.5000y + 0.5000z = 6.5000 \quad (16-4)$$

$$x + 1.0000y + 4.0000z = 12.0000$$

اینک با استفاده از معادله اول، x را از معادله‌های دوم و سوم حذف می‌کنیم

$$\begin{aligned} x + 0.6667y + 0.3333z &= 3.6667 \\ 0.8333y + 0.1667z &= 2.8333 \quad (17-4) \\ 0.3333y + 3.6667z &= 8.3333 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} x + 0.6667y + 0.3333z &= 3.6667 \\ y + 0.2000z &= 3.4000 \quad (18-4) \\ y + 11.0000z &= 25.0000 \end{aligned}$$

با تکرار این روش، از معادله دوم (به صورت جدید) برای حذف y از معادله سوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x + 0.6667y + 0.3333z &= 3.6667 \\ y + 0.2000z &= 3.4000 \quad (19-4) \\ 10.8000z &= 21.6000 \end{aligned}$$

یا

$$z = 2.0000$$

سرانجام، با بازگشتن به معادله قبلی، می‌رسیم به

$$y + 0.2000 \times 2.0000 = 3.4000$$

یا

$$y = 3.0000$$

سپس وقتی z و y تعیین شدند:

$$x + 0.6667 \times 3.0000 + 0.3333 \times 2.0000 = 3.6667$$

و

$$x = 1.0000$$

این روش شاید مثل معادلهٔ ۴-۱۴ خیلی دقیق به نظر نیاید، ولی می‌توان از آن به خوبی در ماشینهای محاسبهٔ جدید بهره گرفت و از روش دترمینانی خیلی سریعتر است. از این شیوهٔ گاوس می‌توان برای تبدیل یک دترمینان به دترمینانی مثلثی شکل، به شکل زیر، برای یک دترمینان مرتبهٔ سوم، بهره گرفت:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$$

در این شکل دترمینانی: $D = a_1 b_2 c_3$. در مقایسه با $n!$ حاصلضرب مورد نیاز محاسبهٔ دترمینان مرتبهٔ سوم در حالت کلی، برای محاسبهٔ شکل مثلثی فقط به $n - 1$ حاصلضرب نیاز است. روش دیگری برای این حذف تدریجی، حذف گاوس-جردن نام دارد. در این روش نیز، مانند روش حذف گاوس عمل می‌کنیم؛ با این تفاوت که از هر معادله (به صورت جدید آن) برای حذف یک مجهول از همهٔ معادلات دیگر بهره گرفته می‌شود، نه فقط معادلاتی که پس از آن معادله می‌آیند. اگر از روش حذف گاوس-جردن استفاده کنیم، معادلهٔ ۴-۱۹ به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} x + 0.2000z &= 1.4000 \\ y + 0.2000z &= 3.4000 \\ z &= 2.0000 \end{aligned} \quad (20-4)$$

که در آن، از معادلهٔ دوم از معادلات ۴-۱۸ برای حذف y از معادلات اول و سوم بهره گرفته شده است. در این صورت، z را به کمک معادلهٔ سوم از معادلات ۴-۲۰، از معادله‌های اول و دوم حذف می‌کنیم؛ می‌رسیم به

$$\begin{aligned} x &= 1.0000 \\ y &= 3.0000 \\ z &= 2.0000 \end{aligned} \quad (21-4)$$

در بخش ۴-۲ برای وارون کردن ماتریسها، مجدداً به این روش گاوس-جردن برمی‌گردیم. روش تکرار گاوس-سیدل از جمله روشهای دیگر مناسب برای استفاده در کامپیوتر است. هر روشی مزایا و معایب خاص خود را دارد. روشهای گاوس و گاوس-جردن احتمالاً برای دترمینانهای بزرگ با دشواری دقت مواجه‌اند. این مشکل در وارون کردن ماتریس (بخش ۴-۲) نیز رخ می‌نماید.

روش گاوس-سیدل به عنوان یک روش تکرار، ممکن است به مشکل همگرایی ختم شود. در مجموعه زیر برنامه های علمی آی بی ام از روشهای گاوس و گاوس-جردن استفاده می شود.^۱

مسائل

۴-۱-۱ دترمینانهای زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{ج})$$

۴-۱-۲ مجموعه معادله های خطی زیر را بررسی کنید و ببینید که آیا جواب ناصفر دارد یا خیر؟

$$x + 3y + 3z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

$$2x + y + 3z = 0$$

۴-۱-۳ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$x + 2y = 3$$

$$2x + 4y = 6$$

۱. در مراجع زیر پیرامون روش گاوس-سیدل و روشهای گاوس و گاوس-جردن، به تفصیل بحث شده است:

Ralston A and H Wilf, Eds, *Mathematical Methods for Digital Computers*, New York; Wiley (1960). Pennington, R H, *Introductory Computer Methods and Numerical Analysis*, New York: Macmillan (1970).

(الف) نشان دهید که دترمینان ضرایب آن صفر است. (ب) نشان دهید که دترمینانهای صورت (معادلهٔ ۴-۱۴) نیز صفرند. (ج) دستکم دو جواب برای این دو معادله به دست آورید. ۴-۱-۴ مؤلفه‌های $A \times B$ را به صورت دترمینانهای 2×2 بنویسید. سپس نشان دهید که از حاصلضرب اسکالر $A \cdot (A \times B)$ ، بسط لاپلاس یک دترمینان 3×3 به دست می‌آید. سرانجام، با توجه به اینکه دو سطر این دترمینان 3×3 مساوی است، نتیجه بگیرید که

$$A \cdot (A \times B) = 0$$

۴-۱-۵ اگر هم عامل عنصر a_{ij} را (که از خط زدن سطر i ام و ستون j ام و گنجاندن یک علامت $(-1)^{i+j}$ به دست می‌آید) با c_{ij} نمایش دهیم، نشان دهید:

$$\sum_i a_{ij} c_{ij} = \sum_i a_{ji} c_{ji} = |A| \quad (\text{الف})$$

که در آن $|A|$ دترمینانی است با عناصر a_{ij} .

$$\sum_i a_{ij} c_{ik} = \sum_i a_{ji} c_{ki} = 0 \quad j \neq k \quad (\text{ب})$$

۴-۱-۶ دترمینانی که همهٔ عناصر آن از مرتبهٔ یک باشند، می‌تواند بسیار کوچک باشد. دترمینان هیلبرت، $H_{ij} = (i+j-1)^{-1}$ ، $i, j = 1, 2, \dots, n$ ، به خاطر کوچک بودن مقادیرش، بسیار مشهور است. (الف) مقدار دترمینان هیلبرت مرتبهٔ n ام را به ازای $n = 1, 2, 3$ محاسبه کنید. (ب) اگر به زیربرنامهٔ مناسبی دسترسی دارید، دترمینان هیلبرت مرتبهٔ n ام را به ازای $n = 4, 5, 6$ نیز محاسبه کنید.

جواب :

$\text{Det}(H_n)$	n
1_0	۱
$8_733333 \times 10^{-2}$	۲
$4_762963 \times 10^{-2}$	۳
$1_65344 \times 10^{-7}$	۴
$3_74930 \times 10^{-12}$	۵
$5_36730 \times 10^{-18}$	۶

۴-۱-۷ دستگاه معادلات چند مجهولی زیر را حل کنید. نتیجه را تا پنج رقم اعشار به دست آورید

$$1_0 x_1 + 0_9 x_2 + 0_8 x_3 + 0_4 x_4 + 0_1 x_5 = 1_0$$

$$0_9 x_1 + 1_0 x_2 + 0_8 x_3 + 0_5 x_4 + 0_2 x_5 + 0_1 x_6 = 0_9$$

$$0_8 x_1 + 0_8 x_2 + 1_0 x_3 + 0_7 x_4 + 0_4 x_5 + 0_2 x_6 = 0_8$$

$$0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.7x_3 + 1.0x_4 + 0.6x_5 + 0.3x_6 = 0.7$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 + 0.6x_4 + 1.0x_5 + 0.5x_6 = 0.6$$

$$0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.5x_5 + 1.0x_6 = 0.5$$

یادآوری: این معادلات را از طریق وارون کردن ماتریس نیز می‌توان حل کرد (بخش ۲-۴).

۲-۴ ماتریسها

تحلیل ماتریسی، اساساً نظریه عملیات خطی (جبر خطی) است. مثلاً فرض کنید عملگر خطی A در فضایی که با بردارهای پایه معمولی i, j و k توصیف می‌شود، عمل می‌کند. اگر A بر i عمل کند، آن را به ترکیبی خطی از بردارهای پایه تبدیل می‌کند:

$$Ai = ia_{11} + ja_{21} + ka_{31}$$

(این ضرایب را در بخش ۳-۴، برای عملگر چرخشی A به‌طور مشروح به‌دست خواهیم آورد.) به همین ترتیب، اثر A بر j نیز با ترکیب خطی $ia_{12} + ja_{22} + ka_{32}$ و اثر A بر k با $ia_{13} + ja_{23} + ka_{33}$ به‌دست می‌آید. در نتیجه، اثر A بر بردار u بردار v را تولید می‌کند

$$\begin{aligned} v &= Au \\ &= A(iu_1 + ju_2 + ku_3) \end{aligned}$$

با بسط این عبارت، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} iu_1 & \quad i(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3) \\ + ju_2 &= +j(a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3) \\ + ku_3 &+ k(a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3) \end{aligned}$$

مؤلفه‌های i را برابر می‌نهم:

$$v_1 = \sum_{j=1}^3 a_{1j}u_j$$

یا، در حالت کلی

$$v_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} u_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (22-4)$$

آرایهٔ عناصر a_{ij} را ماتریس می‌نامیم و مجموع حاصلضربهای معادلهٔ ۲۲-۴ را تعریف ضرب ماتریسی (ضرب داخلی) می‌گیریم. پیش از آنکه به تعریفهای صوری بپردازیم، خاطرنشان می‌کنیم که عملگر A را، اثر آن بر بردارهای پایه، توصیف یا مشخص می‌کند. عناصر ماتریسی a_{ij} نمایش این عملگرند، نمایشی که به گزینش بردارهای پایه بستگی دارد.

تعریفهای اساسی

ماتریس را می‌توان به صورت آرایه‌ای مربعی یا مستطیلی از اعداد یا توابع تعریف کرد که از قوانین معینی پیروی می‌کنند. ماتریس دقیقاً تعمیم منطقی مفاهیم آشنای حساب به شمار می‌آید. در نظریهٔ اعداد مختلط (فصل ۶) با زوجهای مرتبی از اعداد، به صورت $1 + 2i = (1, 2)$ سروکار داریم که در آنها ترتیب اعداد مهم است. در اینجا، اعدادی (یا توابعی) را بررسی می‌کنیم که به صورت آرایه‌ای مربعی یا مستطیلی مرتب شده‌اند. برای راحتی کار، اعداد را با دو شاخص مشخص می‌کنیم؛ شاخص اول سطر (افقی) و شاخص دوم ستونی (عمودی) را که عدد در آن ظاهر شده، مشخص می‌کند. مثلاً a_{13} عنصری ماتریسی است که در سطر اول و ستون سوم قرار دارد. بنابراین، اگر A ماتریسی با m سطر و n ستون باشد داریم

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

شاید مهمترین نکته‌ای که باید در نظر داشت، آن است که عناصر a_{ij} با یکدیگر ترکیب نمی‌شوند. ماتریس، دترمینان نیست. ماتریس آرایهٔ مرتبی از چند عدد است، و نه یک تک عدد. اگر a_{ij} ها را با هم جمع یا در هم ضرب کنیم، همان قدر بی‌معنی است که بنویسیم $1 + 2i = 3$! ماتریس A ، که تا اینجا فقط آرایه‌ای از اعداد است، دارای خواصی است که آنها را ما به آن نسبت می‌دهیم. یعنی، صورت جدیدی از ریاضیات را تشکیل می‌دهیم. اصولی را وضع می‌کنیم که بنابر آنها، ماتریسهای A ، B ، و C به ترتیب با عناصر a_{ij} ، b_{ij} و c_{ij} ، مطابق با قواعد زیر، با هم ترکیب می‌شوند:

تساوی

ماتریس $B = A$ ، اگر و فقط اگر به ازای همهٔ مقادیر i و j داشته باشیم: $a_{ij} = b_{ij}$. البته،

برای برقراری این تساوی لازم است که A و B هر دو آرایه‌هایی m در n (با m سطر و n ستون) باشند.

جمع

$A + B = C$ ، اگر و فقط اگر به‌ازای همهٔ مقادیر i و j داشته باشیم؛ $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ ، ترکیب عناصر ماتریس مطابق قانونهای جبر معمولی (یا اگر عدد باشند، مطابق قانونهای حساب) صورت می‌گیرد. از این تعریف تعویض‌پذیری، $A + B = B + A$ ، نتیجه می‌شود. قانون شرکت‌پذیری نیز به‌صورت $(A + B) + C = A + (B + C)$.

ضرب (در یک اسکالر)

حاصلضرب ماتریس A در کمیت اسکالر α ، بنا بر تعریف عبارت است از

$$\alpha A = (\alpha A)$$

که در آن، عناصر αA عبارت‌اند از αa_{ij} ، یعنی هر عنصر ماتریس A در عامل عددی یا اسکالر ضرب می‌شود. این عمل با رفتار دترمینان، که در آن عامل α فقط در یک ستون یا یک سطر دترمینان و نه در تمامی عناصر آن ضرب می‌شود، تناقض آشکاری دارد. یکی از پیامدهای این ضرب ماتریس در اسکالر عبارت است از

$$\alpha A = A\alpha \quad \text{تعویض‌پذیری}$$

ضرب ماتریسی، ضرب داخلی

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad AB = C \quad (23-4)$$

عناصر (ij) ام ماتریس C به‌صورت حاصلضرب اسکالر سطر i ام A در ستون j ام B تشکیل می‌شود (که برای آن لازم است که تعداد ستون (n) ماتریس A با تعداد سطر ماتریس B برابر باشد). شاخص ظاهری k تمام مقادیر $1, 2, \dots, n$ را یکی پس از دیگری به‌خود می‌گیرد، یعنی به‌ازای $n = 3$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (24-4)$$

واضح است که به جای شاخص ظاهری k می شود از هر نماد دیگری که قبلاً در این رابطه به کار نرفته باشد استفاده کرد، بدون آنکه در معادله ۲۳-۴ تغییری پدید آید. شاید ذکر این نکته که معادله ۲۳-۴ روشی برای تعریف ترکیب ماتریسهای خاص به شمار می آید، وضعیت را روشنتر کند. برای آنکه نامی به این روش ترکیب داده باشیم، آن را ضرب ماتریسی می خوانیم. برای نشان دادن عمل ضرب، دو ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (25-4)$$

عنصر ۱۱ از حاصلضرب، $(\sigma_1 \sigma_2)_{11}$ ، عبارت است از مجموع حاصلضرب عناصر سطر اول، σ_1 ، در عناصر متناظر در ستون اول، σ_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$$

در ادامه، می رسیم به

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times (-1) \\ 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (26-4)$$

در اینجا،

$$(\sigma_1 \sigma_2)_{ij} = \sigma_{1,i} \sigma_{2,j} + \sigma_{1,i} \sigma_{2,j}$$

کاربرد مستقیم تعریف ضرب ماتریسی نشان می دهد که

$$\sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27-4)$$

و با توجه به معادله ۲۶-۴، داریم

$$\sigma_2 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_2 \quad (28-4)$$

ضرب ماتریسی، جز در موارد خاص، از خاصیت تعویض پذیری پیروی نمی‌کند. ^{۱۰}

$$AB \neq BA \quad (۲۹-۴)$$

ولی با بهره‌گیری از تعریف ضرب ماتریسی می‌توانیم نشان دهیم که یک قانون شرکت پذیری به صورت $(AB)C = A(BC)$ برقرار است. قانونی به نام توزیع پذیری، $A(B+C) = AB+AC$ ، هم برقرار است.

ضرب مستقیم

دستورالعمل دیگری برای ضرب ماتریسها، به نام ضرب نانسوری مستقیم یا ضرب کرونکر، را در زیر از نظر می‌گذرانیم. اگر A یک ماتریس $m \times m$ و B یک ماتریس $n \times n$ باشد، حاصلضرب مستقیم آنها عبارت است از

$$A \otimes B = C \quad (۳۰-۴)$$

C یک ماتریس $mn \times mn$ است، با عناصر

$$C_{\alpha\beta} = A_{ij}B_{kl} \quad (۳۱-۴)$$

که در آن

$$\alpha = n(i-1) + k, \quad \beta = n(j-1) + l$$

۱. باید توجه داشت که تعریفهای بنیادی تساوی، جمع و ضرب برحسب عناصر ماتریسی، a_{ij} ، و غیره داده شده‌اند. همه عملهای ماتریسی را می‌توان برحسب عناصر ماتریسی انجام داد. ولی کاپلی (۱۸۵۹) نشان داد که می‌توان ماتریس را مانند معادله ۲۹-۴ به صورت یک تک عملگر جبری نیز به‌کار برد. عناصر ماتریسی و تک عملگرها، هر یک مزایای خاص خود را دارند که در بخش بعد خواهیم دید. ما هر دو رهیافت را به‌کار خواهیم برد.
۲. برای راحتی، خاصیت تعویض پذیری یا فقدان آن را توسط نماد گروه تعویضگر، $[AB] = AB - BA$ ، توصیف می‌کنند. معادله ۲۹-۴ با این نماد به صورت $[A, B] \neq 0$ در می‌آید.

مثلاً، اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (۳۲-۴)$$

ضرب مستقیم شرکت پذیر است ولی تعویض پذیر نیست. به عنوان نمونه‌ای از ضرب مستقیم، ماتریسهای دیراک، بخش ۴-۵، را می‌توان از ضرب مستقیم ماتریسهای پاؤلی و ماتریس یکبه‌دست آورد. به مثالهای دیگری نیز در تشکیل گروهها در نظریه گروهها و در فضای برداری یا هیلبرت در نظریه کوانتومی برمی‌خوریم.

گاهی ضرب مستقیم را، به صورتی که در اینجا تعریف کردیم، شکل "استاندارد" می‌نامند و با نماد \otimes نمایش می‌دهند. از نظر اطلاعات کلی درباره امکانهای ریاضی، سه نوع ضرب مستقیم دیگر برای ماتریسها وجود دارد که در ریاضی فیزیک تقریباً هیچ کاربردی ندارند.

موارد خاص

تعدادی از ماتریسها از اهمیت خاصی برخوردارند. اگر ماتریسی یک ستون و n سطر داشته باشد، آنرا برداری ستونی می‌خوانند و با نماد $|x\rangle$ ، با مؤلفه‌های x_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، نمایش می‌دهند. به همین ترتیب، اگر ماتریسی یک سطر و n ستون داشته باشد، آنرا برداری سطری می‌نامند و با نماد $\langle x|$ ، با مؤلفه‌های x_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، نمایش می‌دهند. روشن است که اگر A ماتریسی $n \times n$ ، $|x\rangle$ بردار ستونی n مؤلفه‌ای، و $\langle x|$ بردار سطری n مؤلفه‌ای باشد، آنگاه

$$A|x\rangle \quad \text{و} \quad \langle x|A$$

به کمک معادله ۴-۲۳ تعریف می‌شوند، ولی

$$A\langle x| \quad \text{و} \quad |x\rangle A$$

تعریف نمی‌شوند.

واضح است که بردار سطری $\langle x| = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و بردار ستونی $|x\rangle$ با مؤلفه‌های یکسان، از یکدیگر مستقل نیستند. این نکته نیز بدیهی است که این دو را نمی‌توان با هم جمع کرد:

$\langle x|x \rangle$ تعریف نشده است. در نظریه کوانتومی، بهتر است که بردارهای ستونی، $|x\rangle$ ، را در یک فضا بردارهای سطری، $\langle x|$ ، را در فضایی دیگر در نظر بگیریم، یعنی فضایی دوگانه را در نظر داشته باشیم. در ادامه این فصل، توجه خود را فقط به بردارهای ستونی، بردارهای سطری و ماتریسهای مربعی معطوف خواهیم کرد.

ماتریس یکه 1، حاوی عنصرهای δ_{ij} ، یعنی دلتای کرونکر، دارای این خاصیت است که به ازای همه مقادیر $A: A = A1 = 1A = A$.

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (33-4)$$

اگر همه عناصر صفر باشند، ماتریس را صفر می خوانند و با O نشان می دهند. به ازای همه مقادیر A

$$OA = AO = O$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (34-4)$$

خاطر نشان می کنیم که حاصلضرب دو ماتریس می تواند صفر باشد، بدون آنکه هیچیک از آن دو ماتریس صفر باشند. مثلاً هرگاه

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

آنگاه $AB = 0$. در اینجا نیز، نتایج جبری معمولی مستقیماً به کار نمی آیند.

ماتریسهای قطری

ماتریس مربعی که همه عناصر غیرقطری آن صفرند از انواع خاص و مهم ماتریسها به شمار می آید.

ماتریس قطری 3×3 به طور اخص عبارت است از

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

تعبیر فیزیکی چنین ماتریسهای قطری و روش تقلیل ماتریسها به این شکل قطری را در بخش ۴-۶ بررسی خواهیم کرد. در اینجا، فقط از یک خاصیت قابل توجه ماتریسهای قطری یاد می‌کنیم، و آن این است که خاصیت تعویض‌پذیری در ضرب ماتریسهای قطری صدق می‌کند:

اگر A و B هر دو قطری باشند $AB = BA$ است

رد

مجموع عناصر قطری هر ماتریس مربعی را رد آن ماتریس می‌نامند. یکی از خاصیت‌های جالب و مفید رد این است که: رد حاصلضرب دو ماتریس از ترتیب ضرب کردن مستقل است:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \sum_j (BA)_{jj} \quad (۳۵-۴) \\ &= \text{Tr}(BA) \end{aligned}$$

حتی در صورتی که $AB \neq BA$ ، این رابطه برقرار است. معادلهٔ ۳۵-۴ به این معناست که رد هر گروهٔ تعویضگر $[A, B] = AB - BA$ ، صفر است.

عمل یافتن رد در مسئلهٔ ۴-۵-۲۳ عبارت است از گزینش یک جمله از میان ۱۶ جمله. رد نسبت به ماتریسها همان عملی را انجام می‌دهد که تعامد نسبت به بردارها و توابع. رد، در زبان تانسورها (بخش ۳-۲) انقباض است، و مانند تانسور رتبهٔ دوم انقباض یافته، یک اسکالر (ناوردا) است.

یکی از کاربردهای مهم ماتریسها، عبارت است از نمایش عناصر گروهها (با مسئلهٔ ۴-۲-۷ و بخشهای ۴-۸ و ۴-۱۲ مقایسه کنید). رد ماتریسی را که یک عنصر گروه را نمایش می‌دهد، در نظریهٔ گروهها مشخصه می‌نامند. وجه تسمیهٔ این نام خاص و دلیل توجه خاصی که به آن می‌شود، این است که با آنکه ماتریسها ممکن است تغییر کنند، ولی رد یا مشخصهٔ آنها ناوردا می‌ماند. (با مسئلهٔ ۴-۳-۹ مقایسه کنید). سرانجام، خاطرنشان می‌کنیم که رد به عنوان یک عملگر، خطی است.

وارونی ماتریس

در آغاز این بخش، با ماتریس A برای نمایش عملگری آشنا شدیم که محورهای مختصات را (به طور

خطی) تبدیل می‌کند. چرخش نمونه‌ای است از این تبدیل خطی. اینک به جستجوی تبدیل وارون A^{-1} می‌پردازیم که ما را به محورهای مختصات اصلی برمی‌گرداند. این عمل، چه به عنوان یک ماتریس و یا یک معادله عملگری^۱، به معنای آن است که

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (۳۶-۴)$$

از مسئله ۴-۲-۳۲.

$$a_{ij}^{-1} = \frac{C_{ji}}{|A|} \quad (۳۷-۴)$$

با این فرض که دترمینان $|A|$ ناصفر است. اگر این دترمینان صفر باشد، A را تکین می‌خوانیم، و وارونی ندارد. این نتیجه‌گیری که باید $|A| \neq 0$ ، شاید تنها کاربرد معادله ۴-۳۷ است. همانگونه که در انتهای بخش ۴-۱ توضیح داده شد، این صورت دترمینانی برای کارهای عددی مربوط به ماتریسهای بزرگ کاملاً نامناسب است.

شگردهای متفاوت زیادی وجود دارد. یکی از بهترین و متداولترین آنها شگرد گاوس-جردن برای وارون‌سازی ماتریسهاست. مسئله‌های ۴-۲-۳۴ و ۴-۲-۳۵ اساس این شگرد را تشکیل می‌دهند. در این مسئله‌ها نشان داده می‌شود که ماتریسهای مانند M_L وجود دارد که برای آنها حاصلضرب $M_L A$ برابر است با A با این تفاوت که در آن (الف) یک سطر در یک ثابت ضرب شده است، یا

(ب) به جای یک سطر، همان سطر منهای مضربی از سطر دیگر قرار گرفته است، یا

(ج) دو سطر با یکدیگر تعویض شده‌اند.

ماتریسهای دیگری مانند M_R وجود دارند که از طرف راست عمل می‌کنند (AM_R) و می‌توانند همین عملها را روی ستونهای A انجام دهند.

این بدان معناست که سطرها و ستونهای ماتریس را می‌توان (توسط ضرب ماتریسی) درست به‌گونه دترمینان تغییر داد، در نتیجه می‌توانیم شگردهای حذف گاوس-جردن در بخش ۴-۱ را درباره عناصر ماتریس به‌کار ببریم. بنابراین ماتریسی، مانند M_L (یا M_R)، به‌گونه‌ای وجود دارد که^۲

$$M_L A = I \quad (۳۸-۴)$$

۱. در اینجا و در تمامی این فصل، رتبه ماتریسهای مورد نظر ما متناهی است. اگر A ماتریسی با رتبه نامتناهی باشد ($n \times n$ با $n \rightarrow \infty$)، شرایط بسیار پیچیده می‌شود. برای آنکه A^{-1} وارون A باشد، باید هر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$AA^{-1} = I \quad \text{و} \quad A^{-1}A = I$$

برقراری یکی از این روابط، خودبه‌خود، بر برقراری رابطه دیگر دلالت نمی‌کند.

۲. به‌یاد داشته باشید که $\det(A) \neq 0$.

و $M_L \cdot M_L = A^{-1}$ را با انجام عملهای حذفی مشابه، روی ماتریس یکه، به دست می آوریم. در نتیجه

$$M_L 1 = M_L \quad (39-4)$$

برای روشن شدن این روش، مثال خاصی در نظر می گیریم.

مثال ۴-۲-۱ روش گاوس-جردن برای وارون سازی ماتریس: می خواهیم ماتریس زیر را وارون کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (40-4)$$

برای راحتی کار، A و 1 را در کنار هم می نویسیم و روی هر دو عملیات یکسانی انجام می دهیم:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (41-4)$$

برای آنکه نظم کار به خوبی پیش رود، هر سطر را در ضریبی ضرب می کنیم تا برسیم به: $a_{k1} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.6667 & 0.3333 \\ 1 & 1.5000 & 0.5000 \\ 1 & 1.0000 & 4.0000 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (42-4)$$

با کم کردن سطر اول از سطرهاي دوم و سوم، می رسم به:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.6667 & 0.3333 \\ 0 & 0.8333 & 0.1667 \\ 0 & 0.3333 & 3.6667 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0.5000 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43-4)$$

سپس سطر دوم (هر دو ماتریس) را بر 0.8333 تقسیم می کنیم و 0.6667 برابر آن را از سطر اول، و 0.3333 برابر آن را از سطر سوم کم می کنیم. نتیجه برای دو ماتریس به قرار زیر است

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2000 \\ 0 & 1 & 0.2000 \\ 0 & 0 & 3.6000 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0.6000 & -0.4000 & 0 \\ -0.4000 & 0.6000 & 0 \\ -0.2000 & -0.2000 & 1 \end{pmatrix} \quad (44-4)$$

سطر سوم (هر دو ماتریس) را بر ۳۶ تقسیم می‌کنیم. سپس در آخرین مرحله، ۲ برابر سطر سوم را از هر یک از دو سطر اول و دوم (هر دو ماتریس) کم می‌کنیم. دو ماتریس نهایی عبارت‌اند از

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0.6111 & -0.3889 & -0.0556 \\ -0.3889 & 0.6111 & -0.0556 \\ -0.0556 & -0.0556 & 0.2778 \end{pmatrix} \quad (45-4)$$

برای امتحان، A محاسبه شده را در A اصلی ضرب می‌کنیم تا ببینیم آیا ماتریس یکه ۱ را به دست می‌آوریم یا خیر؟ نتیجه، تا چهار رقم اعشار به قرار زیر است

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0.9999 & -0.0001 & -0.0002 \\ -0.0001 & 0.9999 & -0.0002 \\ -0.0002 & -0.0002 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad (46-4)$$

که با در نظر گرفتن خطای گردشده (بیشتر ناشی از گرد کردن $0.0005555 \dots$ به -0.0556)، همان ماتریس یکه 1 است.

این شگرد نیز مانند روش گاوس-جردن برای حل دستگاه معادله‌های جبری خطی برای کاربرد در ماشینهای محاسبه جدید بسیار مناسب است. در واقع، این روش گاوس-جردن برای وارون‌سازی ماتریسها، احتمالاً به صورت زیر برنامه‌ای در مجموعه برنامه‌های کامپیوترها یافت می‌شود.

مسائل

۱-۲-۴ نشان دهید که ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر است: $(AB)C = A(BC)$.

۲-۲-۴ نشان دهید که اگر و فقط اگر A و B تعویض‌پذیر باشند، یعنی

$$[A, B] = 0$$

خواهیم داشت

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

۳-۲-۴ نشان دهید که ماتریس A عملگری خطی است، برای این کار نشان دهید که

$$A(c_1 r_1 + c_2 r_2) = c_1 A r_1 + c_2 A r_2$$

می‌توان نشان داد که یک ماتریس $n \times n$ کلی‌ترین عملگر خطی در فضای برداری n بعدی است. یعنی، هر عملگر خطی در این فضای برداری n بعدی با یک ماتریس هم‌ارز است. ۴-۲-۴ (الف) اعداد مختلط $a + ib$ با a و b حقیقی را می‌توان توسط ماتریسهای 2×2 نمایش داد (به عبارت دیگر، این اعداد با ماتریسها یکرخت‌اند):

$$a + ib \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

نشان دهید که این نمایش ماتریسی: (۱) برای جمع، و (۲) برای ضرب صادق است. (ب) ماتریس متناظر با $(a + ib)^{-1}$ را بیابید. ۴-۲-۵ اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، نشان دهید که

$$\det(-A) = (-1)^n \det A$$

۴-۲-۶ (الف) ماتریس C حاصلضرب A در B است. نشان دهید که دترمینان C برابر است با حاصلضرب دترمینانهای A و B :

$$\det C = \det A \times \det B$$

راهنمایی: دترمینان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{ijk} a_{i\alpha} a_{j\beta} a_{k\gamma} = |A| \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

$$\varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = |A|$$

(ب) اگر $C = A + B$ ، در حالت کلی داریم

$$\det C \neq \det A + \det B$$

با یک مثال عددی خاص، این نامساوی را نمایش دهید.

۴-۲-۷ سه ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

همه حاصلضربهای ممکن دوعضوی، از جمله مربعهای ماتریسهای A, B, C و ۱ ماتریس یکه را بیابید. این سه ماتریس، همراه با ماتریس یکه، نمایشی از یک گروه ریاضی را به نام گروه چارنایی تشکیل می دهند. در بخشهای ۴-۸ و ۴-۹ (نظریه گروهها) بارها به این گروه رجوع خواهیم کرد.

۴-۲-۸ برای ماتریس

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که (با انتخاب مقدار مناسبی برای n , $n \neq 0$)

$$K^n = KKK \dots \text{(بار } n) = ۱$$

۴-۲-۹ درستی اتحاد ژاکوبی زیر را تحقیق کنید

$$[A, [B, C]] = [B, [A, C]] - [C, [A, B]]$$

این اتحاد برای توصیف ماتریسی ذرات بنیادی به کار می آید. با توجه به اینکه اتحاد ژاکوبی به شکل قاعده $BAC - CAB$ است که در بخش ۱-۵ آمد، بهتر می توان آن را به خاطر سپرد.

۴-۲-۱۰ نشان دهید که ماتریسهای

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ۱ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ۱ \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ۱ \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

در رابطه های تعویض پذیری زیر صدق می کنند

$$[A, B] = C, \quad [A, C] = 0, \quad [B, C] = 0$$

۴-۱۱ برای ماتریسهای

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (\text{الف})$$

$$ij = -ji = k \quad (\text{ب})$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

این سه ماتریس (i ، j و k) همراه با ماتریس یکهٔ 1 ، پایه‌ای برای کوآرنیونها تشکیل می‌دهند. چهار ماتریس 2×2 ، $i\sigma_1$ ، $i\sigma_2$ ، $i\sigma_3$ و 1 پایهٔ دیگری را تشکیل می‌دهند؛ σ ها ماتریسهای اسپینی پاؤلی‌اند (مسئلهٔ ۴-۱۳).

۴-۱۲ ماتریسی را که عناصر آن به‌ازای $i < j$ صفرند ($a_{ij} = 0$)، می‌توانیم ماتریس مثلثی راستِ بالا بنامیم. در این ماتریس عناصر چپ پایینی (آنها که در طرف چپ و زیر قطر اصلی قرار دارند) صفرند. در فصلهای ۱۲ و ۱۳ دربارهٔ ارتباط بین سری توانی و بسطهای ویژه‌تابعی با نمونه‌هایی از این ماتریسها بر خواهیم خورد.

نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس مثلثی راستِ بالا نیز یک ماتریس مثلثی راستِ بالا خواهد بود.

۴-۱۳ ماتریسهای اسپینی پاؤلی عبارت‌اند از

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که

$$\sigma_i^2 = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\sigma_i \sigma_j = i \sigma_k (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \quad (\text{جایگشتهای دوری})$$

(ب)

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij} 1 \quad (\text{ج})$$

پاؤلی این ماتریسها را در نظریهٔ نانسبیتی اسپین الکترون به کار برد. ۴-۲-۱۴ با استفاده از مقادیر σ پاؤلی در مسئلهٔ ۴-۲-۱۳، نشان دهید که

$$(\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) = a \cdot b 1 + i \sigma \cdot (a \times b)$$

در اینجا

$$\sigma \equiv i \sigma_x + j \sigma_y + k \sigma_z$$

و a و b بردارهایی معمولی اند.

۴-۲-۱۵ در یک توصیف خاص برای ذرات با اسپین ۱، از ماتریسهای زیر استفاده می‌شود

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

نشان دهید: (الف) $[M_x, M_y] = i M_z$ و غیره^۱ (با جایگشت دوری شاخصها) این رابطه را با استفاده از نماد لوی-چی ویتا در بخش ۳-۴ می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$[M_i, M_j] = i \varepsilon_{ijk} M_k$$

۱. $[A, B] = AB - BA$

(ب) $M^z \equiv M_x^y + M_y^x + M_z^z = 21$ که در آن ۱ ماتریس یکه است.

$$[M^y, M_z] = 0 \quad (\text{ج})$$

$$[M_z, L^+] = L^+$$

$$[L^+, L^-] = 2M_z$$

که در آن

$$L^+ \equiv M_x + iM_y$$

$$L^- \equiv M_x - iM_y$$

۱۶-۲-۴ مسئله ۱۵-۲-۴ را با نمایشهای متفاوت زیر تکرار کنید

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

در بخش ۱۱-۴، از این ماتریسها به عنوان مولدهای ماتریسهای چرخشی استفاده خواهیم کرد. ۱۷-۲-۴ نشان دهید که معادله ماتریسی-برداري زیر، معادلات ماکسول در خلا را تولید می‌کند:

$$\left(M \cdot \nabla + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0$$

که در آن ψ برداری ستونی با مؤلفه‌های $B_j - iE_j/c$ ، $\psi_j = B_j - iE_j/c$ ، $(j = x, y, z)$ است. M برداری است که عناصرش عبارت‌اند از ماتریسهای تکانه زاویه‌ای مسئله ۱۶-۲-۴. توجه داشته باشید که $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ داریم

$$M^z \psi = 21\psi$$

در مقایسه با معادله الکترونی نانسییتی دیراک، به این نتیجه می‌رسیم که، فوتون، "ذره" تابش الکترومغناطیسی دارای جرم صفر و اسپین ۱ (برحسب واحد \hbar) است.
 ۱۸-۲-۴ مسئله ۱۵-۲-۴ را با استفاده از ماتریسهای زیر برای اسپین ۳/۲ تکرار کنید

$$M_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

۱۹-۲-۴ عملگر P با j_x و j_y و مؤلفه‌های x و y عملگر تکانه زاویه‌ای، تعویض‌پذیر است. نشان دهید که P با سومین مؤلفه تکانه زاویه‌ای نیز تعویض‌پذیر است

$$[P, J_z] = 0$$

[راهنمایی: مؤلفه‌های تکانه زاویه‌ای باید در رابطه تعویض‌پذیری مسئله ۱۵-۲-۴ الف صدق کنند.]

۲۰-۲-۴ ماتریسهای L^+ و L^- در مسئله ۱۵-۲-۴ "عملگرهای نردبانی" اند. اگر L^+ روی دستگاهی با تصویر اسپینی m عمل کند، در صورتی که m از مقدار بیشینه‌اش کمتر باشد، تصویر اسپینی به $m+1$ افزایش خواهد یافت. اگر L^+ روی m عمل کند، حاصل برابر صفر خواهد بود. L^- تصویر اسپینی را به روشی مشابه یکی کم خواهد کرد. با تقسیم بر $\sqrt{2}$ داریم

$$L^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که

$$\begin{aligned} L^+|-1\rangle &= |0\rangle, & L^-|-1\rangle &= \text{بردار ستونی پوچ} \\ L^+|0\rangle &= |1\rangle, & L^-|0\rangle &= |-1\rangle \\ L^+|1\rangle &= \text{بردار ستونی پوچ}, & L^-|1\rangle &= |0\rangle \end{aligned}$$

که در آن

$$|-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

به ترتیب حالت‌های با تصویر اسپینی ۱، ۰ و -۱ را نمایش می‌دهند.

یادآوری: مشابه عملگر دیفرانسیلی این عملگرهای نردبانی در مسئله ۱۲-۶-۷ ظاهر خواهد شد. ۲۱-۲-۴ بردارهای A و B به کمک تانسور T به یکدیگر مربوط می‌شوند.

$$B = TA$$

نشان دهید که اگر A و B معلوم باشند، جواب یکتایی برای مؤلفه‌های T وجود ندارد. به همین دلیل تقسیم برداری B/A (جز در حالت خاص بردارهای موازی که در آن صورت T اسکالر است) تعریف نشده است.

۲۲-۲-۴ می‌توانیم برای بردار معلوم A به جستجوی یک وارون به صورت بردار A^{-1} پردازیم؛ یعنی

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$$

نشان دهید که این رابطه به تنهایی برای تعریف A^{-1} کافی نیست. به عبارت دیگر A بینهایت وارون دارد. ۲۳-۲-۴ اگر A قطری باشد، و عناصر آن همه با هم متفاوت و A و B تعویض پذیر باشند، نشان دهید که B قطری است.

۲۴-۲-۴ نشان دهید که اگر A و B قطری باشند، تعویض پذیرند.

۲۵-۲-۴ نشان دهید که اگر هر دو ماتریسی از سه ماتریس A، B و C با هم تعویض پذیر باشند، آنگاه $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CBA)$.

۲۶-۲-۴ ماتریسهای تکانه زاویه‌ای در رابطه تعویض پذیری زیر صدق می‌کنند

$$[M_i, M_j] = iM_k \quad (i, j \text{ و } k \text{ چرخه‌ای})$$

نشان دهید که رد هر یک از ماتریسهای تکانه زاویه‌ای صفر است.
۲-۲۷ (الف) عملگر Tr از هر ماتریس، رد آنرا می‌دهد، یعنی

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

نشان دهید که Tr عملگری خطی است. (ب) عملگر \det از هر ماتریس، دترمینان آنرا می‌دهد، یعنی

$$\det(A) = A \text{ دترمینان}$$

نشان دهید که \det ، عملگری خطی نیست.

۲-۲۸ (الف) A و B دارای خاصیت پادتعویض‌پذیری‌اند. همچنین $A^2 = 1$ و $B^2 = 1$ ؛ نشان دهید $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$.

یادآوری: ماتریسهای پاؤلی و دیراک (بخش ۴-۵) نمونه‌های خاصی از این گونه ماتریسها به‌شمار می‌آیند.

۲-۲۹ برای بردار ستونی N بعدی $|x\rangle$ و بردار سطری N بعدی $\langle y|$ ، نشان دهید

$$\text{Tr}(|x\rangle\langle y|) = \langle y|x\rangle$$

یادآوری: $|x\rangle\langle y|$ یعنی بردار ستونی $|x\rangle$ ضربدر بردار سطری $\langle y|$. نتیجه، یک ماتریس مربعی $N \times N$ است.

۲-۳۰ (الف) اگر دو ماتریس ناتکین تعویض‌پذیر باشند، نشان دهید که رد هر یک صفر است. (ناتکین یعنی اینکه دترمینان عناصر ماتریس مخالف صفر است.) (ب) برای آنکه شرایط بند (الف) برقرار باشد، A و B باید ماتریسهایی $n \times n$ با n زوج باشند. نشان دهید که اگر n فرد باشد، تناقضی بروز خواهد کرد.

۲-۳۱ اگر ماتریس A وارونی داشته باشد. نشان دهید که این وارون یکتاست.

۲-۳۲ اگر A^{-1} دارای عناصر زیر باشد

$$a_{ij}^{-1} = \frac{C_{ji}}{|A|}$$

که در آن C_{ji} هم‌عامل (ji) ام $|A|$ است، نشان دهید

$$A^{-1}A = 1$$

بنابراین، (اگر $|A| \neq 0$) A^{-1} وارون A است.

یادآوری: در محاسبات عددی گاهی پیش می‌آید که $|A|$ خیلی به صفر نزدیک می‌شود. در این صورت، دچار مشکل خواهیم شد.

۳۳-۲-۴ نشان دهید که $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

[راهنمایی: از مسئله ۶-۲-۴ استفاده کنید.]

یادآوری: اگر $\det A$ صفر باشد، A وارونی ندارد، و تکین است.

۳۴-۲-۴ ماتریسهای M_L را چنان پیدا کنید که حاصلضرب $M_L A$ برابر A باشد، با این تفاوت که:

(الف) سطر i ام آن در ثابت k ضرب شده باشد ($a_{ij} \rightarrow ka_{ij}$ ، $j = 1, 2, 3, \dots$)، (ب) به جای سطر i ام، سطر i ام اصلی منهای مضربی از سطر m ام قرار گرفته باشد ($a_{ij} \rightarrow a_{ij} - ka_{mj}$ ، $a_{ij} \rightarrow a_{mj}$ ، $j = 1, 2, 3, \dots$)، (ج) سطرهای i ام و m ام با یکدیگر تعویض شده باشند ($a_{ij} \rightarrow a_{mj}$ ، $a_{mj} \rightarrow a_{ij}$ ، $j = 1, 2, 3, \dots$).

۳۵-۲-۴ ماتریسهای M_R را چنان پیدا کنید که حاصلضرب AM_R برابر با A باشد، با این تفاوت که:

(الف) ستون i ام آن در ثابت k ضرب شده باشد ($a_{ji} \rightarrow ka_{ji}$ ، $j = 1, 2, 3, \dots$)، (ب) به جای ستون i ام، ستون i ام اصلی منهای مضربی از ستون m ام قرار گرفته باشد ($a_{ji} \rightarrow a_{ji} - ka_{jm}$ ، $a_{ji} \rightarrow a_{jm}$ ، $j = 1, 2, 3, \dots$)، (ج) ستونهای i ام و m ام با یکدیگر تعویض شده باشند ($a_{ji} \rightarrow a_{jm}$ ، $a_{jm} \rightarrow a_{ji}$ ، $j = 1, 2, 3, \dots$).

۳۶-۲-۴ وارون ماتریس زیر را بیابید

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

۳۷-۲-۴ (الف) معادله ۴-۲ (و معادله‌های متناظر با dy و dz) را به صورت تک معادله ماتریسی

زیر بنویسید

$$\langle dx_k \rangle = J \langle dq_j \rangle$$

J ماتریس مشتقها، یا ماتریس ژاکوبی است. نشان دهید:

$$\langle dx_k | dx_k \rangle = \langle dq_i | G | dq_j \rangle$$

که در آن (ماتریس) متریک G دارای عناصر g_{ij} است که از معادله ۶-۲ به دست می‌آیند.

(ب) نشان دهید:

$$\det(J)dq_1 dq_2 dq_3 = dx dy dz$$

$\det(J)$ ، ژاکوبی متداول است.

۳۸-۲-۴ فایده ماتریسها، از اینکه فقط به کار فیزیکدانان بیاید، خیلی فراتر است. ماتریسها هر جا که واجد رابطه‌هایی خطی باشد، ظاهر می‌شوند. مثلاً، در بررسی جابه‌جایی جمعیت، کسر اولیه از جمعیت کل ثابت را، که در هر یک از n منطقه (یا صنعت یا مذهب و مانند آنها) وجود دارد، به کمک بردار ستونی n مؤلفه‌ای P نمایش می‌دهند. جابه‌جایی مردم از یک منطقه به منطقه دیگر در یک زمان معین، به کمک ماتریس (تصادفی) $T(n \times n)$ توصیف می‌شود. T_{ij} کسری از جمعیت موجود در منطقه j ام است که به منطقه i ام مهاجرت می‌کند. (آنها که جابه‌جا نمی‌شوند در $j = i$ به حساب می‌آیند.) اگر P توزیع جمعیت اولیه را توصیف کند، توزیع جمعیت پایانی از معادله ماتریسی $TP = Q$ به دست می‌آید. از تعریف P داریم: $\sum_{i=1}^n P_i = 1$. (الف) نشان دهید که پایستگی جمعیت مردم ایجاب می‌کند:

$$\sum_{i=1}^n T_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(ب) ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 1$$

تداوم پایستگی جمعیت مردم را نشان می‌دهد.

۳۹-۲-۴ ماتریس 6×6 A را با عناصر $a_{ij} = 5^{-|i-j|}$ و $i, j = 0, 1, 2, \dots, 5$ در نظر بگیرید. پیدا کنید A^{-1} عناصر ماتریسی A^{-1} را تا ۵ رقم اعشار به دست آورید.

جواب:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

جدول ۱-۴ ماتریسهای دیراک

σ_z	σ_y	σ_x	1	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
σ_z	σ_y	σ_x	1	
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	ρ_x
a_z	a_y	a_x	$\rho_x, -Y_\delta$	
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$	ρ_z
Y_z	Y_y	Y_x	ρ_z, a_δ	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	ρ_z
δ_z	δ_y	δ_x	ρ_z, a_z, Y_z, β	

۴۰-۲-۴ مسئله ۷-۱-۴ را می توان به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$AX = C$$

A^{-1} را بیابید و X را به صورت $A^{-1}C$ محاسبه کنید.

۴۱-۲-۴ (الف) زیر برنامه ای بنویسید که ماتریسهای مختلط را در هم ضرب کند. فرض کنید که شکل کلی این ماتریسهای مختلط مستطیلی باشد. (ب) با ضرب کردن زوجهایی از ماتریسهای 4×4 دیراک در جدول ۱-۴، زیر برنامه ای را که نوشته اید بیازمایید.

۴۲-۲-۴ الف) زیربرنامه‌ای بنویسید که زیربرنامه ضرب ماتریسهای مختلط مسئله ۴-۲-۴۱ را بخواند و گروه تعویضگر دو ماتریس مختلط را محاسبه کند. (ب) زیربرنامه گروه تعویضگر مختلطی را که نوشته‌اید با استفاده از ماتریسهای مسئله ۴-۲-۱۶ بیازمایید.

۴۳-۲-۴ چندجمله‌ای درجه $(n - 1)$ ای را چندجمله‌ای درونیابی می‌نامند که توسط (و با عبور از) n نقطه (x_i, y_i) ، با x_i های جمله‌ای متمایز، تعیین می‌شوند. این چندجمله‌ای درونیابی اساس کوادراتور عددی را که در پیوست ۲، مطرح می‌شوند، تشکیل می‌دهد. (الف) نشان دهید که لازمه آنکه یک چندجمله‌ای درجه $(n - 1)$ ام بر حسب x ، از همه n نقطه (x_i, y_i) با x_i های کاملاً متمایز بگذرد، آن است که معادله همزمان به صورت زیر برقرار باشد:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(ب) یک برنامه کامپیوتری بنویسید که n نقطه داده شده را بخواند و n ضریب a_j را بدهد. اگر به زیربرنامه‌ای برای حل دستگاه معادلات چندمجهولی دسترسی دارید، از آن استفاده کنید. (ج) دستگاه چند معادله و چند مجهول بند (الف) را، به صورت معادله ماتریسی زیر بنویسید

$$XA = Y$$

(د) محاسبه کامپیوتری بند (ب) را تکرار کنید، ولی این بار با وارون‌سازی ماتریس X (باز هم با بهره‌گیری از یک زیربرنامه)، بردار A را به دست آورید.

۴۴-۲-۴ محاسبه مقادیر پتانسیل الکتروستاتیکی داخل یک استوانه به‌قرار زیر است

$$V(0,0) = 52,640 \quad V(0,6) = 25,844$$

$$V(0,2) = 48,292 \quad V(0,8) = 12,648$$

$$V(0,4) = 38,270 \quad V(1,0) = 0$$

می‌خواهیم مقادیر شناسه‌هایی را بیابیم که به‌ازای آنها V برابر $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ و 50° می‌شود. $V(x)$ را به صورت حدی $\sum_{n=0}^5 a_{2n} x^{2n}$ مشخص کنید. (تقریبات موجود در مسئله اصلی ایجاب می‌کند که $V(x)$ تابع زوجی از x باشد.) ضرایب a_{2n} را تعیین کنید. ریشه‌های $V(x) - 10^\circ = 0$ ، $0 \leq x \leq 1$ را با استفاده از $V(x)$ که اینک تابع معلومی از x است، به دست آورید. همین کار را برای $V(x) - 20^\circ$ و الی آخر تکرار کنید.

جواب :

$$a_0 = 52,640$$

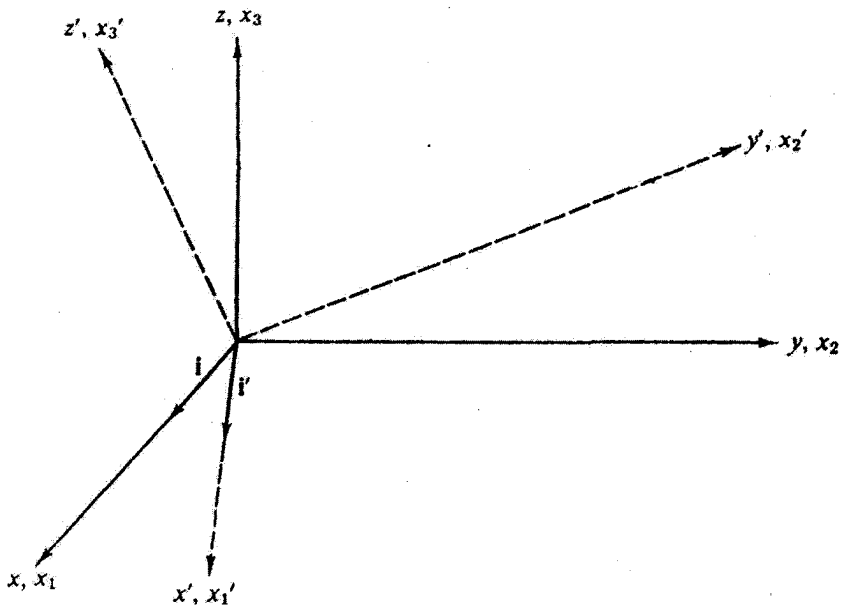
$$a_2 = -117,676$$

$$V(0,68851) = 20$$

۳-۴ ماتریسهای متعامد

فضای سه‌بعدی معمولی را می‌توان به کمک مختصات دکارتی (x, y, z) معمولی توصیف کرد. مجموعهٔ مختصات دکارتی دیگری مانند (x', y', z') را به صورتی در نظر می‌گیریم که در آن مبدأ محورها بر مبدأ محوره‌های مجموعهٔ اولی منطبق، ولی سمتگیری محورها متفاوت باشد (شکل ۱-۴). می‌توان گفت که محوره‌های مختصات پریم‌دار از چرخش محوره‌های مختصات غیر پریم‌دار به دست می‌آیند. با توجه به اینکه این چرخش، یک عمل خطی است، انتظار داریم که معادلهٔ ماتریسی میان پایهٔ پریم‌دار با پایهٔ غیر پریم‌دار ارتباط برقرار کند.

در این بخش، به تکرار قسمتهایی از فصلهای ۱ و ۳ در قالبی اندک متفاوت و با منظوری متفاوت می‌پردازیم. قبلاً توجه خود را بر بردار یا تانسور متمرکز کردیم. در مورد تانسورها، بیشتر



شکل ۱-۴ دستگاه محوره‌های مختصات دکارتی.

بر خواص تبدیل تانسورها تأکید می‌شد و این خواص اساس کار را تشکیل می‌دادند. در اینجا، بر توصیف چرخش مختصات و ماتریس مربوط به آن تأکید می‌شود. خواص تبدیل، یعنی رفتار ماتریس در هنگام تغییر پایه، در آخر همین بخش مطرح می‌شود. خواص تبدیل در فضاهاى برداری مختلط را در بخشهای ۴-۵ و ۴-۶ بررسی خواهیم کرد.

کسینوسهای هادی

بردار یکه (i') در امتداد محور x' را می‌توان با روش معمولی تصویرکردن، به مؤلفه‌هایی در راستای محورهاى x ، y و z تجزیه کرد.

$$i' = i \cos(x', x) + j \cos(x', y) + k \cos(x', z) \quad (47-4)$$

معادله ۴۷-۴ مثال خاصی از روابط خطی است که در آغاز بخش ۴-۲ به آنها برخوردیم. این کسینوسها، یعنی کسینوسهای هادی، را برای راحتی به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos(x', x) &= i' \cdot i = a_{11} \\ \cos(x', y) &= i' \cdot j = a_{12} \\ \cos(x', z) &= i' \cdot k = a_{13} \end{aligned} \quad (48-4)$$

در ادامه، داریم

$$\begin{aligned} \cos(y', x) &= j' \cdot i = a_{21} & (a_{21} \neq a_{12}) \\ \cos(y', y) &= j' \cdot j = a_{22} \end{aligned} \quad (49-4)$$

و الی آخر. اینک معادله ۴۷-۴ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$i' = ia_{11} + ja_{12} + ka_{13}$$

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned} j' &= ia_{21} + ja_{22} + ka_{23} \\ k' &= ia_{31} + ja_{32} + ka_{33} \end{aligned} \quad (50-4)$$

همچنین می‌شود i ، j و k را نیز به مؤلفه‌هایی در دستگاه پیریم‌دار تجزیه کرد. در این صورت

$$\begin{aligned}i &= i'a_{11} + j'a_{21} + k'a_{31} \\j &= i'a_{12} + j'a_{22} + k'a_{32} \\k &= i'a_{13} + j'a_{23} + k'a_{33}\end{aligned}\quad (51-4)$$

با اختصاص دادن زیرنویس ۱ برای i و i' و زیرنویس ۲ برای j و j' و زیرنویس ۳ برای k و k' ، می‌بینیم که در هر مورد زیرنویس اول در a_{ij} به بردار یکهٔ پیریم‌دار (i, j, k) ، و زیرنویس دوم به بردار یکهٔ غیر پیریم‌دار (i', j', k') مربوط می‌شود.

کاربرد در مورد بردارها

اگر برداری را در نظر بگیریم که مؤلفه‌هایش توابعی از مکان در فضا باشند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(x, y, z) &= iV_x + jV_y + kV_z \\&= \mathbf{V}'(x', y', z') = i'V'_{x'} + j'V'_{y'} + k'V'_{z'}\end{aligned}\quad (52-4)$$

زیرا یک نقطه را می‌شود هم با مختصات (x, y, z) و هم با مختصات (x', y', z') توصیف کرد. توجه کنید که \mathbf{V} و \mathbf{V}' هر دو از نظر هندسی بردار واحدی‌اند (ولی مؤلفه‌های مختلف دارند). محورهای مختصات را می‌توان چرخاند، ولی بردار ثابت می‌ماند. i ، j و k را با استفاده از معادلهٔ ۴-۵۰ حذف می‌کنیم؛ معادلهٔ ۴-۵۲ را می‌شود به صورت سه معادلهٔ اسکالر زیر نوشت

$$\begin{aligned}V'_{x'} &= a_{11}V_x + a_{12}V_y + a_{13}V_z \\V'_{y'} &= a_{21}V_x + a_{22}V_y + a_{23}V_z\end{aligned}\quad (53-4)$$

$$V'_{z'} = a_{31}V_x + a_{32}V_y + a_{33}V_z$$

این روابط مخصوصاً در مورد مختصات یک نقطه، (x, y, z) و (x', y', z') ، نیز برقرارند؛ داریم

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z\end{aligned}\quad (54-4)$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

در اینجا بهتر است نمادگذاری را اندکی تغییر دهیم. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x_1 \\ y &\rightarrow x_2 \\ z &\rightarrow x_3 \end{aligned} \quad (55-4)$$

در مورد مختصات پریم‌دار هم وضع به همین منوال است. مجموعه سه معادله ۵۴-۴ را با استفاده از این نمادگذاری می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \quad (56-4)$$

که در آن z مقادیر ۱، ۲ و ۳ را به خود می‌گیرد و نتیجه، سه معادله مجزا از یکدیگر است. اینک این نتایج را کنار می‌گذاریم و روش دیگری را برای حل همین مسئله پی می‌گیریم. دو دستگاه مختصات (x_1, x_2, x_3) و (x'_1, x'_2, x'_3) را، با مبدأ مختصات مشترک، در نظر می‌گیریم. در این دستگاهها نقطه‌ای را بررسی می‌کنیم که مختصات آن در دستگاه غیر پریم‌دار (x, y, z) و در دستگاه پریم‌دار (x', y', z') باشد. به ابهام و تناقضی که معمولاً پیش می‌آید توجه کنید. نماد x هم محور مختصات و هم یک فاصله معین در راستای این محور را نشان می‌دهد. دستگاه مختصات ما خطی است؛ از این رو x'_i باید ترکیبی خطی از x_i ها باشد. قرار می‌دهیم

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \quad (57-4)$$

به آسانی می‌شود پی برد که a_{ij} ها با کسینوسهایی هادی که با آنها آشناییم، یکی‌اند. این هم‌ارزی را بعداً برای حالت دوبعدی نشان می‌دهیم.

اگر دو مجموعه کمیت، یکی (V_1, V_2, V_3) در دستگاه غیر پریم‌دار و دیگری (V'_1, V'_2, V'_3) در دستگاه پریم‌دار داشته باشیم، که به همان صورت ارتباط مختصات یک نقطه در دو دستگاه (معادله ۵۷-۴)، با یکدیگر ارتباط داشته باشند، یعنی

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} V_j \quad (58-4)$$

آنگاه، بنابر تعریف بردار در بخش ۱-۲، کمیت‌های (V_1, V_2, V_3) معرف مؤلفه‌های یک برداراند؛ یعنی این بردار برحسب خواص تبدیل مؤلفه‌هایش تحت چرخش دستگاه مختصات تعریف می‌شود.

در این معنا، مختصات یک نقطه را به صورت یک بردار نمونه گرفته ایم. به کارایی و فایده این تعریف وقتی پی می بریم که تعمیم آنرا در فصل ۳ برای تعریف شبه بردارها و تانسورها در نظر بگیریم. از معادله ۴-۵۶ می توانیم اطلاعات مفیدی درباره a_{ij} ، که سمتگیری دستگاه مختصات (x'_1, x'_2, x'_3) را نسبت به دستگاه (x_1, x_2, x_3) توصیف می کند، استخراج کنیم. طول پاره خط از مبدأ به مکان نقطه در هر دو سیستم یکی است. برای راحتی، مجذور می کنیم

$$\begin{aligned} \sum_i x_i^2 &= \sum_i x_i'^2 \\ &= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) \left(\sum_k a_{ik} x_k \right)^* \\ &= \sum_{j,k} x_j x_k \sum_i a_{ij} a_{ik} \end{aligned} \quad (59-4)$$

این رابطه برای همه نقاط برقرار است، فقط و فقط به شرطی که:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (60-4)$$

درستی معادله ۴-۶۰ را، در صورت نیاز، می توان با مراجعه به معادله ۴-۵۹، و قرار دادن

$$\Gamma = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)$$

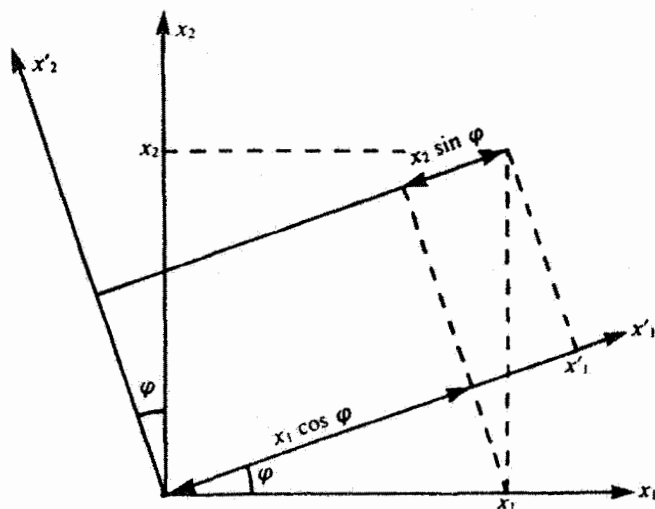
و الی آخر، برای محاسبه نه رابطه ای که از معادله ۴-۶۰ به دست می آیند، اثبات کرد. این فرایند صادق و برقرار است، زیرا معادله ۴-۵۹ به ازای مجموعه معینی از a_{ij} ها باید برای تمام Γ ها برقرار باشد. معادله ۴-۶۰ را که یکی از نتایج شرط ثابت (ناوردا) ماندن طول تحت چرخش دستگاه مختصات به شمار می آید، شرط تعامد می نامند. اگر به صورت ماتریس A نوشته شوند، ماتریس متعامدی را تشکیل می دهند. دقت کنید که معادله ۴-۶۰ یک حاصلضرب ماتریسی نیست. بعداً آنرا به صورت حاصلضرب اسکالر دو ستون از A تعبیر می کنیم. در نمادگذاری ماتریسی، معادله ۴-۵۶ به صورت زیر درمی آید

$$|x'| = A|x| \quad (61-4)$$

شرایط تعامد - حالت دوبعدی

با در نظر گرفتن جزئیات چرخش در دوبعد، می شود به درک بهتری از a_{ij} ها و شرط تعامد دست

* دقت کنید که از دو شاخص متفاوت j و k استفاده شده است.



شکل ۲-۴

یافت. (این چرخش را می‌توان چرخشی از دستگاه سه‌بعدی تلقی کرد که در آن محورهای x_1 و x_2 حول محور x_3 چرخیده باشند.) با توجه به شکل ۲-۴

$$x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \quad (۶۲-۴)$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi$$

بنابراین، در معادله ۶۱-۴ داریم

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (۶۳-۴)$$

توجه کنید که A به‌ازای $\varphi = 0$ به ماتریس یکه تبدیل می‌شود. چرخش صفر به این معنی است که هیچ چیز تغییر نکرده است. با توجه به شکل ۲-۴

$$a_{11} = \cos \varphi = \cos(x'_1, x_1) \quad (۶۴-۴)$$

$$a_{12} = \sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(x'_1, x_2)$$

والی آخر. به‌این ترتیب، عناصر ماتریسی a_{ij} همان کسینوسهای هادی‌اند. معادله ۶۰-۴، یعنی

شرط تعامد، به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi &= 1 \\ \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (۶۵-۴)$$

تعمیم به سه بعد (یعنی چرخش پاد ساعتگرد مختصات به اندازهٔ زاویهٔ φ حول x_3) به این قرار است:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۶۶-۴)$$

$a_{22} = 1$ بیانگر این واقعیت است که $x'_2 = x_2$ ؛ زیرا چرخش حول محور x_3 صورت گرفته است. صفرها ضامن این معنا هستند که x'_1 و x'_2 به x_1 و x_2 بستگی ندارند. به زبان پیچیده‌تر، x_1 و x_2 یک زیرفضای ناورد را می‌تند، در حالی که x_3 خود به تنهایی یک زیرفضای ناوردا را تشکیل می‌دهد. شکل کلی A تحویل‌پذیر است. معادلهٔ ۶۶-۴ یکی از روشهای ممکن برای تجزیه به شمار می‌آید.

ماتریس وارون، A^{-1}

بار دیگر ماتریس تبدیل کلی A را در نظر می‌گیریم؛ ماتریس وارون A^{-1} ، بنابر تعریف، عبارت است از

$$|x\rangle = A^{-1}|x'\rangle \quad (۶۷-۴)$$

یعنی، A^{-1} وارون چرخشی را توصیف می‌کند که توسط A داده می‌شود و دستگاه مختصات را به مکان اول بازمی‌گرداند. به بیان نمادها، معادله‌های ۶۱-۴ و ۶۷-۴ به صورت زیر با هم ترکیب می‌شوند

$$|x\rangle = A^{-1}A|x\rangle \quad (۶۸-۴)$$

و با توجه به اینکه $|x\rangle$ اختیاری است، داریم

$$A^{-1}A = 1 \quad (۶۹-۴)$$

یعنی ماتریس یکه. به همین ترتیب، با استفاده از معادله‌های ۶۱-۴ و ۶۷-۴ و حذف $|x\rangle$ به جای $|x'\rangle$ داریم

$$AA^{-1} = 1 \quad (۷۰-۴)$$

ماتریس ترانهاد، \bar{A}

می‌توانیم با بهره‌گیری از شرط تعامد، عناصر ماتریس وارون A^{-1} را تعیین کنیم. شرط تعامد، معادله ۶۰-۴، با تعریف ضرب ماتریسی سازگار نیست، ولی می‌توان آن را با ارائه تعریف ماتریس جدیدی، \bar{A} ، به صورت زیر، به شکل مورد نیاز در آورد

$$\bar{a}_{ji} = a_{ij} \quad (۷۱-۴)$$

یعنی \bar{A} که "ترانهاد A" نام دارد، با تعویض سطرها و ستونهای A به دست می‌آید. معادله ۶۰-۴ به این صورت در می‌آید

$$\bar{A}A = 1 \quad (۷۲-۴)$$

این عبارت، بیان مجدد شرط تعامد است و می‌شود آن را به عنوان تعریف تعامد گرفت. با ضرب کردن معادله ۷۲-۴ از طرف راست در A^{-1} ، و با استفاده از معادله ۷۰-۴، داریم

$$\bar{A} = A^{-1} \quad (۷۳-۴)$$

این نتیجه مهم که وارون با ترانهاد برابر است، فقط در مورد ماتریسهای متعامد صادق است، و در واقع می‌شود آن را به بیان دیگری از شرط تعامد دانست. با ضرب کردن معادله ۷۳-۴ از طرف چپ در A، می‌رسیم به

$$A\bar{A} = 1 \quad (۷۴-۴)$$

یا

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \quad (۷۵-۴)$$

که خود صورت دیگری است از شرط تعامد.

به طور خلاصه شرط تعامد را می‌شود به چند نحوهٔ هم‌ارز بیان کرد:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (\text{الف-۴})$$

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \quad (\text{ب-۴})$$

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = 1 \quad (\text{ج-۴})$$

$$\tilde{A} = A^{-1} \quad (\text{د-۴})$$

هر یک از این روابط بیانگر یک شرط لازم و یک شرط کافی برای متعامد بودن A به‌شمار می‌آیند. اکنون می‌توان دید و پی برد که چرا واژهٔ متعامد برای این ماتریسها مناسب است. با ماتریسهای کسینوسهای هادی به صورت کلی زیر آشناییم

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن a_{ij} کسینوس زاویهٔ بین x'_i و x_j است. بنابراین، a_{11} ، a_{12} و a_{13} کسینوسهای هادی x'_1 نسبت به x_1 ، x_2 و x_3 هستند. این سه عنصر A طول واحدی در راستای x'_1 ، یعنی بردار یکهٔ i' ، را تعریف می‌کنند:

$$i' = ia_{11} + ja_{12} + ka_{13}$$

رابطهٔ تعامد (معادلهٔ ۴-۷۵) بیان سادهٔ این نکته است که بردارهای یکهٔ i' ، j' و k' متقابلاً بر هم عمودند یا متعامدند. ماتریس تبدیل متعامد A یک دستگاه مختصات متعامد را به دستگاه مختصات متعامد دیگری تبدیل می‌کند.

به‌عنوان نمونه‌ای از کاربرد ماتریسها، می‌توان بردارهای یکه در مختصات قطبی کروی را به صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (۴-۷۷)$$

که در آن C در مسئلهٔ ۲-۵-۱ داده شده است. این معادله هم‌ارز معادلهٔ ۴-۵۰ است که در آن r_0 ، θ_0 و φ_0 به جای i' ، j' و k' قرار گرفته‌اند. از بررسیهای قبلی برمی‌آید که C متعامد است.

از این رو، رابطهٔ وارون به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \bar{C} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (78-4)$$

و مسئلهٔ ۲-۵-۵ به کمک واریسی و کاوش حل می‌شود. در تبدیل یک سری توانی به یک سری از توابع متعامد (متعامدسازی گرام-اشمیت) و در حل عددی معادله‌های انتگرالی، به کاربردهای مشابهی از وارون ماتریسها برمی‌خوریم.

چرخشهای متوالی، ضرب ماتریسی

به ماتریسهای متعامد بازمی‌گردیم، و فرض می‌کنیم که به دنبال چرخش دستگاه مختصات

$$|x'\rangle = A|x\rangle \quad (79-4)$$

چرخش دومی پدید می‌آید که ماتریس B، به قرار زیر، آن را بیان می‌کند

$$|x''\rangle = B|x'\rangle \quad (80-4)$$

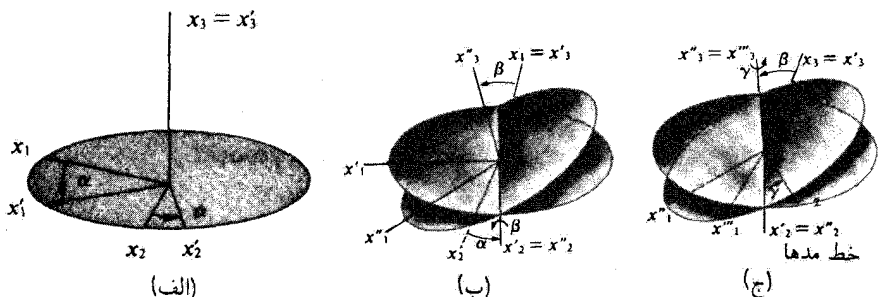
بیان مؤلفه‌ای این عبارت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x''_i &= \sum_j b_{ij} x'_j \\ &= \sum_j b_{ij} \sum_k a_{jk} x_k \\ &= \sum_k \left(\sum_j b_{ij} a_{jk} \right) x_k \end{aligned} \quad (81-4)$$

مجموع‌یابی روی j ضربی ماتریسی است که ماتریس $C = BA$ را تعریف می‌کند. به‌گونه‌ای که

$$x''_i = \sum_k c_{ik} x_k \quad (82-4)$$

در اینجا نیز، تعریف ضرب ماتریسی به‌کار آمد و در واقع دلیل وجود این تعریف نیز همین فایدهٔ آن است. تعبیر فیزیکی این حکم آن است که حاصلضرب ماتریسی دو ماتریس، BA، چرخشی است که دستگاه غیربریم‌دار را مستقیماً به دستگاه دوبریم‌دار تبدیل می‌کند.



شکل ۳-۴ (الف) چرخش به اندازه زاویه α حول x_3 ; (ب) چرخش به اندازه زاویه β حول x'_1 ; (ج) چرخش به اندازه زاویه γ حول x''_1 .

زاویه‌های اویلر

ماتریس تبدیل A حاوی نه کسینوس هادی است. روشن است که تنها سه تا از این نه تا از یکدیگر مستقل‌اند؛ معادلهٔ ۴-۶۰ شش قید بین آنها برقرار می‌کند. به عبارت دیگر، می‌توان گفت که دو پارامتر $(\theta$ و φ در مختصات قطبی کروی) برای تثبیت محور چرخش لازم است. پس از آن به یک پارامتر دیگر برای توصیف مقدار چرخش حول محور مشخص شده نیاز است. در فرمولبندی لاگرانژی مکانیک (بخش ۱۷-۳) لازم است که A را با استفاده از مجموعه‌ای از سه پارامتر مستقل به جای کسینوسهای هادی مشخص کنیم. گزینهٔ معمولی برای این پارامترها زوایای اویلرند.^۱

هدف آن است که سمتگیری دستگاه چرخیدهٔ نهایی (x''_1, x''_2, x''_3) را نسبت به دستگاه مختصات اولیه (x_1, x_2, x_3) توصیف کنیم. دستگاه آخری را در سه مرحله به دست می‌آوریم که هر مرحله شامل یک چرخش است که توسط یکی از زوایای اویلر توصیف می‌شود (شکل ۳-۴).

۱. محورهای x'_1 و x'_2 و x'_3 از چرخش پادساعتگرد دستگاه x_1 و x_2 و x_3 حول محور x_3 به اندازه زاویه α به دست می‌آیند (محورهای x_2 و x'_2 بر یکدیگر منطبق‌اند).
۲. محورهای x''_1 و x''_2 و x''_3 از چرخش پادساعتگرد دستگاه x'_1 و x'_2 و x'_3 به اندازه زاویه β حول محور x'_1 به دست می‌آیند^۲ (محورهای x'_1 و x''_1 بر یکدیگر منطبق‌اند).
۳. سومین و آخرین چرخش، چرخش پادساعتگردی است به اندازه زاویه γ حول محور x''_1 که حاصل آن دستگاه x''_1, x''_2, x''_3 است (محورهای x''_1 و x'''_1 بر یکدیگر منطبق‌اند).

۱. تقریباً به تعداد مؤلفان، تعریفهای متفاوت برای زوایای اویلر ارائه شده است. در اینجا، گزینه‌ای را مطرح می‌کنیم که عموماً کسانی آنها را برگزیده‌اند که در زمینهٔ نظریهٔ گروه‌ها و نظریهٔ کوانتومی تکانهٔ زاویه‌ای کار می‌کنند (با بخش ۹-۴ مقایسه کنید).

۲. بسیاری از مؤلفان این چرخش دوم را حول محور x'_1 می‌گیرند.

سه ماتریسی که این چرخشها را توصیف می‌کنند به‌قرار زیرند:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۸۳-۴)$$

که دقیقاً مانند معادله ۶۶-۴ است.

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (۸۴-۴)$$

و

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۸۵-۴)$$

کل چرخش را حاصلضرب سه‌گانه ماتریسی زیر توصیف می‌کند

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha) \quad (۸۶-۴)$$

(شکل مؤلفه‌ای تبدیلیهای متوالی را در معادله‌های ۷۹-۴ تا ۸۲-۴ از نظر گذرانندیم.)
به‌ترتیب عوامل ضرب توجه کنید: $R_z(\alpha)$ اول، سپس $R_y(\beta)$ و سرانجام $R_z(\gamma)$ عمل می‌کند. از ضرب مستقیم این ماتریسها می‌رسیم به

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha & & & \\ -\sin \gamma \cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha & & & \\ \sin \beta \cos \alpha & & & \\ \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta & & \\ -\sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta & & \\ \sin \beta \sin \alpha & & \cos \beta & \end{pmatrix} \quad (۸۷-۴)$$

از برای نهادن عنصر به عنصر $A(a_{ij})$ با عنصر $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ، کسینوسهای هادی را برحسب سه زاویه اویلر به‌دست می‌آوریم. می‌توانیم از این همانندی زاویه‌ای درستی اتحادهای مربوط به کسینوسهای هادی، در معادله ۴۱-۱ را تحقیق کنیم، ولی روشی که در مسئله ۳-۳-۴ به‌کار رفت، بسیار ظریفتر است.

دو روش

توصیف ماتریسی ما از چرخش به گروه O_3^+ می‌انجامد، که در بخشهای ۴-۱۰ و ۴-۱۱ به آن خواهیم پرداخت. چرخشها را می‌توان توسط گروه $SU(2)$ و کوآترنیونها نیز توصیف کرد. کارایی و انعطاف‌پذیری ماتریسها، باعث شد که در اوایل این قرن کوآترنیونها به دست فراموشی سپرده شوند.^۱ غالباً با مفاهیم و روشهایی در فیزیک جدید ذرات مواجه می‌شویم. گروه $SU(2)$ را نیز در بخشهای ۴-۱۰ و ۴-۱۱ بررسی خواهیم کرد.

توصیف چرخش برحسب زوایای اویلر پایه‌ای را برای مطرح کردن گروه چرخش در بخش ۴-۱۰ فراهم می‌آورد.

خواهیم دید که در بخشهای آتی، ماتریسها به دو طریق بررسی شده‌اند: یکی از طریق مؤلفه‌ها، و دیگری به صورت موجوداتی تک. هر کدام از این شیوه‌ها از مزایای خاص خود برخوردارند و هر دو مفیدند. محاسبه $(ST)^{-1}$ را در نظر می‌گیریم که در آن ST ماتریسی (حاصلضربی) است که وارون دارد. در این صورت، روشن است که

$$(ST)(ST)^{-1} = 1$$

این عبارت را از سمت چپ، ابتدا در S^{-1} و سپس در T^{-1} به طوری ضرب می‌کنیم، داریم

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1} \quad (۸۸-۴)$$

وارون حاصلضرب برابر است با حاصلضرب وارونها به ترتیب وارون. تعداد عوامل ضرب هر چند تا باشند، می‌توان این حکم را تعمیم داد.

از سوی دیگر، شاید در محاسبه $(\tilde{S}T)$ بهترین راه آن باشد که به مؤلفه‌ها توجه کنیم. فرض کنید $U = ST$ ، که در آن S, T, U لزوماً متعامد نیستند. در این صورت، بنابر تعریف ترانهاد، داریم

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \sum_j s_{ij} t_{jk} \\ &= \sum_j \tilde{t}_{kj} \tilde{s}_{ji} \end{aligned}$$

ولی

$$u_{ik} = \tilde{u}_{ki}$$

1. Stephenson R J, "Development of Vector Analysis from Quaternions", *Am J Phys*, 34, 194 (1966).

و می‌توان نوشت

$$(\bar{S}\bar{T}) = \bar{T}\bar{S} \quad (۸۹-۴)$$

ترانهاد حاصلضرب برابر است با حاصلضرب ترانهادها به ترتیب وارون. توجه کنید که در این دو نمایش، S و T هیچیک الزاماً متعامد نیستند.

خواص تقارن

ماتریس ترانهاد در بحث مربوط به خواص تقارن نیز مفید است. اگر

$$A = \bar{A}, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (۹۰-۴)$$

ماتریس A را متقارن می‌نامند، در حالی که اگر،

$$A = -\bar{A}, \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad (۹۱-۴)$$

\bar{A} را پادمتقارن می‌نامند. در این نوع ماتریس عناصر قطری صفر می‌شوند. به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر ماتریس (مربعی) را می‌شود به صورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن با یک ماتریس پادمتقارن نوشت. اتحاد زیر را در نظر بگیرید

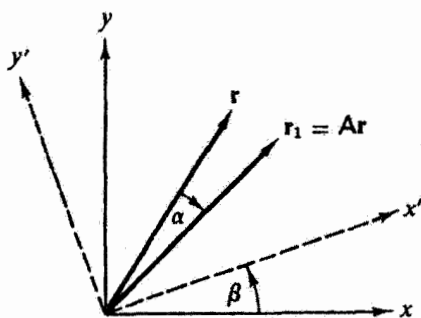
$$A = \frac{1}{2}[A + \bar{A}] + \frac{1}{2}[A - \bar{A}] \quad (۹۲-۴)$$

روشن است که $[A + \bar{A}]$ متقارن و $[A - \bar{A}]$ پادمتقارن است. این اتحاد مشابه ماتریسی معادله ۳-۲۲، مربوط به تانسورها، است.

تبدیل تشابهی

تا اینجا ماتریس متعامد را ماتریسی تعبیر کرده‌ایم که دستگاه مختصات را می‌چرخاند. این چرخش، مؤلفه‌های بردار ثابت را (که همراه با مختصات نمی‌چرخد)، تغییر می‌دهد (شکل ۱-۷). ولی معادله ۴-۸۹ را می‌توان با همان دقت به صورت چرخش بردار در جهت وارون نیز تعبیر کرد (شکل ۴-۴).

مشابه مستقیم این دو امکان: یکی چرخاندن بردار و ثابت نگه داشتن پایه، و دیگری چرخاندن پایه (در سوی عکس) و ثابت نگه داشتن بردار، در نظریه کوانتومی یافت می‌شود. چرخش (یا تبدیل زمانی) بردار حالت به تصویر شرویدینگری می‌انجامد. چرخش پایه و ثابت نگه داشتن بردار حالت، به تصویر هایزنبرگی منجر می‌شود.



شکل ۴-۴ مختصات ثابت بردار چرخیده.

فرض کنید ماتریس A ماتریسی باشد که بردار r را در محدوده موضعی که با r_1 نشان داده شده است، می چرخاند

$$r_1 = Ar \quad (۹۳-۴)$$

اینک مختصات را با اعمال ماتریس B که (x, y, z) را می چرخاند و به صورت (x', y', z') در می آورد، می چرخانیم

$$\begin{aligned} Br_1 &= BA r \\ &= BA(B^{-1}B)r \\ &= (BAB^{-1})Br \end{aligned} \quad (۹۴-۴)$$

Br_1 همان r_1 در دستگاه مختصات جدید است، همین تعبیر برای Br نیز صادق است. بنابراین، در این دستگاه جدید (Br) توسط ماتریس BAB^{-1} چرخیده و به موضع (Br_1) رفته است

$$\begin{array}{ccc} Br_1 & = & (BAB^{-1}) Br \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ r'_1 & = & A' \quad r' \end{array}$$

در دستگاه جدید، مختصات را به وسیله ماتریس B چرخانده اند، و A به شکل A' درآمده است، به گونه ای که

$$A' = BAB^{-1} \quad (۹۵-۴)$$

A' در فضای x', y', z' و z عمل می کند، همانگونه که A در فضای x, y, z عمل می کند.

تبدیلی که معادله ۹۵-۴ آن را تعریف می‌کند و در آن B می‌تواند هر ماتریسی باشد و ضرورتاً هم متعامد نیست، تبدیل تشابهی نامیده می‌شود. شکل مؤلفه‌ای معادله ۹۵-۴ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} a_{kl} b_{lj}^{-1} \quad (۹۶-۴)$$

اکنون اگر B متعامد باشد

$$b_{ji}^{-1} = \bar{b}_{jl} = b_{jl} \quad (۹۷-۴)$$

و

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} b_{jl} a_{kl} \quad (۹۸-۴)$$

در اینجا احتمالاً خوب است که بار دیگر A را یک عملگر تلقی کنیم؛ مثلاً عملگری که در بلور ناهمسانگرد با چرخش محورهای مختصات، بین چگالی جریان و میدان الکتریکی (بخش ۱-۳)، یا در جسم صلب چرخان بین تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای رابطه برقرار می‌کند (بخش ۴-۶). ماتریس A نمایشی است در یک دستگاه مختصات، یا یک پایه مفروض. اما خود A نیز جهت‌هایی دارد، مثلاً محورهای بلور، یا محورهای تقارن در جامد صلب چرخان و مانند آنها، به طوری که نمایش A به پایه بستگی پیدا می‌کند. تبدیل تشابهی چگونگی تغییر این نمایش را با تغییر پایه نشان می‌دهد.

ارتباط با تانسورها

از طریق مقایسه معادله ۹۸-۴ با معادله‌های بخش ۱-۳ پی می‌بریم که این معادله عبارت است از تعریف تانسور از رتبه دوم. بنابراین، ماتریسی که به کمک یک تبدیل تشابهی متعامد تبدیل می‌شود، بنابه تعریف، یک تانسور است. در این صورت، آشکار است که هر ماتریس متعامد A را که به صورت عملگری تعبیر شود که یک بردار را می‌چرخاند (معادله ۹۳-۴)، می‌توان تانسور نامید. ولی اگر ماتریس متعامد مجموعه‌ای از کسینوسهای هادی معین باشد که سمتگیری جدید دستگاه مختصات را می‌دهد، متضمن هیچ تبدیل تانسوری نیست.

خواص تقارنی و پادتقارنی که قبلاً تعریف کردیم، تحت تبدیلهای تشابهی متعامد به قوت خود باقی می‌مانند. فرض کنید A یک ماتریس متقارن باشد، $A = \bar{A}$ ، و

$$A' = BAB^{-1} \quad (۹۹-۴)$$

اکنون، با توجه به اینکه B متعامد است

$$\bar{A}' = \widetilde{BAB}^{-1} = \tilde{B}^{-1} \tilde{A} \tilde{B} = \tilde{B} \tilde{A} \tilde{B}^{-1} \quad (۱۰۰-۴)$$

ولی $A = \bar{A}$ بنابراین

$$\bar{A}' = BAB^{-1} = A' \quad (۱۰۱-۴)$$

یعنی، خاصیت تقارنی تحت تبدیل تشابهی متعامد ناورداست. در حالت کلی تقارن تحت تبدیل تشابهی نامتعامد دوام پیدا نمی‌کند.

مسائل

گوشزد: همهٔ عناصر ماتریسی را حقیقی بگیرید.

۱-۳-۴ نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس متعامد، متعامد است.

یادآوری: این خاصیت برای نشان دادن این حکم که همهٔ ماتریسهای متعامد $n \times n$ یک گروه را تشکیل می‌دهند (بخش ۱۰-۴) بسیار اهمیت دارد.

۲-۳-۴ اگر A متعامد باشد، نشان دهید که بزرگی دترمینان آن یک است.

۳-۳-۴ اگر A متعامد باشد و $\det A = +1$ ، نشان دهید که $a_{ij} = C_{ij}$ ، که در آن C_{ij} هم‌عامل a_{ij} است. از این خاصیت، اتحادهای معادلهٔ ۴۱-۱ به دست می‌آیند که در بخش ۴-۱ برای نشان دادن این حکم به کار رفت که حاصلضرب برداری بردارها (در فضای سه‌بعدی)، خود یک بردار است. [راهنمایی: به مسئلهٔ ۳۲-۲-۴ توجه کنید.]

۴-۳-۴ مجموعهٔ دیگری از زاویه‌های اویلر که معمولاً به کار می‌آیند، عبارت‌اند از

۱. چرخش پادساعتگرد به اندازهٔ زاویهٔ φ حول محور x_3 ؛

۲. چرخش پادساعتگرد به اندازهٔ زاویهٔ θ حول محور x'_1 ؛

۳. چرخش پادساعتگرد به اندازهٔ زاویهٔ ψ حول محور x''_3 .

اگر

$$\alpha = \varphi - \frac{\pi}{4} \quad \varphi = \alpha + \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = \theta \quad \theta = \beta$$

$$\gamma = \psi + \frac{\pi}{4} \quad \psi = \gamma - \frac{\pi}{4}$$

نشان دهید که دستگاههای نهایی یکسان‌اند.

۵-۳-۴ فرض کنید زمین به طوری حرکت کرده (چرخیده) است که قطب شمال به وضعیت 30°

شمالی و 20° غربی (در دستگاه طول و عرض جغرافیایی اولیه) انتقال یافته. و مدار 10° غربی در امتداد جنوب قرار گرفته است. (الف) چه زاویه‌های اولری این چرخش را تعریف می‌کنند؟ (ب) کسینوسهای هادی متناظر را بیابید.

جواب :

$$A = \begin{pmatrix} 0.9551 & -0.2552 & -0.1504 \\ 0.0052 & 0.5221 & -0.8529 \\ 0.2962 & 0.8138 & 0.5000 \end{pmatrix} \quad (\text{ب})$$

۴-۳-۶ تحقیق کنید که ماتریس چرخش زاویه اولری، معادله $4-87$ ، تحت تبدیل زیر ناورداست

$$\alpha \rightarrow \alpha + \pi, \quad \beta \rightarrow -\beta, \quad \gamma \rightarrow \gamma - \pi$$

۴-۳-۷ نشان دهید که ماتریس چرخش زاویه اولری، $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ، در روابط زیر صدق می‌کند:

$$A^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \tilde{A}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{الف})$$

$$A^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = A(-\gamma, -\beta, -\gamma) \quad (\text{ب})$$

۴-۳-۸ نشان دهید که رد حاصلضرب یک ماتریس متقارن در یک ماتریس پادمتقارن صفر است.

۴-۳-۹ نشان دهید که رد ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی ناوردا می‌ماند.

۴-۳-۱۰ نشان دهید که درمیان یک ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی ناوردا می‌ماند.

یادآوری: دو مسئله اخیر (۴-۳-۹ و ۴-۳-۱۰) نشان می‌دهند که رد و درمیان مستقل از

پایه‌اند. این دو ماهیت، مشخصه خود ماتریس (یا عملگر) به شمار می‌آیند.

۴-۳-۱۱ نشان دهید خاصیت پادتقارن تحت تبدیل تشابهی متعامد، ناورداست.

۴-۳-۱۲ A یک ماتریس 2×2 متعامد است. کلی‌ترین شکل آن را به دست آورید

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

با چرخش دوبعدی مقایسه کنید.

۴-۳-۱۳ $|x\rangle$ و $|y\rangle$ بردارهایی ستونی‌اند. تحت تبدیل متعامد S داریم، $|x'\rangle = S|x\rangle$ و

$|y'\rangle = S|y\rangle$. نشان دهید که حاصلضرب اسکالر $\langle x|y\rangle$ تحت این تبدیل متعامد ناورداست.

یادآوری: این عمل معادل است با ناوردایی حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار در بخش ۱-۳. ۴-۳-۱۴ نشان دهید که مجموع مربعات عناصر یک ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی متعامد ناوردا می‌ماند.

یادآوری: $E^2 - c^2 B^2$ در مسئلهٔ ۳-۷-۱۱ را می‌توان به صورت مجموع مربعات مؤلفه‌های ماتریس (تانسور) $f_{\mu\nu}$ به دست آورد.

۴-۳-۱۵ به عنوان تعمیم مسئلهٔ ۴-۳-۱۴ نشان دهید که

$$\sum_{jk} S_{jk} T_{jk} = \sum_{l,m} S'_{lm} T'_{lm}$$

که در آن مؤلفه‌های پریم‌دار و غیر پریم‌دار به واسطهٔ تبدیل تشابهی متعامد به یکدیگر مربوط می‌شوند. این نتیجه در استخراج ناورداها در نظریهٔ الکترومغناطیس به کار می‌آید (با بخش ۳-۷ مقایسه کنید).

یادآوری: حاصلضرب $M_{jk} = \sum S_{jk} T_{jk}$ را گاهی حاصلضرب هادامارد^۱ می‌نامند. این مسئله در چارچوب بررسیهای تانسوری فصل ۳ به صورت ادغام دوگانهٔ دو تانسور مرتبهٔ دو درمی‌آید و در نتیجه اسکالر بودن (یعنی ناوردایی) آن بدیهی است!

۴-۳-۱۶ چرخش $\varphi_1 + \varphi_2$ حول محور z به صورت دو چرخش متوالی φ_1 و φ_2 حول محور z صورت گرفته است. با استفاده از نمایش ماتریسی این چرخش، اتحادهای مثلثاتی زیر را استخراج کنید:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

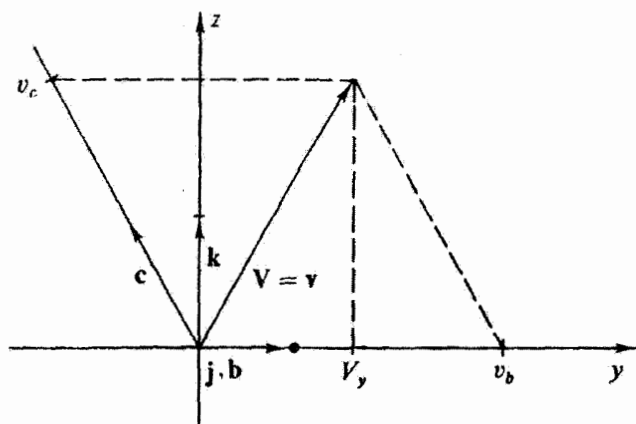
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

۴-۳-۱۷ مؤلفه‌های بردار ستونی \mathbf{V} در دستگاه اولی (غیر پریم‌دار) عبارت‌اند از V_1, V_2, V_3 و V'_1 را در هر یک از دو حالت زیر محاسبه کنید. (الف) چرخش پادساعتگرد مختصات به اندازهٔ زاویهٔ θ ; (ب) چرخش ساعتگرد بردار به اندازهٔ زاویهٔ θ . نتایج بندهای (الف) و (ب) باید یکسان باشند.

۴-۳-۱۸ زیرنامه‌ای برای آزمودن تقارن یک ماتریس $N \times N$ حقیقی بنویسید. تقارن را می‌شود به صورت زیر تعریف کرد

$$0 \leq |a_{ij} - a_{ji}| \leq \varepsilon$$

که در آن ε حد مجاز یا حد تحمل کوچکی است (که خطای قطع و مانند آن را در ماشین مجاز می‌دارد).



$$\mathbf{V} = jV_y + kV_z = bv_b + cv_c = \mathbf{v} \quad \text{شکل ۵-۴}$$

۴-۴ مختصات مایل

در این کتاب تا اینجا، چه در تحلیل برداری و چه در دستگاههای مختصات، یا در تحلیل تانسوری، و اینک در ماتریسها، همواره دستگاه مختصات را متعامد دانسته‌ایم. ولی گاهی نیاز بعضی از دستگاههای فیزیکی ما را وامی‌دارد که از دستگاه مختصات نامتعامد یا مایل بهره‌گیریم. برای نمونه، در توصیف خواص فیزیکی بلورها بهتر است دستگاه مختصاتی به‌کارگیریم که محورهای بلور آن را تعریف می‌کنند؛ این محورها اغلب مایل‌اند.

دستگاه مختصاتی را در نظر بگیرید که در آن بردارهای یکه a ، b و c متعامد نیستند. (در توصیف بلورها، بزرگی بردارهای a ، b و c نیز ممکن است واحد نباشد. فاصله بین اتمها طولهای مناسبتری برای این بردارها به‌شمار می‌آید.) در این صورت، هر بردار اختیاری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{V} = iV_x + jV_y + kV_z = av_a + bv_b + cv_c = \mathbf{v} \quad (۱۰۲-۴)$$

\mathbf{V} برداری است که در دستگاه دکارتی قائم معمولی بیان شده باشد، و \mathbf{v} همان بردار است که در دستگاه مختصات مایل بیان شود. به‌همین ترتیب، می‌توان گفت که (V_x, V_y, V_z) نمایش بردار در پایه دکارتی معمولی و (v_a, v_b, v_c) نمایش همان بردار در پایه نامتعامد است.

یک حالت خاص (در واقع دوبردی) z ، k ، b ، c ، و \mathbf{V} را که جملگی در صفحه $x = 0$ قرار دارند، در شکل ۵-۴ مشاهده می‌کنید. دقیقاً توجه کنید که مؤلفه‌های v_b و v_c را با تصویر کردن نوک \mathbf{V} به موازات c برای v_b به موازات b برای v_c به‌دست می‌آوریم. دست‌ورالعمل کلی برای یافتن یک مؤلفه آن است که از نوک \mathbf{V} صفحه‌ای را موازی با صفحه‌ای مرور دهیم که دو بردار یکدیگر

آنرا ساخته‌اند. با تعریفی که به این طریق از مؤلفه‌ها ارائه می‌شود. مجموع مؤلفه‌ها، بنابر قانونهای مثلثی با متوازی‌الاضلاع برای جمع بردارها (در بخش ۱-۱) درست برابر \mathbf{V} است. با داشتن معادلهٔ ۴-۱۰، درست مانند بخش ۴-۳ عمل می‌کنیم، با این تفاوت که \mathbf{a} را به جای \mathbf{i}' و \mathbf{b} را به جای \mathbf{j}' و \mathbf{c} را به جای \mathbf{k}' می‌نشانیم. از رابطه‌های

$$\mathbf{a} = ia_x + ja_y + ka_z$$

$$\mathbf{b} = ib_x + jb_y + kb_z \quad (103-4)$$

$$\mathbf{c} = ic_x + jc_y + kc_z$$

و با برابر نهادن مؤلفه‌های دکارتی، می‌رسیم به

$$V_x = a_x v_a + b_x v_b + c_x v_c$$

$$V_y = a_y v_a + b_y v_b + c_y v_c \quad (104-4)$$

$$V_z = a_z v_a + b_z v_b + c_z v_c$$

رابطهٔ بین بردار \mathbf{V} در پایهٔ متعامد، و توصیف آن در پایهٔ مایل، به صورت ماتریسی، به این قرار است:

$$\mathbf{V} = P\mathbf{v} \quad (105-4)$$

که

$$P = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \quad (106-4)$$

ماتریس تبدیل P متعامد نیست. زیرا بردارهای ستونی \mathbf{a} ، \mathbf{b} و \mathbf{c} که آنرا می‌سازند، متعامد نیستند. داریم

$$\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{V} \quad (107-4)$$

به محاسبهٔ P^{-1} می‌پردازیم. راه حل عملاً در بخش ۱-۵ ارائه شده است. اگر بردارهای شبکهٔ وارون، به صورت زیر، را

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}, \quad (108-4)$$

بردارهای سطری بگیریم، یک ماتریس Q تشکیل می‌شود

$$Q = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \end{pmatrix} \quad (۱۰۹-۴)$$

باید تأکید کنیم که a' ، b' و c' متعامد نیستند. علاوه بر این، طول آنها نیز واحد نیست، و اگر a ، b و c بعد داشته باشند، a' ، b' و c' بعد متقابل یا وارون دارند. اگر a طول باشد، a' می‌تواند عدد موج باشد. با استفاده از خواصی در بخش ۵-۱ برشمردیم، داریم

$$PQ = QP = 1 \quad (۱۱۰-۴)$$

یا

$$Q = P^{-1}, \quad P = Q^{-1} \quad (۱۱۱-۴)$$

در مسئله ۴-۴-۱ روشی اندک متفاوت برای استخراج جمع‌بندی شده است، که معادل همین روش است. از معادله‌های ۴-۱۰۷ و ۴-۱۱۱ داریم

$$v = QV \quad (۱۱۲-۴)$$

ترانهاد معادله‌های ۴-۱۰۵ و ۴-۱۱۲ را می‌گیریم، می‌رسیم به

$$\langle V | = \langle v | \bar{P}, \quad \langle v | = \langle V | \bar{Q} \quad (۱۱۳-۴)$$

(| در اینجا نیز مانند بخش ۴-۲ یک بردار سطری را نشان می‌دهد. V را می‌شود در فضای a' ، b' و c' (یعنی در شبکه وارون) درست مانند فضای a و b و c تجزیه کرد. مشابه پریم‌دار معادله‌های ۴-۱۰۲ تا ۴-۱۰۴ به‌قرار زیر است

$$V = \bar{Q}v' \quad v' = \bar{P}V \quad (۱۱۴-۴)$$

و

$$\langle V | = \langle v' | Q \quad \langle v' | = \langle V | P \quad (۱۱۵-۴)$$

حاصلضرب اسکالر دو بردار U و V با استفاده از معادله‌های ۱۱۲-۴ و ۱۱۵-۴ به صورت زیر در می‌آید

$$\langle U \parallel V \rangle = \langle U | PQ | V \rangle = \langle u' \parallel v \rangle \quad (116-4)$$

(| نمایانگر یک بردار ستونی است. مربع هر بردار در مختصات مایل، مجموع مربعات مؤلفه‌های آن نیست، بلکه مجموع حاصلضرب مؤلفه‌های مایل در مؤلفه‌های متناظر در شبکه وارون است. اگر U و V در معادله ۱۱۶-۴ برابر دیفرانسیل طول، $dR = (dx, dy, dz)$ باشند، آنگاه با استفاده از معادله‌های ۱۰۵-۴ و ۱۱۳-۴ داریم

$$ds^2 = \langle dR \parallel dR \rangle = \langle dr | \bar{P}P | dr \rangle \quad (117-4)$$

ds^2 مربع عنصر فاصله است؛ dr همان dR است که در مختصات مایل تجزیه شده باشد. مراجعه به معادله ۴-۲، پی می‌بریم که $\bar{P}P$ متریک مختصات مایل ماست. متریک شبکه وارون عبارت است از $Q\bar{Q}$.

تعمیم بیشتر تحلیل برداری، به خصوص تعمیم حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری در مختصات مایل، شاید به صورت شاخه‌ای از تحلیل تانسورهای غیردکارتی به بهترین نحو بیان شود (بخشهای ۸-۳ و ۹-۳).

$v = (v_a, v_b, v_c)$ به زبان بخش ۱-۳، یک بردار پادوردا است. مؤلفه‌های هموردای متناظر آن در شبکه وارون عبارت‌اند از (v'_a, v'_b, v'_c) . با توجه به معادله‌های ۱۰۵-۴، ۱۱۲-۴ و ۱۱۴-۴

$$|v'_i\rangle = \bar{P}P|v_i\rangle \quad \text{و} \quad |v_i\rangle = Q\bar{Q}|v'_i\rangle \quad (118-4)$$

متریک $\bar{P}P$ یک بردار پادوردا را به یک بردار هموردا تبدیل می‌کند. وارون آن، $Q\bar{Q}$ ، بردار هموردا را به صورت پادوردا در می‌آورد. عناصر $\bar{P}P$ در نمادگذاری تانسورهای پادوردا-هموردا (بخش ۱-۳) عبارت‌اند از g_{ij} ، در حالی که عناصر $Q\bar{Q}$ عبارت‌اند از g^{ij} . داریم

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j$$

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_j^k$$

$$v_i \text{ (هموردا)} = g_{ij} v^j$$

$$v^i \text{ (پادوردا)} = g^{ij} v_j$$

یادآوری می‌کنیم که تمایز بین صورتهای هموردا و پادوردا در مختصات متعامد (دکارتی) از میان می‌رود.

مسائل

۱-۴-۴ با استفاده از نتیجه مسئله ۲-۲-۳، $q_{ij} = P_{ji}/|P|$ ، رابطه زیر را به دست آورید

$$a' = \frac{b \times c}{a \times b \cdot c}$$

۲-۴-۴ بردارهایی که دستگاه مختصات مایل به خصوصی را تعریف می‌کنند، به قرار زیرند

$$a = i \quad b = j \quad c = (j + k)/\sqrt{2}$$

(الف) P, Q و سنج $\bar{P}\bar{P}$ را بیابید. (ب) اگر $V = i + 3j + 2k$ ، آنگاه v و v' را بیابید. درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید

$$V^2 = \langle v' \parallel v \rangle$$

۳-۴-۴ نشان دهید: (الف) $v'_a = a' \cdot V$ ؛ (ب) $v_a = a' \cdot V$ توجه کنید که در اینجا نیازی نیست بزرگی بردارهای معرف شبکه a و a' و غیره واحد باشد.

۴-۴-۴ برداری با مؤلفه‌های دکارتی V_i و مؤلفه‌های (پادوردای) مایل v_i و بردار دیگری با مؤلفه‌های دکارتی U_i و مؤلفه‌های (هموردای) شبکه وارون u_i توسط چرخش دستگاه مختصاتی تبدیل می‌شوند که با ماتریس (متعامد) S تعریف شده است. بنابر تعریف بردار

$$|V'\rangle = S|V\rangle \quad \text{و} \quad |U'\rangle = S|U\rangle$$

(الف) نشان دهید

$$|v'\rangle = QSP|v\rangle$$

$$|u'\rangle = \bar{P}\bar{S}\bar{Q}|u\rangle$$

(ب) نشان دهید $\langle u' \parallel v' \rangle$ ناورد، یعنی مستقل از S ، است.

۵-۴-۴ نشان دهید که سنج بردارهای پادوردای، یعنی $\bar{P}\bar{P} = (g_{ij})$ ، به قرار زیر است

$$\begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b & a \cdot c \\ b \cdot a & b \cdot b & b \cdot c \\ c \cdot a & c \cdot b & c \cdot c \end{pmatrix}$$

برای مختصات مایل همه این ضربهای نقطه‌ای، و در نتیجه همه g_{ij} ها ثابت‌اند.

۵-۴ ماتریسهای هرمیتی-ماتریسهای یکانی

تعریفها

تا اینجا به طور کلی فرض کرده ایم که فضای برداری خطی ما یک فضای حقیقی است و عناصر ماتریسی (نمایش عملگرهای خطی) حقیقی اند. عناصر ماتریسی حقیقی برای بسیاری از محاسبات در فیزیک کلاسیک کفایت می کنند. ولی در مکانیک کوانتومی به دلیل شکل روابط اساسی جابه جایی (یا شکل وابسته به زمان معادله شرودینگر) بهره گیری از متغیرهای مختلط اجتناب ناپذیر است. با در نظر داشتن این امر، عناصر ماتریسی را به عناصر مختلط تعمیم می دهیم. برای انجام محاسبات روی این عناصر، خواص جدیدی را تعریف، و مشخص می کنیم.

۱. همیوگ مختلط، A^* ، با گرفتن همیوگ مختلط ($i \rightarrow -i$) هر عنصر تشکیل می شود ($i = \sqrt{-1}$).

۲. ماتریس الحاقی، A^\dagger ، از طریق ترانزپوزیشن A^* شکل می گیرد

$$A^\dagger = \widetilde{A^*} = \widetilde{A}^* \quad (119-4)$$

۳. ماتریس هرمیتی. ماتریس A را هرمیتی (یا خودالحاقی) می نامند هرگاه

$$A = A^\dagger \quad (120-4)$$

در مکانیک کوانتومی (یا مکانیک ماتریسی) ماتریسها را معمولاً چنان تشکیل می دهند که هرمیتی باشند.

۴. ماتریس یکانی، ماتریس U را یکانی می نامند، هرگاه

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (121-4)$$

این عمل تعمیمی است از مفهوم ماتریس متعامد (با معادله ۴-۷۳ مقایسه کنید). در مقوله ماتریسهای مختلط، فیزیکدان تقریباً همواره با ماتریسهای الحاقی، ماتریسهای هرمیتی و ماتریسهای یکانی سروکار دارد. در مکانیک کوانتومی، ماتریسهای یکانی از اهمیت خاصی برخوردارند، زیرا با تأثیر این ماتریسها طول بردار (مختلط) کمکان بدون تغییر می ماند. مشابه عمل ماتریس متعامد بر روی بردار حقیقی. به همین دلیل است که ماتریس S در نظریه پراکندگی نیز یک ماتریس یکانی است. این توجه خاص به ماتریسهای یکانی یک استثنای مهم دارد، و آن عبارت است از گروه ماتریسهای لورنتس در بخشهای ۳-۷ و ۴-۱۳. با استفاده از فضای مینکوفسکی، مشاهده می کنیم که این ماتریسها متعامدند، نه یکانی.

اگر ماتریس تبدیل‌کننده‌ای در یک تبدیل تشابهی یکانی باشد، آن تبدیل را تبدیل یکانی می‌خوانند،

$$A' = UAU^\dagger \quad (۱۲۲-۴)$$

درست به همان ترتیب که حاصلضرب دو ماتریس متعامد، خود متعامد است (مسئله ۳-۴)، می‌توان نشان داد که حاصلضرب دو ماتریس یکانی نیز یکانی است. فرض کنید U_1 و U_2 یکانی باشند. در این صورت، با استفاده از خاصیت یکانی بودن داریم

$$\begin{aligned} 1 &= (U_1 U_2)(U_1 U_2)^{-1} \\ &= U_1 U_2 U_2^{-1} U_1^{-1} \\ &= U_1 U_2 U_2^\dagger U_1^\dagger \end{aligned} \quad (۱۲۳-۴)$$

از آنجا که عمل الحاقی با عمل محاسبهٔ ترانهاد مشابه است (به‌استثنای گرفتن همیوغ مختلط)، در نتیجه

$$(U_1 U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger \quad (۱۲۴-۴)$$

(مسئله ۳-۵). با نشان دادن در معادله ۱۲۳-۴

$$1 = (U_1 U_2)(U_1 U_2)^\dagger \quad (۱۲۵-۴)$$

از طرف چپ در $(U_1 U_2)^{-1}$ ضرب می‌کنیم و می‌رسیم به

$$(U_1 U_2)^{-1} = (U_1 U_2)^\dagger \quad (۱۲۶-۴)$$

این عمل نشان می‌دهد که حاصلضرب دو ماتریس یکانی، خود، یک ماتریس یکانی است. این مرحله باید برای نشان دادن این معنا طی شود که ماتریسهای یکانی $n \times n$ تشکیل یک گروه می‌دهند (بخش ۴-۱۰). سایر خواص و کاربردهای این مفاهیم، در مسئله‌های آخر این بخش مطرح خواهند شد.

ماتریسهای پاؤلی

ماتریسهای مختلط چهار در چهار در نظریهٔ نسبیتی الکترون بسیار به‌کار رفته‌اند. یکی از نقاط

شروع مناسب برای تشکیل ماتریسهای 4×4 ، عبارت است از مجموعه سه ماتریس 2×2 پاؤلی

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (127-4)$$

این ماتریسها را پاؤلی برای توصیف ذره با اسپین $1/2$ (در نظریه نانسیتی) معرفی کرد. به سادگی می توان نشان داد که σ های پاؤلی در روابط زیر صدق می کنند. (با مسئله ۴-۲-۱۳ مقایسه کنید)

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} 1 \quad \text{پادتعویض پذیری} \quad (128-4)$$

$$\sigma_i \sigma_j = i\sigma_k \quad \text{جایگشت دوری شاخصها} \quad (129-4)$$

$$(\sigma_i)^2 = 1 \quad (130-4)$$

ماتریسهای دیراک

دیراک در سال ۱۹۲۷ این صورتبندی را تعمیم داد. وی به مجموعه‌ای شامل چهار ماتریس پادتعویض پذیر احتیاج داشت. سه ماتریس پاؤلی به اضافه ماتریس یکه، مجموعه کاملی را تشکیل می دهند؛ یعنی، هر ماتریس 2×2 ثابت M را می توان به صورت زیر نوشت

$$M = c_0 \cdot 1 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3 \quad (131-4)$$

که در آن c_0, c_1, c_2 و c_3 مقادیری ثابت اند. از این رو، ماتریسهای 2×2 پاؤلی مقاصد دیراک را برآورده نمی کردند، زیرا ماتریس پادتعویض پذیر چهارمی وجود ندارد. می توان نشان داد که در ماتریسهای 3×3 هم نمی توان مجموعه‌ای متشکل از چهار ماتریس پادتعویض پذیر یافت (مسئله ۴-۷-۸).

می رسیم به ماتریسهای 4×4 ، می توانیم به کمک ضرب مستقیم^۱ ماتریسهای پاؤلی و ماتریس یکه، مجموعه کاملی تشکیل دهیم. قرار می دهیم

$$\sigma_{i, \text{دیراک}} = 1 \otimes \sigma_i \quad (132-4)$$

$$\rho_{\text{دیراک}, j} = \sigma_j \otimes 1 \quad (133-4)$$

۱. ضرب مستقیم $A \otimes B$ را در بخش ۴-۲ تعریف کرده ایم.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1(\sigma_1) & 0 \\ 0 & 1(\sigma_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1(1) \\ 1(1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

می‌توان نشان داد که این ماتریسهای 4×4 در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} 1 \quad \text{پادتعویض‌پذیر} \quad (134-4)$$

$$\rho_i \rho_j + \rho_j \rho_i = 2\delta_{ij} 1$$

$$\sigma_i \rho_j - \rho_j \sigma_i = [\sigma_i, \rho_j] = 0 \quad \text{تعویض‌پذیر} \quad (135-4)$$

و

$$\sigma_i \sigma_j = i\sigma_k$$

$$\text{جایگشت دوری شاخصها} \quad (136-4)$$

$$\rho_i \rho_j = i\rho_k$$

اینک می‌توان یک جدول ضرب ماتریسی تشکیل داد (جدول ۱-۴).

دیراک در آغاز مجموعه چهار ماتریسی را برگزید که با a_1, a_2, a_3, a_4 مشخص شده‌اند و در آنها: $a_i = \rho_1 \sigma_i$ و $a_4 = \rho_2$. مجموعه متداول امروزه را با $Y_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ مشخص می‌کنند.

ماتریسهای 4×4 دیراک را می‌توان با E_{ij} مشخص کرد، که در آن

$$E_{ij} = \rho_i \sigma_j$$

با قرارداد

$$\rho_0 = \sigma_0 = 1 \text{ (ماتریس یکه)}$$

شاخصهای i و j در E_{ij} می‌توانند مقادیر از ۰ تا ۳ بگیرند. ۱۶ ماتریس E_{ij} خواص جالبی دارند:

$$\det E_{ij} = +1 \quad ۱.$$

$$E_{ij}^T = 1 \quad ۲.$$

۳. $E_{ij} = E_{ij}^T$ ؛ جملگی هرمیتی‌اند و در نتیجه، بنابر خاصیت ۲، جملگی یکانی‌اند.

۴. $\text{Tr}(E_{ij}) = ۰$ ، مگر در $E_{۰۰} = 1$ که در آن $\text{Tr}(E_{۰۰}) = ۴$. از این خاصیت به‌عنوان

مشابه ماتریسی تعامد در مسئله ۲-۵-۲۳ استفاده شده است.

۵. ۱۶ ماتریس E_{ij} تقریباً یک گروه ریاضی تشکیل می‌دهند. هر دو تای آنها را که در هم

ضرب کنیم یک عضو دیگر مجموعه را، احتمالاً با یک ضریب -1 یا $\pm i$ ، به‌دست خواهیم آورد.

۶. ۱۶ ماتریس E_{ij} مستقل خطی‌اند. هیچیک را نمی‌توان به‌صورت مجموع خطی ۱۵

ماتریس دیگر نوشت.

۷. ۱۶ E_{ij} مجموعه کاملی تشکیل می‌دهند. هر ماتریس 4×4 دیگری را (که عناصر ثابت

داشته باشد) می‌توان به‌صورت ترکیب خطی این ۱۶ ماتریس نوشت

$$A = \sum_{i,j=0}^3 c_{ij} E_{ij}$$

که در آن ضرایب c_{ij} ثابتهای حقیقی یا مختلط‌اند.

مجموعه‌های پادتعویض‌پذیر

شش مجموعه پادتعویض‌پذیر، هر یک شامل ۵ ماتریس، را می‌توان از این ۱۶ ماتریس ساخت.

این شش مجموعه با استفاده از برجسبهای جدول ۴-۱ عبارت‌اند از:

$$a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 \quad ۱.$$

$$Y_5, Y_4, Y_3, Y_2, Y_1 \quad ۲.$$

$$\rho_2, \rho_1, \delta_2, \delta_4, \delta_1 \quad ۳.$$

$$\sigma_3, \sigma_2, \delta_1, Y_1, a_1 \quad ۴.$$

$$\sigma_3, \sigma_1, \delta_2, Y_2, a_2 \quad ۵.$$

$$\sigma_2, \sigma_1, \delta_3, Y_3, a_3 \quad ۶.$$

(۱۳۷-۴)

هر یک از E_{ij} ها (جز ماتریس یکه) در دو مجموعه از شش مجموعه ظاهر می‌شوند. علاوه بر

مجموعه a ها، مجموعه Y ها نیز در نظریه کوانتومی نسبیتی بسیار به‌کار می‌روند.

۱. E_{ij} ها را می‌شود طوری تشکیل داد که دقیقاً خواص یک گروه را داشته باشند؛ ولی آن ماتریسها دیگر هرمیتی و

یکانی نخواهند بود.

بزرگترین مجموعه کاملاً تعویض پذیر که می توان از ماتریسهای دیراک ساخت (با به حساب آوردن ماتریس یکه)، تنها چهار ماتریس دارد.

مبحث ماتریسهای متعامد در بخش ۳-۴، و ماتریسهای یکانی در این بخش، تنها یک شروع است. تفصیل بیشتر این مبحث در فیزیک ذرات "بنیادی" حائز اهمیت اساسی است. با استفاده از ماتریسهای پاؤلی و دیراک می توانیم برای توصیف الکترون، پروتون و سایر ذرات با اسپین ۱/۲، اسپینورها را تشکیل دهیم. چرخشهای دستگاه مختصات به $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ منجر می شوند؛ گروه چرخشی ای است که معمولاً به کمک ماتریسهایی نمایش داده می شود که عناصرشان تابع زوایای اولیه ای اند که چرخش را توصیف می کنند. کاربرد گروه یکانی خاص $SU(3)$ (شامل ماتریسهای یکانی 3×3 با دترمینان $+1$) برای توصیف مزونها و باریونها با توفیق زیادی همراه بوده است. در بخشهای ۴-۱۰ تا ۴-۱۲ این تعمیمها را بیشتر بررسی می کنیم.

مسائل

۱-۵-۴ نشان دهید

$$\det(A^*) = (\det A)^* = \det(A^\dagger)$$

۲-۵-۴ سه ماتریس تکانه زاویه ای در رابطه جابه جایی اساسی زیر صدق می کنند

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

(با جایگشت چرخه ای شاخصها). اگر عناصر دو تا از این ماتریسها حقیقی باشند، نشان دهید که عناصر ماتریس سوم باید موهومی محض باشند.

۳-۵-۴ نشان دهید: $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

۴-۵-۴ برای ماتریس C داریم: $C = S^\dagger S$. نشان دهید که رد C قطعاً مثبت است، مگر آنکه S ماتریس صفری باشد، که در آن صورت $\text{Tr}(C) = 0$.

۵-۵-۴ اگر A و B ماتریسهای هرمیتی باشند، نشان دهید $(AB + BA)$ و $(AB - BA)$ نیز هرمیتی اند.

۶-۵-۴ ماتریس C هرمیتی نیست. نشان دهید که $C + C^\dagger$ و $(C - C^\dagger)$ هرمیتی اند. یعنی، یک ماتریس غیرهرمیتی را می توان به دو جزء هرمیتی تجزیه کرد:

$$C = \frac{1}{2}(C + C^\dagger) + \frac{1}{2i}i(C - C^\dagger)$$

۷-۵-۴ A و B دو ماتریس هرمیتی تعویض ناپذیراند

$$AB - BA = iC$$

ثابت کنید C هرمیتی است.

۸-۵-۴ نشان دهید یک ماتریس هرمیتی تحت تبدیل تشابهی یکانی کماکان هرمیتی می ماند.

۹-۵-۴ هر یک از دو ماتریس A و B هرمیتی اند. شرط لازم و کافی برای آنکه حاصلضرب AB هرمیتی باشد، چیست؟

جواب: $[A, B] = 0$.

۱۰-۵-۴ نشان دهید که وارون هر ماتریس یکانی، یکانی است.

۱۱-۵-۴ از یک تبدیل تشابهی به خصوصی داریم

$$A' = UAU^{-1}$$

$$A^{\dagger} = UA^{\dagger}U^{-1}$$

اگر رابطهٔ الحاقی پایسته باشد $(A^{\dagger})' = A^{\dagger}$ و $\det U = 1$ ، نشان دهید U باید یکانی باشد.

۱۲-۵-۴ رابطهٔ زیر بین دو ماتریس U و H برقرار می شود

$$U = e^{i\alpha H}$$

که در آن α حقیقی است. (تابع نمایی با بسط مکلوین تعریف می شود. این کار در بخش ۱۱-۴ انجام خواهد شد.) (الف) نشان دهید که اگر H هرمیتی باشد، U یکانی خواهد بود. (ب) نشان دهید که اگر U یکانی باشد، H هرمیتی خواهد بود (H از α مستقل است). یادآوری: اگر H هامیلتونی باشد، آنگاه

$$\psi(x, t) = U(x, t)\psi(x, 0) = \exp(-itH/\hbar)\psi(x, 0)$$

یکی از جوابهای معادلهٔ شرودینگر وابسته به زمان است. $U(x, t) = \exp(-itH/\hbar)$ یک "عملگر تحول" است.

۱۳-۵-۴ عملگر $T(t + \epsilon, t)$ تغییرات تابع موج از t تا $t + \epsilon$ را توصیف می کند. به ازای ϵ حقیقی و آنقدر کوچک که بشود از ϵ^2 صرف نظر کرد، داریم

$$T(t + \epsilon, t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon H(t)$$

(الف) اگر T یکانی باشد، نشان دهید که H هرمیتی است. (ب) اگر H هرمیتی باشد، نشان دهید T یکانی است.

یادآوری: هرگاه $H(t)$ مستقل از زمان باشد، می توان این رابطه را به صورت نمایی درآورد (مسئله ۴-۵-۱۲).

۴-۵-۱۴ نشان دهید که شکل دیگری از عبارت:

$$T(t + \varepsilon, t) = \frac{1 - i\varepsilon H(t)/2\hbar}{1 + i\varepsilon H(t)/2\hbar}$$

با چشم پوشیدن از ε^2 ، با T در بند (الف) مسئله ۴-۵-۱۳ می خواند و (برای H هرمیتی) دقیقاً یکانی است.

۴-۵-۱۵ ثابت کنید که حاصلضرب مستقیم دو ماتریس یکانی، خودش یکانی است.

۴-۵-۱۶ ماتریس دیراک را به کمک تساوی $E_{ij} = \rho_i \sigma_j$ ($\sigma_0 = \rho_0 = 1$) نمایش دهید،

نشان دهید که: (الف) به ازای همه i ها و همه j ها $E_{ij}^\dagger = E_{ij}$; (ب) (هرمیتی) $E_{ij}^\dagger = E_{ij}$.

[راهنمایی: از خواص ρ_i ها و σ_j ها استفاده کنید.]

۴-۵-۱۷ درستی معادله های ۴-۱۳۴ تا ۴-۱۳۶ را برای ماتریسهای σ و ρ چهار در چهار تحقیق کنید.

۴-۵-۱۸ با استفاده از معادله های ۴-۱۳۵ و ۴-۱۳۶ نشان دهید که هر یک از شش مجموعه

از ماتریسهای دیراک که فهرست آنها به صورت معادله ۴-۱۳۷ آمده است، واقعاً یک مجموعه پادتعویض پذیراند.

۴-۵-۱۹ با استفاده از معادله های ۴-۱۳۵ و ۴-۱۳۶، نشان دهید که:

$$Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 = +1 \quad (\text{الف}) \quad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = +1 \quad (\text{ب})$$

۴-۵-۲۰ اگر $M = (1/2)(1 + Y_5)$ ، نشان دهید که

$$M^2 = M$$

توجه کنید که به جای Y_5 می شود هر یک از ماتریسهای دیگر دیراک (هر یک از E_{ij} ها در جدول ۴-۱) را قرار داد. اگر M هرمیتی باشد، این نتیجه، یعنی $M^2 = M$ معادله معرف یک عملگر تصویر در مکانیک کوانتومی است.

۴-۵-۲۱ نشان دهید

$$\alpha \times \alpha = 2i\sigma$$

که در آن α برداری است که ماتریسهای a مؤلفه‌های آن را تشکیل می‌دهند

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

دقت کنید که اگر α یک بردار قطبی باشد (بخش ۳-۴) آنگاه σ برداری محوری است.

۴-۵-۲۲ ثابت کنید که ۱۶ ماتریس دیراک یک مجموعه مستقل خطی می‌سازند.

[راهنمایی: عکس این حکم را فرض کنید. E_{mn} را ترکیب خطی دیگر E_{ij} ها بگیرید. در

E_{mn} ضرب کنید. رد بگیرید و نشان دهید که به تناقض می‌رسید.]

۴-۵-۲۳ (الف) اگر فرض کنیم که ماتریس 4×4 معلوم A (با عناصر ثابت) را بتوان به صورت ترکیب خطی ۱۶ ماتریس دیراک نوشت:

$$A = \sum_{i,j=0}^3 c_{ij} E_{ij}$$

نشان دهید

$$c_{mn} = \frac{1}{4} \text{Tr}(AE_{mn})$$

(ب) اگر A فقط و فقط یک عنصر ناصفر داشته باشد، نشان دهید که در این بسط دقیقاً چهار ضریب ناصفر وجود خواهد داشت.

(ج) ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

را برحسب E_{ij} ها بسط دهید.

جواب :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}(E_{00} + E_{03} + E_{30} + E_{33}) \\ &= \frac{1}{4}(1 + \sigma_3 + \rho_3 + \delta_3) \end{aligned}$$

۴-۵-۲۴ اگر A یکی از ماتریسهای دیراک (جز ماتریس یکه) باشد، با هشت تا از ماتریسهای دیراک تعویض پذیر و با هشت تایی دیگر پادتعویض پذیر است. هشت ماتریسی را بیابید که با Y_1 پادتعویض پذیر باشند

$$\sigma_2, \sigma_3, \rho_1, a_1, Y_2, Y_3, \rho_3, \delta_1$$

۴-۵-۲۵ برای بررسی مسئله هموردایی تحت تبدیلهای لورنتس، معمولاً نظریه الکترونی دیراک را برحسب Y_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) بیان می کنند. نشان دهید که این چهار ماتریس و حاصلضربهای:

$$(الف) Y_\mu Y_\nu, \mu \neq \nu$$

$$(ب) Y_\mu Y_\nu Y_\lambda$$

$$(ج) Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$$

و ماتریس یکه 1 ، هر 16 ماتریس دیراک را (با ضربهای ثابتی) ارائه می کنند.

یادآوری: در نظریه واپاشی بتا، 1 برای توصیف یک برهم کنش اسکالر و چهار Y_i برای توصیف یک برهم کنش برداری و شش حاصلضرب دوگانه ($Y_i Y_j$) برای توصیف یک برهم کنش تانسوری و چهار حاصلضرب سه گانه ($Y_i Y_j Y_k$) برای توصیف یک برهم کنش برداری محوری و حاصلضرب $Y_5 = Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ برای توصیف یک برهم کنش شبه اسکالر به کار می روند. تجربه نشان می دهد که برهم کنش واقعی ترکیبی خطی است از برهم کنشهای برداری و برداری محوری، و پارامتر را پایسته نگه نمی دارد.

۴-۵-۲۶ (الف) داریم: $r' = Ur$ ، که در آن U یک ماتریس یکانی و r برداری (ستونی)، با عناصر مختلط، است. نشان دهید که نرم (بزرگی) r تحت این عمل ناوردا می ماند. (ب) ماتریس، U ، هر بردار ستونی r با عناصر مختلط را به r' تبدیل می کند، و بزرگی آن همچنان ناوردا می ماند: $r' r' = r' r$. نشان دهید که U یکانی است.

۴-۵-۲۷ زیربرنامه‌ای بنویسید که خودالحاقی بودن یک ماتریس $N \times N$ مختلط را بیازماید. برای منظور کردن خطای ناشی از گرد کردن و سایر خطاهای ماشین حساب، برای دستیابی به دقت در تساوی $a_{ij} = a_{ij}^*$ ، حد مجاز کوچکی مانند ϵ در نظر بگیرید.

۴-۵-۲۸ زیربرنامه‌ای بنویسید که ماتریس الحاقی یک ماتریس $M \times N$ مختلط را تشکیل دهد. ۴-۵-۲۹ (الف) زیربرنامه‌ای بنویسید که یک ماتریس $M \times N$ مختلط A را بگیرد و حاصلضرب ضرب $A^t A$ را بدهد.

[اراهنمایی: برای نوشتن این زیربرنامه می توان از زیربرنامه‌های مسئله‌های ۴-۲-۴۱ و ۴-۵-۲۸ بهره گرفت.]

(ب) زیربرنامه‌ای را که نوشته‌اید برای یک یا چند ماتریس دیراک در جدول ۴-۱ امتحان کنید.

۴-۶ قطری کردن ماتریسها

ماتریس گشتاور لختی

در بسیاری از مسائل فیزیکی ای که با ماتریسها سروکار دارند، لازم می شود که تبدیل تشابهی متعامد (حقیقی) یا یک تبدیل یکانی ای اجرا شود، تا ماتریس به صورت قطری درآید و همه عناصر غیرقطری آن صفر شود. به عنوان نمونه خاص، می توان ماتریس گشتاور لختی، \mathbf{L} ، یک جسم صلب را نام برد. با استفاده از تعریف تکانه زاویه ای، \mathbf{L} ، داریم

$$\mathbf{L} = I\omega \quad (۱۳۸-۴)$$

ω سرعت زاویه ای است.^۱ مؤلفه های قطری ماتریس لختی، I ، عبارت اند از

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) \quad (۱۳۹-۴)$$

والی آخر. زینویس i به جرم m_i واقع در $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ مربوط می شود. برای مؤلفه های غیرقطری به حاصلضربهای لختی به شرح زیر می رسم:

$$I_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i = I_{yx} \quad (۱۴۰-۴)$$

مشاهده می شود که ماتریس \mathbf{L} متقارن است. علاوه بر این، با توجه به اینکه I در یک معادله فیزیکی به صورت $۱۳۸-۴$ ظاهر می شود که در تمام سمتگیریهای دستگاه مختصات صادق است، می توان آنرا یک تانسور دانست (قاعده خارج قسمت، بخش ۳-۳).

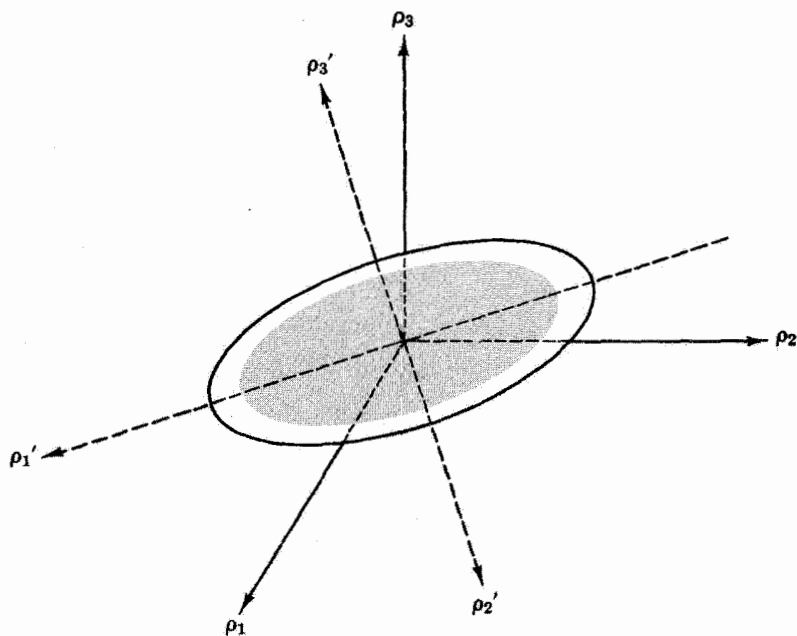
اینک مسئله عبارت است از یافتن جهت محورهای مختصات به صورتی که I_{xy} و سایر عناصر غیرقطری صفر شوند. یکی از پیامدهای این سمتگیری و نشانه ای از آن، این است که اگر سرعت زاویه ای در امتداد یکی از این محورهای جدید واقع باشد، سرعت زاویه ای و تکانه زاویه ای با یکدیگر موازی خواهند بود.

تصویر هندسی-بیضیوار

بررسی تصویر هندسی این مسئله می تواند آموزنده باشد. اگر ماتریس لختی \mathbf{L} را از دو طرف در بردار یکه ای با جهت متغیر، $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ، ضرب کنیم، داریم

$$\langle \mathbf{n} | | \mathbf{n} \rangle = \mathbf{I} \quad (۱۴۱-۴)$$

۱. ماتریس گشتاور لختی را می توان از انرژی جنبشی یک جسم چرخان $\langle \omega | | \omega \rangle = (1/2)T$ ، نیز به دست آورد.



شکل ۴-۶ بیضوار گشاور لختی.

که در آن I عددی (اسکالر) است و بزرگی آن به جهت n بستگی دارد. با اجرای عمل ضرب می‌رسیم به

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma \quad (142-4)$$

برای آنکه این رابطه را به یکی از صورتهای استاندارد برای بیضوار درآوریم، بردار زیر را تعریف می‌کنیم

$$\rho = \frac{n}{\sqrt{I}} \quad (143-4)$$

که در آن ρ هم از نظر جهت و هم از نظر بزرگی متغیر است. معادله ۱۴۲-۴ به صورت زیر در می‌آید

$$1 = I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{xz}\rho_1\rho_3 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3 \quad (144-4)$$

این عبارت، شکل کلی معادله یک بیضوار در مختصات ρ_1, ρ_2 و ρ_3 است (شکل ۴-۶). ولی

بنابر قوانین هندسهٔ تحلیلی می‌دانیم که محورهای مختصات را همواره می‌توان چنان چرخاند که بر محورهای بیضیوار منطبق شوند. در این صورت داریم

$$1 = I_1 \rho_1^2 + I_2 \rho_2^2 + I_3 \rho_3^2 \quad (145-4)$$

که در آن ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 مجموعهٔ جدیدی از مختصات است

محورهای اصلی

در بسیاری از موارد اساسی‌تر، به‌خصوص مواقعی که تقارن در کار باشد، این محورهای جدید را، به‌نام محورهای اصلی، می‌توان به کمک ژرفکاری یافت. اینک به ارائهٔ روشی کلی برای یافتن عناصر قطری و محورهای اصلی اقدام می‌کنیم.

ماتریسهای هرمیتی

نخست به قضیهٔ مهمی دربارهٔ عناصر قطری و محورهای اصلی می‌پردازیم. در معادلهٔ

$$A|\mathbf{r}\rangle = \lambda|\mathbf{r}\rangle \quad (146-4)$$

λ عدد (کمیت اسکالر)، به نام ویژه‌مقدار، و $|\mathbf{r}\rangle$ بردار متناظر، به نام ویژه‌بردار، است.^۱ این اصطلاحها در همان اوایل مطرح شدن مکانیک کوانتومی، از زبان آلمانی به این متون راه یافته‌اند. اینک نشان می‌دهیم که اگر A ماتریسی هرمیتی باشد^۲، ویژه‌مقدارهایش حقیقی و ویژه‌بردارهایش متعامدند. فرض کنید λ_i و λ_j دو ویژه‌مقدار ماتریس هرمیتی A ، و $|\mathbf{r}_i\rangle$ و $|\mathbf{r}_j\rangle$ ویژه‌بردارهای متناظر با آنها باشد. در این صورت

$$A|\mathbf{r}_i\rangle = \lambda_i|\mathbf{r}_i\rangle \quad (147-4)$$

$$A|\mathbf{r}_j\rangle = \lambda_j|\mathbf{r}_j\rangle \quad (148-4)$$

معادلهٔ ۱۴۷-۴ را در $|\mathbf{r}_j\rangle$ ضرب می‌کنیم

$$\langle \mathbf{r}_j | A | \mathbf{r}_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i \rangle \quad (149-4)$$

معادلهٔ ۱۴۸-۴ را در $|\mathbf{r}_i\rangle$ ضرب می‌کنیم

$$\langle \mathbf{r}_i | A | \mathbf{r}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j \rangle \quad (150-4)$$

۱. معادلهٔ ۱۳۸-۴ وقتی به این شکل در می‌آید که ω در امتداد یکی از محورهای اصلی باشد. در این صورت $L = I\omega$ و $\lambda = I\omega$ را در متون ریاضی معمولاً مقدار مشخصه و ω را بردار مشخصه می‌نامند.

۲. اگر A حقیقی باشد، شرط تقارن به‌جای شرط هرمیتی بودن می‌نشیند.

معادله الحاقی^۱ این عبارت را پیدا می‌کنیم

$$\langle r_j | A^\dagger | r_i \rangle = \lambda_j^* \langle r_j | r_i \rangle \quad (151-4)$$

یا با توجه به هرمیتی بودن A

$$\langle r_j | A | r_i \rangle = \lambda_j^* \langle r_j | r_i \rangle \quad (152-4)$$

معادله ۱۵۲-۴ را از معادله ۱۴۹-۴ کم می‌کنیم، و می‌رسیم به

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \langle r_j | r_i \rangle = 0 \quad (153-4)$$

این عبارت یک نتیجه کلی برای همه ترکیبهای ممکن i و j است. نخست قرار می‌دهیم $i = j$. در این صورت، معادله ۱۵۳-۴ به صورت زیر در می‌آید

$$(\lambda_i - \lambda_i^*) \langle r_i | r_i \rangle = 0 \quad (154-4)$$

یکی از جوابهای جزئی معادله ۱۵۴-۴ است، از این رو نتیجه می‌گیریم که به ازای همه i ها

$$\lambda_i = \lambda_i^* \quad (155-4)$$

یعنی λ_i ها حقیقی‌اند.

ثانیاً، به ازای $j \neq i$ و $\lambda_i \neq \lambda_j$ داریم

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle r_j | r_i \rangle = 0 \quad (156-4)$$

یا

$$\langle r_j | r_i \rangle = 0 \quad (157-4)$$

یعنی، ویژه بردارهای ویژه مقادیرهای متساوی، متعامدند. معادله ۱۵۷-۴ تعمیم تعامد در این فضای مختلط است.^۲

اگر $\lambda_i = \lambda_j$ (حالت واگن)، $|r_i\rangle$ به خودی خود بر $|r_j\rangle$ عمود نیست. بلکه می‌توان آن‌را

۱. دقت کنید که $\langle r_j | = |r_j\rangle^\dagger$.

۲. نظریه متناظر برای عملگرهای دیفرانسیلی (نظریه اشتورم-لیوویل) را در بخش ۹-۲ خواهیم دید. مشابه معادله انتگرالی آن (نظریه هیلبرت-اشمیت) در بخش ۱۶-۴ خواهد آمد.

متعامد کرد.^۱ در اینجا نیز، مسئلهٔ فیزیکی ماتریس گشتاور لختی را در نظر می‌گیریم. اگر x_1 یک محور تقارن چرخشی باشد، به این نتیجه می‌رسیم: $\lambda_2 = \lambda_3$. ویژه‌بردارهای $\langle \Gamma_2 \rangle$ و $\langle \Gamma_3 \rangle$ هر یک بر محور تقارن $\langle \Gamma_1 \rangle$ عمودند، ولی می‌توانند در هر جهتی در صفحهٔ عمود بر $\langle \Gamma_1 \rangle$ قرار داشته باشند؛ یعنی هر ترکیب خطی $\langle \Gamma_2 \rangle$ و $\langle \Gamma_3 \rangle$ نیز یک ویژه‌بردار است. $(a_2 \langle \Gamma_2 \rangle + a_3 \langle \Gamma_3 \rangle)$ را در نظر بگیرید که در آن a_2 و a_3 مقادیر ثابتی اند. در این صورت،

$$\begin{aligned} A(a_2 \langle \Gamma_2 \rangle + a_3 \langle \Gamma_3 \rangle) &= a_2 \lambda_2 \langle \Gamma_2 \rangle + a_3 \lambda_3 \langle \Gamma_3 \rangle \\ &= \lambda_2 (a_2 \langle \Gamma_2 \rangle + a_3 \langle \Gamma_3 \rangle) \end{aligned} \quad (158-4)$$

و این همان چیزی است که، با توجه به اینکه x_1 محور تقارن چرخشی است، انتظارش می‌رود. بنابراین، اگر $\langle \Gamma_1 \rangle$ و $\langle \Gamma_2 \rangle$ مشخص شوند، $\langle \Gamma_3 \rangle$ را می‌توان صرفاً طوری اختیار کرد که در صفحهٔ عمود بر $\langle \Gamma_1 \rangle$ واقع و بر $\langle \Gamma_2 \rangle$ هم عمود باشد. از روش کلی متعامدسازی جوابها، منسوب به گرام-اشمیت در بخش ۳-۹ در مبحث توابع، بهره خواهیم برد.

مجموعهٔ n ویژه‌بردار متعامد ماتریس هرمیتی $n \times n$ ، یک مجموعهٔ کامل می‌سازد، که فضای (مختلط) n بعدی را می‌تند. این نکته در محاسبهٔ وردشی ویژه‌مقادیر در بخش ۸-۱۷ به‌کار می‌آید (مسئلهٔ ۷-۱۹). ویژه‌مقادیرها و ویژه‌بردارها مختص ماتریسهای هرمیتی نیستند. همهٔ ماتریسها ویژه‌بردار و ویژه‌مقدار دارند. مثلاً، ماتریس جمعیت تصادفی T در معادلهٔ ویژه‌مقداری زیر صدق می‌کند

$$T p_{\text{توان}} = \lambda p_{\text{توان}}$$

که در آن $\lambda = 1$. ولی فقط در ماتریسهای هرمیتی است که همهٔ ویژه‌بردارها متعامد و همهٔ ویژه‌مقادیر حقیقی‌اند.

ماتریسهای پادهرمیتی

گهگاه، در مکانیک کوانتومی به ماتریسهای پادهرمیتی برمی‌خوریم

$$A^\dagger = -A$$

با ادامه دادن روش تحلیلی قسمت اول این بخش، می‌توان نشان داد:

۱. در اینجا فرض می‌کنیم که ویژه‌بردارهای λ_i واگن n تابه، فضای n بعدی متناظر را می‌تند. این معنا را می‌توان با وارد کردن یک پارامتر ε در ماتریس اصلی برای برداشتن واگنی و آنگاه میل دادن آن به صفر نشان داد (با مسئلهٔ ۴-۳۰ مقایسه کنید). این کار شبیه است با نقض واگنی در طیف‌نگاری اتمی از طریق اعمال میدان مغناطیسی خارجی (انتر زمین).

(الف) ویژه‌مقدارها موهومی محض (یا صفر) اند.

(ب) ویژه‌بردارهای متناظر با ویژه‌مقدارهای متمایز، متعامدند.

ماتریس R که از ویژه‌بردارهای بهنجار تشکیل می‌شود، یکانی است. خاصیت پادهرمیتی بودن تحت تبدیل یکانی پایسته می‌ماند.

معادله سده‌ای

نمایش حقیقی بودن ویژه‌مقدارها و متعامد بودن ویژه‌بردارها، اساساً یکی از قضایای وجودی است. برای تعیین ویژه‌مقدارهای λ_i و ویژه‌بردارهای $(\mathbf{r}_i, |\mathbf{r}_i\rangle)$ ، عملاً به معادله $4-146$ باز می‌گردیم. با فرض اینکه $|\mathbf{r}\rangle$ در ماتریس یک ضرب شده باشد، می‌توانیم معادله $4-146$ را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$(A - \lambda I)|\mathbf{r}\rangle = 0 \quad (159-4)$$

که در آن I ماتریس یکه است. این عبارت، یک مجموعه معادلات خطی همگن همزمان است. بنابر مطالب بخش $4-1$ ، می‌دانیم که فقط در صورتی این مجموعه جواب ناصفر خواهد داشت که درمینان ضرایب آن صفر شود

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (160-4)$$

حالتی را در نظر می‌گیریم که A ماتریس هرمیتی 3×3 باشد. در این صورت

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (161-4)$$

معادله $4-161$ را به دلیل کاربردهایش در نظریه‌های نجومی، معمولاً معادله سده‌ای می‌نامند.^۱ از معادله $4-161$ به یک معادله درجه سه برحسب λ می‌رسیم، که بدیهی است سه ریشه دارد.^۲ از معادله $4-155$ بی می‌بریم که این سه ریشه حقیقی‌اند. ریشه‌ها را یکی پس از دیگری در معادله $4-159$ قرار می‌دهیم و ویژه‌مقدارهای متناظر را به دست می‌آوریم.

مثال $4-16$: ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای یک ماتریس متقارن: ماتریس A را به صورت زیر در

۱. این معادله در نظریه اختلال مرتبه دوم در مکانیک کوانتومی نیز ظاهر می‌شود.

۲. مسئله $4-9$ را ببینید.

نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۶۲-۴)$$

معادلهٔ سدهای به صورت زیر است

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (۱۶۳-۴)$$

با بسط این دترمینان برحسب کهاد،

$$-\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \quad (۱۶۴-۴)$$

ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از ۱ و ۰ و $\lambda = -1$. برای یافتن ویژه‌بردار متناظر با $\lambda = -1$ این مقدار را در معادلهٔ ویژه‌مقداری زیر، معادلهٔ ۱۵۹-۴، می‌نشانیم

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۱۶۵-۴)$$

بازای $\lambda = -1$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (۱۶۶-۴)$$

با یک ضریب مقیاس اختیاری و یک علامت (یا ضریب فازی) اختیاری داریم. $|\mathbf{r}_1\rangle = (1, -1, 0)$ دقت کنید که (بازای مقادیر حقیقی $|\mathbf{r}\rangle$ در فضای معمولی) ویژه‌بردار یک خط را در فضا مشخص می‌کند. سوی مثبت و منفی بر روی آن معین نمی‌شود. با توجه به همگن بودن معادلهٔ ۱۵۹-۴ برحسب $|\mathbf{r}\rangle$ ، همین انتظار نیز می‌رفت. برای راحتی کار، قرارداد می‌کنیم که ویژه‌بردارها را به یک بهنجار کنیم: $\langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_1 \rangle = 1$. با اختیار کردن این علامت، $|\mathbf{r}_1\rangle$ تعیین می‌شود:

$$|\mathbf{r}_1\rangle \text{ یا } \mathbf{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad (۱۶۷-۴)$$

از معادله ۱۵۹-۴، به ازای $\lambda = 0$ می‌رسیم به

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \quad (168-4)$$

$\lambda = 1$: سرانجام، به ازای $\lambda = 1$ ، ویژه بردار مناسبی است.

$$\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (169-4)$$

یا

$$|r_3\rangle \text{ یا } r_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad (170-4)$$

تعامد r_1 ، r_2 و r_3 متناظر با سه ویژه مقدار متمایز را به آسانی می‌توان تحقیق کرد.

مثال ۴-۶-۲ ویژه مقدارهای واگن: ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (171-4)$$

معادله سدهای به صورت زیر است

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (172-4)$$

یا

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \quad \lambda = -1, 1, 1 \quad (173-4)$$

که یک حالت واگن است. از معادله ویژه مقداری ۱۵۹-۴ با $\lambda = -1$ داریم

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned} \quad (174-4)$$

یک ویژه بردار بهنجار مناسب به صورت زیر است

$$|r_1\rangle \text{ یا } r_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad (175-4)$$

برای $\lambda = 1$ داریم

$$-y + z = 0 \quad (176-4)$$

هیچ اطلاعات دیگری در دست نداریم. تعداد گزینه‌های ممکن بیشمار است. یکی از این گزینه‌ها می‌تواند به صورت زیر باشد

$$|r_2\rangle \text{ یا } r_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (177-4)$$

که روشن است که در معادلهٔ ۱۷۶-۴ صدق می‌کند. r_2 را که باید بر r_1 عمود باشد، می‌توان به کمک رابطهٔ زیر به دست آورد که بر r_2 هم عمود شود^۱

$$r_2 = r_1 \times r_3 = (1, 0, 0) \quad (178-4)$$

قطری کردن

از معادله‌هایی که در آغاز این بخش برای قضیهٔ وجود ارائه کردیم، می‌توان برای ساختن ماتریس تبدیلی، که ماتریس هرمیتی A را به صورت قطری درآورد، بهره برد. فرض کنید ماتریس R از سه بردار ستونی متعامد $|r_1\rangle$ ، $|r_2\rangle$ و $|r_3\rangle$ به هر ترتیب دلخواهی ساخته شده باشد

$$R = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad (179-4)$$

که در آن هر ستون $\{x_i, y_i, z_i\}$ ، یک ویژه بردار، r_i است. با توجه به

$$\langle r_i | r_j \rangle = \delta_{ij} \quad (180-4)$$

۱. استفاده از ضرب سه‌گانه، منحصر به فضای سه‌بعدی است (بخش ۱-۴).

نتیجه می‌گیریم که R یکانی است (اگر A و در نتیجه Γ_i ها حقیقی باشند، R متعامد است). در این صورت، با تشکیل $R^T A R$ ، داریم

$$\begin{aligned} R^T A R &= \begin{pmatrix} \langle \Gamma_1 | \\ \langle \Gamma_2 | \\ \langle \Gamma_3 | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \Gamma_1 \rangle & | \Gamma_2 \rangle & | \Gamma_3 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \Gamma_1 | \\ \langle \Gamma_2 | \\ \langle \Gamma_3 | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 | \Gamma_1 \rangle & \lambda_2 | \Gamma_2 \rangle & \lambda_3 | \Gamma_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (181-4) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین، $R^T A R$ ماتریسی قطری است که از ویژه‌مقدارهای λ_i تشکیل می‌شود؛ ترتیب قرار گرفتن ویژه‌مقدارها در آن نظیر ترتیب قرار گرفتن بردارهای ستونی $|\Gamma_i\rangle$ یا Γ_i در R است. برای رسیدن به یک توصیف و تجسم هندسی، ماتریس حقیقی (مقارن) A را با ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای حقیقی در نظر بگیرید. ماتریس R نظیر B^{-1} در معادله ۹۵-۴، و یا به بیان بهتر، ماتریس \tilde{R} با B متناظر است؛ از $\langle \Gamma_1 |$ تا آلی آخر تشکیل شده است، به صورتی که Γ_i ها به صورت بردارهای سطری نوشته می‌شوند

$$\begin{pmatrix} \langle \Gamma_1 | \\ \langle \Gamma_2 | \\ \langle \Gamma_3 | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (182-4)$$

در اینجا، سطر (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}) ، که بنا بر تعریف عبارت است از بردار یکه Γ_i در دستگاه مختصات اولیه، سه کسینوس هادی Γ_i را نسبت به محورهای اولیه به دست می‌دهد. با در نظر داشتن اینکه ماتریس B دستگاه مختصات را به دستگاه جدیدی می‌چرخاند که در آن A قطری می‌شود، پی می‌بریم که این دستگاه جدید را سه ویژه‌بردار $\Gamma_i = (x_i, y_i, z_i)$ مشخص می‌کند. این بردارها، بردارهای یکه در امتداد محورهای اصلی‌اند؛ محورهایی که A نسبت به آنها قطری است.

حسن تحلیلی که در بالا ارائه دادیم این است که روابط مفهومی نهفته در روند قطری کردن ماتریسها را نمایش می‌دهد و آنها را روشن می‌کند. ولی برای ماتریسهای بزرگتر از 3×3 یا شاید 4×4 ، فرایند قطری کردن چندان وقت‌گیر و پر دردسر می‌شود که ناگزیریم به کامپیوترهای

سریع و روشهای تکراری روی آوریم.^۱ روش ژاکوبی برای تعیین ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریسهای متقارن حقیقی یکی از این روشها به‌شمار می‌آید. روش ژاکوبی برای تعیین ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها، و روش گاوس-سیدل برای حل دستگاه معادلات خطی همزمان، نمونه‌هایی از روشهای واهلشی است. در این روشهای تکراری، انتظار داریم که خطا با ادامه تکرار کم شود یا از بین برود (واهلیده شود). برای حل معادله‌های دیفرانسیلی جزئی نیز روشهای واهلشی کاربردهای فراوانی دارند.

مسائل

۴-۶-۱ (الف) با استفاده از تکانه زاویه‌ای عنصر ω جرم،

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i)$$

ماتریس لختی را از رابطه $\mathbf{L} = I\omega$ یا $\|\mathbf{L}\| = I\|\omega\|$ استخراج کنید.
(ب) ماتریس لختی را این بار با استفاده از انرژی جنبشی به‌دست آورید

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)^2 \quad \left(T = \frac{1}{2} \langle \omega | I | \omega \rangle \right)$$

۴-۶-۲ نشان دهید که اگر ماتریسی به کمک یک تبدیل تشابهی تبدیل شود، ویژه‌مقدارهای آن تغییری نمی‌کنند. این ویژگی منحصر به ماتریسهای متقارن یا هرمیتی نیست، بلکه برای هر ماتریسی که در معادله ویژه‌مقداری ۴-۱۵۹ صدق کند برقرار است. اگر بتوانیم ماتریسی را توسط یک تبدیل تشابهی قطری کنیم، در این صورت به دو پیامد بلافاصل برمی‌خوریم

۱. رد (مجموع ویژه‌مقدارها) تحت تبدیل تشابهی ناورد است.

۲. دترمینان (حاصلضرب ویژه‌مقدارها) تحت تبدیل تشابهی ناورد است.

یادآوری: این قسمت را به‌طور جداگانه (برای ماتریسهایی که قطری شدنی نیستند) اثبات کنید. ناوردایی رد و دترمینان را اغلب با استفاده از قضیه کابلی-هامیلتون، مبنی بر اینکه هر ماتریس در معادله سدهای خودش صدق می‌کند، اثبات می‌کنند.

۴-۶-۳ به‌عنوان عکس این قضیه که ماتریسهای هرمیتی ویژه‌مقدارهای حقیقی دارند و ویژه‌بردارهای متناظر به ویژه‌مقدارهای متمایز آنها متعامدند، نشان دهید که هرگاه (الف) ویژه‌مقدارهای یک ماتریس

۱. در دستگاههای مرتبه بالاتر، ممکن است تعیین ریشه‌های معادله سدهای (ویژه‌مقدارها) بسیار دشوار باشد. حل مستقیم آنها به کمک کامپیوتر ممکن است خیلی دقیق‌تر از کار در نیاید. برای قطری کردن ماتریس اصلی معمولاً استفاده از روشهای تکراری را ترجیح می‌دهند.

حقیقی باشند، و (ب) ویژه بردارهای آن در معادله $180^\circ - 4$ ، $\mathbf{r}_i^\dagger \mathbf{r}_j = \delta_{ij}$ یا $\langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j \rangle = \delta_{ij}$ صدق کنند، آنگاه آن ماتریس هرمیتی است.

۴-۶-۴ نشان دهید که ماتریس حقیقی نامنتظران را نمی‌توان به کمک یک تبدیل تشابهی متعامد قطری کرد.

[راهنمایی: فرض کنید که ماتریس حقیقی نامنتظران را بتوان قطری کرد و برای این فرض یک تناقض پیدا کنید.]

۴-۶-۵ ماتریسهایی که مؤلفه‌های تکانه زاویه‌ای J_x ، J_y و J_z را نمایش می‌دهند، جملگی هرمیتی‌اند. نشان دهید که ویژه‌مقدارهای $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ حقیقی و نامنفی‌اند.

۴-۶-۶ λ_i ها ویژه‌مقدارهای A و $\langle x_i |$ ها ویژه‌بردارهای متناظر آنها هستند. نشان دهید که A^{-1} دارای همین ویژه‌بردارهاست ولی با ویژه‌مقدارهایی برابر λ_i^{-1} .

۴-۶-۷ ماتریسهای مربعی با دترمینان صفر را تکین می‌نامند. (الف) اگر A تکین باشد، نشان دهید که دست‌کم یک بردار ستونی غیرصفر \mathbf{v} چنان وجود دارد که

$$A|\mathbf{v}\rangle = 0$$

(ب) اگر یک بردار غیرصفر $|\mathbf{v}\rangle$ چنان وجود داشته باشد که

$$A|\mathbf{v}\rangle = 0$$

نشان دهید که A یک ماتریس تکین است. یعنی، اگر یکی از ویژه‌مقدارهای یک ماتریس (یا یک عملگر) صفر باشد، آن ماتریس (یا عملگر) وارونی ندارد.

۴-۶-۸ تبدیل تشابهی یکسانی هر یک از دو ماتریس را قطری می‌کند. نشان دهید که دو ماتریس اولیه باید با یکدیگر تعویض‌پذیر باشند [این خاصیت مخصوص در فرمولبندی ماتریسی (هایزنبرگ) در مکانیک کوانتومی حائز اهمیت است].

۴-۶-۹ ویژه‌مقدارهای دو ماتریس هرمیتی A و B با هم برابرند. نشان دهید که A و B را می‌توان توسط یک تبدیل تشابهی به هم مربوط کرد.

۴-۶-۱۰ ویژه‌مقدارها و مجموعه ویژه‌بردارهای متعامدیکه (متعامد بهنجار) ماتریسهای مسئله ۴-۲-۱۵ را بیابید.

۴-۶-۱۱ نشان دهید که دترمینان ماتریس لختی تک‌ذره‌ای به جرم m در (x, y, z) صفر است. این نتیجه را از دیدگاه ناوردایی دترمینان یک ماتریس تحت تبدیل تشابهی (مسئله ۴-۳-۱۰) و یک چرخش ممکن دستگاه مختصات، توجیه کنید.

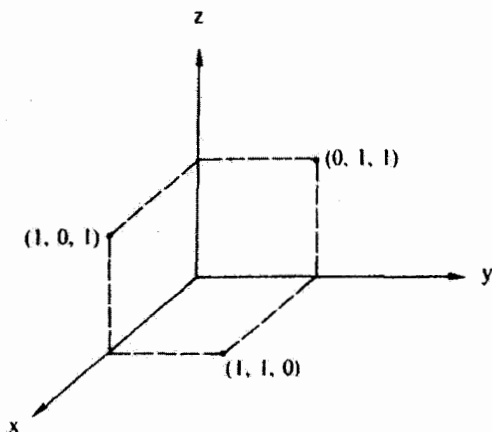
۱۲-۶-۴ جسم صلبی را می‌توان با سه جرم نقطه‌ای زیر نمایش داد

$$(1, 1, -2) \quad \text{در} \quad m_1 = 1$$

$$(-1, -1, 0) \quad \text{در} \quad m_2 = 2$$

$$(1, 1, 2) \quad \text{در} \quad m_3 = 1$$

(الف) ماتریس لختی را بیابید؛ (ب) ماتریس لختی را با به‌دست آوردن ویژه‌مقدارها و محورهای اصلی (به‌عنوان ویژه‌بردارهای متعامدیکه) قطری کنید.
۱۳-۶-۴ جرمهای واحد در نقاط مشخص شده در شکل قرار گرفته‌اند. (الف) ماتریس گشتاور



لختی را به‌دست آورید. (ب) ویژه‌مقدارها و مجموعه‌ای از ویژه‌بردارهای متعامدیکه را به‌دست آورید. (ج) واگنی را برحسب تقارن سیستم توضیح دهید.

$$I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ r_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 5 \end{array}$$

۱۴-۶-۴ جرم $m_1 = 1/2 \text{ kg}$ در نقطه $(1, 1, 1)$ (متر) واقع است. جرم $m_2 = 1/2 \text{ kg}$ در نقطه $(-1, -1, -1)$ قرار دارد. این دو جرم توسط میله‌ای ایده‌آل (بدون وزن و صلب) به یکدیگر متصل‌اند. (الف) تانسور گشتاور لختی این زوج جرم را بیابید؛ (ب) ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس لختی را به‌دست آورید؛ (ج) مفهوم و اعتبار فیزیکی ویژه‌مقدار $\lambda = 0$ را توضیح دهید.

ویژه بردار متناظر چه مفهومی دارد؟ (د) اکنون که مسئله را با استفاده از روشهای تانسوری و ماتریسی نسبتاً پیشرفته حل کرده‌اید، توضیح دهید که چگونه می‌توانستید از طریق ژرفکاوای:

۱. $\lambda = 0$ و $\lambda = ?$ را به دست آورید؛

۲. $\text{rank} = 0$ را به دست آورید.

(منظور از ژرفکاوای استفاده از مفاهیم فیزیک مقدماتی است.)

۴-۶-۱۵ جرمهای واحدی در هشت گوشهٔ یک مکعب $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ واقع‌اند. ماتریس گشتاور لختی را بیابید و نشان دهید که واگنی سه‌گانه برقرار است. یعنی، تا جایی که گشتاورهای لختی مورد نظرند، ساختار مکعبی تقارن کروی از خود نشان می‌دهد.

۴-۶-۱۶ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای متعامدیکه متناظر با ماتریسهای زیر را بیابید. (توجه کنید که برای امتحان کردن جواب خود از طریق عددی، مجموع ویژه‌مقدارها باید با مجموع عناصر قطری ماتریس اصلی برابر باشد (مسئلهٔ ۴-۳-۹)). همچنین به تناظر بین $\det A = 0$ و وجود $\lambda = 0$ که در مسئله‌های ۴-۶-۲ و ۴-۶-۷ نمایش داده شد، توجه کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = 0, 1, 2$.

۴-۶-۱۷

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = -1, 0, 2$.

۴-۶-۱۸

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = -1, 1, 2$.

۱۹-۶-۴

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ \sqrt{\lambda} & 1 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & \sqrt{\lambda} & 1 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = -3, 1, 5$.
۲۰-۶-۴

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = 0, 1, 2$.
۲۱-۶-۴

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = -1, 1, 2$.
۲۲-۶-۴

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$.
۲۳-۶-۴

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = 0, 2, 2$.
۲۴-۶-۴

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = -1, -1, 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = -1, 2, 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = 0, 0, 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = 1, 1, 6$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = 0, 0, 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

جواب: $\lambda = 2, 3, 6$.

۳۰-۶-۴ (الف) ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه‌مقدارها به ازای $\varepsilon = 0$ واگن‌اند، ولی ویژه‌بردارها به ازای همه $\varepsilon \neq 0$ و $\varepsilon \rightarrow 0$

متعامدند. (ب) ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس زیر را تعیین کنید:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه مقدارها به ازای $\varepsilon = 0$ و اگر $\varepsilon \neq 0$ و ویژه بردارهای این ماتریس (نامتقارن) (به ازای $\varepsilon = 0$) فضا را نمی‌تند. (ج) کسینوس زاویه بین دو ویژه بردار را به ازای $1 \leq \varepsilon \leq 0$ به صورت تابعی از ε بیابید.

۳۱-۶-۴ (الف) ضرایب دستگاه معادلات چند مجهولی مسئله ۴-۱-۷ را به صورت عناصر ماتریسی (A_{ij}) ماتریس (متقارن) A بگیرید. ویژه مقدارها و ویژه بردارها را محاسبه کنید. (ب) ماتریس R را به دست آورید که ستونهای آن ویژه بردارهای A باشند؛ حاصل ضرب سه گانه ماتریسی $\bar{R}AR$ را محاسبه کنید.

جواب: $\lambda = 3, 33163$

۳۲-۶-۴ مسئله ۴-۶-۳۱ را با استفاده از ماتریس مسئله ۴-۲-۳۹ تکرار کنید.

۷-۴ ویژه بردارها، و ویژه مقدارها

در بخش ۴-۶ توجه خود را بیشتر به ماتریسهای هرمیتی یا متقارن حقیقی معطوف کردیم، و به فرایند عملی یافتن ویژه مقدارها و ویژه بردارها پرداختیم. در این بخش، حالت کلی ماتریسهای نرمال را بررسی می‌کنیم که ماتریسهای هرمیتی و یکانی صورتهای خاصی از آنها به شمار می‌آیند. مسئله فیزیکی مهم مدهای بهنجار ارتعاش و نیز مسئله عددی مهم ماتریسهای با شرایط نامطلوب را نیز در این بخش از نظر می‌گذرانیم.

ماتریسهای نرمال^۱

ماتریس نرمال به ماتریسی می‌گویند که با ماتریس الحاقی خود تعویض پذیر باشد

$$[A, A^1] = 0$$

از نمونه‌هایی واضح و مهم این ماتریسها می‌توان ماتریسهای یکانی و هرمیتی را برشمرد. نشان خواهیم داد که ماتریسهای نرمال دارای ویژه بردارهای متعامدند (جدول ۴-۲). این کار را در دو مرحله انجام می‌دهیم.

۱. ماتریسهای نرمال بزرگترین رده از ماتریسهایی به شمار می‌آیند که می‌توان آنها را به کمک تبدیلهای یکانی قطری کرد. تشریح تفصیلی این ماتریسها را در مقاله‌ای به مشخصات زیر بیابید:

P A Macklin, "Normal matrices for Physicists", *Am J Phys*, 52, 513 (1984).

جدول ۲-۴

ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقدارهای متفاوت	ویژه مقدارها	ماتریس
متعامد	حقیقی	هرمیتی
متعامد	موهومی محض (یا صفر)	پادهرمیتی
متعامد	با بزرگی یک	یکانی
متعامد	اگر λ ویژه مقدار A باشد	نرمال
A^\dagger و A ویژه بردارهای همانند دارند	λ^* ویژه مقدار A^\dagger است	

(الف) فرض می‌کنیم A دارای یک ویژه بردار $|x\rangle$ و ویژه مقدار متناظر آن، λ ، باشد. در این صورت

$$A|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad (۱۸۳-۴)$$

یا

$$(A - \lambda I)|x\rangle = 0 \quad (۱۸۴-۴)$$

ترکیب $A - \lambda I$ را برای راحتی کار B می‌نامیم. از معادله ۱۸۴-۴، ماتریس الحاقی می‌گیریم، می‌رسیم به

$$\langle x|(A - \lambda I)^\dagger = 0 = \langle x|B^\dagger \quad (۱۸۵-۴)$$

از آنجا که

$$[(A - \lambda I)^\dagger, (A - \lambda I)] = [A, A^\dagger] = 0$$

داریم

$$[B, B^\dagger] = 0 \quad (۱۸۶-۴)$$

ماتریس B نیز نرمال است.

با استفاده از معادله‌های ۱۸۴-۴ و ۱۸۵-۴ می‌نویسیم

$$\langle \mathbf{x} | B^\dagger B | \mathbf{x} \rangle = 0 \quad (187-4)$$

با توجه به ۱۸۶-۴:

$$\langle \mathbf{x} | B B^\dagger | \mathbf{x} \rangle = 0 \quad (188-4)$$

اینک معادله ۱۸۸-۴ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$(B^\dagger | \mathbf{x} \rangle)^\dagger (B^\dagger | \mathbf{x} \rangle) = 0 \quad (189-4)$$

بنابراین

$$B^\dagger | \mathbf{x} \rangle = (A^\dagger - \lambda^* 1) | \mathbf{x} \rangle = 0 \quad (190-4)$$

مشاهده می‌کنیم که برای ماتریسهای نرمال، ویژه بردارهای A^\dagger عبارت‌اند از همان ویژه بردارهای A ولی ویژه مقدارها مزدوج مختلط ویژه مقدارهای A هستند.
(ب) اینک دو ویژه مقدار و ویژه بردار را در نظر می‌گیریم. داریم

$$A | \mathbf{x}_i \rangle = \lambda_i | \mathbf{x}_i \rangle \quad (191-4)$$

$$A | \mathbf{x}_j \rangle = \lambda_j | \mathbf{x}_j \rangle \quad (192-4)$$

معادله ۱۹۲-۴ را از سمت چپ در $\langle \mathbf{x}_i |$ ضرب می‌کنیم:

$$\langle \mathbf{x}_i | A | \mathbf{x}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle \quad (193-4)$$

سمت چپ معادله ۱۹۳-۴ را در نظر می‌گیریم

$$\langle \mathbf{x}_i | A = (A^\dagger | \mathbf{x}_i \rangle)^\dagger \quad (194-4)$$

با استفاده از ۱۹۰-۴، می‌دانیم که A و A^\dagger دارای ویژه بردارهای مساوی و ویژه مقدارها مزدوج مختلط یکدیگر هستند، پس

$$(A^\dagger | \mathbf{x}_i \rangle)^\dagger = (\lambda_i^* | \mathbf{x}_i \rangle)^\dagger = \lambda_i \langle \mathbf{x}_i | \quad (195-4)$$

با نشانیدن این مقادیر در معادله ۴-۱۹۳ می‌رسیم به

$$\lambda_i \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle$$

یا

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = 0 \quad (4-196)$$

این معادله، همانند معادله ۴-۱۵۶ است.

به‌ازای $\lambda_i \neq \lambda_j$:

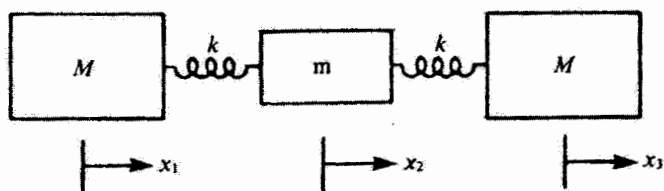
$$\langle \mathbf{x}_j | \mathbf{x}_i \rangle = 0$$

ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقادیر متفاوت، یک ماتریس نرمال متعامدند. یعنی، یک ماتریس نرمال را می‌توان توسط یک تبدیل یکانی قطری کرد. ماتریس یکانی مورد نیاز را می‌توان، همانگونه که قبلاً در بخش ۴-۶ نشان داده شد، به کمک ویژه بردارهای متعامدیکه تشکیل داد. عکس این نتیجه نیز صادق است. اگر بتوان A را توسط یک تبدیل تشابهی قطری کرد، A نرمال است.

مدهای بهنجار ارتعاش

ارتعاش یک مدل کلاسیکی مولکول CO_2 را در نظر می‌گیریم. این مفهوم نمونه‌ای است از کاربرد روشهای ماتریسی درباره مسئله‌ای که نقطه شروع آن ماتریسی نبوده است. همچنین، مثالی است برای ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس حقیقی نامتقارن.

مثال ۴-۷-۱ مدهای بهنجار: روی محور x ، سه جرم را در نظر بگیرید که، مطابق شکل ۴-۷، توسط چند فنر به هم متصل شده‌اند. نیروی فنر را خطی می‌گیریم (جابه‌جاییهای کوچک، قانون هوک)، و جرمها به ماندن روی محور x مقیدند.



شکل ۴-۷

برای هر جرم مختصه متفاوتی به کار می‌بریم، بنابر قانون دوم نیوتون به مجموعه معادلات زیر

می‌رسیم

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{k}{M}(x_3 - x_2)\end{aligned}\quad (197-4)$$

سیستم این جرمها ارتعاشی است. به دنبال بسامدهای مشترک، ω ، می‌گردیم، به طوری که همه جرمها با همان بسامد ارتعاش کنند. این بسامدها مدهای پهنجار سیستم به شمار می‌آیند. فرض کنید

$$x_i = x_{i0} e^{i\omega t}, \quad i = 1, 2, 3$$

با نشانیدن در معادله‌های ۱۹۷-۴ و حذف عامل مشترک، $e^{i\omega t}$ ، به دست می‌آوریم

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = +\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\quad (198-4)$$

یک معادله ویژه مقدراری ماتریسی برای یک ماتریس غیرممتازن داریم. معادله ساده‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0\quad (199-4)$$

به رابطه زیر می‌رسیم

$$\omega^2 \left(\frac{k}{M} - \omega^2 \right) \left(\omega^2 - \frac{2k}{m} - \frac{k}{M} \right) = 0$$

ویژه مقادارها عبارت‌اند از

$$\omega^2 = 0, \quad \frac{k}{M} \quad \text{و} \quad \frac{k}{M} + \frac{2k}{m}$$

که جعلگی حقیقی‌اند.

ویژه بردارهای متناظر را با نشاندن یک‌یک ویژه مقادارها در معادلهٔ ۱۹۸-۴ به دست می‌آوریم. معادلهٔ ۱۹۸-۴ به ازای $\omega^2 = 0$ تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$x_1 = x_2 = x_3$$

این تساوی یک انتقال محض را توصیف می‌کند، جرمها نسبت به یکدیگر حرکتی ندارند و ارتعاشی در کار نیست.

معادلهٔ ۱۹۸-۴ به ازای $\omega^2 = k/M$ تبدیل می‌شود به

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = 0$$

دو جرم بیرونی در جهت‌های مخالف یکدیگر حرکت می‌کنند. جرم مرکزی ساکن است. مؤلفه‌های ویژه بردار به ازای $\omega^2 = (k/M) + (2k/m)$ عبارت‌اند از

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = -\frac{2M}{m}x_1$$

دو جرم بیرونی در کنار یکدیگر حرکت می‌کنند. جرم مرکزی در جهت مخالف دو جرم بیرونی حرکت می‌کند. تکانهٔ کل صفر است.

هر نوع جابه‌جایی سه ذره در امتداد محور x را می‌توان به صورت ترکیب خطی این سه نوع حرکت، انتقال به اضافه دو نوع ارتعاش، توصیف کرد.

سیستمهای با شرایط نامطلوب
دستگاهی چندمعدله‌ای را می‌شود به صورت زیر نوشت

$$A|x\rangle = |y\rangle \quad \text{یا} \quad A^{-1}|y\rangle = |x\rangle \quad (۲۰۰-۴)$$

که در آن $|y\rangle$ معلوم و $|x\rangle$ مجهول است. ممکن است حالت‌هایی پیش بیاید که در آنها خطای اندکی در $|y\rangle$ ، به خطای بزرگتری در $|x\rangle$ منجر شود. در این صورت، ماتریس A را "با شرایط نامطلوب" می‌نامند. خطا در $|x\rangle$ را با $|\delta x\rangle$ و خطا در $|y\rangle$ را با $|\delta y\rangle$ نشان می‌دهیم؛ خطاهای نسبی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[\frac{\langle \delta x | \delta x \rangle}{\langle x | x \rangle} \right]^{1/2} \leq K(A) \left[\frac{\langle \delta y | \delta y \rangle}{\langle y | y \rangle} \right]^{1/2} \quad (۲۰۱-۴)$$

که در آن $K(A)$ را عدد شرط می‌گویند، و یکی از خواص ماتریس A به‌شمار می‌آید. اگر A هرمیتی باشد، یکی از شکل‌های عدد شرط به صورت زیر است^۱

$$K(A) = \frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}} \quad (۲۰۲-۴)$$

یکی از صورتهای تقریبی منسوب به تورینگ^۲ به‌قرار زیر است

$$K(A) = n [A_{ij}]_{\max} [A_{ij}^{-1}]_{\max} \quad (۲۰۳-۴)$$

که در آن، n مرتبهٔ ماتریس و $[A_{ij}]_{\max}$ عنصر بیشینه در A است.

مثال ۴-۷-۲ ماتریس با شرایط نامطلوب: ماتریس هیلبرت، $H_{ij} = (i+j-1)^{-1}$ ، نمونهٔ رایج ماتریس با شرایط نامطلوب است. با ماتریس هیلبرت رتبهٔ ۴، H_4 در برازش کمترین مجذورهای

1. Forsythe George E and Cleve B Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Equations*.

۲. با مقالهٔ زیر مقایسه کنید

Todd John, *The Condition of the Finite Segments of the Hilbert Matrix*.

داده‌ها، به یک چندجمله‌ای درجه سه برمی‌خوریم

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad (204-4)$$

عناصر ماتریس (مرتبه n) وارون از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$(H_n^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1} \cdot \frac{(n+i-1)!(n+j-1)!}{[(i-1)!(j-1)!]^2(n-i)!(n-j)!} \quad (205-4)$$

به ازای $n = 4$

$$H_4^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix} \quad (206-4)$$

تورینگ با استفاده از معادله ۲۰۳-۴، عدد شرط H_4 را به قرار زیر به دست می‌آورد:

$$\begin{aligned} K_{\text{تورینگ}} &= 4 \times 1 \times 6480 \\ &= 2,59 \times 10^4 \end{aligned}$$

این عدد یک هشدار است، خطای ورودی، در جواب خروجی محاسبه شده ۲۵۰۰۰ برابر می‌شود. معنای این جمله آن است که H_4 ماتریس با شرایط نامطلوب است. در برخورد با سیستم‌های با شرایط نامطلوب (اگر نخواهیم مسئله را کلاً کنار بگذاریم) دو راه وجود دارد.

(الف) روش ریاضی دیگری اختیار کنیم.

(ب) ترتیبی اتخاذ کنیم که تعداد بیشتری رقم بامعنا داشته باشیم و محاسبه را به نیروی غیره

دنبال کنیم.

همانگونه که قبلاً مشاهده شد، روشهای ویژه بردار ویژه مقدار به مسائل ماتریسی منحصر نمی شوند. نمونه دیگری از این تغییر روش، از یک زمینه به زمینه دیگر، کاربرد روشهای ماتریسی در حل معادلات ویژه مقدار انتگرالی فردهولم در بخش ۱۶-۳ دیده می شود. روشهای ماتریسی نیز به نوبه خود به کمک محاسبات وردشی در بخش ۱۷-۸ قوام می یابند.

مسائل

۱-۷-۴ نشان دهید که هر ماتریس 2×2 دو ویژه بردار و دو ویژه مقدار متناظر دارد. ویژه بردارها لزوماً متعامد نیستند. ویژه مقدارها نیز لزوماً حقیقی نیستند.
 ۲-۷-۴ برای تجسم مسئله ۱-۷-۴، ویژه مقدارها و ویژه بردارهای متناظر را برای ماتریس زیر به دست آورید:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه بردارها متعامد نیستند.

جواب :

$$\lambda_1 = 0 \quad r_1 = (2, -1)$$

$$\lambda_2 = 4 \quad r_2 = (2, 1)$$

۳-۷-۴ نشان دهید که در ماتریس دو در دو A ویژه مقدارهای λ در معادله زیر صدق می کنند.

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(A) + \det(A) = 0$$

۴-۷-۴ فرض کنید ماتریس یکانی U در معادله ویژه مقدار $Ur = \lambda r$ صدق کند. نشان دهید که بزرگی ویژه مقدارهای این ماتریس یکانی برابر یک است. همین قضیه درباره ماتریسهای متعامد حقیقی صادق است.

۵-۷-۴ یک نوع ماتریس یکانی خاص، ماتریس متعامدی است که یک چرخش را در فضای سه بعدی توصیف می کند؛ در نتیجه، این ماتریس متعامد را می توان توسط یک تبدیل یکانی قطری کرد. (الف) نشان دهید که مجموع سه ویژه مقدار برابر است با $1 + 2 \cos \varphi$ ، که در آن φ زاویه کل چرخش حول یک تک محور ثابت است. (ب) اگر بدانیم که یکی از ویژه مقدارها یک است، نشان دهید که دو ویژه مقدار دیگر باید $e^{i\varphi}$ و $e^{-i\varphi}$ باشند. ماتریس چرخش متعامد مورد نظر ما

(که عناصر حقیقی دارد)، ویژه‌مقدارهای مختلط خواهد داشت.

۶-۷-۴ یک ماتریس هرمیتی مرتبه n با ویژه‌بردارهای متعامدیکه $\langle x_i \rangle$ و ویژه‌مقدارهای $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$ حقیقی است. نشان دهید که برای بردار $\langle y \rangle$ با بزرگی واحد، داریم

$$\lambda_1 \leq \langle y | A | y \rangle \leq \lambda_n$$

۷-۷-۴ ماتریس خاصی را در نظر بگیرید که هم یکانی و هم هرمیتی باشد. نشان دهید که ویژه‌مقدارهای آن جملگی ± 1 هستند.

یادآوری: ماتریسهای پاؤلی و دیراک انواع خاصی از این ماتریسها هستند.

۸-۷-۴ دیراک در نظریه نسبیتی الکترونی خود به مجموعه‌ای از چهار ماتریس پاد تعویض‌پذیر نیاز داشت. فرض کنید قرار است این ماتریسها هرمیتی و یکانی نیز باشند. اگر این ماتریسها $n \times n$ باشند، نشان دهید که n باید زوج باشد. به این ترتیب با توجه به کافی نبودن ماتریسهای 2×2 (چرا؟) کوچکترین ماتریسهایی که می‌توان برای ساختن این مجموعه ماتریسهای یکانی هرمیتی پادتعویض‌پذیر به‌کار برد، 4×4 هستند.

۹-۷-۴ ماتریسی است نرمال با ویژه‌مقدارهای λ_n و ویژه‌بردارهای متعامدیکه $\langle x_n \rangle$. نشان دهید که A را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A = \sum_n \lambda_n |x_n\rangle \langle x_n|$$

[راهنمایی: نشان دهید که این شکل ویژه‌برداری A و شکل اصلی آن هر دو وقتی روی بردار اختیاری $\langle y \rangle$ عمل کنند، به نتیجه واحدی منجر می‌شوند].

۱۰-۷-۴ ویژه‌بردارهای A عبارت‌اند از 1 و -1 ، و ویژه‌بردارهای متناظر آنها عبارت‌اند از (\cdot) و (\cdot) . ماتریس A را به دست آورید.

جواب: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

۱۱-۷-۴ ویژه‌مقدارهای ماتریس غیرهرمیتی A عبارت‌اند از λ_i ، و ویژه‌بردارهای متناظر آنها عبارت‌اند از $\langle u_i \rangle$. ماتریس الحاقی A^\dagger نیز دارای همین مجموعه از ویژه‌مقدارهاست، ولی ویژه‌بردارهای متناظر $\langle v_i \rangle$ آن متفاوت است. نشان دهید این ویژه‌بردارها یک مجموعه متعامد دوگانه می‌سازند، به این معنا که

$$\langle v_i | u_j \rangle = 0 \quad \text{به‌ازای } \lambda_i^* \neq \lambda_j$$

۱۲-۷-۴ ماتریس حقیقی A در دو مجموعه معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$A|f_n\rangle = \lambda_n|g_n\rangle$$

$$\tilde{A}|g_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle$$

(الف) ثابت کنید $|f_n\rangle$ یک ویژه بردار $(\tilde{A}A)$ است، با ویژه مقدار λ_n^2 .

(ب) ثابت کنید $|g_n\rangle$ یک ویژه بردار $(\tilde{A}A)$ است، با ویژه مقدار λ_n^2 .

(ج) توضیح دهید که چطور می‌شود پی برد:

۱. $|f_n\rangle$ تشکیل یک مجموعهٔ متعامد می‌دهد؛

۲. $|g_n\rangle$ تشکیل یک مجموعهٔ متعامد می‌دهد؛

۳. λ_n^2 حقیقی است.

۱۳-۷-۴ ثابت کنید ماتریس A در مسئلهٔ قبل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A = A_i = \sum_n \lambda_n |g_n\rangle \langle f_n|$$

که در آن $|g_n\rangle$ و $\langle f_n|$ به یک بهنجار شده‌اند.

[راهنمایی: (الف) نشان دهید که اگر A روی یک بردار اختیاری عمل کند، همان نتیجه‌ای

به دست خواهد آمد که از عمل کردن A روی آن بردار به دست می‌آید. (ب) بردار اختیاری بند الف

را به صورت ترکیب خطی $|f_n\rangle$ بسط دهید.]

۱۴-۷-۴ داریم

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(الف) ترانهاد (\tilde{A}) و شکل‌های متقارن $\tilde{A}A$ و $A\tilde{A}$ را تشکیل دهید. (ب) با استفاده از

$\tilde{A}A|f_n\rangle = \lambda_n^2|f_n\rangle$ و $|g_n\rangle$ را بیابید. $|g_n\rangle$ ها را بهنجار کنید. (ج) با استفاده از

$\tilde{A}A|f_n\rangle = \lambda_n^2|f_n\rangle$ [که برابر با λ_n در بند ب است]، و $|f_n\rangle$ را بیابید. $|f_n\rangle$ ها را بهنجار کنید. (د) درستی روابط

زیر را تحقیق کنید

$$A|f_n\rangle = \lambda_n|g_n\rangle, \quad \tilde{A}|g_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle$$

(ه) درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید

$$A = \sum_n \lambda_n |g_n\rangle \langle f_n|$$

۱۵-۷-۴ ویژه‌مقدارهای $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ و ویژه‌بردارهای متناظر زیر مفروض‌اند

$$|f_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |f_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |g_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(الف) A را به دست آورید. (ب) درستی رابطه $A|f_n\rangle = \lambda_n|g_n\rangle$ را تحقیق کنید. (ج) درستی رابطه $\bar{A}|g_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle$ را تحقیق کنید.

جواب: $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

۱۶-۷-۴ در ادامه مسئله ۴-۵-۱۲، که در آن ماتریس یکانی U و ماتریس هرمیتی H به کمک رابطه زیر به هم مربوط شدند

$$U = e^{iaH}$$

(الف) اگر $\text{Tr}H = 0$ ، نشان دهید که $\det U = +1$. (ب) اگر $\det U = +1$ ، نشان دهید که $\text{Tr}H = 0$.

[راهنمایی: H را می‌توان به کمک یک تبدیل تشابهی قطری کرد. در نتیجه، با بسط تابع نمایی به صورت سری مکلورن، دیده می‌شود که U نیز قطری می‌شود. ویژه‌مقدارهای متناظر توسط $u_j = \exp(iah_j)$ داده می‌شوند.]

یادآوری: این خواص و خواصی در مسئله ۴-۵-۱۲ به دست آمدند، در ارائه مفهوم مولدها در نظریه گروه‌ها، بخش ۴-۱۱ اهمیت به‌سزایی دارند.

۱۷-۷-۴ ماتریس $n \times n$ دارای n ویژه‌مقدار A_i است. اگر $B = e^A$ ، نشان دهید که ویژه‌بردارهای B، همان ویژه‌بردارهای A هستند، و ویژه‌مقدارهای متناظر B_i ، به‌کمک رابطه $B_i = \exp(A_i)$ داده می‌شوند.

یادآوری: e^A به‌کمک بسط مکلورن تابع نمایی به دست می‌آید

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

۱۸-۷-۴ ماتریس P عملگر تصویر است که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$P^2 = P$$

نشان دهید که ویژه‌مقدارهای متناظر $(\rho^\dagger)_\lambda$ و ρ_λ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$(\rho^\dagger)_\lambda = (\rho_\lambda)^\dagger = \rho_\lambda$$

این تساوی به آن معناست که ویژه‌مقدارهای P عبارت‌اند از صفر و یک. ۷-۱۹ در معادلهٔ ویژه‌برداری ویژه‌مقداری ماتریسی زیر، A یک ماتریس $n \times n$ هرمیتی است

$$A|\mathbf{r}_i\rangle = \lambda_i|\mathbf{r}_i\rangle$$

برای راحتی کار فرض کنید که n ویژه‌مقدار حقیقی A از یکدیگر متمایزند، و λ_1 بزرگترین آنهاست. اگر $|\mathbf{r}\rangle$ تقریبی برای $|\mathbf{r}_1\rangle$ باشد، یعنی

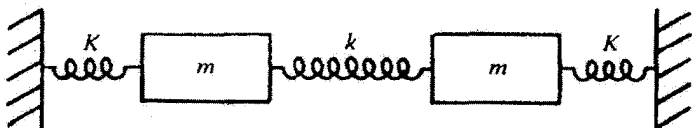
$$|\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r}_1\rangle + \sum_{i=2}^n \delta_i |\mathbf{r}_i\rangle$$

نشان دهید که

$$\frac{\langle \mathbf{r} | A | \mathbf{r} \rangle}{\langle \mathbf{r} | \mathbf{r} \rangle} \leq \lambda_1$$

و خطا در λ_1 از مرتبهٔ $|\delta_i|^2$ است. فرض کنید: $|\delta_i| \ll 1$. [راهنمایی: n بردار $|\mathbf{r}_i\rangle$ تشکیل یک مجموعهٔ متعامد کامل می‌دهند که فضای (مختلط) n بعدی را می‌تند.]

۷-۲۰ دو جرم مساوی، مطابق شکل، توسط چند فنر به یکدیگر و به دیوار بسته شده‌اند. جرمها مقیدند که در روی یک خط افقی بمانند. (الف) معادلهٔ شتاب نیوتونی هر جرم را به دست آورید؛ (ب) معادلهٔ سدهای مربوط به ویژه‌بردارها را حل کنید. (ج) ویژه‌بردارها و در نتیجه مدهای بهنجار حرکت را تعیین کنید.



۴-۸ آشنایی با نظریه گروه

نظریه گروه‌های متاهی را که در اصل به صورت شاخه‌ای از ریاضی محض ابداع شد، می‌توان یک سرگرمی زیبا و جذاب دانست. برای فیزیکدانان، این نظریه کماکان با همان زیبایی، ابزار فوق‌العاده کارامدی برای صورتبندی مفاهیم نیمه‌شهودی و بهره‌گیری از تقارن‌ها به‌شمار می‌آید. نظریه گروه در آن زمینه‌هایی که به معرفی نمایشهای خاص (ماتریسها) و محاسبه مشخصه‌های گروه (رذها) می‌پردازد، در بلورشناسی و فیزیک حالت جامد به ابزار مفیدی تبدیل می‌شود. با این مقوله در بخش ۴-۹ به اختصار آشنا می‌شویم. در حوزه فیزیک، تعمیم نظریه گروه به گروه‌های پیوسته^۱ و کاربرد گروه‌های پیوسته در نظریه کوانتومی و ذرات در فیزیک انرژی‌های بالا، شاید از اهمیت بیشتری برخوردار باشد. این مبحث را در بخشهای ۴-۱۰ و ۴-۱۱ مشاهده خواهیم کرد.

در سی سال اول قرن حاضر، که شناخت و معرفت بشر از جهان فیزیکی تقریباً به‌نحوی انفجاری توسعه یافت، ویگنر و دیگران پی بردند که در راه شناخت و فهم پدیده‌های جدید و برای وضع و تدوین نظریه‌های مناسب، ناوردایی مفهومی کلیدی به‌شمار می‌آید. نظریه گروه ابزار ریاضی بررسی ناوردها و تقارنهاست. این نظریه نمایانگر وحدت و صورتبندی اصولی نظیر پارته و تکانه زاویه‌ای به‌شمار می‌آید که در فیزیک کاربرد گسترده‌ای دارند. پارته به تقارن تحت وارونی مربوط می‌شود. پایستگی تکانه زاویه‌ای پیامد مستقیم تقارن چرخشی و به معنای ناوردایی تحت چرخشهای فضایی است. گرچه ممکن است به شگردهای صوری نظریه گروه نیازی نباشد، ولی این شگردهای توانای ریاضی می‌توانند کار را بسیار ساده کنند. وحدتی که نظریه گروه ایجاد می‌کند (اگر خوب درک شود)، به ساده‌سازی چشمگیرتری منجر می‌شود.

تعریف گروه

گروه G را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از اشیا یا عملها (که اعضای گروه خوانده می‌شوند) تعریف کرد، که می‌توانند با یکدیگر ترکیب یا "در هم ضرب" شوند و حاصلضرب خوش‌تعریفی بسازند و در چهار شرط زیر صدق کنند. مجموعهٔ اعضاء را a, b, c, \dots می‌خوانیم:

۱. اگر a و b دو عضو مجموعه باشند، در این صورت حاصلضرب ab نیز عضوی از مجموعه باشد.
۲. ضربی که برای گروه تعریف شده، $(ab)c = a(bc)$ ، شرکت‌پذیر باشد. این خاصیت خودبه‌خود در مورد ضرب ماتریسی صدق می‌کند.
۳. این مجموعه یک عضو یکه، I ، داشته باشد^۲ به طوری که به‌ازای هر عضو a در مجموعه، داشته باشیم: $Ia = aI = a$.
۴. هر عضو باید یک وارون یا معکوس داشته باشد. مجموعه باید به‌ازای هر عضو a یک عضو $b = a^{-1}$ داشته باشد، به طوری که: $aa^{-1} = a^{-1}a = I$.

۱. شمار اعضای این گروهها نامتناهی است. هر عضو به یک یا دو پارامتر پیوسته متغیر، وابسته است.

۲. عضو یکه گروه را اغلب به اقتباس از ویگنر با E نشان می‌دهند. E از واژه آلمانی Einheit به معنای یکه اخذ شده است.

در فیزیک، این شرایط انتزاعی، اغلب برحسب تبدیل بردارها، اسپینورها و تانسورها معنای فیزیکی بی‌واسطه‌ای پیدا می‌کنند.

به‌عنوان مثالی ساده، ولی نه پیش یا افتاده برای گروه، مجموعهٔ $\{1, a, b, c\}$ را که مطابق جدول ضرب گروهی زیر ترکیب می‌شوند^۱، در نظر بگیرید.

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

روشن است که چهار شرط “تعریف” گروه صادق‌اند. اعضای a, b, c و 1 موجودات ریاضی محض‌اند که، جز جدول ضربی که در بالا آمد، هیچ محدودیت دیگری در تعریف آنها وجود ندارد. اکنون به‌عنوان نمایش خاصی برای اعضای گروه، فرض کنید

$$1 \rightarrow 1, \quad a \rightarrow i, \quad b \rightarrow -1, \quad c \rightarrow -i \quad (207-4)$$

که مطابق با قاعده ضرب معمولی با هم ترکیب شوند. باز هم چهار شرط “تعریف” گروه صادق باشند و این ۴ عضو هم یک گروه تشکیل می‌دهند. این گروه را با C_4 نشان می‌دهیم. با توجه به اینکه ضرب اعضای این گروه تعویض‌پذیر است، گروه را تعویض‌پذیر یا آبدلی می‌خوانیم. اعضای این گروه را می‌توانیم به‌صورت توانهای متوالی یک عضو، یعنی i^n ($n = 0, 1, 2, 3$) به‌دست آوریم، از این رو آن را یک گروه چرخه‌ای می‌خوانیم. خاطر نشان می‌شود که برای نوشتن معادلهٔ $207-4$ نمایش خاصی برای گروه ۴ عضوی C_4 برگزیده‌ایم.

ملاحظه می‌شود که اعضای گروه $1, i, -1, -i$ را می‌توان چرخشهای متوالی در صفحهٔ مختلط به‌اندازهٔ 90° ، تعبیر کرد. در نتیجه، با استفاده از معادلهٔ $4-63$ مجموعه‌ای از چهار ماتریس 2×2 می‌سازیم (در معادلهٔ $4-63$ ، φ را با $-\varphi$ تعویض می‌کنیم تا به‌جای مختصات، بردار بچرخد).

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

۱. ترتیب عاملها در ضرب به صورت سطر در ستون است: $ab = c$ در جدول نمایش داده شده است.

و به‌ازای $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ داریم

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (208-4)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

این مجموعه چهار ماتریسی گروهی تشکیل می‌دهد که در آن قانون ترکیب، ضرب ماتریسی است. به‌این ترتیب، نمایش دومی به‌دست آورده‌ایم که این یکی برحسب ماتریسهاست. با انجام مختصری عملیات ضرب ماتریسی اثبات می‌شود که این نمایش نیز آبلی و چرخه‌ای است. روشن است که بین دو نمایش تناظری وجود دارد:

$$I \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 1 \quad a \leftrightarrow i \leftrightarrow A \quad b \leftrightarrow -1 \leftrightarrow B \quad c \leftrightarrow -i \leftrightarrow C \quad (209-4)$$

همریختی (هومومورفیسم)، یکرختی (ایزومورفیسم)

بین اعضای دو گروه (یا دو نمایش) ممکن است تناظری یک به یک، دو به یک یا چند به یک برقرار باشد. اگر اعضای متناظر در جدول ضرب گروهی یکسانی صدق کنند، می‌گوییم دو گروه همریخت‌اند. در بخش ۴-۱۰ تناظر همریخت بسیار مهم بین گروههای O_4^+ و $SU(2)$ مطرح می‌شود. در مورد خاصی که تناظر یک به یک باشد، و باز هم جدول ضرب برقرار بماند، دو گروه را یکرخت می‌نامیم.^۱ دو نمایش $(i, -1, -i, 1)$ و $(1, A, B, C)$ برای گروه C_4 یکرخت‌اند.

در مقابل، چنین تناظری، بین هر یک از این نمایشهای گروه C_4 و گروه چهار عضوی دیگری (مسئله ۴-۲-۷) که به گروه چهارتایی معروف است، برقرار نیست. جدول ضرب گروه چهارتایی به‌قرار زیر است:

	I	V_1	V_2	V_3
I	I	V_1	V_2	V_3
V_1	V_1	I	V_3	V_2
V_2	V_2	V_3	I	V_1
V_3	V_3	V_2	V_1	I

۱. فرض کنید اعضای یکی از گروهها را با g_i و اعضای گروه دوم را با h_i نشان دهیم. در این صورت، $g_i \leftrightarrow h_i$ به‌معنای تناظر یک به یک به‌ازای همه مقادیر i است. همین‌طور اگر $g_i g_j = g_k$ و $h_i h_j = h_k$ در این صورت $g_k \leftrightarrow h_k$ باید اعضای متناظر باشند.

برای تحقیق فقدان تناظر بین گروه چهارتایی و گروهی که با $(1, z, -1, -z)$ یا با ماتریسهای (I, A, B, C) در معادله $4-20$ نمایش داده می‌شود، به این نکته توجه کنید که گروه چهارتایی با آنکه آبله است ولی چرخه‌ای نیست. گروه چرخه‌ای C_4 و گروه چهارتایی یکریخت نیستند.

نمایشهای ماتریسی؛ تحویل‌پذیر و تحویل‌ناپذیر

نمایش دادن اعضای گروهها به کمک ماتریسها شگردی بسیار تواناست که فیزیکدانان به‌نحوی تقریباً فراگیر از آن بهره می‌گیرند. به‌کارگیری ماتریسها هیچ محدودیت بارزی ایجاد نمی‌کند. می‌توان نشان داد که اعضای هرگروه متناهی و گروههای پیوسته بخش $4-10$ را می‌توان به کمک ماتریسها، به‌خصوص ماتریسهای یکانی، نمایش داد. این نمایشهای یکانی در مکانیک کوانتومی اهمیت خاصی پیدا می‌کنند. زیرا ماتریسهای یکانی را می‌توان قطری کرد و ویژه‌مقدارها را برای رده‌بندی حالت‌های کوانتومی به‌کار برد.

اگر یک تبدیل یکانی داشته باشیم^۱ که ماتریسهای نمایش اصلی را به‌صورت قطری یا قطری بلوکی به شکل زیر در آورد:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{11} & q_{12} \\ 0 & 0 & q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (210-4)$$

به‌گونه‌ای که در آن دیگر جفت‌شدگی بین اجزای کوچکتر یا زیرماتریسها وجود نداشته باشد، نمایش اصلی تحویل‌پذیر است. به‌عبارت دیگر داریم

$$SRS^{-1} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix} \quad (211-4)$$

اگر R یک ماتریس $n \times n$ باشد، P می‌تواند $m \times m$ باشد که در نتیجه Q یک ماتریس $(n-m) \times (n-m)$ خواهد بود. O ها ماتریسهای مستطیلی $m \times (n-m)$ و $(n-m) \times m$ اند که همه عناصر آنها صفرند. این رابطه را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$R = P \oplus Q \quad (212-4)$$

و می‌گوییم R به دو نمایش P و Q تجزیه شده است. مثلاً، همه نمایشهای با ابعاد بزرگتر از یک گروههای آبله تحویل‌پذیرند. اگر برای یک نمایش، چنین تبدیلی یکانی موجود نباشد، آن نمایش

۱. هر ماتریس یکانی تحت تبدیل یکانی، یکانی می‌ماند.

تحویل ناپذیر است. در میان ماتریسهای دیراک در جدول ۴-۱، ماتریسهای 1، σ_1 ، σ_2 ، σ_3 ، ρ_3 ، δ_1 ، δ_2 و δ_3 به این صورت تحویل یافته‌اند. تحقیق در اینکه ماتریسهای 1، A، B، C و نمایش تحویل پذیری را تشکیل می‌دهند، و تحویل این ماتریسها به نمایشهای تحویل ناپذیر، موضوع مسئله ۴-۸-۱۱ را تشکیل می‌دهد. نمایش ماتریسی 2×2 گروه چهارتایی نیز تحویل پذیر است.

نقش نمایشهای تحویل ناپذیر در نظریه گروه تقریباً شبیه نقش بردارهای یکه در تحلیل برداری است. این نمایشها ساده‌ترین نمایشها هستند؛ همه نمایشهای دیگر را می‌توان از این نمایشها به دست آورد.

رده‌ها و مشخصه

فرض کنید یک عضو گروه مانند x از طریق تبدیل تشابهی توسط یک عضو گروه مانند g_i ، به یک عضو گروه مانند y تبدیل شود

$$g_i x g_i^{-1} = y \quad (213-4)$$

عضو y را همیوغ عضو x می‌نامند. رده، مجموعه‌ای از اعضای گروه است که متقابلاً با یکدیگر همیوغ باشند. مجموعه اعضایی که یک رده را تشکیل می‌دهند، معمولاً چهار اصل معرف گروه را برآورده نمی‌کنند و در نتیجه تشکیل گروه نمی‌دهند. در واقع، عضو یکه، 1، که همواره به تنهایی در یک رده قرار می‌گیرد، تنها رده‌ای است که در همه موارد یک زیرگروه است. اعضای یک رده معین جملگی با یکدیگر هم‌ارزند، به این معنا که هر یک از اعضا تبدیل تشابهی هر عضو دیگر است. روشن است که اگر گروه آبدلی باشد، هر عضو به تنهایی در یک رده قرار دارد. پی می‌بریم که:

۱. هر عضو گروه اصلی به یک و فقط یک رده تعلق دارد.

۲. شمار اعضای موجود در یک رده یکی از مقسوم‌علیه‌های مرتبه آن گروه است.

با توجه به این نکته که y مبدل تشابهی x است، به یک تعبیر فیزیکی ممکن برای مفهوم رده می‌رسیم. اگر y یک چرخش دستگاه مختصات را نمایش دهد، y همان عمل x ، اما نسبت به مختصات چرخیده جدید، است.

در بخش ۴-۳ می‌بینیم که یک ماتریس حقیقی تحت چرخش مختصات، از طریق یک تبدیل تشابهی متعامد، تبدیل می‌شود. یک ماتریس می‌تواند بسته به چارچوب مرجعی که برگزیده‌ایم بینهایت صورت گوناگون به خود بگیرد. به همین ترتیب، نمایشهای گروه را می‌توان با استفاده از تبدیلهای یکانی به بینهایت صورت گوناگون درآورد. ولی هر یک از این نمایشهای تبدیل یافته، با نمایش اصلی هم‌ریخت است. بنابر مسئله ۴-۳-۹، رد هر عضو (یعنی هر یک از ماتریسهای یک نمایش) تحت تبدیلهای یکانی ناورداست. رد (که به آن نام جدید مشخصه می‌دهیم)، درست به دلیل همین ناوردایی، در نظریه گروه به‌خصوص در کاربردهای مربوط به حوزه فیزیک حالت جامد، اهمیت خاصی پیدا می‌کند. روشن است که همه عضوهای یک رده معین (در یک نمایش

معین) دارای مشخصه مساوی هستند. عضوهای مربوط به رده‌های مختلف می‌توانند مشخصه مساوی داشته باشند، ولی عضوهای با مشخصه‌های مختلف نمی‌توانند در یک رده قرار بگیرند. مفهوم رده به دو دلیل اهمیت دارد. اول به دلیل رد یا مشخصه؛ دوم به این دلیل که تعداد نمایشهای تحویل‌ناپذیر ناهم‌ارز یک گروه برابر است با تعداد رده‌های آن گروه.

زیرگروهها و هم‌مجموعه‌ها

بارها پیش می‌آید که یک زیرمجموعه از عضوهای یک گروه (شامل عضو یکه 1) به‌تنهایی در هر چهار شرط یک گروه صدق می‌کند؛ یعنی خودش، یک گروه است. چنین زیرمجموعه‌ای را زیرگروه می‌نامند. هر گروه دارای دو زیرگروه بدیهی است: یکی عضو یکه به‌تنهایی، و دیگری خود گروه. عضوهای 1 و b از گروه چهارعضوی C_4 که قبلاً بررسی کردیم، زیرگروه سومی برای گروه C_4 به‌شمار می‌آید. در بخش ۴-۱، O_3^+ گروه (بیوسته) تمام چرخشها در فضای معمولی، را بررسی می‌کنیم. چرخشهای حول هر تک‌محور یک زیرگروه O_3^+ را تشکیل می‌دهند. در بخشهای آینده مثالهای زیادی از زیرگروهها را خواهیم آورد.

زیرگروه H با عضوهای h_i و یک عضو گروه x را که در H نباشد، در نظر بگیرید. xh_i و $h_i x$ در زیرگروه H نیستند. مجموعه‌هایی که توسط

$$xh_i \quad i = 1, 2, \dots$$

و

$$h_i x \quad i = 1, 2, \dots$$

تولید می‌شوند، به‌ترتیب، هم مجموعه‌های چپ و راست زیرگروه H نسبت به x خوانده می‌شوند. می‌توان نشان داد که تعداد عضوهای متفاوت موجود در هم‌مجموعه یک زیرگروه، با تعداد عضوهای متفاوت آن زیرگروه برابر است (فرض کنید که عکس این موضوع صادق باشد، و ثابت کنید که به تناقض می‌رسید). این نتیجه‌گیری را تعمیم می‌دهیم و گروه اصلی G را به‌صورت مجموع H و هم‌مجموعه‌های آن می‌نویسیم:

$$G = H + x_1 H + x_2 H + \dots$$

بنابراین، مرتبه هر زیرگروه یک مقسوم‌علیه مرتبه آن گروه است. این نتیجه‌گیری اهمیت مفهوم هم‌مجموعه را نشان می‌دهد. گروه شش‌عضوی D_3 (از مرتبه ۶) که در بخش بعد مطرح خواهد شد، زیرگروههایی از مرتبه ۱، ۲، و ۳ دارد. D_3 نمی‌تواند زیرگروههای مرتبه ۴ و ۵ داشته باشد (و ندارد).

تبدیل تشابهی زیرگروه H توسط یک عضو ثابت گروه، مانند x که در H نباشد، یعنی xHx^{-1} یک زیرگروه ایجاد می‌کند (مسئله ۴-۸-۸). اگر زیرگروه جدید به‌ازای همه x ها با H یکسان باشد،

$$xHx^{-1} = H$$

در این صورت، H را یک زیرگروه ناوردا، هنجار یا خودهمیوغ می‌نامند. بررسی خطوط چندگانه در طیفهای اتمی و هسته‌ای، و نیز ذرات مورد بحث در بخش ۴-۱۲، متضمن چنین زیرگروههایی است. زیرگروههای یک گروه جابه‌جایی (آبلی) جمالیگی به‌خودی‌خود ناوردا هستند.

مسائل

۴-۸-۱ نشان دهید ماتریسهای 1, A, B, C در معادله ۴-۸-۲ تحویل‌پذیرند. آنها را به ماتریسهای تحویل‌یافته تبدیل کنید.

یادآوری: برای اثبات باید نشان دهید که A و C (هر دو به کمک یک تبدیل تشابهی) قطری می‌شوند.

[راهنمایی: A و C پادهرمیتی‌اند. ویژه‌بردارهای آنها متعامدند.]

۴-۸-۲ از جمله عملهای ممکن روی شبکه بلور می‌توان A_π (چرخش به‌اندازه π)، m (بازتاب یا انعکاس) و i (وارونی یا برگردان) را نام برد. این سه عمل به‌صورت زیر با یکدیگر ترکیب می‌شوند

$$A_\pi^2 = m^2 = i^2 = 1$$

$$A_\pi \cdot m = i, \quad m \cdot i = A_\pi, \quad i \cdot A_\pi = m$$

نشان دهید که گروه $(1, A_\pi, m, i)$ با گروه چهارتایی یکریخت است.

۴-۸-۳ چهار عمل ممکن در صفحه xy به‌قرار زیرند:

$$1. \quad \begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow y \end{cases} \text{ بدون تغییر}$$

$$2. \quad \begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases} \text{ وارونی (برگردان)}$$

$$3. \quad \begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow y \end{cases} \text{ بازتاب (انعکاس)}$$

$$4. \quad \begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{cases} \text{ بازتاب (انعکاس)}$$

(الف) نشان دهید این چهار عمل یک گروه می‌سازند. (ب) نشان دهید که این گروه با گروه چهارتایی یکرخت است. (ج) یک نمایش ماتریسی 2×2 برای این گروه تولید کنید.

۴-۸-۴ قضیه بازآرایی: برای یک گروه معلوم با n عضو متفاوت $(1, a, b, c, \dots, n)$ ، نشان دهید که مجموعه حاصلضربهای $(a_1, a^2, ab, ac, \dots, an)$ ، n عضو متفاوت گروه را در یک ترتیب جدید باز تولید می‌کنند.

۴-۸-۵ استفاده از نمایش ماتریسی 2×2 در مسئله ۴-۲-۷، برای گروه چهارتایی: (الف) نشان دهید که در این گروه ۴ رده، هر کدام با یک عضو، یافت می‌شود. (ب) مشخصه (یا رده) هر رده را محاسبه کنید. توجه داشته باشید که دو رده متفاوت می‌توانند مشخصه یکسانی داشته باشند. (ج) نشان دهید که این گروه سه زیرگروه دو عضوی دارد. (عضو یکه همواره به تنهایی یک زیرگروه می‌سازد.) (د) نشان دهید که هر یک از زیرگروههای دو عضوی همراه با یک هم‌مجموعه، گروه چهارتایی را باز تولید می‌کنند.

توجه کنید که زیرگروهها، رده‌ها و هم‌مجموعه‌ها کاملاً متفاوت‌اند.

۴-۸-۶ استفاده از نمایش ماتریسی 2×2 برای C_4 ، در معادله ۴-۸-۲: (الف) نشان دهید این گروه چهار رده یک‌عضوی دارد. (ب) مشخصه (یا رده) هر یک از رده‌ها را محاسبه کنید. (ج) نشان دهید که این گروه، یک زیرگروه دو‌عضوی دارد. (د) نشان دهید این زیرگروه و یکی از هم‌مجموعه‌های آن، گروه اصلی را باز تولید می‌کند.

۴-۸-۷ ثابت کنید تعداد عضوهای متمایز در یک هم‌مجموعه یک زیرگروه، با تعداد عضوهای آن زیرگروه برابر است.

۴-۸-۸ h_i ها عضوهای زیرگروه H ‌اند. x یک عضو معین گروه اصلی G است که عضو H نیست. تبدیل

$$xh_i x^{-1} \quad i = 1, 2, \dots$$

زیرگروه همیوخ xHx^{-1} را تولید می‌کند. نشان دهید که این زیرگروه همیوخ، در هر یک از چهار اصل موضوع گروه صدق می‌کند و در نتیجه یک گروه است.

۴-۸-۹ (الف) یک گروه آبلی در نظر بگیرید. هر یک از g_i ها در گروه اصلی را با g_i^{-1} تعویض کنید، و گروه دومی بسازید. نشان دهید که این دو گروه یکرخت‌اند. یادآوری: معنی این حرفها آن است که اگر $a_i b_i = c_i$ ، آنگاه $a_i^{-1} b_i^{-1} = c_i^{-1}$. (ب) در ادامه بند (الف) نشان دهید که اگر دو گروه بالا یکرخت باشند، هر یک از آنها باید آبلی باشد.

۹-۴ گروههای گسسته

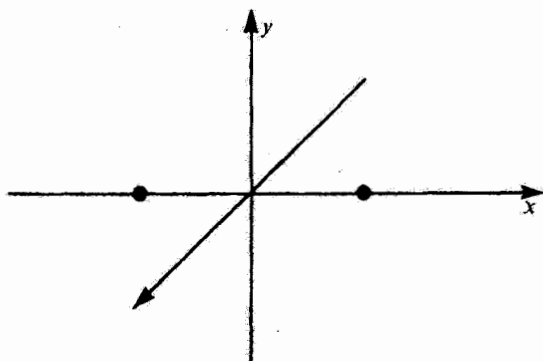
در فیزیک، گروهها معمولاً به صورت مجموعه‌ای از عملها ظاهر می‌شوند که یک دستگاه تحت آنها بدون تغییر یا ناوردا می‌ماند. این عبارت بیان تقارن است. تقارن را در حقیقت می‌توان به صورت

ناوردایی هامیلتونی یک دستگاه، تحت تأثیر گروهی از تبدیلهای تعریف کرد. تقارن به این معنا، در مکانیک کلاسیک اهمیت دارد ولی اهمیت آن در مکانیک کوانتومی بیشتر و بارزتر می شود. در این بخش، خواص تقارنی مجموعه‌ای از اشیا (اتمهای یک مولکول یا یک بلور) را بررسی می‌کنیم. این بررسی برای مفاهیم مربوط به گروهها که در بخش ۴-۸ ارائه شد، مصداقهای دیگری ارائه می‌کند و مستقیماً به گروههای دوجهی می‌انجامد. گروههای دوجهی نیز به توبه خود باب بررسی ۳۲ گروه نقطه‌ای و ۲۳ گروه فضایی را که در بلورشناسی و فیزیک حالت جامد اهمیت فراوان دارد، می‌گشاید. یادآوری می‌کنیم که مفاهیم تقارن و نظریه گروه از طریق بررسی تقارنهای بلوری به حوزه فیزیک وارد شد.

دو شیء-محور تقارن دوتایه

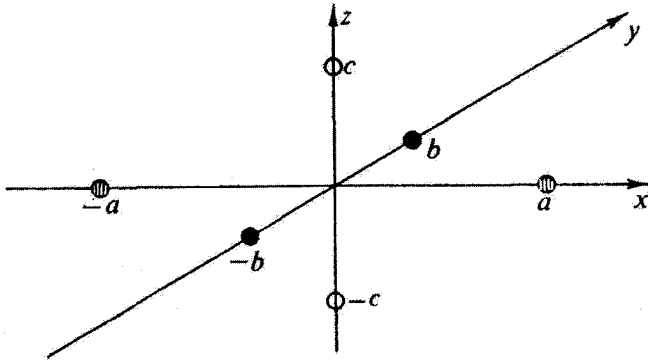
نخست دستگاه دوبعدی شامل دو اتم یکسان در صفحه xy واقع در $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ را در نظر بگیرید (شکل ۴-۸). چرخشهایی^۱ که این دستگاه را (با ننگه داشتن هر دو اتم در صفحه xy) ناوردا می‌گذارند، کدامند؟ حالت اول البته عملگر یکه^۱ است. چرخش به اندازه π رادیان حول محور z فهرست را کامل می‌کند. به این ترتیب یک گروه نه چندان جالب با دو عضو $(1, -1)$ داریم. محور z را با توجه به دوزاویه چرخش 0 و π حول آن، که دستگاه را ناوردا برجای می‌گذارد، یک محور دوتایه می‌خوانیم.

بررسی این دستگاه در سه بعد جالبتر می‌شود. در این حالت مولکولی (یا قسمتی از یک بلور) را مجسم کنید که مانند شکل ۴-۹، اتمهایی از عنصر X در $\pm a$ روی محور x و اتمهایی از عنصر Y در $\pm b$ روی محور y و اتمهایی از عنصر Z در $\pm c$ روی محور z داشته باشد. روشن است که



شکل ۴-۸. مولکول دواتمی H_2 , N_2 , O_2 , Cl_2 و مانند آنها.

۱. در اینجا، بازتاب و وارونی را عمداً کنار گذاشته‌ایم. برای آنکه مجموعه کامل ۳۲ گروه نقطه‌ای را به دست آورده باشیم، باید آنها را نیز به حساب بیاوریم.



شکل ۹-۴ تقارن D_r .

در این حالت، هر یک از محورها یک محور تقارنی دوتاییه است. چرخش به اندازه π رادیان حول محور x را با $R_x(\pi)$ نشان می‌دهیم. برای این چرخشها، مطابق بخش ۳-۴، یک نمایش ماتریسی به صورت زیر تولید می‌کنیم:

$$R_x(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R_y(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۲۱۴-۴)$$

این چهار عضو $[1, R_x(\pi), R_y(\pi), R_z(\pi)]$ یک گروه آبلی با جدول ضرب گروهی زیر می‌سازند:

	1	$R_x(\pi)$	$R_y(\pi)$	$R_z(\pi)$
1	1	R_x	R_y	R_z
$R_x(\pi)$	R_x	1	R_z	R_y
$R_y(\pi)$	R_y	R_z	1	R_x
$R_z(\pi)$	R_z	R_y	R_x	1

می‌توانیم حاصلضربهایی را که در این جدول نشان داده شده‌اند، به یکی از دو روش متمایز زیر به دست آوریم: (۱) می‌توانیم خود عملها را بررسی کنیم؛ مثلاً چرخش به اندازه π حول محور x و پس از آن یک چرخش به اندازه π حول محور y ، هم‌ارز است با یک چرخش به اندازه π حول

محور z : $(R_y(\pi)R_x(\pi) = R_z(\pi))$. (۲) یا آنکه می‌توانیم حاصلضربها را پس از رسیدن به نمایشهای ماتریسی از طریق ضرب ماتریسی به‌دست آوریم. در اینجا است که توانایی ریاضیات به منصف ظهور می‌رسد؛ یعنی وقتی یک دستگاه پیچیده‌تر از آن باشد که برای آن یک تعبیر فیزیکی مستقیم میسر باشد.

بلافاصله در مقایسه با مسئله‌های $۷-۲-۴$ یا $۲-۸-۴$ یا $۳-۸-۴$ پی می‌بریم. که این گروه، همان گروه چهارتایی است. ماتریسهای معادله $۲۱۴-۴$ با ماتریسهای مسئله $۷-۲-۴$ یکریخت‌اند. علاوه بر این، روشن است که ماتریسهای این نمایش با توجه به قطری بودنشان تحویل‌پذیرند. زیرگروههای این گروه عبارت‌اند از $(1, R_x)$ ، $(1, R_y)$ و $(1, R_z)$. این زیرگروهها ناوردا هستند. باید گفت که چرخش به‌اندازه π حول محور y و چرخش به‌اندازه π حول محور z ، هم‌ارز است با چرخش به‌اندازه π حول محور x . $R_z(\pi)R_y(\pi) = R_x(\pi)$. به تعبیر تقارنی، اگر y و z محورهای دوتایه‌ای باشند، x به‌خودی خود یک محور تقارنی دوتایه است.

این گروه تقارنی 1 ، یعنی گروه چهارتایی، اغلب با D_2 نشان داده می‌شود: D به‌نشانه یک گروه دوجوهی و اندیس 2 به‌نشانه یک محور تقارنی دوگانه (بدون حضور هیچ محور تقارنی بالاتری).

سه‌شی-محور تقارن سه‌تایه

اینک سه‌اتم همسان را، مطابق شکل $۱۰-۴$ ، در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر بگیرید. این مثلث تحت چرخشهای به‌اندازه 0 ، $2\pi/3$ و $4\pi/3$ ، ناوردا می‌ماند. به بیان ماتریسی 2 :

$$1 = R_z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = R_z(2\pi/3) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (215-4)$$

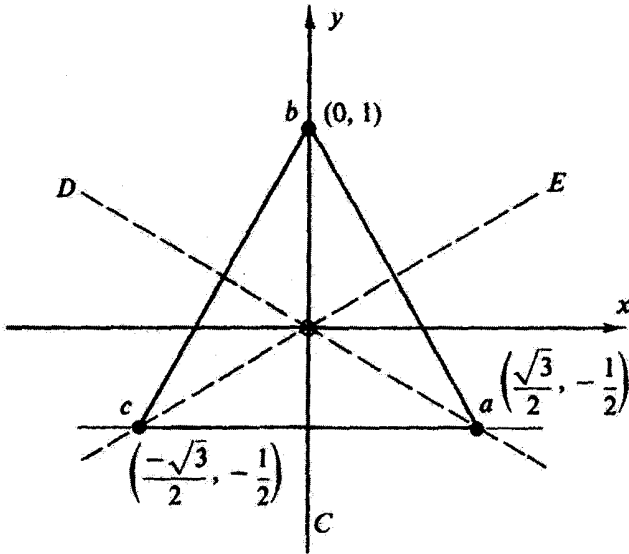
$$B = R_z(4\pi/3) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

محور z یک محور تقارن سه‌تایه است. $(1, A, B)$ یک گروه چرخه‌ای می‌سازند، که زیرگروه گروه شش‌عضوی است که در ادامه معرفی خواهد شد.

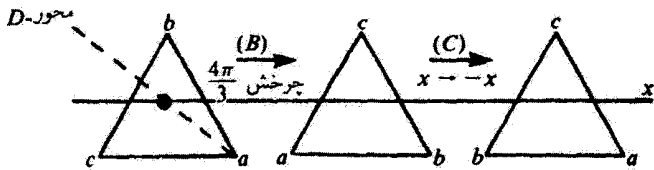
سه محور تقارنی دیگر در صفحه xy وجود دارد؛ هر اتم (در گوشه مثلث) و مرکز هندسی مثلث یکی از این محورها را می‌سازند. هر یک از این محورها یک محور تقارنی دوتایه است. این محورها را می‌توانیم با معرفی بازتابها، صرفاً در همان چارچوب قبلی توصیف کنیم. چرخش π

۱. گروه تقارنی گروهی است از عملهایی که تقارن را پایسته نگه می‌دارد، یعنی چرخشها، بازتابها و وارونها. یک گروه تقارنی برای مثال عبارت است از گروه جایگشتهای n شی متمایز از مرتبه $n!$.

۲. یادآوری می‌کنیم که مثلث را نسبت به مختصات ثابت در جهت پادساعتگرد می‌چرخانیم.



شکل ۱۰-۴ عملهای تقارنی یک مثلث متساوی الاضلاع.



شکل ۱۱-۴ مثلث سمت راست همان مثلث سمت چپ است که به اندازه 180° حول محور D چرخیده باشد.
 $D = CB$

حول C یا محور y ، که به معنای تعویض اتمهای a و c است، همان بازتاب محور x به شمار می آید.

$$C = R_C(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (216-4)$$

می توانیم چرخش حول محور D را از چرخشی به اندازه $4\pi/3$ (حول محور z) و پس از آن یک بازتاب محور x ($x \rightarrow -x$) به دست آوریم (شکل ۱۱-۴):

$$D = R_D(\pi) = CB$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (217-4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، می‌توانیم یک چرخش (A) به اندازه $2\pi/3$ و پس از آن یک بازتاب^۱ محور x را با چرخشی به اندازه π حول محور E که a را به جای b قرار می‌دهد، تعویض کنیم:

$$E = R_E(\pi) = CA$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (218-4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

جدول ضرب کامل گروهی به قرار زیر است

	1	A	B	C	D	E
1	1	A	B	C	D	E
A	A	B	1	D	E	C
B	B	1	A	E	C	D
C	C	E	D	1	B	A
D	D	C	E	A	1	B
E	E	D	C	B	A	1

توجه کنید که همانگونه که قضیه^۲ بازارابی در مسئله ۴-۸-۲ ایجاب می‌کند، هر عضو گروه، در هر سطر و در هر ستون فقط یک بار ظاهر می‌شود. همین‌طور از جدول ضرب دیده می‌شود که این گروه آبلی نیست. یک گروه شش عضوی و یک نمایش ماتریسی تحویل‌ناپذیر 2×2 برای آن ساخته‌ایم. تنها گروه شش عضوی متمایز با این گروه، گروه چرخه‌ای $[1, R, R^2, R^3, R^4, R^5]$ است، که در آن

$$R = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (219-4)$$

۱. یادآوری می‌کنیم که یکی از پیامدهای این بازتابها آن است که $\det(C) = \det(D) = \det(E) = -1$.
 ۲. چرخشهای A و B برابر +۱ است.

در بلورشناسی، گروه $[1, A, B, C, D, E]$ ، یعنی گروه دووجهی با محور تقارن سه‌تایه، را با D_3 نشان می‌دهند. در نتیجه، سه محور (E, D, C) در صفحهٔ xy ، به‌خودی‌خود محورهای تقارن دوتایه می‌شوند. در نتیجه $(1, C)$ ، $(1, D)$ و $(1, E)$ جملگی زیرگروههای دوعضوی می‌سازند. هیچیک از این زیرگروههای دوعضوی D_3 ناوردا نیست.

گروه تقارنی مثلث متساوی‌الاضلاع، دو نمایش تحویل‌ناپذیر دیگر نیز دارد: (۱) نمایش بدیهی $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ، و (۲) نمایش تقریباً بدیهی $(1, -1, -1, 1, 1, -1)$ ، که در آن علامتهای مثبت نظیر چرخشهای سره و علامتهای منفی نظیر چرخشهای ناسره (ترکیب چرخش با بازتاب) است. این هر دو نمایش با D_3 هم‌ریخت‌اند.

یکی از نتایج کلی و بسیار مهم برای گروههای متناهی h عضوی به قرار زیر است

$$\sum_i n_i^2 = h \quad (۲۲۰-۴)$$

که در آن n_i بعد ماتریسهای h امین نمایش تحویل‌ناپذیر است. این تساوی که گاهی قضیهٔ ابعادی خوانده می‌شود، برای به‌دست آوردن نمایشهای تحویل‌ناپذیر یک گروه بسیار سودمند است. در اینجا، برای سه نمایش مربوط به D_3 داریم: $۱^2 + ۱^2 + ۲^2 = ۶$. برای گروه تقارنی سه‌تایه هیچ نمایش تحویل‌ناپذیر دیگری وجود ندارد.

گروه دووجهی، D_n

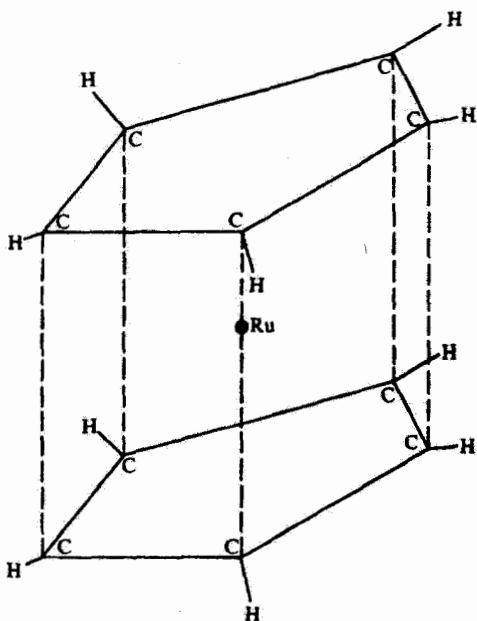
گروه دووجهی D_n که یک محور تقارن n تایه دارد، متضمن n محور است که با یکدیگر زاویهٔ $2\pi/n$ می‌سازند. n عدد صحیحی است که جز این هیچ محدودیت دیگری بر آن وجود ندارد. ولی اگر بحثهای تقارنی را دربارهٔ شبکه‌های بلوری اعمال کنیم، n محدود می‌شود به ۱، ۲، ۳، ۴، ۶. با شرط ناوردایی شبکهٔ بلور تحت انتقالهایی در صفحهٔ عمود بر محور n تایه، مقادیری از n برابر ۵، ۷ و مقادیر بالاتر آن کنار گذاشته می‌شود. سعی کنید صفحه‌های را به‌طور کامل و بدون همپوشانی با پنج ضلعیهای منظم همسان بپوشانید.^۱ این شرط در مورد مولکولهای منزوی وجود ندارد، ولی مولکولهای با $n > ۶$ کمیاب‌اند. در واقع امکان $n = ۵$ وجود دارد. مثلاً، گروه تقارنی روتوسین، $(C_5H_5)_2Ru$ ، که در شکل ۴-۱۲ نمایش داده شده، عبارت است از D_5 .

گروههای نقطه‌ای و فضایی بلورشناختی

گروههای دووجهی که در بالا بررسی شد، نمونه‌هایی از گروههای نقطه‌ای بلورشناختی‌اند. یک گروه

۱. برای D_6 صفحه‌ای را مجسم کنید که با شش ضلعیهای منظمی پوشانده شده باشد، که از مرکز هندسی هر یک از آنها یک محور چرخشی گذشته است.

۲. به بیان کلی، علامت این گروه D_{nh} است که در آن h ، ناوردایی تحت بازتاب روی محور h تایه را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱۲ روتوسین.

نقطه‌ای متشکل از ترکیب‌هایی از چرخشها و بازتابها (و وارونیه‌ها)، شبکه بلوری معینی را بدون تغییر می‌گذارند. محدود کردن عملها به چرخشها و بازتابها (و وارونیه‌ها) به این معناست که یک نقطه، یعنی مبدأ، ثابت می‌ماند؛ و این معنا وجه تسمیه گروه نقطه‌ای به‌شمار می‌آید. با در نظر گرفتن گروههای چرخه‌ای، دو گروه مکعبی (با تقارنهای چهاروجهی و هشتوجهی) و صورتهای ناسره (شامل بازتابها) در کل به ۳۲ گروه نقطه‌ای می‌رسیم.

اگر به عملهای چرخش و بازتابی که گروههای نقطه‌ای را می‌سازند، امکان انتقال را نیز بیفزاییم و باز شرط ناوردا ماندن شبکه بلور را بگذاریم، به گروههای فضایی می‌رسیم. ۲۳۰ گروه فضایی وجود دارد که شاید جز برای متخصصان بلورشناسی عدد وحشت‌انگیزی باشد. شرح جزئیات را (که می‌تواند صدها صفحه را در بر بگیرد) در مراجع پیشنهادی کتاب ببینید.

مسائل

۴-۹-۱ (الف) اگر برای یک گروه یک نمایش ماتریسی داشته باشید، می‌توانید با محاسبه دترمینانهای آن ماتریسها، یک نمایش یک‌بعدی برای آن گروه به‌دست آورید. نشان دهید که روابط حاصلضربی

در این نمایش دترمینانی نیز پایسته است. (ب) با استفاده از دترمینانها یک نمایش یک بعدی برای D_2 به دست آورید.
۲-۹-۴ توضیح دهید که رابطه

$$\sum_i n_i^2 = h$$

چگونه دربارهٔ گروه چهارتایی ($h = 4$) و گروه دووجهی D_2 ($h = 6$) به کار می رود.
۳-۹-۴ نشان دهید که زیرگروه $(1, A, B)$ از گروه D_2 یک زیرگروه ناورداست.
۴-۹-۴ گروه D_2 را می توان به صورت گروه جایگشت سه شیء به دست آورد. به عنوان مثال، ماتریس B گوشهٔ a را (که در آغاز در جای ۱ بوده است) به موضعی می برد که قبلاً آن را c اشغال کرده بود (جای ۳). گوشهٔ b از جای ۲ به جای ۱ می رود و الی آخر. اگر این جایگشت را با $(abc) \rightarrow (bca)$ نمایش دهیم، در سه بعد داریم

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

(الف) نمایش 3×3 متناظر با سایر اعضای D_2 را به همین ترتیب به دست آورید. (ب) نمایش 3×3 ای را به دست آورید، به نمایش 2×2 ای که در این بخش ارائه شد، تحویل کنید. (این نمایش 3×3 باید تحویل پذیر باشد؛ در غیر این صورت، معادلهٔ $4 - 220$ نقض می شود.)

یادآوری: تحویل یک نمایش تحویل پذیر در عمل ممکن است پردردسر باشد. اغلب ساده تر آن است که یک نمایش جدید با ابعاد مورد نظر بسازیم.

۵-۹-۴ (الف) گروه جایگشت چهار شیء P_4 دارای $4! = 24$ عضو است. چهار عضو گروه چرخه ای C_4 را به صورت جایگشتها در نظر بگیرید و یک نمایش ماتریسی 4×4 برای C_4 به دست آورید. C_4 زیرگروهی از P_4 است. (ب) چگونه می توانید ثابت کنید که این نمایش ماتریسی 4×4 در C_4 باید تحویل پذیر باشد.

یادآوری: C_4 آبلی است و هر گروه آبلی شامل h شیء فقط می تواند h نمایش تحویل ناپذیر یک بعدی داشته باشد.

۶-۹-۴ (الف) جای اشیا $(abcd)$ را به صورت $(dacb)$ تعویض می کنیم. یک نمایش ماتریسی 4×4 برای این جایگشت بنویسید. (ب) جایگشت $(abdc) \rightarrow (dacb)$ فرد است یا زوج؟ (ج) آیا این جایگشت می تواند عضوی از گروه D_4 باشد؟ چرا؟

۷-۹-۴ اعضای گروه دوجهی D_n را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$S^\lambda R_z^\mu(2\pi/n) \quad \lambda = 0, 1$$

$$\mu = 0, 1, \dots, n-1$$

که در آن $R_z(2\pi/n)$ نمایش چرخش به اندازه $2\pi/n$ حول محور تقارن n تاییه و S نمایش چرخش به اندازه π حول محوری است که از مرکز چندضلعی منظم و یکی از گوشه‌های آن می‌گذرد. نشان دهید که به ازای $S = E$ ، این رابطه، ماتریسهای A, B, C و گروه D_2 را توصیف می‌کند.

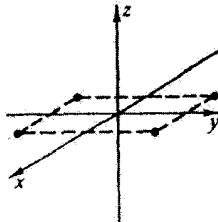
یادآوری: اعضای R_z و S را مولدهای این گروه متناهی می‌نامند. به همین ترتیب، i نیز مولد گروهی است که با معادله $۲۰۷-۴$ توصیف شد.

۸-۹-۴ نشان دهید که گروه چرخه‌ای n شیء، C_n ، را می‌توان با r^m ، $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ نمایش داد. r مولدی است که بنابر تعریف عبارت است از:

$$r = \exp(2\pi i s/n)$$

پارامتر s ، مقادیر $s = 1, 2, 3, \dots, n$ را به خود می‌گیرد، که هر مقدار s یک نمایش (تحویل ناپذیر) یک بعدی متفاوت برای C_n به دست می‌دهد.

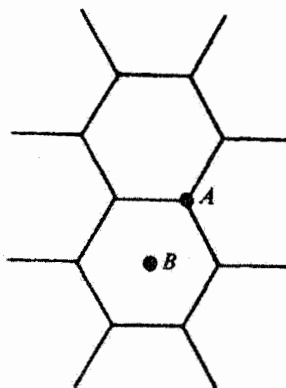
۹-۹-۴ نمایش ماتریسی 2×2 تحویل ناپذیر گروه عملیاتی (چرخشها و بازتابیاتی) را که یک مربع را به خودش تبدیل می‌کند، به دست آورید. جدول ضرب گروهی را بنویسید. یادآوری: این گروه تقارنی مربع همان گروه دوجهی D_2 است.



۱۰-۹-۴ گروه جایگشتهای چهار شیء شامل $24 = 4!$ عضو است. از مسئله $۹-۹-۴$ می‌دانیم که اعضای D_2 ، گروه تقارنی مربع بسیار کمتر از 24 تا است. رابطه بین D_2 و گروه جایگشتهای چهار شیء را به دست آورید.

۱۱-۹-۴ صفحه‌ای مطابق شکل با شش ضلعیهای منظمی پوشیده شده است. (الف) تقارن دوجهی محوری را که بر این صفحه عمود است، و از A ، گوشه مشترک سه شش ضلعی می‌گذرد تعیین کنید. یعنی اگر این محور تقارن n تاییه دارد، (با توضیح دقیق) مقدار n را تعیین کنید. یک

ماتریس 2×2 بنویسید که کمترین چرخش مثبت (غیرصفر) این آرایه از شش ضلعیها را توصیف کند. این ماتریس عضوی از گروه D_n است. (ب) قسمت (الف) را برای محوری که از B ، مرکز هندسی یکی از شش ضلعیها بگذرد و بر صفحه عمود باشد، تکرار کنید.



۴-۹-۱۲ در یک بلور مکعبی ساده ممکن است اتمهای یکسانی در $r = (la, ma, na)$ داشته باشیم، که در آن l, m, n و همهٔ مقادیر عدد صحیح را به خود بگیرند. (الف) نشان دهید که هر یک از محورهای دکارتی یک محور تقارن چهارتاییه است. (ب) گروه مکعب شامل همهٔ عملیهای (چرخشها، بازتابها، و وارونیهایی) است که بلور مکعبی ساده تحت آنها ناوردا می ماند. با بررسی جایگشت محورهای مختصات مثبت و منفی تعداد عضوهای گروه مکعبی را پیشگویی کنید.

۴-۹-۱۳ (الف) با استفاده از جدول ضرب D_2 یک جدول تبدیل تشابهی تشکیل دهید که xyx^{-1} را نمایش دهد و در آن هر یک از مقادیر x و y بتوانند هر یک از شش عضو D_2 باشند.

$x \backslash y$	1	A ---
1	1	1 ---
A	A	A ---

(ب) اعضای D_2 را رده بندی کنید. رد (مشخصه) هر رده را با استفاده از نمایش ماتریسی 2×2 در معادله های ۴-۲۱۵ تا ۴-۲۱۸ یادداشت کنید.

۴-۱۰ گروههای پیوسته

گروههای نامتناهی، گروههای لی در دو بخش قبل، همهٔ گروهها حاوی تعدادی نامتناهی از اعضا بودند: چهار عضو در گروه

چهارتایی، شش تا در D_2 و الی آخر. در اینجا به معرفی گروه‌هایی با بینهایت عضو می‌پردازیم. عضو گروه حاوی یک با چند پارامتر است که به صورت پیوسته روی گستره معینی تغییر می‌کنند. این پارامتر با تغییرات پیوسته خود، پیوستاری از عضوهای گروه به وجود می‌آورد. برخلاف گروه چرخه‌ای چهار عضوی $(-i, -1, i, 1)$ ، می‌توانیم $e^{i\varphi}$ را داشته باشیم که در آن φ به صورت پیوسته در گستره $[0, 2\pi]$ تغییر می‌کند. گروه‌های O_3^+ و $SU(2)$ که بعداً آنها را توصیف خواهیم کرد، نمونه‌های دیگری از گروه‌های پیوسته‌اند.

در میان امکانات گوناگون موجود در ریاضیات، گروه‌های پیوسته معروف به گروه‌های لی، از توجه خاصی برخوردارند. مشخصه گروه لی آن است که در آن پارامترهای عضو حاصلضرب توابعی تحلیلی^۱ از پارامترهای عملهای ضرب‌اند. در مورد تبدیلهای، مثلاً در مورد یک چرخش، می‌توانیم بنویسیم

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \theta) \quad (۲۲۱-۴)$$

(با معادله ۹-۱ مقایسه کنید). برای آنکه این گروه تبدیل، یک گروه لی باشد، باید توابع f_i توابعی تحلیلی از پارامتر θ باشند. این امر در مورد گروه‌های O_3^+ و $SU(2)$ که در اینجا و در بخش ۴-۱۱ مورد نظر قرار می‌گیرند، و برای $SU(3)$ در بخش ۴-۱۲ و گروه لورنتس در بخش ۴-۱۳، صادق است. این گروه‌ها جملگی گروه‌های لی هستند. ماهیت تحلیلی (مشتق‌پذیری) این توابع امکان گسترش مفهوم مولد (بخش ۴-۱۱) را میسر می‌کند و به این وسیله بررسی تمامی گروه به بررسی عضوهایی از گروه که در همسایگی عضو همانی‌اند تقلیل می‌یابد.

اگر این پارامترها روی بازه‌های بسته‌ای، نظیر بازه‌های $[0, \pi]$ ، یا $[0, 2\pi]$ به ازای زوایا تغییر کنند، گروه را فشرده می‌نامند. یکی از خواص مهم گروه‌های فشرده آن است که هر نمایش این گروه، هم‌ارز یک نمایش یکانی است. برعکس، نه گروه همگن لورنتس در بخش ۴-۱۳ فشرده و نه نمایش $L(V)$ یکانی است.

اینک دو گروه پیوسته در نظر می‌گیریم: (۱) گروه متعامد O_3^+ و (۲) گروه یکانی ویژه $SU(2)$. در مورد O_3^+ از نمایشی که در بخش ۴-۳ ارائه شد بهره می‌گیریم. در مورد $SU(2)$ ، یک نمایش $(2j+1) \times (2j+1)$ می‌سازیم (معادله ۴-۲۳۵). سپس نشان می‌دهیم که این دو گروه هم‌ریخت‌اند، و یک تناظر دو به یک بین آنها برقرار است. از این هم‌ریختی نتیجه می‌شود که نمایش مجموعه‌ای از نمایشهای چرخشی فراهم می‌آورد و به ماتریس چرخش D^j می‌انجامد.

گروه متعامد O_3^+

مجموعه ماتریسهای متعامد حقیقی $n \times n$ یک گروه را تشکیل می‌دهد. (امتحان کنید ببینید خواصی که در بخش ۴-۸ برای گروه برشمرديم برآورده می‌شوند یا خیر.) ماتریس $n \times n$ متعامد،

۱. به طوری که در بخش ۶-۲ تعریف می‌شود، تحلیلی بودن به معنای دارا بودن مشتق از هر مرتبه است.

تعداد $n(n-1)/2$ پارامتر مستقل دارد. به ازای $n=2$ ، فقط یک پارامتر مستقل وجود دارد: یک زاویه در معادله $۳-۴$. به ازای $n=3$ سه پارامتر مستقل وجود دارد: سه زاویه اویلر (بخش $۳-۴$). مجموعه ماتریسهای متعامد حقیقی 3×3 با دترمینان $+1$ ، یعنی فقط چرخش محض بدون بازتاب، را به طور نسبتاً مشروحو بررسی می‌کنیم. این گروه را معمولاً با O_3^+ نشان می‌دهند؛ علامت $+$ نشانگر آن است که دترمینان $+1$ است. بنابر مطالب بخش $۳-۴$ ، می‌دانیم که چرخشهای حول محورهای مختصات عبارت‌اند از

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۲۲۲-۴)$$

که در آن از قراردادهای بخش $۳-۴$ استفاده کرده‌ایم. چرخشها عبارت‌اند از چرخشهای پادساعتگرد دستگاه مختصات به یک سمتگیری جدید. به علاوه، بنابر مطالب بخش $۳-۴$ ، عضو عمومی O_3^+ ، چرخش به اندازه زاویه اویلر، به قرار زیر است

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha) \quad (۲۲۳-۴)$$

رابطه بین گروه O_3^+ و تکانه زاویه‌ای مداری در بخش $۱۱-۴$ به دست می‌آید. O_3^+ در بخش $۱۲-۴$ نیز ظاهر می‌شود که به $SU(2)$ و فیزیک ذرات می‌انجامد.

گروه یکانی خاص، $SU(2)$

مجموعه ماتریسهای یکانی $n \times n$ نیز یک گروه تشکیل می‌دهد. (در اینجا نیز، امتحان کنید و ببینید که خواص گروه صادق‌اند یاخیر.) این گروه را اغلب با $U(n)$ نشان می‌دهند. یک شرط دیگر نیز به این قرار که دترمینان ماتریسها برابر $+1$ باشد وضع می‌کنیم، و گروه یکانی خاص یا گروه تک‌مدولی یکانی $SU(n)$ را به دست می‌آوریم. ماتریسهای یکانی $n \times n$ با دترمینان واحد دارای $n^2 - 1$ پارامتر مستقل‌اند. به ازای $n=2$ ، درست مانند حالت O_3^+ ، سه پارامتر وجود دارد. به ازای $n=3$ هشت پارامتر وجود دارد. این همان مسیر هشت‌تاییه در بخش $۱۲-۴$ است. به ازای $n=2$ ، $SU(2)$ را با عضو عمومی گروه داریم:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (۲۲۴-۴)$$

که در آن $a^*a + b^*b = 1$. همانگونه که نشان داده شده است، a و b مختلط‌اند. غالباً این پارامترها را که کایلی و کلاین در ارتباط با مسائل چرخش در مکانیک معرفی کردند، پارامترهای کایلی-کلاین می‌نامند. یک صورت کلی دیگر برای اعضای این گروه، هر چند غیر بدیهی، به قرار زیر است:

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} -e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\xi} \sin \eta \\ -e^{i\xi} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} \quad (225-4)$$

که در آن پارامترهای ξ ، η و ζ حقیقی‌اند. هر دو صورت بالا، یعنی معادله‌های ۲۲۴-۴ و ۲۲۵-۴ را می‌توان با نشان دادن برقراری تساوی $UU^1 = 1$ آزمود.

اکنون نمایشهای تحویل‌ناپذیر $SU(2)$ را به دست می‌آوریم. با در نظر گرفتن معادله ۲۲۴-۴، می‌بینیم که U تبدیل بردار ستونی مختلط دومؤلفه‌ای (موسوم به اسپینور) را توصیف می‌کند:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (226-4)$$

یا

$$\begin{aligned} u' &= au + bv \\ v' &= -b^*u + a^*v \end{aligned} \quad (227-4)$$

از این روابط پی می‌بریم که اگر تبدیل یکانی معادله ۲۲۷-۴ را روی یک چندجمله‌ای درجه n همگن برحسب u و v انجام دهیم، باز یک چندجمله‌ای همگن درجه n به دست می‌آوریم. اهمیت این نکته در آن است که $n+1$ جمله u^n ، $u^{n-1}v$ ، $u^{n-2}v^2$ و الی آخر، به یک نمایش $n+1$ بعدی گروه یکانی خاص تعلق دارند.

برای اجتناب از عملیات جبری پیچیده و به اقتباس از ویگنر، قرار می‌دهیم $n = 2j$ و تابع تک‌جمله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم

$$f_m(u, v) = \frac{u^{j+m} v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad (228-4)$$

اندیس m می‌تواند مقادیری از $-j$ تا $+j$ را به خود بگیرد و همهٔ جمله‌های به صورت $u^p v^q$ را که در آنها $p+q = 2j$ ، ارائه کند. مخرج کسر، نوعی عامل هنجاربخشی است که نمایش ما را

یکانی می‌کند. اگر حاصل عمل U روی $f_m(u, v)$ به صورت زیر باشد^۱

$$Uf_m(u, v) = f_m(u', v') \quad (۲۲۹-۴)$$

آنگاه

$$\begin{aligned} Uf_m(u, v) &= f_m(au + bv, -b^*u + a^*v) \\ &= \frac{(au + bv)^{j+m} (-b^*u + a^*v)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \end{aligned} \quad (۲۳۰-۴)$$

اکنون باید سمت راست معادله ۴-۲۳۰ را به صورت ترکیب خطی جمله‌هایی به صورت $f_m(u, v)$ بنویسیم. ضرایب این ترکیب خطی، نمایش مطلوب را ارائه می‌کنند. دو دوجمله‌ای را با استفاده از قضیه دوجمله‌ای (بخش ۵-۶) بسط می‌دهیم و می‌رسیم به:

$$(au + bv)^{j+m} = \sum_{k=0}^{j+m} \frac{(j+m)!}{k!(j+m-k)!} a^{j+m-k} u^{j+m-k} b^k v^k \quad (۲۳۱-۴)$$

$$(-b^*u + a^*v)^{j-m} = \sum_{l=0}^{j-m} (-1)^{j-m-l} \frac{(j-m)!}{l!(j-m-l)!} b^{*(j-m-l)} u^{j-m-l} a^{*l} v^l$$

در این صورت

$$\begin{aligned} Uf_m(u, v) &= \sum_{k=0}^{j+m} \sum_{l=0}^{j-m} (-1)^{j-m-l} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!l!(j+m-k)!(j-m-l)!} \\ &\times a^{j+m-k} a^{*l} b^k b^{*(j-m-l)} u^{j-k-l} v^{k+l} \end{aligned} \quad (۲۳۲-۴)$$

اگر قرار دهیم $j - k - l = m'$

$$u^{j-k-l} v^{k+l} \rightarrow u^{j+m'} v^{j-m'} \quad (۲۳۳-۴)$$

۱. در بخش ۴-۱۱، تبدیل (چرخش) یک تابع برحسب چرخش معکوس مختصات تعریف می‌شود. در اینجا از معادله ۴-۲۲۹ بهره می‌بریم، زیرا می‌خواهیم نتیجه را با حالت O_+^+ مقایسه کنیم، و O_+^+ برحسب چرخشهای مختصات در معادله ۴-۲۲۲ توصیف شد.

که با معادله ۲۲۸-۴ سازگار است. مجموعیابی روی l را با مجموعیابی روی m' تعویض می‌کنیم

$$Uf_m(u, v) = \sum_{m'=-j}^j U_{mm'} f_{m'}(u, v) \quad (234-4)$$

که در آن عضو ماتریسی $U_{mm'}$ به‌قرار زیر است

$$U_{mm'} = \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^{m'-m+k} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m)!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!} \\ \times a^{j+m-k} a^{*(j-m'-k)} b^k b^{*(m'-m+k)} \quad (235-4)$$

شاخص k از صفر شروع و تا $m + j$ اضافه می‌شود، ولی فاکتوریهایی^۱ که در مخرج قرار دارند تضمین می‌کنند که ضریب هر نمایی با نمای منفی، صفر شود.

معادله ۲۳۴-۴ نشان می‌دهد که حاصل عمل U روی تابع f_m به‌صورت ترکیبی خطی از $f_{m'}$ ها با ضریبهای $U_{mm'}$ است. این عمل مانند عملگر چرخش است که در آغاز بخش ۲-۴ مطرح شد. عملگر چرخش توسط ماتریس A نمایش داده شد. در اینجا نیز عملگر U توسط ماتریسی با عضوهای $U_{mm'}$ نمایش داده می‌شود. با توجه به آنکه m و m' هر یک با گامهای واحد از $-j$ تا j تغییر می‌کنند، ماتریس $U_{mm'}$ که $SU(2)$ را نمایش می‌دهد دارای ابعاد $(2j+1) \times (2j+1)$ است.

به‌عبارت صریحتر، اگر $j = 1/2$ ، آنگاه

$$m' = \frac{1}{2} \quad m' = -\frac{1}{2} \\ U = \begin{matrix} m = \frac{1}{2} & \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \\ m = -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad (236-4)$$

(شبهه به معادله ۲۲۴-۴). برای نمایش حالتهای نظیر $j = 1$ و بالاتر، چنانکه بعداً نشان داده خواهد شد، استفاده از تابعهای مثلثاتی مناسبتر است.

همریختی $SU(2) - O_3^+$

همانگونه که هم اینک دیدیم، عضوهای $SU(2)$ چرخشهایی در صفحهٔ مختلط دوبعدی را نمایش می‌دهند. (ناوردایی $s^\dagger s$ ، موضوع مسئله ۴-۱۰-۶، مطابق معادله ۲۲۶-۴، نشانگر یک "چرخش" اسپینور s است.) درمیان این ماتریسها برابر $+1$ است، و هر یک سه پارامتر مستقل دارند. روشن

۱. از بخش ۱-۱۰ به‌ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ داریم: $(-n)! = \pm \infty$.

است که گروه ماتریسهای متعامد حقیقی O_3^+ با دترمینان $+1$ ، چرخشهایی را در فضای سه بعدی معمولی، با این مشخصهٔ مهم که $x^2 + y^2 + z^2$ را ناوردا می‌گذارند، توصیف می‌کنند. این ماتریسها نیز سه پارامتر مستقل دارند. توصیفهای چرخشی و تساوی تعداد پارامترها، وجود نوعی تناظر بین گروههای O_3^+ و $SU(2)$ را پیشنهاد می‌کند. این تناظر را بعداً اثبات می‌کنیم.

اعمال یک عضو $SU(2)$ روی یک ماتریس، مطابق معادلهٔ ۴-۱۲۲، توسط یک تبدیل یکانی داده می‌شود

$$M' = U M U^\dagger \quad (237-4)$$

ماتریس 2×2 را در نظر می‌گیریم؛ به یاد آوریم که هر ماتریس 2×2 را می‌توانیم به صورت ترکیبی خطی از ماتریس یکه و سه ماتریس پاؤلی، بخش ۴-۲، بنویسیم. اگر M یک ماتریس با رد صفر باشد، داریم

$$M = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \quad (238-4)$$

ماتریس یکه در این ترکیب وارد نمی‌شود. از آنجا که رد تحت تبدیل یکانی ناورداست (مسئلهٔ ۴-۳-۹)، M' هم باید به همین صورت باشد

$$M' = x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3 = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \quad (239-4)$$

دترمینان نیز تحت تبدیل یکانی ناورداست (مسئلهٔ ۴-۳-۱۰). بنابراین

$$-(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (240-4)$$

یعنی $x^2 + y^2 + z^2$ درست مانند عملهای O_3^+ تحت این عمل $SU(2)$ ناورداست. بنابراین، این عمل $SU(2)$ باید یک چرخش را توصیف کند. این امر نشان می‌دهد که O_3^+ و $SU(2)$ باید یکریخت یا همریخت باشند.

اکنون با بررسی حالت‌های خاص، به این مسئله می‌پردازیم که عمل $SU(2)$ چه چرخشی را توصیف می‌کند. بار دیگر معادلهٔ ۴-۲۲۴ را با ملاحظهٔ معادلهٔ ۴-۲۲۵ در نظر می‌گیریم؛ قرار می‌دهیم $a = e^{i\xi}$ و $b = 0$ ، یا

$$U_z = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \quad (241-4)$$

اندیس z را با توجه به معادله ۲۴۵-۴ که بعداً خواهد آمد، برای U انتخاب کرده‌ایم. با انجام یک تبدیل یکانی روی هر یک از سه σ پاولی داریم

$$\begin{aligned} U_z \sigma_1 U_z^\dagger &= \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\xi} \\ e^{-2i\xi} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (242-4)$$

حاصل را برحسب مقادیر پاولی σ می‌نویسیم

$$U_z x \sigma_1 U_z^\dagger = x \cos 2\xi \sigma_1 - x \sin 2\xi \sigma_2 \quad (243-4)$$

به همین ترتیب

$$U_z y \sigma_2 U_z^\dagger = y \sin 2\xi \sigma_1 + y \cos 2\xi \sigma_2 \quad (244-4)$$

$$U_z z \sigma_3 U_z^\dagger = z \sigma_3$$

از این عبارتها که برحسب دو برابر زاویه به دست آمده‌اند، نتیجه می‌گیریم که باید در آغاز با نصف زاویه $\xi = \alpha/2$ شروع می‌کردیم. در این صورت از معادلات ۲۳۷-۴ الی ۲۳۹-۴، ۲۴۳-۴ و ۲۴۴-۴ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' &= z \end{aligned} \quad (245-4)$$

این تبدیل یکانی 2×2 که با استفاده از $U_z(\alpha/2)$ انجام شد، هم‌ارز عملگر $R(\alpha)$ در معادله ۲۲۲-۴ است.

اثبات تناظر بین دو عبارت:

$$R_y(\beta) \text{ و } U_y(\beta/2) = \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \quad (246-4)$$

و تناظر بین دو عبارت

$$R_x(\varphi) \text{ و } U_x(\varphi/2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 & i \sin \varphi/2 \\ i \sin \varphi/2 & \cos \varphi/2 \end{pmatrix} \quad (247-4)$$

موضوع مسئلهٔ ۴-۱۰-۷ است. متذکر می‌شویم که صورت کلی $U_k(\psi/2)$ به‌قرار زیر است

$$U_k(\psi/2) = 1 \cos \psi/2 + i \sigma_k \sin \psi/2 \quad (248-4)$$

که در آن $k = x, y, z$. در بخش ۴-۱۱ بار دیگر این نکته را بررسی خواهیم کرد. تناظر

$$U_z(\alpha/2) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\alpha) \quad (249-4)$$

یک تناظر یک به یک ساده نیست. در حالت خاصی که α در R_z از 0 تا 2π تغییر می‌کند، پارامتر مربوط به U_z ، یعنی $\alpha/2$ ، از صفر تا π تغییر می‌کند. می‌رسیم به:

$$R_z(\alpha + 2\pi) = R_z(\alpha)$$

$$U_z(\alpha/2 + \pi) = \begin{pmatrix} -e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = -U_z(\alpha/2) \quad (250-4)$$

بنابراین، دو عمل $U_z(\alpha/2)$ و $U_z(\alpha/2 + \pi) = -U_z(\alpha/2)$ هر دو با $R_z(\alpha)$ متناظراند. تناظر دو به یک است؛ به عبارت دیگر $SU(2)$ و O_3^+ هم‌ریخت‌اند. تثبیت تناظر بین نمایشهای $SU(2)$ و نمایشهای O_3^+ به این معناست که نمایشهای معلوم $SU(2)$ به‌خودی‌خود نمایشهای O_3^+ را ارائه می‌کنند.

با ترکیب کردن روابط مختلفی که به‌دست آورده‌ایم، پی می‌بریم که $U(\alpha, \beta, \gamma)$ در رابطهٔ زیر یک تبدیل یکانی متناظر با چرخش زاویهٔ اولیهر $R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)$ است:

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = U(\gamma/2)U_y(\beta/2)U_z(\alpha/2) \quad (251-4)$$

۱. نمایشهایی از $SU(2)$ به‌ازای مقادیر z که عدد درست یا عدد نیم‌درست فرد باشند ($z = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) ظاهر می‌شوند، در حالی که نمایشهای O_3^+ منحصر به مقادیر عدد درست z اند ($z = 0, 1, 2, \dots$). بحث گسترده‌تری دربارهٔ این موضوع و رابطهٔ بین O_3^+ و نکانهٔ زاویه‌ای مداری را به بخشهای ۴-۱۱ و ۴-۱۲ وامی‌گذاریم.

از ضرب این ماتریسها مستقیماً می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}
 U(\alpha, \beta, \gamma) &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cos \beta/2 & e^{i(\gamma-\alpha)/2} \sin \beta/2 \\ -e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \sin \beta/2 & e^{-i(\gamma+\alpha)/2} \cos \beta/2 \end{pmatrix} \quad (252-4)
 \end{aligned}$$

این رابطه با قرار دادن

$$\xi = (\gamma + \alpha)/2, \quad \eta = \beta/2, \quad \rho = (\gamma - \alpha)/2 \quad (253-4)$$

به صورت کلی معادله ۲۲۵-۴ درمی‌آید. با استفاده از معادله ۲۵۲-۴، می‌توانیم پارامترهای معادله ۲۲۵-۴ را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}
 a &= e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cos \beta/2 \\
 b &= e^{i(\gamma-\alpha)/2} \sin \beta/2
 \end{aligned} \quad (254-4)$$

با استفاده از این اتحادها، $U_{mm'}$ نمایش $SU(2)$ در معادله ۲۳۵-۴ به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}
 U_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) &= \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!} \\
 &\quad \times e^{im\gamma} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j+m-m'-2k} \left(-\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m'-m+2k} e^{im'\alpha} \quad (255-4)
 \end{aligned}$$

این رابطه، نمایش تحویل‌ناپذیر را برحسب زوایای اویلر به دست می‌دهد. اهمیت معادله ۲۵۵-۴ در آن است که برای ما این امکان را فراهم آورد که نمایشهای تحویل‌ناپذیر $(2j+1) \times (2j+1)$ را به ازای همه مقادیر j ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) و نمایشهای تحویل‌ناپذیر O_+^2 را به ازای تکانه زوایای مداری مقادیر درست j ($j = 0, 1, 2, \dots$) محاسبه کنیم.

ماتریس چرخش $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$

در مطالب مربوط به زمینه مکانیک کوانتومی، استفاده از عبارت الحاقی $U_{mm'}$ که به صورت زیر

تعریف می‌شود، متداولتر است^۱

$$D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) = U_{mm'}^*(\alpha, \beta, \gamma) \quad (256-4)$$

به‌ازای $j = 0$

$$D^0(\alpha, \beta, \gamma) = 1 \quad (257-4)$$

به‌ازای $j = 1/2$

$$D^0(\alpha, \beta, \gamma) = 1 \quad (258-4)$$

به‌ازای $j = 1/2$

$$D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{matrix} m = \frac{1}{2} & m = -\frac{1}{2} \\ m' = \frac{1}{2} & m' = -\frac{1}{2} \end{matrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos \beta / \sqrt{2} e^{-i\gamma/2} & -e^{-i\alpha/2} \sin \beta / \sqrt{2} e^{i\gamma/2} \\ e^{i\alpha/2} \sin \beta / \sqrt{2} e^{-i\gamma/2} & e^{i\alpha/2} \cos \beta / \sqrt{2} e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \quad (258-4)$$

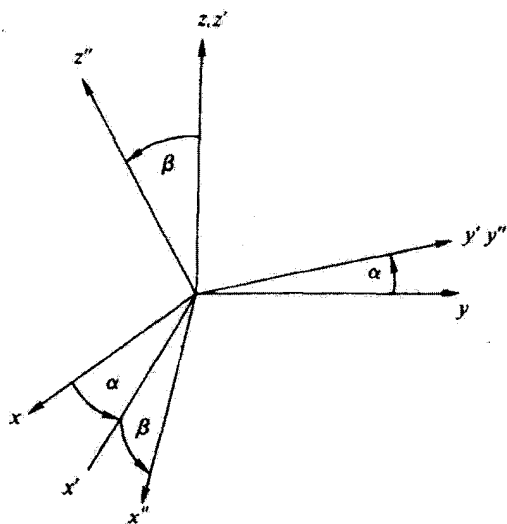
به‌ازای $j = 1$ از معادله‌های ۲۵۵-۴ و ۲۵۶-۴ داریم

$$D^1(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$\begin{matrix} m' = 1 \\ m' = 0 \\ m' = -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} m = 1 & m = 0 & m = -1 \\ e^{-i\alpha} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{-i\gamma} & -e^{-i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & e^{-i\alpha} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{i\gamma} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} & \cos \beta & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ e^{i\alpha} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{-i\gamma} & e^{i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & e^{i\alpha} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad (259-4)$$

به‌ازای مقادیر درست، $j = l$ ، حاصل عمل ماتریس چرخش D^l روی هماهنگهای کروی

۱. انگیزه این کار آن است که چون $U_{mm'}$ برحسب چرخشهای مختصات تعریف شده است، $D_{m'm}^j$ تابع را می‌چرخاند. بحث مفصلتر درباره این موضوع را به بخش ۱۱-۴ ماکول می‌کنیم.



شکل ۴-۱۳ چرخشهای زاویهٔ اولبری ($\gamma = 0$).

(بخش ۱۲-۶) به قرار زیر است^۱

$$Y_l^m(\theta', \varphi') = \sum_{m'=-l}^l D_{m'm}^l(\alpha, \beta, \gamma) Y_l^{m'}(\theta, \varphi) \quad (۴-۲۶)$$

نقطهٔ (θ', φ') در فضا همان نقطهٔ (θ, φ) است که نسبت به دستگاه مختصات چرخیده و نه نسبت به دستگاه اصلی، اندازه‌گیری شده باشد. این دستگاه چرخیده با سه زاویهٔ اولبری α ، β و γ مشخص می‌شود. ماتریس چرخش $D^l(\alpha, \beta, \gamma)$ تابع $Y_l^m(\theta, \varphi)$ را، به همان صورت چرخاندن مختصات به وسیلهٔ $A(\alpha, \beta, \gamma)$ در معادلهٔ ۴-۸۷، می‌چرخاند. دو زاویهٔ نخست اولبری α و β محور قطبی جدید z'' در شکل ۴-۱۳ و موقعیت صفر جدیدی برای زاویهٔ سمتی تعریف می‌کنند. (γ)، زاویهٔ سوم اولبری، متناظر است با چرخش حول محور قطبی جدید و در اینجا وارد نمی‌شود. نقطهٔ (θ', φ') همان نقطهٔ (θ, φ) از فضا است که نسبت به دستگاه مختصات چرخیده، و نه دستگاه اصلی، اندازه گرفته شده است. کاربردهای معادلهٔ ۴-۲۶، از همبستگی زاویه‌ای تابشهای هسته‌ای تا رابطهٔ بین دو دستگاه محورها که یکی در جسم صلب چرخان و دیگری در فضا ثابت شده باشد، بسیار گوناگون است.

به شباهت با توابع همگن $f_m(u, v)$ در معادلهٔ ۴-۲۲۸ توجه کنید. هماهنگهای کروی $Y_l^m(\theta, \varphi)$ برحسب مختصات دکارتی، توابع همگنی از x ، y و z هستند. (هر یک از جمله‌های

۱. اثبات این معادله بر این اساس صورت می‌گیرد که $D_{m'm}^l$ را عضو ماتریس عملگر چرخش $\exp(-in \cdot I(\xi))$ در بخش ۴-۱۲)، و هماهنگهای کروی را تابعهای پایه بدانیم.

$r^a y^b z^c$ به صورت $x^a y^b z^c$ است که در آن $a + b + c = l$. به این ترتیب، معادلهٔ ۴-۲۶۰ به معادلهٔ ۴-۲۲۹ شبیه است.

یکی از کاربردهای فوری ماتریس چرخش D^j در اثبات قضیهٔ جمع هماهنگهای کروی موضوع مسئلهٔ ۴-۱۰-۱۱ است. خواننده می‌تواند برای شرح مشروحتر جزئیات D^j به کتاب رز، که مشخصات آن در فهرست مراجع انتهای فصل آمده است، مراجعه کند.

مسائل

۴-۱۰-۱ نشان دهید که یک ماتریس متعامد $n \times n$ دارای $n(n-1)/2$ پارامتر مستقل است. [راهنمایی: شرط تعامد، معادلهٔ ۴-۶۰، مابین پارامترها رابطه برقرار می‌کند.]

۴-۱۰-۲ نشان دهید که یک ماتریس یکانی خاص دارای $n^2 - 1$ پارامتر مستقل است. [راهنمایی: هر عضو باید مختلط باشد که این تعداد پارامترهای ممکن را دو برابر می‌کند. برخی معادلات محدودکننده نیز مختلط‌اند و به عنوان دو رابطه به حساب می‌آیند.]

۴-۱۰-۳ گروه خطی خاص $SL(2)$ شامل همهٔ ماتریسهای 2×2 (با عضوهای مختلط) است که دارای دترمینان $+1$ هستند. نشان دهید که چنین ماتریسهایی یک گروه تشکیل می‌دهند. یادآوری: همانگونه که گروه $SU(2)$ به گروه O_3^+ مربوط می‌شود، گروه $SL(2)$ را نیز می‌توان به گروه کامل لورنتس، بخش ۴-۱۳، مربوط کرد.

۴-۱۰-۴ نشان دهید که R_z یک زیرگروه ناوردای O_3^+ هست (یا نیست).

۴-۱۰-۵ نشان دهید که صورت کلی یک ماتریس یکانی یک مدوله 2×2 به‌قرار زیر است

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

که در آن $a^*a + b^*b = 1$.

۴-۱۰-۶ اسپینور (u, v) در معادلهٔ ۴-۲۲۶ را با s نمایش و نشان دهید که $s^\dagger s = s'^\dagger s'$ ، یعنی طول اسپینور تحت تبدیل U پایسته است.

۴-۱۰-۷ (الف) نشان دهید $U_y(\beta/2)$ نظیر $R_y(\beta)$ است. (ب) نشان دهید $U_x(\varphi/2)$ نظیر $R_x(\varphi)$ است.

۴-۱۰-۸ (الف) نشان دهید می‌توان از اجزای وابسته به α و γ در $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ به صورتی فاکتورگیری کرد که

$$D^j(\alpha, \beta, \gamma) = A^j(\alpha) d^j(\beta) C^j(\gamma)$$

(ب) نشان دهید که $A^j(\alpha)$ و $C^j(\gamma)$ قطری‌اند. شکل صریح این ماتریسها را بیابید. (ج) نشان

دهید که $d^j(\beta) = D^j(0, \beta, 0)$.

[راهنمایی: می‌توان از مسئله‌های ۲۸-۲-۴ و ۲۹-۲-۴ بهره گرفت.]

۱۰-۹ با واریسی معادلات ۲۵۵-۴ و ۲۵۶-۴ یا حالت خاص معادله‌های ۲۵۸-۴ و ۲۵۹-۴ بی‌می‌بریم که

$$D^{j1}(\alpha, \beta, \gamma) = D^j(-\gamma, -\beta, -\alpha)$$

توضیح دهید که چرا این رابطه برقرار است؟

۱۰-۱۰ معادله ۲۶۰-۴ به‌ازای $l = 1$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$Y_1^m(\theta', \varphi') = \sum_{m'=-1}^1 D_{m'm}^1(\alpha, \beta, \gamma) Y_1^{m'}(\theta, \varphi)$$

این هماهنگی‌های کروی را به‌صورت دکارتی بنویسید. با استفاده از D^1 از معادله ۲۵۹-۴ نشان دهید که معادله حاصل در مختصات دکارتی، با ماتریس چرخش اویلر $A(\alpha, \beta, \gamma)$ در معادله ۸۰-۴ که مختصات را می‌چرخاند، هم‌ارز است.

۱۰-۱۱ (الف) با فرض یکانی بودن $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ ، نشان دهید که عبارت

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta_1, \varphi_1) Y_l^m(\theta_2, \varphi_2)$$

کمیتی اسکالر (ناوردا تحت چرخشها) است. این عمل شبیه ضرب اسکالر بردارها در مورد توابع است. (ب) با استفاده از بند (الف)، قضیه جمع هماهنگی‌های کروی، معادله ۱۲-۲۲۴، را به‌صورت زیر استخراج کنید

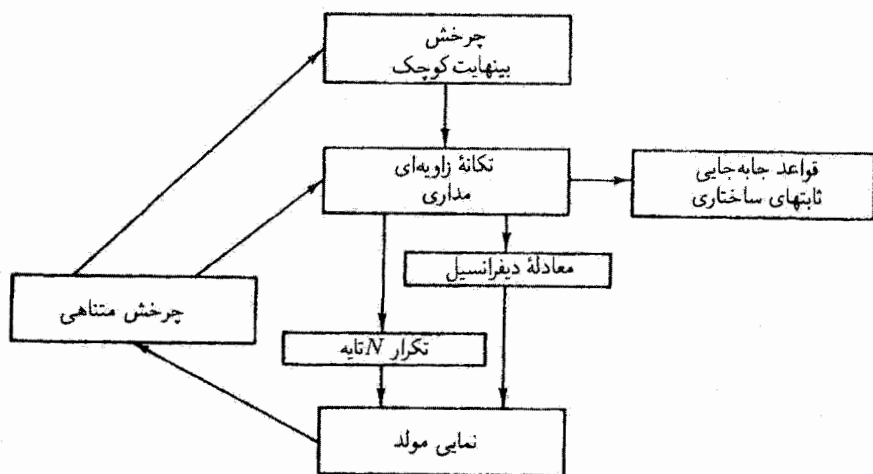
$$P_l(\cos \gamma) = 4\pi(2l+1)^{-1} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta_1, \varphi_1) Y_l^m(\theta_2, \varphi_2)$$

[راهنمایی: قرار دهید $\theta_1 = 0$ (که در نتیجه $\gamma = \theta_2$) و از نتیجه مسئله ۱۲-۲۶ استفاده کنید.]

۱۱-۴ مولدها

چرخشها و تکانه زاویه‌ای

در بخش ۳-۴ نمایشهای ماتریسی چرخش یک دستگاه مختصات و چرخش یک بردار را به‌دست



شکل ۴-۱۴ روابط گروه-مولد.

آوردیم. در بخش ۴-۱۰ نمایشهای ماتریسی چرخش توابع را به دست آوردیم. در تمامی این موارد، چرخشهای حول یک محور مشترک به صورت زیر با هم ترکیب می‌شوند:

$$R_z(\varphi_2) \cdot R_z(\varphi_1) = R_z(\varphi_1 + \varphi_2)$$

یعنی، ضرب این ماتریسها معادل است با جمع‌زدن روی شناسه‌ها. این فکری پیش می‌آید که به دنبال یک نمایش نمایی برای چرخشها، به صورت $\exp(\varphi_1) \cdot \exp(\varphi_2) = \exp(\varphi_1 + \varphi_2)$ باشیم. با استفاده از مسئله ۴-۵-۱۲، دو ماتریس U و H را در نظر می‌گیریم که میان آنها رابطه زیر برقرار باشد:

$$U = e^{iaH} = 1 + iaH + (iaH)^2/2! + \dots \quad (۴-۲۶۱)$$

که در آن a پارامتری حقیقی و مستقل از H است. از بسط مکلاورن نمایی برای تعریف تابع نمایی استفاده می‌کنیم. علاوه بر این، از مسئله ۴-۵-۱۲ می‌دانیم که اگر H هرمیتی باشد، U یکانی است. همچنین اگر U یکانی باشد، H هرمیتی است.

در اصطلاح نظریه گروه، H را مولد^۱، یعنی مولد U ، می‌نامند. رابطه بین مولد و گروه چرخشی O^+ به صورت نموداری را در شکل ۴-۱۴ مشاهده می‌کنید.

۱. استفاده از واژه مولد برای گروههای پیوسته در اینجا با استفاده‌ای که از این واژه برای گروههای متناهی می‌شود، کاملاً متفاوت است (با مسئله ۴-۹-۷ مقایسه کنید).

۱. از سمت چپ شکل ۴-۱۴ شروع می‌کنیم؛ ماتریسی که چرخش پادساعتگرد متناهی مختصات به اندازه زاویه φ حول محور z را توصیف می‌کند، در معادله ۴-۴۴ به قرار زیر داده شده است

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (262-4)$$

۲. اگر چرخش R_z را چرخش بینهایت کوچکی به اندازه زاویه $\delta\varphi$ بگیریم، R_z را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$R_z(\delta\varphi) = 1 + i\delta\varphi M_z \quad (263-4)$$

که در آن

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (264-4)$$

M_z و ماتریسهای متناظر M_x و M_y در مسئله ۴-۲-۱۶ ظاهر می‌شوند. در آن مسئله نشان داده می‌شود که این ماتریسها در روابط جابه‌جایی خاصی (نظیر روابط جابه‌جایی مسئله ۱-۸-۸) صدق می‌کنند. در بخش ۱۲-۷ نشان داده خواهد شد که به اعتبار این روابط جابه‌جایی، می‌توانیم ماتریس M را برای نمایش تکانه زاویه‌ای به کار ببریم. M_z را می‌توانیم از مشتق‌گیری نیز به دست آوریم. اگر مشتق یک ماتریس را ماتریس مشتقها تعریف کنیم، آنگاه

$$dR_z/d\varphi|_{\varphi=0} = iM_z \quad (265-4)$$

معادله ۴-۲۶۳، از این دیدگاه، یک بسط مکلورن R_z است که در آن از جمله‌هایی از مرتبه $(\delta\varphi)^2$ و بالاتر صرف‌نظر شده است. اعتبار معادله ۴-۲۶۵ یکی از پیامدهای مشتق‌پذیری گروههای لی به شمار می‌آید.

۳. چرخش متناهی φ را می‌توان به چرخشهای بینهایت کوچک پیایی $\delta\varphi$ تجزیه کرد

$$R_z(\delta\varphi_2 + \delta\varphi_1) = (1 + i\delta\varphi_2 M_z)(1 + i\delta\varphi_1 M_z) \quad (266-4)$$

تعداد این چرخشهای بینهایت کوچک را $N \rightarrow \infty$ می‌گیریم: $\delta\varphi = \varphi/N$. در این صورت

$$R_z(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} [1 + (i\varphi/N)M_z]^N = \exp(i\varphi M_z) \quad (267-4)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان M_z را مولد گروه $R_z(\varphi)$ ، که زیرگروهی است از O_3^+ دانست. در ادامه به بازسازی عملی $R_z(\varphi)$ می‌پردازیم. قابل ذکر است که:

(الف) M_z هرمیتی و $R_z(\varphi)$ یکانی است.

(ب) $\text{Tr}(M_z) = 0$ و $\det R_z(\varphi) = +1$

با استفاده مستقیم از شباهت با M_x, M_y را نیز می‌توان مولد R_x ، (زیر) گروه چرخشهای حول محور x ، گرفت. به همین ترتیب، M_y نیز R_y را تولید می‌کند.

۴. همانگونه که در معادله ۲۶۱-۴ نشان داده شد، تابع نمایی را می‌توان به صورت زیر بسط

داد

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi M_z) &= 1 + i\varphi M_z + (i\varphi M_z)^2/2! + (i\varphi M_z)^3/3! + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{1 - \varphi^2/2! + \varphi^4/4! - \dots\} \\ &\quad + iM_z \{\varphi - \varphi^3/3! + \varphi^5/5! - \dots\} \end{aligned} \quad (268-4)$$

که در تساوی دوم روابط زیر به‌کار گرفته شده‌اند.

$$M_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad M_z^3 = M_z \quad (269-4)$$

با توجه به اینکه سری اول برابر $\cos \varphi$ و سری دوم برابر $\sin \varphi$ است، $R_z(\varphi)$ را به صورت معادله ۲۶۲-۴ به دست می‌آوریم.

۵. بار دیگر چرخشهای بینهایت کوچک را در نظر می‌گیریم. این چرخشهای کوچک جابه‌جا

می‌شوند

$$\begin{aligned} [R_x(\delta\varphi_x), R_y(\delta\varphi_y)] &= [R_y(\delta\varphi_y), R_z(\delta\varphi_z)] \\ &= [R_z(\delta\varphi_z), R_x(\delta\varphi_x)] = 0 \end{aligned} \quad (270-4)$$

و یک چرخش بینهایت کوچک حول یک محور با بردار یکه \mathbf{n} به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} R(\delta\varphi) &= 1 + i(\delta\varphi_x M_x + \delta\varphi_y M_y + \delta\varphi_z M_z) \\ &= 1 + i\delta\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \end{aligned} \quad (۲۷۱-۴)$$

۶. با استفاده از مسئله ۴-۲-۱۶، می بینیم که مولدها در روابط جابه جایی زیر که مشخصه تکانه زاویه ای است (مسئله ۱-۸-۸) صدق می کنند

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k \quad (۲۷۲-۴)$$

که در آن ϵ_{ijk} نماد کاملاً پادمتقارن لوی-چی ویناست که در بخش ۳-۴ معرفی شد. این رابطه متضمن یک مجموع یابی روی k است، و در آن تنها یک جمله غیر صفر وجود دارد. ضریب M_k ، یعنی $i\epsilon_{ijk}$ را ثابت ساختاری می نامند. ثابتهای ساختاری نقطه شروع گسترش جبر لی به شمار می آیند. همانگونه که قبلاً دیدیم، مولدهای گروه، ثابتهای ساختاری را معین می کنند. برعکس، می توان نشان داد که ثابتهای ساختاری نیز گروه را تعیین می کنند. نتیجه این فوت و فنهای حرفه ای آن است که

$$R_z(\varphi) = \exp(i\varphi M_z)$$

که در آن $R_z(\varphi)$ چرخش دستگاه مختصات حول محور z را توصیف می کند و M_z یک ماتریس تکانه زاویه ای است. علامت نما مثبت است، زیرا دستگاه مختصات را چرخانده ایم؛ چرخش یک بردار نسبت به دستگاه مختصات ثابت به صورت زیر توصیف می شود

$$R_z(\varphi) = \exp(-i\varphi M_z)$$

باید خاطر نشان کنیم که معادله ۲۷۲-۴ بینهایت جواب دارد. سه ماتریس M_x و M_y و M_z مسئله ۴-۲-۱۵ یکی از جوابها، متناظر با یک واحد تکانه زاویه ای است. پاسخهای دیگر، یعنی ماتریسهای $(2l+1) \times (2l+1)$ با $l = 2, 3, 4, \dots$ نمایشهای تحویل ناپذیر دیگری برای گروه چرخش O_3^+ تولید می کنند.

چرخش توابع

در کل مبحثی که تا اینجا ارائه شد، ماتریسها مختصات را می چرخانند. هر دستگاه فیزیکی که مورد بررسی قرار گرفت ثابت نگه داشته می شد. اینک مختصات را ثابت می گیریم و تابع $\psi(x, y, z)$

را نسبت به این مختصات ثابت می‌چرخانیم. در مقابل R ، که مختصات را می‌چرخاند، عملگر \mathcal{R} را معرفی می‌کنیم که توابع را می‌چرخاند. \mathcal{R} را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{R}\psi(x, y, z) = \psi'(x, y, z) \rightarrow \psi(\mathbf{x}') \quad (273-4)$$

که در آن

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} \quad (274-4)$$

می‌توان گفت که \mathcal{R} روی تابع ψ عمل می‌کند، آن را می‌چرخاند و تابع جدید ψ' را پدید می‌آورد. این تابع جدید ψ' از نظر عددی برابر است با تابع $\psi(\mathbf{x}')$ که در آن \mathbf{x}' از چرخش مختصات توسط R به دست می‌آیند. در حالت خاص چرخش حول محور z داریم

$$\mathcal{R}_z(\varphi)\psi(x, y, z) = \psi(x \cos \varphi + y \sin \varphi, -x \sin \varphi + y \cos \varphi, z) \quad (275-4)$$

برای آنکه مفهوم معادله ۲۷۵-۴ بهتر درک شود، حالت $\varphi = \pi/2$ را بررسی می‌کنیم. در نتیجه

$$\mathcal{R}_z(\varphi)\psi(x, y, z) = \psi(y, -x, z) \quad (276-4)$$

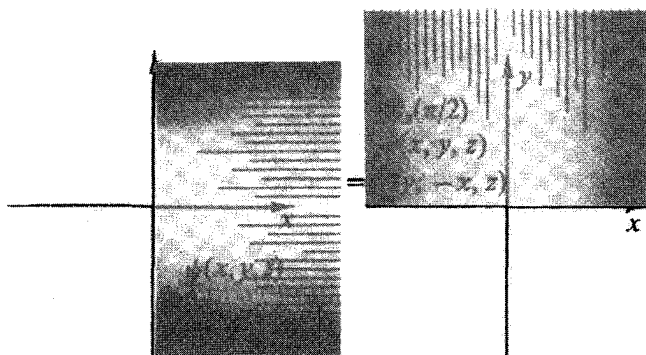
تابع ψ ممکن است تابع موج یا یک تابع مربوط به یک دستگاه کلاسیکی فیزیکی باشد. فرض کنید که اگر نخستین شناسه در تابع $\psi(x, y, z)$ بزرگ باشد، این تابع نیز بزرگ شود. در نتیجه $\mathcal{R}_z(\varphi = \pi/2)\psi(x, y, z)$ ، هنگامی که نخستین شناسه در تابع $\psi(y, -x, z)$ یعنی y بزرگ باشد، بزرگ می‌شود. این وضعیت در شکل ۱۵-۴ به تصویر درآمده است. به این ترتیب، تأثیر \mathcal{R}_z آن است که گرتۀ (یا نقش) تابع ψ را پادساعتگرد می‌چرخاند، درست همانگونه که R دستگاه مختصات را می‌چرخاند.

به معادله ۲۷۵-۴ بازمی‌گردیم و بار دیگر چرخش بینهایت کوچک $\delta\varphi \rightarrow \varphi$ را در نظر می‌گیریم. آنگاه با استفاده از R_z در معادله ۲۶۲-۴ می‌رسیم به:

$$\mathcal{R}_z(\delta\varphi)\psi(x, y, z) = \psi(x + y\delta\varphi, y - x\delta\varphi, z) \quad (277-4)$$

سمت راست را می‌توانیم به صورت یک سری تیلور (بخش ۵-۶) بسط دهیم و برسیم به

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(\delta\varphi)\psi(x, y, z) &= \psi(x, y, z) - \delta\varphi\{x\partial\psi/\partial y - y\partial\psi/\partial x\} + O(\delta\varphi)^2 \\ &= (1 - i\delta\varphi L_z)\psi(x, y, z) \end{aligned} \quad (278-4)$$



شکل ۱۵-۴ چرخش تابع $\psi(x, y, z)$.

که در آن عبارت دیفرانسیلی در داخل آکولاد را با استفاده از مسئله ۱-۸-۷، برابر iL_z به دست می آوریم. چرخش حول محور z ، ابتدا به اندازه φ و سپس به اندازه $\delta\varphi$ از رابطه زیر به دست می آید

$$\mathcal{R}_z(\varphi + \delta\varphi)\psi = \mathcal{R}_z(\delta\varphi)\mathcal{R}_z(\varphi)\psi = (1 - i\delta\varphi L_z)\mathcal{R}_z(\varphi)\psi \quad (279-4)$$

داریم (به صورت یک معادله عملگری)

$$(\mathcal{R}_z(\varphi + \delta\varphi) - \mathcal{R}_z(\varphi))/\delta\varphi = -iL_z\mathcal{R}_z(\varphi) \quad (280-4)$$

سمت چپ (به ازای $\delta\varphi \rightarrow 0$) برابر است با $d\mathcal{R}_z(\varphi)/d\varphi$. با انتگرال گیری مستقیم از معادله ۲۸۰-۴ به دست می آوریم:

$$\mathcal{R}_z(\varphi) = \exp(-i\varphi L_z) \quad (281-4)$$

بار دیگر بگوییم که $\mathcal{R}_z(\varphi)$ توابع را (به طور پادساعتگرد) نسبت به مختصات ثابت می چرخاند و L_z عملگر تکانه زاویه ای است. ثابت انتگرال گیری به کمک شرط مرزی $\mathcal{R}_z(0) = 1$ تعیین می شود.

توجه خواننده را به شباهتها و تفاوتها با معادله ۲۶۷-۴ جلب می کنیم. R_z مختصات، و \mathcal{R}_z توابع، را می چرخاند. M_z ماتریس، و L_z عملگر دیفرانسیلی است. همچنین توجه داشته باشید که L_x و L_y و L_z دقیقاً در همان رابطه جابه جایی M_x ، M_y و M_z صدق می کنند، یعنی

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \quad (282-4)$$

و همان ثابتهای ساختاری را ارائه می‌کنند.

معادلات ۲۸۱-۴ و ۲۶۷-۴ را می‌توان با دو معادله در بخش ۳-۴ مقایسه کرد: یکی معادلهٔ ۸۹-۴، که در آن A مختصات را در جهت پادساعتگرد می‌چرخاند، و دیگری معادلهٔ ۹۳-۴، که در آن همان A برداری را در جهت ساعتگرد می‌چرخاند. در اینجا R مختصات را در جهت پادساعتگرد و \mathcal{R} توابع را در جهت پادساعتگرد می‌چرخاند. این امر نتیجهٔ نمای منفی در معادلهٔ ۲۸۱-۴ است.

SU(۲) و ماتریسهای پاؤلی

عضوهای (U_x, U_y, U_z) گروه یکانی دوبعدی SU(۲) را می‌توان از طریق کمیتهای

$$\exp\left(\frac{1}{2}ia\sigma_1\right), \quad \exp\left(\frac{1}{2}ib\sigma_2\right), \quad \exp\left(\frac{1}{2}ic\sigma_3\right) \quad (283-4)$$

تولید کرد، که در آن $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ سه ماتریس اسپینی پاؤلی‌اند. سه پارامتر a, b, c حقیقی‌اند. بار دیگر بگویم که σ ها هرمیتی‌اند و رد صفر دارند. عضوهای SU(۲) در معادلهٔ ۲۸۳-۴ یکانی‌اند و دترمینان آنها $+1$ است. می‌توان دید که مولدهایی مانند σ_2 که به شکل قطری‌اند، به اعداد کوانتومی پایسته می‌انجامند.

σ های پاؤلی در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (284-4)$$

اختلاف این رابطه با روابط جابه‌جایی L و M در معادلات ۲۷۲-۴ و ۲۸۲-۴، در یک ضریب ۲ است. از این رو، قرار می‌دهیم: $s_i = 1/2\sigma_i, i = 1, 2, 3$. در نتیجه می‌رسیم به:

$$[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k \quad (285-4)$$

که دقیقاً مانند روابط جابه‌جایی تکانهٔ زاویه‌ای^۱ در معادلات ۲۷۲-۴ و ۲۸۲-۴ است و نشان می‌دهد که s_i ها (و نه σ_i ها) عملگرهای تکانهٔ زاویه‌ای هستند. ظهور مقادیر $1/2$ در توابع نمایی مولد به همین دلیل است. وارد کردن این ضریب $1/2$ اساساً همانند اتخاذ نیم‌زاویه‌ها در بررسی هم‌ریختی $SU(2) - O_3^+$ در بخش ۱۰-۴ است. عبارت $U_z = \exp(ics_3) = \exp(1/2ic\sigma_3)$ مشابه صورت 2×2 معادلهٔ ۲۶۷-۴ است. U_z ماتریس چرخش و $s_3 = \sigma_3/2$ ماتریس تکانهٔ زاویه‌ای متناظر با آن است.

۱. ثابتهای ساختاری $(i\epsilon_{ijk})$ برای مولدهای با ابعاد $1 + 2j$ ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$)، نمایشهای SU(۲) با ابعاد $1 + 2j$ را ارائه می‌کنند. ژهای عدد درست، مطابق مطالب بخش ۱۰-۴، نمایشهای O_3^+ را ارائه می‌کنند.

معادله ۴-۶۶ عملگر چرخش برای چرخاندن مختصات در فضای سه بعدی را به دست می دهد. متناظر با ماتریس تکانه زاویه ای S_z عملگر چرخش مختصات در فضای (مختلط) دوبعدی زیر را داریم

$$R_z = \exp(i\varphi s_z) = \exp(i\varphi \sigma_z / 2)$$

عملگر چرخشی که بردار ستونی دو مؤلفه ای تابع موج (اسپینور) یک ذره با اسپین $1/2$ را نسبت به مختصات ثابت می چرخاند، به قرار زیر است

$$R_z(\varphi) = \exp(-i(\varphi/2)\sigma_z)$$

$\exp(ia\sigma_1) = \exp(1/2ia\sigma_1)$ را در یک سری مکولرن بسط می دهیم، می رسمیم به:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{2}ia\sigma_1\right) &= 1\{1 - (a/2)^2/2! + (a/2)^4/4! - \dots\} \\ &\quad + i\sigma_1\{(a/2) - (a/2)^3/3! + (a/2)^5/5! - \dots\} \\ &= \begin{pmatrix} \cos a/2 & i \sin a/2 \\ i \sin a/2 & \cos a/2 \end{pmatrix} \quad (286-4) \\ &= 1 \cos a/2 + i\sigma_1 \sin a/2 \end{aligned}$$

حالت خاصی از معادله ۴-۲۴۸ است. پارامتر a به صورت یک زاویه، یعنی به صورت ضریب ماتریس تکانه زاویه ای، مانند φ در معادله ۴-۲۶۷، ظاهر می شود. ولی در $SU(2)$ زاویه همواره به صورت نیم زاویه ظاهر می شود. به همین ترتیب (در تکمیل معادله ۴-۲۴۸) داریم

$$\exp\left(\frac{1}{2}ib\sigma_2\right) = \begin{pmatrix} \cos b/2 & \sin b/2 \\ -\sin b/2 & \cos b/2 \end{pmatrix} = 1 \cos b/2 + i\sigma_2 \sin b/2 \quad (287-4)$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}ic\sigma_3\right) = \begin{pmatrix} \exp \frac{1}{2}ic & 0 \\ 0 & \exp -\frac{1}{2}ic \end{pmatrix} = 1 \cos c/2 + i\sigma_3 \sin c/2$$

با استفاده از این اتحادها برای عبارتهای نما، صورت کلی ماتریس $SU(2)$ را می توان به صورت

زیر نوشت

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\left(\frac{1}{2}i\gamma\sigma_3\right) \exp\left(\frac{1}{2}i\beta\sigma_2\right) \exp\left(\frac{1}{2}i\alpha\sigma_1\right) \quad (288-4)$$

این رابطه معادلهٔ ۲۵۲-۴، در بخش ۴-۱۰، را باز تولید می‌کند. با قرار دادن

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = U^\dagger(\alpha, \beta, \gamma)$$

داریم

$$D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\left(-\frac{1}{4}i\alpha\sigma_z\right) \exp\left(-\frac{1}{4}i\beta\sigma_y\right) \exp\left(-\frac{1}{4}i\gamma\sigma_z\right)$$

که به معادلهٔ ۲۵۸-۴ می‌انجامد. گزینش ماتریسهای پاؤلی مورد نیاز بر اساس چرخشهای زاویهٔ اولیری انجام شده است که در بخشهای ۴-۳ و ۴-۱۰ توصیف شد. در بخش ۴-۱۳ با نمونه‌های دیگری از چرخش بینهایت کوچک و شگرد مولد و نمایی‌سازی روبه‌رو می‌شویم.

مسائل

۴-۱۱-۱ عملگر انتقال $T(a)$ ، تابع $\psi(x)$ را به $\psi(x+a)$ تبدیل می‌کند:

$$T(a)\psi(x) = \psi(x+a)$$

برحسب عملگر تکانهٔ خطی (مکانیک کوانتومی)، $p_x = -i\hbar/dx$ ، نشان دهید که

$$T(a) = \exp(iap_x)$$

[راهنمایی: $\psi(x+z)$ را به صورت یک سری تیلور بسط دهید.]

۴-۱۱-۲ فرض کنید که عضو عمومی $SU(2)$ در معادلهٔ ۲۲۵-۴ از سه چرخش زاویهٔ اولیر زیر ساخته شده باشد: (الف) چرخش به اندازهٔ $a/2$ حول محور z ; (ب) چرخش به اندازهٔ $b/2$ حول محور x جدید؛ و (ج) چرخش به اندازهٔ $c/2$ حول محور z جدید (همهٔ چرخشها را پادساعتگرد بگیرد). با استفاده از مولدهای σ پاؤلی نشان دهید که زوایای چرخش از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$a = \xi - \zeta + \pi/2 = \alpha + \frac{\pi}{4}$$

$$b = 2\eta = \beta$$

$$c = \xi + \zeta - \pi/2 = \gamma - \frac{\pi}{4}$$

یادآوری: زاویه‌های a و b در اینجا با a و b در معادله ۲۲۴-۴ یکی نیستند.
 ۳-۱۱-۴ صورت نمایی عملگر چرخش زاویهٔ اویلری برحسب تکانهٔ زاویه‌ای به قرار زیر است

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathcal{R}_{z''}(\gamma)\mathcal{R}_{y'}(\beta)\mathcal{R}_z(\alpha) \\ &= \exp(-i\gamma J_{z''})\exp(-i\beta J_{y'})\exp(-i\alpha J_z) \end{aligned}$$

نشان دهید که برحسب محورهای اصلی داریم

$$\mathcal{R} = \exp(-i\alpha J_z)\exp(-i\beta J_y)\exp(-i\gamma J_x)$$

راهنمایی: عملگرهای \mathcal{R} مانند ماتریسها تبدیل می‌شوند. چرخش حول محور y' (دومین چرخش اویلر) را می‌توان به صورت زیر برحسب چرخش نسبت به محور y اصلی (اولیه) بیان کرد

$$\exp(-i\beta J_{y'}) = \exp(-i\alpha J_z)\exp(-i\beta J_y)\exp(i\alpha J_z)$$

۱۲-۴ SU(۳), SU(۲) و ذرات هسته‌ای

ویگنر کاربرد نظریهٔ گروه در ذرات "بنیادی" را مرحلهٔ سوم نظریهٔ گروه و فیزیک قلمداد کرده است. مرحلهٔ اول، جستجو برای ۳۲ گروه نقطه‌ای و ۲۳۰ گروه فضایی است که تقارنهای بلوری را می‌دهند (بخش ۹-۴). مرحلهٔ دوم جستجو برای نمایشهایی نظیر نمایشهای O_3^+ و SU(۲) است (بخش ۴-۱۰). اینک در این مرحلهٔ سوم، فیزیکدانان باز در جستجوی گروهها هستند.

هنگامی که ذرات با برهم‌کنش قوی در فیزیک انرژیهای بالا و گروههای یکانی خاص SU(۲) و SU(۳) را بررسی می‌کنیم، باید در جستجوی نوعی شباهت بین تکانهٔ زاویه‌ای و گروه چرخشی O_3^+ باشیم. الکترونی را در نظر بگیرید که در پتانسیل ربایشی با تقارن کروی هستهٔ اتمی قرار دارد. تابع موج شرودینگر این الکترون را می‌شود با سه عدد کوانتومی، n ، l و m ، مشخص کرد. ولی انرژی بسته به مقدار n و l دارای واگنی $1 + 2l$ تابه است. دلیل این واگنی را به دو طریق معادل زیر می‌توان بیان کرد:

۱. پتانسیل تقارن کروی دارد و از θ و φ مستقل است، یا؛

۲. هامیلتونی شرودینگر $-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 + V(r)$ تحت چرخشهای فضایی معمولی (O_3^+) ناورد است.

یکی از پیامدهای وجود تقارن کروی در پتانسیل آن است که تکانهٔ زاویه‌ای \mathbf{L} پایسته است. در بخش ۱۱-۴ دیدیم که مؤلفه‌های دکارتی \mathbf{L} با مولدهای گروه چرخشی O_3^+ متحدند. برای نمایش

۱. اگر پتانسیل یک پتانسیل کولنی صرف باشد، انرژی فقط به n بستگی خواهد داشت (بخش ۱۳-۲ را ببینید).

جدول ۳-۴ بار یونهای زوج پاریته با اسپین ۱/۲

I_z	I	Y	جرم MeV		
$-\frac{1}{2}$			۱۳۲۱,۳۰۰	Ξ^-	
	$\frac{1}{2}$	-۱			Ξ
$+\frac{1}{2}$			۱۳۱۴,۹۰۰	Ξ^0	
-۱			۱۱۹۷,۴۱۰	Σ^-	
۰	۱	۰	۱۱۹۲,۵۴۰	Σ^0	Σ
+۱			۱۱۸۹,۴۷۰	Σ^+	
۰	۰	۰	۱۱۱۵,۵۰۰	Λ	Λ
$-\frac{1}{2}$			۹۳۹,۵۵۰	n	
	$\frac{1}{2}$	۱			N
$+\frac{1}{2}$			۹۳۸,۲۵۶	p	

L_x , L_y و L_z ، به جای عملگرها می‌توانیم از ماتریسها بهره گیریم. مسئله‌های پایان بخش ۲-۴ نمونه‌هایی از این ماتریسها را به‌ازای $l = 1/2$, $l = 1$ و $l = 3/2$ ارائه می‌کنند. ماتریسهای L_z ، ماتریسهای $(2l + 1) \times (2l + 1)$ هستند که ابعادشان با تعداد حالت‌های تبهگن برابر است. این ماتریسهای L_z ، نمایشهای $(2l + 1) \times (2l + 1)$ تحویل‌ناپذیر O_p^\dagger هستند. بعد $2l + 1$ با تعداد $2l + 1$ حالت تبهگن یکی است.

روش متعارف برای حذف این واگنی، وارد کردن القای مغناطیسی ثابت B است. این میدان اثر زمین را به‌وجود می‌آورد. این القای مغناطیسی جمله‌ای به هامیلتونی می‌افزاید که تحت O_p^\dagger ناورد است. این جمله تقارن را بر هم می‌زند (می‌شکند).

اینکه به درد تشبیه نمی‌خورد. در مورد ذرات با برهم‌کنش قوی (نوترونها، پروتونها و جز اینها)، نمی‌توانیم این شباهت را مستقیماً دنبال کنیم، زیرا هنوز برهم‌کنش هسته‌ای مربوط را به‌طور کامل نمی‌شناسیم. هامیلتونی را نمی‌شناسیم. بنابراین شباهت را در جهت معکوس دنبال می‌کنیم.

هایزنبرگ در دهه ۱۹۳۰ اظهار داشت که نیروهای هسته‌ای مستقل از بارند، و نیز تنها دو ذره جرم‌داری (باریونهای) که در آن زمان شناخته شده بودند، یعنی نوترون و پروتون، دو حالت متفاوت یک ذره به‌شمار می‌آیند. در جدول ۳-۴ مشاهده می‌کنیم که جرم این دو ذره تقریباً برابر

۱. اگر L_z ماتریس باشد، به‌جای تابع موج شرودینگر $\psi(r, \theta, \varphi)$ ، یک بردار حالت $2l + 1$ مؤلفه‌ای خواهیم داشت. تکانه زاویه‌ای و واگنی $(2l + 1)$ تابه به‌طور نسبتاً مشروح در بخش ۷-۱۲ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

است. اختلاف نسبی $(m_n - m_p)/m_p \approx 0.014\%$ اندک است و این امر دال بر آن است که اختلاف جرم از طریق یک اختلال کوچک وابسته به بار ایجاد شده است. بهتر بود که این واگنی تقریبی با معرفی کمیت I با تصویرهای z ، $I_2 = 1/2$ برای پروتون و $-1/2$ برای نوترون توصیف شود. نامی که برای I انتخاب شد ایزوسپین بود. ایزوسپین هیچ ربطی با اسپین (یعنی تکانه زاویه‌ای ذاتی ذره) نداشت، ولی بردار حالت ایزوسپین دو مؤلفه‌ای از همان روابط ریاضی مربوط به بردار حالت اسپینی $I = 1/2$ پیروی می‌کردند. به‌خصوص، این بردار را نیز می‌شد یک ویژه بردار ماتریس σ_2 پاؤلی گرفت.

ایزوسپین در غیاب نیروهای وابسته به بار پایسته است (پروتون و نوترون جرم مساوی دارند) و واگنی دوتایه داریم. به عبارت دیگر، هامیلتونی هسته‌ای نامعلوم باید تحت گروهی که توسط ماتریسهای ایزوسپین تولید می‌شود، ناوردا باشد. ماتریسهای ایزوسپین همان ماتریسهای پاؤلی اند (ماتریسهای 2×2)، و گروهی که توسط آنها تولید می‌شود، گروه SU(۲)، بخش $4-10$ است که آن نیز در تناظر با واگنی دوتایه، 2×2 است.

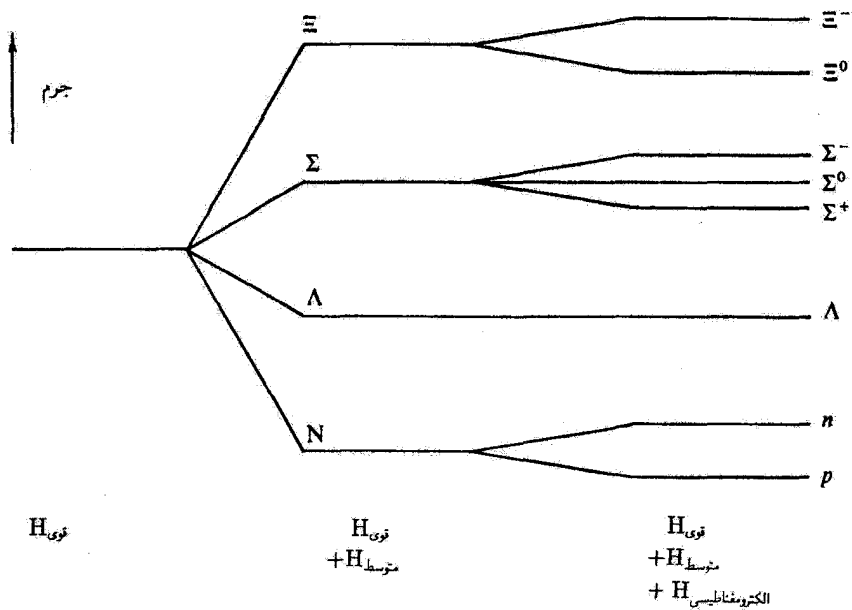
تا سال ۱۹۶۱ ذرات بسیار دیگری کشف (یا خلق) شدند. هشت ذره‌ای که در جدول ۳-۴ نشان داده شده‌اند توجه خاصی را به خود جلب کردند. اعداد کوانتومی مشخصه I برای ایزوسپین و Y برای فوق بار، توصیف مناسبی برای این ذرات ارائه می‌کنند. این ذرات را می‌توان برحسب ایزوسپین آنها یا برحسب بارشان به چندتاییهایی دسته‌بندی کرد. فوق بار دو برابر متوسط چندتایی است. برای چندتایی نوترون-پروتون داریم

$$Y = 2 \times \frac{1}{3}(0 + 1) = 1 \quad (289-4)$$

مقادیر فوق بار و ایزوسپین را در جدول ۳-۴ برشمرده‌ایم.

از آزمایشهای پراکندگی و تولید ذرات روشن شده است که هم فوق بار Y و هم ایزوسپین، I ، تحت برهم‌کنش (هسته‌ای) قوی پایسته می‌مانند. یادآور می‌شویم که L (یا l) تحت یک هامیلتونی با تقارن کرووی پایسته است. از این رو، این هشت ذره به صورت یک واگنی هشت‌تایه ظاهر می‌شوند که برای آنها دو کمیت باید پایسته بماند. در سال ۱۹۶۱، گلن و نیمن، مستقل از یکدیگر، به این نتیجه رسیدند که برهم‌کنش قوی باید تحت گروه یکسانی خاص سه‌بعدی SU(۳) ناوردا باشد، یعنی باید تقارن SU(۳) داشته باشد.

نخستین دلیل برای انتخاب SU(۳)، وجود دو کمیت پایسته است. این پایستگی گروهی از مرتبه ۲ را ایجاد می‌کند که دوتا (و تنها دوتا) از مولدهای آن جابه‌جا می‌شوند. دومین مبنای انتخاب آن است که این گروه باید یک نمایش 8×8 داشته باشد تا بتواند وجود هشت باریون واگن را میسر کند. به یک معنا، SU(۳) ساده‌ترین تعمیم SU(۲) بود. گلن هشت مولد ساخت: سه‌تا برای مؤلفه‌های ایزوسپین، یکی برای فوق بار و چهارتای دیگر. این مولدها جملگی ماتریسهای



شکل ۱۶-۴ شکافتگی جرم باریونی.

3×3 با رد صفر هستند. شمار نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروه $SU(3)$ نیز مانند گروههای O_p^+ و $SU(2)$ نامتناهی است. در ارتباط با هشت ذرهٔ جدول ۳-۴، یک نمایش هشت‌بعدی برای این گروه ارائه شده است.^۱

فرض می‌کنیم که هامیلتونی این هشت باریون از سه جزء تشکیل شده باشد:

$$H = H_{وی} + H_{متوسط} + H_{الکترومغناطیسی} \quad (۴-۲۹)$$

جزء $H_{وی}$ دارای تقارن $SU(3)$ است و به واگنی هشت‌تایی می‌انجامد. وارد کردن یک برهم‌کنش تقارن شکن، $H_{متوسط}$ ، بخشی از این واگنی را از بین می‌برد و چهار چندتایی ایزوسپین Ξ ، Σ ، Λ و N می‌دهد. این ذرات در چندتاییها دسته‌بندی می‌شوند، زیرا $H_{متوسط}$ هنوز دارای تقارن $SU(2)$ است. سرانجام، حضور نیروهای وابسته به بار، چندتاییهای ایزوسپین را می‌شکافد و آخرین واگنی را از بین می‌برد. این دنبالهٔ فرضی در شکل ۱۶-۴ نشان داده شده است.

با بهره‌گیری از نظریهٔ اختلال مکانیک کوانتومی مرتبهٔ اول، روابط ساده‌ای بین جرم باریونها محاسبه می‌شود. همچنین می‌توان برای شدت فرایندهای واپاشی و پراکندگی نیز قاعده‌هایی تدوین کرد.

۱. گلن استفاده از $SU(3)$ را "راه هشت‌تایی" نامید. توجه کنید که $SU(3)$ هشت پارامتر مستقل (که از عبارت $n^2 - 1$ به‌دست می‌آید)، هشت مولد و یک نمایش 8×8 در ارتباط با هشت ذره دارد. این نام، "راه هشت‌تایی" بودا را نیز تداعی می‌کند.

شاید چشمگیرترین موفقیت مدل $SU(3)$ در پیش‌بینی ذرات جدید بوده است. در ۱۹۶۱، چهار مزون K و سه مزون π (جملگی شبه‌اسکالر با اسپین صفر و پاریتۀ فرد) وجود یک هشت‌تایی دیگر مشابه هشت‌تایی باریونی را مطرح کرد. نظریۀ $SU(3)$ مزون هشتم η^0 را با جرم 563 MeV پیش‌بینی کرد. دیری نپایید که مزون η^0 با جرم 548 MeV (طی آزمایش به‌دست آمد) کشف شد. کشف دسته‌ای شامل نه باریون سنگین (جمله با اسپین $3/2$ و پاریتۀ زوج) وجود یک ده‌تایی را پیشنهاد کرد. پیش‌بینی شد که باریون دهم باید جرمی حدود 1680 MeV و بار منفی داشته باشد. Ω^- با جرم $12 \text{ MeV} \pm 1675$ در سال ۱۹۶۴ کشف شد.

از زمان تکمیل این ده‌تایی $3/2^+$ یک چندتایی (با پاریتۀ فرد) $5/2^-$ برای باریونها و چندتاییهای 1^- و 2^+ برای مزونها تثبیت شده است.

کاربرد نظریۀ گروه در مورد ذرات با برهم‌کنش قوی به فراتر از $SU(3)$ نیز گسترش یافته است. تفحص گسترده‌ای برای $SU(6)$ و گروه‌های با ابعاد بالاتر و پیچیده‌تر صورت گرفته است. توجه زیادی به مولدهای گروه و به ثابتهای ساختاری در روابط جابه‌جایی مولدی (نظیر ijk برای تکانه زاویه‌ای مداری) معطوف شده است. این ثابتهای ساختاری یک جبر لی تعریف می‌کنند. به مولدهای گروه، می‌توان انتگرالهای فضایی چگالیهای جریان را مربوط کرد. این کار به یک جبر جریان می‌انجامد که در حوصلۀ این مبحث نمی‌گنجد.

برای آنکه جایگاه صحیح نظریۀ گروه و موفقیت‌های کاملاً واقعی کاربرد آن را مشخص کنیم، باید تأکید کنیم که نظریۀ گروه، تقارن‌ها را شناسایی و صورتبندی می‌کند. این نظریه، ذرات را دسته‌بندی (و گاهی وجود آنها را پیش‌بینی) می‌کند. ولی نظریۀ گروه، به‌جز اینکه وجود تقارن $SU(2)$ در یک بخش از هامیلتونی و تقارن $SU(3)$ در بخش دیگر را بیان کند، چیزی دربارهٔ برهم‌کنش ذرات نمی‌گوید. یادآور می‌شویم که ذکر این نکته که پتانسیل اتمی تقارن کروی دارد، چیزی دربارهٔ وابستگی شعاعی پتانسیل یا تابع موج نمی‌گوید.

۴-۱۳ گروه همگن لورنتس

دانشمندان با تعمیم رهیافت بخش ۱-۲ در مورد بردارها، این شرط را وضع می‌کنند که قوانین فیزیکی ما باید تحت

(الف) انتقالهای فضا و زمان؛

(ب) چرخشها در فضای سه‌بعدی حقیقی، و

(ج) تبدیلهای لورنتس.

هموردا^۱ باشند. اساس در بایست هموردایی تحت انتقال، همگن بودن فضا و زمان است. هموردایی تحت چرخش تأکید بر همسانگردی فضا است. شرط هموردایی لورنتسی بر اساس مقبولیت

۱. هموردایی به‌معنای یک شکل بودن در دستگاههای مختصات مختلف است، به‌گونه‌ای که هیچ دستگاه مرجع مرجحی وجود نداشته باشد (با بخشهای ۱-۲ و ۳-۱ مقایسه کنید).

نسبیت خاص استوار است. این سه نوع تبدیل، روی هم رفته گروه ناهمگن لورنتس یا گروه یوانکاره را تشکیل می دهند. در اینجا انتقالها را کنار می گذاریم. چرخشهای فضایی و تبدیلهای لورنتس گروهی به نام گروه همگن لورنتس تشکیل می دهند.

نخست زیر گروه مربوط به آن دسته از تبدیلهای لورنتس را تولید می کنیم که در آنها سرعت نسبی، v ، در راستای محور $x_1 = x$ واقع است. برای تعیین مولد می توانیم چارچوبهای مرجع فضا زمان لورنتس را در نظر بگیریم که با سرعت نسبی بینهایت کوچک δv حرکت می کنند.^۱ روابط بین این چارچوبها مشابه روابط بین چرخشها در فضای حقیقی در بخشهای ۱-۲ و ۱-۳، ۳-۴ است، با این تفاوت که در اینجا زاویه چرخش، موهومی محض است (با بخش ۳-۷ مقایسه کنید).

در فضای مینکوفسکی با $x_4 = ict$ کار می کنیم. تبدیل فضا زمان به ازای سرعت نسبی بسیار کوچک δv ، یک تبدیل گالیلهای است:

$$x'_1 = x_1 - \delta vt = x_1 + i\delta\beta x_4 \quad (291-4)$$

در اینجا طبق معمول داریم $\beta = v/c$. همچنین با استفاده از تقارن می نویسیم

$$x'_4 = x_4 + ia\delta\beta x_1 \quad (292-4)$$

که در آن پارامتر a با این شرط تعیین می شود که $x_1^2 + x_4^2$ ناوردا بماند

$$x_1'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_4^2 \quad (293-4)$$

یادآور می شویم که x_4 بردار چهار بعدی نمونه در فضای مینکوفسکی است. بنابراین، معادله ۲۹۳-۴ صرفاً بیان ناوردایی مجذور بزرگی بردار "فاصله" تحت چرخش در فضای مینکوفسکی است. در همین جا است که نسبیت خاص به مبحث تبدیل وارد می شود. با مجذور جمع کردن معادله های ۲۹۱-۴ و ۲۹۲-۴، و با چشمپوشی از جمله های از مرتبه $(\delta\beta)^2$ ، می رسمیم به: $a = -1$. با ترکیب کردن معادله های ۲۹۱-۴ و ۲۹۲-۴ می توانیم معادله ماتریسی زیر را بنویسیم

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_4 \end{pmatrix} \delta\beta = (1 + \delta\beta\sigma_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (294-4)$$

۱. این نحوه استخراج را، با متریک اندک متفاوت، در مقاله زیر می یابید:

که در آن σ_r اتفاقاً برابر منفی ماتریس σ_v پاؤلی است.

پارامتر $\delta\beta$ نمایانگر یک تغییر بینهایت کوچک است. با استفاده از شگردهایی چون روشهای به‌کار گرفته شده در بخش ۱۱-۴، با N بار تکرار این تبدیل، یک تبدیل متناهی با پارامتر سرعت $\theta = N\delta\beta$ به دست می‌آوریم. در نتیجه

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_r \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{\theta\sigma_r}{N}\right)^N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_r \end{pmatrix} \quad (295-4)$$

در حد $N \rightarrow \infty$ داریم

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\theta\sigma_r}{N}\right)^N = \exp\theta\sigma_r \quad (296-4)$$

در اینجا نیز مانند بخش ۱۱-۴، تابع نمایی را به کمک بسط مکلورن زیر تعریف می‌کنیم

$$\exp\theta\sigma_r = 1 + \theta\sigma_r + (\theta\sigma_r)^2/2! + (\theta\sigma_r)^3/3! + \dots \quad (297-4)$$

با توجه به اینکه داریم: $\sigma_r^2 = 1$

$$\exp\theta\sigma_r = 1\cosh\theta + \sigma_r\sinh\theta \quad (298-4)$$

به این ترتیب، تبدیل متناهی لورنتس به قرار زیر است

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & i\sinh\theta \\ -i\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_r \end{pmatrix} \quad (299-4)$$

σ_r نمایشهای این تبدیل خاص لورنتس را تولید کرده است.

$\cosh\theta$ و $\sinh\theta$ را می‌توان با در نظر گرفتن مبداء دستگاه مختصات پیریم دار در $x'_1 = 0$ یا $x_1 = vt$ تعیین کرد. با نشان دادن در معادله ۲۹۹-۴، داریم

$$0 = x_1\cosh\theta + x_r i\sinh\theta \quad (300-4)$$

که در آن $x_r = ict$ و $x_1 = vt$

$$\tanh\theta = \beta = v/c$$

توجه کنید که، جز در حد $v \rightarrow 0$ ، داریم: $v/c \neq \theta$. با استفاده از اتحاد

$$1 - \tanh^2 \theta = (\cosh^2 \theta)^{-1}$$

داریم

$$\cosh \theta = (1 - \beta^2)^{-1/2} \equiv \gamma, \quad \sinh \theta = \beta\gamma \quad (30.1-4)$$

ماتریس معادلهٔ ۲۹۹-۴ با جزء $x_2 - x_1$ ماتریس معادلهٔ ۱۲۰-۳ سازگار است.

حالت خاصی که بررسی شد (که در آن سرعت با یکی از محورهای فضایی موازی است) یکی از حالت‌های ساده است. ولی شگرد سرعت بینهایت کوچک — نمایی سازی — مولد را به خوبی نمایش می‌دهد. اکنون این شگرد دقیق را برای استخراج تبدیل لورنتس برای سرعت نسبی ای به کار می‌گیریم که موازی هیچیک از محورهای فضایی نباشد.

قرار می‌دهیم $v_1 = \lambda|v|$ ، $v_2 = \mu|v|$ و $v_3 = \nu|v|$ که در آن λ ، μ و ν کسینوسهای هادی بردار v اند. با استفاده از شباهت با معادلهٔ ۲۹۱-۴، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + i\lambda\delta\beta x_4 \\ x'_2 &= x_2 + i\mu\delta\beta x_4 \\ x'_3 &= x_3 + i\nu\delta\beta x_4 \end{aligned} \quad (30.2-4)$$

باز با استفاده از تقارن می‌نویسیم

$$x'_4 = x_4 + ia_1\delta\beta x_1 + ia_2\delta\beta x_2 + ia_3\delta\beta x_3 \quad (30.3-4)$$

با استفاده از

$$\sum_{\xi=1}^4 x'_\xi x'_\xi = \sum_{\zeta=1}^4 x_\zeta x_\zeta \quad (30.4-4)$$

می‌رسیم به:

$$a_1 = -\lambda, \quad a_2 = -\mu \quad \text{و} \quad a_3 = -\nu$$

معادله‌های ۳۰۲-۴ و ۳۰۳-۴ را به صورت یک معادله ماتریسی بازنویسی می‌کنیم؛ داریم

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\lambda\delta\beta \\ 0 & 1 & 0 & i\mu\delta\beta \\ 0 & 0 & 1 & i\nu\delta\beta \\ -i\lambda\delta\beta & -i\mu\delta\beta & -i\nu\delta\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (305-4)$$

1 را کم می‌کنیم و از فاکتور می‌گیریم، می‌رسیم به:

$$\mathbf{x}' = (1 + \delta\beta\sigma)\mathbf{x} \quad (306-4)$$

در اینجا

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\lambda \\ 0 & 0 & 0 & i\mu \\ 0 & 0 & 0 & i\nu \\ -i\lambda & -i\mu & -i\nu & 0 \end{pmatrix} \quad (307-4)$$

با ضرب کردن (و استفاده از $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$) داریم

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu & 0 \\ \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu & 0 \\ \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (308-4)$$

و

$$\sigma^2 = \sigma \quad (309-4)$$

مانند قبل، N بار این عمل را تکرار می‌کنیم، در نتیجه $\theta = N\delta\beta$. با تشکیل تابع نمایی داریم

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \theta\sigma/N)^N &= e^{\theta\sigma} \\ &= 1 + \sigma \sinh \theta + \sigma^2 (\cosh \theta - 1) \end{aligned} \quad (310-4)$$

σ مولدی است با پارامترهای λ ، μ و ν که جهت سرعت را تعریف می‌کنند. طرف دوم معادله ۴-۳۱۰ را محاسبه می‌کنیم، و ماتریس تبدیل لورنتس را با همهٔ زیبایی‌اش به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2(\cosh\theta - 1) & \lambda\mu(\cosh\theta - 1) & \lambda\nu(\cosh\theta - 1) & i\lambda\sinh\theta \\ \lambda\mu(\cosh\theta - 1) & 1 + \mu^2(\cosh\theta - 1) & \mu\nu(\cosh\theta - 1) & i\mu\sinh\theta \\ \lambda\nu(\cosh\theta - 1) & \mu\nu(\cosh\theta - 1) & 1 + \nu^2(\cosh\theta - 1) & i\nu\sinh\theta \\ -i\lambda\sinh\theta & -i\mu\sinh\theta & -i\nu\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \quad (۳۱۱-۴)$$

که در آن باز هم داریم $\sinh\theta = \beta\gamma$ و $\cosh\theta = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \gamma$. شایان ذکر است که ترکیب معادله‌های ۴-۳۱۰ و ۴-۳۱۱

$$L(\mathbf{v}) = e^{\theta\sigma} \quad (۳۱۲-۴)$$

دقیقاً به صورت معادلهٔ ۴-۲۶۱ نیست. نماها فاقد ضریب i هستند، و $L(\mathbf{v})$ یکانی نیست. ماتریسهایی که برای حالت $\mathbf{v} = iv_x$ به کمک معادلهٔ ۴-۲۹۹ داده می‌شوند، یک زیرگروه تشکیل می‌دهند. ماتریسهای معادلهٔ ۴-۳۱۱ زیرگروه تشکیل نمی‌دهند. حاصلضرب دو ماتریس تبدیل لورنتس $L(\mathbf{v}_1)$ و $L(\mathbf{v}_2)$ در صورتی ماتریس لورنتس سومی، $L(\mathbf{v}_3)$ ، را تشکیل می‌دهند که سرعتهای \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 موازی باشند. سرعت برابند، \mathbf{v}_3 ، به کمک قانون جمع سرعتهای اینشتین در بخش ۳-۷ از سرعتهای \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 به دست می‌آید. اگر \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 موازی نباشند، چنین رابطهٔ ساده‌ای وجود ندارد. در حالت خاص سه چارچوب مرجع S ، S' و S'' را در نظر بگیرید که در آن S و S' توسط $L(\mathbf{v}_1)$ و S'' توسط $L(\mathbf{v}_2)$ به یکدیگر مربوط شوند. اگر سرعت S'' نسبت به دستگاه اولیهٔ S برابر \mathbf{v}_3 باشد، تبدیل از S به S'' از طریق $L(\mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_2)L(\mathbf{v}_1)$ انجام نمی‌شود. بلکه پی می‌بریم که

$$L(\mathbf{v}_3) = RL(\mathbf{v}_2)L(\mathbf{v}_1) \quad (۳۱۳-۴)$$

که در آن R یک ماتریس چرخش 3×3 در فضای محاط درون فضا زمان چهاربعدی است. اگر \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 موازی نباشند، دستگاه نهایی S'' نسبت به S چرخیده است. این چرخش منشأ حرکت تقدیمی توماس است که در جمله‌های مربوط به جفت‌شدگی اسپین-مداری در فیزیک اتمی و هسته‌ای ظاهر می‌شود. به دلیل حضور این چرخش، مجموعهٔ $L(\mathbf{v})$ ها به تنهایی گروه تشکیل نمی‌دهند.

مسائل

۴-۱۳-۱ $\sigma(\lambda, \mu, \nu)$ را به کمک مشتق‌گیری از ماتریس نهایی در معادله ۴-۳۱۱ به دست آورید. ۴-۱۳-۲ دو تبدیل لورنتس پی‌درپی انجام شده است: v_1 در راستای محور x ، سپس v_2 در راستای محور y . نشان دهید که تبدیل برابند را (که با حاصلضرب این دو تبدیل پی‌درپی داده می‌شود) نمی‌توان به شکل معادله ۴-۳۱۱ در آورد.

یادآوری: اختلاف در یک چرخش است.

۴-۱۳-۳ با در نظر گرفتن فضای حقیقی (x_0, x_1, x_2, x_3) که در آن $x_0 = ct$ ، تبدیل لورنتس را استخراج کنید. نشان دهید که در اینجا نیز تبدیل لورنتس را می‌توان به صورت $L(v) = \exp(\theta\sigma)$ در معادله ۴-۳۱۲ نوشت، ولی این بار با

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\mu & -\nu \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۴-۱۳-۴ با استفاده از رابطه ماتریسی معادله ۴-۲۹۹، فرض کنید که پارامتر سرعت θ_1 چارچوبهای مرجع لورنتسی (x'_1, x'_2) و (x_1, x_2) ، و θ_2 چارچوبهای (x''_1, x''_2) و (x'_1, x'_2) را به یکدیگر مربوط می‌کند. با استفاده از رابطه $\theta = \theta_1 + \theta_2$ قانون جمع سرعت‌های اینشتین را به صورت زیر به دست آورید

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

مراجع

Aitken A C, *Determinants and Matrices*, New York: Interscience Publishers (1956).

تجدید چاپ توسط Greenwood در ۱۹۸۳. این کتاب مقدمه‌ای است خواندنی در باب دترمینانها و ماتریسها.

Bickley W G and R S H G Thompson, *Matrices - Their Meaning and Manipulation*, Princeton, N J: Van Nostrand (1964).

این کتاب به نحو جامعی وقوع ماتریسها در مسائل فیزیکی، خواص تحلیلی آنها و شگردهای عددی را مورد بررسی قرار می دهد.

Buerger M J, *Elementary Crystallography*, New York: Wiley (1956).

بحث جامعی در باب تقارنهای بلوری. برگر تمامی ۳۲ گروه نقطه‌ای و تمامی ۲۳۰ گروه فضایی را به دست می آورد. کتابهای دیگر این نویسنده در این زمینه عبارت‌اند از

Contemporary Crystallography, New York: McGraw-Hill (1970).

Crystal Structure Analysis, Krieger (1979).

(تجدید چاپ، چاپ اول ۱۹۶۰)

Introduction to Crystal Geometry, Krieger (1977).

(تجدید چاپ، چاپ اول ۱۹۷۱)

Burns G, and A M Glazer, *Space Groups for Solid State Scientists*, New York: Academic Press (1978).

این کتاب بررسی خواندنی و سازمان یافته‌ای است در باب گروهها و کاربستهای آنها در حالت جامد.

Falicov L M, *Group Theory and Its Physical Application*, University of Chicago Press (1966).

این کتاب حاوی یادداشتهایی است که A Luehrmann (از شیکاگو) گردآوری کرده است، در این کتاب تأکید بیشتر بر کاربست نظریه گروه درباره تقارنهای بلوری و فیزیک حالت جامد است.

Gell-Mann M and Ne'eman Y, *The Eightfold Way*, New York: Benjamin (1965).

مجموعه‌ای از مقاله‌های معتبر چاپ شده در باب $SU(3)$ و ذرات پرانرژی. بخشهای مقدماتی متعدد توسط گلמן و نیمن به‌ویژه سودمند است.

Hamermesh M, *Group Theory and Its Application to Physical Problems*, Reading, Mass: Addison- Wesley (1962).

این کتاب توجیه مشروح و دقیقی است برای گروههای متناهی و پیوسته. ۳۲ گروه نقطه‌ای گسترش یافته‌اند. گروههای پیوسته‌ای که توسط جبر لی بررسی می شوند نیز مطرح شده‌اند. انبوهی از کاربردها در فیزیک اتمی و هسته‌ای آورده شده است.

Higman B, *Applied Group- Theoretic and Matrix Methods*, New York: Dover (1964).

این کتاب حاوی بحث نسبتاً کامل و به‌نحوی غیرمعمول فهمیدنی درباره تحلیل ماتریسی و نظریه گروه است.

Park D, "Resource Letter SP-1 on Symmetry in Physics" *Am J Phys*, **36**, 577-584 (1968).

این مقاله حاوی مراجع اساسی زیادی دربارهٔ نظریهٔ گروه و کاربردهای آن در فیزیک: اتمها، مولکولها، هسته‌ها، جامدات و ذرات بنیادی است.

Ram B, *Am J Phys*, **35**, 16 (1967).

یک بحث عالی دربارهٔ کاربرد $SU(3)$ در مورد ذرات با برهم‌کنش قوی (باریونها). برای دنبال کردن این بحث مقاله زیر را ببینید:

R D Young, "Physics of the Quark Model." *Am J Phys*, **41**, 472 (1973).

Rose M E, *Elementary Theory of Angular Momentum*, New York: Wiley (1957).

رز به‌عنوان بخشی از گسترش نظریهٔ کوانتومی تکانهٔ زاویه‌ای، بحث مشروح و خواندنی دربارهٔ گروه چرخشی ارائه می‌کند.

Wigner E P, *Group Theory and Its Application to Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, New York and London: Academic Press (1959).

این کتاب که توسط ج ج گرین از آلمانی به انگلیسی ترجمه شده است، یک مرجع کلاسیک دربارهٔ نظریهٔ گروه برای فیزیکدانان است. گروههای چرخشی در این کتاب به‌گونهٔ نسبتاً مشروح بررسی شده است. کاربردهای زیادی از این نظریه در فیزیک اتمی آورده شده است.



سریهای نامتناهی

۱-۵ مفاهیم بنیادی

در ریاضیات محض و کاربردی، به سریهای نامتناهی، یعنی مجموعیابی بینهایت جمله، فراوان برمی خوریم. متخصصان ریاضیات محض از این سریها در رهیافتی بنیادی به نظریهٔ توابع، برای تعریف تابع بهره می گیرند. به علاوه، این توابع را برای محاسبهٔ مقدار دقیق ثابتهای متعالی و تابعهای متعالی به کار می برند. در ریاضیات علوم و مهندسی سریهای نامتناهی در همهٔ مباحث حضور دارند، زیرا در محاسبهٔ انتگرالها (بخشهای ۵-۶ و ۵-۷)، در حل معادلات دیفرانسیل (بخشهای ۸-۵ و ۸-۶) و به صورت سری فوریه (فصل ۱۴) ظاهر می شوند، و برای توصیف تعداد زیادی از توابع خاص با نمایشهای انتگرالی رقابت می کنند (فصلهای ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ جلد دوم). جواب سری نویمان برای معادله‌های انتگرالی در بخش ۱۶-۳، نمونهٔ دیگری از پدیداری و کاربرد سریهای نامتناهی به شمار می آید.

قبل از هر چیز با مسئلهٔ معنی مربوط به مجموع بینهایت جمله مواجهیم. روش معمول در این کار، بهره‌گیری از مجموعهای جزئی است. اگر دنباله‌ای از بینهایت جمله، $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$ داشته باشیم، مجموع جزئی n ام را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$s_n = \sum_{m=1}^n u_m \quad (1-5)$$

این عبارت یک مجموعیابی متناهی است و در مورد آن با مشکلی بر نمی‌خوریم. اگر مجموعه‌های جزئی s_i در ازای $\infty \rightarrow i$ به یک حد (متناهی) همگرا شود، یعنی

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = S \quad (2-5)$$

می‌گوییم سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا و مقدارش S است. دقیقاً توجه کنید که این تعریف که سری نامتناهی برابر S است، هر چند منطقی و عملی است، ولی اختیاری است. همچنین توجه کنید که شرط لازم برای این همگرایی به یک حد، عبارت است از $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. ولی این شرط برای تضمین همگرایی کافی نیست. معادله ۲-۵ معمولاً برحسب نمادگذاری صوری ریاضی به صورت زیر بیان می‌شود:

شرط وجود حد S آن است که به ازای هر $\epsilon > 0$ ، N معینی وجود داشته باشد، به گونه‌ای که

$$|S - s_i| < \epsilon \quad i > N \text{ به ازای}$$

این شرط معمولاً با بهره‌گیری از معیار کوشی درباره مجموعه‌های جزئی s_i استنتاج می‌شود. معیار کوشی به قرار زیر است:

شرط لازم و کافی برای همگرایی دنباله (s_i) ، آن است که به ازای هر $\epsilon > 0$ ، عدد معین N چنان وجود داشته باشد که

$$|s_j - s_i| < \epsilon \quad i, j > N \text{ به ازای همه}$$

یعنی، هر چه در دنباله جلوتر برویم، باید مجموعه‌های جزئی به یکدیگر نزدیکتر شوند.

معیار کوشی را می‌توان به سادگی به دنباله‌ای از توابع تعمیم داد. با این صورت معیار کوشی، در بخش ۵-۵ در تعریف همگرایی یکتا وخت و در بخش ۹-۴، در شرح فرمولبندی فضای هیلبرت روبه‌رو خواهیم شد.

مجموعه‌های جزئی s_i ممکن است به یک حد همگرا نشوند، بلکه به صورت زیر دستخوش تغییراتی نوسانی شوند

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - 1 + 1 - 1 - \dots - (-1)^n + \dots \quad (3-5)$$

روشن است که به ازای مقادیر فرد i ، $s_i = 1$ و به ازای مقادیر زوج i ، $s_i = 0$. در این نوع سریها همگرایی به یک حد وجود ندارد، و آنها را نوسانی می‌نامند.

در مورد سری

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots \quad (4-5)$$

داریم

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (5-5)$$

به ازای $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad (6-5)$$

هرگاه دنبالهٔ مجموعهای جزئی واگرا (به $\pm\infty$ نزدیک) شود، می‌گوییم این سری نامتناهی واگراست. اغلب اوقات واژهٔ واگرا را تعمیم می‌دهند، به طوری که سریهای نوسانی را نیز شامل شود. با توجه به آنکه مجموعهای جزئی را در چارچوب حساب معمولی محاسبه می‌کنیم، سریهای همگرا که، بنابر تعریف، عبارت‌اند از حد مجموعهای جزئی، از جایگاه بسیار مهمی برخوردارند. با ذکر دو مثال، ماهیت همگرایی و واگرایی سریها را روشنتر می‌کنیم و شالوده‌ای برای بررسیهای مشروحتر بخش بعد فراهم می‌آوریم.

مثال ۱-۵-۱ سری هندسی: جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر a و نسبت آن r ($r \geq 0$) است:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, \dots$$

مجموع جزئی n ام به‌قرار زیر است^۱

$$s_n = a \frac{1-r^n}{1-r} \quad (7-5)$$

حد $n \rightarrow \infty$ را حساب می‌کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r} \quad \text{به ازای } r < 1 \quad (8-5)$$

۱. $s_n = \sum_{m=0}^{n-1} ar^m$ را در $1-r$ ضرب و بر آن تقسیم کنید.

به این ترتیب، بنابر تعریف، سری هندسی نامتناهی به ازای $r < 1$ همگرا می‌شود، و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad (9-5)$$

از سوی دیگر، اگر $r \geq 1$ ، شرط لازم $u_n \rightarrow 0$ برقرار نیست و سری نامتناهی واگراست.

مثال ۱-۵-۲ سری همساز: به عنوان مثال دوم، حالت پیچیده‌تر سری همساز را در نظر می‌گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (10-5)$$

داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ ولی وجود این عبارت برای تضمین همگرایی کافی نیست. اگر جمله‌ها را (بدون عوض کردن ترتیب آنها) به صورت زیر گروه‌بندی کنیم

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \quad (11-5)$$

ملاحظه می‌شود که هر زوج از پرانتزها، جمله را به صورت زیر در برمی‌گیرند

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{p+p} > \frac{p}{2p} = \frac{1}{2} \quad (12-5)$$

با افزودن گروه‌های داخل پرانتز به یکدیگر، مجموعهای جزئی تشکیل می‌شوند، و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 & s_2 &> \frac{5}{2} \\ s_2 &= \frac{3}{2} & s_5 &> \frac{6}{2} \\ s_3 &> \frac{4}{2} & s_n &> \frac{n+1}{2} \end{aligned} \quad (13-5)$$

۱. سری همساز (متناهی) طی یادداشت جالبی در باب حداکثر پایداری جابه‌جایی ستونی از سکه‌ها مورد بحث قرار گرفته، که با مشخصات زیر انتشار یافته است:

به این ترتیب سری همساز قطعاً واگراست.^۱ در بخش ۲-۵، واگرایی این سری به روش مستقل دیگری نمایش داده خواهد شد.

با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای^۱ (بخش ۵-۶) می‌توانیم تابع $(1+x)^{-1}$ را بسط دهیم

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^{n-1} + \dots \quad (14-5)$$

اگر قرار دهیم $x \rightarrow 1$ ، این سری به صورت زیر در می‌آید

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (15-5)$$

این همان سری‌ای است که قبلاً در همین بخش، نوسانی نامیده شد. هر چند این سری به معنای معمول همگرا نیست، ولی می‌توان برای آن معنایی قائل شد. مثلاً اوایل براساس تناظر میان این سری و تابع خوش‌تعریف $(1+x)^{-1}$ ، مقدار $1/2$ را به این سری نسبت داد. اما متأسفانه این تناظر میان سری و تابع منحصر به فرد نیست و این رهیافت باید اصلاح شود. برای نسبت دادن یک مفهوم به یک سری واگرا یا نوسانی، روشهای دیگری، روشهای تعریف مجموع، را یافته‌اند. اما، به‌طور کلی، این جنبهٔ سریهای نامتناهی برای دست‌اندرکاران علوم و مهندسی چندان مورد توجه نیست. یک استثنا بر این حکم، یعنی سری بسیار مهم نیم‌همگرا یا مجانبی، را در بخش ۵-۱۰ بررسی خواهیم کرد.

مسائل

۱-۱-۵ نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

[راهنمایی: به کمک استقرای ریاضی نشان دهید: $s_m = m/(2m+1)$]

۲-۱-۵ نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

مجموعه‌های جزئی s_m را بیابید و درستی آن‌را به کمک استقرای ریاضی تحقیق کنید. یادآوری: روش بسط برحسب کسره‌های جزئی، بخش ۱۵-۸، راه دیگری برای حل مسئله‌های ۱-۱-۵ و ۲-۱-۵ است.

۱. معادلهٔ ۱۴-۵ را می‌توان عملاً یک اتحاد دانست و درستی آن‌را با ضرب کردن دو طرف در $1+x$ اثبات کرد.

۲-۵ آزمونهای همگرایی

با آنکه سریهای ناهمگرا ممکن است در حالتی خاص مفید باشند (با بخش ۵-۱۰ مقایسه کنید) ولی، حتی اگر هم لازم نباشد برای راحتی کار، معمولاً برهمگرایی سری تأکید می‌ورزیم. به همین دلیل، اینکه بتوانیم بگوییم سری همگراست یا خیر، بسیار مهم است. چند آزمون عملی را مطرح می‌کنیم، و برای این کار از آزمونهای ساده و نسبتاً غیرحساس آغاز می‌کنیم و به آزمونهای پیچیده‌تر ولی بسیار حساس می‌رسیم.

فلاً سری با جمله‌های مثبت $a_n > 0$ را در نظر می‌گیریم؛ طرح جمله‌های منفی را تا بخش بعد به تعویق می‌اندازیم.

آزمون مقایسه

اگر سری $\sum_n a_n$ همگرا باشد، و برای جمله به جمله سری $\sum_n u_n$ داشته باشیم $u_n \leq a_n$ ، در این صورت سری $\sum_n u_n$ نیز همگرا خواهد بود. به زبان نمادها داریم

$$\sum_n a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{همگرا}$$

$$\sum_n u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

اگر به ازای همه n ها داشته باشیم $u_n \leq a_n$ ، در این صورت $\sum_n u_n \leq \sum_n a_n$ و از این رو $\sum_n u_n$ همگراست.

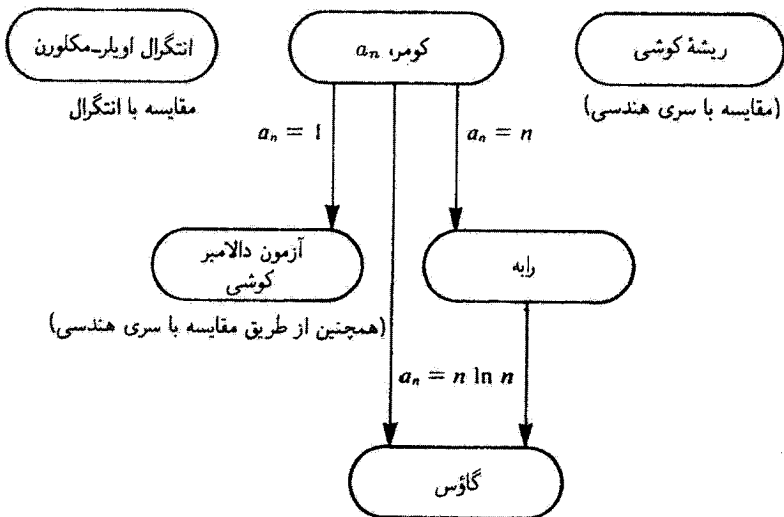
اگر برای جمله به جمله یک سری $\sum_n v_n$ داشته باشیم $v_n \geq b_n$ ، که در آن $\sum_n b_n$ یک سری واگرا باشد، سری $\sum_n v_n$ نیز واگرا خواهد بود. توجه داشته باشید که مقایسه u_n با b_n و یا v_n با a_n هیچ اطلاعی به ما نمی‌دهد. در اینجا داریم

$$\sum_n b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \quad \text{واگرا}$$

$$\sum_n v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

اگر به ازای همه n ها داشته باشیم $v_n \geq b_n$ ، در این صورت $\sum_n v_n \geq \sum_n b_n$ و از این رو $\sum_n v_n$ واگراست.

برای سری همگرایی a_n ، قبلاً سری هندسی را معرفی کرده‌ایم، از سری همساز نیز می‌توان به عنوان سری واگرایی b_n استفاده کرد. به ترتیب که با سریهای همگرا یا واگرایی دیگر آشنا می‌شویم، می‌توانیم از هر یک از آنها نیز به تناسب به جای سری معلوم در آزمون مقایسه بهره بگیریم.



شکل ۱-۵. آزمونهای مقایسه.

آزمونهایی که در این بخش می‌آوریم، همگی اساساً آزمونهای مقایسه‌اند. این آزمونها و رابطه بین آنها را در شکل ۱-۵ مشاهده می‌کنید.

مثال ۱-۲-۵. سری p : همگرایی سری $\sum_n n^{-p}$ را به‌ازای $p = 0.999$ بیازمایید. با توجه به آنکه $n^{-1} > n^{-0.999}$ و $b_n = n^{-1}$ یک سری واگرای همساز است، آزمون مقایسه نشان می‌دهد که $\sum_n n^{-0.999}$ واگراست. با تعمیم این استدلال مشاهده می‌شود که $\sum_n n^{-p}$ به‌ازای همه مقادیر $p \leq 1$ واگراست.

آزمون ریشه کوشی

اگر به‌ازای همه مقادیر به‌اندازه کافی بزرگ n داشته باشیم $1 < r \leq (a_n)^{1/n}$ ، که در آن r مستقل از n است، در این صورت $\sum_n a_n$ همگراست. اگر به‌ازای همه مقادیر به‌اندازه کافی بزرگ n داشته باشیم: $(a_n)^{1/n} \geq 1$ ، در این صورت $\sum_n a_n$ واگراست.

درستی جزء اول این آزمون را می‌توان با رساندن $(a_n)^{1/n} \leq r$ به‌توان n ، تحقیق کرد. خواهیم داشت

$$a_n \leq r^n < 1$$

r^n ، n امین جمله از یک سری همگرایی هندسی است؛ بنابراین، با آزمون مقایسه $\sum_n a_n$ همگراست. برعکس، اگر $(a_n)^{1/n} \geq 1$ ، آنگاه $a_n \geq 1$ ، و سری باید واگرا شود. سری ریشه، به‌خصوص در پی‌ریزی خواص سری توانی (بخش ۷-۵) سودمند خواهد بود.

آزمون نسبت دالامبر یا کوشی

اگر به ازای همه n های به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $1 < r < a_{n+1}/a_n$ ، r مستقل از n ، در این صورت $\sum_n a_n$ همگراست. اگر به ازای همه n های به اندازه کافی بزرگ $a_{n+1}/a_n \geq 1$ ، در این صورت $\sum_n a_n$ واگراست.

همگرایی را می توان به کمک مقایسه مستقیم با سری هندسی $(1 + r + r^2 + \dots)$ آزمود. در قسمت دوم داریم $a_{n+1} \geq a_n$ ، و اگرایی منطقاً عیان است. هر چند آزمون نسبت دالامبر به حساسیت آزمون ریشه کوشی نیست، ولی یکی از ساده ترین آزمونها به شمار می آید و کاربرد بسیار زیادی دارد. آزمون نسبت را می توان به صورت حد نیز بیان کرد:

$$\begin{array}{ll} \text{سری همگراست} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \\ \text{سری واگراست} & > 1 \\ \text{نامشخص} & = 1 \end{array} \quad (16-5)$$

آزمون نسبت به دلیل همین امکان نامشخص بودن، ممکن است در موارد بسیار مهم با ناکامی روبه رو شود و به آزمونهای ظریفتر و حساستری نیاز باشد.

ممکن است این پرسش برای خواننده هوشمند پیش بیاید که این نامشخص بودن از کجا آمد؟ این قسمت، در واقع در گزاره اول، یعنی در $1 < r < a_{n+1}/a_n$ مستتر بود. ممکن است به ازای همه n های متناهی داشته باشیم: $a_{n+1}/a_n < 1$ ، ولی نتوانیم r را چنان پیدا کنیم که $r < 1$ و مستقل از n باشد، به طوری که به ازای همه n های به اندازه کافی بزرگ $a_{n+1}/a_n \leq r$ ، سری همساز، یکی از مثالهای مربوط به این حالت است که در آن

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad (17-5)$$

با توجه به آنکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad (18-5)$$

هیچ نسبت معینی کوچکتر از یک ($r < 1$) وجود ندارد و آزمون نسبت با عدم موفقیت روبه رو می شود.

مثال ۲-۲-۵ آزمون نسبت دالامبر: همگرایی $\sum_n n/2^n$ را بیازماید.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \quad (19-5)$$

با توجه به آنکه به ازای $n \geq 2$ داریم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{3}{4} \quad (20-5)$$

سری همگراست. یا به عبارت دیگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \quad (21-5)$$

و باز هم سری همگراست.

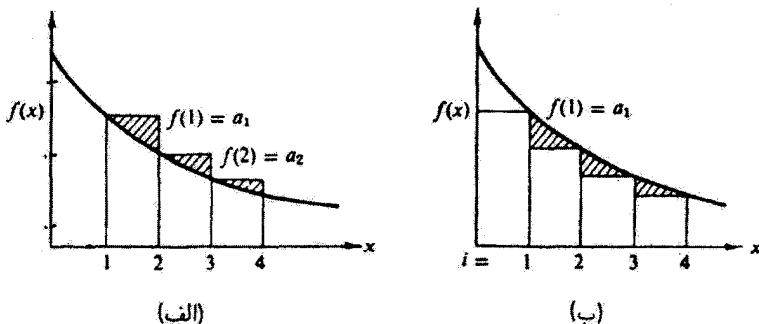
آزمون انتگرال کوشی یا مکلورن

این هم یک نوع آزمون مقایسه دیگر است که در آن سری را با یک انتگرال مقایسه می‌کنیم. از نظر هندسی، در این آزمون مساحت مجموعه‌ای از مستطیلهای به عرض واحد را با مساحت زیرمنحنی مقایسه می‌کنیم.

فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته یکنوای نزولی باشد و $f(n) = a_n$ ، در این صورت اگر $\int_1^{\infty} f(x) dx$ متناهی باشد، همگرا و اگر انتگرال نامتناهی باشد، واگراست. برای مجموع جزئی s_n داریم

$$s_i = \sum_{n=1}^i a_n = \sum_{n=1}^i f(n) \quad (22-5)$$

اما با استفاده از شکل ۲-۵ الف با توجه به اینکه $f(x)$ یکنوای نزولی است، داریم



شکل ۲-۵ الف) مقایسه انتگرال با مجموع بلوکها که بزرگتر از انتگرال است. ب) مقایسه انتگرال با مجموع بلوکها که کوچکتر از انتگرال است.

$$s_i > \int_1^{i+1} f(x) dx \quad (23-5)$$

از سوی دیگر، با توجه به شکل ۲-۵ ب داریم

$$s_i - a_1 < \int_1^i f(x) dx \quad (24-5)$$

که در آن سری با مستطیلهای محاطی نمایش داده می‌شود. حد $i \rightarrow \infty$ را می‌گیریم، داریم

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_1^{\infty} f(x) dx + a_1 \quad (25-5)$$

بنابراین، سری نامتناهی با همگرا شدن یا واگرا شدن انتگرال متناظر با آن، همگرا یا واگرا می‌شود. آزمون انتگرال، وقتی تعدادی از جمله‌های اصلی سری را جمع زده‌ایم، به‌خصوص برای تعیین کرانه‌های بالایی و پایینی جمله‌های باقیمانده مفید است. یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

که در آن

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \int_{N+1}^{\infty} f(x) dx + a_{N+1}$$

مثال ۳-۲-۵ تابع زتای ریمان: تابع زتای ریمان، بنابر تعریف، عبارت است از

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \quad (26-5)$$

می‌گیریم $f(x) = x^{-p}$ ، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x^{-p} dx &= \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} & p \neq 1 \\ &= \ln x \Big|_1^{\infty} & p = 1 \end{aligned} \quad (27-5)$$

انتگرال و در نتیجه سری به‌ازای $p \leq 1$ واگرا و به‌ازای $p > 1$ همگرا می‌شود. بنابراین، در

معادله ۲۶-۵ باید شرط $p > 1$ برقرار باشد. اتفاقاً این برهان، اثبات مستقلی نیز برای واگرایی سری همساز ($p = 1$) به شمار می‌آید و نشان می‌دهد که آن سری به صورت لگاریتمی واگرا می‌شود. مجموع یک میلیون جمله اول آن، یعنی n^{-1} با 1.4392726 برابر است.^۱ از این آزمون مقایسه انتگرالی می‌توان برای تعیین حد بالایی ثابت اویلر-ماشرونی^۱ که به صورت زیر تعریف می‌شود نیز استفاده کرد

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n m^{-1} - \ln n \right) \quad (28-5)$$

با مراجعه به مجموعهای جزئی داریم

$$s_n = \sum_{m=1}^n m^{-1} - \ln n < \int_1^n \frac{dx}{x} - \ln n + 1 \quad (29-5)$$

با محاسبه انتگرال سمت راست، به‌ازای همه مقادیر n خواهیم داشت: $s_n < 1$. بنابراین $\gamma < 1$. مسئله ۲-۵-۱۲ کرانهای محدودتری را به‌ما می‌دهد. در واقع ثابت اویلر-ماشرونی برابر است با $0.57721566 \dots$

آزمون کومر

این نخستین آزمون از سه آزمونی است که کاربرد آنها نسبت به آزمونهای قبلی تا حدودی دشوارتر است. اهمیت آنها در قدرت و حساسیتشان است. غالباً در مواردی که آزمونهای آسانتر ساده‌تر مطمئن نیستند، دست‌کم یکی از این سه آزمون به کار می‌آید. ولی باید به‌خاطر داشت که این آزمونها هم مانند آزمونهایی که پیش از این مطرح شدند، بر پایه مقایسه صورت می‌گیرند. می‌توان نشان داد که هیچ سری همگرایی وجود ندارد که از همه کندتر همگرا شود و هیچ سری واگرایی نیز وجود ندارد که از همه کندتر واگرا شود. یعنی، همه آزمونهای همگرایی که در این مبحث به آنها می‌پردازیم، از آن جمله آزمون کومر، ممکن است ناموفق از کار در آیند.

یک سری از جمله‌های مثبت u_n و دنباله‌ای از ثابتهای مثبت متناهی a_n در نظر می‌گیریم.

اگر برای عدد معین N ، به‌ازای همه مقادیر n ، $n \geq N$ داشته باشیم

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq C > 0 \quad (30-5)$$

۱. براساس نمادگذاری سازمان ملی استانداردها در کتاب

Handbook of Mathematical Functions, Applied Mathematics Series-55 (AMS-55).

۲. مجموع جزئی s_N برای u_n متناهی به‌ازای هر N متناهی، همواره متناهی خواهد بود. همگرایی یا واگرایی سری به رفتار بینهایت جمله آخر بستگی دارد، نه به رفتار N جمله نخست.

آنگاه، $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ همگرا خواهد بود. اگر:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0 \quad (31-5)$$

و $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ واگرا خواهد بود.

اثبات این قضیه توانا، به نحو چشمگیری ساده است. از معادله ۳۰-۵، برای ثابت مثبت C داریم

$$\begin{aligned} C u_{N+1} &\leq a_N u_N - a_{N+1} u_{N+1} \\ C u_{N+2} &\leq a_{N+1} u_{N+1} - a_{N+2} u_{N+2} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (32-5)$$

$$C u_n \leq a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n$$

با جمع کردن همه رابطه‌ها و تقسیم بر C ($C \neq 0$)، خواهیم داشت

$$\sum_{i=N+1}^N u_i \leq \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C} \quad (33-5)$$

از این رو، برای مجموع جزئی s_n ، داریم

$$\begin{aligned} s_n &\leq \sum_{i=1}^N u_i + \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C} \\ &< \sum_{i=1}^N u_i + \frac{a_N u_N}{C} \end{aligned} \quad (34-5)$$

طرف راست معادله ۳۴-۵ ثابتی است مستقل از n . بنابراین، مجموعه‌های جزئی یک کران بالایی دارند. کران پایینی هم که آشکارا می‌تواند صفر باشد، پس سری $\sum u_i$ باید همگرا باشد. واگرایی را به صورت زیر نشان می‌دهیم. از معادله ۳۱-۵ داریم

$$a_n u_n \geq a_{n-1} u_{n-1} \geq \dots \geq a_N u_N \quad n > N \quad (35-5)$$

بنابراین

$$u_n \geq \frac{a_N u_N}{a_n} \quad (36-5)$$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i \geq a_N u_N \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i^{-1} \quad (۳۷-۵)$$

اگر $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}$ واگرا باشد، آنگاه به کمک آزمون مقایسه پی می‌بریم که $\sum_i u_i$ نیز واگراست. معادله‌های ۳۰-۵ و ۳۱-۵ را بیشتر به صورت حدی زیر می‌نویسند

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) = C \quad (۳۸-۵)$$

به این ترتیب، به ازای $C > 0$ همگرایی، و به ازای $C < 0$ (و $\sum_i a_i^{-1}$ واگرا) واگرایی داریم. نمایش هم‌ارزی معادله ۳۸-۵ با معادله‌های ۳۰-۵ و ۳۱-۵، و اینکه چگونه وقتی حد C برابر صفر می‌شود به ایهام برمی‌خوریم، می‌تواند آموزنده باشد. با استفاده از تعریف حد، به ازای همه مقادیر $n \geq N$ و همه مقادیر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر هم که ε کوچک باشد، داریم

$$\left| a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} - C \right| < \varepsilon \quad (۳۹-۵)$$

اگر نشانه قدر مطلق را برداریم، داریم

$$C - \varepsilon < a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < C + \varepsilon \quad (۴۰-۵)$$

اینک اگر به ازای مقادیر به قدر کافی کوچک ε داشته باشیم $C > 0$ ، آنگاه معادله ۳۰-۵ به دست می‌آید. از سوی دیگر، اگر $C < 0$ ، آنگاه معادله ۳۱-۵ به دست می‌آید. ولی اگر $C = 0$ ، جمله میانی $a_n(u_n/u_{n+1}) - a_{n+1}$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد و این اثبات نقض می‌شود. مورد استفاده اصلی آزمون کومر در اثبات آزمونهای دیگر نظیر آزمون رابه است (با مسئله ۳-۲-۵ نیز مقایسه کنید). در آزمون کومر، اگر ثابتهای مثبت a_n را به صورت $a_n = n$ برگزینیم، به آزمون رابه می‌رسیم.

آزمون رابه

اگر $u_n > 0$ و به ازای همه مقادیر $n, m \geq N$ که در آن N یک عدد درست مثبت مستقل از n است، داشته باشیم

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq P > 1 \quad (۴۱-۵)$$

آنگاه $\sum_i u_i$ همگرا خواهد بود. اگر

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad (۴۲-۵)$$

آنگاه $\sum_i u_i$ واگرا خواهد بود ($\sum n^{-1}$ واگراست).
صورت حدی آزمون رابه به‌قرار زیر است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = P \quad (۴۳-۵)$$

به‌ازای $P > 1$ همگرایی و به‌ازای $P < 1$ واگرایی، و به‌ازای $P = 1$ درست مانند آزمون کومر هیچ آزمونی نداریم. این ابهام به کمک مسئله ۴-۲-۵ نشان داده می‌شود، که نمایانگر یک سری همگرا و یک سری واگراست که هر دو در معادله ۴۳-۵ می‌دهند: $P = 1$.

آزمون رابه از آزمون نسبت دالامبر حساستر است، زیرا $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ کندتر از $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ واگرا می‌شود. اگر a_n را برابر $n \ln n$ بگیریم، آزمونی از این هم حساستر (که به‌کار بردن آن هم آسانتر است) به‌دست می‌آوریم. این آزمون منسوب به گاوس است.

آزمون گاوس

اگر به‌ازای همهٔ مقادیر متناهی n داشته باشیم $u_n > 0$ و

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2} \quad (۴۴-۵ \text{ الف})$$

که در آن $B(n)$ به‌ازای $n \rightarrow \infty$ تابع کران‌داری از n است، آنگاه $\sum_i u_i$ به‌ازای $h > 1$ همگرا و به‌ازای $h \leq 1$ واگراست.

نسبت u_n/u_{n+1} در معادله ۴۴-۵ الف اغلب به‌صورت نسبت دو عبارت درجهٔ دوم است:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n + b_0} \quad (۴۴-۵ \text{ ب})$$

می‌توان نشان داد (مسئله ۵-۲-۵) که به‌ازای $a_1 > b_1 + 1$ همگرایی و به‌ازای $a_1 \leq b_1 + 1$ واگرایی داریم.

آزمون گاوس برای همگرایی سریها، آزمونی بسیار حساس است. این آزمون برای تمام سریهایی که ممکن است هر فیزیکدانی با آنها سروکار پیدا کند، کارایی دارد. به ازای $h > 1$ یا $h < 1$ اثبات این امر مستقیماً پیامد آزمون رابه است:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[h + \frac{B(n)}{n} \right] \quad (45-5)$$

$$= h$$

به ازای $h = 1$ ، آزمون رابه جواب نمی‌دهد، ولی اگر به آزمون کومر بازگردیم و از $a_n = n \ln n$ استفاده کنیم، معادله ۳۸-۵ به صورت زیر در می‌آید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \ln n \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{B(n)}{n^2} \right] - (n+1) \ln(n+1) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln n \cdot \frac{(n+1)}{n} - (n+1) \ln(n+1) \right] \quad (46-5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left[\ln n - \ln n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

با بهره‌گیری از یکی از نتایج بخش ۶-۵ (که به آزمون گاوس بستگی ندارد)، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -(n+1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \dots \right)$$

$$= -1 < 0 \quad (47-5)$$

در نتیجه، به ازای $h = 1$ نیز واگرایی داریم. این نمونه‌ای است از کاربرد موفق آزمون کومر در حالتی که آزمون رابه جواب نداده است.

مثال ۴-۲-۵ سری لژاندر: رابطه بازگشتی برای جواب سری معادله لژاندر (بخش ۵-۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{a_{2j+2}}{a_{2j}} = \frac{2j(2j+1) - l(l+1)}{(2j+1)(2j+2)} \quad (48-5)$$

این عبارت معادل است با $u_{2j+2}/u_{2j} = 1 + x$ ، به ازای $l \gg j$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{u_{2j}}{u_{2j+2}} &\rightarrow \frac{(2j+1)(2j+2)}{2j(2j+1)} = \frac{2j+2}{2j} \\ &= 1 + \frac{1}{j} \end{aligned} \quad (49-5)$$

این سری با استفاده از معادله ۴۴-۵ ب. واگراست. بعدها، بنا بر ضرورت، سری لژاندر در $x = 1$ متناهی خواهد ماند. واگرایی را با قراردادن $m = 2j$ ، که j یک عدد درست است، منتهی می‌کنیم. این کار باعث می‌شود که سری گسسته، و سری نامتناهی به یک چندجمله‌ای تبدیل شود.

افزایش سرعت همگرایی

در این بخش، تا اینجا، به اثبات همگرایی به عنوان یک خاصیت ریاضی مجرد پرداخته‌ایم. در عمل، آهنگ واگرایی حائز اهمیت زیادی است. در اینجا روشی برای افزایش سرعت آهنگ همگرایی یک سری همگرا ارائه می‌کنیم. در بخشهای ۴-۵ و ۹-۵ نیز شگردهای دیگری برای این کار به دست خواهیم داد.

این روش که منسوب به کومراست، بر این اصل استوار است که ترکیبی خطی از سری همگرای کند مورد نظرمان با یک یا چند سری دیگر که مجموعشان معلوم است، تشکیل دهیم. به کمک سریهای زیر به مجموعه مفیدی برای انتخاب سریهای معلوم دست پیدا می‌کنیم:^۲

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \\ \alpha_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \\ \alpha_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18} \quad (50-5) \\ &\vdots \\ \alpha_p &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = \frac{1}{p \cdot p!} \end{aligned}$$

۱. وابستگی به n به عبارت $B(n)$ وارد می‌شود ولی بر h تأثیر نمی‌گذارد.

۲. مجموع این سریها را می‌توان از طریق بسط آنها به کمک کسره‌های جزئی و نوشتن جمله‌های اصلی و یافتن الگویی برای حذف جملات مثبت و منفی، به دست آورد.

این سریها را جمله به جمله با هم ترکیب می‌کنیم و ضرایب ترکیب خطی را به صورتی برمی‌گزینیم که جمله‌هایی که از همه کندتر همگرا می‌شوند، حذف شوند.

مثال ۵-۲-۵ تابع زتای ریمان، $\zeta(3)$: سری‌ای را که یافتن مجموع آن مورد نظر است، به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ بگیرد. این سری را در بخش ۹-۵ تابع زتای ریمان، $\zeta(3)$ ، خواهیم نامید. ترکیب خطی زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} + a_2 \alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} + \frac{a_2}{4}$$

α_1 را به این دلیل وارد نکرده‌ایم که کندتر از $\zeta(3)$ همگرا می‌شود. با ترکیب جملات در سمت چپ خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{a_2}{n(n+1)(n+2)} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(1+a_2) + 3n+2}{n^2(n+1)(n+2)}$$

اگر a_2 را برابر -1 بگیریم، معادله بالا به صورت زیر در می‌آید

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^2(n+1)(n+2)}$$

سری حاصل که ممکن است به نظر زیبا نیاید، به صورت n^{-2} همگرا می‌شود که بسیار سریعتر از همگرایی n^{-3} است. در مسئله ۲۱-۲-۵ صورت مناسبتری ارائه شده است. در آنجا با استفاده از تقارن به همگرایی به صورت n^{-5} دست می‌یابیم.

این روش را می‌توان تعمیم داد و با وارد کردن $a_2 \alpha_2$ به همگرایی به صورت n^{-5} و با وارد کردن $a_3 \alpha_3$ به همگرایی به صورت n^{-6} و الی آخر دست یافت. سرانجام، باید بین مقدار جبری که ما به کار می‌بریم و حجم محاسبه‌ای که ماشین محاسبه انجام می‌دهد توازن برقرار باشد. با بزرگتر و سریعتر شدن ماشینهای محاسبه، این توازن به آرامی به انجام عملیات جبری کمتر برای ما و محاسبه بیشتر برای ماشین می‌انجامد.

مسائل

۱-۲-۵ الف) ثابت کنید که هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n \rightarrow A < \infty, \quad p > 1$$

آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگراست. (ب) ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = A > 0$$

آنگاه سری واگراست (این آزمون به‌ازای $A = 0$ جواب نمی‌دهد). این دو آزمون که به آزمونهای حدی معروف‌اند، اغلب برای اثبات همگرایی یا واگرایی سریها به‌کار می‌آیند. این آزمونها را می‌توان مانند آزمونهای مقایسه‌ای دانست که آنها را با سری

$$\sum n^{-q} \quad 1 \leq q < p$$

مقایسه می‌کنند.

۲-۲-۵ اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = K$$

مقداری ثابت باشد و $0 < K < \infty$ ، نشان دهید که همگرایی و واگرایی $\sum b_n$ با $\sum a_n$ شبیه است.

[راهنمایی: اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، از عبارت

$$b'_n = \frac{1}{2K} b_n$$

و اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، از عبارت

$$b''_n = \frac{2}{K} b_n$$

استفاده کنید.]

۳-۲-۵ نشان دهید که آزمون نسبت دالامبر به‌طور کامل از آزمون کومر، به‌ازای $a_i = 1$ ، به‌دست می‌آید.

۴-۲-۵ با نشان دادن این نکته که برای هر دو سری زیر $P = 1$ ، ابهام موجود در آزمون رایبه به‌ازای $P = 1$ را نشان دهید. (الف) $u_n = 1/n \ln n$ و این سری واگراست. (ب) $u_n = 1/n (\ln n)^2$ و این سری همگراست.

یادآوری: با جمع‌زدن مستقیم می‌رسیم به: $\sum_{n=2}^{\infty} [n(\ln n)^2]^{-1} = 2.02288$ با استفاده

از آزمون مقایسه‌ انتگرال، بی‌می‌بریم که باقیمانده سری به‌ازای $n > 10^5$ برابر است با 0.8686 .

یعنی مجموع از ۲ تا ∞ جمله برابر است با ۲٫۰۹۷۱۰۹۷۲۰۵-۲-۵
آزمون گاوس اغلب به صورت آزمون نسبت زیر است:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n + b_0}$$

به ازای چه مقادیری از پارامترهای a_1 و b_1 همگرایی، و به ازای چه مقادیری واگرایی داریم؟

جواب: به ازای $a_1 - b_1 > 1$ همگرایی؛ به ازای $a_1 - b_1 \leq 1$ واگرایی.

۶-۲-۵ همگرایی سریهای زیر را بیازمایید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)]^{-1/2} \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-1} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \quad (\text{ه})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} \quad (\text{ج})$$

۷-۲-۵ همگرایی سریهای زیر را بیازمایید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n^{1/n}} \quad (\text{ه})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \quad (\text{ج})$$

۸-۲-۵ سری زیر به ازای چه مقادیری از p و q همگراست؟

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$$

جواب: $\left. \begin{array}{l} p > 1 \\ q > 1 \end{array} \right\}$ همگرا به ازای همه q ها

$\left. \begin{array}{l} p < 1 \\ q \leq 1 \end{array} \right\}$ واگرا به ازای همه q ها

۹-۲-۵ گستره همگرایی سری فوق هندسی گاوس را تعیین کنید:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

[راهنمایی: گاوس آزمون گاوس را به منظور خاص اثبات همگرایی همین سری تدوین کرد.]

جواب: به ازای $1 < x < -1$ و همین طور به ازای $x = \pm 1$ به شرط آنکه $\alpha + \beta > \gamma$ همگراست.

۱۰-۲-۵ با یک محاسبه کامپیوتری ساده می‌رسیم به

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-2} = 1,202007$$

نشان دهید

$$1,202056 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \leq 1,202057$$

[راهنمایی: با استفاده از انتگرال، کران بالا و پایین $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ را تعیین کنید.]

یادآوری: مقدار دقیقتر مجموع یابی روی $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ برابر است با $1,202056903$.

۱۱-۲-۵ کرانهای بالا و پایین مجموع یابی $\sum_{n=1}^{1000000} n^{-1}$ را به دست آورید، با فرض آنکه ثابت اویلر-ماشرونی: (الف) معلوم باشد. (ب) نامعلوم باشد.

جواب: (الف) $14,392727 < \sum_{n=1}^{1000000} n^{-1} < 14,392726$.

۱۲-۲-۵ با فرض $\sum_{n=1}^{1000000} n^{-1} = 7,485470$ ، کرانهای بالا و پایین ثابت اویلر-ماشرونی را به دست آورید.

۱۳-۲-۵ (از پارادوکس اولبرز). جهان ساکنی را در نظر بگیرید که در آن توزیع ستارگان یکنواخت است. کل فضا را به پوسته‌هایی با کلفتی ثابت تقسیم کنید. ستارگانی که درون هر پوسته‌اند، زاویه فضایی برابر ω را اشغال می‌کنند. با این فرض که ستارگان نزدیکتر بتوانند ستارگان دورتر را از نظر مخفی کنند، نشان دهید که زاویه فضایی کل اشغال شده توسط همه ستارگان واقع در پوسته‌های تا بینهایت، دقیقاً برابر 4π است. (بنابراین، آسمان شب باید سراسر نورانی باشد.)

۱۴-۲-۵ همگرایی سری زیر را بیازمایید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \right]^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{64} + \frac{25}{256} + \dots$$

۱۵-۲-۵ سری لژاندر $\sum_{j=0}^{\infty} u_j(x)$ در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند

$$u_{j+2}(x) = \frac{(j+1)(j+2) - l(l+1)}{(j+2)(j+3)} x^2 u_j(x)$$

که در آن اندیس پایین j زوج و k مقداری ثابت (در این مسئله غیر عدد صحیح منفی) است. گستره مقادیری چون x را بیابید که این سری لژاندر به ازای آن همگراست. نقاط انتهایی را به دقت بیازمایید.

جواب: $-1 < x < 1$.

۱۶-۲-۵ نسبت جمله‌های متوالی در جواب سری معادله چیبیشف (بخش ۸-۵) به قرار زیر است

$$\frac{u_{j+2}(x)}{u_j(x)} = \frac{(k+j)^2 - n^2}{(k+j+1)(k+j+2)} x^2$$

که در آن $k = 0$ یا $k = 1$. همگرایی این سری را در $x = \pm 1$ بیازمایید.

جواب: همگرا.

۱۷-۲-۵ رابطه بازگشتی جواب سری تابع فراکروی (گی‌کن‌باؤر) $C_n^\alpha(x)$ به قرار زیر است

$$a_{j+2} = a_j \frac{(k+j)(k+j+2\alpha) - n(n+2\alpha)}{(k+j+1)(k+j+2)}$$

همگرایی هر یک از این سریها را در $x = \pm 1$ به صورت تابعی از پارامتر α بیازمایید.

جواب: به ازای $\alpha < 1/2$ همگرا؛ به ازای $\alpha \geq 1/2$ واگرا.

۱۸-۲-۵ بسط سری تابع بتای ناکامل (بخش ۱۰-۴) به قرار زیر است

$$B_x(p, q) = x^p \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1-q}{p+1} x + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)} x^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{(1-q)(2-q) \dots (n-q)}{n!(p+n)} x^n + \dots \right\}$$

همگرایی این سری را با فرض $0 \leq x \leq 1$ ، $0 < p$ و $q > 0$ بیازمایید. به ازای $x = 1$ چه

اتفاقی می‌افتد؟

۱۹-۲-۵ نشان دهید که سری زیر همگراست

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!(2s+1)}$$

یادآوری: $(2s-1)!! = (2s-1)(2s-3) \dots \times 3 \times 1$ و $(-1)!! = 1$

و $(2s)!! = (2s)(2s-2) \dots \times 4 \times 2$ و $0!! = 1$. این سری در بسط سری $\sin^{-1}(1)$ ظاهر

می‌شود و برابر $\pi/2$ است.

۲۰-۲۵ نشان دهید که چگونه می‌توان $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ را با α_1 و α_2 ترکیب کرد تا یک سری به دست آید که به صورت n^{-2} همگرا باشد؟

یادآوری: $\zeta(2)$ را در واقع می‌توان به صورت بسته به دست آورد: $\zeta(2) = \pi^2/6$ (بخش ۵-۹).
 ۲۱-۲۵ افزایش سرعت همگرایی مثال ۵-۲۵ را می‌شود (در این حالت خاص) با قرار دادن α_2 به یک صورت متقارنتر به گونه بسیار مؤثرتری انجام داد: به جای n قرار می‌دهیم $n-1$ و می‌رسیم به

$$\alpha'_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{4}$$

(الف) با ترکیب $\zeta(3)$ و α'_2 همگرایی‌ای به صورت n^{-5} به دست آورید. (ب) α'_2 را از α_2 با تغییر $n \rightarrow n-2$ به دست آورید. با ترکیب $\zeta(3)$ ، α'_2 و α'_4 همگرایی‌ای به صورت n^{-7} به دست آورید. (ج) اگر مقرر شود $\zeta(3)$ با دقت ۶ رقم اعشار (خطای $10^{-7} \times 5$) محاسبه شود، چند جمله به تنهایی برای $\zeta(3)$ لازم است؟ برای ترکیب بند (الف) چند جمله لازم است؟ برای ترکیب بند (ب) چند جمله لازم است؟

یادآوری: خطا را می‌توان با استفاده از انتگرال مربوط محاسبه کرد

جواب: (الف) $\zeta(3) = \frac{5}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)}$

۲۲-۲۵ ثابت کاتالان $\beta(2)$ در فصل ۳۳ کتاب AMS-۵۵ به قرار زیر تعریف می‌شود

$$\beta(2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots$$

$\beta(2)$ را تا ۶ رقم اعشار محاسبه کنید.

راهنمایی: آهنگ همگرایی از طریق زوج-زوج در نظر گرفتن جملات افزایش می‌یابد

$$\frac{1}{(4k-1)^2} - \frac{1}{(4k+1)^2} = \frac{16k}{(16k^2-1)^2}$$

اگر در مجموعیابی جملات $\sum_{k=1}^N 16k/(16k^2-1)^2$ به تعداد کافی رقمهای اعشاری دست یافته‌اید، ارقام با معنای دیگر را می‌توانید به کمک تعیین کرانهای بالا و پایین روی دنباله سری، $\sum_{k=N+1}^{\infty}$ به دست آورید. این کرانها را می‌شود همانند آزمون انتگرال مکورن، از طریق مقایسه با انتگرالها، به دست آورد.

جواب: $\beta(2) = 0.915965594177$

۳-۵ سریهای متناوب

در بخش ۲-۵ توجه خود را به جمله‌های مثبت معطوف کردیم. اینک، برعکس به سریهایی نامتناهی می‌پردازیم که در آنها علامتها یکی پس از دیگری تغییر می‌کنند. حذف جزئی جملات که از تناوب علامتها ناشی می‌شود، سرعت همگرایی را بیشتر و آن را قابل تشخیص‌تر می‌کند. محک لایب‌نیتس را که شرط عمومی همگرایی سریهای متناوب را می‌دهد اثبات خواهیم کرد.

محک لایب‌نیتس

سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ را با $a_n > 0$ در نظر بگیرید. اگر a_n (به‌ازای مقادیر به‌اندازه کافی بزرگ n) به‌طور هم‌نوا کاهش یابد و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، آنگاه سری همگراست. برای اثبات این حکم، مجموعهای جزئی زوج زیر را در نظر می‌گیریم

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n} \quad (51-5)$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2})$$

با توجه به $a_{2n+1} > a_{2n+2}$ داریم

$$s_{2n+2} > s_{2n} \quad (52-5)$$

از سوی دیگر

$$s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - a_{2n+1} \quad (53-5)$$

از این‌رو، با توجه به هر زوج از جملات: $a_{2p} - a_{2p+1} > 0$ داریم

$$s_{2n+1} < a_1 \quad (54-5)$$

با توجه به کراندار بودن مجموع جزئی زوج، $s_{2n} < s_{2n+2} < a_1$ ، و اینکه جمله‌های a_n به‌طور هم‌نوا کاهش می‌یابند و به صفر نزدیک می‌شوند، این سری متناوب همگراست. از مجموعهای جزئی می‌شود یک نتیجه مهم دیگر نیز به‌دست آورد. اختلاف بین حد سری (S) و مجموع جزئی s_n ، به‌قرار زیر است

$$S - s_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots \quad (55-5)$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots$$

$$S - s_n < a_{n+1} \quad (56-5)$$

بنابر معادله ۵۶-۵، خطایی که از قطع شدن سری متناوب پس از n جمله ایجاد می‌شود، از a_{n+1} ، یعنی اولین جمله کنار گذاشته شده، کوچکتر است. معرفتی که به این طریق از مقدار این خطا به دست می‌آید، اهمیت عملی به سزایی دارد.

همگرایی مطلق

یک سری از جملات u_n در نظر بگیرید، که ممکن است علامتشان با هم فرق داشته باشد؛ اگر $\sum |u_n|$ همگرا باشد، آنگاه می‌گویند $\sum u_n$ به طور مطلق همگراست. اگر $\sum u_n$ همگرا ولی $\sum |u_n|$ واگرا باشد، همگرایی را مشروط می‌نامند.

سری هماهنگ متناوب مثال ساده‌ای است از این همگرایی مشروط. داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \dots \quad (57-5)$$

که همگرایی آن به کمک محک لایب‌نیتس مشخص می‌شود. ولی در بخش‌های ۱-۵ و ۲-۵ مشاهده کرده‌ایم که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (58-5)$$

واگراست.

توجه داشته باشید که همهٔ آزمون‌هایی که در بخش ۲-۵ مطرح شده‌اند، در مورد سری‌هایی با جملات مثبت بودند. بنابراین، تمام آزمون‌های آن بخش، همگرایی مطلق را تضمین می‌کنند.

مسائل

۱-۳-۵ (الف) از مسئلهٔ دو نیم‌کرهٔ الکتروستاتیکی (مسئلهٔ ۱۲-۳-۲۰) سری زیر را به دست می‌آوریم

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) \frac{(2s-1)!!}{(2s+2)!!}$$

همگرایی این سری را بیازمایید. (ب) سری متناظر برای چگالی بار سطحی عبارت است از:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s + 3) \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}$$

همگرایی این سری را بیازمایید. نماد !! در بخش 1° توضیح داده شده است.
 ۲-۳-۵ با محاسبه عددی مستقیم نشان دهید که اختلاف بین مجموع 1° جمله اول سری

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}$$

و $\ln 2 = 0.6931471806$ از جمله یازدهم کوچکتر است.

۳-۳-۵ در مسئله ۹-۲-۵ نشان داده شد که سری فوق هندسی، مشروط بر آنکه $\gamma > \alpha + \beta$ به ازای $x = \pm 1$ همگراست. نشان دهید که به ازای $x = -1$ ، برای $\gamma > \alpha + \beta - 1$ تا همگرایی مشروط داریم.

[راهنمایی: رفتار مجانبی تابع فاکتوریل از طریق سری استرلینگ، در بخش $3-1^{\circ}$ داده می شود.]

۴-۵ جبر سریها

اثبات کردن همگرایی مطلق اهمیت دارد، زیرا می توان ثابت کرد که سریهای همگرای مطلق را می شود مطابق با قواعد آشنای متداول در جبر یا حساب بررسی کرد.

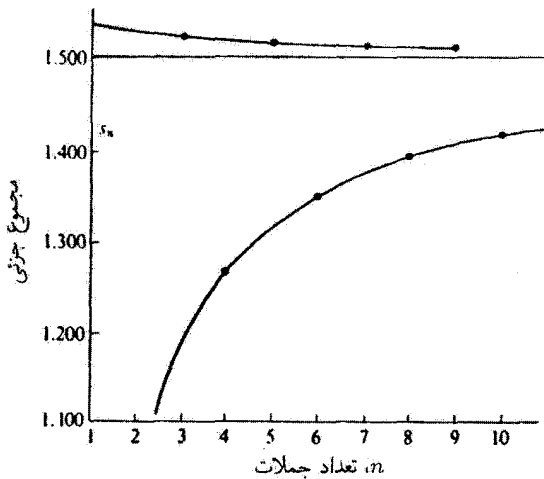
۱. اگر یک سری نامتناهی همگرای مطلق باشد، حاصل جمع سری به ترتیب جملات بستگی ندارد.
 ۲. سری همگرای مطلق را می توان در هر سری همگرای مطلق دیگری ضرب کرد. حد حاصلضرب با حاصلضرب حد هر یک از سریها برابر خواهد بود. سری حاصلضرب نیز، که یک سری دوگانه است، همگرای مطلق خواهد بود.

برای سری همگرای مشروط چنین ضابطه ای برقرار نیست. بار دیگر سری همساز متناوب را در نظر بگیرید. اگر این سری را به صورت زیر بنویسیم

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots \quad (59-5)$$

واضح است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} < 1 \quad (60-5)$$



شکل ۵-۳ سری همساز متناوب. بازآرایی جمله‌ها طوری صورت گرفته که سری به ۱٫۵ همگرا شود.

ولی با اندک تغییر در ترتیب جملات، می‌توانیم کاری کنیم که سری هماهنگ متناوب به $3/2$ همگرا شود. جملات معادله ۵-۵ را به صورت زیر گروه‌بندی می‌کنیم

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) \\ & + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{25}\right) - \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{35}\right) - \frac{1}{8} + \dots \end{aligned} \quad (۶۱-۵)$$

هر گروه از جملات داخل پرانتز را برای راحتی یک تک‌جمله می‌گیریم و مجموعهای جزئی زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} s_1 &= ۱٫۵۳۳۳ & s_2 &= ۱٫۰۳۳۳ \\ s_2 &= ۱٫۵۲۱۸ & s_4 &= ۱٫۲۷۱۸ \\ s_5 &= ۱٫۵۱۴۳ & s_6 &= ۱٫۳۴۷۶ \\ s_4 &= ۱٫۵۱۰۳ & s_8 &= ۱٫۳۸۵۳ \\ s_9 &= ۱٫۵۰۷۸ & s_{10} &= ۱٫۴۰۷۸ \end{aligned}$$

همگرایی $3/2$ را می‌توان از این جدول مجموعهای جزئی و از منحنی s_n برحسب n در شکل ۵-۳، به وضوح تشخیص داد. در بازآرایی جملات، جمله‌های مثبت را تا آنجا منظور کرده‌ایم که مجموع جزئی مساوی یا بزرگتر از $3/2$ شود، سپس آن تعداد از جملات منفی را منظور می‌کنیم که مجموع جزئی اندکی از $3/2$ کمتر شود، و الی آخر. وقتی سری را تا بینهایت جمله

در نظر بگیریم، همه جملات منظور شده‌اند، ولی مجموعهای جزئی سری همساز متناوب بازاریابی شده، $\frac{3}{2}$ می‌شود.

بازاریابی مناسب جمله‌ها در یک سری همگرای مشروط را می‌شود چنان تغییر داد که این سری به هر مقدار دلخواهی همگرا شود و یا حتی می‌شود طوری ترتیب را عوض کرد که سری واگرا باشد. این گزاره را گاهی قضیهٔ ریمان می‌نامند. روشن است که کار با سریهای همگرای مشروط باید با احتیاط صورت گیرد.

بهباسازی همگرایی، تقریبهای گویا

سری

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n / n \quad -1 < x \leq 1 \quad (الف ۱-۵)$$

با نزدیک شدن x به $1+$ با کندی زیادی همگرا می‌شود. برای آنکه آهنگ همگرایی به نحو چشمگیری بهتر شود، می‌توان دو طرف معادلهٔ ۱-۵ الف را در یک چندجمله‌ای ضرب و ضرایب چندجمله‌ای را طوری تنظیم کرد که اجزایی از سری که همگرایی آنها کندتر است، حذف شوند. ساده‌ترین چندجمله‌ای ممکن را در نظر می‌گیریم: $\ln(1+x)$ را در $1+a_1x$ ضرب می‌کنیم.

$$(1+a_1x)\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n / n + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n+1} / n$$

با ترکیب جمله به جمله دو سری طرف راست، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (1+a_1x)\ln(1+x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{a_1}{n-1} \right) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(1-a_1) - 1}{n(n-1)} x^n \end{aligned}$$

روشن است که اگر بگیریم $a_1 = 1$ ، در صورت کسر حذف و سری مرکب ما به صورت n^{-2} همگرا می‌شود.

با ادامه دادن این فرایند، پی می‌بریم که $(1+2x+x^2)\ln(1+x)$ به صورت n^{-3} و $(1+3x+3x^2+x^3)\ln(1+x)$ به صورت n^{-4} همگرا می‌شود. در واقع از بسط سری ساده در معادلهٔ ۱-۵ الف، به نمایشی به صورت یک کسر گویا رسیده‌ایم که در آن تابع $\ln(1+x)$

به کمک نسبت یک سری بر یک چندجمله‌ای نشان داده شده است:

$$\ln(1+x) = \frac{x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n / [n(n-1)]}{1+x}$$

این گونه تقریبهای گویا هم دقیق‌اند و هم جمع‌وجور. در زیر برنامه‌های کامپیوتری SSP از این تقریبها بسیار بهره می‌گیرند.

بازآرایی سریهای دوگانه
وقتی با سریهای دوگانه به صورت:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$$

سروکار داریم، به جنبه دیگری از بازآرایی سریها برمی‌خوریم (شکل ۴-۵). تعویضهای زیر را انجام می‌دهیم

$$n = q \geq 0$$

$$m = p - q \geq 0$$

$$(q \leq p)$$

	$m = 0$	1	2	3
$n = 0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

شکل ۴-۵ سری دوگانه-مجموع‌بایی روی n با خط‌چینهای قائم نشان داده شده است.

	$p = 0$	1	2	3
$q = 0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
1		a_{10}	a_{11}	a_{12}
2			a_{20}	a_{21}
3				a_{30}

شکل ۵-۵ سری دوگانه، باز هم مجموعیابی اول به کمک خطچینهای قائم نمایش داده شده است. ولی این خطچینهای قائم با خطهای قطری در شکل ۴-۵ متناظرند.

که در نتیجه به اتحاد زیر می‌رسیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a_{q,p-q} \quad (62-5)$$

مجموعیابی روی p و q در شکل ۵-۵ نمایش داده شده است. اینک تعویض زیر را انجام می‌دهیم:

$$n = s \geq 0$$

$$m = r - 2s \geq 0$$

$$\left(s \leq \frac{r}{2} \right)$$

به اتحاد زیر می‌انجامد

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} a_{s,r-2s} \quad (63-5)$$

که در آن، به‌ازای مقادیر زوج r داریم، $\lfloor r/2 \rfloor = r/2$ و به‌ازای مقادیر فرد، داریم: $\lfloor r/2 \rfloor = (r-1)/2$. مجموعیابی روی r و s در معادله ۶۳-۵ در شکل ۶-۵ نشان داده شده است. بدیهی است که معادلات ۶۲-۵ و ۶۳-۵ بازاریابی آرایه ضرایب a_{nm} هستند و مادام که همگرایی مطلق داریم، این بازاریابی صادق است.

	$r = 0$	1	2	3	4
$s = 0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}
1			\vdots	\vdots	\vdots
2			a_{10}	a_{11}	a_{12}
					\vdots
					a_{20}

شکل ۶-۵ سری دوگانه. مجموعیابی روی s با مجموعیابی در امتداد نقطه چینه‌ای تقریباً افقی در شکل ۴-۵، متناظر است.

در بخش ۱-۱۲ برای تعیین صورت سری چندجمله‌ایهای لژاندر، از ترکیب معادله‌های ۵-۶۲ و ۵-۶۳ به‌قرار زیر استفاده می‌کنیم

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{q,p-q} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} a_{s,r-2s} \quad (۵-۶۴)$$

مسائل

۵-۴-۱ سری زیر را در نظر بگیرید (این سری در بخش ۵-۶ مطرح می‌شود).

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

نشان دهید

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad -1 \leq x < 1 \quad (\text{الف})$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad -1 < x < 1 \quad (\text{ب})$$

در بررسی انرژی بستگی در بلورها به سری اصلی $\ln(1+x)$ برمی‌خوریم. این سری $1/2$ ثابت مادلونگ، $(2 \ln 2)$ ، برای زنجیری از اتم‌هاست. سری دوم (ب) در بهنجارش چندجمله‌ایهای لژاندر (بخش ۱۲-۳) و در روند استخراج جواب دوم معادله دیفرانسیل لژاندر (بخش ۱۲-۱۰) مفید واقع می‌شود.

۲-۴-۵ مقدار ضرایب a_1, a_2, a_3 را چنان تعیین کنید که $(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\ln(1-x)$ به n^{-2} همگرا شود. سری حاصل را به دست آورید.
۳-۴-۵ نشان دهید

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\zeta(n) - 1] = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n [\zeta(n) - 1] = \frac{1}{4} \quad (\text{ب})$$

که $\zeta(n)$ تابع زتای ریمان است.

۴-۴-۵ برنامه‌ای بنویسید که جمله‌های سری همساز متناوب را چنان بازآرایی کند که سری به $1/5$ همگرا شود. این جمله‌ها را به صورتی که در معادله ۶۱-۵ نشان داده شده است، گروه‌بندی کنید. 100 مجموع جزئی پی‌درپی اول را، که اندکی بیشتر یا اندکی کمتر از $1/5$ هستند، و جملاتی را که در هر یک از این مجموعهای جزئی آمده فهرست کنید.

جواب :

s_n	n
۱٫۵۳۳۳	۱
۱٫۰۳۳۳	۲
۱٫۵۲۱۸	۳
۱٫۲۷۱۸	۴
۱٫۵۱۴۳	۵

۵-۵ سری توابع

مفهوم سری نامتناهی را تعمیم می‌دهیم تا این امکان نیز فراهم آید که هر یک از جملات u_n تابعی از یک متغیر، $u_n = u_n(x)$ ، باشد. در فصلهای ۱۱ تا ۱۴ نمونه‌های متعددی از این‌گونه سریهای توابع ظاهر می‌شود. مجموعهای جزئی به تابعی از متغیر x تبدیل می‌شوند

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \quad (۶۵-۵)$$

به همین ترتیب، مجموع سری که بنابر تعریف عبارت است از حد مجموعهای جزئی، نیز تابعی از x خواهد بود

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad (۶۶-۵)$$

تاکنون توجه ما به رفتار مجموعه‌های جزئی به صورت تابعی از n معطوف بوده است. اینک به چگونگی وابستگی کمیتهای بالا به x می‌پردازیم. در اینجا نکته اصلی در همگرایی یکنواخت نهفته است.

همگرایی یکنواخت

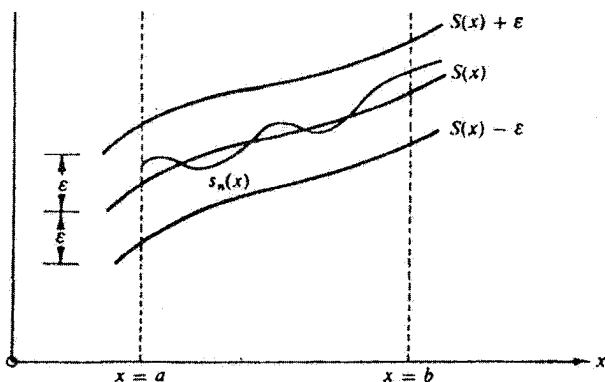
اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند N در بازه $[a, b]$ $(a \leq x \leq b)$ مستقل از x وجود داشته باشد، چنانکه

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad n \geq N \quad \text{به‌ازای همه} \quad (۶۷-۵)$$

آنگاه می‌گوییم که سری در بازه $[a, b]$ همگرایی یکنواخت است. بنابراین گزاره، برای آنکه سری ما همگرایی یکنواخت باشد، باید بتوانیم یک عدد متناهی N بیابیم که باقیمانده سری نامتناهی $|\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i(x)|$ به‌ازای همه x ‌های داخل بازه مورد نظر از یک ε کوچک دلخواه کوچکتر باشد. این شرط، یعنی معادله ۶۷-۵، که معرف همگرایی یکنواخت است در شکل ۷-۵ نمایش داده شده است. نکته در اینجاست که هر قدر ε را کوچک بگیریم همواره می‌توانیم n را چندان بزرگ بگیریم که قدرمطلق اختلاف بین $S(x)$ و $s_n(x)$ به‌ازای همه x ‌ها، $a \leq x \leq b$ ، کمتر از ε باشد. اگر این امکان وجود نداشته باشد، آنگاه $\sum u_n(x)$ در $[a, b]$ همگرایی یکنواخت نیست.

مثال ۷-۵-۱:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]} \quad (۶۸-۵)$$



شکل ۷-۵ همگرایی یکنواخت.

می‌توان به کمک استقرای ریاضی اثبات کرد که مجموع جزئی $s_n(x) = nx(nx+1)^{-1}$ برقرار است. به کمک بررسی مشاهده می‌شود که این عبارت $s_n(x)$ به ازای $n = 1, 2$ صادق است. فرض می‌کنیم که این عبارت برای n جمله برقرار است، در این صورت، ثابت می‌کنیم که برای $n+1$ جمله نیز صادق خواهد بود

$$\begin{aligned} s_{n+1}(x) &= s_n(x) + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]} \\ &= \frac{nx}{[nx+1]} + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]} \\ &= \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1} \end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

اگر n به بینهایت نزدیک شود، خواهیم داشت

$$S(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(0) = 0$$

$$S(x \neq 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x \neq 0) = 1$$

در $x = 0$ به یک ناپیوستگی در حد سری خود می‌رسیم. ولی $s_n(x)$ به ازای همه n های متناهی، در بازه $0 \leq x \leq 1$ تابع پیوسته‌ای از x است. معادله $5-67$ با مقدار به اندازه کافی کوچک ε ، به ازای همه n های متناهی، نقض می‌شود. سری مورد نظر همگرایی یکنواخت نیست.

آزمون M و ایراشتراؤس

آزمون M و ایراشتراؤس متداولترین آزمون برای همگرایی یکنواخت است. اگر بتوانیم یک سری از اعداد $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ تشکیل دهیم که به ازای همه x های درون بازه $[a, b]$ ، $M_i \geq |u_i(x)|$ و $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ همگرا باشد، سری $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ در $[a, b]$ همگرایی یکنواخت خواهد بود.

اثبات این آزمون M و ایراشتراؤس مستقیم و ساده است. با توجه به اینکه $\sum_i M_i$ همگراست،

عددی مانند N وجود دارد به طوری که به ازای $n+1 \geq N$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \varepsilon \quad (69-5)$$

این عبارت از تعریفی که برای همگرایی داریم ناشی می‌شود. در نتیجه، با توجه به اینکه به ازای

همه x های درون بازه $a \leq x \leq b$ داریم: $|u_i(x)| \leq M_i$ ، خواهیم داشت

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \varepsilon \quad (70-5)$$

در نتیجه

$$|S(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x) \right| < \varepsilon \quad (71-5)$$

و بنا بر تعریف، $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ در بازه $[a, b]$ همگرایی یکنواخت است. با توجه به آنکه در گزاره آزمون M و ایراشتراوس، مقادیر مطلق را مشخص کرده‌ایم، مشاهده می‌شود که سری $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ همگرایی مطلق است.

خواننده باید به دقت توجه کند که همگرایی یکنواخت و همگرایی مطلق دو خاصیت مستقل از یکدیگرند. وجود هیچیک بر وجود دیگری دلالت نمی‌کند. به‌عنوان مثال‌های خاص، سریهای

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \quad -\infty < x < \infty \quad (72-5)$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (73-5)$$

در بازه‌های نشان داده شده، همگرایی یکنواخت‌اند، ولی همگرایی مطلق نیستند. از سوی دیگر، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = 1 \quad 0 \leq x < 1$$

$$= 0 \quad x = 1 \quad (74-5)$$

در بازه $[0, 1]$ همگرایی مطلق است، ولی همگرایی یکنواخت نیست. با استفاده از تعریف همگرایی یکنواخت، می‌توانیم نشان دهیم که هر سری

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (75-5)$$

در هر بازه‌ای که شامل یک ناپوستگی $f(x)$ باشد، نمی‌تواند همگرایی یکنواخت باشد.

با توجه به اینکه آزمون M وایرشرائوس هم همگرایی مطلق و هم همگرایی یکنواخت را اثبات می‌کند، لزوماً باید برای سریهایی که همگرایی یکنواخت ولی مشروط‌اند صادق نباشد.

آزمون آبل

آبل آزمون ظریفتری برای همگرایی یکنواخت ارائه می‌کند. اگر

$$u_n(x) = a_n f_n(x)$$

$$\sum a_n = A \quad \text{همگرا}$$

و توابع $f_n(x)$ به‌ازای همه x های درون $[a, b]$ ، یکنوا $[f_{n+1}(x) \leq f_n(x)]$ و کراندار $(0 \leq f_n(x) \leq M)$ باشند، آنگاه $\sum u_n(x)$ در $[a, b]$ همگرایی یکنواخت است.

این آزمون خصوصاً در بررسی سریهای توانی مفید است (با بخش ۷-۵ مقایسه کنید). اثبات مشروح آزمون آبل و سایر آزمونهای همگرایی یکنواخت را در مراجعی خواهید یافت که فهرست آنها در آخر این فصل برشمرده شده‌اند.

سریهای همگرایی یکنواخت سه خاصیت دارند که از اهمیت خاصی برخوردارند.

۱. اگر تک تک جملات $u_n(x)$ پیوسته باشند، جمع سری

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (76-5)$$

نیز پیوسته است

۲. اگر تک تک جملات $u_n(x)$ پیوسته باشند، می‌توان از جمله به جمله این سری انتگرال گرفت. مجموع انتگرالها برابر است با انتگرال مجموع

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \quad (77-5)$$

۳. مشتق مجموع جملات سری $f(x)$ برابر است با مجموع مشتقهای تک تک جملات

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x) \quad (78-5)$$

مشروط بر آنکه شرایط زیر صادق باشند:

$u_n(x)$ و $\frac{du_n(x)}{dx}$ در $[a, b]$ پیوسته باشند.

در $[a, b]$ همگرایی یکنواخت باشند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$$

برای انجام انتگرال‌گیری جمله به جمله از یک سری همگرایی یکنواخت^۱، فقط به پیوستگی تک تک جملات سری نیاز است. این شرط تقریباً همواره در کاربردهای فیزیکی صدق می‌کند. مشتق‌گیری جمله به جمله از یک سری غالباً صادق نیست، زیرا برای آن شرایط محدودکننده‌تری باید برقرار باشد. در واقع، در فصل ۱۴، سری فوریه، با مواردی روبه‌رو خواهیم شد که مشتق‌گیری جمله به جمله از یک سری همگرایی یکنواخت به یک سری واگرا می‌انجامد.

مسائل

۱-۵-۵ گستره همگرایی یکنواخت سریهای زیر را بیابید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (\text{ب})$$

جواب: (الف) $1 \leq x < \infty$ ؛

(ب) $1 < s \leq x < \infty$

۲-۵-۵ سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ در چه گستره‌ای از x همگرایی یکنواخت است؟

جواب: $-1 < -s \leq x \leq s < 1$.

۳-۵-۵ سری $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1+x^n)$ در چه گستره‌ای از مقادیر مثبت x : (الف) همگراست؟

(ب) همگرایی یکنواخت است؟

۴-۵-۵ اگر سریهای ضرایب $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرایی یکنواخت باشند، نشان دهید که سری فوریه

$$\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

بهازای $-\infty < x < \infty$ همگرایی یکنواخت است.

۱. انتگرال‌گیری جمله به جمله ممکن است در غیاب همگرایی یکنواخت نیز صادق باشد.

۵-۶ بسط تیلور

در این بسط، تابع را به صورت یک سری نامتناهی یا یک سری متناهی به اضافه یک جمله باقیمانده بسط می‌دهیم. ضرایب جمله‌های متوالی سری، حاوی مشتق‌های متوالی این تابع‌اند. قبلاً در جریان طرح تعبیری فیزیکی برای دیورژانس (بخش ۱-۷) و در سایر بخشهای فصلهای ۱ و ۲ از بسط تیلور استفاده کرده‌ایم. اینک به استخراج بسط تیلور می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم تابع مورد نظر ما، $f(x)$ ، در بازه $a \leq x \leq b$ دارای مشتق مرتبه n پیوسته باشد.^۱ در این صورت، با n بار انتگرال‌گیری از این مشتق مرتبه n ام، داریم

$$\int_a^x f^{(n)}(x) dx = f^{(n-1)}(x) \Big|_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)$$

$$\int_a^x \left(\int_a^x f^{(n)}(x) dx \right) dx = \int_a^x [f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)] dx \quad (79-5)$$

$$= f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a)f^{(n-1)}(a)$$

با ادامه این روند، می‌رسیم به

$$\iiint_a^x f^{(n)}(x) (dx)^r = f^{(n-r)}(x) - f^{(n-r)}(a) - (x-a)f^{(n-r)}(a) - \frac{(x-a)^r}{r} f^{(n-1)}(a) \quad (80-5)$$

سرانجام، پس از n بار انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

$$\int_a^x \dots \int_a^x f^{(n)}(x) (dx)^n = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$(81-5)$$

دقت کنید که این عبارت دقیق است. از هیچ جمله‌ای صرف‌نظر نشده و هیچ تقریبی به کار نرفته است. اینک معادله را بر حسب $f(x)$ حل می‌کنیم

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \quad (82-5)$$

۱. بسط تیلور را تحت شرایطی که اندکی کمتر محدودکننده باشد، نیز می‌توان به دست آورد. با بخش ۱-۱۳۳ کتاب "Methods of Mathematical Physics" تألیف Jeffreys و مقایسه کنید.

باقیمانده، یعنی R_n ، از انتگرال n گانه زیر به دست می آید

$$R_n = \int_a^x \dots \int_a^x f^{(n)}(x)(dx)^n \quad (۸۳-۵)$$

با استفاده از قضیه های مقدار میانگین در حساب انتگرال، به ازای $a \leq \xi \leq x$

$$\int_a^x g(x)dx = (x-a)g(\xi) \quad (۸۴-۵)$$

معادله ۸۳-۵ برای باقیمانده را می شود به صورت قابل درکتری نوشت. با n بار انتگرال گیری، صورت لاگرانژی^۱ باقیمانده را به قرار زیر به دست می آوریم:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (۸۵-۵)$$

با بسط تیلور به این صورت، دیگر نگران مسئله همگرایی سری نامتناهی نیستیم. این سری متناهی است، و تنها مسئله همان بزرگی باقیمانده است. اگر تابع $f(x)$ چنان باشد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \quad (۸۶-۵)$$

در این صورت، معادله ۸۲-۵ به سری تیلور تبدیل می شود

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \quad (۸۷-۵)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

سری تیلور ما مقدار تابع را در یک نقطه، x ، برحسب مقدار تابع و مشتقات آن در نقطه مرجعی چون a ، مشخص می کند. این بسط برحسب توانهای تغییر در متغیر، در این حالت

۱. کوشی برای باقیمانده صورت زیر را استخراج کرده است

$$R_n = \frac{(x-\zeta)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!} f^{(n)}(\zeta)$$

که در آن $a \leq \zeta \leq x$ است.

۲. توجه داشته باشید که $0! = 1$ (با بخش ۱-۱۰ مقایسه کنید).

$\Delta x = x - a$ ، صورت می‌گیرد. نمادگذاری را می‌شود به تناسب کار استفاده‌کننده تغییر داد. با جانشانی $x \rightarrow x + h$ و $a \rightarrow x$ ، به صورت دیگری می‌رسیم

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

با بهره‌گیری از عملگر $D = d/dx$ ، بسط تیلور به صورت زیر در می‌آید

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} f(x) = e^{hD} f(x)$$

(این انتقال به صورت نمایی، معادله ۵-۹۰ را که بعداً به آن می‌رسیم، پیش‌بینی می‌کند.) در مسئله ۴-۱۱-۱ صورت عملگری دیگری برای بسط تیلور ظاهر می‌شود که هم‌ارز صورت بالاست. در بخش ۵-۶، بسط تیلور در قالب نظریهٔ متغیر مختلط استنتاج می‌شود.

قضیهٔ مکلورن

اگر تابع را حول مبدأ ($a = 0$) بسط دهیم، معادله ۵-۸۷ به شکلی، مشهور به سری مکلورن، در می‌آید

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \end{aligned} \quad (88-5)$$

یکی از کاربردهای بی‌واسطهٔ سری مکلورن (یا سری تیلور) در بسط توابع غیرجبری گوناگون در سریهای توانی است.

مثال ۵-۶-۱: می‌گیریم $f(x) = e^x$ ، با مشتق‌گیری به‌ازای همهٔ n ها، $n = 1, 2, 3, \dots$ داریم

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad (89-5)$$

در نتیجه، با استفاده از معادله ۵-۸۸، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned} \quad (90-5)$$

این بسط تابع نمایی به صورت سری است. برخی از مؤلفان از این سری برای تعریف تابع نمایی استفاده می‌کنند.

با آنکه این سری به وضوح به ازای همه مقادیر x همگراست، باید جمله باقیمانده، R_n ، را بررسی کنیم. از معادله ۸۵-۵ داریم

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \\ &= \frac{x^n}{n!} e^\xi \quad 0 \leq \xi \leq x \end{aligned} \quad (91-5)$$

بنابراین

$$R_n \leq \frac{x^n e^x}{n!} \quad (92-5)$$

و به ازای همه مقادیر متناهی x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \quad (93-5)$$

این عبارت حاکی از آن است که بسط مکلورن e^x در گستره $-\infty < x < \infty$ صادق است.

مثال ۲-۶-۵ می‌گیریم $f(x) = \ln(1+x)$. از طریق مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)^{-1} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} \end{aligned} \quad (94-5)$$

بسط مکلورن (معادله ۸۸-۵) می‌دهد

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + R_n \\ &= \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \frac{(x)^p}{p} + R_n \end{aligned} \quad (95-5)$$

در این حالت، باقیمانده از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad 0 \leq \xi \leq x \\ &\leq \frac{x^n}{n} \quad 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (96-5)$$

اکنون باقیمانده از طریق افزایش نامحدود m ، به شرط $1 > x \geq 0$ ، به صفر نزدیک می‌شود. به عنوان یک سری نامتناهی داریم

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (97-5)$$

که به ازای $1 > x \geq -1$ همگراست. همگرایی در گستره $-1 < x < 1$ را می‌شود به کمک آزمون نسبت دالامبر (بخش ۲-۵) به آسانی اثبات کرد. درستی همگرایی در $x = 1$ به کمک محک لایب‌نیتس (بخش ۳-۵) متحقق می‌شود. به خصوص، در $x = 1$ داریم

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} \end{aligned} \quad (98-5)$$

که همان سری همگرای مشروط همساز متناوب است.

قضیهٔ دوجمله‌ای

یکی از کاربردهای بسیار مهم دیگر بسطهای تیلور و مک‌لورن در استنتاج قضیهٔ دوجمله‌ای برای توانهای منفی و یا توانهای غیر عدد صحیح است.

می‌گیریم $f(x) = (1+x)^m$ ، که در آن m محدود به مقادیر صحیح نیست و می‌تواند منفی باشد. با بهره‌گیری مستقیم از معادلهٔ ۸۸-۵، خواهیم داشت

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + R_n \quad (99-5)$$

باقیمانده برای این تابع عبارت است از

$$R_n = \frac{x^n}{n!} (1+\xi)^{m-n} \times m(m-1)\dots(m-n+1) \quad (100-5)$$

و ξ بین صفر و x است $0 \leq \xi \leq x$ ، اینک، برای $m > m$ ، $(1+\xi)^{m-n}$ به ازای $\xi = 0$ بیشینه است. بنابراین

$$R_n \leq \frac{x^n}{n!} \times m(m-1)\dots(m-n+1) \quad (101-5)$$

۱. این گستره را می‌توان به آسانی به $1 > x \geq -1$ ، بدون نقطهٔ $x = -1$ ، بسط داد.

به این نکته توجه داشته باشید که عاملهایی که به m بستگی دارند، صفر نمی‌شوند مگر آنکه m یک عدد صحیح غیرمنفی باشد؛ اگر x به گستره $0 \leq x < 1$ محدود باشد، R_n به ازای $n \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند.

بنابراین، نشان داده شد که بسط دوجمله‌ای به‌قرار زیر است

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (102-5)$$

با نمادگذاری هم‌ارز دیگری می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n \end{aligned} \quad (103-5)$$

کمیت $\binom{m}{n}$ ، که برابر است با $m!/n!(m-n)!$ ضریب دوجمله‌ای نامیده می‌شود. ما فقط نشان دادیم که باقیمانده به‌ازای $0 \leq x < 1$ صفر می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

ولی عملاً می‌شود نشان داد که سری معادله ۱۰۲-۵ برای گستره بسط‌یافته $-1 < x < 1$ همگراست. به‌ازای مقادیر صحیح m ، اگر $n > m$ ، آنگاه $(m-n)! = \pm\infty$ (بخش ۱-۱۰)، و سری خودبه‌خود در $n = m$ ختم می‌شود.

مثال ۳-۶-۵ انرژی نسبیتی: کل یک ذره عبارت است از

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (104-5)$$

این معادله را با انرژی جنبشی کلاسیکی $1/2mv^2$ مقایسه کنید.

بنابر معادله ۱۰۲-۵ به‌مازای $x = -v^2/c^2$ و $m = -1/2$ داریم

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right)}{2!} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2 + \frac{\left(-1/2 \right) \left(-3/2 \right) \left(-5/2 \right)}{3!} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^3 + \dots \right]$$

یا

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{16}mv^2 \cdot \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2 + \dots \quad (105-5)$$

جمله اول، یعنی mc^2 ، را انرژی جرم سکون می‌نامند. بنابراین

$$E_{\text{جنبشی}} = \frac{1}{2}mv^2 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{8} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2 + \dots \right] \quad (106-5)$$

اگر v ، سرعت ذره، از c ، سرعت نور، خیلی کوچکتر باشد، $v \ll c$ ، عبارت داخل کروشه یک می‌شود و می‌بینیم که جزء جنبشی انرژی نسبیتی کل با نتیجه کلاسیکی سازگار است. بسط دوجمله‌ای را می‌توانیم برای چندجمله‌ایها به‌صورت زیر تعمیم دهیم

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$$

که مجموع‌یابی همه ترکیبهای مختلف n_1, n_2, \dots, n_m را چنان در برمی‌گیرد که $\sum_{i=1}^m n_i = n$ در اینجا n_i و n جمله‌گی اعداد صحیح‌اند. از این تعمیم در مکانیک آماری استفاده زیادی می‌شود. گاهی، ظهور سری مکلورن ممکن است ناشی از کاربرد مستقیم معادله ۸۸-۵ نباشد، بلکه به‌طور غیرمستقیم به‌دست آید. مثلاً، مناسبترین راه برای به‌دست آوردن بسط سری

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots \quad (\text{الف } 106-5)$$

آن است که از رابطه زیر استفاده شود

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}$$

$(1-t^2)^{-1/2}$ را با استفاده از قضیه دو جمله‌ای بسط می‌دهیم و سپس از جمله به جمله این بسط انتگرال می‌گیریم. در خصوص این انتگرال‌گیری جمله به جمله، در بخش ۷-۵ بحث کردیم. نتیجه آن معادله ۱۰۶-۵ الف است. سرانجام می‌توانیم حد $x \rightarrow 1$ را به دست آوریم. آزمون گاوس نشان می‌دهد که سری همگراست (مسئله ۵-۲-۵).

بسط تیلور-بیش از یک متغیر

اگر تابع f بیش از یک متغیر مستقل داشته باشد، مثلاً $f = f(x, y)$ ، بسط تیلور به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y} \\ & + \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\ & + \frac{1}{3!} \left[(x-a)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3(x-a)^2(y-b) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ & \left. + 3(x-a)(y-b)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + (y-b)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right] + \dots \end{aligned} \quad (107-5)$$

که همه مشتقها در نقطه (a, b) محاسبه می‌شوند. با استفاده از $\alpha_j t = x_j - x_j^0$ می‌توانیم بسط تیلور را برای m متغیر مستقل به صورت نمادی زیر بنویسیم

$$f(x_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n f(x_k) \Big|_{x_k=x_k^0} \quad (108-5)$$

یکی از صورتهای مناسب برداری این بسط به قرار زیر است

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n \psi(\mathbf{r}) \quad (109-5)$$

مسائل

۱-۶-۵ نشان دهید:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad (\text{الف})$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{ب})$$

e^{ix} در بخش ۱-۶ به کمک یک بسط سری تعریف می‌شود، به گونه‌ای که

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

این اتحاد اساس نمایش قطبی کمیت‌های مختلط است. به عنوان یک مثال خاص، به ازای $x = \pi$ ، پیدا می‌کنیم

$$e^{i\pi} = -1$$

۲-۶-۵ بسط $\cot x$ را با تقسیم $\cos x$ بر $\sin x$ به صورت یک سری از توانهای صعودی x بسط دهید.

یادآوری: سری حاصل که از $1/x$ شروع می‌شود، در واقع یک سری لوران است (بخش ۵-۶). با آنکه دو سری مربوط به $\sin x$ و $\cos x$ به ازای همه x ها برقرارند، ولی همگرایی سری مربوط به $\cot x$ را صفرهای $\sin x$ در مخرج محدود می‌کنند.

۳-۶-۵ (الف) $(1+x)\ln(1+x)$ را به صورت یک سری مک‌لورن بسط دهید. با بررسی همگرایی، حدود x را بیابید.

(ب) با استفاده از نتایج بند (الف) نشان دهید

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

جواب :

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)} \quad (\text{الف}) \quad -1 < x \leq 1$$

۴-۶-۵. آزمون رابه برای $\sum (n \ln n)^{-1}$ به مقدار زیر می انجامد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} - 1 \right]$$

نشان دهید که این مقدار حدی یک است (و این نکته به آن معناست که آزمون رابه در این مورد با ابهام روبه روست).

۵-۶-۵. به کمک بسط سری نشان دهید

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} = \coth^{-1} \eta_0 \quad |\eta_0| > 1$$

از این اتحاد می توان برای دستیابی به جواب دوم معادله لژاندر بهره گرفت.

۶-۶-۵. نشان دهید که $f(x) = x^{1/2}$ (الف) بسط مکلورن ندارد، ولی (ب) حول هر نقطه $x_0 \neq 0$ یک بسط تیلور دارد. گستره همگرایی بسط تیلور را حول $x = x_0$ بیابید.

۷-۶-۵. فرض کنید x به تقریب مکان یک صفر $f(x)$ ، و Δx تصحیح مربوط به آن باشد. نشان دهید که با چشمپوشی از جملاتی از مرتبه $(\Delta x)^2$ می رسمیم به

$$\Delta x = - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

این عبارت، فرمول نیوتون برای یافتن ریشه است. روش نیوتون از مزیت نمایش بسط سری و حساب انتگرال و دیفرانسیل مقدماتی برخوردار، ولی بسیار غیر قابل اعتماد و گول زننده است. برای دستیابی به مشروح جزئیات و روشهایی که می شود به جای این روش به کار برد، به پیوست الف-۱ مراجعه کنید.

۸-۶-۵. تابع $\Phi(x, y, z)$ را به صورت یک سری تیلور بسط دهید. Φ ، یعنی مقدار متوسط Φ ، را روی مکعب کوچکی به یال α و به مرکز مبدأ مختصات، محاسبه کنید و نشان دهید لاپلاسی Φ معیاری است برای انحراف Φ از $\Phi(0, 0, 0)$.

۹-۶-۵. نسبت دو تابع مشتق پذیر $f(x)$ و $g(x)$ در $x = x_0$ به صورت مبهم $0/0$ در می آید. با استفاده از بسط تیلور، قاعده هوییتال را به صورت زیر اثبات کنید

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۱۰-۶-۵. به ازای $n > 1$ نشان دهید

$$\frac{1}{n} - \ln \left(\frac{n}{n-1} \right) < 0 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0 \quad (\text{ب})$$

با استفاده از این نامساویها نشان دهید که حد معرف ثابت اولر-ماشرونی، متناهی است. ۱۱-۶-۵ عبارت $(1 - 2tz + t^2)^{-1/2}$ را برحسب توانهای t بسط دهید. t را کوچک بگیرید. ضرایب t^0 ، t^1 و t^2 را جمع بزنید.

جواب :

$$a_0 = P_0(z) = 1$$

$$a_1 = P_1(z) = z$$

$$a_2 = P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$

که $a_n = P_n(z)$ چندجمله‌ای n ام لژاندر است. ۱۲-۶-۵ با استفاده از نماد فاکتوریل دوگانه در بخش ۱۰-۱، نشان دهید که به‌ازای $m = 1, 2, 3, \dots$ داریم:

$$(1+x)^{-m/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m+2n-2)!!}{2^n n! (m-2)!!} x^n$$

۱۳-۶-۵ سه فرمول انتقال دوپلر به‌صورت زیر را با استفاده از بسط دوجمله‌ای، با یکدیگر مقایسه کنید.

$$v' = v \left(1 \mp \frac{v}{c}\right)^{-1} \quad \text{چشمه متحرک} \quad (\text{الف})$$

$$v' = v \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad \text{ناظر متحرک} \quad (\text{ب})$$

$$v' = v \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \text{نسبیتی} \quad (\text{ج})$$

یادآوری: اگر بتوان از جمله‌های از مرتبه v^2/c^2 چشم پوشید، فرمول نسبیتی با فرمولهای کلاسیکی سازگار می‌شود.

۱۴-۶-۵ در نظریه نسبیت عام، روشهای متفاوتی را برای برقراری ارتباط (یا توصیف) سرعت

پس روی یک کلهکشان به انتقال سرخ آن، δ ، به کار می گیرند. بنا بر مدل میلنه (در نسبیت سینماتیکی):

$$v_1 = c\delta \left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) \quad (\text{الف})$$

$$v_2 = c\delta \left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) (1 + \delta)^{-2} \quad (\text{ب})$$

$$1 + \delta = \left[\frac{1 + v_2/c}{1 - v_2/c}\right]^{1/2} \quad (\text{ج})$$

۱. نشان دهید که به ازای $1 \ll \delta$ (و $v_2/c \ll 1$) این هر سه فرمول به $v = c\delta$ ساده می شوند.

۲. این سه سرعت را تا جمله هایی از مرتبه δ^2 با هم مقایسه کنید.

یادآوری: نسبت طول موج مشاهده شده λ به طول موج گسیل شده λ_0 ، در نظریه نسبیت خاص (با نشاندن z به جای δ) به قرار زیر است:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + z = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{1/2}$$

۵-۶-۱۵ مجموع نسبیتی دو سرعت u و v از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{w}{c} = \frac{u/c + v/c}{1 + uv/c^2}$$

اگر

$$\frac{v}{c} = \frac{u}{c} = 1 - \alpha$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ ؛ w/c را بر حسب توانهای α تا جمله هایی از مرتبه α^3 به دست آورید.
۵-۶-۱۶ x جابه جایی ذره ای با جرم سکون m_0 ، در اثر نیروی ثابت $m_0 g$ در امتداد محور x با در نظر گرفتن آثار نسبیتی، عبارت است از

$$x = \frac{c^2}{g} \left\{ \left[1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}$$

جابه‌جایی x را به صورت یک سری توانی بر حسب زمان t به دست آورید. نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید، با نتیجه کلاسیکی زیر مقایسه کنید

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

۵-۶-۱۷ فرمول ساختار زیر در اسپکتروسکوپی اتمی با استفاده از نظریه نسبیتی دیراک به قرار زیر است

$$E = mc^2 \left[1 + \frac{\gamma^2}{(s + n - |k|)^2} \right]^{-1/2}$$

که در آن

$$s = (|k|^2 - \gamma^2)^{1/2} \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

بر حسب توانهای γ^2 ، این عبارت را تا مرتبه γ^4 بسط دهید. Z و $\gamma^2 = Ze^2/\hbar c$ عدد اتمی است. این بسط در هنگام مقایسه پیش‌بینیهای نظریه الکترونی دیراک با پیش‌بینیهای نظریه الکترونی نسبیتی شروودینگر مفید واقع می‌شود. نتایج تجربی، نظریه دیراک را تأیید می‌کنند.

۵-۶-۱۸ در یک برخورد سر به سر پروتون-پروتون، نسبت انرژی جنبشی در دستگاه مرکز جرم به انرژی جنبشی فرودی عبارت است از

$$R = \frac{\sqrt{2mc^2(E_k + 2mc^2)} - 2mc^2}{E_k}$$

مقدار نسبت مقادیر انرژی جنبشی را در هر یک از موارد زیر به دست آورید.

$$E_k \ll mc^2 \quad (\text{غیرنسبیتی}) \quad (\text{الف})$$

$$E_k \gg mc^2 \quad (\text{نسبیتی فرین}) \quad (\text{ب})$$

جواب: (الف) $1/2$ ، (ب) 0 . جواب بند دوم نوعی قانون بازگشت ناچیز برای شتابدهنده‌های ذرات پر انرژی (با هدف ساکن) است.

۵-۶-۱۹ با استفاده از بسطهای دوجمله‌ای

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n}$$

از جمع کردن این دوسری می‌رسیم به: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n = 0$. مطمئناً، شما هم با ما موافقید که این یک نتیجه بی‌معنی است، ولی کجای بحث ما اشتباه بوده که چنین اشکالی بروز کرده است؟ ۴۰-۶-۵ (الف) نظریه پلانک درباره نوسانگرهای کوانتیده برای انرژی متوسط، به مقدار زیر می‌انجامد

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon_0 \exp(-n\varepsilon_0/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_0/kT)}$$

که ε_0 یک انرژی ثابت است. صورت و مخرج کسر، هر یک بسط دوجمله‌ای تابعی هستند. آن توابع را مشخص کنید و نشان دهید که نسبت آنها عبارت است از

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0/kT) - 1}$$

(ب) نشان دهید که $\langle \varepsilon \rangle$ در بند (الف) به‌ازای $kT \gg \varepsilon_0$ به مقدار کلاسیکی یعنی kT ساده می‌شود. ۴۱-۶-۵ (الف) $\tan^{-1} x$ را به کمک قضیه دوجمله‌ای بسط دهید و از آن، جمله به جمله انتگرال بگیرید. سری گریگوری زیر را برای این تابع به‌دست آورید

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \{1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots\} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

(ب) با مقایسه سریهای مربوط نشان دهید

$$\tan^{-1} x = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{1-ix}{1+ix} \right)$$

[راهنمایی: با مسئله ۱-۴-۵ مقایسه کنید.]

۴۲-۶-۵ در تحلیل عددی، معمولاً بهتر است که از تقریب زیر برای $d^2\psi(x)/dx^2$ استفاده کنیم

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \approx \frac{1}{h^2} [\psi(x+h) - 2\psi(x) + \psi(x-h)]$$

خطای موجود در این تقریب را بیابید.

جواب: $\frac{h^2}{12} \psi^{(4)}(x)$ خطا.

۲۳-۶-۵ جدولی از مقادیر تابع $y(x)$ به ازای مقادیر هم فاصله شناسه‌اش در دست است.

$$\begin{cases} y_n = y(x_n) \\ x_n = x + nh \end{cases}$$

نشان دهید که ترکیب خطی:

$$\frac{1}{12h} \{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}\}$$

عبارت است از

$$y'_0 - \frac{h^2}{6} y^{(3)} + \dots$$

به این ترتیب اگر $(h^2/6)y^{(3)}$ و توانهای بزرگتر h و مشتقات مرتبه بالاتر $y(x)$ چشم‌پوشیدنی باشند، این ترکیب خطی برابر y'_0 می‌شود.

۲۴-۶-۵ در انتگرال‌گیری عددی از یک معادله دیفرانسیل جزئی، به جای عملگر سه‌بعدی لاپلاسی عبارت زیر را قرار می‌دهند

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(x, y, z) \rightarrow h^{-2} [& \psi(x+h, y, z) + \psi(x-h, y, z) \\ & + \psi(x, y+h, z) + \psi(x, y-h, z) + \psi(x, y, z+h) \\ & + \psi(x, y, z-h) - 6\psi(x, y, z)] \end{aligned}$$

خطای این تقریب را تعیین کنید. h فاصله بین نقطه‌های مجاور در هر یک از جهتهای x, y, z است.

۲۵-۶-۵ e را با استفاده از سری مکلوین آن و با اعمال دقت مضاعف محاسبه کنید.

یادآوری: این رهیافت ساده و مستقیم بهترین روش محاسبه e با دقت زیاد است. با ۱۶ جمله e تا ۱۶ رقم بامعنا محاسبه می‌شود. فاکتوریل‌های با توان منفی به همگرایی بسیار سریعی می‌انجامند.

۷-۵ سری توانی

سری توانی، به صورت زیر، یکی از سریهای نامتناهی بسیار مهم است

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (110-5)$$

ضرایب a_i ثابتهایی مستقل از x اند.^۱

همگرایی

همگرایی معادله ۱۱۰-۵ را می‌شود به کمک یکی از آزمونهای ریشه کوشی یا نسبت دالامبری (بخش ۲-۵) به آسانی آزمود. اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R^{-1} \quad (111-5)$$

این سری به ازای $-R < x < R$ همگراست، این کمیت، بازه یا شعاع همگرایی است. با توجه به آنکه هرگاه حد برابر یک باشد، از آزمونهای نسبت و ریشه دیگر نمی‌توان بهره گرفت، نقاط انتهایی بازه به توجه خاصی نیاز دارند.

مثلاً، اگر $a_n = n^{-1}$ ، آنگاه $R = 1$ و با استفاده از بخشهای ۱-۵، ۲-۵ و ۳-۵ می‌بینیم که سری به ازای $x = -1$ همگرا و به ازای $x = +1$ واگراست. اگر $a_n = n!$ ، در نتیجه $R = 0$ و سری به ازای همه $x \neq 0$ واگراست.

همگرایی یکنواخت و مطلق

فرض کنید سری توانی ما (معادله ۱۱۰-۵) به ازای $-R < x < R$ همگرا باشد، در نتیجه این سری در هر بازه درونی $-S \leq x \leq S$ که در آن $0 < S < R$ ، به طور مطلق و یکنواخت همگرا خواهد بود.

این حکم را می‌شود مستقیماً به کمک آزمون M و ایراشتراؤس (بخش ۵-۵) با استفاده از $M_i = |a_i| S^i$ ، اثبات کرد.

پیوستگی

با توجه به اینکه هر یک از جملات $u_n(x) = a_n x^n$ تابع پیوسته‌ای از x و $f(x) = \sum a_n x^n$

۱. معادله ۱۱۰-۵ را می‌توان، با نشان دادن $z = x + iy$ به جای x ، به صورت دیگری نوشت. در این صورت در بخشهای بعد، همگرایی یکنواخت، انتگرال‌پذیری و مشتق‌پذیری در ناحیه‌ای از صفحه مختلط، به جای بازه‌ای روی محور x ، مشخص خواهند شد.

به ازای $-S \leq x \leq S$ همگرایی یکنواخت است، $f(x)$ باید در بازه همگرایی یکنواخت، تابع پیوسته‌ای باشد.

این رفتار نقطه مقابل رفتار بسیار متفاوت سری فوریه است (فصل ۱۴)، که در آن بارها از سری فوریه برای نمایش یک تابع ناپیوسته مانند امواج دندانه اره‌ای و مربعی استفاده شده است.

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری

اگر $u_n(x)$ پیوسته و $\sum a_n x^n$ همگرایی یکنواخت باشد، پی‌می‌بریم که سری مشتق‌گیری شده سری توانی است با توابع پیوسته و با همان شعاع همگرایی سری اصلی. عوامل جدیدی که از طریق مشتق‌گیری (یا انتگرال‌گیری) به محاسبات وارد می‌شوند، بر هیچ‌یک از آزمونهای ریشه و نسبت تأثیری ندارند. از این رو می‌توانیم از سری توانی هر چند بار که بخواهیم درون بازه همگرایی یکنواخت انتگرال یا مشتق بگیریم (مسئله ۷-۵-۱۳).

از لحاظ محدودیت‌های اکیدی که بر مشتق‌گیری وضع شد (بخش ۵-۵)، این نتیجه بسیار با ارزش و قابل توجه است.

قضیه یکتایی

در بخش قبل، با استفاده از سری مکلورن، e^x و $\ln(1+x)$ را به صورت سری نامتناهی بسط دادیم. در فصلهای آتی، توابع را بارها به کمک سریهای نامتناهی نمایش می‌دهیم یا معرفی می‌کنیم. در اینجا ثابت می‌کنیم که نمایش سری توانی یکتاست.

اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n & -R_a < x < R_a \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n & -R_b < x < R_b \end{aligned} \quad (112-5)$$

که در آن بازه‌های همگرایی همپوشی دارند و هر دو مبدأ را در بر می‌گیرند، در این صورت به ازای همه n ها

$$a_n = b_n \quad (113-5)$$

یعنی فرض می‌کنیم که دو نمایش سری توانی (متفاوت) داریم و در ادامه ثابت می‌کنیم که این دو در واقع یکی‌اند.

از معادله ۱۱۲-۵ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad -R < x < R \quad (114-5)$$

که در آن R از R_a و R_b کوچکتر است. قرار می‌دهیم $x = 0$: به این ترتیب همه جمله‌ها جز جملات ثابت حذف می‌شوند، در نتیجه

$$a_0 = b_0 \quad (115-5)$$

اینک با استفاده از مشتق‌پذیری سری توانی، از معادله ۱۱۳-۵ مشتق می‌گیریم و می‌رسیم به

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} \quad (116-5)$$

در اینجا نیز قرار می‌دهیم $x = 0$ تا جمله‌های ثابت جدید را از بقیه جدا کنیم، بی‌می‌بریم که

$$a_1 = b_1 \quad (117-5)$$

این فرایند را n بار تکرار می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$a_n = b_n \quad (118-5)$$

این تساوی نشان می‌دهد که دو سری برهم منطبق‌اند. بنابراین، نمایش سری توانی ما یکتاست.

این نکته در بخش ۵-۸، که برای پیدا کردن جوابهای معادله دیفرانسیل از سریهای توانی استفاده می‌کنیم، بسیار حیاتی است. این یکتایی سری توانی بارها در فیزیک نظری پیش می‌آید. تثبیت نظریه اختلال در مکانیک کوانتومی یک نمونه از آن است. نمایش سری توانی توابع اغلب در برآورد صورتهای مهم، به خصوص وقتی استفاده از قاعده هویستال در دسراقرین باشد، مفید است (مسئله ۵-۷-۹).

مثال ۵-۷-۱: حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (119-5)$$

به جای $\cos x$ بسط سری مکلورن آن را قرار می‌دهیم و می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - (1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots)}{x^2} \\ &= \frac{x^2/2! - x^4/4! + \dots}{x^2} \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $x \rightarrow 0$ ، خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (۱۲۰-۵)$$

یکتایی سری توانی به این معناست که ضرایب a_n را می‌شود با مشتقها در یک سری مکلورن یکی گرفت. از

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

داریم

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

معکوس کردن (وارونی) سری توانی

سری زیر را فرض کنید

$$\begin{aligned} y - y_0 &= a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \end{aligned} \quad (۱۲۱-۵)$$

از این رابطه $(y - y_0)$ را برحسب $(x - x_0)$ به دست می‌آوریم. ولی ممکن است نخواهیم عبارت صریحی داشته باشیم که $(x - x_0)$ را برحسب $(y - y_0)$ بدهد. می‌توانیم یا معکوس

کردن (وارونسازی) سری، $(x - x_0)$ را از معادله ۵-۱۲۱ به دست آوریم. فرض کنید

$$x - x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \quad (5-122)$$

باید b_n ها را بر حسب a_n های معلوم محاسبه کنیم. یکی از روشهای سردستی و غیردقیق، که برای چند ضریب اول کاملاً کفایت می‌کند، آن است که معادله ۵-۱۲۱ را صرفاً در معادله ۵-۱۲۲ قرار دهیم. با توجه به یکتایی سری توانی، ضریب $(x - x_0)^n$ را در دو طرف معادله ۵-۱۲۲ برابر قرار می‌دهیم و می‌رسیم به

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1} \\ b_2 &= -\frac{a_2}{a_1^2} \\ b_3 &= \frac{1}{a_1^3} (2a_2^2 - a_1 a_3) \\ b_4 &= \frac{1}{a_1^4} (5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3) \end{aligned} \quad (5-123)$$

الی آخر. دوايت فهرستی از ضرایب بالاتر ارائه کرده است (با معادله ۵-۵ مقایسه کنید).^۱ رهیافت کلی‌تر و بسیار دقیقتری در ویرایشهای اول و دوم همین کتاب ارائه شده که در آن از متغیرهای مختلط بهره گرفته شده است.

مسائل

۵-۷-۱ نظریه کلاسیکی لائوین درباره پارامغناطیس برای قطبش مغناطیسی به عبارتی به صورت زیر می‌انجامد

$$P(x) = C \left(\frac{\cosh x}{\sinh x} - \frac{1}{x} \right)$$

$P(x)$ را به صورت یک سری توانی برای x های کوچک (میدانهای ضعیف، دمای بالا) بسط دهید. ۵-۷-۲ ضریب واقظبیدگی L برای یک بیضیوار پخت در میدان الکتریکی یکنواخت موازی با

1. Dwight H B, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 4th ed, New York: Macmillan, 1961.

محور چرخش، عبارت است از

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0} (1 + \zeta_0^2) (1 - \zeta_0 \cot^{-1} \zeta_0)$$

که ζ_0 در مختصات کره‌وار پخت (ξ, ζ, φ) معرف یک بیضیوار کشیده است.

$$\lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0} \quad (\text{کره})$$

$$\lim_{\zeta_0 \rightarrow 0} L = \frac{1}{\varepsilon_0} \quad (\text{ورقه نازک})$$

۳-۷-۵ ضربیب واقطبییدگی متناظر (مسئله ۲-۷-۵) برای بیضیوار کشیده به‌قرار زیر است

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0} (\eta_0^2 - 1) \left(\frac{1}{2} \eta_0 \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 1 \right)$$

نشان دهید که

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0} \quad (\text{کره})$$

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow 1} L = 0 \quad (\text{سوزن دراز})$$

۴-۷-۵ در بررسی نقشه پراش حاصل از یک گشودگی دایره‌ای به انتگرال زیر برمی‌خوریم

$$\int_0^{2\pi} \cos(c \cos \varphi) d\varphi$$

انتگرالده را به‌صورت یک سری بسط دهید و با استفاده از انتگرالهای زیر، انتگرال بگیرید

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \varphi d\varphi = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = 0$$

حاصل برابر است با 2π ضربدر تابع بسل $J_0(c)$.

۵-۷-۵. بر اثر یک واکنش هسته‌ای، نوترونهایی در داخل یک کره توخالی به شعاع R تولید می‌شوند. نوترونهای جدیدی که به وجود می‌آیند، به‌طور یکنواخت در حجم کره توزیع می‌شوند. با فرض آنکه همهٔ جهت‌ها احتمال یکسان داشته باشند (همسانگردی)، هر نوترون قبل از آنکه به سطح کره برخورد کند، به‌طور متوسط چه فاصله‌ای را می‌پیماید؟ فرض کنید که حرکت بر روی خط راست انجام می‌گیرد و هیچ برخوردی پیش نمی‌آید.
(الف) نشان دهید

$$\bar{r} = \frac{3}{4} R \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} k^2 dk \sin \theta d\theta$$

(ب) انتگرالده را به صورت سری بسط دهید و انتگرال بگیرید تا به رابطهٔ زیر برسید

$$\bar{r} = R \left[1 - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right]$$

(ج) نشان دهید که مجموع این سری نامتناهی $1/12$ است؛ در نتیجه $\bar{r} = 3/4 R$. راهنمایی: از طریق استقرای ریاضی نشان دهید که

$$s_n = (1/12) - [4(2n+1)(2n+3)]^{-1}$$

سپس قرار دهید $n \rightarrow \infty$
۵-۷-۶ می‌دانیم که

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

انتگرالده را به صورت یک سری بسط دهید و از جمله به جمله آن انتگرال بگیرید تا برسید به^۱

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

این فرمول لایب‌نیس برای π است. همگرا بودن (یا نبودن) آن را برای سری انتگرالده و سری انتگرال‌گیری شده در $x=1$ مقایسه کنید.

۱. بسط سری $\tan^{-1} x$ (حد بالا x به جای یک) در سال ۱۶۷۱، سه سال قبل از لایب‌نیس، توسط جیمز گریگوری کشف شد. کتاب سرگرم‌کننده و آموزندهٔ زیر را ببینید:

آهنگ همگرایی فرمول لایب‌نیشس چندان کند است که برای محاسبات عددی عملاً بی‌فایده است؛ π را با استفاده از عباراتی نظیر

$$\pi = 24 \tan^{-1} \frac{1}{8} + 18 \tan^{-1} \frac{1}{57} + 4 \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

$$\pi = 48 \tan^{-1} \frac{1}{18} + 32 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 20 \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

تا ۱۰۰۰۰۰ رقم اعشار محاسبه کرده‌اند.^۱ درستی عبارتهای بالا را می‌توان با استفاده از مسئله ۵-۶-۲ تحقیق کرد.

۷-۷-۵ تابع فاکتوریل ناکامل

$$\int_0^x e^{-t} t^n dt$$

را به‌ازای مقادیر کوچک x ، به‌صورت یک سری از توانهای x بسط دهید. گستره همگرایی سری حاصل چیست؟ چرا بر کوچک بودن x تأکید می‌شود؟

جواب :

$$\int_0^x e^{-t} t^n dt$$

$$= x^{n+1} \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{x}{(n+2)} + \frac{x^2}{2!(n+3)} - \dots + \frac{(-1)^p x^p}{p!(n+p+1)} + \dots \right]$$

۸-۷-۵ بسط سری تابع بتای ناکامل را به‌ازای $0 \leq x \leq 1$ ، $p > 0$ و $q > 0$ (اگر $x = 1$) بدست آورید

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

$$= x^p \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1-q}{p+1} x + \dots + \frac{(1-q) \dots (n-q)}{n!(p+n)} x^n + \dots \right\}$$

1. Shanks D, and J W Wrench, Jr, "Computation of π to 100000 decimals," *Math Computation*, **16**, 76 (1962).

۹-۷-۵ عبارتهای زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{x^7} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-n} j_n(x) \quad n = 3 \text{ به ازای } (\text{ب})$$

که $j_n(x)$ تابع بسط کروی است (بخش ۷-۱۱) و بنابراین تعریف عبارت است از

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

جواب :

$$-\frac{1}{30} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} \rightarrow \frac{1}{105} \quad n = 3 \text{ به ازای } (\text{ب})$$

۱۰-۷-۵ بنابر نظریهٔ ترابرد نوترون، رابطهٔ زیر عکس طول پخش نوترون، k ، را به دست می‌دهد

$$\frac{a-b}{k} \tanh^{-1} \left(\frac{k}{a} \right) = 1$$

از طریق وارونی سری یا هر روش دیگری، k^2 را به صورت یک سری توانی از b/a تعیین کنید. دو جملهٔ اول سری را محاسبه کنید.

$$\text{جواب: } k^2 = 3ab \left(1 - \frac{2}{5} \frac{b}{a} \right)$$

۱۱-۷-۵ بسط سری $\sinh^{-1} x$ را برحسب توانهای x : (الف) از طریق وارون سازی سری مربوط به $\sinh y$; (ب) از طریق بسط مکولون مستقیم به دست آورید.

۱۲-۷-۵ تابع $f(z)$ به صورت یک سری از توانهای نزولی نمایش داده شده است

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad R \leq z < \infty$$

نشان دهید که این بسط سری یکتاست؛ یعنی اگر در $R \leq z < \infty$ ، $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ ، آنگاه به ازای همهٔ n ها، $a_n = b_n$.

۱۳-۷-۵ سری توانی زیر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

به ازای همه مقادیر $-R < x < R$ همگراست. نشان دهید که سریهای حاصل از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری دارای همین بازه همگرایی‌اند. (زحمت بررسی نقاط انتهایی $x = \pm R$ را به خود ندهید.)

۱۴-۷-۵ فرض کنید $f(x)$ را بشود به صورت یک سری توانی حول مبدأ بسط داد، $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، و گستره همگرایی غیرصفر باشد. با استفاده از روشهایی که در اثبات یکتایی سریها به کار بردیم، نشان دهید که سری مفروض یک سری مکلوورن است با ضرایب

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

۱۵-۷-۵ فرمول کلاین-نی‌شی‌نا درباره پراکندگی فوتونها توسط الکترونها، شامل جمله‌ای به صورت زیر است

$$f(\varepsilon) = \frac{(1 + \varepsilon)}{\varepsilon^2} \left[\frac{2 + 2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} - \frac{\ln(1 + 2\varepsilon)}{\varepsilon} \right]$$

در اینجا $\varepsilon = hv/mc^2$ ، یعنی نسبت انرژی فوتون به انرژی جرم سکون الکترون است. عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)$$

جواب: $\frac{4}{3}$

۱۶-۷-۵ رفتار نوترونی که از طریق برخورد کشسان با هسته‌های به جرم A ، انرژی از دست می‌دهد، به کمک پارامتر ξ توصیف می‌شود

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1}$$

یک تقریب، که به‌ازای مقادیر بزرگ A خوب است، عبارت خواهد بود از

$$\xi_2 = \frac{2}{A + \frac{2}{3}}$$

ξ_1 و ξ_2 را برحسب توانهای A^{-1} بسط دهید. نشان دهید که ξ_2 تا جمله‌هایی از مرتبه $(A^{-1})^2$ با ξ_1 سازگار است. اختلاف بین ضرایب جمله $(A^{-1})^2$ را بیابید.

۱۷-۷-۵ نشان دهید که هر یک از دو انتگرال زیر با ثابت کاتالان برابر است

$$\int_0^1 \arctan t \frac{dt}{t} \quad (\text{الف})$$

$$- \int_0^1 \ln x \frac{dx}{1+x^2} \quad (\text{ب})$$

۱۸-۷-۵ π را (با دقت مضاعف) توسط هر یک از عبارتهای \arctan زیر محاسبه کنید.

$$\pi = 16 \tan^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) - 4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{239} \right)$$

$$\pi = 24 \tan^{-1} \left(\frac{1}{8} \right) + 8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{57} \right) + 4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{239} \right)$$

$$\pi = 48 \tan^{-1} \left(\frac{1}{18} \right) + 32 \tan^{-1} \left(\frac{1}{57} \right) - 20 \tan^{-1} \left(\frac{1}{239} \right)$$

باید رقم ۱۶ به‌معنا به‌دست آورید.

یادآوری: از این فرمولها در برخی محاسبه‌ها دقیقتر π استفاده شده است.^۱

۱۹-۷-۵ بررسی پدیده گیسس در بخش ۵-۱۴ به‌عبارت زیر می‌انجامد

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

1. Shanks D and J W Wrench, "Computation of π to 100000 decimals," *Math Computation*, **16**, 76 (1962).

(الف) انتگرالده را به صورت یک سری بسط دهید و از جمله به جمله آن انتگرال بگیرید. مقدار عددی این عبارت را تا چهار رقم بامعنا حساب کنید. (ب) این عبارت را با استفاده از کوادراتور گاوسی (پیوست الف-۲) محاسبه کنید.

جواب : ۱.۱۷۸۹۸۰ .

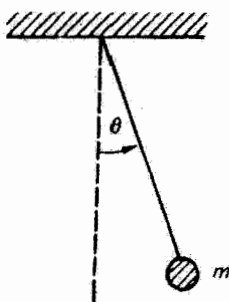
۸-۵ انتگرالهای بیضوی

انتگرالهای بیضوی را تا حدودی برای نمایش کاربرد سریهای توانی و تا حدودی به دلیل اهمیت ذاتی خودشان در اینجا وارد کرده‌ایم. اهمیت این انتگرالها به خاطر ظهورشان در مسائل فیزیکی (مثال ۸-۵ و مسئله ۴-۸-۵) و کاربردهایشان در مسائل ریاضی است.

مثال ۸-۵-۱- دوره تناوب آونگ ساده: دوره تناوب آونگ ما (شکل ۸-۵) برای نوسانهای کم دامنه و حرکت هماهنگ ساده عبارت است از $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$. قانون دوم نیوتون درباره حرکت و معادله لاگرانژ (بخش ۷-۱۷ جلد دوم) برای دامنه بیشینه، θ_M ، آنقدر بزرگ که $\sin \theta_M \neq \theta_M$ ، به معادله دیفرانسیلی غیرخطی منجر می‌شود ($\sin \theta$ تابعی غیرخطی از θ است)، در نتیجه روش دیگری را در پیش می‌گیریم.

جرم در حال تاب خوردن m دارای انرژی جنبشی $\frac{1}{2}ml^2(d\theta/dt)^2$ و انرژی پتانسیل $-mgl \cos \theta$ است (صفر اختیاری انرژی پتانسیل را در $\theta = 1/2\pi$ گرفته‌ایم). با توجه به اینکه در $\theta = \theta_M$ داریم $d\theta/dt = 0$ ، اصل پایستگی انرژی منجر می‌شود به

$$\frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \theta_M \quad (124-5)$$



شکل ۸-۵ آونگ ساده.

با محاسبه $d\theta/dt$ می‌رسیم به

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} (\cos\theta - \cos\theta_M)^{1/2} \quad (125-5)$$

که در آن جرم m از دو طرف حذف شده است. فرض می‌کنیم در $t = 0$ ، $\theta = 0$ و $d\theta/dt > 0$ با انتگرال‌گیری از $\theta = 0$ تا $\theta = \theta_M$ ، به دست می‌آوریم

$$\int_0^{\theta_M} (\cos\theta - \cos\theta_M)^{-1/2} d\theta = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} \int_0^t dt = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} t \quad (126-5)$$

این کمیت $1/4$ سیکل است. در نتیجه t برابر است با $1/4$ دوره تناوب T . یادآور می‌شویم که $\theta \leq \theta_M$ و از جایگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_M}{2}\right) \sin\varphi \quad (127-5)$$

معادله ۱۲۶-۵ با این جایگذاری به صورت زیر در می‌آید

$$T = 4 \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right) \sin^2\varphi\right)^{-1/2} d\varphi \quad (128-5)$$

این معادله با آنکه نسبت به معادله ۱۲۶-۵ چندان بهتر نیست، ولی انتگرال مندرج در آن، معرف انتگرال بیضوی کامل نوع اول $K(\sin\theta_M/2)$ است. با استفاده از بسط سری، دوره تناوب T را می‌شود به صورت یک سری توانی از توانهای $\sin\theta_M/2$ بسط داد.

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2\frac{\theta_M}{2} + \frac{9}{64} \sin^4\frac{\theta_M}{2} + \dots \right\} \quad (129-5)$$

تعریفها

با تعمیم مثال ۸-۵، کران بالای انتگرال را متغیر می‌گیریم، انتگرال بیضوی نوع اول؛ بنابراین تعریف، به قرار زیر خواهد بود

$$F(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi (1 - \sin^2\alpha \sin^2\theta)^{-1/2} d\theta \quad (الف ۱۳۰-۵)$$

یا

$$F(x|m) = \int_0^\pi [(\lambda - t^\lambda)(\lambda - mt^\lambda)]^{-1/\lambda} dt \quad 0 \leq m < 1 \quad (ب\ ۱۳۰-۵)$$

(این نمادگذاری در AMS - ۵۵ به کار رفته است). به ازای $\varphi = \pi/2$ و $x = 1$ انتگرال بیضوی کامل نوع اول را داریم:

$$\begin{aligned} K(m) &= \int_0^{\pi/2} (\lambda - m \sin^\lambda \theta)^{-1/\lambda} d\theta \\ &= \int_0^1 [(\lambda - t^\lambda)(\lambda - mt^\lambda)]^{-1/\lambda} dt \end{aligned} \quad (۱۳۱-۵)$$

که در آن $m = \sin^\lambda \alpha$ و $0 \leq m < 1$. انتگرال بیضوی نوع دوم، بنابر تعریف، عبارت است از

$$E(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi (\lambda - \sin^\lambda \alpha \sin^\lambda \theta)^{1/\lambda} d\theta \quad (الف\ ۱۳۲-۵)$$

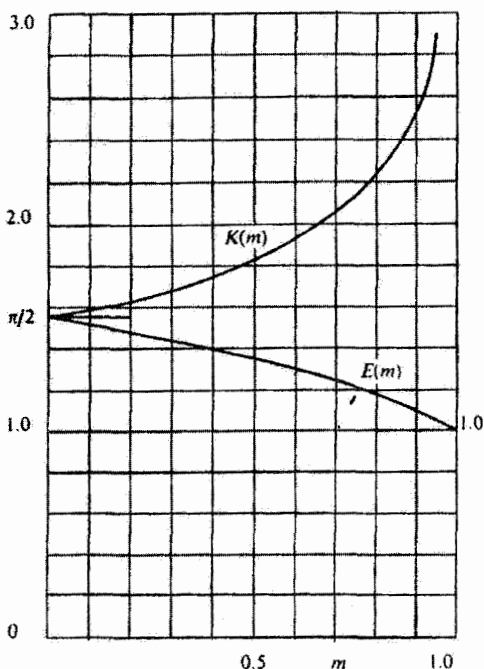
یا

$$E(x|m) = \int_0^x \left(\frac{\lambda - mt^\lambda}{\lambda - t^\lambda} \right)^{1/\lambda} dt \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (ب\ ۱۳۲-۵)$$

در اینجا نیز به ازای $\varphi = \pi/2$ و $x = 1$ ، به انتگرال بیضوی نوع دوم کامل می‌رسیم:

$$\begin{aligned} E(m) &= \int_0^{\pi/2} (\lambda - m \sin^\lambda \theta)^{1/\lambda} d\theta \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\lambda - mt^\lambda}{\lambda - t^\lambda} \right)^{1/\lambda} dt \quad 0 \leq m \leq 1 \end{aligned} \quad (۱۳۳-۵)$$

مسئله ۱-۸-۵ نمونه‌ای است از به کار آمدن این انتگرال. رفتار $E(m)$ و $K(m)$ در شکل ۹-۵ نشان داده شده است. جدولهای جامعی از این توابع در AMS - ۵۵ یافت می‌شود.



شکل ۹-۵. انتگرالهای بیضوی کامل $E(m)$ و $K(m)$.

بسط سری

مخرج $K(m)$ را می‌شود در گستره $0 \leq m < 1$ به کمک قضیهٔ دو جمله‌ای بسط داد.

$$\begin{aligned}
 (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2} m \sin^2 \theta + \frac{3}{8} m^2 \sin^4 \theta + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \sin^{2n} \theta
 \end{aligned}
 \tag{۱۳۴-۵}$$

این سری در هر بازهٔ بسته $[0, m_{\max}]$ ، $m_{\max} < 1$ همگرای یکنواخت است، و می‌توان از آن جمله به جمله انتگرال گرفت. از مسئلهٔ ۹-۴-۱۰ داریم

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \frac{\pi}{2}
 \tag{۱۳۵-۵}$$

بنابراین

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 m^3 + \dots \right\} \quad (136-5)$$

به همین ترتیب

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} - \dots \right\} \quad (137-5)$$

(مسئله ۵-۸-۲). در بخش ۱۳-۵، این سریها را با توابع فوق هندسی یکی می‌گیریم، و داریم

$$K(m) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; m \right) \quad (138-5)$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1; m \right) \quad (139-5)$$

مقادیر حدی

با استفاده از معادله‌های سری ۱۳۶-۵ و ۱۳۷-۵، یا از انتگرالهای معرف داریم

$$\lim_{m \rightarrow 0} K(m) = \frac{\pi}{2} \quad (140-5)$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} E(m) = \frac{\pi}{2} \quad (141-5)$$

بسطهای سری به‌ازای $m \rightarrow 1$ چندان به‌کار نمی‌آیند. ولی انتگرالها به مقادیر زیر می‌انجامند

$$\lim_{m \rightarrow 1} K(m) = \infty \quad (142-5)$$

این انتگرال به‌صورت لگاریتمی واگرا می‌شود، و

$$\lim_{m \rightarrow 1} E(m) = 1 \quad (143-5)$$

قبلاً برای محاسبه انتگرالها، انتگرالهای بیضوی را به فراوانی به کار می برده اند. مثلاً، انتگرالهایی به صورت زیر را می توان برحسب انتگرالهای بیضوی بیان کرد

$$I = \int_0^x R\left(t, \sqrt{a_2 t^2 + a_1 t^2 + a_2 t + a_1 t + a_0}\right) dt$$

که در آن R تابع گویایی از t و از عبارت زیر رادیکال است. در فصل ۵ کتاب ژانگه و آمده صفحات متعددی به ارائه چنین تبدیلهایی اختصاص یافته است. ولی اینک با وجود کامپیوترهای سریع مخصوص محاسبه مستقیم عددی، از اهمیت این شگردهای انتگرال بیضوی کاسته شده است. به هر حال، انتگرالهای بیضوی به جهت ظهورشان در مسائل فیزیکی همواره مورد توجه اند (مسئله های ۴-۸-۵ و ۵-۸-۵).

مسائل

۱-۸-۵ بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ را می شود با $x = a \sin \theta$ و $y = b \cos \theta$ به صورت پارامتری نمایش داد. نشان دهید که طول کمانی واقع در ربع اول، عبارت است از

$$a \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta = aE(m)$$

$$0 \leq m = (a^2 - b^2)/a^2 \leq 1$$

۲-۸-۵ بسط سری زیر را به دست آورید

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \dots \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{m^n}{(2n-1)} \right\}$$

۳-۸-۵ نشان دهید

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{(K - E)}{m} = \frac{\pi}{4}$$

۴-۸-۵ جریان I ، مطابق شکل، از حلقه دایره‌ای سیمی در صفحه xy می‌گذرد. می‌دانیم که پتانسیل برداری به‌قرار زیر است

$$A_{\varphi}(\rho, \varphi, z) = \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \alpha)^{1/2}}$$

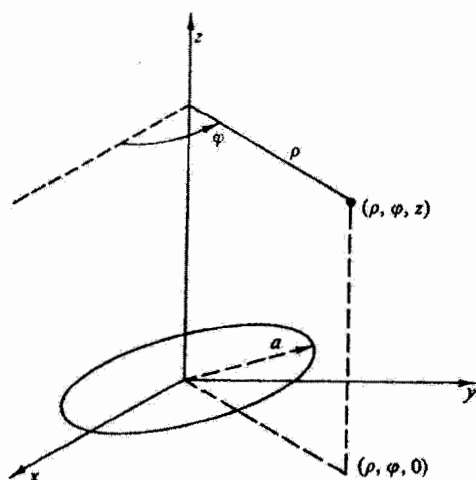
نشان دهید که

$$A_{\varphi}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right]$$

که در آن

$$k^2 = \frac{2a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2}$$

یادآوری: این مسئله در صفحه ۲۷۰ کتاب اسمیت آمده و B نیز در آن محاسبه شده است.



۵-۸-۵ تحلیل پتانسیل برداری مغناطیسی یک حلقه جریان دایره‌ای به عبارت زیر می‌انجامد

$$f(k^2) = k^{-2} [(2 - k^2)K(k^2) - 2E(k^2)]$$

که $E(k^2)$ و $K(k^2)$ انتگرالهای بیضوی کامل نوع اول و دوم اند. نشان دهید به ازای $k^2 \ll 1$ (یعنی شعاع حلقه $r \gg r$) داریم

$$f(k^2) \approx \frac{\pi k^2}{16}$$

۵-۸-۶ نشان دهید

$$\frac{dE(k^2)}{dk} = \frac{1}{k}(E - k) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dK(k^2)}{dk} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{K}{k} \quad (\text{ب})$$

راهنمایی: در بند ب با مقایسه بسطهای سری نشان دهید

$$E(k^2) = (1 - k^2) \int_0^{\pi/2} (1 - k \sin^2 \theta)^{-2/2} d\theta$$

۵-۸-۷ (الف) یک زیربرنامه تابعی بنویسید که $E(m)$ را از بسط سری آن در معادله ۵-۱۳۷ محاسبه کند. (ب) زیربرنامه تابعی را که نوشته‌اید با به‌کار بردن آن برای محاسبه $E(m)$ در گستره $0 \leq m \leq 0.9$ و مقایسه با مقادیری که در AMS - ۵۵ داده شده است، بیازمایید.

۵-۸-۸ مسئله ۵-۷ را برای $K(m)$ تکرار کنید و مقادیر $K(m)$ را همانند آن مسئله به دست آورید.

یادآوری: سریهای معادله ۵-۱۳۷ برای $E(m)$ و معادله ۵-۱۳۶ برای $K(m)$ به ازای m نزدیک به ۱ با کندی زیادی همگرا می‌شوند. سریهایی با همگرایی سریعتر برای $E(m)$ و $K(m)$ یافت می‌شود. به شماره‌های ۲۷۳ر۲ و ۲۷۴ر۲ کتاب دوايت^۱ مراجعه کنید. در زیر برنامه‌ای که ممکن است برای محاسبه E و K در دسترس داشته باشید، احتمالاً از تقریبهای چند جمله‌ای که در فصل ۱۷ از AMS - ۵۵ داده شده‌اند، استفاده شده است.

۵-۸-۹ آونگ ساده‌ای با دامنه بیشینه θ_M تاب می‌خورد. دوره تناوب در حد که $\theta_M \rightarrow 0$ ، یک

1. Dwight H B, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, New York: Macmillan Co (1947).

ثانیه می‌شود. با استفاده از انتگرال بیضوی $K(k^2)$ ، $k = \sin(\theta_M/2)$ ، دوره تناوب، T ، را به ازای $\theta_M = 90^\circ (100^\circ)$ حساب کنید.

توجه: در بعضی زیربرنامه‌های انتگرال بیضوی، باید $k = m^{1/2}$ را به عنوان پارامتر ورودی داد نه خود m را.

مقادیر آزمونی: θ	T (ثانیه)
10°	1.00193
50°	1.05033
90°	1.18258

۵-۱۰ پتانسیل برداری مغناطیسی $\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \varphi_0 A_\varphi(\rho, \varphi, z)$ مربوط به حلقه دایره‌ای جریان (مسئله ۵-۴) را در گستره‌های $\rho/a = 2, 3, 4$ و $z/a = 0, 1, 2, 3, 4$ محاسبه کنید. یادآوری: این محاسبه انتگرال بیضوی پتانسیل برداری مغناطیسی را می‌شود به کمک محاسبه تابع لژاندر هم‌بسته آزمود (مثال ۱۲-۱۵).
مقدار آزمونی: به ازای $\rho/a = 3$ و $z/a = 0$:
 $A_\varphi = 0.29023 \mu_0 I$

۹-۵ اعداد برنولی، فرمولهای اویلر-مکلورن

اعداد برنولی را ژاک (جیمز، ژاکوب) برنولی معرفی کرد. چند تعریف هم‌ارز برای این اعداد ارائه شده است، ولی باید در این امر بسیار دقت کرد، زیرا برخی مؤلفان در شماره‌گذاری و یا علامتهای جبری تغییراتی داده‌اند. یکی از روشهای نسبتاً ساده آن است که اعداد برنولی را به کمک سری زیر تعریف کنیم^۱

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \quad (144-5)$$

با مشتق‌گیری پیاپی از این سری توانی و سپس قراردادن $x = 0$ ، می‌رسیم به

$$B_n = \left[\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \right]_{x=0} \quad (145-5)$$

در حالت خاص

$$\begin{aligned} B_1 &= \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \right|_{x=0} = \left. \frac{1}{e^x - 1} - \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \right|_{x=0} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (146-5)$$

۱. تابع $x/(e^x - 1)$ را می‌توان یک تابع مولد دانست، زیرا این تابع اعداد برنولی را تولید می‌کند. توابع مولدی که توابع خاص ریاضی فیزیک را تولید می‌کنند، در فصلهای ۱۱، ۱۲ و ۱۳ مورد بحث قرار می‌گیرند.

مرحله آخر را می‌شود از بسط سری مخرجها به دست آورد.

از آنجا که محاسبه این مشتقها کار پردردسری است، می‌توانیم به جای این کار، در رابطه معرف (معادله ۱۴۴-۵) یک بسط سری وارد کنیم و برسیم به

$$\frac{1}{x} \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2!} + \dots \right) = 1 \quad (147-5)$$

با استفاده از قضیه یکتایی سری توانی (بخش ۷-۵) و با توجه به اینکه ضریب x^0 برابر یک و ضریب x^n ($n \neq 0$) برابر صفر است، خواهیم داشت

$$B_0 = 1$$

$$\frac{1}{2!} B_0 + B_1 = 0 \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad (148-5)$$

$$\frac{1}{3!} B_0 + \frac{1}{2!} B_1 + \frac{B_2}{2!} = 0 \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad (149-5)$$

با ادامه این روند، جدول ۱-۵ را تنظیم می‌کنیم^۱

$$B_{r_{n+1}} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

اگر به جای متغیر x در معادله ۱۴۴-۵، ix را قرار دهیم (و B_1 را برابر $1/2 -$ بگیریم)، به تعریف هم‌ارز دیگری برای B_{rn} به قرار زیر دست می‌یابیم

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{rn} \frac{(rx)^{rn}}{(rn)!} \quad -\pi < x < \pi \quad (150-5)$$

با بهره‌گیری از روش حساب مانده‌ها (بخش ۲-۷) یا استفاده از نمایش حاصلضربهای نامتناهی $\sin x$ (بخش ۱۰-۵)، خواهیم یافت

$$B_{rn} = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (151-5)$$

۱. مقادیر بعدی در کتاب

جدول ۱-۵ اعداد برنولی

B_n	B_n	n
۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۱	۰
-۰٫۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	$-\frac{1}{2}$	۱
۰٫۱۶۶۶۶۶۶۶۶۶۷	$\frac{1}{6}$	۲
-۰٫۰۳۳۳۳۳۳۳۳۳	$-\frac{1}{30}$	۴
۰٫۰۲۳۸۰۹۵۲۴	$\frac{1}{42}$	۶
-۰٫۰۳۳۳۳۳۳۳۳۳	$-\frac{1}{30}$	۸
۰٫۰۷۵۷۵۷۵۷۵۷۶	$\frac{5}{66}$	۱۰

این نمایش برای اعداد برنولی را اوایلر کشف کرد. می‌توان به آسانی از معادله ۱۵۱-۵ مشاهده کرد که $|B_{2n}|$ با $n \rightarrow \infty$ بدون حد افزایش می‌یابد. مقادیر عددی را گلاشیر^۱ محاسبه کرده است. برای نمایش رفتار واگرایی اعداد برنولی، داریم

$$B_{20} = -5,291 \times 10^2 \quad (152-5)$$

$$B_{200} = -3,647 \times 10^{215}$$

برخی مؤلفان ترجیح می‌دهند که اعداد برنولی را به کمک صورت تغییر یافته‌ای از معادله ۱۵۱-۵، و با استفاده از رابطه زیر تعریف کنند:

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n} \quad (153-5)$$

در این رابطه شاخص پایین نصف شاخص پایین در رابطه ۱۵۱-۵ است و همه علامتها مثبت‌اند.

1. Glaisher J W L, "Tables of the first 250 Bernoulli's numbers (to nine figures) and their logarithms (to ten figures), *Trans Cambridge Phil Soc*, XII, 390 (1871-1879).

بار دیگر خاطر نشان می‌کنیم که در هنگام استفاده از کتابها یا مراجع دیگر باید به دقت بررسی کنیم و ببینیم که اعداد برنولی دقیقاً چگونه تعریف شده‌اند. در نظریه اعداد بارها به اعداد برنولی برمی‌خوریم. بنابر قضیه ون‌شتاین-کلاوژن

$$B_{2n} = A_n - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - \dots - \frac{1}{p_k} \quad (154-5)$$

که در آن A_n یک عدد صحیح است و p_1 و p_2 و \dots و p_k اعداد اولی‌اند که از جمع مقسوم‌علیه‌های $2n$ با عدد یک به دست می‌آیند. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که این قضیه برای حالت‌های زیر و هر حالت خاص دیگر برقرار است:

$$B_p(A_p = 1, \quad p = 2, 3, 7)$$

$$B_8(A_4 = 1, \quad p = 2, 3, 5) \quad (155-5)$$

$$B_{10}(A_5 = 1, \quad p = 2, 3, 11)$$

اعداد برنولی در مجموعیابی توانهای صحیح، اعداد صحیح به صورت زیر

$$\sum_{j=1}^N j^p \quad \text{عدد صحیح } p$$

و در تعداد زیادی از بسط‌های سری توابع غیرجبری ظاهر می‌شوند، از آن جمله

$$\tan x$$

$$\cot x$$

$$\csc x$$

$$\ln|\sin x|$$

$$\ln|\cos x|$$

$$\ln|\tan x|$$

$$\tanh x$$

$$\coth x$$

$$\operatorname{csch} x$$

جدول ۲-۵ توابع برنولی

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 1 \\
 B_1 &= x - \frac{1}{2} \\
 B_2 &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
 B_3 &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
 B_4 &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
 B_5 &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\
 B_6 &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{42} \\
 B_n(\circ) &= B_n \quad \text{عدد برنولی}
 \end{aligned}$$

مثلاً

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots \quad (156-5)$$

احتمال ظهور اعداد برنولی در این بسطهای سری به اعتبار معادلات معرف ۱۴۴-۵ و ۱۵۰-۵ و به جهت رابطه آنها با تابع زتای ریمان است

$$\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n} \quad (157-5)$$

توابع برنولی :

اگر معادله ۱۴۴-۵ را اندکی تعمیم دهیم، به رابطه زیر دست خواهیم یافت

$$\frac{x e^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \frac{x^n}{n!} \quad (158-5)$$

که توابع برنولی، $B_n(s)$ را تعریف می‌کند. هفت تابع اول برنولی در جدول ۲-۵ درج شده‌اند. از تابع مولد در معادله ۱۵۸-۵ داریم

$$B'_n(\circ) = B_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (159-5)$$

تابع برنولی به ازای صفر برابر است با عدد برنولی متناظر با آن. دو خاصیت مخصوصاً مهم توابع برنولی از رابطه معرف حاصل می‌شود: یک رابطه مشتق‌گیری

$$B'_n(s) = nB_{n-1}(s) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (160-5)$$

و یک رابطه تقارنی

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (161-5)$$

از این رابطه‌ها برای به دست آوردن فرمول انتگرال‌گیری اویلر-مکلورن استفاده می‌شود.

فرمول انتگرال‌گیری اویلر-مکلورن

یکی از کاربردهای توابع برنولی دستیابی به فرمول انتگرال‌گیری اویلر-مکلورن است. از این فرمول در بخش ۱۰-۳ برای رسیدن به عبارت مجانبی تابع فاکتوریل، یعنی سری استرلینگ، استفاده می‌شود.

شگرد این کار در انتگرال‌گیری جزء به جزء پی‌درپی و استفاده از معادله ۱۶۰-۵ برای استخراج مشتقهای جدید است. از انتگرال زیر شروع می‌کنیم

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) B_0(x) dx \quad (162-5)$$

از معادله ۱۶۰-۵ و مسئله ۹-۲ داریم

$$B'_1(x) = B_0(x) = 1 \quad (163-5)$$

$B'_1(x)$ را در معادله ۱۶۲-۵ می‌نشانیم و انتگرال جزء به جزء می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= f(1)B_1(1) - f(0)B_1(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x) dx \\ &= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x) dx \end{aligned} \quad (164-5)$$

در اینجا نیز با استفاده از معادله ۱۶۰-۵، داریم

$$B_1(x) = \frac{1}{2} B'_1(x) \quad (165-5)$$

و با انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\Gamma} [f(1) + f(0)] - \frac{1}{\Gamma!} [f'(1)B_{\Gamma}(1) - f'(0)B_{\Gamma}(0)] \\ + \frac{1}{\Gamma!} \int_0^1 f^{(\Gamma)}(x) B_{\Gamma}(x) dx \quad (۱۶۶-۵)$$

با استفاده از رابطه

$$B_{\Gamma n}(1) = B_{\Gamma n}(0) = B_{\Gamma n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ B_{\Gamma n+1}(1) = B_{\Gamma n+1}(0) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۱۶۷-۵)$$

و ادامه این فرایند منجر می‌شود به:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\Gamma} [f(1) + f(0)] - \sum_{p=1}^q \frac{1}{(\Gamma p)!} B_{\Gamma p} [f^{(\Gamma p-1)}(1) - f^{(\Gamma p-1)}(0)] \\ + \frac{1}{(\Gamma q)!} \int_0^1 f^{(\Gamma q)}(x) B_{\Gamma q}(x) dx \quad (الف ۱۶۸-۵)$$

این عبارت، فرمول انتگرال‌گیری اولر-مکلورن است. در این فرمول فرض شده است که $f(x)$ واجد مشتقهای مورد نیاز باشد.

گستره انتگرال‌گیری در معادله ۱۶۸-۵ الف را می‌توان با نشاندن $f(x+1)$ به جای $f(x)$ ، از $[0, 1]$ به $[1, 2]$ تغییر داد. به کمک جمع کردن چنین نتایجی تا $[n-1, n]$ ، می‌رسیم به:

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{\Gamma} f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{\Gamma} f(n) \\ - \sum_{p=1}^q \frac{1}{(\Gamma p)!} B_{\Gamma p} [f^{(\Gamma p-1)}(n) - f^{(\Gamma p-1)}(0)] \\ + \text{جمله باقیمانده} \quad (ب ۱۶۸-۵)$$

ظهور جمله‌های $1/2 f(0) + f(1) + \dots + 1/2 f(n)$ دقیقاً به همان صورتی است که در انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای یا کوادراتور ظاهر می‌شوند. می‌توان مجموع‌یابی روی p را تصحیحی بر تقریب دوزنقه‌ای تعبیر کرد. معادله ۱۶۸-۵ ب به صورتی است که در مسئله ۵-۹-۵ برای جمع زدن توانهای مثبت اعداد صحیح و در بخش ۱-۳ برای استخراج فرمول استرلینگ به کار می‌رود.

فرمول اویلر-مکلورن اغلب در مجموع‌یابی سریها با تبدیل آنها به انتگرال سودمند واقع می‌شود.^۱

تابع زتای ریمان

از سری $\sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}$ به‌عنوان یک سری مقایسه‌ای برای آزمودن همگرایی (بخش ۵-۲)، و در معادله ۵-۱۵۱ به‌عنوان یک تعریف برای اعداد برنولی B_{2n} به‌کار رفت. این سری برای تعریف تابع زتای ریمان به‌صورت زیر نیز به‌کار می‌آید

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad s > 1 \quad (169-5)$$

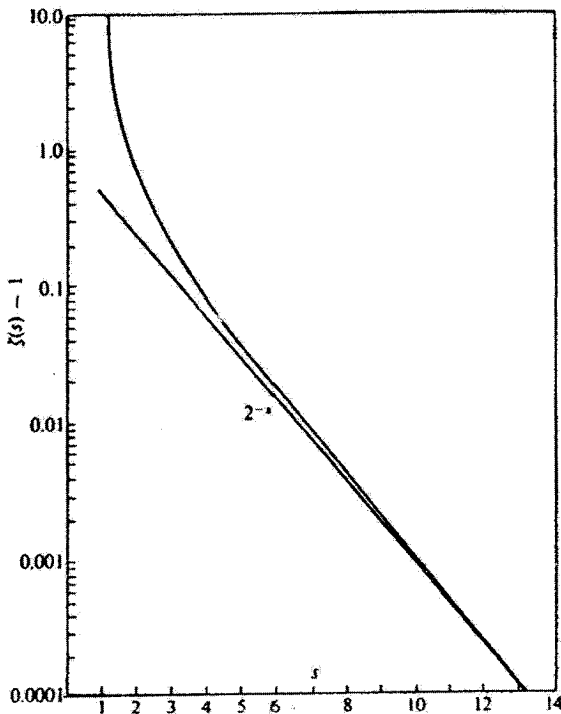
فهرست مقادیر $\zeta(s)$ به‌ازای مقادیر صحیح $s = 1, 2, 3, \dots, 10$ در جدول ۳-۵ درج شده است. منحنی تغییرات $1 - \zeta(s)$ را در شکل ۵-۱۰ مشاهده می‌کنید. در بخش ۱۰-۲ یک عبارت انتگرالی برای تابع زتای ریمان به‌صورت یکی از اجزای ضروری برای یافتن تابع گاما به‌کار می‌رود. عبارت جالب دیگری برای تابع زتای ریمان را می‌توان به روش زیر استخراج کرد:

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \right) \quad (170-5)$$

جدول ۳-۵ تابع زتای ریمان

$\zeta(s)$	s
۱٫۶۴۴۹۳۴۰۶۶۸	۲
۱٫۲۰۲۰۵۶۹۰۳۲	۳
۱٫۰۸۲۳۲۲۳۲۷	۴
۱٫۰۳۶۹۲۷۷۵۵۱	۵
۱٫۰۱۷۳۴۳۰۶۲۰	۶
۱٫۰۰۸۳۴۹۲۷۷۴	۷
۱٫۰۰۴۰۷۷۳۵۶۲	۸
۱٫۰۰۲۰۰۸۳۹۲۸	۹
۱٫۰۰۰۹۹۴۵۷۵۱	۱۰

۱. تعدادی مثال در این خصوص در مقاله زیر یافت می‌شود، به آن مراجعه کنید



شکل ۵-۱۰ تابع زتای ریمان، $1 - \zeta(s)$ بر حسب s .

در نتیجه، همه n^{-s} ها به ازای n های زوج حذف می‌شوند. در این صورت

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots - \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \dots \right) \quad (171-5)$$

که همه جمله‌هایی که در آنها n مضربی از ۳ است حذف می‌شوند. با ادامه این کار، خواهیم داشت $\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s})(1 - 5^{-s}) \dots (1 - P^{-s})$ ، که P یک عدد اول است؛ همه جمله‌های n^{-s} که در آنها n مضربی از هر یک از اعداد صحیح کوچکتر یا مساوی P باشد، حذف می‌شوند. به ازای $P \rightarrow \infty$ ، داریم

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) \dots (1 - P^{-s}) = \zeta(s) \prod_{P(\text{اول})=2} (1 - P^{-s}) = 1 \quad (172-5)$$

$$\zeta(s) = \left[\prod_{P \text{ (اول)}}^{\infty} (1 - P^{-s}) \right]^{-1} \quad (173-5)$$

که در آن $\zeta(s)$ به صورت یک حاصلضرب نامتناهی داده شده است.^۱

این دستورالعمل حذف، در محاسبات عددی کاربردهای واضحی پیدا می‌کند. معادله ۵-۱۷۰، با تعداد جمله‌هایی برابر نصف تعداد جمله‌های ۵-۱۶۹، مقدار $\zeta(s)(1 - 2^{-s})$ را با همان دقتی به دست می‌دهد که معادله ۵-۱۶۹، $\zeta(s)$ را به دست می‌دهد. (در هر دو حالت، به کمک روش آزمون انتگرال مکلورن که در آن به جای سری، انتگرال قرار داده می‌شود، بخش ۵-۲، می‌توان تصحیح مربوط به دنباله حذف‌شده سری را حساب کرد.)

در کتاب AMS - ۵۵ (فصل ۲۳) همراه با تابع زتای ریمان، سه تابع دیگر از مجموع توانهای وارون تعریف شده است.

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-s} = (1 - 2^{-s})\zeta(s) \quad n = 2, 3, \dots$$

و

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s} \quad n = 1, 2, \dots$$

مقادیر خاص این توابع با استفاده از اعداد برنولی (مسئله ۵-۹-۶) یا سری فوریه (مثال ۱۴-۳-۳) و مسئله ۱۴-۳-۱۳ عبارت‌اند از

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

۱. این نقطه آغاز کاربردهای گسترده تابع زتای ریمان در نظریه اعداد است. کتاب زیر را ببینید

$$\eta(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\eta(4) = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \dots = \frac{7\pi^4}{96}$$

$$\lambda(2) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\lambda(4) = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\beta(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32}$$

ثابت کاتالان به صورت زیر، مبحث مسئله ۲-۲۲ را تشکیل می دهد:

$$\beta(2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = 0.91596559\dots$$

بهبازی همگرایی

اگر بخواهیم یک سری همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را با جملاتی که توابع گویایی از m اند، جمع بزنیم، می توانیم همگرایی را با وارد کردن تابع زتای ریمان بهتر کنیم.

مثال ۵-۹-۱- بهسازی همگرایی: مسئله عبارت است از محاسبه سری $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+n^2)$ عبارت $(1+n^2)^{-1} = n^{-2}(1+n^{-2})^{-1}$ را از طریق تقسیم مستقیم بسط می دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (1+n^2)^{-1} &= n^{-2} \left(1 - n^{-2} + n^{-4} - \frac{n^{-6}}{1+n^{-2}} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^8 + n^6} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \zeta(2) - \zeta(4) + \zeta(6) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8 + n^6}$$

تابعهای ζ را می‌توان از جدول استخراج کرد و سری باقیمانده به صورت $n^{-\lambda}$ همگرا می‌شود. روشن است که این فرایند را می‌توانیم هر قدر که بخواهیم ادامه دهیم. باید بین اینکه چقدر عملیات جبری انجام خواهیم داد و ماشین محاسبه چقدر محاسبه انجام خواهد داد، یکی را انتخاب کنیم. در آخر بخشهای ۲-۵ و ۴-۵ روشهای دیگری برای بهسازی کارایی محاسباتی ارائه شده است.

مسائل

۱-۹-۵ نشان دهید

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

[راهنمایی: $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$]

۲-۹-۵ اعداد برنولی را که در معادله ۱۴۴-۵ ظاهر شدند می‌شود به چند جمله‌ایهای برنولی زیر تعمیم داد

$$\frac{x e^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \frac{x^n}{n!}$$

نشان دهید

$$B_0(s) = 1$$

$$B_1(s) = s - \frac{1}{2}$$

$$B_2(s) = s^2 - s + \frac{1}{6}$$

توجه داشته باشید که $B_n(0) = B_n$ و B_n عدد برنولی است.

۳-۹-۵ نشان دهید: $B'_n(s) = n B_{n-1}(s)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

[راهنمایی: از معادله مسئله ۲-۹-۵ مشتق بگیرید.]

۴-۹-۵ نشان دهید

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

[راهنمایی: به تابع مولد معادله ۱۵۸-۵ یا مسئله ۲-۹-۵ برگردید.]

۵-۹-۵ از فرمول انتگرال‌گیری اویلر-مکلورن می‌شود برای محاسبه سریهای متناهی زیر استفاده کرد

$$\sum_{m=1}^n f(m) = \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(n) + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(1)] + \dots$$

نشان دهید

$$\sum_{m=1}^n m = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{m=1}^n m^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{m=1}^n m^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{m=1}^n m^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \quad (\text{د})$$

۶-۹-۵ با استفاده از

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$$

نشان دهید

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{الف})$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{ب})$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \quad (\text{ج})$$

۷-۹-۵ قانون پلانک درباره تابش جسم سیاه، مستلزم انتگرال زیر است

$$\int_0^{\infty} \frac{x^r dx}{e^x - 1}$$

نشان دهید که این انتگرال برابر است با $\zeta(4)$. با استفاده از مسئله ۵-۹-۶ داریم

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

[راهنمایی: از تابع گاما در فصل ۱۰ استفاده کنید.]

۵-۹-۸ ثابت کنید

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n e^x dx}{(e^x - 1)^2} = n! \zeta(n)$$

با فرض آنکه n حقیقی باشد. نشان دهید که هر طرف معادله به ازای $n = 1$ و اگر می‌شود. از این رو، معادله بالا تحت شرط $n > 1$ برقرار است. با انتگرالهایی از این دست، در نظریه کوانتومی آثار تراپردی از قبیل رسانندگی الکتریکی و گرمایی برمی‌خوریم. ۵-۹-۹ تقریب بلوخ-گرون آیزن در مورد مقاومت در فلزات تک ظرفیتی به‌قرار زیر است

$$\rho = C \frac{T^0}{\Theta^6} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^5 dx}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})}$$

که در آن Θ دمای دبی مشخصه فلز است. (الف) نشان دهید که به‌ازای $T \rightarrow \infty$

$$\rho \approx \frac{C}{4} \cdot \frac{T}{\Theta^2}$$

(ب) نشان دهید که به‌ازای $T \rightarrow 0$

$$\rho \approx 5! \zeta(5) C \frac{T^0}{\Theta^6}$$

۵-۹-۱۰ نشان دهید

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{1}{4} \zeta(2) \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \zeta(2) \quad (\text{ب})$$

از مسئله ۵-۹-۶ داریم: $\zeta(2) = \pi^2/6$. دقت کنید که در قسمت (ب) انتگرالده به ازای $a = 1$ واگرا می شود ولی سری انتگرال گیری شده همگراست.
۵-۹-۱۱ انتگرال

$$\int_0^1 [\ln(1-x)]^2 \frac{dx}{x}$$

در تصحیح مرتبه چهارم درگشتاور مغناطیسی الکترون ظاهر می شود. نشان دهید که این انتگرال برابر است با $2\zeta(3)$.

[راهنمایی: قرار دهید $1-x = e^{-t}$]

۵-۹-۱۲ نشان دهید

$$\int_0^\infty \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} dz = 2 \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right)$$

می توان توسط انتگرال گیری پربندی (مسئله ۷-۲-۱۷) نشان داد که این انتگرال برابر است با $\pi^2/8$.
۵-۹-۱۳ به ازای مقادیر "کوچک" x داریم

$$\ln(x!) = -\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

که در آن γ ثابت اویلر-ماشرونی و $\zeta(n)$ تابع زتای ریمن است. این سری به ازای چه مقادیری از x همگرا می شود؟

جواب: $-1 < x \leq 1$

دقت کنید که هرگاه $x = 1$ ، سری زیر را برای ثابت اویلر-ماشرونی به دست می آوریم

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}$$

همگرایی این سری بسیار کند است. برای محاسبه γ ، روشهای غیرمستقیم دیگری وجود دارد که بسیار مناسبترند (مسئله های ۵-۹-۱۷ و ۵-۱۰-۱۱ و ۵-۱۰-۱۶ را ببینید).

۹-۵-۱۴ نشان دهید که بسط سری $\ln(x!)$ (مسئله ۹-۵-۱۳) را می‌شود به صورت زیر نوشت

$$\ln(x!) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi x}{\sin \pi x} \right) - \gamma x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} x^{2n+1} \quad (\text{الف})$$

$$\ln(x!) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi x}{\sin \pi x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + (1-\gamma)x - \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta(2n+1) - 1] \frac{x}{2n+1} \quad (\text{ب})$$

گستره همگرایی هر یک از این سه بسط را تعیین کنید.

۹-۵-۱۵ نشان دهید که ثابت کاتالان $\beta(2)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\beta(2) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (4k-3)^{-2} - \frac{\pi^2}{8}$$

[راهنمایی: $\pi^2 = 6\zeta(2)$]

۹-۵-۱۶ بسط زیر را برای تابع دبی استخراج کنید

$$\int_0^x \frac{t^n dt}{e^t - 1} = x^n \left[\frac{1}{n} - \frac{x}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k} x^{2k}}{(2k+n)(2k)!} \right] \quad (\text{الف})$$

$$|x| < 2\pi, n \geq 1$$

$$\int_x^{\infty} \frac{t^n dt}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} \left[\frac{x^n}{k} + \frac{nx^{n-1}}{k^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{k^3} + \dots + \frac{n!}{k^{n+1}} \right] \quad (\text{ب})$$

$$x > 0, n \geq 1$$

انتگرال کامل $(0, \infty)$ برابر است با $n!\zeta(n+1)$ (مسئله ۱۰-۲-۱۵).

۹-۵-۱۷ سریهای اعداد برنولی زیر را برای ثابت اویلر-ماشرونی به دست آورید:

$$\gamma = \sum_{s=1}^n s^{-1} - \ln n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)n^{2k}}$$

[راهنمایی: فرمول انتگرال‌گیری اویلر-مکلورن را برای $f(x) = x^{-1}$ در گستره $[n, N]$ به کار

برید.]

۱۸-۹-۵ (الف) نشان دهید که معادله $\ln 2 = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} s^{-1}$ (مسئله ۱-۴-۵) را می‌شود به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\ln 2 = \sum_{s=2}^{\infty} 2^{-s} \zeta(s) + \sum_{p=1}^{\infty} (2p)^{-n-1} \left[1 - \frac{1}{2p} \right]^{-1}$$

[راهنمایی: جملات را دو تا دو تا در نظر بگیرید.]

(ب) $\ln 2$ را تا شش رقم با معنا محاسبه کنید.

۱۹-۹-۵ (الف) نشان دهید که معادله $\pi/4 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1)^{-1}$ (مسئله ۶-۷-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2 \sum_{s=1}^n 4^{-2s} \zeta(2s) - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (4p)^{-2n-2} \left[1 - \frac{1}{(4p)^2} \right]^{-1}$$

(ب) $\pi/4$ را تا شش رقم با معنا محاسبه کنید.

۲۰-۹-۵ یک زیربرنامه تابعی ZETA(N) بنویسید که تابع زتای ریمان را به ازای شناسه‌های عدد صحیح محاسبه کند. $\zeta(s)$ را به ازای $s = 2, 3, 4, \dots, 20$ در یک جدول درج کنید. مقادیری را که به دست می‌آورد با مقایسه با جدول ۳-۵ و فصل ۲۳ کتاب AMS-۵۵ بیازمایید.

[راهنمایی: اگر در زیربرنامه تابعی، مقادیر $\zeta(2)$ ، $\zeta(3)$ و $\zeta(4)$ را وارد کنید، گرفتار سریهای با همگرایی کند نخواهید شد. زمان محاسبه را می‌توان با استفاده از معادله ۱۷۰-۵ از این هم کوتاهتر کرد.]

۲۱-۹-۵ لگاریتم (در مبنای ۱۰) $|B_{2n}|$ را به ازای $n = 10, 20, \dots, 100$ محاسبه کنید.

[راهنمایی: برنامه تابع زتا را به صورت یک زیربرنامه تابعی بنویسید (مسئله ۹-۵-۲۰).]

$$\text{مقادیر آزمون: } \log|B_{100}| = 78,45$$

$$\log|B_{200}| = 215,56$$

۱۰-۵ سریهای مجانبی یا نیم همگرا

در فیزیک با سریهای مجانبی زیادی سروکار داریم. در محاسبات عددی، این سریها را برای محاسبه دقیق توابع مختلف به کار می‌گیرند. در اینجا دو نوع انتگرال را که به سریهای مجانبی منجر

می‌شوند، در نظر می‌گیریم، انتگرال اول به‌قرار زیر است

$$I_1(x) = \int_x^{\infty} e^{-u} f(u) du$$

که در آن متغیر x به‌صورت حد پایین انتگرال ظاهر می‌شود. انتگرال دوم به‌صورت زیر است

$$I_2(x) = \int_0^x e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) du$$

که در آن تابع f را باید به‌صورت یک سری تیلور (سری دو جمله‌ای) بسط داد. سریهای مجانبی اغلب در جوابهای معادله‌های دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. مثلاً در بخش ۱۱-۶ یک سری مجانبی به‌عنوان جواب معادلهٔ بسط ظاهر می‌شود.

تابع گامای کامل

برای نمایش ماهیت سریهای مجانبی، شاید بهتر باشد یک مثال خاص را در نظر بگیریم. فرض کنید که قرار باشد تابع انتگرال نمایی^۱ زیر را به‌ازای مقادیر بزرگ x محاسبه کنیم

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du \quad (174-5)$$

یا

$$-Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = E_1(x) \quad (175-5)$$

یا باز هم یک کار بهتر، و آن اینکه تعمیمی از تابع فاکتوریل ناکامل (تابع گامای ناکامل)^۲ را در نظر می‌گیریم

$$I(x, p) = \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p} du = \Gamma(1-p, x) \quad (176-5)$$

که در آن x و p مثبت‌اند. در اینجا نیز می‌خواهیم این انتگرال را به‌ازای مقادیر بزرگ x محاسبه

۱. در مسائل اخترفیزیکی، شامل گازهای با توزیع انرژی ماکسول-بولتزمن، بارها به این تابع برمی‌خوریم.

۲. بخش ۱۰-۵ را نیز ببینید.

کنیم. با انتگرالگیری جزء به جزء می‌رسیم به

$$\begin{aligned} I(x, p) &= \frac{e^{-x}}{x^p} - p \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-1} du \\ &= \frac{e^{-x}}{x^p} - \frac{pe^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1) \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-2} du \end{aligned} \quad (177-5)$$

با ادامهٔ انتگرالگیری جزء به جزء، سری زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} I(x, p) &= e^{-x} \left(\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \dots \right) \\ &\quad + (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-n} du \end{aligned} \quad (178-5)$$

این سری جالب توجهی است. همگرایی آن را به کمک آزمون نسبت دالامبر می‌آزماییم، به‌ازای همهٔ مقادیر متناهی x خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+n)!}{(p+n-1)!} \times \frac{1}{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p+n}{x} \\ &= \infty \end{aligned} \quad (179-5)$$

بنابراین، سری ما به‌عنوان یک سری نامتناهی در همهٔ نقاط واگراست! پیش از آنکه معادلهٔ ۱۷۸-۵ را به‌عنوان بی‌ارزش بودن مردود بدانیم، بررسی می‌کنیم که یک مجموع جزئی تا چه پایه تقریب خوبی برای تابع فاکتوریل ناکامل $I(x, p)$ است.

$$I(x, p) - s_n(x, p) = (-1)^{n+1} \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-n-1} du = R_n(x, p) \quad (180-5)$$

برحسب مقادیر مطلق داریم

$$|I(x, p) - s_n(x, p)| \leq \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-n-1} du$$

قرار می‌دهیم $u = v + x$ ، انتگرال به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-n-1} du &= e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-v} (v+x)^{-p-n-1} dv \\ &= \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}} \int_0^{\infty} e^{-v} \left(1 + \frac{v}{x}\right)^{-p-n-1} dv \end{aligned}$$

انتگرال آخری به ازای مقادیر بزرگ x به یک نزدیک می‌شود و

$$|I(x, p) - s_n(x, p)| \approx \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}} \quad (181-5)$$

یعنی، اگر x را به اندازه کافی بزرگ بگیریم، مجموع جزئی s_n هر قدر که بخواهیم تقریب خوبی برای تابع مورد نظر $I(x, p)$ است. بنابراین، سری واگرای ما (معادله ۱۷۸-۵) برای محاسبه کاملاً خوب است. به همین دلیل گاهی وقتها آن را یک سری نیم همگرا می‌نامند. توجه کنید که توان x در مخرج باقیمانده $(p+n+1)$ ، از توان x در آخرین جمله‌ای که در $s_n(x, p)$ در نظر گرفته شده است، $(p+n)$ ، بزرگتر است.

از آنجا که باقیمانده $R_n(x, p)$ تغییر علامت می‌دهد، مجموعه‌های جزئی پی‌درپی، یک در میان کران بالا و پایین $I(x, p)$ را می‌دهند. در شکل ۱۱-۵ رفتار این سری (با $p=1$) به صورت تابعی از تعداد جملات در نظر گرفته شده نشان داده شده است. داریم

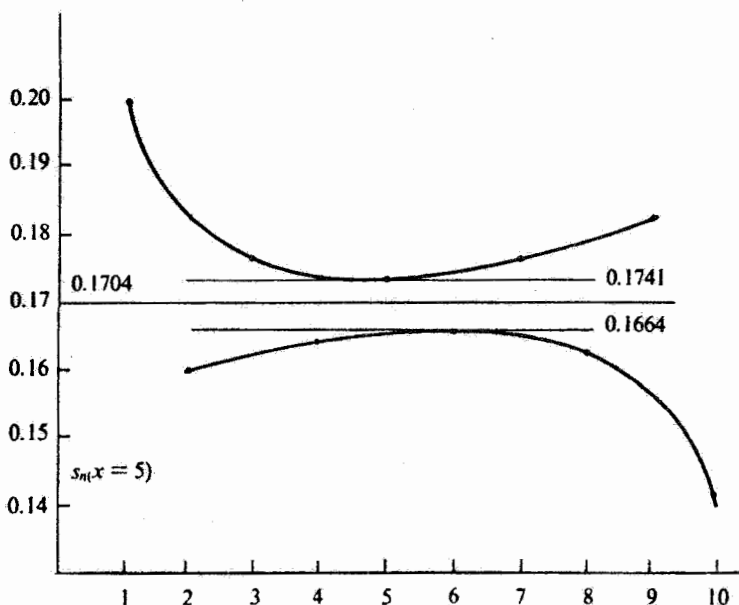
$$\begin{aligned} e^x E_1(x) &= e^x \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots \end{aligned} \quad (182-5)$$

که در $x=5$ محاسبه شده است. کرانهای بالا و پایین که از مجموعه‌های جزئی به دست می‌آیند به ازای یک مقدار معلوم x نخست همگرا و سپس واگرا می‌شوند. در نتیجه، در جایی که کرانهای بالا و پایین از همه جای دیگر به یکدیگر نزدیک‌ترند، یعنی به ازای $x=5$ ، بین $s_4 = s_6 = 0.1664$ و $s_5 = 0.1741$ بهترین مقدار را برای $e^x E_1(x)$ داریم. بنابراین

$$0.1664 \leq e^x E_1(x)|_{x=5} \leq 0.1741 \quad (183-5)$$

در واقع، با توجه به جدولها داریم

$$e^x E_1(x)|_{x=5} = 0.1704 \quad (184-5)$$

شکل ۱۱-۵ مجموعه‌های جزئی $e^x E_1(x)|_{x=5}$.

این مقدار داخل محدوده‌ای است که توسط بسط مجانبی به دست آوردیم. دقیقاً توجه کنید که شمول جمله‌های اضافی در بسط سری فراتر از نقطهٔ بهین، عملاً از دقت نمایش سری می‌کاهد.

با افزایش x ، فاصلهٔ بین کمترین کران بالا و بزرگترین کران پایین از بین می‌رود. اگر x را به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم، می‌توانیم $e^x E_1(x)$ را تا هر دقت دلخواهی محاسبه کنیم. سایر ویژگیهای $E_1(x)$ در بخش ۵-۱ ظاهر می‌شوند و مورد بررسی قرار می‌گیرد.

انتگرالهای کسینوسی و سینوسی

سریهای مجانبی را می‌شود از انتگرالهای معین نیز به دست آورد، به شرط آنکه رفتار انتگرالده مطلوب باشد. مثلاً، انتگرالهای کسینوسی و سینوسی (بخش ۵-۱)، بنابر تعریف، عبارت‌اند از

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (185-5)$$

$$si(x) = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (186-5)$$

از ترکیب این رابطه‌ها با توابع مثلثاتی معمولی، می‌توانیم توابع زیر را تعریف کنیم

$$f(x) = Ci(x) \sin x - si(x) \cos x = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y+x} dy \quad (187-5)$$

$$g(x) = -Ci(x) \cos x - si(x) \sin x = \int_0^{\infty} \frac{\cos y}{y+x} dy$$

در این رابطه‌ها تغییر متغیر جدید $y = t - x$ صورت گرفته است. با در نظر گرفتن متغیرهای مختلط، بخش ۱-۶، داریم

$$\begin{aligned} g(x) + if(x) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{iy}}{y+x} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{ie^{-xu}}{1+iu} du \end{aligned} \quad (188-5)$$

که در آن $u = -iy/x$. درستی حدود انتگرال را که به‌جای از صفر تا $-i\infty$ ، از صفر است تا ∞ ، می‌شود به‌کمک قضیهٔ کوشی، بخش ۳-۶، تحقیق کرد. با گویا کردن مخرج و برابر نهادن اجزای حقیقی با هم و اجزای موهومی با هم، می‌رسیم به

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{ue^{-xu}}{1+u^2} du \quad (189-5)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{1+u^2} du$$

برای آنکه سری همگرا باشد، باید داشته باشیم: $\mathcal{R}(x) > 0$

اکنون برای دستیابی به بسط‌های مجانبی، قرار می‌دهیم $v = xu$ و عامل $[1 + (v/x)^2]^{-1}$ را به‌کمک قضیهٔ دوجمله‌ای بسط می‌دهیم.^۲ داریم

$$f(x) \approx \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{v^{2n}}{x^{2n}} dv = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} \quad (190-5)$$

$$g(x) \approx \frac{1}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{v^{2n+1}}{x^{2n}} dv = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}}$$

۱. $\mathcal{S}(x) =$ جزء حقیقی x (مختلط) (با بخش ۱-۶ مقایسه کنید).

۲. این بسط به‌ازای $x \leq v$ صادق است. سهم ناشی از $v \geq x$ (به‌ازای x بزرگ) به دلیل منفی بودن نما، قابل چشم‌پوشی است. سری نهایی ما به‌جای همگرا بودن، مجانبی است، زیرا بسط دوجمله‌ای به‌ازای $v \geq x$ همگرا نمی‌شود.

از معادلات ۱۸۷-۵ و ۱۹۰-۵ بسطهای مجانبی مطلوب را به دست می آوریم

$$Ci(x) \approx \frac{\sin x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\cos x}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}} \quad (191-5)$$

$$si(x) \approx -\frac{\cos x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\sin x}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}}$$

در بخش ۱۱-۶ همین شگرد بسط انتگرالده یک انتگرال معین و انتگرال گیری جمله به جمله، برای انجام بسط مجانبی تابع تعدیل یافته بسل، K_v ، به کار رفته است و در بخش ۱۳-۶ نیز برای به دست آوردن بسطهای دو تابع فوق هندسی همشار $M(a, c; x)$ و $U(a, c; x)$ ، به همین روش عمل کرده ایم.

تعریف سری مجانبی

رفتار این سریها (معادلات ۱۷۸-۵ و ۱۹۱-۵) با ویژگیهای معرف یک سری مجانبی سازگار است.^۱ با اقتباس از پوانکاره^۲، می گیریم

$$x^n R_n(x) = x^n [f(x) - s_n(x)] \quad (192-5)$$

که در آن

$$s_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \quad (193-5)$$

خواص بسط مجانبی $f(x)$ عبارت اند از

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n R_n(x) = 0 \quad \text{به ازای } n \text{ معین} \quad (194-5)$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n R_n(x) = \infty \quad \text{به ازای } x \text{ معین} \quad (195-5)$$

۱. حتماً لازم نیست که سری مجانبی یک سری توانی باشد. خاصیت مطلوب به این ترتیب است که، مانند معادله ۱۹۴-۵، مرتبه باقیمانده، $R_n(x)$ ، از مرتبه آخرین جمله نگه داشته شده بالاتر باشد.
۲. در تعریف پوانکاره، وجود توابع نزولی نمایی مجاز است (نادیده گرفته می شود). در نظریه پیشرفته بسطهای مجانبی، خصوصاً برای تعمیم به صفحه مختلط، دقیقتر کردن تعریف پوانکاره اهمیت زیادی دارد. ولی برای برآوردن منظور ما، که یک بررسی مقدماتی است، و خصوصاً برای محاسبه های عددی با x حقیقی و مثبت، روش پوانکاره کاملاً رضایتبخش است.
۳. این حکم شامل سریهای همگرا از توانهای وارون x نمی شود. برخی مؤلفان اعتقاد دارند که این توزیع و این استثنا کردن، تصنعی و غیرلازم است.

برای سریهای توانی، مطابق فرض شکل $s_n(x)$ ، $R_n(x) \sim x^{-n-1}$ در صورتی که شرایط ۱۹۴-۵ و ۱۹۵-۵ برقرار باشند، می‌نویسیم

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \quad (۱۹۶-۵)$$

دقت کنید که به جای = قرار داده‌ایم \approx . تابع $f(x)$ فقط در حد $x \rightarrow \infty$ با سری برابر می‌شود. بسطهای مجانبی دو تابع را می‌توان در یکدیگر ضرب کرد و نتیجه حاصل، بسط مجانبی حاصلضرب دو تابع خواهد بود.

از جمله به جمله بسط مجانبی یک تابع می‌توان (درست مانند سریهای همگرای یکنواخت از تابعهای پیوسته) از $x \leq t < \infty$ انتگرال گرفت و حاصل این انتگرال‌گیری برابر بسط مجانبی $\int_x^{\infty} f(t) dt$ است. ولی مشتق‌گیری جمله به جمله فقط تحت شرایط خاصی صادق است. برخی توابع بسط مجانبی ندارند؛ e^x نمونه‌ای از این توابع است. در هر حال، اگر تابعی بسط مجانبی داشته باشد، این بسط فقط یکی خواهد بود. تناظر یک به یک نیست؛ بسط مجانبی بسیاری از توابع ممکن است یکی باشد.

در بخش ۷-۴ یکی از مفیدترین و قویترین روشهای تولید بسطهای مجانبی، یعنی روش تندترین کاهش، مطرح خواهد شد. از جمله کاربردهای این روش، می‌توان استخراج فرمول استرلینگ برای تابع فاکتوریل (کامل) (بخش ۱۰-۳)، و صورت مجانبی توابع مختلف بسط (بخش ۱۱-۶) را نام برد. سریهای مجانبی در ریاضی فیزیک نیز نسبتاً فراوان ظاهر می‌شوند. یکی از نخستین بررسیهای تقریبی مکانیک کوانتومی که هنوز هم اهمیت دارد، یعنی بسط دبلوک بی، یک سری مجانبی است.

کاربردهای مربوط به محاسبه

در کامپیوترهای الکترونیکی سریع جدید، بارها برای محاسبه توابع، از سریهای مجانبی آنها استفاده می‌شود. این عمل در مورد توابع نویمان، $N_0(x)$ و $N_1(x)$ ، و توابع تعدیل‌یافته بسط، $I_n(x)$ و $K_n(x)$ ، صادق است. سریهای مجانبی مربوط، به صورت معادلات ۱۱-۱۲۷ و ۱۱-۱۳۴ و ۱۱-۱۳۶ آمده‌اند. بحث جامعتری در باب این توابع را به بخش ۱۱-۶ واگذار می‌کنیم. از سریهای مجانبی مربوط به انتگرال‌نمایی معادله ۵-۱۸۲ و انتگرالهای فرنل، مسئله ۵-۱۰-۲، و تابع خطای گاوس، مسئله ۵-۱۰-۴، برای محاسبه این انتگرالها به ازای مقادیر بزرگ شناسه استفاده می‌کنند. اینکه شناسه چقدر باید بزرگ باشد، به دقت مورد نظر بستگی دارد. در عمل، مطابق بحثی که در بخش ۱۳-۴ خواهد آمد، جزء نامحدودی از سری مجانبی را با استفاده از شگردهای چیبیشف برای بهینه‌سازی دقت در هم ادغام می‌کنیم.

مسائل

۵-۱۰-۱ فرمول استرلینگ برای لگاریتم تابع فاکتوریل به قرار زیر است

$$\ln(x!) = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} x^{1-2n}$$

B_n اعداد برنولی اند (بخش ۵-۹). نشان دهید که فرمول استرلینگ یک بسط مجانبی است. ۵-۱۰-۲ با انتگرال‌گیرهای جزء به جزء بسطهای مجانبی، انتگرالهای فرنل را به دست آورید

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi u^2}{2} du \quad (\text{الف})$$

$$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi u^2}{2} du \quad (\text{ب})$$

این انتگرالها در بررسی نقش پراش حاصل از لبه چاقو ظاهر می‌شوند.

۵-۱۰-۳ بسطهای مجانبی $Ci(x)$ و $si(x)$ را بار دیگر به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء پی‌درپی استخراج کنید

$$[Ci(x) + isi(x) = - \int_x^{\infty} e^{it}/t dt]$$

۵-۱۰-۴ بسط مجانبی تابع خطای گاوس را استخراج کنید

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \times 3}{2^2 x^4} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 x^6} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$[\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x) = 1 - (2\sqrt{\pi}) \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt]$$

این تابع، که طوری بهنجار شده که $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ ، در نظریه احتمال نقش مهمی ایفا می‌کند. آن را می‌شود برحسب انتگرالهای فرنل (مسئله ۵-۱۰-۲)، تابعهای گامای ناکامل (بخش ۵-۱۰) و توابع فوق هندسی هم‌شار (بخش ۱۳-۶) نمایش داد.

۵-۱۰-۵ عبارتهای مجانبی برای توابع مختلف بسط (بخش ۱۱-۶) شامل سریهای زیر است

$$P_\nu(z) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\prod_{s=1}^{\nu n} [4\nu^2 - (2s-1)^2]}{(2n)!(\Lambda z)^{2n}}$$

$$Q_\nu(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\prod_{s=1}^{\nu n-1} [4\nu^2 - (2s-1)^2]}{(2n-1)!(\Lambda z)^{2n-1}}$$

نشان دهید که این دو سری در واقع سریهای مجانبی اند.
 ۵-۱۰-۶ به ازای $x > 1$ داریم

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^n}$$

این سری را بیازمایید و ببینید که آیا یک سری مجانبی هست یا خیر؟
 ۵-۱۰-۷ ثابت اوایل-ماشرونی γ در مسئله ۵-۹-۱۷ توسط سری اعداد برنولی زیر مشخص شد

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)n^{2k}}$$

نشان دهید که این عبارت یک سری مجانبی است.
 ۵-۱۰-۸ یک سری مجانبی برای انتگرال زیر به دست آورید

$$\int_0^{\infty} e^{-xv} (1+v^2)^{-2} dv$$

x را حقیقی و مثبت بگیرید.

جواب: $\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \dots + \frac{(-1)^n (2n)!}{x^{2n+1}}$

۵-۱۰-۹ مجموعه‌های جزئی $e^x E_n(x)$ را به ازای $5, 10, 15$ حساب کنید و رفتار بروز یافته در شکل ۵-۱۱ را، نمایش دهید. عرض گوی منحنی را به ازای $x = 10$ و $x = 15$ ، شبیه معادله ۵-۱۸۳، تعیین کنید

جواب: عرض گلو $n = 10$ 0.000051
 $n = 15$ 0.0000002

۵-۱۰-۱۰ نقشه پراش ناشی از لبه چاقو با عبارت زیر توصیف می‌شود

$$I = 0.5 I_0 \{ [C(u_0) + 0.5]^2 + [S(u_0) + 0.5]^2 \}$$

که در آن $C(u_0)$ و $S(u_0)$ انتگرالهای فرنل اند. در این رابطه، I_0 شدت فرودی و I شدت پراشیده است. u_0 با فاصله از لبه چاقو (که تحت زاویه قائمه با باریکه عمودی اندازه‌گیری می‌شود) متناسب است. I/I_0 را به ازای u_0 که از 10^{-1} تا 10^4 در گامهایی برابر 10^0 تغییر می‌کند، محاسبه کنید. نتایج حاصل را در جدولی درج کنید و اگر یک برنامه رسم در اختیار دارید، آنها را ترسیم کنید.

مقدار آزمونی: $I/I_0 = 1,259226, n_0 = 10^9$
 ۱۱-۱۰-۵ فرمول انتگرالگیری اویلر-مکلورن بخش ۹-۵ راهی برای محاسبه ثابت اویلر-ماشرونی γ با دقت زیاد ارائه می‌کند. با استفاده از $f(x) = 1/x$ در معادله ۱۶۸-۵ ب (با بازه $[1, n]$) و تعریف γ در معادله ۲۸-۵، می‌رسیم به

$$\gamma = \sum_{s=1}^n s^{-1} - \ln n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)n^{2k}}$$

با استفاده از محاسبات دقت مضاعف، γ را محاسبه کنید.
 محاسبه باز هم دقیقتری در مسئله ۱۰-۵-۱۶ خواهد آمد.

جواب: به ازای $n = 1000$ ، $\gamma = 0,577215664901$.

۱۱-۵ حاصلضربهای نامتناهی

توالی‌ای از عوامل مثبت $(f_i > 0)$ ، $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdots f_n$ را در نظر بگیرید. از حرف یونانی پی بزرگ برای نمایش ضرب استفاده می‌کنیم (همان‌طور که سیگمای بزرگ را برای نمایش جمع به‌کار می‌بریم)، داریم

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n = \prod_{i=1}^n f_i \quad (197-5)$$

در تشابه با مجموعه‌های جزئی s_n ، حاصلضربهای جزئی p_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p_n = \prod_{i=1}^n f_i \quad (198-5)$$

آنگاه به بررسی حد زیر می‌پردازیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = P \quad (199-5)$$

اگر P متناهی (و غیرصفر) باشد، می‌گوییم حاصلضرب نامتناهی همگراست. اگر P بینهایت یا صفر شود، حاصلضرب نامتناهی را واگرا می‌نامیم

۱. یادآوری:

از آنجا که به ازای

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n > 1 \quad (200-5)$$

حاصلضرب به بینهایت واگرا خواهد شد، و به ازای

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n < 1 \quad (\text{و یا } 0 >) \quad (201-5)$$

حاصلضرب صفر خواهد شد، بهتر است که حاصلضرب نامتناهی را به صورت زیر بنویسیم

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

در این صورت، شرط لازم (نه کافی) برای همگرایی آن است که $a_n \rightarrow 0$. حاصلضرب نامتناهی را می توان به کمک روش کاملاً بدیهی لگاریتم گیری به سری نامتناهی تبدیل کرد:

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) \quad (202-5)$$

همگرایی حاصلضرب نامتناهی

اگر $0 \leq a_n < 1$ ، آنگاه حاصلضربهای نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ و $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ در صورتی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، همگرا، و در صورتی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، واگرا می شوند. جمله $1 + a_n$ را در نظر بگیرید؛ از معادله ۹۰-۵ داریم

$$1 + a_n \leq e^{a_n} \quad (203-5)$$

بنابراین، برای حاصلضرب جزئی p_n داریم

$$p_n \leq e^{s_n} \quad (204-5)$$

و با میل کردن $n \rightarrow \infty$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \leq \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (205-5)$$

به این ترتیب، یک کران بالا برای حاصلضرب نامتناهی به دست می آید.
برای مشخص کردن یک کران پایین، توجه می کنیم که

$$p_n = 1 + \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j + \dots, > s_n \quad (206-5)$$

زیرا $a_i \geq 0$ از این رو،

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (207-5)$$

اگر مجموع نامتناهی، متناهی بماند، حاصلضرب نامتناهی نیز متناهی خواهد ماند. اگر مجموع نامتناهی واگرا شود، حاصلضرب نامتناهی نیز واگرا می شود.

حالت $\prod (1 - a_n)$ به دلیل علامتهای منفی پیچیده تر است، ولی می توان براساس اثباتی که هم اکنون ارائه شد، آن را اثبات کرد؛ توجه می کنیم که به ازای $a_n < 1/2$ (به یاد داشته باشید که برای همگرایی باید $a_n \rightarrow 0$)

$$(1 - a_n) \leq (1 + a_n)^{-1}$$

و

$$(1 - a_n) \geq (1 + 2a_n)^{-1} \quad (208-5)$$

توابع سینوسی، کسینوسی و گاما

ملاحظه می شود که چندجمله ای مرتبه n ، $P_n(x)$ ، را که n ریشه حقیقی دارد می توان به صورت حاصلضرب n عامل نوشت

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad (209-5)$$

به همین ترتیب می توانیم انتظار داشته باشیم که تابعی را که بینهایت ریشه داشته باشد، بشود به صورت یک حاصلضرب نامتناهی نوشت. در واقع، برای توابع مثلثاتی وضعیت به همین

صورت است

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad (210-5)$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right] \quad (211-5)$$

مناسبتین، و شاید دقیقترین روش استخراج دو عبارت بالا، استفاده از متغیرهای مختلط است.^۱ معادلات ۲۱۰-۵ و ۲۱۱-۵، با استفاده از قضیه‌ای که درباره همگرایی بیان شد، به‌ازای همه مقادیر متناهی x همگرا هستند. در حالت خاص، حاصلضرب نامتناهی مربوط به $\sin x$ با $a_n = x^2/n^2 \pi^2$ را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{x^2}{\pi^2} \zeta(2) \\ &= \frac{x^2}{6} \end{aligned} \quad (212-5)$$

که در آن، در مرحله آخر، از نتیجه مسئله ۹-۵-۶ استفاده شده است. سری متناظر با معادله ۲۱۱-۵ نیز رفتار مشابهی دارد.

معادله ۲۱۰-۵ به دو نتیجه جالب می‌انجامد. نخست، اگر قرار دهیم $x = \pi/2$ می‌رسیم به

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2n)^2} \right] = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2} \right] \quad (213-5)$$

$\pi/2$ را محاسبه می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \right] \\ &= \frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \frac{6 \times 6}{5 \times 7} \dots \end{aligned} \quad (214-5)$$

۱. استخراج این عبارتها در بخش ۷-۳ ویرایش اول و دوم همین کتاب آمده است. معادله ۲۱۰-۵ را می‌شود از قضیه فاکتورگیری ویراشتراوس نیز به‌دست آورد.

که این فرمول مشهور وایلس برای $\pi/2$ است. نتیجه دوم به تابع گامبل یا فاکتوریل (بخش $1-1^{\circ}$) مربوط می‌شود. یکی از تعریفها برای تابع گاما به صورت زیر است

$$\Gamma(x) = \left[x e^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r} \right) e^{-x/r} \right]^{-1} \quad (215-5)$$

که در آن γ ثابت اویلر-ماشرونی متداول است (با بخش 2-5 مقایسه کنید). اگر $\Gamma(x)$ و $\Gamma(-x)$ را در هم ضرب کنیم، معادله 215-5 به رابطه زیر می‌انجامد

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(-x) &= - \left[x e^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r} \right) e^{-x/r} x e^{-\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{r} \right) e^{x/r} \right]^{-1} \\ &= - \left[x^2 \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (216-5)$$

با استفاده از معادله 210-5، که در آن πx به جای x نشسته است، می‌رسیم به

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x} \quad (217-5)$$

با استفاده از یک رابطه بازگشتی که در بخش $1-1^{\circ}$ به دست می‌آید، داریم $-\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$. در نتیجه، معادله 217-5 را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (218-5)$$

این رابطه وقتی مفید خواهد بود که به بررسی تابع گاما (فصل 1°) می‌پردازیم. به بیان دقیقتر باید گستره x را پیدا کنیم که به ازای آن معادله 215-5 همگراست. روشن است که به ازای هر یک از مقادیر $0, -1, -2, \dots$ یکی از عاملها صفر می‌شود. اثبات این نکته که به ازای همه مقادیر (متناهی) دیگر x ، حاصلضرب نامتناهی همگراست به مسئله 9-11-5 واگذار شده است.

این حاصلضربهای نامتناهی کاربردهای گوناگونی در تحلیل ریاضی دارند. ولی این حاصلضربها به دلیل همگرایی کندی که دارند، برای عملیات عددی دقیق مناسب نیستند.

مسائل

۵-۱۱-۱ با استفاده از عبارت

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 \pm a_n)$$

و بسط مکلورن $\ln(1 \pm a_n)$ ، نشان دهید که حاصلضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm a_n)$ مانند $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا یا واگرا می‌شود.

۵-۱۱-۲ حاصلضرب نامتناهی زیر را در نظر بگیرید

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + a/n}{1 + b/n} \right)$$

که در آن a و b ثابت‌اند. نشان دهید که این حاصلضرب نامتناهی فقط در صورتی همگرا می‌شود که $a = b$.

۵-۱۱-۳ نشان دهید که نمایشهای حاصلضرب نامتناهی $\sin x$ و $\cos x$ با اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ سازگار است.

۵-۱۱-۴ حدی را که حاصلضرب نامتناهی زیر به سوی آن همگرا می‌شود، به دست آورید

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

۵-۱۱-۵ نشان دهید که

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}$$

۵-۱۱-۶ ثابت کنید که

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

۷-۱۱-۵ با استفاده از نمایشهای حاصلضرب نامتناهی $\sin x$ نشان دهید که

$$x \cot x = 1 - 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi} \right)^{2m}$$

و در نتیجه، نشان دهید که عدد برنولی عبارت است از

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$$

۸-۱۱-۵ درستی اتحاد اویلر را تحقیق کنید

$$\prod_{p=1}^{\infty} (1 + z^p) = \prod_{q=1}^{\infty} (1 - z^{2q-1})^{-1} \quad |z| < 1$$

۹-۱۱-۵ نشان دهید که $\prod_{r=1}^{\infty} (1 + x/r) e^{-x/r}$ به ازای همه x های متناهی (به استثنای صفرهای $(1 + x/r)$ همگرا می شود.

[راهنمایی: عامل m را به صورت $1 + a_m$ بنویسید.]

۱۰-۱۱-۵ $\cos x$ را با استفاده از نمایش حاصلضرب نامتناهی آن، معادله ۲۱۱-۵، با در نظر گرفتن: (الف) ۱۰ عامل، (ب) ۱۰۰ عامل، (ج) ۱۰۰۰ عامل در حاصلضرب محاسبه کنید. خطای مطلق را محاسبه کنید. توجه کنید که حاصلضربهای جزئی به چه کندی همگرا می شوند؛ همین امر باعث می شود که حاصلضرب نامتناهی برای عملیات عددی دقیق خیلی نامناسب باشد.

جواب: برای ۱۰۰۰ عامل $\cos \pi = -1.000051$.

مراجع

Bender C M and S Orszag, *Advanced Methods for Scientists and Engineers*, New York, McGraw-Hill (1978).

این کتاب به خصوص برای روشهای شتاب دادن به همگرایی توصیه می شود.

Davis H T, *Tables of Higher Mathematical Functions*, Bloomington, Principia Press (1935).

جلد دوم این کتاب حاوی اطلاعات گسترده ای درباره اعداد برنولی و چند جمله ایهاست.

Dingle R B, *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*, London and New York, Academic Press (1973).

Gradshteyn I S and I N Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, New York: Academic Press (1980).

ویرایش تصحیح شده و بزرگتر شده این کتاب توسط Alan Jeffrey تهیه شده است

Hansen E, A, *Table of Series and Products*, Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, Inc (1975).

این کتاب حاوی تعداد زیادی از سریها و حاصلضربهاست.

Hardy G H, *Divergent Series*, Oxford, Clarendon Press (1956).

این کتاب، کار استاندارد و گسترده‌ای روی روشهای بررسی سریهای واگراست. هاردی در این کتاب پیدایش تدریجی مفاهیم همگرایی و واگرایی را به صورت آموزنده‌ای توجیه می‌کند.

Knopp Konard, *Theory and Application of Infinite Series*, London, Blackie and Son (1946). تجدید چاپ .

این اثر، کاری کامل، جامع و معتبر است که سریها و حاصلضربهای نامتناهی را کاملاً توضیح می‌دهد. اثبات تقریباً همه گزاره‌هایی که در فصل ۵ بدون اثبات بیان شده در این کتاب یافت می‌شود.

Mangulis V, *Handbook of Series for Scientists and Engineers*, New York and London, Academic Press (1965).

این کتاب مناسبترین و مفیدترین مجموعه سریها را گرد آورده است، و شامل توابع جبری، سری فوریه و سری توابع خاص بسل، لژاندر و مانند آنهاست.

Oliver F W J, *Asymptotics and Special Functions*, New York, Academic Press (1974).

این کتاب حاوی مطالبی خواندنی و مشروح در خصوص نظریهٔ مجانبی است. در آن به کرانه‌های خطا برای استفاده در محاسبه توجه خاصی مبذول شده است.

Rainville E D, *Infinite Series*, New York: Macmillan Co (1967).

این کتاب حاوی توجیهی خواندنی و مفید برای سریها، ثابتها و توابع است.

Sokolnikoff I S and R M Redheffer, *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, 2nd ed, New York: McGraw-Hill (1966).

در فصل دوم این کتاب که خیلی طولانی است (۱۰۱ صفحه)، سریهای نامتناهی به صورتی کامل و خواندنی ارائه شده است: تعمیم به جوابهای معادلات دیفرانسیل و سریهای مختلط و سری فوریه نیز در آن گنجانده شده است.

مبحث سریهای نامتناهی در بسیاری از کتابهای محاسبات پیشرفته مورد بحث قرار می‌گیرد.

تابعهای متغیر مختلط I

ویژگیهای تحلیلی، نگاشت

عددهای موهومی پرواز شگفت‌انگیز روح خدایند. این اعداد
هویت دوگانه‌ای بین بودن و نبودن دارند.

گاتر فید ویلهلم فون لایبنیتس ۱۷۰۲ میلادی

اینک به بررسی تابعهای متغیر مختلط می‌پردازیم. در این حوزه، برخی از قویترین، مفیدترین، و پرکاربردترین ابزارهای تحلیل ریاضی را مطرح خواهیم کرد. برای آنکه دست‌کم تا حدودی اهمیت متغیرهای مختلط را نمایش دهیم، چند مبحث از کاربردهای آنها را به اختصار برمی‌شمریم.

۱. در مورد بسیاری از زوج تابعهای u و v ، هم u و هم v در معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

صدق می‌کنند. از این رو، یا u یا v را می‌توان برای توصیف پتانسیل الکتروستاتیکی دوبعدی به‌کار برد. آنگاه می‌توان از تابع دیگر برای توصیف میدان الکتریکی \mathbf{E} بهره گرفت که یک دسته از

منحنیهای عمود بر منحنیهای مربوط به تابع اول را ارائه می‌کند. در مبحث دینامیک شاره‌ها نیز برای یک شارۀ ایده‌آل، با حرکت ناچرخشی، وضعیت به همین منوال است. تابع u باید پتانسیل سرعت را توصیف کند، در حالی که تابع v ، تابع جریان خواهد بود.

در موارد زیادی که تابعهای u و v مجهول‌اند، می‌توانیم به یاری نگاشت یا تبدیل در صفحه مختلط، دستگاه مختصاتی مناسب با مسئله مورد نظر بسازیم.

۲. در فصل ۸ خواهیم دید که معادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ دومی را که در فیزیک مطرح می‌شوند، می‌توان به کمک سری توانی حل کرد. اگر به جای x متغیر مختلط z را قرار دهیم، همین سری توانی را می‌توان در صفحهٔ مختلط نیز به کار برد. وابستگی جواب $f(z)$ در نقطهٔ معلوم z_0 ، به رفتار $f(z)$ در هر جای دیگر، نگرش گسترده‌تری دربارهٔ جواب به ما می‌دهد و ابزاری قوی (ادامهٔ تحلیلی) برای گستردن ناحیه‌ای به شمار می‌آید که در آن جواب صادق است.

۳. با تغییر پارامتر k از حقیقی به موهومی، $k \rightarrow ik$ ، معادلهٔ هلمهولتز به معادلهٔ پخش تبدیل می‌شود. همین تغییر جوابهای معادلهٔ هلمهولتز (تابعهای بسل و بسل کروی) را به جوابهای معادلهٔ پخش (تابعهای تعدیل‌یافتهٔ بسل و تعدیل‌یافتهٔ بسل کروی) تبدیل می‌کند.

۴. کاربرد انتگرالها در صفحهٔ مختلط در موارد زیر بسیار متنوع و مفید است.

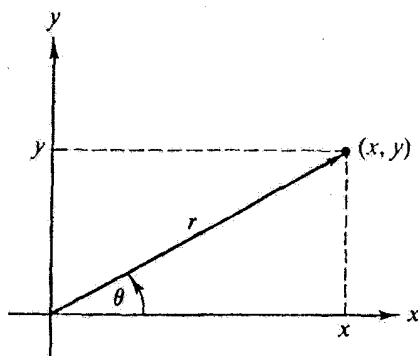
- (الف) محاسبهٔ انتگرالهای معین
- (ب) وارون کردن سریهای توانی
- (ج) تشکیل حاصلضربهای نامتناهی
- (د) دستیابی به جوابهای معادله‌های دیفرانسیل به ازای مقادیر بزرگ متغیر (جوابهای مجانبی)
- (ه) بررسی پایداری دستگاههای بالقوه نوسانی
- (و) وارون کردن تبدیلهای انتگرالی.

۵. در هنگام تعمیم یک نظریهٔ سادهٔ فیزیکی، بسیاری از کمیتهای فیزیکی که در اصل حقیقی بودند، به مختلط تبدیل می‌شوند. ضریب شکست نور که کمیتهای حقیقی است، با در نظر گرفتن جذب، به کمیتهای مختلطی تبدیل می‌شود. انرژی مربوط به یک تراز انرژی هسته‌ای که حقیقی است، با در نظر گرفتن طول عمر محدود تراز انرژی، به صورت مختلط در می‌آید.

۱-۶ جبر مختلط

عدد مختلط چیزی نیست مگر زوج مرتبی از اعداد معمولی، (a, b) یا $a + ib$ ، که در آن i عبارت است از $(-۱)^{1/2}$. به همین ترتیب، متغیر مختلط نیز زوج مرتبی از متغیرهای حقیقی است

$$z = (x, y) = x + iy \quad (۱-۶)$$



شکل ۱-۶ صفحه مختلط نمودار آرگاند.

خواهیم دید که ترتیب قرار گرفتن متغیرها مهم است و $a + ib$ معمولاً با $b + ia$ ، و به همین ترتیب $x + iy$ با $y + ix$ مساوی نیست.

بهره‌گیری از نمایش نموداری متغیر مختلط در موارد زیادی مفید و راحت است. اگر x ، یعنی جزء حقیقی z ، را روی محور طول و y ، یعنی جزء موهومی z ، را روی محور عرض ببریم، مطابق شکل ۱-۶، صفحه مختلط یا صفحه آرگاند خواهیم داشت. اگر مقادیر خاصی به x و y نسبت دهیم، z با نقطه (x, y) در صفحه مختلط متناظر خواهد شد. مطابق ترتیبی که قبلاً برشمردیم، روشن است که نقطه (x, y) بر نقطه (y, x) منطبق نیست؛ مگر در حالت خاص $x = y$.

کل مبحث تحلیل متغیر مختلط را می‌توان برحسب زوجهای مرتب اعداد (a, b) ، متغیرهای (x, y) ، و تابعهای $(u(x, y)$ و $v(x, y))$ بیان کرد.^۲ به‌کار بردن i لازم نیست ولی مفید است. i ترتیب زوجها را شبیه بردارهای یکه در فصل ۱ حفظ می‌کند.

در فصل ۱، هر نقطه در صفحه xy را با یک بردار جابه‌جایی دوبعدی $\mathbf{r} = ix + jy$ مشخص کردیم. در نتیجه، در مورد قسمت اعظم تحلیل مختلط می‌توان مشابه‌های برداری دوبعدی را تشکیل داد. در مسئله ۱-۶-۲ یک نمونه ساده این شباهت را مشاهده می‌کنید. قضیه کوشی در بخش ۱-۶-۳ نمونه دیگری از آن است.

۱. جبر اعداد مختلط، $a + ib$ ، با جبر ماتریسهایی به صورت:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

همریخت است (با مسئله ۲-۴-۴ مقایسه کنید).

۲. محاسبات مختلط در کامپیوتر به همین صورت انجام می‌شود.

به علاوه، با توجه به شکل ۱-۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (۲-۶)$$

و

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (۳-۶)$$

با استفاده از نتیجه‌ای که در بخش ۵-۶ پیشنهاد شد (اما به دقت اثبات نشده) نمایش قطبی متغیر مختلط را که بسیار سودمند است، به دست می‌آوریم

$$z = r e^{i\theta} \quad (۴-۶)$$

در این نمایش r را مدول یا بزرگی z ($r = |z|$) می‌گویند، و زاویه θ شناسه (آرگومان) یا فاز z نامیده می‌شود.

برای راحتی می‌توان نمایش قطبی، معادله ۴-۶، یا نمایش دکارتی، معادله ۱-۶ را برای متغیر مختلط برگزید. جمع و تفریق متغیرهای مختلط در نمایش دکارتی آسانتر صورت می‌گیرد. ضرب، تقسیم، به‌توان رساندن و یافتن ریشه در مختصات قطبی راحت‌تر انجام می‌شود.

می‌توان به‌طور تحلیلی یا نموداری، با استفاده از شباهت با بردارها، نشان داد (مسئله ۱-۶-۳) که مدول مجموع دو عدد مختلط از مجموع مدولهای آن دو عدد کوچکتر و از اختلاف آنها بزرگتر است

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (۵-۶)$$

این نامساویها را، در تشابه با بردارها، نامساویهای مثلثی می‌نامند.

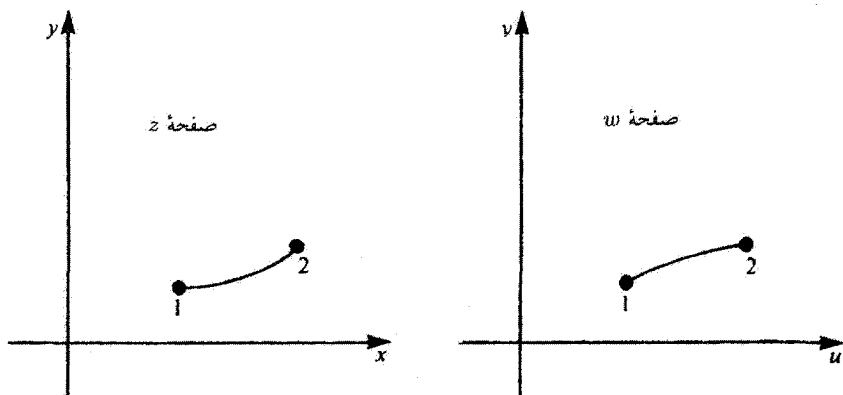
با استفاده از صورت قطبی متغیر مختلط، معادله ۴-۶، بی‌می‌بریم که بزرگی حاصلضرب متغیرهای مختلط با حاصلضرب بزرگیهای آنها برابر است

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (۶-۶)$$

همچنین

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (۷-۶)$$

۱. به بیان دقیق، فصل ۵ به متغیرهای حقیقی محدود می‌شود. ولی، می‌توانیم e^z را به‌ازای z مختلط به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ تعریف کنیم. تعمیمهای بسط سری توانی برای تابعهای مختلط در بخش ۵-۶ مطرح می‌شود (بسط لوران). e^z را می‌شود به کمک معادله‌های ۳-۶ و ۴-۶ نیز تعریف کرد.



شکل ۲-۶ تابع $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ نقاط صفحه xy را روی صفحه w می‌نگارد.

از متغیر مختلط z ، می‌توان تابعهای مختلط $f(z)$ یا $w(z)$ را ساخت. این تابعهای مختلط را می‌توان به اجزای حقیقی و موهومی تفکیک کرد

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (۸-۶)$$

که در آن تابعهای مجزای $u(x, y)$ و $v(x, y)$ حقیقی محض‌اند. مثلاً اگر $f(z) = z^2$ ، آنگاه داریم

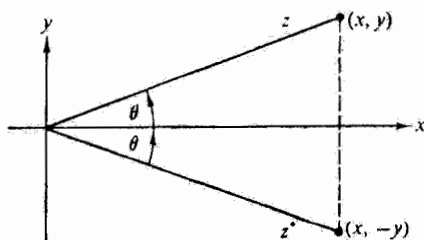
$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 \\ &= (x^2 - y^2) + i2xy \end{aligned}$$

جزء حقیقی تابع $f(z)$ را با $\Re f(z)$ و جزء موهومی آن را با $\Im f(z)$ نشان می‌دهند. در معادله ۸-۶

$$\Re w(z) = u(x, y)$$

$$\Im w(z) = v(x, y)$$

شاید بهترین روش برای تصویرکردن رابطه بین متغیر مستقل z و متغیر وابسته w ، عمل نگاشت باشد. یک مقدار مفروض $z = x + iy$ ، یعنی یک نقطه مفروض در صفحه z ، مقدار مختلط $w(z)$ نیز نقطه‌ای است در صفحه w . همانگونه که در شکل ۲-۶ نشان داده شده است، نقاط صفحه z روی نقاطی از صفحه w ، و منحنیهای صفحه z روی منحنیهای در صفحه w نگاشته می‌شوند.



شکل ۳-۶ نقاط همیوگ مختلط.

همیوگ مختلط

عمل نشانیدن $-i$ به جای i ، در اعداد مختلط، متغیرهای مختلط و تابعهای مختلط را "گرفتن همیوگ مختلط" می‌گویند. همیوگ مختلط z را با z^* نشان می‌دهند^۱، در نتیجه

$$z^* = x - iy \quad (۹-۶)$$

متغیر مختلط z و همیوگ مختلط آن، z^* ، نسبت به محور x تصویرهای آینه‌ای یکدیگراند، یعنی تبدیل y به $-y$ (با شکل ۳-۶ مقایسه کنید). حاصلضرب zz^* عبارت است از

$$\begin{aligned} zz^* &= (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \\ &= r^2 \end{aligned} \quad (۱۰-۶)$$

بنابراین، بزرگی z عبارت است از

$$|z| = (zz^*)^{1/2}$$

تابعهای متغیر مختلط

همه تابعهای بنیادی متغیر حقیقی را می‌توان، با نشانیدن متغیر مختلط z ، به جای متغیر حقیقی x ، به صفحه مختلط گسترش داد. این عمل نمونه‌ای از ادامه تحلیلی است که در بخش ۵-۶ توضیح داده خواهد شد. در معادله ۴-۶، که رابطه بسیار مهمی است، این نکته توصیف می‌شود. با گام نهادن به صفحه مختلط فرصتهای تازه‌ای در تحلیل به وجود می‌آید.

مثال ۱-۱-۶ فرمول دوموآور: اگر معادله ۳-۶ را به توان n برسانیم، داریم

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad (۱۱-۶)$$

۱. همیوگ مختلط را گاهی با \bar{z} نیز نشان می‌دهند.

اینک اگر تابع نمایی با شناسه $n\theta$ را بسط دهیم، می‌رسیم به

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad (۱۲-۶)$$

این عبارت، فرمول دموآور است.

اکنون اگر سمت راست معادله ۱۲-۶ را با استفاده از قضیه دوجمله‌ای بسط دهیم، $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ را به صورت سریهای توانی از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ به دست خواهیم آورد (مسئله ۱۶-۶). در مسئله‌ها با نمونه‌های بیشمار دیگری از رابطه بین تابعهای نمایی، هذلولوی، مثلثاتی در صفحه مختلط روبه‌رو خواهیم شد.

گهگاه به عبارتهای پیچیده‌ای هم برمی‌خوریم. لگاریتم یک متغیر مختلط را می‌توان با استفاده از نمایش قطبی بسط داد

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln r e^{i\theta} \\ &= \ln r + i\theta \end{aligned} \quad (۱۳-۶ \text{ الف})$$

این جواب کامل نیست. می‌توانیم به زاویه فاز θ ، هر مضرب صحیحی از 2π را بیفزاییم بدون آنکه z تغییر کند. بنابراین، معادله ۱۳-۶ الف را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln r e^{i(\theta + 2n\pi)} \\ &= \ln r + i(\theta + 2n\pi) \end{aligned} \quad (۱۳-۶ \text{ ب})$$

پارامتر n می‌تواند هر عدد صحیحی باشد. یعنی، $\ln z$ یک تابع چند مقداری است که تعداد مقادیر آن، به‌ازای یک تک زوج مقادیر حقیقی r و θ ، نامتناهی است. برای اجتناب از این ابهام، معمولاً قرارداد می‌کنیم که $n = 0$ و فاز را در بازه‌ای به طول 2π ، مثلاً $(-\pi, \pi)$ ، محدود می‌کنیم. خطی را در صفحه z که قطع نمی‌شود، مثل محور حقیقی منفی در مثالی که آوردیم، خط برش می‌خوانند. مقدار $\ln z$ به‌ازای $n = 0$ را، مقدار اصلی $\ln z$ می‌گویند. در بخش ۶-۶ به بررسی مشروحتر این توابع، از جمله لگاریتم، می‌پردازیم.

مسائل

۱-۱-۶ الف) وارون $x + iy$ را بیابید، فقط از نمایش دکارتی استفاده کنید. ب) بند الف) را این بار با استفاده از نمایش قطبی حل کنید. ولی نتیجه نهایی را به صورت دکارتی بنویسید.
۲-۱-۶ کمیتهای مختلط $a = u + iv$ و $b = x + iy$ را می‌توان به صورت بردارهای دوبعدی

$a = iu + jv$ و $b = ix + jy$ نشان دهید:

$$a^*b = a \cdot b + ik \cdot a \times b$$

۳-۱-۶ به روش جبری ثابت کنید که

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

این نتیجه را به کمک بردارها تفسیر کنید. ثابت کنید که به ازای $\Re(z) > 0$

$$|z - 1| < |\sqrt{z^2 - 1}| < |z + 1|$$

۴-۱-۶ می‌توانیم عملگر همیوگ مختلط K را به صورت $Kz = z^*$ تعریف کنیم. نشان دهید که K یک عملگر خطی نیست.

۵-۱-۶ نشان دهید اعداد مختلط ریشه‌های دوم دارند، و این ریشه‌های دوم در صفحه مختلط واقع‌اند. ریشه‌های دوم i را بیابید.

۶-۱-۶ نشان دهید که

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} \sin n\theta = & \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta \\ & + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

یادآوری: کمیت‌های $\binom{n}{m}$ ضرایب بسط دو جمله‌ای‌اند:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

۷-۱-۶ ثابت کنید که

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos nx = \frac{\sin N \left(\frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} \cos(N-1) \frac{x}{2} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin nx = \frac{\sin N \left(\frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} \sin(N-1) \frac{x}{2} \quad (\text{ب})$$

به این سریها در بررسی نقش پراش چند شکافی برمی‌خوریم. کاربرد دیگر آن عبارت است از بررسی پدیده گیس (بخش ۱۴-۵).

[راهنمایی: بندهای (الف) و (ب) را می‌توان در هم ادغام کرد و یک سری هندسی تشکیل داد (با بخش ۱-۵ مقایسه کنید).]

۸-۱-۶ ثابت کنید که به ازای $-1 < p < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1 - p \cos x}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n \sin nx = \frac{p \sin x}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (\text{ب})$$

به این سریها در نظریهٔ تداخل سنج فابری-پرو برمی‌خوریم.

۹-۱-۶ فرض کنید توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی به‌ازای شناسه‌های مختلط به کمک سریهای توانی مربوط، به‌صورت زیر تعریف شده باشند

$$\sin z = \sum_{n_{\text{عز}}=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n_{\text{عز}}=0}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

$$\sinh z = \sum_{n_{\text{عز}}=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

$$\cosh z = \sum_{n_{\text{عز}}=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

(الف) نشان دهید که

$$i \sin z = \sinh iz \quad \sin iz = i \sinh z$$

$$\cos z = \cosh iz \quad \cos iz = \cosh z$$

(ب) تحقیق کنید که روابط آشنای بین توابعی مانند:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

یا

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

در صفحه مختلط نیز برقرارند.
۶-۱۰ با استفاده از اتحادهای

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

و

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

کدام مقایسه سریهای توانی تحقق پیدا می‌کند، نشان دهید

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (\text{الف})$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \quad (\text{ب})$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

از این عبارتها پیداست که در صفحه مختلط، $\sin z$ و $\cos z$ می‌توانند از یک بزرگتر باشند.

۱۱-۱-۶ با استفاده از اتحادهای مسئله‌های ۹-۱-۶ و ۱۰-۱-۶ نشان دهید که

$$\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \quad (\text{الف})$$

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y \quad (\text{ب})$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

۱۲-۱-۶ ثابت کنید

$$|\sin z| \geq |\sin x| \quad (\text{الف})$$

$$|\cos z| \geq |\cos x| \quad (\text{ب})$$

۱۳-۱-۶ نشان دهید که تابع نمایی e^z دوره‌ای است، و دوره آن، که موهومی محض است، عبارت است از $2\pi i$.

۱۴-۱-۶ نشان دهید:

$$\tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\sinh z + i \sin y}{\cosh z + \cos y} \quad (\text{الف})$$

$$\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\sinh z - i \sin y}{\cosh z - \cos y} \quad (\text{ب})$$

۱۵-۱-۶ تمامی صفرهای توابع زیر را بیابید

$$\sinh z \quad (\text{ج}) \quad \sin z \quad (\text{الف})$$

$$\cosh z \quad (\text{د}) \quad \cos z \quad (\text{ب})$$

۱۶-۱-۶ نشان دهید

$$\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad (\text{د}) \quad \sin^{-1} z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}) \quad (\text{الف})$$

$$\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (\text{ه}) \quad \cos^{-1} z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) \quad (\text{ب})$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad (\text{و}) \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right) \quad (\text{ج})$$

[راهنمایی: (۱) توابع مثلثاتی و هذلولوی را برحسب عبارتهای نمایی بنویسید. (۲) عبارتهای نمایی را محاسبه کنید و از روی آن نماها را به دست آورید.]
 ۱۷-۱-۶ در نظریه کوانتومی فوتیونس به اتحاد زیر برمی خوریم

$$\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right)^{ib} = \exp(-2b \cos^{-1} a)$$

که در آن a و b حقیقی اند. درستی این اتحاد را تحقیق کنید.
 ۱۸-۱-۶ موج نوری تخت با بسامد ω را با کمیت

$$e^{i\omega(t-nx/c)}$$

نشان می دهند. در برخی مواد، به جای ضریب شکست حقیقی ساده n ، کمیت مختلط $n - ik$ را می نشانند. اثر k بر این موج چیست؟ از لحاظ فیزیکی k به چه چیزی وابسته است؟ تعمیم یک کمیت از حقیقی به مختلط در فیزیک زیاد پیش می آید. مثلاً، می توان از مدول یا نگ مختلط در مواد چسبنده کشسان تا پتانسیل مختلط مربوط به مدل "گوی بلورین ابری" برای هسته اتم نام برد.

۱۹-۱-۶ در مورد مؤلفه های تکانه زاویه ای که در مسئله ۱۴-۵-۲ تعریف آنها آمد، می بینیم که

$$(L_x - iL_y) \neq (L_x + iL_y)^*$$

توضیح دهید که چرا چنین است؟

۲۰-۱-۶ نشان دهید که فاز $f(z) = u + iv$ برابر است با جزء موهومی لگاریتم $f(z)$. چه بسا این نتیجه برای حل مسئله ۱۰-۲-۱۳ مفید باشد.

۲۱-۱-۶ (الف) نشان دهید e^{mz} همواره برابر است با z . (ب) نشان دهید که $\ln e^z$ همواره برابر با z نیست.

۲۲-۱-۶ نمایشهای حاصلضرب نامتناهی بخش ۱۱-۵ پس از نشان دادن متغیر مختلط z به جای متغیر حقیقی x ، نیز برقرار است. به کمک آن، نمایشهای حاصلضرب نامتناهی مربوط به (الف) $\sinh z$ ؛ (ب) $\cosh z$ را بنویسید

۲۳-۱-۶ معادله حرکت جرم m نسبت به یک دستگاه مختصات چرخان به صورت زیر است

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - m \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right)$$

حالتی را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{r} = ix + jy$ و $\omega = wk$ ، ω ثابت باشد. نشان دهید که نشان دادن $z = x + iy$ به جای $\mathbf{r} = ix + jy$ به معادله زیر منجر می‌شود

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + i2\omega \frac{dz}{dt} - \omega^2 z = 0$$

یادآوری: این معادله دیفرانسیل را می‌توان با نشانیدن $fe^{-i\omega t}$ به جای z حل کرد.

۱-۲۴ با استفاده از محاسبات مختلط موجود در برنامه فورترن چهار، برنامه‌ای بنویسید که عبارت نمایی مختلط e^z را از (تعریف) بسط سری آن محاسبه کند. e^z را به ازای $z = e^{i\pi/6}$ ، $z = 12$ ، $0, 1, 2, \dots, n$ محاسبه کنید. زاویه فاز $(n\pi/6)$ ، $\mathcal{R}(z)$ ، $\mathcal{I}(z)$ ، $\mathcal{R}(e^z)$ ، $\mathcal{I}(e^z)$ و فاز e^z را در یک جدول درج کنید.

مقادیر آزمونی: $n = 0$ و $2,61799 = 2,61799$ ، $0,86602 = 0,86602$

$$\mathcal{I}(e^z) = 0,50000, \mathcal{I}(e^z) = 0,36913, \mathcal{I}(z) = 0,20166$$

$$|e^z| = 0,42062, |e^z| = 0,50000 \text{ فاز } (e^z)$$

۱-۲۵ با استفاده از حساب متغیر مختلط در برنامه فورترن چهار، $\mathcal{L}(\sinh z)$ ، $\mathcal{R}(\sinh z)$ و $|\sinh z|$ فاز را به ازای $x = 1$ ، 0 و $y = 0$ محاسبه کنید و در یک جدول بیاورید.

مقادیر آزمونی: $z = 0,2 + 0,1i$ ، $0,20033 = 0,20033$

$$|\sinh z| = 0,22473, \mathcal{L}(\sinh z) = 0,10184$$

$$\text{فاز } (\sinh z) = 0,47030$$

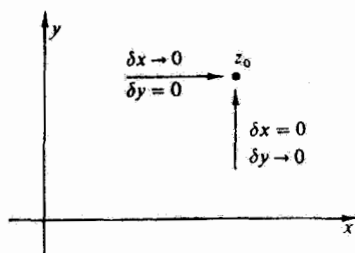
۱-۲۶ مسئله ۱-۲۵ را برای $\cosh z$ حل کنید.

۲-۶ شرایط کوشی-ریمان

اکنون که با توابع مختلط یک متغیر مختلط آشنا شدیم، به مشتق‌گیری از آنها اقدام می‌کنیم. مشتق $f(z)$ ، مانند مشتق یک تابع حقیقی، بنا بر تعریف عبارت است از:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{z + \delta z - z} &= \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} \\ &= \frac{df}{dz} \text{ یا } f'(z) \end{aligned} \quad (14-6)$$

مشروط بر آنکه حد، از شیوه خاص نزدیک شدن به نقطه z مستقل است. برای متغیرهای حقیقی شرط آنکه مشتق $df(x)/dx$ در $x = x_0$ وجود داشته باشد، آن است که حد سمت راست

شکل ۴-۶ مسیرهای مختلف نزدیک شدن به z_0 .

به ازای z (یا z_0) به صورت نقطه‌ای در یک صفحه، این شرط، که حد از جهت نزدیک شدن مستقل باشد، بسیار محدودکننده است.

نمویهای δx و δy ، به ترتیب در x و y ، را در نظر بگیرید. در نتیجه

$$\delta z = \delta x + i\delta y \quad (۱۵-۶)$$

همچنین

$$\delta f = \delta u + i\delta v \quad (۱۶-۶)$$

در نتیجه

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y} \quad (۱۷-۶)$$

حالا، مطابق شکل ۴-۶، از دو مسیر مختلف به z_0 نزدیک می‌شویم، و حد بیان شده در معادله ۱۴-۶ را به دست می‌آوریم. نخست، به ازای $\delta y = 0$ حد $\delta x \rightarrow 0$ را می‌یابیم. از معادله ۱۴-۶ می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (۱۸-۶)$$

با این فرض که مشتقهای پاره‌ای وجود داشته باشند. برای مسیر دوم نزدیک شدن، قرار می‌دهیم

$\delta x = 0$ و آنگاه حد $\delta y \rightarrow 0$ را محاسبه می‌کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} &= \lim_{\delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (19-ع)$$

برای آنکه مشتق df/dz وجود داشته باشد، باید معادله‌های ۱۸-ع و ۱۹-ع عین هم باشند. با مساوی قرار دادن اجزای حقیقی با هم و اجزای موهومی با هم (درست مانند مؤلفه‌های بردارهای مساوی)، خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (20-ع)$$

این شرایط را شرایط کوشی-ریمان می‌گویند. کوشی این شرایط را کشف کرد و ریمان از آنها در نظریه توابع تحلیلی به‌نحو گسترده‌ای بهره گرفت. شرایط کوشی-ریمان برای وجود مشتق $f(z)$ ، شرایط لازم به‌شمار می‌آیند؛ یعنی اگر df/dz وجود داشته باشد، شرایط کوشی-ریمان باید برقرار باشد.

برعکس، اگر شرایط کوشی-ریمان برقرار، و مشتقهای پاره‌ای $u(x, y)$ و $v(x, y)$ پیوسته باشند، مشتق df/dz وجود خواهد داشت. برای اثبات این مدعا می‌توان نوشت

$$\delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta y \quad (21-ع)$$

درستی این عبارت موکول است به پیوستگی مشتقهای پاره‌ای u و v . با تقسیم کردن طرفین بر δz داریم

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta z} &= \frac{(\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x))\delta x + (\partial u/\partial y + i(\partial v/\partial y))\delta y}{\delta x + i\delta y} \\ &= \frac{(\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x)) + (\partial u/\partial y + i(\partial v/\partial y))\delta y/\delta x}{1 + i(\delta y/\delta x)} \end{aligned} \quad (22-ع)$$

اگر قرار بر تک‌مقدار بودن df/dz باشد، باید وابستگی آن به $\delta y/\delta x$ حذف شود. با کاربرد شرایط کوشی-ریمان در مشتقهای نسبت به y ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} = i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (23-ع)$$

با نشانیدن معادله ۶-۲۳ در معادله ۶-۲۲، می‌توانیم وابستگی به $\delta y / \delta x$ را حذف کنیم و برسیم به:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (۶-۲۴)$$

که نشان می‌دهد $\lim \delta f / \delta z$ تا جایی که مشتق‌های پاره‌ای پیوسته‌اند به جهت نزدیک شدن به z در صفحه مختلط بستگی نخواهد داشت.

نکته جالب این است که شرایط کوشی-ریمان متعامد بودن منحنیهای $u = c_1$ و $v = c_2$ را تضمین می‌کنند (با بخش ۱-۲ مقایسه کنید). کاربرد این خاصیت در مسائل پتانسیل در زمینه‌های گوناگون فیزیک نقش اساسی بازی می‌کند. اگر $u = c_1$ یکی از خطوط میدان الکتریکی باشد، $v = c_2$ یک خط (سطح) هم‌پتانسیل خواهد بود و برعکس. یکی دیگر از کاربردهای نظریه پتانسیل در مسئله ۶-۲-۱ خواهد آمد.

توابع تحلیلی

سرانجام اگر $f(z)$ در $z = z_0$ و در ناحیه کوچکی اطراف z_0 مشتق‌پذیر باشد، می‌گوییم $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی^۱ است. اگر $f(z)$ در همه نقاط صفحه مختلط (متناهی) تحلیلی باشد، آن را یک تابع نام می‌نامیم. نظریه‌ای که در اینجا درباره متغیرهای مختلط مطرح می‌کنیم، اساساً نظریه توابع تحلیلی متغیرهای مختلط است، که اهمیت حیاتی شرایط کوشی-ریمان را بازگو می‌کند. مفهوم تحلیلی بودن که در نظریه‌های پیشرفته فیزیک جدید خیلی پیش می‌آید، در نظریه پاشندگی (ذرات بنیادی) نقشی مهم بازی می‌کند. اگر در نقطه $z = z_0$ ، $f'(z)$ وجود نداشته باشد، آن نقطه را یک نقطه تکین می‌نامند که بررسی آن را به بخش ۷-۱ موکول می‌کنیم.

برای نمایش دادن شرایط کوشی-ریمان، دو مثال بسیار ساده می‌آوریم.

مثال ۶-۲-۱: $f(z) = z^2$ را در نظر بگیرید. جزء حقیقی آن عبارت است از $u(x, y) = x^2 - y^2$ و جزء موهومیش عبارت است از $v(x, y) = 2xy$. با توجه به معادله ۶-۲۰

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

می‌بینیم که شرایط کوشی در تمام صفحه مختلط به‌ازای $f(z) = z^2$ برقرار است. چون مشتق‌های پاره‌ای آشکارا پیوسته‌اند، نتیجه می‌گیریم که $f(z) = z^2$ تحلیلی است.

۱. گاهی هم واژه تماریخت را به‌کار برده‌اند.

مثال ۶-۲-۲: $f(z) = z^*$ را در نظر بگیرید. اینک $u = x$ و $v = -y$ با بهره‌گیری از شرایط کوشی-ریمان پی می‌بریم که به‌ازای:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

شرایط کوشی-ریمان برقرار نیست و $f(z) = z^*$ هم تابعی تحلیلی از z نیست. نکتهٔ جالب پیوسته بودن $f(z) = z^*$ است که مثالی از تابعی به‌شمار می‌آید که همه جا پیوسته است ولی در هیچ جا مشتق ندارد.

مشتق یک تابع حقیقی از متغیر حقیقی اساساً یک مشخصهٔ موضعی است، که فقط در یک همسایگی موضعی اطلاعاتی دربارهٔ تابع، مثلاً به‌صورت یک بسط تیلور بریده، ارائه می‌کند. وجود مشتق یک تابع متغیر مختلط مضمونهای جامعتری را دربارهٔ تابع در اختیارمان می‌گذارد. اجزای حقیقی و موهومی تابع تحلیلی ما باید به‌طور جداگانه در معادلهٔ لاپلاس صدق کنند. این موضوع در مسئلهٔ ۶-۲-۱ آمده است. علاوه بر این، تابع تحلیلی ما وجود مشتقهایی از همهٔ مرتبه‌های بالاتر را تضمین می‌کند (بخش ۶-۴). مشتق، با این مفهوم، نه تنها بر رفتار موضعی تابع مختلط حاکم است، بلکه رفتار دور آن را نیز کنترل می‌کند.

مسائل

۶-۲-۱ توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ به‌ترتیب اجزای حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $w(z)$ اند. (الف) با فرض وجود مشتقات لازم، نشان دهید

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

جوابهای معادلهٔ لاپلاس نظیر $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را تابعهای همساز می‌نامند. (ب) نشان دهید

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

تعبیری هندسی از این عبارت به‌دست دهید.

[راهنمایی: با استفاده از تکنیک بخش ۱-۶ می‌توانید بردارهای عمود بر منحنیهای $u(x, y) =$

c_j و c_i را تشکیل دهید.]

۶-۲-۲ نشان دهید که آیا تابع $f(z) = \mathcal{R}(z) = x$ تحلیلی است یا خیر؟

۶-۲-۳ با در نظر گرفتن اینکه $u(x, y)$ جزء حقیقی، و $v(x, y)$ جزء موهومی تابع تحلیلی $w(z)$ ، هر یک در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند، نشان دهید که $u(x, y)$ و $v(x, y)$ نمی‌توانند در هر

ناحیه‌ای که در آنجا $w(z)$ تحلیلی است، بیشینه یا کمینه داشته باشند. (این توابع می‌توانند نقطه‌های زینی داشته باشند.)

۴-۲-۶ فرض کنید $A = \partial^2 w / \partial x^2$ ، $B = \partial^2 w / \partial x \partial y$ و $C = \partial^2 w / \partial y^2$. از محاسبات مربوط به توابع دو متغیره $w(x, y)$ می‌دانیم که شرط وجود یک نقطه زینی آن است که

$$B^2 - AC > 0$$

با استفاده از شرایط کوشی-ریمان درباره $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، نشان دهید که هیچیک از توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در یک ناحیه متناهی از صفحه مختلط بیشینه یا کمینه ندارند. ۵-۲-۶ تابع تحلیلی

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

را چنان بیابید که

$$u(x, y) = x^2 - 3xy^2 \quad (\text{الف})$$

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x \quad (\text{ب})$$

۶-۲-۶ اگر ناحیه مشترکی وجود داشته باشد که در آن $w_1 = u(x, y) + iv(x, y)$ و $w_2 = u(x, y) - iv(x, y)$ هر دو تحلیلی باشند، ثابت کنید که $u(x, y)$ و $v(x, y)$ ثابت‌اند.

۷-۲-۶ تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی است، نشان دهید که $f^*(z^*)$ نیز تحلیلی است. ۸-۲-۶ با استفاده از $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r, \theta)}$ که در آن $R(r, \theta)$ و $\Theta(r, \theta)$ توابع حقیقی مشتق‌پذیر از r و θ اند، نشان دهید که شرایط کوشی-ریمان در مختصات قطبی عبارت‌اند از

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial R}{r \partial \theta} = -R \frac{\partial \Theta}{\partial r} \quad (\text{ب})$$

[راهنمایی: مشتق را ابتدا نسبت به δz شعاعی و سپس نسبت به δz مماسی به دست آورید.] ۹-۲-۶ به‌عنوان تعمیم مسئله ۸-۲-۶، نشان دهید که $\Theta(r, \theta)$ در معادله لاپلاس در مختصات قطبی، معادله ۲-۳۳ (بدون جمله آخر)، صدق می‌کند.

۲-۶-۱۰ جریان سیال ناچرخشی دوبعدی را به کمک پتانسیل مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ به راحتی توصیف می‌کنند. جزء حقیقی، $u(x, y)$ را پتانسیل سرعت و جزء موهومی، $v(x, y)$ را تابع جریان می‌نامیم. سرعت سیال، \mathbf{V} ، از رابطه $\mathbf{V} = \nabla u$ به دست می‌آید. اگر $f(z)$ تحلیلی باشد، (الف) نشان دهید $df/dz = V_x - iV_y$ ؛ (ب) نشان دهید $\nabla \cdot \nabla = 0$ (چشمه یا چاهکی وجود ندارد)؛ (ج) نشان دهید $\nabla \times \nabla = 0$ (جریان ناچرخشی، نامتلاطم). ۲-۶-۱۱ در یکی از روشهای اثبات نامساوی شوارتز (بخش ۹-۴) عبارت زیر را کمینه می‌کنیم

$$f = \psi_{aa} + \lambda \psi_{ab} + \lambda^* \psi_{ab}^* + \lambda \lambda^* \psi_{bb} \geq 0$$

که مقادیر ψ انتگرال حاصلضربهای توابع اند؛ ψ_{aa} و ψ_{bb} حقیقی اند و ψ_{ab} مختلط است، λ پارامتری است که می‌تواند مختلط باشد. (الف) از عبارت بالا نسبت به λ^* مشتق بگیرید؛ برای این کار λ را به منزله یک پارامتر مستقل از λ^* تلقی کنید. نشان دهید که با صفر قرار دادن مشتق $\partial f / \partial \lambda^*$ خواهیم داشت

$$\lambda = -\psi_{ab}^* / \psi_{bb}$$

(ب) نشان دهید $\partial f / \partial \lambda = 0$ نیز به همین نتیجه می‌انجامد. (ج) فرض کنید $\lambda = x + iy$ و $\lambda^* = x - iy$. مشتقهای نسبت به x و y را صفر قرار دهید، و این بار هم نشان دهید

$$\lambda = -\psi_{ab}^* / \psi_{bb}$$

این استقلال λ و λ^* از یکدیگر، بار دیگر در بخش ۱۷-۷ ظاهر می‌شود.

۲-۶-۱۲ تابع $f(z)$ تحلیلی است. نشان دهید که مشتق $f(z)$ نسبت به z^* صفر می‌شود.

[راهنمایی: از قاعده زنجیری استفاده کنید و قرار دهید $x = (z+z^*)/2$ و $y = (z-z^*)/2i$]

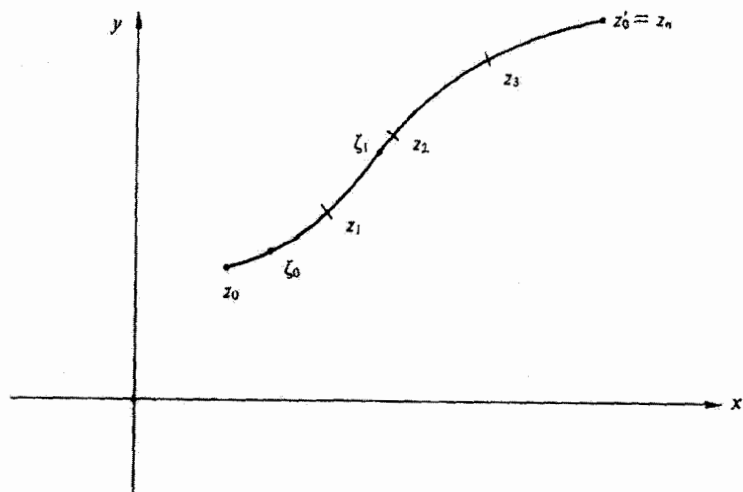
یادآوری: این نتیجه بر این نکته تأکید می‌کند که تابع تحلیلی $f(z)$ فقط تابع مختلطی از دو

متغیر حقیقی x و y نیست، بلکه تابعی است از متغیر مختلط $x + iy$.

۳-۶ قضیه انتگرال کوشی

انتگرالهای پربندی

پس از بررسی مشتق‌گیری، به انتگرال‌گیری می‌پردازیم. انتگرال متغیر مختلط روی یک پربند در صفحه مختلط را می‌توان شبیه به انتگرال (ریمان) یک تابع حقیقی در امتداد محور حقیقی x تعریف کرد.



شکل ۵-۶

پربند z'_0 و z_0 را با اختیار کردن $n-1$ نقطه z_1, z_2, \dots روی پربند، به n بازه تقسیم می‌کنیم (شکل ۵-۶). مجموع زیر را در نظر بگیرید

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad (۲۵-۶)$$

که در آن ζ_j نقطه‌ای است روی منحنی بین z_j و z_{j-1} . اینک قرار می‌دهیم $n \rightarrow \infty$ در نتیجه به‌آزای همه مقادیر z

$$|z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0$$

اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ وجود داشته و مستقل از جزئیات انتخاب نقاط z_j و z_{j-1} باشد، در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_0}^{z'_0} f(z) dz \quad (۲۶-۶)$$

عبارت سمت راست معادله ۲۶-۶ را انتگرال پربندی $f(z)$ (در طول پربند مشخص C از $z = z_0$ تا $z = z'_0$) می‌نامند.

این نحوه تعریف انتگرال پربندی با انتگرال ریمان یک تابع حقیقی از یک متغیر حقیقی خیلی

شبيهه است. انتگرال پربندی را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz &= \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y) + iv(x, y)][dx + idy] \\ &= \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y)dx + u(x, y)dy] \end{aligned}$$

که در آن مسیری که (x_1, y_1) را به (x_2, y_2) متصل می‌کند باید مشخص باشد. این تعریف، انتگرال مختلط را به مجموع مختلط انتگرالهای حقیقی تبدیل می‌کند. این کار تا حدودی مانند تعویض انتگرال برداری با جمع برداری انتگرالهای اسکالر، بخش ۱-۱۰، است.

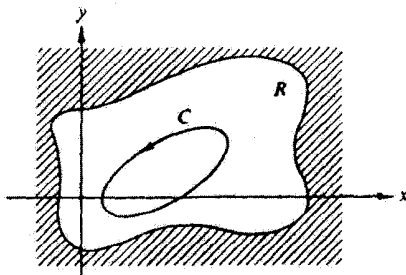
اثبات به کمک قضیه استوکس

قضیه انتگرال کوشی یکی از دو قضیه اصلی در نظریه رفتار توابع متغیر مختلط است. نخست اثباتی برای این قضیه تحت شرایط نسبتاً محدود کننده‌ای ارائه می‌کنیم؛ این شرایط از دید ریاضیدانانی که نظریه‌های تجریدی زیبا را وضع می‌کنند غیرقابل تحمل است، اما معمولاً در مسائل فیزیکی صدق می‌کنند.

اگر تابع $f(z)$ تحلیلی (و در نتیجه تک‌مقدار) و مشتقهای پاره‌ای آن در ناحیه همبند ساده R پیوسته باشند^۱، انتگرال خطی $f(z)$ روی هر مسیر بسته C در R (شکل ۶-۶) صفر خواهد شد، یعنی

$$\int_C f(z) dz = \oint_C f(z) dz = 0 \quad (۲۷-۶)$$

نماد \oint تأکیدی است بر بسته بودن مسیر. یادآوری می‌کنیم که در بخش ۱-۱۳ نیرویی با چنین خاصیتی، پایستار نامیده شد.



شکل ۶-۶ پربند بسته C در داخل ناحیه همبند ساده.

۱. ناحیه یا حوزه همبند ساده عبارت است از ناحیه‌ای که در آن هر پربند بسته فقط نقاط واقع در داخل آن ناحیه را دور می‌زند. اگر ناحیه‌ای همبند ساده نباشد، به آن ناحیه همبندچندگانه می‌گویند، صفحه z که دایره به شعاع واحد از درونه آن حذف شده باشد، نمونه‌ای از ناحیه همبندچندگانه به‌شمار می‌آید.

قضیة انتگرال کوشی به این صورت را می‌توان با کاربرد مستقیم قضیة استوکس (بخش ۱-۱۲) اثبات کرد. با $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ و $dz = dx + idy$ داریم

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (vdx + udy)\end{aligned}\quad (28-6)$$

این دو انتگرال خطی را می‌توانیم به کمک قضیة استوکس به انتگرالهای سطحی تبدیل کنیم؛ این کار فقط وقتی مجاز است که مشتقهای پاره‌ای داخل C پیوسته باشند. برای به‌کار بردن از قضیة استوکس، توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که دو انتگرال آخری در معادله ۲۸-۶ به‌طور کامل حقیقی‌اند. با استفاده از عبارت:

$$\mathbf{V} = iV_x + jV_y$$

داریم

$$\oint (V_x dx + V_y dy) = \int \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (29-6)$$

برای انتگرال اول در جزء آخر معادله ۲۸-۶، قرار می‌دهیم $u = V_x$ و $v = -V_y$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\oint_C (u dx - v dy) &= \oint_C (V_x dx + V_y dy) \\ &= \int \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy\end{aligned}\quad (30-6)$$

در انتگرال دوم سمت راست معادله ۲۸-۶، قرار می‌دهیم $u = V_y$ و $v = V_x$. در اینجا نیز با بهره‌گیری از قضیة استوکس داریم

$$\oint (v dx + u dy) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (31-6)$$

۱. در بخش ۱-۱۲، در اثبات قضیة استوکس، V_x و V_y هر دو می‌توانند تابع دلخواهی (با مشتقهای پاره‌ای پیوسته) باشند.

با بهره‌گیری از شرایط کوشی-ریمان که، چون $f(z)$ تحلیلی فرض می‌شود، باید این شرایط برقرار باشد، هر انتگرالده صفر می‌شود و داریم

$$\oint f(z) dz = - \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (۳۲-۶)$$

$$= 0$$

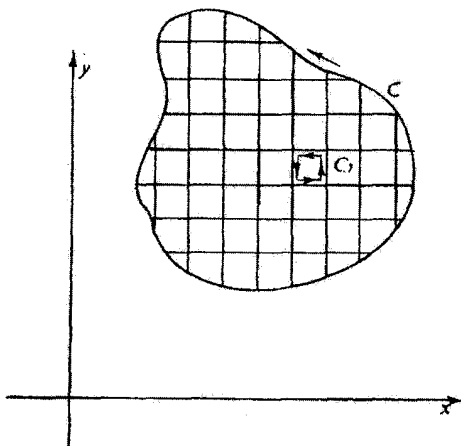
اثبات کوشی-گورسا

قضیه انتگرال کوشی در بالا اثبات شد. ولی این اثبات به دلیل نیاز به پیوستگی مشتقات پاره‌ای اول، از دیدگاه نظری ناقص است. گورسا نشان داد که برقرار شدن این شرط، عملاً نقشی اساسی ندارد. در زیر روش اثبات گورسا را به اختصار توضیح می‌دهیم. ناحیه داخلی پربند C را مطابق شکل ۷-۶، به شبکه‌ای از مربعهای کوچک تقسیم می‌کنیم. در این صورت

$$\oint_C f(z) dz = \sum_j \oint_{C_j} f(z) dz \quad (۳۳-۶)$$

تمام انتگرالها در امتداد خطوط داخلی یکدیگر را حذف می‌کنند. برای محاسبه $\oint_{C_j} f(z) dz$ تابع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\delta_j(z, z_j) = \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_j} \quad (۳۴-۶)$$



شکل ۷-۶ پربندهای کوشی-گورسا.

که z_j یک نقطه در داخل زیرناحیه زام است. دقت کنید که $[f(z) - f(z_j)]/(z - z_j)$ تقریبی است از مشتق $f(z)$ در $z = z_j$. به همین ترتیب، می‌توان دید که اگر $f(z)$ یک بسط تیلور می‌داشت (که هنوز وجود آن را ثابت نکرده‌ایم)، در این صورت $\delta_j(z, z_j)$ ، از مرتبه $z - z_j$ است و با ریزتر شدن شبکه، به صفر نزدیک می‌شود. می‌توانیم شبکه را چندان ریز کنیم که

$$|\delta_j(z, z_j)| < \varepsilon \quad (۳۵-۶)$$

که در آن ε کمیت مثبتی است که می‌توانیم هر قدر که بخواهیم آن را کوچک اختیار کنیم. $f(z)$ را از معادله ۳۴-۶ محاسبه می‌کنیم و از آن روی C_j انتگرال می‌گیریم، می‌رسیم به

$$\oint_{C_j} f(z) dz = \oint_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z, z_j) dz \quad (۳۶-۶)$$

انتگرال سایر جمله‌ها صفر می‌شود.^۱ با ترکیب معادله‌های ۳۵-۶ و ۳۶-۶ می‌توان نشان داد

$$\left| \sum_j \oint_{C_j} f(z) dz \right| < A\varepsilon \quad (۳۷-۶)$$

که در آن A جمله‌ای است از مرتبه مساحت ناحیه بسته. چون ε اختیاری است، قرار می‌دهیم $\varepsilon \rightarrow 0$ ، و به این نتیجه می‌رسیم که:

اگر تابع $f(z)$ در داخل و روی مسیر بسته C تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (۳۸-۶)$$

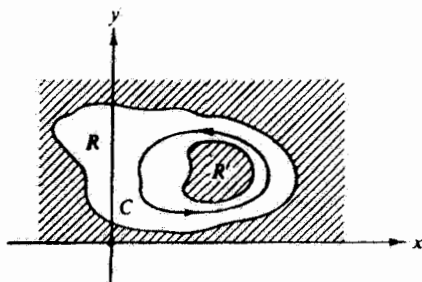
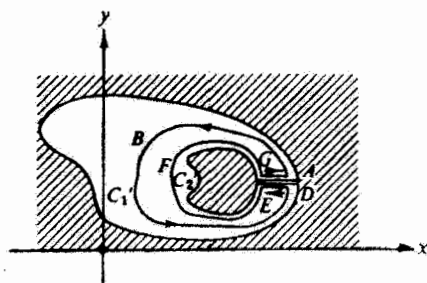
جزئیات این روش را که به نحو چشمگیری کلی‌تر و تواناتر است، می‌توان در کتاب چرچیل و در مراجع دیگری یافت که کتابشناسی آنها در انتهای فصل آمده است. در واقع این قضیه را می‌توانیم به‌ازای مقداری از $f(z)$ که در داخل C تحلیلی و فقط روی C پیوسته باشد، ثابت کنیم.

پیامد قضیه انتگرال کوشی به این قرار است که انتگرال خطی توابع تحلیلی فقط تابع نقاط انتهایی است، و نسبت به مسیر انتگرال‌گیری مستقل است:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) = - \int_{z_2}^{z_1} f(z) dz \quad (۳۹-۶)$$

اینجا نیز دقیقاً شبیه به مورد نیروی پایستار، در بخش ۱-۱۳.

۱. $\oint dz = 0$ و $\oint z dz = 0$.

شکل ۸-۶ پربند بسته C در یک ناحیه همبندچندگانه.

شکل ۹-۶ تبدیل یک ناحیه همبندچندگانه به یک ناحیه همبندساده.

نواحی همبندچندگانه

قضیه انتگرال کوشی را در اصل برای یک ناحیه همبندساده بیان کردیم. این محدودیت را می‌توان با ایجاد یک سد، یعنی یک خط برش، به آسانی از میان برداشت. ناحیه همبندچندگانه در شکل ۸-۶ را در نظر بگیرید که در آن تابع $f(z)$ در داخل R' تعریف نشده است. قضیه انتگرال کوشی برای پربند C که در شکل نشان داده شده است، صادق نیست، ولی می‌توانیم پربند C' را چنان تشکیل دهیم که این قضیه برای آن برقرار باشد. یک بریدگی از ناحیه ممنوع داخلی R' به ناحیه ممنوع خارجی R ایجاد می‌کنیم، آنگاه پربند جدید C' را مطابق شکل ۹-۶ به وجود می‌آوریم. پربند جدید C که از نقاط A, B, C, D, E, F, G, A می‌گذرد، هرگز خط برشی که R را به یک ناحیه همبندساده تبدیل کرده است، قطع نمی‌کند. مشابه سه بعدی این روش را در بخش ۱-۱۴ برای اثبات قانون گاوس به‌کار بردیم. با استفاده از معادله ۳۹-۶، داریم

$$\int_G^A f(z) dz = - \int_E^D f(z) dz \quad (۴۰-۶)$$

زیرا $f(z)$ در طول خط برش پیوسته است و پاره‌خطهای DE و GA می‌توانند به دلخواه به یکدیگر

نزدیک باشند. در نتیجه، با استفاده از قضیه انتگرال کوشی برای ناحیه R ، که دیگر به صورت همبندساده در آمده است، داریم

$$\oint_{C'} f(z) dz = \int_{ABD} f(z) dz + \int_{EFG} f(z) dz = 0 \quad (41-6)$$

در اینجا نیز از معادله ۳۹-۶ بهره می‌گیریم و قرار می‌دهیم $ABD \rightarrow C'_1$ و $EFG \rightarrow -C'_2$ در نتیجه

$$\oint_{C'_1} f(z) dz = \oint_{C'_2} f(z) dz \quad (42-6)$$

که در آن C'_1 و C'_2 هر دو هم جهت (مثلاً پاد-ساعتگرد) پیموده می‌شوند. باید خاطر نشان ساخت که خط برش در اینجا صرفاً به خاطر راحتی محاسبات ریاضی و برای آنکه کاربرد قضیه انتگرال کوشی میسر شود، ایجاد شد. $f(z)$ در ناحیه طوقه‌ای تحلیلی است، در نتیجه لزوماً باید روی هر خط برشی که در این ناحیه ترسیم می‌شود، پیوسته و تک‌مقدار باشد. وقتی نقاط شاخه را در نظر می‌گیریم (بخش ۷-۱) توابع ما دیگر تک‌مقدار نخواهد بود و برای تک‌مقدار کردن آنها به خط برش نیاز پیدا می‌کنیم.

مسائل

۱-۳-۶ نشان دهید: $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = - \int_{z_2}^{z_1} f(z) dz$ در روش گورسا برای اثبات قضیه انتگرال کوشی، می‌گیریم:

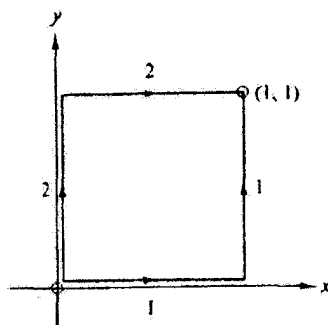
$$\oint z dz = 0$$

نشان دهید که این عبارت برقرار است، مسیر انتگرال‌گیری را دایره‌ای به شعاع واحد، $|z| = 1$ ، بگیرید.

۳-۳-۶ ثابت کنید:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq |f|_{\max} \cdot L$$

که در آن $|f|_{\max}$ مقدار بیشینه $|f(z)|$ در طول پربند C ، و L طول پربند است.



شکل ۶-۱۰

۶-۳-۴ تحقیق کنید که انتگرال:

$$\int_{0,0}^{1,1} z^* dz$$

به مسیر بستگی دارد؛ برای انجام این کار، انتگرال را روی دو مسیری محاسبه کنید که در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است. یادآوری می‌کنیم که $f(z) = z^*$ تابعی تحلیلی از z نیست. و در نتیجه قضیه انتگرال کوشی هم به کار نمی‌آید.

۶-۳-۵ نشان دهید:

$$\oint \frac{dz}{z^2 + z} = 0$$

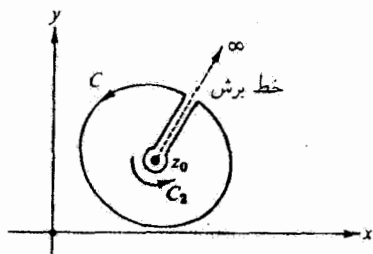
که در آن پربند C دایره‌ای است که با $|z| = R > 1$ تعریف می‌شود.

[راهنمایی: استفاده مستقیم از قضیه انتگرال کوشی غیرمجاز است. چرا؟ انتگرال را می‌توان با تبدیل به مختصات قطبی و استفاده از جدولها محاسبه کرد. روش بهتر استفاده از حساب مانده‌ها، بخش ۷-۲، است. با این روش، به ازای $R > 1$ صفر، و به ازای $R < 1$ کمیت $2\pi i$ به دست می‌آید.]

۶-۴ فرمول انتگرال کوشی

مانند بخش پیش، تابع $f(z)$ را چنان در نظر می‌گیریم که روی پربند بسته C و در ناحیه داخلی محاط در آن، تحلیلی باشد. می‌خواهیم اثبات کنیم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (۶-۴۳)$$



شکل ۱۱-۶ طرد نقطه تکین.

که در آن z_0 نقطه‌ای در داخل ناحیه داخلی محاط در C است. این قضیه دوم از دو قضیه اساسی است که در بخش ۳-۶ عنوان شد. خوب توجه کنید که z روی پرند C و z_0 در داخل آن است؛ در نتیجه، $z - z_0 \neq 0$ و انتگرال معادله ۴۳-۶ خوش تعریف است.

با آنکه $f(z)$ تحلیلی فرض شده است، انتگرالده، یعنی $f(z)/(z - z_0)$ در نقطه $z = z_0$ تحلیلی نیست. اگر شکل پرند را مطابق شکل ۱۱-۶ (یا شکل ۹-۶، بخش ۳-۶) تغییر دهیم، می‌توانیم قضیه انتگرال کوشی را به‌کار ببریم. از معادله ۴۲-۶ داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad (44-6)$$

C پرند بیرونی اصلی و C_1 دایره‌ای است که نقطه z_0 را احاطه کرده و در سوی پادساعتگرد پیموده می‌شود. به دلیل شکل دایره‌ای مسیر در اطراف z_0 ، از نمایش قطبی استفاده می‌کنیم و قرار می‌دهیم: $z = z_0 + re^{i\theta}$ در اینجا کوچک است، و سرانجام آن را به سوی صفر میل می‌دهیم. داریم

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_1} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta$$

حد $r \rightarrow 0$ را محاسبه می‌کنیم؛ با توجه به اینکه $f(z)$ تحلیلی و در نتیجه در $z = z_0$ پیوسته است، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= if(z_0) \int_{C_1} d\theta \\ &= 2\pi if(z_0) \end{aligned} \quad (45-6)$$

به این ترتیب، اثبات فرمول انتگرال کوشی کامل می‌شود.

به نتیجهٔ جالب توجهی رسیده‌ایم. با معلوم بودن مقدار تابع تحلیلی $f(z)$ روی پربند بستهٔ C ، مقدار آن در هر نقطهٔ داخل پربند مشخص می‌شود، این مشخصه، با صورت دوبعدی قانون گاوس (بخش ۱-۱۴) تشابه زیادی دارد که در آن بزرگی بار خطی داخلی برحسب انتگرال سطحی استوانه‌ای میدان الکتریکی E داده می‌شود.

یک مورد مشابه دیگر عبارت است از تعیین یک تابع در فضای حقیقی توسط انتگرال آن تابع و تابع‌گرمین متناظر (و مشتقهای آنها) روی سطح مرزی. نظریهٔ پراش کیرشهوف مثالی از این مورد به‌شمار می‌آید.

بر این تأکید کردیم که z_0 نقطه‌ای در داخل C است. اگر z_0 نقطه‌ای در خارج C باشد چه اتفاق می‌افتد؟ در این مورد تمام انتگرالده در داخل و روی C تحلیلی خواهد بود، و قضیهٔ انتگرال کوشی، بخش ۳-۶ برقرار است و انتگرال صفر می‌شود. داریم

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \begin{cases} f(z_0) & \text{داخل } z_0 \\ 0 & \text{خارج } z_0 \end{cases}$$

مشتقها

با استفاده از فرمول انتگرال کوشی می‌توان عبارتی برای مشتق $f(z)$ به‌دست آورد. از معادلهٔ ۳-۶

$$\frac{f(z_0 + \delta z_0) - f(z_0)}{\delta z_0} = \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \left(\oint \frac{f(z)}{z - z_0 - \delta z_0} dz - \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right)$$

در این صورت با استفاده از تعریف مشتق (معادلهٔ ۱۴-۶) داریم

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\delta z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \oint \frac{\delta z_0 f(z)}{(z - z_0 - \delta z_0)(z - z_0)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \end{aligned} \quad (۴۶-۶)$$

خوانندهٔ هشیار می‌داند که این نتیجه را می‌شد به‌کمک مشتق‌گیری نسبت به z_0 از انتگرالده در معادلهٔ ۳-۶ به‌دست آورد. این رهیافت صوری، که علی‌الاصول نباید صحیح باشد، صادق است، اما تحقیق درستی آن باید به‌کمک تحلیل بالا انجام شود.

این روش مشتق‌گیری را می‌توان تکرار کرد. معادله ۴۶-۶ را برای $f'(z_0)$ و $f'(z_0 + \delta z_0)$ می‌نویسیم. تفاضل این دو تابع را بر δz_0 تقسیم، و سرانجام حد $\delta z_0 \rightarrow 0$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

دقت کنید که $f^{(2)}(z_0)$ ، چنانکه باید، از جهت δz_0 مستقل است. با ادامه این روند، می‌رسیم به

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (47-6)$$

یعنی، شرط تحلیلی بودن $f(z)$ وجود نه تنها مشتق اول بلکه مشتق از همه مرتبه‌ها را ضمانت می‌کند! مشتق‌های $f(z)$ به خودی خود تحلیلی‌اند. دقت کنید که در این گزاره، قضیه انتگرال کوشی به روایت گورسا مد نظر است. به همین دلیل سهم گورسا در طرح و ترویج نظریه متغیرهای مختلط چنین چشمگیر است.

قضیه موره‌آ

یکی دیگر از کاربردهای فرمول انتگرال کوشی در اثبات قضیه موره‌آست؛ قضیه یاد شده وارون قضیه انتگرال کوشی است. بنابراین قضیه:

اگر تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده R پیوسته باشد و برای هر پربند بسته C در داخل R داشته باشیم: $\oint_C f(z)dz = 0$ ، آنگاه $f(z)$ در تمام ناحیه R تحلیلی است.

انتگرال $f(z)$ از z_1 تا z_2 را محاسبه می‌کنیم. از آنجا که انتگرال $f(z)$ روی هر مسیر بسته صفر است، انتگرال از z_1 تا z_2 مستقل از مسیر است و فقط به نقاط انتهایی بستگی دارد. حاصل انتگرال‌گیری را $F(z)$ می‌نامیم، در نتیجه

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \quad (48-6)$$

۱. این عبارت نقطه شروع تعریف مشتق‌های از مرتبه کسری است. نگاه کنید کتاب:

Erdelyi A, et al, *Tables of Integral Transforms*, Vol 2, New York McGraw-Hill (1954).

برای موارد استفاده جدید در تحلیل ریاضی به مقاله زیر و منابعی که در آن معرفی شده، مراجعه کنید

Osler T J, "An Integral analogue of Taylor's Series and its use in Computing Fourier Transforms", *Math Computation*, 26, 449 (1972).

اتحاد زیر را می‌نویسیم

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} - f(z_1) = \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(t) - f(z_1)] dt}{z_2 - z_1} \quad (۴۹-۶)$$

که t یک متغیر مختلط دیگر است. اینک با توجه به پیوسته بودن $f(t)$ ، حد $z_2 \rightarrow z_1$ را حساب می‌کنیم^۱

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(t) - f(z_1)] dt}{z_2 - z_1} = 0 \quad (۵۰-۶)$$

بنابراین، با استفاده از تعریف مشتق (معادله ۱۴-۶)

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = F'(z) \Big|_{z=z_1} = f(z_1) \quad (۵۱-۶)$$

ثابت کرده‌ایم که در نقطه $z = z_1$ ، $F'(z)$ وجود دارد و برابر است با $f(z_1)$. می‌تواند هر نقطه‌ای در R باشد، در نتیجه $F(z)$ در R تحلیلی است. اینک با استفاده از فرمول انتگرال کوشی (با معادله ۴۷-۶ مقایسه کنید) نتیجه می‌گیریم که تابع $F'(z) = f(z)$ نیز تحلیلی است. به این ترتیب، قضیهٔ مورهٔ اثبات می‌شود.

بار دیگر به مشابه الکتروستاتیکی می‌پردازیم؛ می‌توانیم $f(z)$ را برای نشان دادن میدان الکتروستاتیکی E به‌کار ببریم. اگر بار خالص داخل هر ناحیهٔ بسته در R صفر باشد (قانون گاوس)، چگالی بار در همه جای R صفر است. به عبارت دیگر، به کمک استدلال بخش ۱-۱۳، اگر $f(z)$ نمایشگر یک نیروی پایستار باشد، همواره می‌توان آن را به صورت مشتق یک تابع پتانسیل $F(z)$ نوشت.

مسائل

۱-۴-۶ نشان دهید

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

که پربند C نقطهٔ $z = z_0$ را در سوی مثبت (پادساعتگرد) دور می‌زند. توان n یک عدد صحیح است. این نتیجه، شالودهٔ حساب مانده‌ها در فصل ۷ را تشکیل می‌دهد.

۱. در اینجا می‌توانیم قضیهٔ مقدار میانگین در حساب دیفرانسیل و انتگرال را نقل کنیم.

۲-۴-۶ نشان دهید که به ازای اعداد صحیح m و n

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-n-1} dz$$

(با پر بندگی که مبدأ را یک بار در سوی پادساعتگرد دور بزند) نمایشی است برای دلتای کرونکر $\delta_{m,n}$.

۳-۴-۶ در مسئله ۵-۳-۶ انتگرالده را به کسرهای جزئی تجزیه کنید، آنگاه با استفاده از قضیه انتگرال کوشی برای نواحی همبندچندگانه آن را حل کنید.

یادآوری: در بخش ۷-۱۵، به هنگام بررسی تبدیلهای لاپلاس، کسرهای جزئی توضیح داده شده است.

۴-۴-۶ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1}$$

C عبارت است از دایره $|z| = 2$.

۵-۴-۶ با فرض آنکه $f(z)$ در داخل پر بند بسته C و روی آن تحلیلی و z_0 نقطه‌ای در داخل C باشد، نشان دهید

$$\oint_C \frac{f'(z)}{(z - z_0)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

۶-۴-۶ می‌دانیم که تابع $f(z)$ در داخل پر بند بسته C و روی آن تحلیلی است. حدس می‌زنیم که مشتق مرتبه n ام، $f^{(n)}(z_0)$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

با استفاده از روش استقرای ریاضی، ثابت کنید که این عبارت صحیح است.
۷-۴-۶ نشان دهید

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n}$$

که R شعاع دایره‌ای است به مرکز $z = z_0$ و M مقدار بیشینه $|f(z)|$ روی دایره است. فرض کنید که $f(z)$ در داخل و روی دایره تحلیلی باشد.

۸-۴-۶ اگر $f(z)$ به ازای همه مقادیر z تحلیلی و کراندار باشد [ثابت و $M \leq |f(z)|$]، نشان دهید که $f(z)$ باید ثابت باشد. این گزاره، قضیه لیوویل است.
 ۹-۴-۶ قضیه اصلی جبر. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه لیوویل، مسئله ۸-۴-۶، نشان دهید که هر معادله چندجمله‌ای به صورت زیر

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$$

دستکم یک ریشه دارد. در اینجا $n > 0$ و $a_n \neq 0$.

[راهنمایی: فرض کنید $f(z) = 1/P(z)$]

یادآوری: همین که نتیجه بالا محقق شد، می‌توانیم بر ریشه تقسیم کنیم و همین فرایند را برای چند جمله‌ای درجه $(n-1)$ ام حاصل تکرار کنیم. با این کار، سرانجام به این نتیجه خواهیم رسید که $P(z)$ دقیقاً n ریشه دارد.

۱۰-۴-۶ (الف) تابع $f(z)$ در داخل پربند بسته C و روی آن تحلیلی (و روی C پیوسته) است. اگر در داخل C ، $f(z) \neq 0$ و روی C ، $|f(z)| \geq M$ باشد، نشان دهید که به ازای همه نقاط داخل C :

$$|f(z)| \geq M$$

[راهنمایی: فرض کنید $w(z) = 1/f(z)$]

(ب) اگر در داخل پربند C ، $f(z) = 0$ ، نشان دهید که نتیجه بند قبل برقرار نیست و می‌شود که در یک یا چند نقطه در داخل، $|f(z)| = 0$ و روی تمامی پربند مرزی $|f(z)| > 0$. یک تابع تحلیلی برای نمونه ذکر کنید که چنین رفتاری داشته باشد.

۱۱-۴-۶ با استفاده از فرمول انتگرال کوشی برای مشتق n ام، فرمولهای رودریگز زیر را به انتگرالهای اشلافي متناظر تبدیل کنید. (الف) لژاندر

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$\text{جواب: } \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1-z^2)^n}{(z-x)^{n+1}} dz$$

(ب) هرمیت

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

(ج) لاگر

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

یادآوری: با استفاده از نمایشهای انتگرال اشلافی می‌توان توابع مولد این توابع خاص را به دست آورد. با بخشهای ۱۲-۴، ۱۳-۱، و ۱۳-۲ مقایسه کنید.

۵-۶ بسط لوران

بسط تایلور

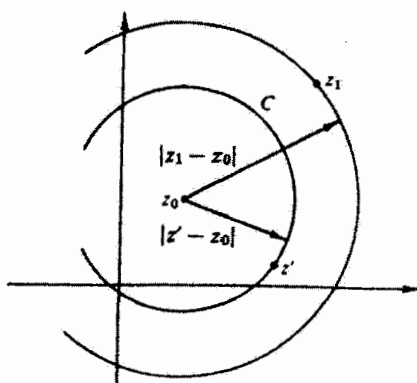
فرمول انتگرال کوشی در بخش قبل راهی را برای استخراج روایت دیگری از سری تایلور (بخش ۵-۶)، اما این بار برای توابع متغیر مختلط، می‌گشاید. فرض کنید می‌خواهیم $f(z)$ را حول نقطه $z = z_0$ بسط دهیم و نقطه $z = z_1$ در نمودار آرگانند، نزدیکترین نقطه به نقطه z_0 باشد که در آن تابع $f(z)$ غیرتحلیلی است. دایره C را به مرکز $z = z_0$ و به شعاع $|z_1 - z_0| < |z' - z_0|$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۲-۶). با توجه به این فرض که z_1 نزدیکترین نقطه‌ای است که $f(z)$ در آن غیرتحلیلی است، $f(z)$ لزوماً در داخل و روی C تحلیلی است. با استفاده از معادله ۴۳-۶، فرمول انتگرال کوشی، داریم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{z' - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)} \quad (52-6) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) [1 - (z - z_0)/(z' - z_0)]} \end{aligned}$$

z' در اینجا نقطه‌ای روی پربند C و z نقطه‌ای در داخل آن است. بسط مخرج انتگرالده در معادله ۵۲-۶ با استفاده از قضیه دوجمله‌ای به طور کاملاً دقیق مجاز نیست، زیرا هنوز قضیه دوجمله‌ای را برای متغیرهای مختلط اثبات نکرده‌ایم. در عوض، اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad (53-6)$$

درستی این اتحاد را می‌توان با ضرب دو طرف آن در $1-t$ ، به سادگی تحقیق کرد. این سری نامتناهی، با در نظر گرفتن روشهای بخش ۵-۲، به‌ازای $|t| < 1$ همگراست.



شکل ۱۲-۶

اینک برای نقطه z در داخل C داریم $|z - z_0| < |z' - z_0|$ و معادله ۵۲-۶، با استفاده از معادله ۵۳-۶ به صورت زیر در می آید

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (54-6)$$

با توجه به آنکه معادله ۵۳-۶ به ازای $|t| < 1$ به طور یکنواخت همگراست، می توانیم ترتیب انتگرال گیری و مجموع یابی را عوض کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (55-6)$$

با در نظر گرفتن معادله ۴۷-۶، می رسمیم به

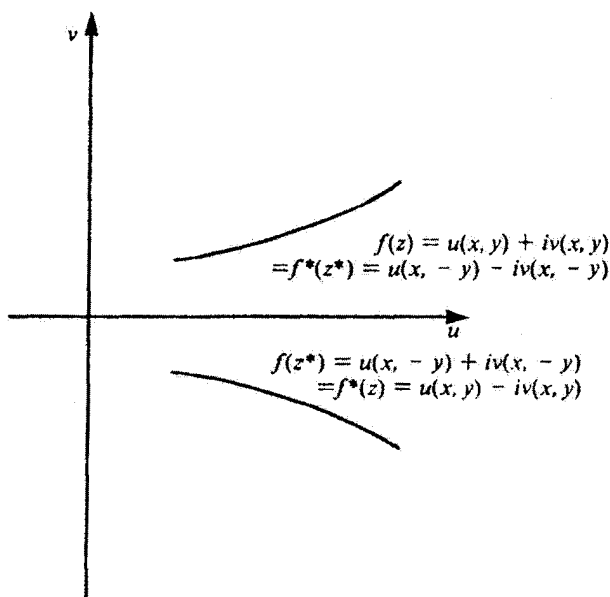
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (56-6)$$

این همان بسط تیلور مطلوب است. توجه کنید که این بسط با فرض تحلیلی بودن $f(z)$ به ازای $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ برقرار است. این بسط درست مانند سری توانی متغیرهای حقیقی (بخش ۷-۵)، به ازای یک z_0 معلوم، یکتا است.

با استفاده از بسط تیلور $f(z)$ ، می توان قضیه دوجمله ای را استخراج کرد (مسئله ۲-۵-۶).

اصل انعکاس شوارتز

با استفاده از بسط دوجمله ای $g(z) = (z - x_0)^n$ به ازای عددهای صحیح n به سادگی می توان



شکل ۶-۱۳

دید که همیوخ مختلط این تابع، معادل است با همین تابع از همیوخ مختلط، یعنی

$$g^*(z) = (z - x_0)^{n*} = (z^* - x_0)^n = g(z^*) \quad (57-6)$$

با این استدلال به اصل انعکاس شوارتز می‌رسیم:

اگر تابع $f(z)$: (۱) در ناحیه‌ای شامل محور حقیقی تحلیلی، و (۲) به‌ازای مقدار حقیقی z ، حقیقی باشد، آنگاه داریم (شکل ۶-۱۳)

$$f^*(z) = f(z^*) \quad (58-6)$$

اگر با بهره‌گیری از معادله ۶-۵۶ تابع $f(z)$ را حول نقطه (غیرتکین) x_0 بسط دهیم، خواهیم داشت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (59-6)$$

چون $f(z)$ در $z = x_0$ تحلیلی است، این بسط تیلور وجود دارد. $f(z)$ به‌ازای مقدار حقیقی z ، حقیقی است، از این رو $f^{(n)}(x_0)$ باید به‌ازای همه مقادیر n حقیقی باشد. در نتیجه، با استفاده

از معادله ۵۷-۶ روشن است که اصل انعکاس شوارتز، معادله ۵۸-۶ برقرار است. مسئله ۶-۵-۶ صورت دیگری از این اصل است.

ادامه تحلیلی

در بحث قبلی فرض کردیم که $f(z)$ یک نقطه غیرتحلیلی یا تکین در $z = z_1$ دارد (شکل ۶-۱۲). به عنوان مثالی خاص از این رفتار تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \quad (60-6)$$

که در $z = -1$ نامتناهی می شود. بنابراین $f(z)$ در $z_1 = -1$ غیرتحلیلی است. به عبارت دیگر $z_1 = -1$ نقطه تکین تابع $f(z)$ است. با استفاده از معادله ۵۶-۶ یا قضیه دوجمله‌ای برای توابع مختلط، که مستقیماً از آن معادله نتیجه می شود، داریم

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (61-6)$$

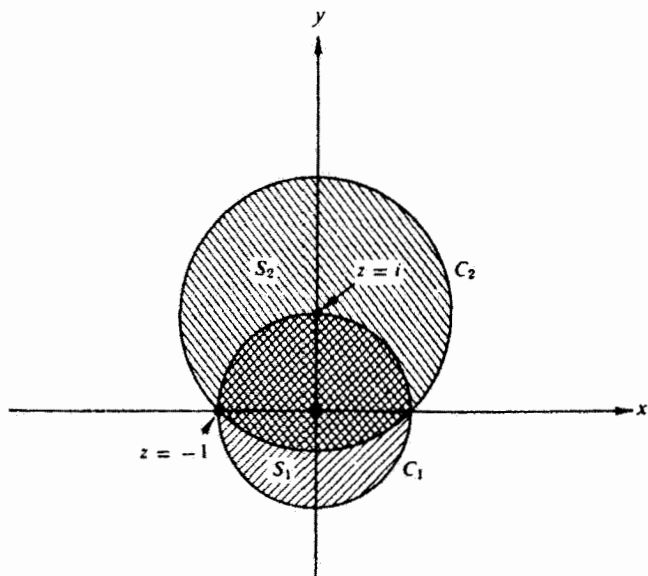
که به ازای $|z| < 1$ همگراست. این دایره همگرایی را C_1 می نامیم. معادله ۶۱-۶ برای $f(z)$ در داخل C_1 که آن را ناحیه S_1 می خوانیم، برقرار است.

وضعیت از این قرار است که بسط $f(z)$ حول مبدأ فقط در S_1 (و روی C_1 به استثنای $z_1 = -1$) صادق است، ولی از شکل تابع $f(z)$ می دانیم که در همه جای صفحه مختلط بیرون از S_1 ، خوش تعریف و تحلیلی است. ادامه تحلیلی عبارت است از گسترش ناحیه‌ای که در آن تابعی نظیر سری معادله ۶۱-۶ تعریف شده است. مثلاً، فرض کنید که $f(z)$ را حول نقطه $z = i$ بسط دهیم، داریم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+(z-i)} \\ &= \frac{1}{1+i} \left(1 + \frac{z-i}{1+i} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (62-6)$$

با استفاده از معادله ۵۶-۶ یا ۶۲-۶ داریم

$$f(z) = \frac{1}{1+i} \left[1 - \frac{z-i}{1+i} + \left(\frac{z-i}{1+i} \right)^2 - \dots \right] \quad (63-6)$$



شکل ۶-۱۴ ادامه تحلیلی.

که به ازای $|z - i| < |1 + i| = \sqrt{2}$ همگراست. دایره همگرایی C_2 است، ناحیه محاط در C_2 را S_2 می‌نامیم (شکل ۶-۱۴). اینک $f(z)$ از طریق بسط در S_2 (معادله ۶-۶۳) تعریف شده است؛ S_2 با S_1 همپوشی دارد و در صفحه مختلط گسترش (ادامه) یافته است. این گسترش یک ادامه تحلیلی است، و هرگاه با نقاط تکین منزوی سروکار داشته باشیم، می‌توانیم تابع را به هر صورتی ادامه دهیم. معادلات ۶-۶۰، ۶-۶۱ و ۶-۶۳ سه نمایش متفاوت برای یک تابع به شمار می‌آیند. هر یک از این نمایشها، حوزه همگرایی خاص خود را دارد. معادله ۶-۶۱ یک سری مکولون است. معادله ۶-۶۳ بسط تایلور حول $z = i$ و معادله ۶-۶۰ با استفاده از آنچه بعداً خواهیم دید، یک سری لوران تک‌جمله‌ای است.

ادامه تحلیلی می‌تواند صورتهای مختلفی به خود بگیرد و بسط سری که در اینجا در نظر گرفتیم، لزوماً مناسبترین روش نیست. به‌عنوان یک روش دیگر، در بخش ۱۰-۱، تابع فاکتوریل را حول نقطه‌های تکین منزوی $z = -n, n = 1, 2, 3, \dots$ بسط می‌دهیم. یک مثال دیگر

۱. یکی از قویترین و زیباترین نتایج نظریه توابع متغیر مختلط به‌این قرار است که اگر دو تابع تحلیلی در ناحیه‌ای، مانند ناحیه همپوشی S_1 و S_2 ، یا روی پاره‌خطی با هم برابر باشند، تابع واحدی را تشکیل می‌دهند، به‌این معنا که تا آنجا که خوش‌تعریف بمانند، همه جا با هم برابرند. در موردی که ذکر شد سازگاری دو بسط (معادله‌های ۶-۶۱ و ۶-۶۳) در ناحیه مشترک بین S_1 و S_2 ، هم‌ارزی دو تابعی را که توسط این دو بسط نمایش داده می‌شوند، اثبات می‌کند. در این صورت، معادله ۶-۶۳ ادامه تحلیلی یا بسط تابع $f(z)$ به‌ناحیه‌هایی را نشان می‌دهد که ۶-۶۱ آنرا دربر نمی‌گیرد. همچنین می‌توانیم بگوییم که $f(z) = 1/(1+z)$ خود ادامه تحلیلی هر یک از دو سری‌ای است که با معادله‌های ۶-۶۱ و ۶-۶۳ بیان می‌شوند.

عبارت است از تابع ابرهندسی، که با سری معادله ۱۳-۱۱۴، به ازای $|z| < ۱$ تعریف می‌شود و در معادله ابرهندسی صدق می‌کند. در نمایش انتگرالی، مسئله ۱۳-۸، این تابع به تمام صفحه مختلط ادامه می‌یابد.

تداوم صورت جبری

همه توابع مقدماتی ما مانند e^z ، $\sin z$ و جز آنها را می‌توان به صفحه مختلط بسط داد (با مسئله ۱۶-۹ مقایسه کنید). مثلاً می‌شود آنها را به کمک بسط سری توانی تعریف کرد؛ در این صورت، برای تابع نمایی می‌توان نوشت

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (۶۴-۶)$$

چنین تعریفهایی با تعریف مربوط به متغیر حقیقی در جهت محور حقیقی x سازگار است و به بیانی ادامه تحلیلی توابع حقیقی متناظر به صفحه مختلط به شمار می‌آید. این نتیجه را غالباً تداوم صورت جبری می‌نامند.

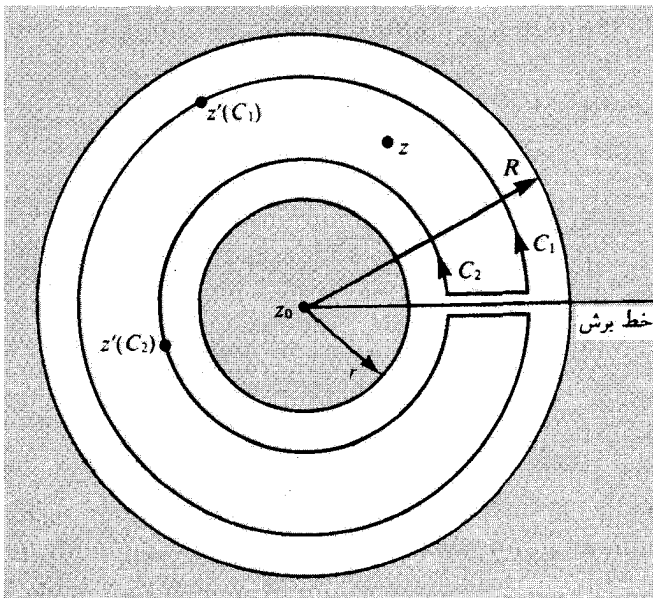
سری لوران

بارها اتفاق می‌افتد که به توابعی برمی‌خوریم که در یک ناحیه طوقه‌ای، مثلاً به شعاع داخلی r و شعاع خارجی R ، مطابق شکل ۶-۱۵، تحلیلی‌اند. با ترسیم یک خط برش برای تبدیل ناحیه مورد نظر به یک ناحیه همبندساده، از فرمول انتگرال کوشی بهره می‌گیریم؛ برای دو دایره C_1 و C_2 به مرکز $z = z_0$ و، به ترتیب، با شعاعهای r_1 و r_2 ، به طوری که $r < r_2 < r_1 < R$ داریم^۱

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{z' - z} \quad (۶۵-۶)$$

دقیقاً توجه داشته باشید که یک علامت منها در معادله ۶۵-۶ وارد شده است تا پریند C_2 (مانند C_1) در جهت مثبت (پادساعتگرد) پیموده شود. اینک به کمک معادله ۶۵-۶، درست مانند معادله ۵۲-۶ در اثبات سری تیلور، عمل می‌کنیم. هر یک از مخرجها را به صورت $(z' - z_0) - (z - z_0)$ می‌نویسیم و به کمک قضیه دوجمله‌ای حاصل از سری تیلور (معادله ۵۶-۶)، بسط می‌دهیم. با توجه به اینکه برای C_1 ، $|z - z_0| > |z' - z_0|$ و برای C_2 ، $|z - z_0| < |z' - z_0|$

۱. می‌توانیم هر قدر که بخواهیم r_2 را به r و r_1 را به R نزدیک اختیار کرده و به این ترتیب مساحت محاط بین C_1 و C_2 را بیشینه کنیم.



شکل ۱۵-۶ $|z' - z_0|_{C_1} > |z - z_0| > |z' - z_0|_{C_2} < |z - z_0|$

داریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (66-6)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \oint_{C_2} (z' - z_0)^{n-1} f(z') dz'$$

علامت منها در معادله ۶۵-۶، در بسط دوجمله‌ای ادغام شده است. اولین سری را S_1 و سری دوم را S_2 می‌نامیم

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (67-6)$$

این یک بسط تیلور معمولی است و به‌ازای $|z - z_0| < |z' - z_0| = r_1$ ، یعنی همه مقادیر z در داخل دایره بزرگتر، C_1 ، همگراست. سری دوم در معادله ۶۶-۶، عبارت است از

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \oint_{C_2} (z' - z_0)^{n-1} f(z') dz' \quad (68-6)$$

که به ازای $r_2 = |z' - z_0| > |z - z_0|$ ، یعنی همه مقادیر z بیرون دایره کوچکتر C_2 ، همگراست. به یاد داشته باشید که C_2 در جهت پادساعتگرد پیموده می شود. با ادغام این دو سری^۱، می توان سری زیر را به دست آورد (سری لوران)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (۶۹-۶)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (۷۰-۶)$$

در معادله ۷۰-۶ دیگر همگرایی بسط دوجمله ای مشکلی ایجاد نمی کند؛ از این رو، C می تواند هر پربندی باشد در داخل ناحیه طوقه ای $R < |z - z_0| < r$ ، که z_0 را یک بار در سوی پادساعتگرد دور بزند. با فرض اینکه چنین ناحیه طوقه ای همگرایی وجود داشته باشد، معادله ۶۹-۶ سری لوران یا بسط لوران $f(z)$ است.

بهره گیری از خط برش (شکل ۶-۱۵) برای تبدیل ناحیه طوقه ای به یک ناحیه همبند ساده مناسب است. با توجه به آنکه تابع ما در این ناحیه طوقه ای، تحلیلی (و در نتیجه تکمقدار) است، خط برش نقش اساسی ندارد، و عملاً در نتیجه نهایی، معادله ۶-۷۰ ظاهر نمی شود. در عوض، توابعی با نقطه شاخه، باید خط برش داشته باشند (بخش ۷-۱).

ضرایب سری لوران را حتماً نباید به کمک محاسبه انتگرالهای پربندی (که چه بسا خیلی هم پیچیده باشند) به دست آورد. از روشهای دیگری نظیر بسطهای معمولی سری برای محاسبه این ضرایب می توان بهره برد.

در فصل ۷، مثالهای زیادی از سری لوران را خواهیم دید. در اینجا برای نشان دادن کاربرد معادله ۶۹-۶، یک مثال ساده می آوریم.

مثال ۶-۱۵: فرض کنید $f(z) = [z(z-1)]^{-1}$. اگر z_0 را صفر بگیریم ($z_0 = 0$)، آنگاه $r = 0$ و با توجه به آنکه $f(z)$ در $z = 1$ واگراست، $R = 1$. با استفاده از معادله های ۶-۷۰ و ۶۹-۶ داریم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz'}{(z')^{n+2}(z'-1)} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \oint \sum_{m=0}^{\infty} (z')^m \frac{dz'}{(z')^{n+2}} \end{aligned} \quad (۷۱-۶)$$

۱. در S_2 ، n را با $-n$ تعویض، و آنگاه جمع کنید.

در اینجا نیز، با تعویض ترتیب مجموع‌یابی و انتگرال‌گیری (سریهای همگرای یکنواخت)، داریم

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \oint \frac{dz'}{(z')^{n+2-m}} \quad (72-6)$$

با بهره‌گیری از شکل قطبی مانند معادله ۴۴-۶ (یا با مسئله ۱-۴-۶ مقایسه کنید)، داریم

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \oint \frac{r i e^{i\theta} d\theta}{r^{n+2-m} e^{i(n+2-m)\theta}} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \times 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{n+2-m,1} \end{aligned} \quad (73-6)$$

به عبارت دیگر

$$a_n = \begin{cases} -1 & n \geq -1 \\ 0 & n < -1 \end{cases} \quad \text{به‌ازای} \quad (74-6)$$

بسط لوران (معادله ۶۹-۶) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots \\ &= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \end{aligned} \quad (75-6)$$

البته، می‌توانستیم بسط لوران این تابع ساده را مستقیماً از طریق بسط دو جمله‌ای به دست آوریم. تفاوت آشکار میان سری لوران و سری تیلور، در وجود توانهای منفی ($z - z_0$) در سری لوران است. به همین دلیل، سری لوران همواره دست‌کم در $z = z_0$ و شاید تا فاصله r از این نقطه واگراست (شکل ۱۵-۶).

مسائل

۱-۵-۶ بسط تیلور $\ln(1+z)$ را به دست آورید:

$$\text{جواب: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n / n$$

۲-۵-۶ بسط دوجمله‌ای زیر را استخراج کنید

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} z^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n\end{aligned}$$

m عددی حقیقی است. این بسط به‌ازای $|z| < 1$ همگراست.

۳-۵-۶ تابع $f(z)$ روی دایره به شعاع واحد و داخل آن تحلیلی است. همچنین، به‌ازای $|z| \leq 1$

داریم $|f(z)| \leq 1$ و $f(0) = 0$. نشان دهید که به‌ازای $|z| \leq 1$ ، $|f(z)| \leq |z|$.

[راهنمایی: یکی از رهیافتها می‌تواند این باشد که نشان دهیم $f(z)/z$ تحلیلی است، آنگاه

$[f(z_0)/z_0]^n$ را به کمک فرمول انتگرال کوشی تعریف کنیم. سرانجام، با در نظر گرفتن قدرمطلقها،

ریشه n ام بگیریم. این مسئله را قضیه شوارتز نیز می‌نامند.]

۴-۵-۶ اگر $f(z)$ تابعی حقیقی از تغییر مختلط z باشد و بسط لوران حول مبدأ، $f(z) = \sum a_n z^n$

به‌ازای $n < -N$ داشته باشد $a_n = 0$ ، نشان دهید که تمام ضرایب، a_n حقیقی‌اند.

۵-۵-۶ تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در شرایط مربوط به اصل انعکاس شوارتز صدق

می‌کند. نشان دهید: (الف) u تابع زوجی است از y . (ب) v تابع فردی است از y .

۶-۵-۶ تابع $f(z)$ را می‌توان در یک سری لوران حول مبدأ با ضرایب a_n حقیقی بسط داد. نشان

دهید که همیوگ مختلط این تابع z ، عبارت است از همین تابع از همیوگ مختلط z . یعنی

$$f^*(z) = f(z^*)$$

درستی این نتیجه را به‌صراحت به‌ازای: (الف) $f(z) = z^n$ ، n عدد درست، و (ب) $f(z) = \sin z$

تحقیق کنید، اگر $f(z) = iz$ ، $(a_1 = i)$ ، نشان دهید که رابطه بالا برقرار نیست.

۷-۵-۶ تابع $f(z)$ در ناحیه‌ای شامل محور حقیقی تحلیلی است. $f(z)$ به‌ازای مقادیر حقیقی z

$z = x$ ، موهومی محض است. (الف) نشان دهید که

$$f(z^*) = -[f(z)]^*$$

(ب) در حالت خاص $f(z) = iz$ ، صورت دکارتی $f(z)$ ، $f(z^*)$ و $f^*(z)$ را به‌دست آورید.

از نتیجه کلی بند (الف) استفاده نکنید.

۸-۵-۶ سه جمله اول غیرصفر بسط لوران تابع زیر را حول مبدأ به‌دست آورید

$$f(z) = (e^z - 1)^{-1}$$

به تشابه با تابع مولد اعداد برنولی، معادله ۵-۱۴۴، توجه کنید.

۹-۵-۶ ثابت کنید که بسط لوران یک تابع معلوم حول یک نقطه معین یکتاست؛ یعنی، اگر

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-N}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

نشان دهید که برای همه مقادیر n ، داریم: $a_n = b_n$.

[راهنمایی: از فرمول انتگرال کوشی استفاده کنید.]

۱۰-۵-۶ بسط لوران تابع $f(z) = [z(z-1)]^{-1}$ را حول نقطه $z=1$ چنان انجام دهید که بازای مقادیر کوچک $|z-1|$ ، برقرار باشد. گستره دقیق را مشخص کنید که در بسط حاصل صدق می‌کند. این یک ادامه تحلیلی معادله ۶-۷۵ است. (ب) بسط لوران $f(z)$ حول $z=1$ را به ازای مقادیر بزرگ $|z-1|$ به دست آورید.

۱۱-۵-۶ (الف) با این فرض که $f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt$ (حقیقی t) نشان دهید حوزه‌ای که در آن $f_1(z)$ وجود دارد (و تحلیلی است) عبارت است از $\Re(z) > 0$. (ب) نشان دهید که $f_2(z) = 1/z$ در تمام ناحیه $\Re(z) > 0$ با $f_1(z)$ برابر و در نتیجه ادامه تحلیلی $f_1(z)$ ، در تمام صفحه z به‌استثای $z=0$ ، است. (ج) $1/z$ را حول $z=i$ بسط دهید. خواهید داشت $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$. حوزه $f_2(z)$ کدام است؟

جواب: $|z-i| < 1$ و $\sum_{n=0}^{\infty} (i)^n(z-i)^n = 1/z = -i \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n(z-i)^n$.

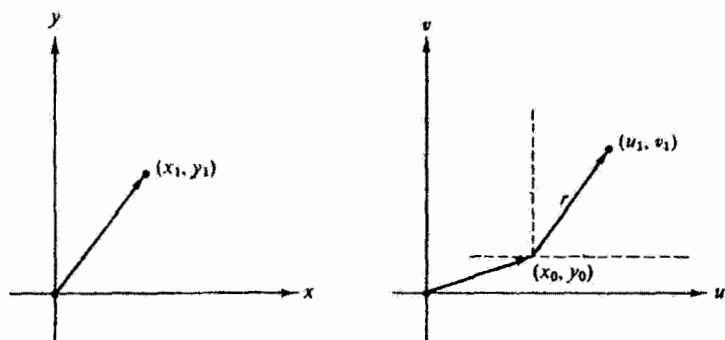
۶-۶ نگاشت

در بخشهای قبل توابع تحلیلی را تعریف و با برخی از جنبه‌های عمده آنها آشنا شدیم. روابط انتگرالی فصل ۷ پیامد مستقیم همین جنبه‌ها به‌شمار می‌آیند. در اینجا، به معرفی پاره‌ای از جنبه‌های هندسی تر توابع متغیر مختلط می‌پردازیم، که در تجسم بخشیدن به عملکردهای انتگرالی فصل ۷ سودمند خواهند بود و به‌جای خود در حل معادله لاپلاس در دستگاههای دوبعدی بسیار با ارزش‌اند.

در هندسه تحلیلی معمولی می‌توانیم بگیریم $w = f(x)$ و سپس منحنی تغییرات w را برحسب x ترسیم کنیم. مسئله در اینجا پیچیده‌تر است، زیرا z خود تابع دو متغیر x و y است. نمادگذاری زیر را به‌کار می‌بریم

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (۷۶-۶)$$

در این صورت نظیر به هر نقطه در صفحه z (با مقادیر خاص x و y) می‌توان مقادیر خاصی برای $u(x, y)$ و $v(x, y)$ یافت، که یک نقطه در صفحه w را به‌دست می‌دهد. با توجه به آنکه نقاط



شکل ۱۶-۶ انتقال.

واقع در صفحه z به نقاطی در صفحه w تبدیل شده یا نگاشته می‌شوند، خطها یا سطوح در صفحه z روی خطها و سطوح در صفحه w نگاشته خواهند شد. اکنون هدف ما آن است که ببینیم برای تعدادی از توابع ساده، خطها و سطوح چگونه از صفحه z به صفحه w نگاشته می‌شوند.

انتقال

$$w = z + z_0 \quad (77-6)$$

تابع w برابر است با متغیر z به اضافه یک ثابت، $z_0 = x_0 + iy_0$. با استفاده از معادله‌های ۱-۶ و ۷۶-۶، داریم

$$u = x + x_0 \quad (78-6)$$

$$v = y + y_0$$

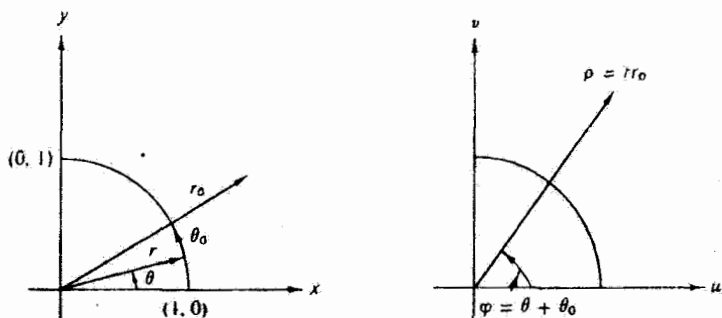
که مطابق شکل ۱۶-۶، یک انتقال ساده محوره‌های مختصات را نشان می‌دهد.

چرخش

$$w = zz_0 \quad (79-6)$$

در اینجا بهتر است نمایش قطبی را به‌کار ببریم، با استفاده از

$$w = \rho e^{i\varphi}, \quad z = r e^{i\theta}, \quad z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \quad (80-6)$$



شکل ۱۷-۶ چرخش.

داریم

$$\rho e^{i\varphi} = r r_0 e^{i(\theta + \theta_0)} \quad (۸۱-۶)$$

یا

$$\begin{aligned} \rho &= r r_0 \\ \varphi &= \theta + \theta_0 \end{aligned} \quad (۸۲-۶)$$

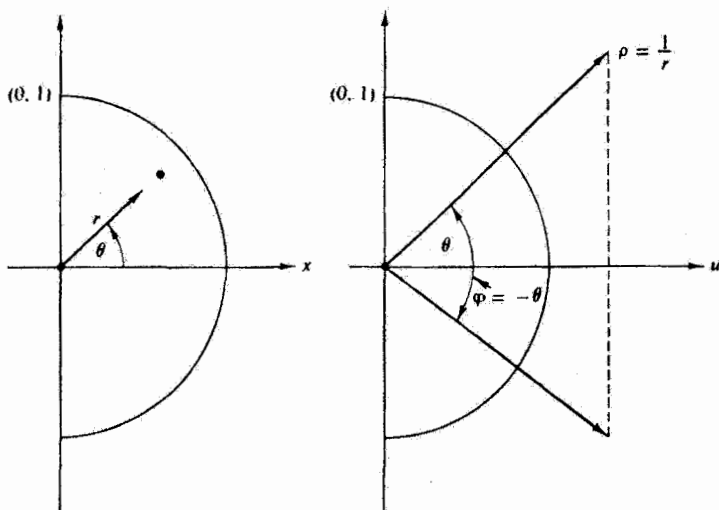
دو رویداد پیش آمده است. اولاً، مدول r تعدیل یافته، یعنی با ضریب r_0 منبسط یا منقبض شده است. ثانیاً، شناسه (آرگومان) θ به اندازه ثابت جمعی θ_0 افزایش یافته است (شکل ۱۷-۶). این عمل چرخش متغیر مختلط به اندازه زاویه θ_0 را نشان می‌دهد. در حالت خاص $z_0 = i$ یک چرخش خالص به اندازه $\pi/2$ رادیان داریم.

انعکاس

$$w = \frac{1}{z} \quad (۸۳-۶)$$

در اینجا نیز با استفاده از صورت قطبی داریم

$$\rho e^{i\varphi} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad (۸۴-۶)$$



شکل ۱۸-۶ انعکاس.

این عبارت نشان می‌دهد که

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \varphi = -\theta \quad (۸۵-۶)$$

از جزء اول معادله ۸۵-۶، انعکاس به روشنی نشان می‌شود. ناحیه درونی دایره واحد به ناحیه بیرونی نگاشته می‌شود و برعکس (شکل ۱۸-۶). به علاوه، به طوری که از جزء دوم معادله ۸۵-۶ برمی‌آید. علامت زاویه قطبی برعکس شده است. بنابراین، معادله ۸۳-۶ درست مانند معادله همیوخ مختلط، انعکاس محور y را نیز نمایش می‌دهد.

برای آنکه بینیم خطهای صفحه z چگونه به صفحه w تبدیل می‌شوند، به صورت دکارتی آن برمی‌گردیم:

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} \quad (۸۶-۶)$$

با ضرب کردن صورت و مخرج کسر سمت راست در z^* ، این کسر را گویا می‌کنیم و اجزای حقیقی و موهومی را با هم برابر قرار می‌دهیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & x &= \frac{u}{u^2 + v^2} \\ v &= -\frac{y}{x^2 + y^2}, & y &= -\frac{v}{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (۸۷-۶)$$

دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات در صفحه z عبارت است از

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (۸۸-۶)$$

و به واسطه معادله ۸۷-۶، به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = r^2 \quad (۸۹-۶)$$

با ساده کردن معادله ۸۹-۶ می‌رسیم به

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2} = \rho^2 \quad (۹۰-۶)$$

این معادله، دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات در صفحه w را توصیف می‌کند.
خط افقی $y = c_1$ به منحنی زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{-v}{u^2 + v^2} = c_1 \quad (۹۱-۶)$$

یا

$$u^2 + v^2 + \frac{v}{c_1} + \frac{1}{(2c_1)^2} = \frac{1}{(2c_1)^2} \quad (۹۲-۶)$$

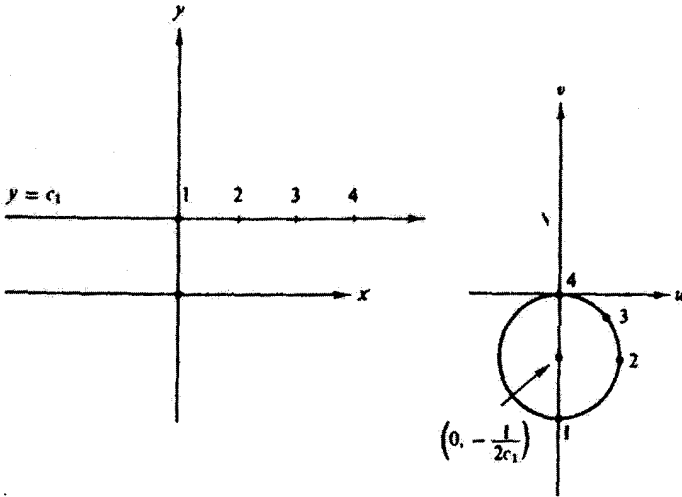
که معادله دایره‌ای به شعاع $1/2c_1$ و به مرکز $u = 0$ و $v = -1/2c_1$ در صفحه w است (شکل ۱۹-۶).

خواننده می‌تواند با چرخاندن محورهای x و y ، سه حالت ممکن دیگر، $x = \pm c_1$ و $y = -c_1$ را اختیار کند. به‌طور کلی، هر خط مستقیم یا دایره واقع در صفحه z به یک خط مستقیم یا دایره در صفحه w تبدیل خواهد شد (با مسئله ۱۶-۶ مقایسه کنید).

در هر سه تبدیلی که بررسی کردیم، یک تناظر یک به یک بین نقاط صفحه z و نقاط صفحه w برقرار است. اینک برای نمایش تبدیلهای گوناگونی که انجام می‌شود و مشکلاتی که ممکن است پیش آید، نخست با یک تناظر دو به یک و سپس با یک تناظر چند به یک آشنا می‌شویم. سرانجام وارون این تبدیلهای را در نظر خواهیم گرفت.

نخست تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$w = z^2 \quad (۹۳-۶)$$



شکل ۶-۱۹ انعکاس خط \leftrightarrow دایره.

که منجر می‌شود به

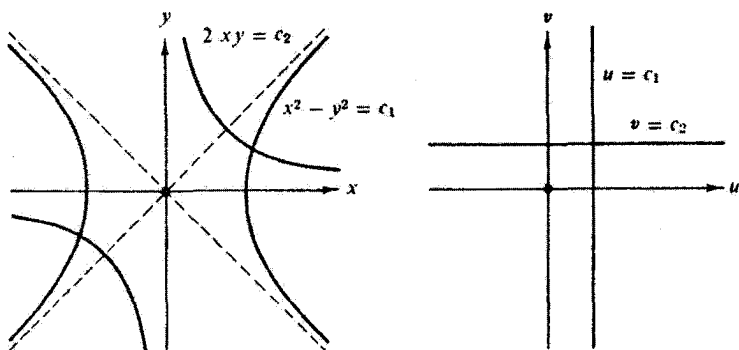
$$\rho = r^2, \quad \varphi = 2\theta \quad (۹۴-۶)$$

به‌وضوح می‌بینیم که این تبدیل غیرخطی است، زیرا مدول مجذور شده است، ولی جنبه با اهمیت معادله ۹۴-۶ این است که زاویه فاز یا شناسه دو برابر شده است. یعنی،

$$\begin{array}{ll} \text{اولین ربع صفحه } z & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \text{نیم صفحه بالایی } w & 0 \leq \varphi < \pi \\ \text{نیم صفحه بالایی } z & 0 \leq \theta < \pi \quad \rightarrow \quad \text{تمام صفحه } w & 0 \leq \varphi < 2\pi \end{array}$$

نیم صفحه پایینی z روی تمام صفحه w ، که قبلاً پوشانده شده است، نگاشته می‌شود، و به این ترتیب برای بار دوم صفحه w را می‌پوشاند. این همان تناظر دو به یک است، دو نقطه متمایز در صفحه z ، یعنی z_0 و $z_0 e^{i\pi} = -z_0$ ، هر دو نظیر یک نقطه $w = z_0^2$ هستند. در نمایش دکارتی داریم

$$\begin{aligned} u + iv &= (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + i2xy \end{aligned} \quad (۹۵-۶)$$



شکل ۲۰-۶ نگاشت مختصات هذلولوی.

که منجر می شود به

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned} \quad (۹۶-۶)$$

در نتیجه، خطهای $u = c_1$ ، $v = c_2$ در صفحه w با $x^2 - y^2 = c_1$ و $2xy = c_2$ ، یعنی هذلولیهای راستگوش (و متعامد) در صفحه z ، متناظرند (شکل ۶-۲۰). متناظر با هر نقطه روی هذلولی $x^2 - y^2 = c_1$ در نیم صفحه سمت راست $x > 0$ ، یک نقطه روی خط $u = c_1$ وجود دارد و برعکس. لیکن، همانگونه که قبلاً توضیح داده شد، هر نقطه روی خط $u = c_1$ با نقطه‌ای روی هذلولی $x^2 - y^2 = c_1$ در نیم صفحه سمت چپ $x < 0$ نیز متناظر است.

در بخش ۶-۷ خواهیم دید در صورتی که این تبدیل تحلیلی باشد، هرگاه خطها در صفحه w متعامد باشند، خطهای متناظر در صفحه z نیز متعامد خواهند بود. $u = c_1$ و $v = c_2$ عمود برهم اند، از این رو هذلولیهای متناظر در صفحه z متعامدند. عملاً یک دستگاه متعامد جدید از خطها (و یا اگر محوری عمود بر x و y اضافه کنیم، سطحهای) هذلولوی ساخته‌ایم. این دستگاه در مسئله ۲-۱-۳ بررسی شد. باید گفت که اگر خطهای هذلولوی، خطوط نیروی الکتریکی یا مغناطیسی باشند، یک عدسی چارقطبی داریم که در کانونی کردن باریکه‌های ذرات با انرژی بالا به‌کار می‌آید.

تبدیل

$$w = e^z \quad (۹۷-۶)$$

منجر می شود به

$$\rho e^{i\varphi} = e^{x+iy} \quad (۹۸-۶)$$

یا

$$\rho = e^x \quad (۹۹-۶)$$

$$\varphi = y$$

اگر y در گستره $0 \leq y < 2\pi$ (یا $-\pi \leq y < \pi$) قرار گیرد، φ هم در همین گستره واقع خواهد شد. ولی این گستره φ به معنای تمام صفحه w است. به عبارت دیگر، نوار افقی به عرض 2π در صفحه z روی تمامی صفحه w نگاشته می‌شود. به علاوه، همه نقطه‌های $(x + i(y + 2n\pi))$ که n هر عدد صحیحی است (به اعتبار معادله ۹۹-۶)، روی یک نقطه در صفحه w نگاشته می‌شوند. یک تناظر چند (بینهایت) به یک داریم. وارون تبدیل چهارم (معادله ۹۳-۶) عبارت است از

$$w = z^{1/2} \quad (۱۰۰-۶)$$

با استفاده از رابطه

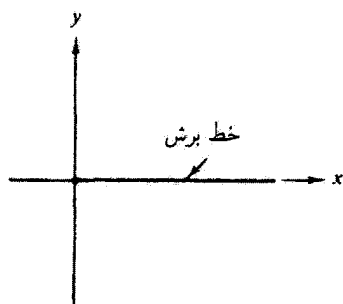
$$\rho e^{i\varphi} = r^{1/2} e^{i\theta/2} \quad (۱۰۱-۶)$$

و

$$2\varphi = \theta \quad (۱۰۲-۶)$$

نتیجه می‌گیریم که متناظر با هر نقطه در صفحه z (به استثنای نقطه $z = 0$) دو نقطه در صفحه w داریم (با شناسه‌های φ و $\varphi + \pi$). یا به بیان دیگر، θ و $\theta + 2\pi$ متناظرند با φ و $\varphi + \pi$ ، یعنی دو نقطه متمایز در صفحه w . این تناظر شبیه است به متغیر مختلط معادله ساده متغیر حقیقی $y^2 = x$ ، که در آن متناظر با هر مقدار x ، دو مقدار، به اضافه و منها، برای y وجود دارد. نکته مهم در اینجا آن است که اگر قرارداد کنیم θ محدود به گستره‌ای نظیر $0 \leq \theta < 2\pi$ باشد، می‌توانیم تابع w در معادله ۱۰۰-۶ را از یک تابع دومقداری به یک تابع تک‌مقداری تبدیل کنیم. برای این کار، باید قرارداد کنیم که هرگز خط $\theta = 0$ در صفحه z را قطع نکنیم (شکل ۲۱-۶). چنین خط جداکننده‌ای را خط برش می‌نامند. نقطه انتهایی (در اینجا $z = 0$) نقطه شاخه تابع چند مقدار نامیده می‌شود. نقطه شاخه نوعی نقطه تکین است (با بخش ۱-۷ مقایسه کنید)؛ $f(z)$ در $z = 0$ تحلیلی نیست.

هر خط دیگری نیز که از $z = 0$ تا بینهایت امتداد داشته باشد، منظور ما را برآورده می‌کند. هدف از خط برش آن است که شناسه z را محدود کند. نقاط z_0 و $e^{2\pi i} z_0$ در صفحه z برهم



شکل ۶-۲۱ یک خط برش.

منطبق‌اند، اما نقاط متفاوت w و $w e^{i\pi} = -w$ در صفحه w را به دست می‌دهند. از این رو، تابع $w = z^{1/2}$ در غیاب خط برش مبهم است.

در فصل ۷ با نقاط شاخه و خطهای برش به دفعات برمی‌خوریم. سرانجام، به عنوان وارون تبدیل پنجم (معادله ۶-۹۷) داریم

$$w = \ln z \quad (۶-۱۰۳)$$

با بسط این تابع، می‌رسیم به

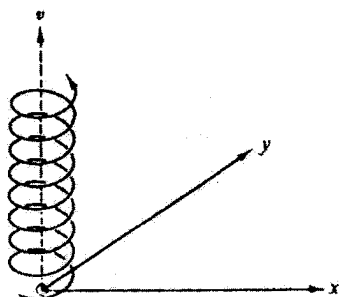
$$\begin{aligned} u + iv &= \ln r e^{i\theta} \\ &= \ln r + i\theta \end{aligned} \quad (۶-۱۰۴)$$

به ازای هر نقطه معلوم z در صفحه z ، شناسه θ می‌تواند مقادیر متفاوتی داشته باشد که اختلاف آنها با یکدیگر مضرب صحیحی از 2π است. یعنی

$$v = \theta + 2n\pi \quad (۶-۱۰۵)$$

و شبیه به تبدیل نمایی، یک تناظر چند (بینهایت) به یک خواهیم داشت.

معادله ۶-۱۰۳ نمایش فیزیکی جالبی دارد. اگر در صفحه z دایره واحد، $r = 1$ ، را دور بزنیم، با استفاده از معادله ۶-۱۰۴ داریم: $w = \ln r = 0$ و $v = \theta$ ، θ به طور یکنواختی افزایش می‌یابد، پس v با افزایش θ ، زیاد می‌شود و از 2π می‌گذرد. همین‌طور که دایره واحد را در صفحه z بارها و بارها دور می‌زنیم، رفتار نگاشت در صفحه w مشابه حرکت روبه پیش یک پیچ به هنگام پیچاندن و یا مشابه بالا رفتن شخصی است که از پلکانی مارپیچ بالا می‌رود (شکل ۶-۲۲).

شکل ۲۲-۶، $\ln z$ ، یک تابع چند مقدار.

در اینجا نیز مانند مثال پیش، با محدود کردن θ به گستره‌ای نظیر $0 \leq \theta < 2\pi$ توسط خط برش $\theta = 0$ (محور حقیقی مثبت)، تناظر را یکتا (و معادله ۶-۳۰ را غیر مبهم) می‌سازیم. این عمل معادل آن است که فقط و فقط یک دور کامل از پلکان مارپیچی را در نظر بگیریم. به دلیل همین ماهیت چند مقداری بودن $\ln z$ است که انتگرال پربندی زیر حول مبدأ مختصات صفر نمی‌شود

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

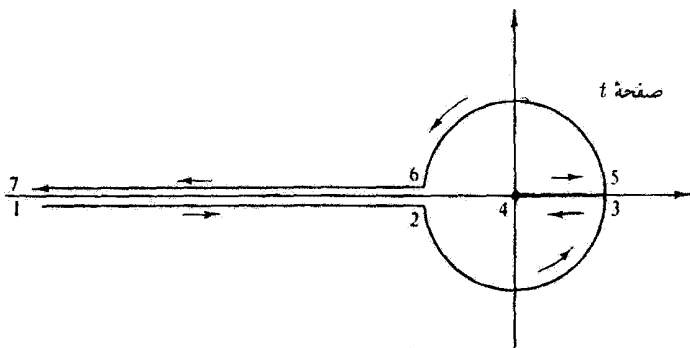
این خاصیت در مسئله‌های ۶-۴-۱ و ۶-۴-۲ مطرح می‌شود و شالوده کل حساب مانده‌ها به‌شمار می‌آید (فصل ۷).

مفهوم نگاشت دامنه وسیعی دارد و در ریاضیات بسی مفید است. نگاشت از صفحه مختلط z به صفحه مختلط w تعمیم ساده یک تابع است. هر تابع، نگاشتی است از x (در یک مجموعه) به y در یک مجموعه دیگر. در بخش ۸-۷ با صورت پیچیده‌تری از نگاشت سروکار داریم؛ در آنجا، تابع دلتای دیراک، $\delta(x-a)$ ، تابع $f(x)$ را بر مقدارش در نقطه a می‌نگارد. در فصل ۱۵، با استفاده از تبدیلهای انتگرالی، تابع $f(x)$ در فضای x را بر روی تابع دیگر $F(t)$ (وابسته به $f(x)$) در فضای t می‌نگاریم.

مسائل

۶-۶-۱ دایره‌های واقع بر صفحه z و به مرکز مبدأ، برای هر یک از تابعهای زیر چگونه تبدیل می‌شوند؟
 (الف) $w_1(z) = z + 1/z$ ؛ (ب) $w_2(z) = z - 1/z$ به ازای $z \neq 0$. هرگاه $|z| \rightarrow 1$ ، آنگاه چه پیش می‌آید؟

۶-۶-۲ ناحیه داخلی دایره واحد در صفحه w ، نظیر چه بخشی از صفحه z است، هرگاه داشته باشیم



شکل ۶-۲۳ پربند انتگرال‌گیری تابع بسیل.

$$w = \frac{z-i}{z+i} \text{ (ب)} \quad ; w = \frac{z-1}{z+1} \text{ (الف)}$$

۶-۳-۴ در مورد تبدیلهای زیر بحث کنید

$$w(z) = \sinh z \text{ (ج)} \quad w(z) = \sin z \text{ (الف)}$$

$$w(z) = \cosh z \text{ (د)} \quad w(z) = \cos z \text{ (ب)}$$

نگاشت خطهای $x = c_1$ و $y = c_2$ در صفحه w را بیابید. دقت کنید که سه تبدیل آخری را می‌توان به کمک انتقال یا چرخشهای مناسب، از تبدیل اول به دست آورد.
۶-۴-۴ نشان دهید که اگر خط برشی را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$-1 \leq x \leq 1 \quad y = 0$$

تابع

$$w(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$$

تک‌مقدار خواهد بود.

۶-۴-۵ نشان دهید که اعداد منفی در صفحه مختلط لگاریتم دارند. به عنوان مثال، حالت خاص $\ln(-1)$ را محاسبه کنید.

$$\text{جواب: } \ln(-1) = i\pi$$

۶-۴-۶ نمایش انتگرالی تابع بسیل روی پربندی در صفحه t ، مطابق شکل ۶-۲۳، گرفته می‌شود. با تابع $t = e^{i\theta}$ این پربند را در صفحه θ بنگارید. مثالهای متعدد دیگری از نگاشت در فصلهای ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ مطرح شده است.

۷-۶ نگاشت همدیس

در بخش ۶-۶ هذلولیها روی خطهای راست و خطهای راست روی دایرهها نگاشته شدند. ولی در تمام این تبدیلهای یک جنبه ثابت باقی ماند. این ثابت بودن ناشی از این واقعیت بود که همه تبدیلهای بخش ۶-۶ تحلیلی بودند.

مادام که تابع $w = f(z)$ تحلیلی باشد، داریم

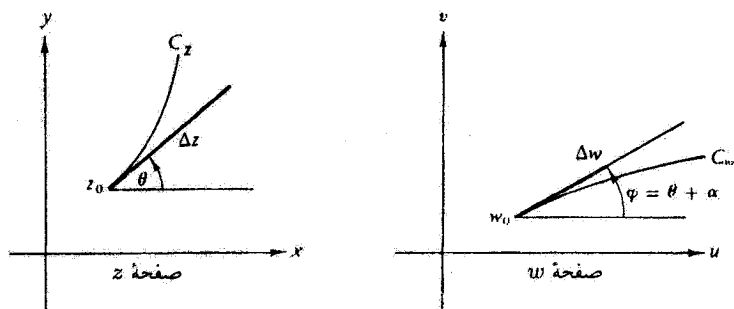
$$\frac{df}{dz} = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (106-6)$$

با در نظر گرفتن صورت قطبی این معادله، می‌توانیم مدولها را با هم و شناسه‌ها را با یکدیگر برابر قرار دهیم. برای شناسه‌ها (با فرض $df/dz \neq 0$) داریم

$$\begin{aligned} \arg \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z \quad (107-6) \\ &= \arg \frac{df}{dz} = \alpha \end{aligned}$$

که در آن α ، شناسه مشتق، که چه بسا تابع z باشد، به‌ازای یک z معین ثابت و مستقل از جهتی است که در امتداد آن به نقطه z نزدیک شده‌ایم. برای آنکه اهمیت این رابطه روشن شود، دو منحنی، یکی c_z در صفحه z و دیگری c_w متناظر با آن در صفحه w را در نظر بگیرید (شکل ۶-۲۴). نمو Δz که با محور حقیقی (x) زاویه θ می‌سازد و نمو Δw متناظر با آن که با محور حقیقی (u) زاویه φ می‌سازد، در شکل نشان داده شده است. از معادله ۱۰۷-۶ داریم

$$\varphi = \theta + \alpha \quad (108-6)$$



شکل ۶-۲۴ نگاشت همدیس-تغییر نکردن زاویه‌ها.

به بیان دیگر، مادام که w تبدیلی تحلیلی باشد و مشتق آن هم صفر نباشد^۱، هر خط در صفحه z ، در صفحه w به اندازه زاویه α خواهد چرخید. این نتیجه‌گیری برای هر خطی که از z_0 بگذرد صادق است؛ در نتیجه، برای دو خط نیز برقرار است. زاویه بین این دو خط عبارت است از

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\theta_2 + \alpha) - (\theta_1 + \alpha) = \theta_2 - \theta_1 \quad (۱۰۹-۶)$$

این عبارت نشان می‌دهد که زاویه بین دو خط تحت تبدیل تحلیلی بدون تغییر باقی می‌ماند. چنین تبدیلهایی را که در آنها زاویه تغییر نمی‌کند، همدیس می‌نامند. زاویه چرخش α معمولاً تابع z است. علاوه بر این، $|f'(z)|$ معمولاً تابعی از z خواهد بود.

تبدیلهای همدیس از زاویه تاریخی برای دانشمندان و مهندسان در حل معادله لاپلاس در مسائل الکتروستاتیک، دینامیک شاره‌ها، شارش گرما و مانند آنها اهمیت فراوانی داشته است. ولی رهیافت تبدیلهای همدیس با همه ظرافتی که دارد، به مسائلی محدود می‌شود که قابل تحویل به دو بعدند. این روش، در صورتی که تقارن بالایی وجود داشته باشد. اغلب بسیار زیباست، ولی اگر تقارن از بین برود یا وجود نداشته باشد، غالباً کارایی چندانی ندارد. به جهت همین محدودیتها و نیز به دلیل آنکه کامپیوترهای بسیار سریع راه‌حلهای دیگری (روشهای تکراری برای حل معادله دیفرانسیل جزئی) ارائه می‌کنند، از آوردن شرح جزئیات و کاربردهای نگاشت همدیس چشم می‌پوشیم.

مسائل

۱-۷-۶ $w(z)$ را حول نقطه $z = z_0$ که در آن $f'(z_0) = 0$ ، به طریق تیلور بسط دهید. (زاویه‌ها در این نقطه تغییر می‌کنند.) نشان دهید که اگر $n - 1$ مشتق اول صفر شوند ولی $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ، آنگاه زاویه‌های در صفحه z به رأس $z = z_0$ در صفحه w ، n برابر می‌شوند.

۲-۷-۶ تبدیلهایی را که هر یک از چهار دستگاه مختصات استوانه‌ای زیر را ایجاد می‌کنند، به دست آورید:

$$x = \rho \cos \varphi$$

(الف) استوانه‌ای دوار

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$x = a \cosh u \cos v$$

(ب) استوانه‌ای بیضوی

$$y = a \sinh u \sin v$$

$$x = \xi \eta$$

(ج) استوانه‌ای سهموی

۱. اگر $df/dz = 0$ باشد، شناسه یا فاز آن تعریف نشده است و تبدیل (تحلیلی) در آن رزوا با ضرورتاً تغییر نخواهند کرد.

$$y = \frac{1}{4}(\eta^2 - \xi^2)$$

$$x = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}$$

$$y = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}$$

(د) دوقطبی

یادآوری: این تبدیلهای لزوماً تحلیلی نیستند.

۶-۳ محوره‌های مختصات در صفحه z ، برای تبدیل

$$e^z = \frac{a-w}{a+w}$$

چگونه تبدیل می‌شوند؟ چه دستگاه مختصاتی به دست آورده‌اید؟

مراجع

Ahlfors L V, *Complex Analysis*, 3rd ed, New York, McGraw-Hill (1979).

کتابی مشروح، کامل، دقیق و جامع است.

Churchill R V, J W Brown, and R F Verkey, *Complex Variables and Applications*, 3rd ed, New York: McGraw-Hill (1974).

کتاب درسی بسیار خوبی، هم برای دانشجویان مبتدی و هم برای دانشجویان پیشرفته. کتابی خواندنی و کامل است. قضیه کوشی-گورسا در فصل ۵ این کتاب به طور مشروح اثبات شده است. Greenleaf F P, *Introduction to Complex Variables*. Philadelphia: W B Saunders (1972).

این کتاب بسیار خواندنی، حاوی توضیجهایی مشروح و دقیق است.

Kyrala A, *Applied Functions of a Complex Variable*, New York Wiley-Interscience (1972).

کتابی در سطح متوسط که برای دست‌اندرکاران علوم و مهندسی برنامه‌ریزی شده است، و حاوی کاربردهای فیزیکی متعددی است.

Levinson N and R M Redheffer, *Complex Variables*, San Francisco, Holden-Day (1970).

این کتاب برای دست‌اندرکاران علوم و مهندسی، که به کاربردهای عملی توجه دارند، نوشته شده است.

Morse P M and Feshbach H, *Methods of Theoretical Physics*, New York: McGraw-Hill (1953).

قسمتهایی از نظریه تابعهای متغیر مختلط که مورد توجه فیزیکدانان نظری است در فصل ۴ این کتاب آمده است.

Sokolnikoff I S and Redheffer R M, *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, 2nd ed, New York: McGraw-Hill (1966).

فصل ۷ این کتاب درباره متغیرهای مختلط است.

Spiegel M R, *Theory and Problems of Complex Variables*, New York, Schaum (1964).

خلاصه‌ای عالی از نظریه متغیرهای مختلط برای استفاده دست‌اندرکاران علوم در این کتاب آمده است.

Watson G N, *Complex Integration and Cauchy's Theorem*. New York: Hafner (1917) نسخه اصلی

کار کوتاهی است حاوی بررسی دقیق قضیه انتگرال و فرمول انتگرال کوشی. این کتاب شامل کاربردهایی در حساب مانده‌ها نیز هست. این کتاب مجدداً در شماره ۱۵ مجموعه زیر به چاپ رسیده است:

Combridge Tracts in Mathematics, and Mathematical Physics.

مراجع دیگری نیز در پایان فصل ۱۵ خواهد آمد.



توابع متغیر مختلط II

حساب مانده‌ها

۱-۷ تکینگیها

در این فصل بار دیگر به تحلیلی برمی‌گردیم که در فصل ۶ از شرایط کوشی-ریمان آغاز شد و به بسط لوران انجامید (بخش ۵-۶). بسط لوران تعمیم بسط تیلور را در حضور تکینگیها می‌نمایاند. نقطه z_0 را یک نقطه تکین منزوی تابع $f(z)$ می‌نامیم، اگر $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ تحلیلی نباشد ولی در نقاط همسایه تحلیلی باشد. تابعی را که در تمام صفحه مختلط متناهی باشد، جز در چند قطب منزوی، تحلیلی باشد بر خه ریخت می‌گویند.

قطبها

در بسط لوران تابع $f(z)$ حول z_0 داریم

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1-7)$$

اگر a_n به ازای $0 < -m < n$ صفر باشد، ولی $a_{-m} \neq 0$ می‌گوییم z_0 یک قطب مرتبه m است. مثلاً اگر $m = 1$ یعنی اگر $a_{-1}/(z - z_0)$ اولین جمله غیر صفر در بسط لوران باشد، یک قطب مرتبه اول داریم که غالباً آن را یک قطب ساده می‌نامند.

از سوی دیگر، اگر مجموعیابی تا $n = -\infty$ ادامه داشته باشد، z_0 قطبی از مرتبه نامتناهی است و یک تکینگی اساسی نامیده می‌شود. این تکینگیهای اساسی جنبه‌های نامعقول بسیاری هم دارند. مثلاً می‌توانیم نشان دهیم که در هر همسایگی کوچک یک تکینگی اساسی تابع $f(z)$ این تابع به اندازه دلخواه می‌تواند با هر کمیت مختلط از پیش تعیین شده w_0 (و در نتیجه با همه این مقادیر) برابر باشد.^۱ به بیان دیگر، تمام صفحه w در همسایگی نقطه z_0 نگاشته می‌شود. یک وجه تمایز اساسی بین یک قطب از مرتبه متناهی و یک تکینگی اساسی آن است که قطب مرتبه m را می‌توان با ضرب کردن $f(z)$ در $(z - z_0)^m$ حذف کرد. واضح است که این کار را نمی‌توان درباره یک تکینگی اساسی انجام داد.

رفتار $f(z)$ در $z \rightarrow \infty$ بر حسب رفتار $f(1/t)$ در $t \rightarrow 0$ تعریف می‌شود. تابع زیر را در نظر بگیرید

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2-7)$$

با $z \rightarrow \infty$ ، z را با $1/t$ تعویض می‌کنیم و می‌رسیم به:

$$\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! t^{2n+1}} \quad (3-7)$$

از این تعریف روشن است که $\sin z$ یک تکینگی اساسی در بینهایت دارد. این نتیجه را می‌شد از مسئله ۹-۱-۶ نیز استنتاج کرد، زیرا

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin iy & \text{وقتی } x &= 0 \\ &= i \sinh y \end{aligned}$$

که با $y \rightarrow \infty$ ، به طور نمایی، به بینهایت میل می‌کند.

۱. این قضیه منسوب به پیکارد است. ای سی تیچ مارش در کتابش با مشخصات زیر، اثباتی از آن به دست داده است:

نقطه‌های شاخه

یک نوع تکینگی دیگر نیز هست که در بخشهای بعدی این فصل از اهمیت برخوردار است. فرض کنید

$$f(z) = z^a$$

که در آن a عدد صحیح نیست.^۱ همچنان که z دایره واحد از e^0 تا $e^{2\pi i}$ را دور می‌زند، به‌ازای عدد غیر صحیح a داریم

$$f(z) \rightarrow e^{2\pi ai} \neq e^0$$

در اینجا نیز مانند بخش ۶-۶ یک نقطه شاخه داریم. نقاط e^0 و $e^{2\pi i}$ در صفحه z برهم منطبق‌اند، ولی این نقاط منطبق بر هم به مقادیر متفاوتی برای $f(z)$ می‌انجامند؛ یعنی $f(z)$ تابعی است چند مقداری. این مشکل را می‌توان با ترسیم یک خط برش برطرف کرد، به طوری که به‌ازای هر نقطه معلوم در صفحه z ، $f(z)$ به طور یکتا مشخص شود.

به‌دقت توجه کنید که تابعی که نقطه شاخه داشته و به خط برش نیاز دارد، روی خط برش پیوسته نیست. به‌طور کلی، در دو طرف خط برش یک اختلاف فاز وجود خواهد داشت. از این رو، انتگرالهای خطی در دو طرف خط برش نقطه شاخه عموماً با یکدیگر حذف نمی‌شوند. نمونه‌های متعددی از این وضعیت در مسئله‌های فصل آمده است.

خط برشی که برای تبدیل یک ناحیه همبندچندگانه به یک ناحیه همبندساده به‌کار می‌رود (بخش ۳-۶) کاملاً متفاوت است. تابع روی خط برش پیوسته می‌ماند و اختلاف فازی وجود ندارد.

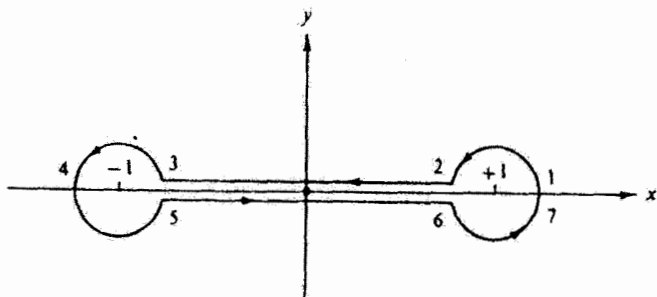
مثال ۷-۱-۱: تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} = (z + 1)^{1/2}(z - 1)^{1/2} \quad (4-7)$$

عامل اول سمت راست، یعنی $(z + 1)^{1/2}$ ، یک نقطه شاخه در $z = -1$ دارد. عامل دوم، در $z = 1$ دارای یک نقطه شاخه است. برای آنکه ببینیم آیا می‌شود پاره‌خط واصل بین نقاط $z = +1$ و $z = -1$ را به‌منزله خط برش در نظر بگیریم یا خیر، فاز دو عامل ضرب را در نقاط مختلف روی پرند شکل ۷-۱ محاسبه می‌کنیم.

برای آنکه تغییرات در فاز بهتر قابل محاسبه باشد، می‌گیریم $z + 1 = re^{i\theta}$ و $z - 1 = \rho e^{i\varphi}$. در این صورت فاز $f(z)$ برابر خواهد شد با $(\theta + \varphi)/2$. از نقطه ۱ شروع می‌کنیم که در آن فاز

۱. نقطه $z = 0$ ، از لحاظ تکینگی، به این دلیل یک نقطه تکین است که در آن z^a تعداد معینی مشتق دارد، در حالی که تابع تحلیلی دارای بینهایت مشتق است (بخش ۶-۴). مشکل اینجاست که وقتی حول مبدأ بگردیم، $f(z)$ تک‌مقدار نیست. فرمول انتگرال کوشی درباره آن صدق نمی‌کند.



شکل ۱-۷

جدول ۱-۷

زاویه فاز			
نقطه	θ	φ	$(\theta + \varphi)/2$
۱	۰	۰	۰
۲	۰	π	$\pi/2$
۳	۰	π	$\pi/2$
۴	π	π	π
۵	2π	π	$3\pi/2$
۶	2π	π	$3\pi/2$
۷	2π	2π	2π

$z + 1$ و $z - 1$ هر دو صفرند. با حرکت از نقطه ۱ به نقطه ۲، φ ، یعنی فاز $pe^{i\varphi} = z - 1$ ، به اندازه π افزایش می‌یابد ($z - 1$ منفی می‌شود). بعد از این مرحله φ تا نقطه ۶ ثابت می‌ماند، و از نقطه ۶ تا ۷ بار دیگر تغییر می‌کند. فاز $z + 1 = re^{i\theta}$ نیز رفتار مشابهی دارد و با رفتن از نقطه ۳ به نقطه ۵ به اندازه 2π افزایش می‌یابد. فاز تابع $f(z) = (z + 1)^{1/2}(z - 1)^{1/2} = r^{1/2}e^{i(\theta + \varphi)/2}$ عبارت است از $(\theta + \varphi)/2$. این فاز را در ستون آخر جدول ۱-۷ آورده‌ایم. از این جدول به دو نتیجه جالب می‌رسیم:

۱. فاز در نقاط ۵ و ۶، با فاز در نقاط ۲ و ۳ یکی نیست. این همان رفتاری است که از خط برش نقطه شاخه انتظار می‌رود.

۲. فاز در نقطه ۷ به اندازه 2π از فاز در نقطه ۱ بیشتر است، و از این رو تابع $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ برای پربندی که، مطابق شکل، هر دو نقطه شاخه را دور می‌زند تک‌مقدار است. اگر محور x ها را به ازای $1 < x < -1$ خط برش بگیریم، $f(z)$ به طور یکتا مشخص می‌شود. یا می‌شود محور x مثبت به ازای $x > 1$ و محور x منفی به ازای $x < -1$ را به عنوان خطهای

برش در نظر گرفت. در این حالت نیز نقاط شاخه را نمی‌توان دور زد و تابع تک‌مقدار می‌ماند. با تعمیم این مثال، به فاز تابعی به صورت زیر می‌رسیم

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot f_3(z) \cdots$$

که عبارت است از جمع جبری فازهای تک تک عوامل، یعنی

$$\arg f(z) = \arg f_1(z) + \arg f_2(z) + \arg f_3(z) + \cdots$$

فاز هر عامل را می‌توان به صورت آرک تانژانت خارج قسمت جزء موهومی آن به جزء حقیقی‌اش به دست آورد

$$\arg f_i(z) = \tan^{-1}(v_i/u_i)$$

فاز عاملی به صورت:

$$f_1(z) = (z - z_0)$$

عبارت است از زاویه فاز برداری دوبعدی که از نقطه $z_0 + z$ ترسیم می‌شود، و هر بار که نقطه $z_0 + z$ دور زده می‌شود، فاز به اندازه 2π افزایش می‌یابد. برعکس، با پیموده شدن هر حلقه بسته‌ای که نقطه z_0 در درون آن نباشد، فاز $z - z_0$ تغییر نمی‌کند.

به‌عنوان آخرین نکته در مورد تکینگیها، بنابر قضیه لیوویل (مسئله ۶-۴-۸):

”تابعی که همه جا محدود (کراندار) و تحلیلی است، باید ثابت باشد.“

این قضیه با استفاده از فرمول انتگرال کوشی به آسانی اثبات می‌شود. برعکس، کوچکترین اختلافی که یک تابع تحلیلی با یک ثابت داشته باشد حاکی از آن است که باید دست‌کم یک تکینگی در نقطه‌ای در صفحه مختلط نامتناهی موجود باشد، در نتیجه، به‌استثنای حالت بی‌اهمیت توابع ثابت، تکینگیها اجتناب‌ناپذیرند و باید فرا بگیریم که چگونه با آنها سرکنیم. ولی کار ما با آنها فراتر از اینهاست. ما از تکینگیها برای به‌وجود آوردن روش توانا و مفید حساب مانده‌ها بهره خواهیم گرفت.

مسائل

۱-۱-۷ بسط سری لوران تابع $f(z)$ نشان می‌دهد که این تابع یک قطب مرتبه m در $z = z_0$

دارد. نشان دهید که a_{-1} ، ضریب $(z - z_0)^{-1}$ ، از رابطه زیر به دست می آید

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]_{z=z_0}$$

که اگر این قطب یک قطب ساده ($m = 1$) باشد، خواهیم داشت

$$a_{-1} = [(z - z_0) f(z)]_{z=z_0}$$

این معادله برای a_{-1} در تعیین مانده‌ای که در بخش بعد در قضیه مانده‌ها به کار می‌رود، بسیار سودمند است.

[راهنمایی: روشی که برای اثبات یکتایی سریهای توانی در بخش ۵-۷ تا اندازه‌ای قرین موفقیت بود، در اینجا نیز به کار می‌آید.]

۱-۷-۲ تابع $f(z)$ را می‌توان به کمک رابطه زیر نشان داد

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

که در آن $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تحلیلی‌اند. $f_2(z)$ در مخرج، در $z = z_0$ صفر می‌شود، از اینجا پی می‌بریم که $f(z)$ در $z = z_0$ یک قطب دارد. ولی $f_1(z) \neq 0$ و $f_1'(z_0) \neq 0$. نشان دهید که a_{-1} ، ضریب $(z - z_0)^{-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ ، به ازای $z = z_0$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$a_{-1} = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

این نتیجه به قضیه بسط هویساید در بخش ۱۵-۱۲ می‌انجامد.

۱-۷-۳ فاز هر یک از عاملها و فاز کلی $f(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$ را، مانند مثال ۱-۷-۱، با پیمودن پربندی مشابه شکل ۱-۷ که نقطه‌های شاخه جدید را دور بزنند، به تفصیل بررسی کنید.

۱-۷-۴ تابع نوع دوم لژاندر $Q_\nu(z)$ در $z = \pm 1$ نقطه‌های شاخه دارد. این نقطه‌های شاخه از طریق خط برشی در راستای محور حقیقی (x) به یکدیگر متصل می‌شوند. (الف) نشان دهید که

$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ تک‌مقدار است (با در نظر گرفتن محور حقیقی به ازای

$+1 \leq x \leq -1$ به عنوان خط برش). (ب) بهتر است به ازای شناسه‌های حقیقی x و $|x| < 1$ ، تابع را به صورت زیر بنویسیم

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

نشان دهید که

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} [Q_0(x + i^0) + Q_0(x - i^0)]$$

که در آن $x + i^0$ نشان می‌دهد که z از بالا به محور حقیقی نزدیک می‌شود و $x - i^0$ نشانگر نزدیک شدن از پایین است.

۵-۱-۷ به‌عنوان نمونه‌ای از یک تکنیکی اساسی، رفتار $e^{1/z}$ را با نزدیک شدن z به صفر در نظر بگیرید. به‌ازای هر عدد مختلط z_0 ، $z_0 \neq 0$ ، نشان دهید

$$e^{1/z} = z_0$$

بینهایت جواب دارد.

۲-۷ حساب مانده‌ها

قضیه مانده‌ها

اگر از جمله به جمله بسط لوران یک تابع $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ با استفاده از پربندی که نقطه تکین منزوی z_0 را یک‌بار در سوی پادساعتگرد دور می‌زند انتگرال بگیریم خواهیم داشت (مسئله ۶-۴-۱)

$$\begin{aligned} a_n \oint (z - z_0)^n dz &= a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} \Big|_{z_1}^{z_2} \\ &= 0 \quad n \neq -1 \text{ به‌ازای} \end{aligned} \quad (5-7)$$

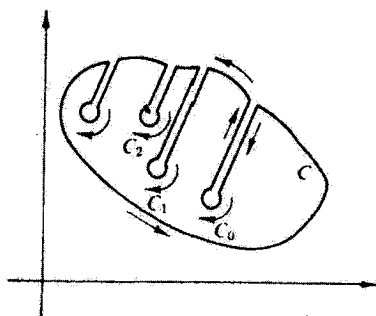
ولی اگر $n = -1$ داریم

$$a_{-1} \oint (z - z_0)^{-1} dz = a_{-1} \oint \frac{ire^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = 2\pi i a_{-1} \quad (6-7)$$

از طریق مجموع‌یابی معادله‌های ۵-۷ و ۶-۷، داریم

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = a_{-1} \quad (7-7)$$

ثابت a_{-1} ، یعنی ضریب $(z - z_0)^{-1}$ در بسط لوران، را مانده تابع $f(z)$ در $z = z_0$ می‌نامند.



شکل ۲-۷. طرد کردن تکینگیهای منزوی.

در حالتیابی با بیش از یک تکینگی، می‌توانیم شکل پربند را مطابق شکل ۲-۷ تغییر دهیم. با استفاده از قضیه انتگرال کوشی (بخش ۳-۶) می‌توان نوشت

$$\oint_G f(z)dz + \oint_{C_0} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \dots = 0 \quad (۸-۷)$$

انتگرال روی دایره‌ای حول هر نقطه تکین معین $z = z_i$ ، با فرض آنکه بسط لوران حول نقطه تکین $z = z_i$ وجود داشته باشد، با استفاده از معادله ۷-۷ به دست می‌آید

$$\oint_{C_i} f(z)dz = -2\pi i a_{-1z_i} \quad (۹-۷)$$

علامت منفی به دلیل ساعتگرد بودن انتگرال‌گیری است که در شکل ۲-۷ نشان داده شده است. با ترکیب معادله‌های ۸-۷ و ۹-۷، داریم

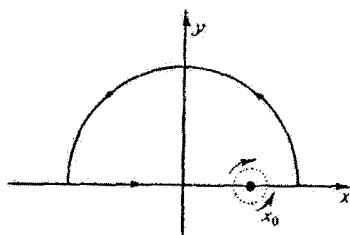
$$\begin{aligned} \oint_G f(z)dz &= 2\pi i (a_{-1z_0} + a_{-1z_1} + a_{-1z_2} + \dots) \\ &= 2\pi i \text{ (مجموع مانده‌های محاط شده)} \end{aligned} \quad (۱۰-۷)$$

این عبارت، قضیه مانده‌هاست. مسئله محاسبه یک یا چند انتگرال پربندی به مسئله جبری محاسبه مانده‌ها در نقاط تکین محاط شده تبدیل می‌شود.

نخست با استفاده از قضیه مانده‌ها مفهوم مقدار اصلی کوشی را برای یک انتگرال مطرح می‌کنیم. سپس در دنباله این بخش، قضیه مانده‌ها را درباره انواع متعددی از انتگرالهای معین، که در ریاضیات و فیزیک مهم‌اند، به کار می‌بریم. در بخش ۳-۷ از مفهوم مقدار اصلی کوشی برای به دست آوردن روابط مهم پاشندگی استفاده می‌کنیم. در فصل ۱۶ نیز برای تبدیلهای انتگرالی متفاوت، به خصوص تبدیل وارون لاپلاس به قضیه مانده‌ها نیاز پیدا خواهیم کرد.



شکل ۳-۷ کنارگذرانی نقاط تکین.



شکل ۴-۷ بستن پریند توسط نیم‌دایره به شعاع بینهایت.

مقدار اصلی کوشی

گهگاه یک قطب مرتبه اول منزوی مستقیماً روی پریند انتگرال‌گیری قرار می‌گیرد. در این حالت می‌توانیم با گنجانیدن یک مسیر انحرافی نیم‌دایره‌ای به شعاع بینهایت کوچک پریند را به صورتی تغییر شکل دهیم که مانده را به نحوی اختیاری بگنجانند و یا طرد کند. این عمل را در شکل ۳-۷ مشاهده می‌کنید. با این کار، انتگرال‌گیری روی نیم‌دایره عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} \pi i a_{-1} & \quad \text{چرخش پادساعتگرد} \\ -\pi i a_{-1} & \quad \text{چرخش ساعتگرد} \end{aligned}$$

این کمیت، مثبت یا منفی، در طرف چپ معادله ۱۰-۷ ظاهر می‌شود. اگر مسیر انحرافی ما ساعتگرد باشد، مانده محاط نخواهد شد و هیچ جمله‌ای متناظر آن در طرف راست معادله ۱۰-۷ ظاهر نخواهد شد. ولی اگر مسیر انحرافی پادساعتگرد باشد، مانده در پریند C محاط می‌شود و جمله $2\pi i a_{-1}$ در طرف راست معادله ۱۰-۷ ظاهر می‌شود. به‌طور کلی، برای هر دو مسیر انحرافی ساعتگرد و پادساعتگرد نتیجه به این قرار است که یک قطب ساده روی پریند به صورت نصف آن چیزی منظور می‌شود که در صورت بودن در داخل پریند به حساب می‌آید. این عمل متناظر است با محاسبه مقدار اصلی کوشی.

مثلاً فرض کنید که از $f(z)$ با یک قطب ساده در $z = x_0$ روی تمام محور حقیقی انتگرال گرفته شود. این پریند را نیم‌دایره به شعاع بینهایت در نیم‌صفحه بالایی می‌بندد (شکل ۴-۷). در

این صورت:

$$\begin{aligned} \oint f(z) dz &= \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{C_{x_0}} f(z) dz \\ &+ \int_{x_0 + \delta}^{\infty} f(x) dx + \int_C \text{نیم دایره نامتناهی} \\ &= 2\pi i \sum \text{مانده‌های محاط شده} \end{aligned} \quad (11-7)$$

اگر نیم دایره کوچک C_{x_0} (با عبور از زیر محور x در جهت پادساعتگرد) در x_0 را در بر بگیرد، و به عبارت دیگر x_0 محاط شود، کمیت مربوط به آن دوبار ظاهر خواهد شد. یک بار به صورت $\int_{C_{x_0}}$ و یک بار به صورت $2\pi i a_{-1}$ در جمله (مانده‌های محاط شده $\sum 2\pi i$)، و کمیت خالص $\pi i a_{-1}$ را خواهد داشت. اگر نیم دایره کوچک بالایی اختیار شود، x_0 طرد خواهد شد. فقط سهم آن از انتگرال گیری ساعتگرد روی C_{x_0} حاصل می شود که عبارت خواهد بود با $-\pi i a_{-1}$. با انتقال این جمله به سمت راست معادله ۱۱-۷، به همان کمیت قبلی، $+\pi i a_{-1}$ خواهیم رسید.

انتگرالهای در امتداد محور x را می توان با اختیار کردن شعاع دایره نزدیک به صفر، با یکدیگر ترکیب کرد، در نتیجه

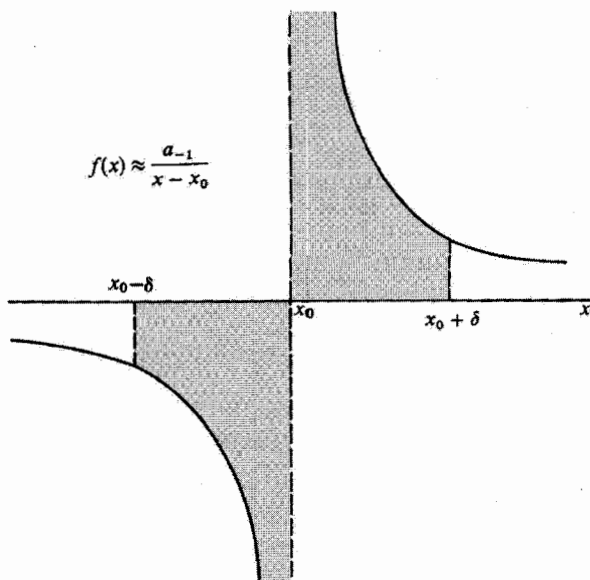
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^{\infty} f(x) dx \right\} = P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (12-7)$$

P مقدار اصلی کوشی است و فرایند حدگیری را نشان می دهد. دقیقاً توجه کنید که مقدار اصلی انتگرال کوشی فرایندی موازنه گر یا خنثی کننده است. در مجاورت تکینگی در $z = x_0$ داریم

$$f(x) \approx \frac{a_{-1}}{x - x_0} \quad (13-7)$$

این جمله نسبت به x_0 فرد است. در بازه متقارن یا زوج (نسبت به x_0) دو مساحت سایه دار یکدیگر را حذف می کنند (شکل ۵-۷). سهم تکینگی در انتگرال حول نیم دایره خواهد بود. گاهی همین روش حدگیری را درباره کرانه های $\pm \infty$ انتگرال گیری به کار می برند. بنا بر تعریف:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx \quad (14-7)$$



شکل ۵-۷ $\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx$

در یک طرز عمل دیگر قطب از روی پرند دور می‌شود، سپس در حین بازگشتن آن، رفتار حدی بررسی می‌شود. این روش در مثال ۷-۲-۴ بیان می‌شود. در آن مثال، نقاط تکین چنان از روی پرند برداشته می‌شوند که جواب انتگرال به‌صورت دلخواهی درمی‌آید که شرایط مرزی مسئله فیزیکی ایجاب می‌کند.

محاسبه انتگرالهای معین

در مسائل ریاضیات در فیزیک و نیز ریاضیات محض، بارها به انتگرالهای معین برمی‌خوریم. سه روش نسبتاً کلی زیر برای محاسبه این انتگرالها مفیدند: (۱) انتگرال‌گیری پربندی، (۲) تبدیل به توابع گاما و بتا (فصل ۱۰)، و (۳) انتگرال‌گیری با کوادراتور عددی (پیوست الف-۲). سایر رهیافتها عبارت‌اند از بسط سری توأم با انتگرال‌گیری جمله به جمله، و تبدیلیهای انتگرالی. روش انتگرال‌گیری پربندی، به‌طوری که بعداً خواهیم دید، چون در مورد انتگرالهای بسیار گوناگونی به‌کار می‌رود، شاید از همه این روشها عملی‌تر باشد.

محاسبه انتگرالهای معین از نوع $\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

از حساب مانده‌ها در محاسبه انواع متعددی از انتگرالهای معین در فیزیک و ریاضیات محض

بهره می‌برند. ابتدا انتگرالهایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (15-7)$$

که در آن f به ازای همه مقادیر θ متناهی است. این شرط را هم می‌کنیم که f تابع گویایی از $\sin \theta$ و $\cos \theta$ باشد، به طوری که تک مقدار شود. قرار می‌دهیم

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

در نتیجه

$$d\theta = -i \frac{dz}{z}, \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad (16-7)$$

با انجام این تغییر متغیر، انتگرال به صورت زیر در می‌آید

$$I = -i \oint f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{z} \quad (17-7)$$

که مسیر انتگرال‌گیری دایره واحد است. با استفاده از قضیه مانده‌ها، معادله ۷-۱۰، داریم

$$I = (-i) 2\pi i \sum \text{مانده‌های داخل دایره واحد} \quad (18-7)$$

توجه کنید که باید مانده‌های تابع $f(z)/z$ را محاسبه کرد. به انتگرالهایی از این نوع در مسئله‌های ۷-۲-۷ تا ۷-۲-۱۰ برخورد خواهید خورد.

مثال ۷-۲-۱: می‌خواهیم انتگرال معین زیر را محاسبه کنیم

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad |\varepsilon| < 1$$

این انتگرال با استفاده از معادله ۱۷-۷ به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} I &= -i \oint_{\text{دایره واحد}} \frac{dz}{z[1 + (\varepsilon/2)(z + z^{-1})]} \\ &= -i \frac{2}{\varepsilon} \oint \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)z + 1} \end{aligned}$$

ریشه‌های مخرج کسر عبارت‌اند از

$$z = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad z_+ = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

z_+ در داخل دایره واحد و z_- بیرون آن است. با استفاده از معادله ۷-۱۸ و مسئله ۷-۱۱، داریم

$$I = -i \frac{\gamma}{\varepsilon} \cdot 2\pi i \frac{1}{z + \frac{1}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \Big|_{z = -1/\varepsilon + (1/\varepsilon)\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

از اینجا می‌رسیم به

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad |\varepsilon| < 1$$

محاسبه انتگرالهای معین از نوع $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
فرض کنید انتگرال معینی به صورت زیر داشته باشیم

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (19-7)$$

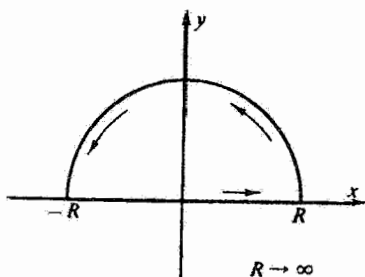
که دو شرط زیر در آن صدق می‌کنند:

(الف) $f(z)$ در نیم صفحه بالایی تحلیلی است مگر در تعدادی متناهی از قطبها. (فرض می‌شود که روی محور حقیقی هیچ قطبی وجود ندارد. اگر قطبی روی محور حقیقی باشد، می‌توانیم آن را به همان صورتی که قبلاً در همین بخش توضیح دادیم، محاط یا طرد کنیم.)

(ب) به ازای $|z| \rightarrow \infty$ ، $0 \leq \arg z \leq \pi$ ، $f(z)$ به تناسب توانی $1/z^2$ صفر شود.^۱
با برقراری این شرایط، می‌توانیم پربند انتگرال‌گیری را روی محور حقیقی و نیم دایره واقع در نیم صفحه بالایی، مطابق شکل ۷-۶، در نظر بگیریم. R ، شعاع نیم دایره، را بینهایت بزرگ می‌گیریم. در نتیجه

$$\begin{aligned} \oint f(z) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) i Re^{i\theta} d\theta \\ &= 2\pi i \sum \text{مانده‌های درون نیم صفحه بالایی} \end{aligned} \quad (20-7)$$

۱. می‌توانستیم شرط کنیم که $f(z)$ سریعتر از $1/z$ صفر شود، ولی می‌خواهیم $f(z)$ تک مقدار هم باشد.



شکل ۶-۷

انتگرال دوم (روی نیم‌دایره) با استفاده از شرط دوم صفر می‌شود، و داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{مانده‌های درون نیم‌صفحه بالایی} \quad (21-7)$$

مثال ۲-۲-۷: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (22-7)$$

با استفاده از معادله ۲۱-۷، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \sum \text{مانده‌های داخل نیم‌صفحه بالایی}$$

در اینجا و در هر مسئله مشابهی به این پرسش برمی‌خوریم که: محل قطبها کجاست؟ انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i} \quad (23-7)$$

مشاهده می‌کنیم که قطبهای ساده‌ای (مرتبه اول) در $z = i$ و $z = -i$ داریم. یک قطب ساده در $z = z_0$ ایجاد می‌کند که تابع به صورت زیر بسط لوران پیدا کند (یا آنکه بسط لوران زیر وجود یک قطب ساده را نمایش می‌دهد)

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (24-7)$$

مانده را می‌توان به آسانی به صورت زیر جدا کرد (مسئله ۷-۱-۱)

$$a_{-1} = (z - z_0) f(z) \Big|_{z=z_0} \quad (25-7)$$

با استفاده از معادله ۷-۲۵، پی می‌بریم که مانده در $z = i$ برابر $1/2i$ است، در حالی که مانده در $z = -i$ برابر $-1/2i$ خواهد بود.
در این صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi \quad (26-7)$$

در اینجا از $a_{-1} = 1/2i$ مربوط به مانده تنها قطب محاط شده در $z = i$ ، استفاده کرده‌ایم. اثبات این نکته را به خواننده وامی‌گذاریم که می‌شود از نیم‌دایره پایینی نیز بهره برد و این گزینه نیز به همان جواب $I = \pi$ خواهد انجامید. مسئله ظریفتری در مثال بعد مطرح می‌شود.

محاسبه انتگرالهای معین از نوع $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$
انتگرال معین زیر را در نظر بگیرید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx \quad (27-7)$$

که a عددی حقیقی و مثبت است. این عبارت یک تبدیل فوریه است (فصل ۱۵). فرض می‌کنیم دو شرط زیر برقرار باشد:

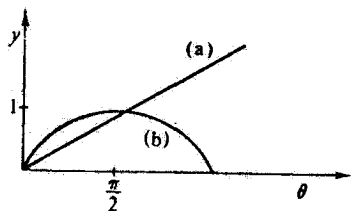
(الف) $f(z)$ در نیم‌صفحه بالایی تحلیلی باشد مگر در تعدادی متناهی از قطبها.
(ب)

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad 0 \leq \arg z \leq \pi \quad (28-7)$$

توجه کنید که این شرط از شرط دومی که قبلاً روی $f(z)$ در انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ گذاشتیم، کمتر محدودکننده است.

بربندی را که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است به‌کار می‌بریم. نحوه کاربرد حساب مانده‌ها، مانند همان حالتی است که هم اینک بررسی کردیم، ولی در اینجا اثبات صفر بودن انتگرال روی نیم‌دایره (نامتناهی) اندکی پیچیده‌تر است. این انتگرال عبارت است از

$$I_R = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{iaR \cos \theta - aR \sin \theta} iRe^{i\theta} d\theta \quad (29-7)$$



شکل ۷-۲ الف) $y = (\pi/2)\theta$ (ب) $y = \sin \theta$.

R را چندان بزرگ می‌گیریم که $\epsilon > |f(z)| = |f(Re^{i\theta})|$ در این صورت:

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq \epsilon R \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta \\ &= 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta \end{aligned} \quad (30-7)$$

در گستره $[0, \pi/2]$ ، داریم

$$\frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta$$

بنابراین (با توجه به شکل ۷-۲)

$$|I_R| \leq 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\theta/\pi} d\theta \quad (31-7)$$

اینک، با انتگرال‌گیری از طریق حدس و جستجو، می‌رسیم به

$$|I_R| \leq 2\epsilon R \frac{1 - e^{-aR}}{aR\pi}$$

سرانجام

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| \leq \frac{\pi}{a} \epsilon \quad (32-7)$$

با استفاده از معادله ۲۸-۷ نتیجه می‌گیریم که با $R \rightarrow \infty$ داریم $\epsilon \rightarrow 0$ ، و

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| = 0 \quad (33-7)$$

این نتیجه‌گیری سودمند را گاهی لم جوردن می‌خوانند. اینک مهبای محاسبهٔ انتگرالهای فوریه، به‌نحوی که در معادلهٔ ۲۷-۷ آمد، هستیم با بهره‌گیری از پریند شکل ۶-۷، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 2\pi i \sum \text{مانده‌های درون نیم‌صفحهٔ بالایی}$$

I_R ، انتگرال روی نیم‌دایرهٔ بالایی، با $R \rightarrow \infty$ صفر می‌شود (لم جوردن)، از این رو داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum \text{مانده‌های درون نیم‌صفحهٔ بالایی} \quad (a > 0) \quad (34-7)$$

مثال ۳-۲-۷: مسئله عبارت است از محاسبهٔ انتگرال زیر

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (35-7)$$

می‌توانیم این انتگرال را جزء موهومی^۱ انتگرال زیر تلقی کنیم

$$I_z = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (36-7)$$

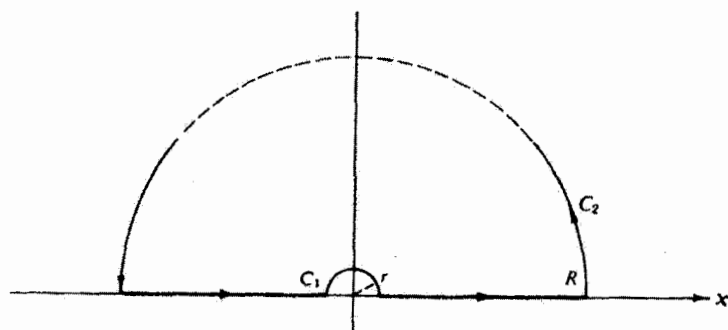
اکنون تنها یک قطب ساده در $z = 0$ داریم و مانده با استفاده از معادلهٔ ۲۵-۷ عبارت است از $a_{-1} = 1$. پریند شکل ۸-۷ را برمی‌گزینیم تا (۱) از قطب دوری کنیم، (۲) محور حقیقی نیز جزئی از پریند باشد، و (۳) انتگرالده به‌ازای $z = iy$ با $y \rightarrow \infty$ بسیار کوچک شود. توجه کنید که در این حالت نیم‌دایرهٔ بزرگ (نامتناهی) در نیم‌صفحهٔ پایینی ناموفق خواهد بود. داریم

$$\oint \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} e^{iz} \frac{dx}{x} + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{x} dx + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (37-7)$$

صفر در طرف دوم ناشی از قضیهٔ مانده‌ها (معادلهٔ ۱۰-۷) است. با استفاده از لم جوردن

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (38-7)$$

۱. می‌توانیم به‌جای این کار انتگرال $\int [(e^{iz} - e^{-iz})/2iz] dz$ را محاسبه کنیم، ولی در این صورت برای هر نمایی پربندی جداگانه لازم می‌بود (با مثال ۴-۲-۷ مقایسه کنید).



شکل ۸-۷

$$\oint \frac{e^{iz} dz}{z} = \int_{C_1} \frac{e^{iz} dz}{z} + P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x} = 0 \quad (39-7)$$

انتگرال روی نیم‌دایره کوچک کمیت $\pi i (-)$ ضربدر مانده، یعنی ۱، را می‌دهد؛ علامت منفی به علت انتگرال‌گیری ساعتگرد ظاهر می‌شود. با در نظر گرفتن جزء موهومی^۱، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (40-7)$$

یا

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (41-7)$$

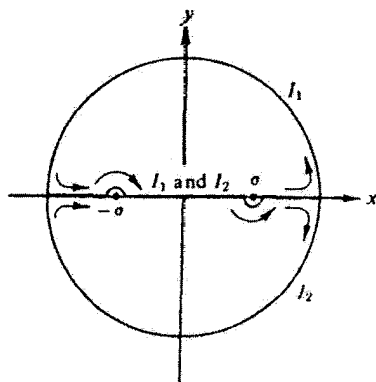
با آنکه پریند شکل ۸-۷ یک پریند مناسب است، به هیچ روی یگانه نیست. گزینه دیگری برای پریند مربوط به محاسبه معادله ۳۵-۷ در مسئله ۱۵-۲-۷ نمایش داده شده است.

مثال ۴-۲-۷ پراکنندگی در مکانیک کوانتومی: تحلیل پراکنندگی در مکانیک کوانتومی به تابع زیر منجر می‌شود

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - \sigma^2} \quad (42-7)$$

۱. یا می‌شود انتگرالهای معادله ۳۷-۷ را به صورت زیر با هم ترکیب کنیم

$$\int_{-R}^{-r} e^{ix} \frac{dx}{x} + \int_r^R e^{ix} \frac{dx}{x} = \int_r^R (e^{ix} - e^{-ix}) \frac{dx}{x} = i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$$



شکل ۹-۷

که σ حقیقی و مثبت است. شرط دیگری نیز با توجه به شرایط فیزیکی مسئله برقرار است به این عبارت که $I(\sigma)$ باید به صورت $e^{i\sigma}$ باشد، تا بتواند نمایشگر موج پراکنده خروجی باشد. با استفاده از تساوی:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{i} \sinh iz \\ &= \frac{1}{2i} e^{iz} - \frac{1}{2i} e^{-iz} \end{aligned} \quad (۴۳-۷)$$

معادله ۴۲-۷ را در صفحه مختلط به صورت زیر می‌نویسیم

$$I(\sigma) = I_1 + I_2 \quad (۴۴-۷)$$

که

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2 - \sigma^2} dz \\ I_2 &= -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{-iz}}{z^2 - \sigma^2} dz \end{aligned} \quad (۴۵-۷)$$

انتگرال I_1 با مثال ۳-۲-۷ مشابه است و مشابه آن می‌توانیم پربند را با نیم‌دایره نامتناهی در نیم صفحه بالایی کامل کنیم. در I_2 نما منفی است و پربند را با نیم‌دایره نامتناهی در نیم صفحه پایینی مطابق شکل ۹-۷، کامل می‌کنیم. در اینجا نیز مانند مثال ۳-۲-۷، هیچیک از نیم‌دایره‌ها سهمی در انتگرال ندارند (لم جوردن).

هنوز مسئله تعیین مکان قطبها و محاسبه مانده‌ها به قوت باقی است. می‌بینیم که قطبهایی در $z = +\sigma$ و $z = -\sigma$ روی پربند انتگرال‌گیری وجود دارد. مانده‌ها عبارت‌اند از (مسئله‌های ۱-۷-۱ و ۱-۷-۲)

$$I_1 = \frac{z = \sigma}{\frac{e^{i\sigma}}{2}} \quad \frac{z = -\sigma}{\frac{e^{-i\sigma}}{2}}$$

$$I_2 = \frac{e^{-i\sigma}}{2} \quad \frac{e^{i\sigma}}{2}$$

با پیمودن مسیرهای انحرافی حول قطبها، مطابق شکل ۹-۷، (اهمیتی ندارد که از بالای قطب عبور کنیم یا پایین آن) بنابر قضیه مانده‌ها پی می‌بریم که

$$I_1 - \pi i \left(\frac{1}{2i} \right) \frac{e^{-i\sigma}}{2} + \pi i \left(\frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2} = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2} \quad (46-7)$$

زیرا تکینگی در $z = \sigma$ را محاط کرده‌ایم ولی تکینگی در $z = -\sigma$ را طرد کرده‌ایم. به همین ترتیب و با توجه به ساعتگرد بودن پربند مربوط به I_2 داریم

$$I_2 - \pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2} + \pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{-i\sigma}}{2} = -2\pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2} \quad (47-7)$$

با جمع کردن معادله‌های ۴۶-۷ و ۴۷-۷، می‌رسیم به:

$$I(\sigma) = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} (e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}) = \pi \cosh i\sigma \quad (48-7)$$

$$= \pi \cos \sigma$$

این محاسبات، راه بسیار خوبی برای یافتن جواب معادله ۴۲-۷ است، ولی متأسفانه وابستگی کسینوسی برای یک موج ایستاده مناسب است و نه مطابق آنچه که در آغاز تصریح شد، برای یک موج پراکنده شده خروجی.

برای دستیابی به صورت دلخواه، روش دیگری را به‌کار می‌بریم. به‌جای آنکه مسیر را از نقاط تکین منحرف کنیم، نقاط تکین را از روی محور حقیقی دور می‌کنیم. مشخصاً قرار می‌دهیم: $\sigma \rightarrow \sigma + i\gamma$ و $-\sigma \rightarrow -\sigma - i\gamma$ ؛ که γ مثبت ولی کوچک است و نهایتاً به‌صفر نزدیک می‌شود، یعنی

$$I(\sigma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\sigma + i\gamma) \quad (49-7)$$

با این جایگذاری ساده، انتگرال اول، I_1 ، مستقیماً با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها عبارت خواهد شد از

$$I_1(\sigma + i\gamma) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i(\sigma+i\gamma)}}{2} \quad (50-7)$$

و نیز

$$I_2(\sigma + i\gamma) = -2\pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i(\sigma+i\gamma)}}{2} \quad (51-7)$$

معادله‌های ۵۰-۷ و ۵۱-۷ را با هم جمع می‌کنیم و سپس قرار می‌دهیم: $\gamma \rightarrow 0$ ؛ می‌رسیم به

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} [I_1(\sigma + i\gamma) + I_2(\sigma + i\gamma)] \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \pi e^{i(\sigma+i\gamma)} = \pi e^{i\sigma} \end{aligned} \quad (52-7)$$

این نتیجه با شرایط مرزی مسئلهٔ پراکندگی مورد نظر ما سازگار است. نکتهٔ جالب این است که نشانیدن $\sigma - i\gamma$ به جای σ به جواب زیر می‌انجامد:

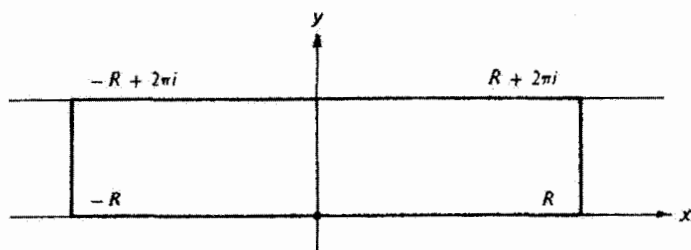
$$I(\sigma) = \pi e^{-i\sigma} \quad (53-7)$$

که نمایانگر یک موج ورودی است. پی می‌بریم که نتیجهٔ اول (معادلهٔ ۴۸-۷) میانگین حسابی دو معادلهٔ ۵۲-۷ و ۵۳-۷ است. این میانگین همان مقدار اصلی کوشی انتگرال است. توجه کنید که این جوابهای متفاوت (معادله‌های ۴۸-۷ و ۵۲-۷ و ۵۳-۷) به این جهت به دست می‌آیند که انتگرال مورد نظر ما انتگرالی نامعین است. مقدار این انتگرال تا وقتی که فرایند حدی (یا میانگین) به خصوصاً که باید به کار رود مشخص نشده باشد، به طور یکتا تعریف نمی‌شود.

محاسبهٔ انتگرالهای معین؛ صورتهای نمایی

وقتی انتگرالده حاوی توابع نمایی یا هذلولوی باشد، مسائل پیچیده‌تر می‌شوند. در این صورت، برای هر انتگرال به خصوص باید پریند مناسب با آن انتگرال را برگزید و نمی‌توان یک دستورالعمل کلی داد. این حالتها فرصتهایی را پیش می‌آورند که توانایی و تنوع کاربرد انتگرال‌گیری پریندی را مشاهده کنیم.

مثلاً انتگرالی را در نظر می‌گیریم که برای برقراری رابطه‌ای بین $z!$ و $(-z)$ بسیار مفید است. توجه کنید که چگونه از دوره‌ای بودن در امتداد محور موهومی بهره‌برداری می‌شود.



شکل ۷-۱۰

مثال ۷-۲-۵ تابع فاکتوریل: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad 0 < a < 1 \quad (54-7)$$

حدهای روی a برای جلوگیری از واگرایی انتگرال در $x \rightarrow \pm\infty$ لازم (و کافی) اند. این انتگرال (معادله ۷-۲-۵) را می‌توان از طریق نشان دادن متغیر مختلط z به جای متغیر حقیقی x و انتگرال‌گیری روی پربند، مطابق شکل ۷-۱۰، محاسبه کرد. در حد $R \rightarrow \infty$ ، محور حقیقی به انتگرال مورد نظر ما می‌انجامد. مسیر برگشت در امتداد $y = 2\pi$ چنان اختیار شده است که مخرج انتگرالده را ناوردا نگه می‌دارد و یک فاکتور ثابت $e^{i2\pi a}$ در صورت وارد می‌کند. در صفحه مختلط داریم

$$\begin{aligned} \oint \frac{e^{az}}{1+e^z} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{i2\pi a} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right) \\ &= (1 - e^{i2\pi a}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \end{aligned} \quad (55-7)$$

به‌علاوه، دو بخش عمودی ($0 \leq y \leq 2\pi$) نیز وجود دارد که با $R \rightarrow \infty$ (به‌صورت نمایی) صفر می‌شوند.

اینک قطبها کجا هستند و مانده‌ها چقدرند؟ هرگاه

$$e^z = e^x e^{iy} = -1 \quad (56-7)$$

یک قطب داریم، $z = 0 + i\pi$ در معادله ۵۶-۷ صدق می‌کند. به کمک بسط لوران تابع به صورت توانهای $(z - i\pi)$ ، پی می‌بریم که این قطب یک قطب ساده است با مانده‌ای به صورت $e^{i\pi a}$. در این صورت، بار دیگر با بهره‌گیری از قضیه مانده‌ها خواهیم داشت

$$(1 - e^{i2\pi a}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = 2\pi i (-e^{i\pi a}) \quad (57-7)$$

که بلافاصله تبدیل می‌شود به:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad 0 < a < 1 \quad (58-7)$$

با استفاده از تابع بتا (بخش ۱۰-۴) می‌توان مشاهده کرد که این انتگرال برابر است با حاصلضرب $(-a)!(1-a)!$. این نتیجه، به رابطه مفید و جالب تابع فاکتوریل می‌انجامد

$$a!(-a)! = \frac{\pi a}{\sin \pi a} \quad (59-7)$$

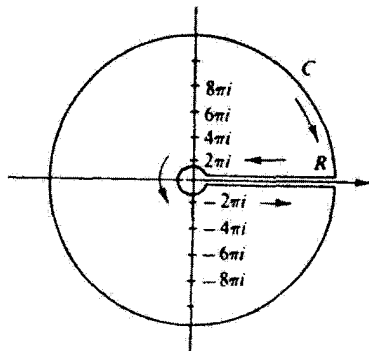
هر چند معادله ۵۸-۷ به‌ازای مقدار حقیقی a ، $0 < a < 1$ ، برقرار است، ولی معادله ۵۹-۷ را می‌توان از طریق ادامه تحلیلی به تمام مقادیر حقیقی و مختلط a به‌استثنای مقادیر حقیقی و صحیح تعمیم داد.

به‌عنوان مثال آخر برای انتگرالهای پربندی تابعهای نمایی، بار دیگر عددهای برنولی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۶-۲-۷ عددهای برنولی: اعداد برنولی را در بخش ۹-۵ به‌کمک بسط زیر تعریف کردیم

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (60-7)$$

$$\begin{aligned} 1 + e^z &= 1 + e^{z-i\pi} e^{i\pi} \\ &= 1 - e^{z-i\pi} \\ &= -(z - i\pi) \left(1 + \frac{z - i\pi}{2!} + \frac{(z - i\pi)^2}{3!} + \dots \right) \end{aligned}$$



شکل ۷-۱۱ پربند انتگرال‌گیری مربوط به اعداد برنولی.

به جای x کمیت z را می‌نشانیم (ادامهٔ تحلیلی) و به سری تیلوری می‌رسیم (با معادلهٔ ۶-۶۰ مقایسه کنید) که در آن

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}} \quad (۶۱-۷)$$

C_0 ، پربندی است پادساعتگرد حول مبدأ با $|z| < 2\pi$ تا از قطبهای پدید آمده در $\pm 2\pi i$ اجتناب شود.

به‌ازای $n = 0$ ، یک قطب ساده در $z = 0$ داریم با مانده‌ای برابر $+1$ ، از این رو به کمک معادلهٔ ۷-۱۰ می‌رسیم به

$$B_0 = \frac{0!}{2\pi i} \cdot 2\pi i(1) = 1 \quad (۶۲-۷)$$

به‌ازای $n = 1$ ، قطب در $z = 0$ به یک قطب مرتبهٔ دوم تبدیل می‌شود. می‌توان از طریق بسط سری تابع نمایی و پس از آن به کمک بسط دوجمله‌ای، نشان داد که مانده عبارت است از $-1/2$ ، در نتیجه

$$B_1 = \frac{1!}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad (۶۳-۷)$$

این دستورالعمل به‌ازای $n \geq 2$ تا حدودی دست‌وپاگیر است و روش دیگری برای محاسبهٔ معادلهٔ ۶۱-۷ در پیش می‌گیریم. منحنی پربند را مطابق شکل ۷-۱۱ تغییر می‌دهیم. پربند جدید C باز هم، بنابر ضرورت، مبدأ را دور می‌زند، ولی در اینجا (در یک جهت منفی) سری نامتناهی‌ای از نقاط تکین در امتداد محور موهومی در $z = \pm p2\pi i$ ، $p = 1, 2, 3, \dots$

را نیز دور می‌زند. انتگرال‌گیری در امتداد محور x به سوی چپ و به سوی راست یکدیگر را حذف می‌کنند، و به‌ازای $R \rightarrow \infty$ نیز انتگرال روی دایره نامتناهی صفر می‌شود. توجه کنید که $n \geq 2$. بنابراین

$$\oint_{C_0} \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}} = -2\pi i \sum_{p=1}^{\infty} \text{مانده‌ها} \quad (z = \pm p2\pi i) \quad (۶۴-۷)$$

در نقطه $z = p2\pi i$ یک قطب ساده داریم با مانده $(p2\pi i)^{-n}$. اگر n فرد باشد، مانده مربوط به $z = p2\pi i$ دقیقاً مانده مربوط $z = -p2\pi i$ را حذف می‌کند و به‌ازای $n = 3, 5, 7, \dots$ داریم: $B_n = 0$. به‌ازای مقادیر زوج n ، مانده‌ها با هم جمع می‌شوند و داریم

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{n!}{2\pi i} (-2\pi i)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n (2\pi i)^n} \\ &= -\frac{(-1)^{n/2} 2n!}{(2\pi)^n} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-n} \\ &= -\frac{(-1)^{n/2} 2n!}{(2\pi)^n} \zeta(n) \quad (\text{زوج}) \end{aligned} \quad (۶۵-۷)$$

که در آن تابع $\zeta(n)$ تابع زتای ریمان است که در بخش ۵-۹ با آن آشنا شدیم. معادله ۶۵-۷، نظیر معادله ۵-۱۵ در آن بخش است.

نقطه‌های شاخه-خطهای برش

گاهی انتگرالده حاوی z با توان کسری است. در این حالت، انتگرالده چند مقداری است. یک نقطه شاخه وجود دارد و به یک خط برش نیاز هست. در مسئله‌های ۷-۱۸ و ۷-۱۹ و ۷-۲۳ به نمونه‌هایی از این وضعیت برمی‌خوریم. نکته اصلی شایان توجه عبارت از آن است که می‌شود انتظار داشت تابع در این خط برش اجتناب‌ناپذیر ناپیوسته باشد. انتگرال در امتداد یک طرف خط برش احتمالاً با انتگرال در امتداد طرف دیگر مساوی نیست.

مسائل

۷-۱-۲ ماهیت تکینگی هر یک از تابعهای زیر را تعیین و مانده‌ها را حساب کنید ($a > 0$)

$\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}$	(ب)	$\frac{1}{z^2 + a^2}$	(الف)
$\frac{\sin 1/z}{z^2 + a^2}$	(د)	$\frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$	(ج)
$\frac{ze^{+iz}}{z^2 - a^2}$	(و)	$\frac{ze^{+iz}}{z^2 + a^2}$	(ه)
$\frac{z^{-k}}{z + 1}$	(ح)	$\frac{e^{+iz}}{z^2 - a^2}$	(ز)

$0 < k < 1$

۲-۲-۷ محل تکینگیهای هریک از تابعهای زیر را مشخص و مانده‌ها را حساب کنید.

(الف) $z^{-n}(e^z - 1)^{-1}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ (ب) $\frac{z^2 e^z}{1 + e^{2z}}$

۳-۲-۷ این گزاره که انتگرال روی نیمی از پرند حول یک نقطه تکین برابر است با نصف انتگرال روی همهٔ پرند، به قطبهای ساده اختصاص دارد. با ذکر یک مثال خاص نشان دهید که اگر پرند انتگرال‌گیری یک قطب از مرتبه بالاتر را دور بزند، رابطه

$$\int_{\text{نیم‌دایره}} f(z) dz = \frac{1}{2} \oint_{\text{دایره}} f(z) dz$$

لزوماً برقرار نیست.

[راهنمایی: تابع $f(z) = z^{-2}$ را در نظر بگیرید.]

۴-۲-۷ تابع $f(z)$ روی محور حقیقی تحلیلی است؛ مگر در نقطه $z = x_0$ که در آن یک قطب مرتبه سه دارد. بسط لوران $f(z)$ حول نقطه $z = x_0$ به صورت زیر است

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z - x_0)^3} + \frac{a_{-1}}{(z - x_0)} + g(z)$$

که در آن $g(z)$ در $z = x_0$ تحلیلی است. نشان دهید که می‌توان از شیوهٔ مقدار اصلی کوشی بهره برد، یعنی، (الف) عبارت زیر خوشرفتار است

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^{\infty} f(x) dx \right.$$

$$\left. \int_{C_x} f(z) dz = \pm i\pi a_{-1} \right. \quad (\text{ب})$$

که در آن C_x نیم‌دایرهٔ کوچکی حول $z = x_0$ است.

۵-۲-۷ تابع پله‌ای واحد، بنابر تعریف، عبارت است از (با مسئله ۸-۷-۱۳ مقایسه کنید)

$$u(s-a) = \begin{cases} 0 & s < a \\ 1 & s > a \end{cases}$$

نشان دهید که نمایشهای انتگرالی $u(s)$ به این قرارند:

$$u(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixs}}{x - i\varepsilon} dx \quad (\text{الف})$$

$$u(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixs}}{x} dx \quad (\text{ب})$$

یادآوری: پارامتر s حقیقی است.

۶-۲-۷ قسمت اعظم توابع خاص در ریاضی فیزیک را می‌توان به کمک تابع مولدی به صورت زیر تولید (یا تعریف) کرد

$$g(t, x) = \sum_n f_n(x) t^n$$

با استفاده از نمایشهای انتگرالی زیر، تابع مولد متناظر را استخراج کنید: (الف) تابع بسل

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-n-1} dt$$

(ب) تابع تعدیل‌یافته لژاندر

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{(x/2)(t+1/t)} t^{-n-1} dt$$

(ج) تابع لژاندر

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} t^{-n-1} dt$$

(د) تابع هرمیت

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint e^{-t^2 + 2tx} t^{-n-1} dt$$

(ه) تابع لاگر

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)t^{n+1}} dt$$

(و) تابع چیشف

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1-t^2)t^{-n-1}}{(1-2tx+t^2)} dt$$

همه این پربندها مبدأ را دور می‌زنند و هیچ نقطهٔ تکین دیگری را محاط نمی‌کنند.
۷-۲-۷ برای تعمیم مثال ۱-۲-۷ نشان دهید

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \sin \theta} = \frac{2\pi}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \quad a > |b|$$

به‌ازای $a > |b|$

در حالت $|b| > |a|$ چه پیش می‌آید؟
۸-۲-۷ نشان دهید

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}} \quad a > 1$$

۹-۲-۷ نشان دهید

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} = \frac{2\pi}{1-t^2} \quad |t| < 1$$

به‌ازای $|t| < 1$

اگر $|t| > 1$ ، چه پیش می‌آید؟ به‌ازای $|t| = 1$ ، چه خواهد شد؟
۱۰-۲-۷ به‌کمک حساب مانده‌ها نشان دهید:

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \theta d\theta = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n = 0, 1, 2$$

(تعریف نماد فاکتوریل دوگانه در بخش ۱-۱۰ آمده است.)

$$[\cos \theta = 1/2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 1/2(z + z^{-1}) \quad |z| = 1]$$

راهنمایی: $|z| = 1$

۱۱-۲-۷ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2} dx \quad a > b > 0$$

جواب : $\pi(a - b)$
 ۱۲-۲-۷ ثابت کنید

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

[راهنمایی: $\sin^2 x = 1/2(1 - \cos 2x)$]

۱۳-۲-۷ در محاسبه احتمال گذار در مکانیک کوانتومی به تابع $f(t, \omega) = 2(1 - \cos \omega t)/\omega^2$ برمی خوریم. نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \omega) d\omega = 2\pi t$$

۱۴-۲-۷ نشان دهید ($a > 0$)

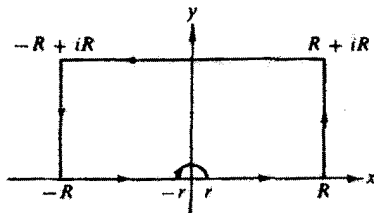
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a} \quad (\text{الف})$$

اگر به جای $\cos x$ کمیت $\cos kx$ قرار داده شود، در جواب چه تغییری پیش خواهد آمد؟

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a} \quad (\text{ب})$$

اگر به جای $\sin x$ کمیت $\sin kx$ نشانده شود، جواب چه تغییری خواهد کرد؟ این انتگرالها را می توان به صورت تبدیلهای کسینوس و سینوس فوریه نیز تعبیر کرد (فصل ۱۵).
 ۱۵-۲-۷ با استفاده از پرند نموده شده (شکل ۱۲-۷) ثابت کنید با $R \rightarrow \infty$ داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$



شکل ۱۲-۷

۱۶-۲-۷ در نظریه کوانتومی برخورد های اتمی، به انتگرال زیر برمی خوریم

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{ipt} dt$$

که در آن p حقیقی است. نشان دهید

$$I = 0 \quad |p| > 1$$

$$I = \pi \quad |p| < 1$$

اگر $p \pm 1$ چه پیش می آید؟

۱۷-۲-۷ (الف) با بسط مناسب انتگرالده، نشان دهید

$$\int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-2}$$

(ب) انتگرال بند (الف) را با روش انتگرال پربندی محاسبه کنید و نشان دهید مقدارش عبارت است از $\pi^2/8$.

[راهنمایی: قرار دهید $z = e^t$ پربندی را اختیار کنید که در شکل ۱۳-۷ نشان داده شده است، و قرار دهید $R \rightarrow \infty$].



شکل ۱۳-۷

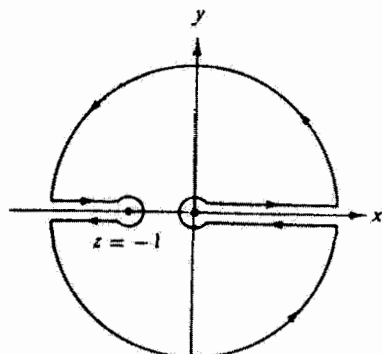
۱۸-۲-۷ نشان دهید

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+1)^r} dx = \frac{\pi a}{\sin \pi a}$$

که $-1 < a < 1$. این راه دیگری برای استخراج معادله ۵۹-۷ است.

[راهنمایی: از پربندی که در شکل ۱۴-۷ نشان داده شده است، بهره گیرید. توجه کنید که نقطه $z = 0$ یک نقطه شاخه و محور حقیقی مثبت یک خط

برش است. همچنین به نکاتی توجه کنید که در مثال ۷-۱-۱ درباره فاز آورده شد.



شکل ۷-۱۴

۷-۱۹ نشان دهید

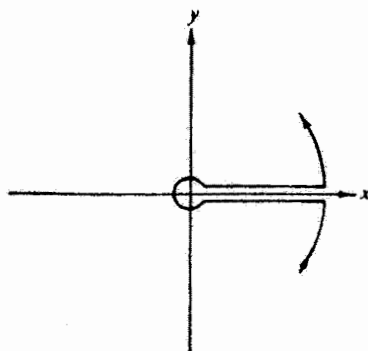
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

که در آن $0 < a < 1$ این مسئله راه دیگری برای استخراج رابطه تابع فاکتوریل در معادله ۷-۵۹ ارائه می‌کند.

[راهنمایی: یک نقطه شاخه دارید و باید یک خط برش داشته باشید. به یاد بیاورید که صورت قطبی $z^{-a} = w$ عبارت است از

$$[re^{i(\theta+2\pi n)}]^{-a} = \rho e^{i\varphi}$$

که به رابطه $\varphi = -a\theta - 2an\pi$ می‌انجامد. باید n را به صفر (یا یک عدد صحیح دیگر) محدود کنید تا φ به طور یکتا مشخص شود. از پربندی بهره‌گیرید که در شکل ۷-۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۷-۱۵

۲۰-۲-۷ نشان دهید

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^2} \quad a > 0$$

۲۱-۲-۷ انتگرال زیر را محاسبه کنید

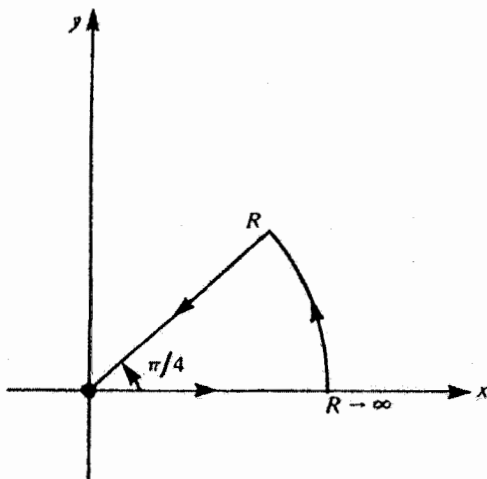
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

جواب: $\pi/\sqrt{2}$

۲۲-۲-۷ نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

[راهنمایی: از پربندی بهره گیرید که در شکل ۱۶-۷ نشان داده شده است.]



شکل ۱۶-۷

یادآوری: این انتگرالها، صورتهای خاصی از انتگرالهای فرنلاند که در آنها حد بالایی بینهایت است. در حالت کلی با حد بالایی متغیر، بسط مجانبی این انتگرالها موضوع مسئله ۵-۱۱-۲ به شمار می آید. بسط برحسب توابع کروی بسط موضوع مسئله ۱۱-۷-۱۳ است.

۲۳-۲-۷ چند مورد از انتگرال برامویچ، در بخش ۱۵-۱۲، حاوی اجزایی اند که به تقریب عبارت اند از

$$I(y) = \int_0^{a+iy} \frac{e^{zt}}{z^{1/2}} dz$$

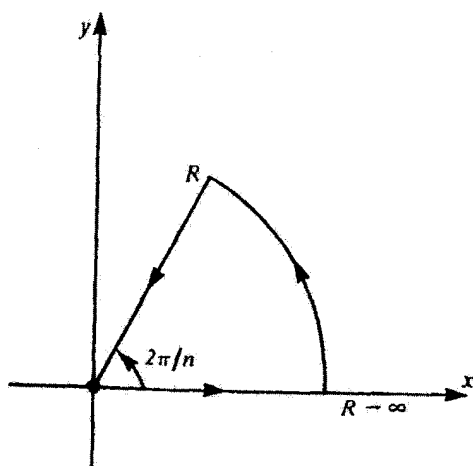
a و t در اینجا مثبت و متناهی اند. نشان دهید

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I(y) = 0$$

۲۴-۲-۷ نشان دهید

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

[راهنمایی: از پربندی بهره گیرید که در شکل ۱۷-۷ نشان داده شده است.]



شکل ۱۷-۷

۲۵-۲-۷ (الف) نشان دهید عبارت:

$$f(z) = z^2 - 2 \cos 2\theta z + 1$$

در $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, $-e^{i\theta}$ و $-e^{-i\theta}$ صفرهایی دارد.

(ب) نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2 \cos 2\theta x^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \sin \theta}$$

$$= \frac{\pi}{2^{1/2}(1 - \cos 2\theta)^{1/2}}$$

مسئله ۲۴-۲-۷ (بازای $n = 2$) حالت خاصی از این نتیجه است.
۲۶-۲-۷ نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^2 - 2 \cos 2\theta x^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \sin \theta}$$

$$= \frac{\pi}{2^{1/2}(1 - \cos 2\theta)^{1/2}}$$

مسئله ۲۱-۲-۷ حالت خاصی از این نتیجه است.
۲۷-۲-۷ از شیوه‌های مطرح شده در مثال ۴-۲-۷ بهره‌گیرید و انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \sigma^2}$$

(الف) قرار دهید $\sigma \rightarrow \sigma + i\gamma$; (ب) قرار دهید $\sigma \rightarrow \sigma - i\gamma$; (ج) مقدار اصلی کوشی را محاسبه کنید.

۲۸-۲-۷ انتگرال مسئله ۱۷-۲-۷ را می‌توان به انتگرال زیر تبدیل کرد

$$\int_0^{\infty} e^{-y} \frac{y^2}{1 + e^{-2y}} dy = \frac{\pi^2}{16}$$

این انتگرال را به کمک کوادراتور گاوس-لاگر (پیوست الف-۲) محاسبه کنید و نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید، با $\pi^2/16$ مقایسه کنید.

جواب: (ده نقطه) $1.93775 =$ انتگرال.

۳-۷ روابط پاشندگی

مفهوم روابط پاشندگی را کرونیک و کرامرز در تحقیقات خود در زمینه اپتیک، به فیزیک وارد کردند. اصطلاح پاشندگی در پاشندگی اپتیکی ریشه دارد که این هم حاصل وابستگی ضریب شکست به طول موج یا بسامد زاویه‌ای است. ضریب شکست، n ، می‌تواند یک جزء حقیقی و یک بخش

موهومی (منفی) داشته باشد، که اولی توسط سرعت فاز، و دومی توسط جذب مشخص می‌شود (معادله ۷-۷۹). کرونیک و کرامرز نشان دادند که جزء حقیقی $(n^2 - 1)$ را می‌توان توسط انتگرالی از جزء موهومی بیان کرد. بر اثر تعمیم این مفهوم، هر زوج معادله‌ای را که جزء حقیقی یک تابع را به صورت انتگرالی از جزء موهومی و جزء موهومی را به صورت انتگرالی از جزء حقیقی آن بدهد، با برچسب رابطه‌های پاشندگی مشخص می‌کنیم (مطابق معادله‌های ۷-۷۱ الف و ۷-۷۱ ب).^۱ وجود چنین رابطه‌های انتگرالی را می‌توان به صوت مشابه انتگرالی روابط دیفرانسیلی کوشی-ریمان در بخش ۶-۲، پیش‌بینی کرد.

قلمرو کاربرد این روابط در فیزیک جدید بسیار فراخ است. مثلاً، جزء حقیقی تابع ممکن است پراکندگی پیشروی پرتو گاما در یک میدان کولنی هسته‌ای را توصیف کند (فرایند پاشنده). در این صورت جزء موهومی، تولید زوج الکترون-پوزیترون را در همان میدان کولنی توصیف می‌کند (فرایند جذبی). بعداً خواهیم دید، که روابط پاشندگی را می‌شود به صورت پیامدی از علیت دانست، و به همین علت هم این روابط از جزئیات برهم‌کنش خاصی که مورد نظر است، مستقل‌اند.

تابع مختلط $f(z)$ را در نظر می‌گیریم که در نیم‌صفحه بالایی و روی محور حقیقی تحلیلی است. همچنین برای آنکه انتگرال این تابع روی نیم‌دایره نامتناهی صفر شود، این شرط را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0 \quad 0 \leq \arg z \leq \pi \quad (7-66)$$

همه این شرایط به این منظور است که بتوانیم $f(z)$ را به کمک فرمول انتگرال کوشی، معادله ۶-۴۳، بیان کنیم

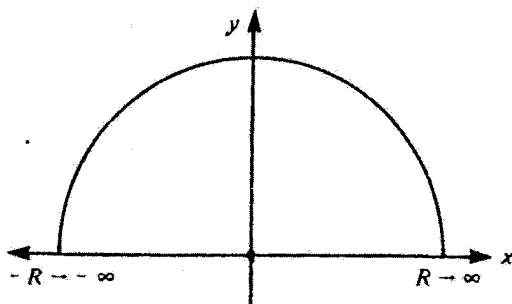
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (7-67)$$

انتگرال روی نیم‌دایره بالایی^۲ صفر است و

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0} dx \quad (7-68)$$

انتگرال روی پربندی که در شکل ۷-۱۸ نموده شده است، به انتگرال در امتداد محور x تبدیل می‌شود.

۱. برابر نهاده‌ی واژه dispersion (پاشندگی) در متون ریاضی پراکندگی است. در کتابهای فیزیک پراکندگی معادل واژه scattering است. م.
۲. این نیم‌دایره برای بستن مسیر انتگرال‌گیری مناسب است، ولی الزامی نیست. از مسیرهای دیگر نیز می‌توان استفاده کرد.



شکل ۷-۱۸

در معادله ۶۸-۷ فرض شده است z_0 در نیم صفحه بالایی، در داخل پرند بسته است. اگر z_0 در نیم صفحه پایینی واقع بود، مطابق قضیه انتگرال کوشی، بخش ۶-۳، حاصل انتگرال صفر می شد. اکنون چه z_0 را از بالا به محور حقیقی نزدیک کنیم ($z_0 \rightarrow x_0$)، یا آن را روی محور حقیقی در نظر بگیریم و میانگین معادله ۶۸-۷ و صفر را حساب کنیم، پی می بریم که معادله ۶۸-۷ به صورت زیر درمی آید

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \quad (۶۹-۷)$$

که P مقدار اصلی کوشی را نشان می دهد. با تجزیه معادله ۶۹-۷ به اجزای حقیقی و موهومی^۱ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= u(x_0) + iv(x_0) \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx - \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx \end{aligned} \quad (۷۰-۷)$$

سرانجام، اجزای حقیقی را با هم و اجزای موهومی را با هم برابر می نهم و می رسمیم به

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx \quad (۷۱-الف)$$

$$v(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx \quad (۷۱-ب)$$

این عبارتها، روابط پاشندگی اند. جزء حقیقی تابع مختلط ما به صورت انتگرال جزء موهومی و جزء موهومی به صورت انتگرال جزء حقیقی، بیان شده است. اجزای حقیقی و موهومی تبدیلهای

۱. شناسه دوم $y = 0$ را نوشته ایم، $u(x_0, 0) \rightarrow u(x_0)$

هیلبرت یکدیگرند. توجه داشته باشید که این رابطه‌ها فقط وقتی معنی دارند که $f(x)$ تابع مختلطی از متغیر حقیقی x باشد. با مسئله ۷-۳-۱ مقایسه کنید.

از زاویه دید فیزیکی، $u(x)$ یا $v(x)$ یک اندازه‌گیری فیزیکی را نشان می‌دهد. در این صورت $f(z) = u(z) + iv(z)$ یک ادامه تحلیلی در نیم‌صفحه بالایی است، که در آن مقدار روی محور حقیقی به صورت یک شرط مرزی عمل می‌کند.

روابط تقارنی

گاهی $f(x)$ در یک رابطه تقارنی صدق می‌کند و انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ را می‌توان با یک انتگرال روی مقادیر مثبت تعویض کرد. این کار از نظر فیزیکی اهمیت زیادی دارد، زیرا متغیر x ممکن است نمایشگر بسامد باشد که در اندازه‌گیرهای فیزیکی فقط می‌تواند مقادیر صفر و مثبت داشته باشد. فرض کنید^۱

$$f(-x) = f^*(x) \quad (72-7)$$

در این صورت

$$u(-x) + iv(-x) = u(x) - iv(x) \quad (73-7)$$

جزء حقیقی $f(x)$ زوج و جزء موهومی آن فرد است.^۲ در مسائل پراکنندگی درحوزه مکانیک کوانتومی، این رابطه‌ها (معادله ۷۳-۷) را شرایط ضربه‌ری می‌نامند. برای بهره‌برداری از این شرایط ضربه‌ری، معادله ۷۱-۷ الف را به صورت زیر می‌نویسیم

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{v(x)}{x - x_0} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx \quad (74-7)$$

در انتگرال اول سمت راست معادله ۷۴-۷ قرار می‌دهیم $-x \rightarrow x$ ، و با استفاده از معادله ۷۳-۷ می‌نویسیم $v(-x) = -v(x)$ ، در نتیجه

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} v(x) \left\{ \frac{1}{x + x_0} + \frac{1}{x - x_0} \right\} dx \\ &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{xv(x)}{x^2 - x_0^2} dx \end{aligned} \quad (75-7)$$

۱. این یک فقط رویداد فرخنده نیست. این رابطه تضمین می‌کند که تبدیل فوریه $f(x)$ حقیقی باشد. معادله ۷۲-۷ نیز به‌نوبه خود پیامد آن است که $f(x)$ به صورت تبدیل فوریه یک تابع حقیقی در نظر گرفته شده است.
 ۲. $u(x, 0) = u(-x, 0)$ ، $v(x, 0) = -v(-x, 0)$. این شرایط تقارنی را با شرایطی که بعد از اصل انعکاس شوارتز در بخش ۵-۶ آمد، مقایسه کنید.

$$v(x_0) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x_0 u(x)}{x^2 - x_0^2} dx \quad (76-7)$$

روابط پاشندگی اپتیکی کرونیک-گرامرز در اصل به این صورت نوشته شده بودند. رفتار مجانبی $(x_0 \rightarrow \infty)$ معادله‌های 75-7 و 76-7 به قواعد جمع در مکانیک کوانتومی می‌انجامد (مسئله 7-3-4).

پاشندگی اپتیکی

تابع $\exp[i(kx - \omega t)]$ موجی را توصیف می‌کند که در امتداد محور x در جهت مثبت، با سرعت $v = \omega/k$ حرکت می‌کند. ω بسامد زاویه‌ای، k عدد موج یا بردار انتشار و $n = ck/\omega$ ضریب شکست است. بردار انتشار k برای یک دی‌الکتریک، با استفاده از معادلات ماکسول، گذردهی الکتریکی ϵ و قانون اهم با رسانندگی σ ، به صورت زیر در می‌آید^۱

$$k^2 = \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \quad (77-7)$$

(که در آن تراوایی مغناطیسی، μ ، یک گرفته شده است). وجود رسانندگی (که به معنای جذب است)، جزء موهومی را ایجاد می‌کند. بردار انتشار k (و در نتیجه ضریب شکست n) یک عبارت مختلط می‌شود.

برعکس، جزء موهومی (مثبت) به معنای جذب است. اگر رسانندگی ضعیف باشد ($4\pi\sigma/\omega\epsilon \ll 1$) با یک بسط دو جمله‌ای داریم

$$k = \sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c} + i \frac{2\pi\sigma}{c\sqrt{\epsilon}}$$

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{i\omega(\sqrt{\epsilon}/c - t)} e^{-2\pi\sigma x/c\sqrt{\epsilon}}$$

یعنی یک موج تضعیف شده.

۱. به بخش ۷-۷ کتاب زیر بنگرید

Jackson J D, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed, New York, Wiley (1975).

در معادله 77-7، به پیروی از جکسون، از یكاهای گاوسی استفاده شده است.

به عبارت کلی مربوط به k^2 برمی‌گردیم، با توجه به معادله ۷-۷۷ بی می‌گیریم که ضریب شکست به صورت زیر در می‌آید

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \varepsilon + i \frac{2\pi\sigma}{\omega} \quad (78-7)$$

n^2 را به صورت تابعی از متغیر مختلط ω در نظر می‌گیریم (که در آن ε و σ به ω وابسته‌اند). ولی n^2 با $\omega \rightarrow \infty$ صفر نمی‌شود، بلکه به یک نزدیک می‌شود. از این رو برای آنکه شرط معادله ۷-۶۶ برقرار باشد، از تابع $f(\omega) = n^2(\omega) - 1$ بهره می‌گیریم. روابط پاشندگی اپتیکی کروننگرامرز در اصل به این صورت بودند

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[n^2(\omega_0) - 1] &= \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega \mathcal{I}[n^2(\omega) - 1]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ \mathcal{I}[n^2(\omega_0) - 1] &= -\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega_0 \mathcal{R}[n^2(\omega) - 1]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \end{aligned} \quad (79-7)$$

با معلوم بودن ضریب جذب در تمام بسامدها، جزء حقیقی ضریب شکست مشخص می‌شود و برعکس.

رابطهٔ پارسوال

اگر توابع $u(x)$ و $v(x)$ تبدیلهای هیلبرت یکدیگر بوده و هر یک هم انتگرال‌پذیر مربعی باشند^۱، به کمک رابطهٔ زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 dx \quad (80-7)$$

این عبارت، رابطهٔ پارسوال است.

برای استخراج معادلهٔ ۷-۸۰ از رابطهٔ زیر آغاز می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(s) ds}{s-x} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t) dt}{t-x} dx$$

که از معادلهٔ ۷-۷۱ الف، دوبار استفاده کرده‌ایم.

ابتدا نسبت به x انتگرال می‌گیریم، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(s-x)(t-x)} v(s) ds v(t) dt \quad (81-7)$$

۱. انتگرال‌پذیر مربعی یعنی اینکه $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 dx$ متناهی باشند.

انتگرال‌گیری نسبت به x با استفاده از مسئله ۷-۳-۸ به یک تابع دلتا ختم می‌شود:

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(s-x)(t-x)} = \delta(s-t)$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(s)\delta(s-t)ds v(t)dt \quad (۸۲-۷)$$

انتگرال‌گیری نسبت به s را از طریق حدس و واریسی و با استفاده از خاصیت تعریف‌کننده تابع دلتا، یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(s)\delta(s-t)ds = v(t) \quad (۸۳-۷)$$

انجام می‌دهیم. با نشان دادن معادله ۷-۸۳ در معادله ۷-۸۲، به معادله ۷-۸۰ یعنی رابطه یارسوال می‌رسیم. در اینجا نیز، به زبان اپتیک، روی دادن شکست روی گستره معینی از بسامدها ($n \neq 1$) دال بر وجود جذب است و برعکس.

علیت

اهمیت واقعی روابط پاشندگی در فیزیک آنجاست که این روابط پیامد مستقیم این فرض‌اند که دستگاه فیزیکی از علیت پیروی می‌کند. تعریف دقیق علیت دشوار است، ولی معنای کلی آن این است که معلول نمی‌تواند بر علت پیشی بگیرد. موج پراکنده شده نمی‌تواند پیش از آنکه موج فرودی وارد شود، توسط مرکز پراکننده گسیل شود. کلی‌ترین رابطه بین تابع ورودی G (علت) و تابع خروجی H (معلول) برای دستگاه‌های خطی را می‌توان چنین نوشت

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t')G(t')dt' \quad (۸۴-۷)$$

علیت را با شرط زیر منظور می‌کنیم:

$$F(t-t') = 0 \quad t-t' < 0 \quad \text{به‌ازای}$$

معادله ۷-۸۴ بیانگر وابستگی زمانی است. وابستگی بسامدی را به کمک تبدیل فوریه به‌دست می‌آوریم. با استفاده از قضیه بیچش در بخش ۱۵-۵، داریم

$$h(\omega) = f(\omega)g(\omega)$$

که در آن $f(w)$ تبدیل فوریه $F(t)$ است و الی آخر. $F(t)$ نیز تبدیل وارون فوریه $f(w)$ است. ارتباط با روابط پاشندگی را قضیه تیچ مارش تأمین می‌کند. ^۱ بنابراین قضیه، اگر $f(w)$ روی محور w حقیقی انتگرال پذیر مربعی باشد، در این صورت هر یک از سه گزاره زیر دال بر درستی دو قضیه دیگر است.

۱. تبدیل فوریه $f(w)$ به ازای $t < 0$ صفر است (معادله ۷-۸۴).

۲. w را با z تعویض می‌کنیم؛ تابع $f(z)$ در صفحه z مختلط به ازای $y > 0$ تحلیلی است و با $y \rightarrow 0$ تقریباً در همه جا به $f(x)$ نزدیک می‌شود. به علاوه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx < K \quad y > 0 \text{ به ازای}$$

یعنی انتگرال کراندار است.

۳. اجزای حقیقی و موهومی $f(z)$ تبدیلهای هیلبرت یکدیگرند (معادله‌های ۷-۷۱ الف و ۷-۷۱ ب).

این فرض که ارتباط بین ورودی و خروجی دستگاه خطی ما از اصل علیت پیروی می‌کند (معادله ۷-۸۴) به این معناست که گزاره اول برقرار باشد. اگر $f(w)$ انتگرال پذیر مربعی باشد، در این صورت گزاره سوم پیامدی از قضیه تیچ مارش خواهد بود و به روابط پاشندگی خواهیم رسید.

مسائل

۱-۳-۷ تابع $f(z)$ در شرایط مربوط به روابط پاشندگی صدق می‌کند. علاوه بر آن: $f(z) = f^*(z^*)$ (اصل انعکاس شوارتز، بخش ۵-۶). نشان دهید که $f(z)$ متحد با صفر است. ۲-۳-۷ اگر $f(z)$ چنان تابعی باشد که برای آن بتوان پر بند بسته فرمول انتگرال کوشی را با انتگرالی روی محور حقیقی تعویض کرد؛ در این صورت:

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \delta}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{x_0}} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

۱. مراجعه کنید به:

Titchmarsh E C, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2nd ed New York, Oxford University Press (1937).

بحث غیررسمی‌تری درباره قضیه تیچ مارش و جزئیات مشروحتری درباره علیت را می‌توانید در کتاب زیر بیابید
Hilgevoord J, *Dispersion Relations and Causal Description*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co (1962),

در اینجا، C_{x_0} نیم‌دایره کوچکی حول x_0 در نیم‌صفحه پایینی است. نشان دهید که این رابطه به صورت زیر، که همان معادله ۶۹-۷ است، ساده می‌شود

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

۳-۳-۷ الف) معادله ۶۶-۷ به ازای $f(z) = e^{iz}$ در نقاط انتهایی $\arg z = 0, \pi$ برقرار نیست. به کمک لم جوردان، بخش ۲-۷، نشان دهید که معادله ۶۷-۷، کماکان برقرار است. (ب) روابط پاشندگی، معادله‌های ۷۱-۷ یا ۷۵-۷ و ۷۶-۷ را به ازای $f(z) = e^{iz}$ با انتگرال‌گیری مستقیم به دست آورید.

۴-۳-۷ با $f(x) = u(x) + iv(x)$ و $f(x) = f^*(-x)$ ، نشان دهید که در حد $x_0 \rightarrow \infty$:

$$u(x_0) \sim -\frac{2}{\pi x_0^2} \int_0^{\infty} xv(x) dx \quad \text{الف)}$$

$$v(x_0) \sim \frac{2}{\pi x_0} \int_0^{\infty} u(x) dx \quad \text{ب)}$$

در مکانیک کوانتومی، غالباً روابطی به این صورت را قواعد جمع می‌نامند.

۵-۳-۷ الف) برای معادله انتگرالی زیر، با استفاده از تبدیلهای هیلبرت، $u(x_0)$ را تعیین کنید:

$$\frac{1}{1+x_0^2} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-x_0} dx$$

ب) تحقیق کنید که معادله انتگرالی بند الف) صادق است. (ج) با استفاده از $f(z)|_{y=0} = u(x) + iv(x)$ ، x را با z تعویض و $f(z)$ را تعیین کنید. تحقیق کنید که شرایط مربوط به تبدیلهای هیلبرت برقرارند. (د) آیا شرایط ضربدری صدق می‌کنند؟

جواب: الف) $u(x_0) = \frac{x_0}{(1+x_0^2)}$ (ج) $f(z) = (z+i)^{-1}$

۶-۳-۷ الف) اگر جزء حقیقی (مربع) ضریب شکست مختلط ثابت باشد (پاشندگی اپتیکی نباشد)، نشان دهید که جزء حقیقی صفر است (جذبی نیست). (ب) برعکس، نشان دهید که اگر جذب صورت گیرد، باید پاشندگی وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، اگر جزء موهومی $n^2 - 1$ صفر نباشد، نشان دهید که جزء حقیقی $n^2 - 1$ ثابت نیست.

۷-۳-۷ به ازای $u(x) = x/(x^2+1)$ و $v(x) = -1/(x^2+1)$ ، و با محاسبه مستقیم انتگرال،

نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 dx$$

جواب: $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 dx = \frac{\pi}{4}$

۷-۳-۸ $u(x) = \delta(x)$ را تابع دلتا بگیرید و فرض کنید که معادله‌های تبدیل هیلبرت برقرار است. (الف) نشان دهید

$$\delta(w) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y(y-w)}$$

(ب) با تغییر متغیرهای $w = s - t$ و $x = s - y$ ، نمایش تابع دلتا در بند (الف) را به صورت زیر در آورید

$$\delta(s-t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-s)(x-t)}$$

یادآوری: بررسی تابع دلتا را در بخش ۷-۸ ملاحظه خواهید کرد. ۷-۳-۹ نشان دهید

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t(t-x)}$$

نمایش موجهی است برای تابع دلتا؛ یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

فرض کنید $f(x)$ حائز شرایط لازم برای وجود تبدیل هیلبرت باشد. [راهنمایی: معادله ۷-۶۹ را دوبار به کار برید.]

۷-۴ روش تندترین کاهش

در بررسی مسائل ریاضی فیزیک، غالباً بهتر است که رفتار تابع را به ازای مقادیر بزرگ متغیر یا، به عبارتی، رفتار مجانبی تابع را بدانیم. تابع گاما (فصل ۱۰) و توابع گوناگون بسل (فصل ۱۱)

مثالهای خاصی از این حالت‌اند. اگر بتوان تابع را به صورت انتگرالی به شکل کلی زیر نوشت

$$I(s) = \int_C g(z) e^{s f(z)} dz \quad (۸۵-۷)$$

یکی از راههای تعیین رفتار مجانبی روش تندترین کاهش است. فعلاً فرض می‌کنیم که s حقیقی است. پریند انتگرال‌گیری C را طوری اختیار می‌کنیم که یا جزء حقیقی $f(z)$ در هر دو حد به منهای بینهایت نزدیک شود و انتگرالده در حدها صفر شود، یا پریند بسته باشد. علاوه بر این، فرض می‌شود که جزء نمایی انتگرالده در ناحیه مورد نظر بر عامل $g(z)$ غالب باشد.

اگر پارامتر s بزرگ و مثبت باشد، هر جا که جزء حقیقی $f(z)$ بزرگ باشد، مقدار انتگرالده بزرگ، و هر جا که جزء حقیقی $f(z)$ کوچک و یا منفی باشد، کوچک خواهد بود. به خصوص اگر s را به طور نامتناهی افزایش دهیم (که به وابستگی مجانبی نزدیک شویم) تمام سهم انتگرالده در انتگرال از ناحیه‌ای خواهد بود که در آن جزء حقیقی $f(z)$ یک مقدار بیشینه مثبت به خود می‌گیرد. انتگرالده در نواحی دور از این بیشینه مثبت، در مقایسه تا حد چشم‌پوشیدنی کوچک خواهد بود. برای اثبات، $f(z)$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

در این صورت، انتگرال را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I(s) = \int_C g(z) e^{su(x,y)} e^{isv(x,y)} dz \quad (۸۶-۷)$$

اینک اگر این شرط اضافی را نیز در نظر بگیریم که جزء موهومی عبارت نما، یعنی $iv(x, y)$ ، در ناحیه‌ای ثابت باشد که در آن جزء حقیقی مقدار بیشینه خود را دارد، یعنی $v(x_0, y_0) = v_0$ ؛ می‌توانیم انتگرال را به صورت زیر تقریب بزنیم

$$I(s) \approx e^{isv_0} \int_C g(z) e^{su(x,y)} dz \quad (۸۷-۷)$$

در نواحی دور از بیشینه جزء حقیقی، جزء موهومی می‌تواند به هر صورتی تغییر کند، زیرا با توجه به اینکه انتگرالده تا حد چشمگیری کوچک است، عامل فاز در حال تغییر کاملاً بی‌تأثیر است.

جزء حقیقی $s f(z)$ وقتی به ازای یک s معلوم بیشینه است که جزء حقیقی $f(z)$ ، یعنی $u(x, y)$ ، بیشینه باشد. یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

در نتیجه، با استفاده از شرایط کوشی-ریمان (بخش ۲-۶):

$$\frac{df(z)}{dz} = 0. \quad (۸۸-۷)$$

از این رو، به جستجوی صفرهای مشتق می‌رویم. توجه به این نکته ضروری است که منظور از بیشینه مقدار $u(x, y)$ ، تنها بیشینه در طول یک پربند معین است. در صفحهٔ منتهای، نه جزء حقیقی و نه جزء موهومی تابع تحلیلی ما، هیچیک بیشینهٔ مطلق نخواهد داشت. برای اثبات، به یاد بیاورید که هم u و هم v در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (۸۹-۷)$$

از این رابطه می‌بینیم که اگر مشتق دوم نسبت به x مثبت باشد، مشتق دوم نسبت به y باید منفی باشد، و بنابراین نه u و نه v هیچیک نمی‌توانند بیشینه یا کمینهٔ مطلق داشته باشند. با توجه به اینکه فرض کرده‌ایم $f(z)$ تحلیلی است، نقاط تکین طرد شده‌اند. در نتیجه، صفر شدن مشتق (معادلهٔ ۸۸-۷) به این معناست که یک نقطهٔ زینی یا مقداری مانا داریم که ممکن است برای یک پربند بیشینهٔ $u(x, y)$ و برای پربندی دیگر کمینه باشد (شکل ۱۹-۷).

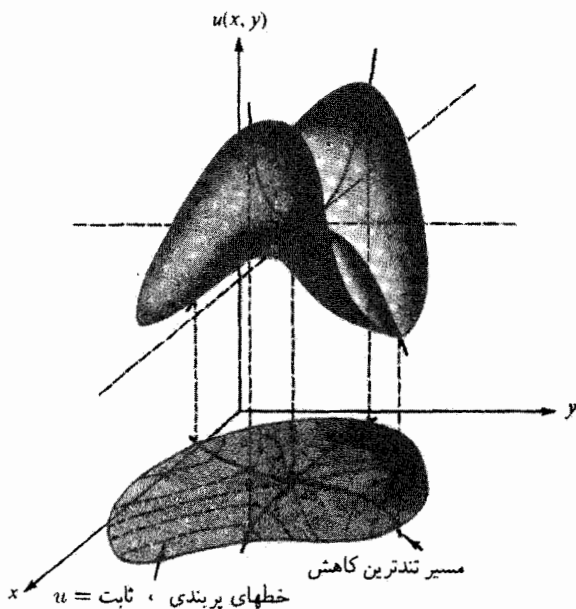
اینک مسئلهٔ ما منحصر است به اختیار پربند انتگرالی به صورتی که دو شرط را برآورده کند: (۱) پربند باید به صورتی اختیار شود که $u(x, y)$ در نقطهٔ زینی مقدار بیشینه داشته باشد؛ (۲) پربند باید به صورتی از نقطهٔ زینی بگذرد که جزء موهومی، یعنی $v(x, y)$ ، ثابت باشد. شرط دوم به ما مسیر تندترین کاهش را که این روش هم به آن نامیده شده، می‌دهد. با توجه به بخش ۲-۶، به خصوص مسئلهٔ ۱-۲-۶ پی می‌بریم که منحنیهای منتظر با $u = \text{const.}$ و $v = \text{const.}$ یک دستگاه متعامد می‌سازند. یعنی، منحنی $v = c_i$ (ثابت c_i) همه‌جا بر شیب u ، یعنی ∇u عمود است. بنابراین، منحنی $v = \text{const.}$ منحنی‌ای است که خط تندترین کاهش از نقطهٔ زینی را می‌دهد.^۱

تابع $f(z)$ را می‌توان حول نقطهٔ زینی بسط تایلوری داد، در نتیجه:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) + \dots \quad (۹۰-۷)$$

روشن است که مشتق اول به دلیل برقراری معادلهٔ ۸۸-۷، ظاهر نشده است. اولین جملهٔ تصحیحی، یعنی $\frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0)$ ، حقیقی و منفی است. به این دلیل حقیقی است که جزء موهومی

۱. خط تندترین افزایش نیز با $v = \text{const} >$ مشخص می‌شود. باید نقطهٔ زینی را به دقت واریسی کرد تا خط تندترین کاهش را از خط تندترین افزایش بازشناخت. این نکته را بعداً طی دو مثال بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۹-۷ نقطه زینی.

در طول پربند مورد نظر ما ثابت است، و علت منفی بودن آن این است که پربند از نقطه زینی به طرف پایین یا سراشیبی تپه حرکت می‌کند. اینک با فرض $f''(z_0) \neq 0$ داریم

$$f(z) - f(z_0) \approx \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) = -\frac{1}{2s} t^2 \quad (91-7)$$

در این رابطه متغیر جدید t تعریف شده است. اگر $z - z_0$ را به صورت قطبی آن بنویسیم

$$(z - z_0) = \delta e^{i\alpha} \quad (92-7)$$

(که در آن فاز α ثابت نگه داشته می‌شود)، داریم

$$t^2 = -s f''(z_0) \delta^2 e^{2i\alpha} \quad (93-7)$$

با توجه به آنکه t حقیقی است^۱، می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$t = \pm \delta |s f''(z_0)|^{1/2} \quad (94-7)$$

۱. فاز پربند (که با α مشخص می‌شود) در نقطه زینی به‌گونه‌ای اختیار می‌شود که $[f(z) - f(z_0)] = 0$ ، یعنی $f''(z_0) \frac{1}{2}(z - z_0)^2$ باید حقیقی باشد.

معادله ۹۱-۷ را در معادله ۸۵-۷ می‌نشانیم، خواهیم داشت

$$I(s) \approx g(z_0) e^{sf(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \frac{dz}{dt} dt \quad (95-7)$$

با استفاده از معادله‌های ۹۲-۷ و ۹۴-۷ داریم

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dt}{dz} \right)^{-1} = \left(\frac{dt}{d\delta} \frac{d\delta}{dz} \right)^{-1} = |sf''(z_0)|^{-1/2} e^{i\alpha} \quad (96-7)$$

معادله ۹۵-۷ به صورت زیر در خواهد آمد

$$I(s) \approx \frac{g(z_0) e^{sf(z_0)} e^{i\alpha}}{|sf''(z_0)|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \quad (97-7)$$

دقت کنید که حدها را از منهای بینهایت تا به اضافه بینهایت گرفته‌ایم. به این دلیل به انجام این کار مجازیم که هرگاه t به نحو چشمگیری از مبدأ دور باشد، انتگرالده اساساً صفر خواهد شد. با توجه به اینکه انتگرال باقیمانده، انتگرال خطای گاوس و برابر است با $\sqrt{2\pi}$ ، سرانجام می‌رسیم به

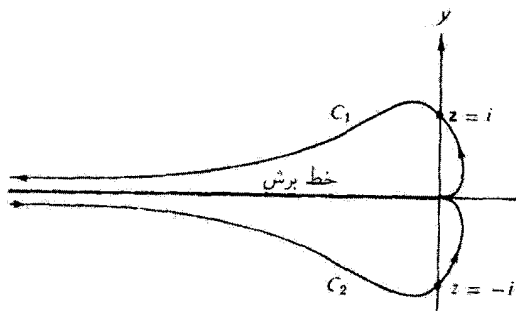
$$I(s) \approx \frac{\sqrt{2\pi} g(z_0) e^{sf(z_0)} e^{i\alpha}}{|sf''(z_0)|^{1/2}} \quad (98-7)$$

فاز α در معادله ۹۲-۷ به صورت فاز پربند به هنگام عبور از نقطهٔ زینی تعریف شد. α را چنان اختیار می‌کنیم که دو شرط داده شده [$\alpha = \text{const.}$; بیشینه $\mathcal{R}[f(z)]$] برقرار باشند. گاهی اتفاق می‌افتد که پربند از دو یا چند نقطهٔ زینی یکی پس از دیگری می‌گذرد. در این صورت برای یافتن مقدار تقریبی برای کل انتگرال، باید سهم هر یک از نقطه‌های زینی را به کمک معادله ۹۸-۷ محاسبه، و همه را با هم جمع کنیم.

گوشزد: فرض کردیم که سهم عمده در انتگرال از همسایگی نزدیک نقطه (یا نقاط) زینی $z = z_0$ ناشی شده باشد، یعنی در تمامی پربند در نقاط دور از $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\mathcal{R}[f(z)] = u(x, y) \ll u(x_0, y_0)$$

در هر مسئله باید این نکته را امتحان کرد (مسئله ۵-۴-۷).



شکل ۷-۲۰ پریندهای تابع هنکل.

مثال ۷-۴-۱ صورت مجانبی تابع هنکل $H_\nu^{(1)}(s)$ در بخش ۱۱-۴، خواهیم دید توابع هنکل که در معادله بسل صدق می‌کنند، بنابر تعریف عبارت‌اند از:

$$H_\nu^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1}^{\infty} e^{(s/\nu)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}} \quad (99-7)$$

$$H_\nu^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_2}^{\infty} e^{(s/\nu)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}} \quad (100-7)$$

پریند C_1 ، منحنی‌ای است که در نیم صفحه بالایی شکل ۷-۲۰ ترسیم شده است. پریند C_2 در نیم صفحه پایینی واقع است. روش تندترین کاهش را برای تابع اول هنکل، $H_\nu^{(1)}(s)$ ، به کار می‌بریم. این تابع با در نظر گرفتن $f(z)$ به صورت:

$$f(z) = \frac{1}{\nu} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (101-7)$$

به همان صورتی درمی‌آید که در معادله ۷-۸۵ مشخص شده است. به کمک مشتق‌گیری، داریم

$$f'(z) = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu z^2} \quad (102-7)$$

طبق معادله ۷-۸۸، قرار می‌دهیم: $f'(z) = 0$ و می‌رسیم به:

$$z = i, -i \quad (103-7)$$

در نتیجه، در نقاط $z = +i$ و $z = -i$ ، نقطه زینی داریم. انتگرال $H_\nu^{(1)}(s)$ چنان اختیار می‌شود که از مبدأ بگذرد، به طور مماس بر محور حقیقی مثبت حرکت کند، و پس از گذشتن از نقطه زینی

در $z = +i$ به منهای بینهایت برود، به طوری که محور حقیقی منفی مجانب آن باشد. پربند باید چنان از نقطه $z = +i$ بگذرد که جزء حقیقی $(z - 1/z)$ بیشینه باشد، و فاز در مجاورت نقطه زینی ثابت بماند. داریم

$$\Re\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0 \quad \text{به‌ازای } z = i$$

برای بقیه $C_1 (z \neq i)$ ، باید: $\Re(z - 1/z) < 0$

در مجاورت نقطه زینی $z_0 = +i$ داریم

$$z - i = \delta e^{i\alpha} \quad (104-7)$$

که δ عددی کوچک است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \Re f(z) &= z - \frac{1}{z} = \delta e^{i\alpha} + i - \frac{1}{\delta e^{i\alpha} + i} \\ &= \delta \cos \alpha + i(\delta \sin \alpha + 1) - \frac{1}{\delta \cos \alpha + i(\delta \sin \alpha + 1)} \quad (105-7) \\ &= \delta \cos \alpha + i(\delta \sin \alpha + 1) - \frac{\delta \cos \alpha - i(\delta \sin \alpha + 1)}{1 + 2\delta \sin \alpha + \delta^2} \end{aligned}$$

بنابراین، جزء حقیقی به‌قرار زیر خواهد بود

$$\Re\left(z - \frac{1}{z}\right) = \delta \cos \alpha - \delta \cos \alpha (1 + 2\delta \sin \alpha + \delta^2)^{-1} \quad (106-7)$$

با توجه به کوچک بودن δ ، به کمک قضیه دوجمله‌ای بسط می‌دهیم و از جملات از مرتبه δ^2 و بالاتر چشم می‌پوشیم

$$\Re\left(z - \frac{1}{z}\right) = 2\delta^2 \cos \alpha \sin \alpha + O(\delta^3) \approx \delta^2 \sin 2\alpha \quad (107-7)$$

می‌بینیم که اگر $\sin 2\alpha$ فرینه شود، یعنی اگر 2α برابر $\pi/2$ یا $3\pi/2$ باشد، جزء حقیقی $(z - 1/z)$ مقداری فرین خواهد داشت؛ در نتیجه α ، فاز پربند باید $\pi/4$ یا $3\pi/4$ اختیار شود. یکی از این دو گزینه، مسیر تندترین کاهش مورد نظر ما را می‌دهد. گزینه دیگر مسیر تندترین افزایش را می‌دهد

که مورد نظر ما نیست. با نشانیدن مقدار α در جزء حقیقی $(z - 1/z)$ ، این دو امکان را از هم تمیز می‌دهیم. به‌ازای $\alpha = \pi/4$

$$\Re\left(z - \frac{1}{z}\right) = \delta^2 \quad (108-7)$$

که حاکی از کمینه بودن $z = i$ است.
به‌ازای $\alpha = 3\pi/4$

$$\Re\left(z - \frac{1}{z}\right) = -\delta^2 \quad (109-7)$$

و $z = i$ یک بیشینه است. این همان فاز مطلوب ماست.
با جانشانی مستقیم در معادله ۹۸-۷ و با $\alpha = 3\pi/4$ ، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(s) &= \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{2\pi} i^{-\nu-1} e^{(s/2)(i-1/i)} e^{i(3\pi/4)}}{|(s/2)(-2/i^2)|^{1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{(i\pi/2)(-\nu-2)} e^{is} e^{i(3\pi/4)} \end{aligned} \quad (110-7)$$

سرانجام، با ترکیب جمله‌ها، جمله غالب در بسط مجانبی تابع هنکل $H_\nu^{(1)}(s)$ را به‌صورت زیر به‌دست خواهیم آورد

$$H_\nu^{(1)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{i(s-\nu(\pi/2)-\pi/4)} \quad (111-7)$$

برای یافتن جمله‌های بعدی می‌توانیم یک سری توانی نزولی در نظر بگیریم و با نشانیدن در معادله بسط، ضرایب مربوط را به‌دست آوریم.

مثال ۷-۴-۲ صورت مجانبی تابع فاکتوریل، $s!$: در تعداد زیادی از مسائل فیزیک، به‌خصوص در حوزه مکانیک آماری، به تقریب دقیقی برای تابع گاما یا فاکتوریل اعداد بسیار بزرگ نیاز پیدا می‌کنیم. تابع فاکتوریل را می‌توان، مطابق مفاد بخش ۱۰-۱، به کمک انتگرال زیر تعریف کرد

$$s! = \int_0^\infty \rho^s e^{-\rho} d\rho = s^{s+1} \int_C^\infty e^{s(\ln z - z)} dz \quad (112-7)$$

در اینجا، برای آنکه انتگرال را به صورتی درآوریم که معادله ۷-۸۵ ایجاب می‌کند، تغییر متغیر $z = \rho s$ را انجام داده‌ایم. در اینجا نیز s را حقیقی و مثبت می‌گیریم، که در نتیجه انتگرالده در حدهای صفر و بینهایت صفر می‌شود. با مشتق‌گیری از وابستگی به z در نما، خواهیم داشت

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(\ln z - z) = \frac{1}{z} - 1 \quad (113-7)$$

که این عبارت نشان می‌دهد در نقطه $z = 1$ یک نقطه زینی داریم. قرار می‌دهیم

$$z - 1 = \delta e^{i\alpha} \quad (114-7)$$

و δ را کوچک می‌گیریم تا پرند در مجاورت نقطه زینی را توصیف کرده باشیم. با نشان دادن معادله ۷-۱۱۴ در $f(z) = \ln z - z$ و سپس بسط سری، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln(1 + \delta e^{i\alpha}) - (1 + \delta e^{i\alpha}) \\ &= \delta e^{i\alpha} - \frac{1}{2} \delta^2 e^{2i\alpha} + \dots - 1 - \delta e^{i\alpha} \\ &= -1 - \frac{1}{2} \delta^2 e^{2i\alpha} \end{aligned} \quad (115-7)$$

با توجه به این رابطه پی می‌بریم که اگر پرند C را طوری اختیار کنیم که روی محور حقیقی واقع باشد، انتگرالده در نقطه زینی مقدار بیشینه (e^{-s}) را خواهد داشت. این نتیجه‌گیری را می‌توان در ویش در ذهن هم انجام داد.

با نشان دادن مستقیم در معادله ۷-۹۸ و به‌ازای $\alpha = 0$ ، خواهیم داشت

$$s! \approx \frac{\sqrt{2\pi s^{s+1}} e^{-s}}{|s(-1)^{-2}|^{1/2}} \quad (116-7)$$

بنابراین، جمله اول در بسط مجانبی تابع فاکتوریل به‌قرار زیر است

$$s! \approx \sqrt{2\pi s s^s} e^{-s} \quad (117-7)$$

این اولین جمله در بسط استرلینگ تابع فاکتوریل است. روش تندترین کاهش شاید ساده‌ترین راه برای دستیابی به این جمله اول باشد. اگر به جمله‌های دیگری از بسط نیاز باشد، روشی که در بخش ۱-۳ مطرح شد، بهتر است.

در مثال قبل، محاسبات با فرض حقیقی بودن s انجام شد. این فرض لازم نیست. دانشجو خود می‌تواند نشان بدهد (مسئله ۷-۴-۶) که اگر s را با متغیر مختلط w تعویض کنیم، باز هم معادله ۷-۱۱۷ برقرار خواهد بود، مشروط بر آنکه جزء حقیقی w را بزرگ و مثبت بگیریم.

مسائل

۷-۴-۱ با استفاده از روش تندترین کاهش، تابع دوم هنکل را که از انتگرال زیر به دست می‌آید، حساب کنید

$$H_{\nu}^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty C_1}^{\infty} e^{(s/\pi)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}$$

که C_2 پربندی است که در شکل ۷-۲۰ نشان داده شده است.

جواب: $H_{\nu}^{(1)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{-i(s-\pi/4-\nu\pi/2)}$

۷-۴-۲ ریشه دوم منفی در معادله ۷-۹۴، در معادله ۷-۹۷ نیامده است. حذف آن چگونه توجیه می‌شود؟ استدلال خود را با مراجعه جزئیات $H_{\nu}^{(1)}(z)$ در مثال ۷-۴-۱، بیان کنید.

۷-۴-۳ (الف) در کاربرد روش تندترین کاهش درباره تابع هنکل $H_{\nu}^{(1)}(s)$ ، نشان دهید که برای z روی پربند C_1 ، ولی دور از نقطه $z = z_0 = i$ داریم

$$\Re[f(z)] < \Re[f(z_0)] = 0$$

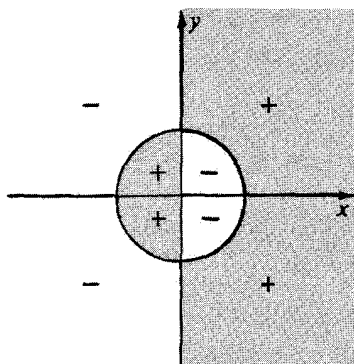
(ب) نشان دهید

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \\ -\pi \leq \theta < -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{بمازای } 1 < r < \infty, \text{ و } r > 1 \text{ و } -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$$

داریم (شکل ۷-۲۱):

$$\Re[f(z)] > 0$$

به همین دلیل است که پربند را نمی‌شود تغییر شکل داد تا از نقطهٔ زینی دوم در $z = -i$ بگذرد.



شکل ۲۱-۷

۴-۴-۷ وابستگی مجانبی توابع تعدیل‌یافتهٔ بسل، $I_\nu(x)$ ، را که با انتگرال زیر نمایش داده می‌شود، تعیین کنید

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{(x/2)(t+1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

این پربند از $t = -\infty$ شروع می‌شود، مبدأ را در سوی مثبت دور می‌زند و به $t = -\infty$ ختم می‌شود. دو نقطهٔ زینی وجود دارد که از آن میان نقطهٔ زینی در $z = +1$ سهم عمده را دارد.

۵-۴-۷ وابستگی مجانبی تابع تعدیل‌یافتهٔ نوع دوم بسل، $K_\nu(x)$ ، را با استفاده از نمایش انتگرالی زیر تعیین کنید

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(x/2)(s+1/s)} \frac{ds}{s^{1-\nu}}$$

۶-۴-۷ نشان دهید که فرمول استرلینگ:

$$s! \approx \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s}$$

بازای مقادیر مختلط s (با $\Re(s)$ بزرگ و مثبت) نیز برقرار است.

[راهنمایی: برای اثبات، فازی برای s در نظر بگیرید، آنگاه در مجاورت نقطهٔ زینی شرط

$$[sf(z)] = \text{const.} \text{ را اعمال کنید.}]$$

۷-۴-۷ فرض کنید توانهای منفی بسط سری $H_\nu^{(1)}(s)$ به صورت زیر باشد

$$H_\nu^{(1)}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{i(s-\nu(\pi/2)-\pi/2)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} s^{-n}$$

که در آن ضریب مجموع یابی را با روش تندترین کاهش به دست آورده باشیم. این بسط را در معادله بسط بنشانید و نشان دهید که سری مجانبی ای را می دهد که در بخش ۱۱-۶ برای $H_\nu^{(1)}(s)$ به دست آمد.

مراجع

Nussenzweig H M, *Causality and Dispersion Relations*, New York, Academic Press (1972), Volume 95 in Mathematics and Engineering series.

کتاب درسی پیشرفته ای است که در فصل اول آن به علیت و رابطه های پاشندگی پرداخته می شود و سپس موضوع در زمینه های گوناگون فیزیک ادامه می یابد.

Wyld H W, *Mathematical Methods for Physics*, Reading, Mass: Benjamin/ Cummings (1976).

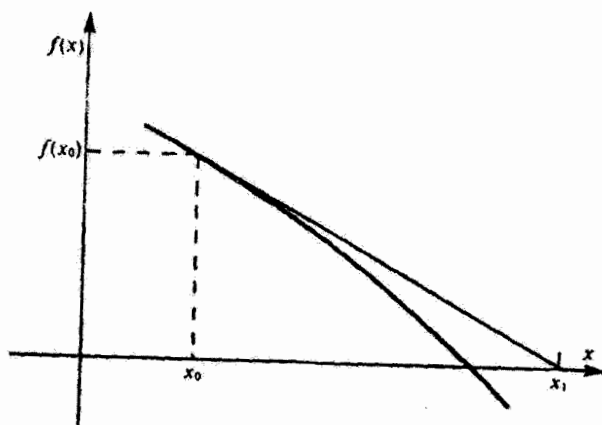
کتاب درسی نسبتاً پیشرفته ای است که حاوی بحث گسترده ای در باب رابطه های پاشندگی است.

پیوست ۱

صفرهای حقیقی یک تابع

در ریاضی فیزیک نیاز به مقادیر متناظر با صفرهای حقیقی یک تابع در موارد فراوانی پیش می‌آید. نمونه‌هایی از این وضعیت عبارت‌اند از شرایط مرزی روی جواب مسئلهٔ موجبر هم‌محور، مثال ۱۱-۳-۱، مسائل ویژه مقدار در مکانیک کوانتومی نظیر دوتریون با یک چاه پتانسیل مربعی، مثال ۹-۱-۲، و موضع نقاط ارزیابی در کوادراتور گاوسی (پیوست ۲).

مجموعهٔ زیربرنامه‌های علمی IBM (یعنی، SSP)، سه زیربرنامه برای تعیین صفرهای حقیقی تابعها در دسترس ما قرار می‌دهد. این سه زیربرنامه عبارت‌اند از (۱) RTWI، که یک تکنیک تکرار است، و به وگشتین منسوب است، (۲) RTMI، تکنیک تکرار نیمسازي منسوب به مولر، و (۳) RTNI، روش نیوتون، که در محاسبه‌های مقدماتی از آن خیلی اقبال می‌کنند. در این هر سه روش یک حدس اولیهٔ نزدیک به واقعیت برای صفر یا ریشه‌ها ضروری است. اینکه این حدس تا چه حد باید به واقعیت نزدیک باشد، بستگی دارد به آنکه تغییرات تابع مورد نظر چقدر وسیع است و به چه دقتی نیاز داریم. این هر سه روش در واقع عبارت‌اند از روشهایی برای اصلاح یک مقدار اولیهٔ مطلوب. برای به دست آوردن مقدار اولیهٔ مطلوب و تعیین موضع جنبه‌های معیوب (مانند ناپیوستگیها و تکینگیها) که باید از آنها دوری جست، باید نمودار نسبتاً مشروحی برای تابع رسم کنیم. هیچ چیزی واقعاً جای یک نمودار را نمی‌گیرد. در مسئلهٔ ۱۱-۳-۱۲ بر این نکته تأکید شده است.



شکل پ-۱ روش ریشه‌یابی نیوتون.

روش نیوتون

این روش معمولاً در حساب دیفرانسیل ارائه می‌شود زیرا نمایانگر حساب دیفرانسیل است. اگر دقیقاً بدانید که تابع شما چه رفتاری دارد، گاهی این روش می‌تواند روش خوبی به شمار آید. در روش نیوتون اینطور فرض می‌کنند که تابع $f(x)$ دارای مشتق مرتبه اول پیوسته باشد. با استفاده از تعبیر هندسی مشتق به عنوان مماس بر منحنی، شکل پ-۱، داریم

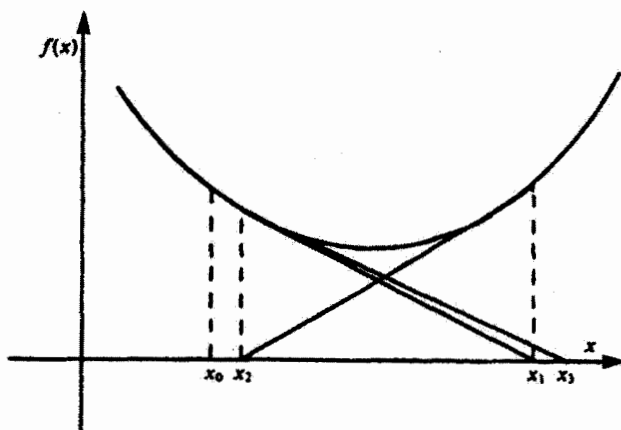
$$\frac{f(x_0)}{x_1 - x_0} = -f'(x_0) \quad (\text{پ-۱})$$

یا

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{پ-۲})$$

با مقدار x_0 به عنوان حدس اولیه، و با استفاده از معادله پ-۲، x_1 را محاسبه می‌کنیم. با تکرار این کار x_2 را از روی x_1 محاسبه می‌کنیم و امید داریم که جواب ما سریعاً به ریشه واقعی همگرا شود.

در روش نیوتون محاسبه مشتق ضروری است. این ضرورت می‌تواند یک نقض به حساب آید؛ محاسبه مشتق در مسئله ۱۱-۳-۱۲ دست‌وپا گیر است. ولی ایرادی اساسی که به روش نیوتون وارد می‌شود، آن است که این روش بسیار غیرقابل اعتماد است. این روش ممکن است همگرا نشود، و در مجاورت یک بیشینه یا کمینه موضعی (شکل پ-۲) نوسان کند، یا ممکن است در

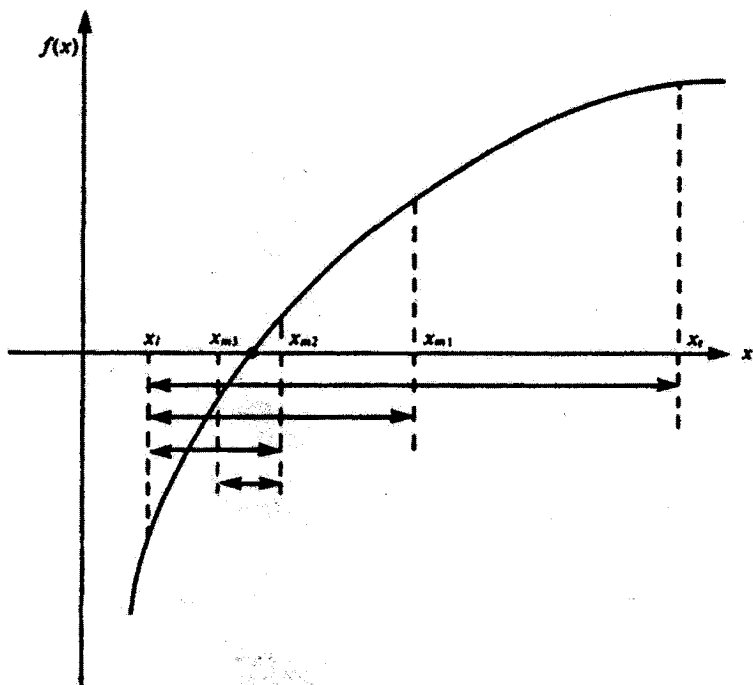


شکل پ ۱-۲ روش نیوتون-سکیمتة موضعی، بدون همگرایی.

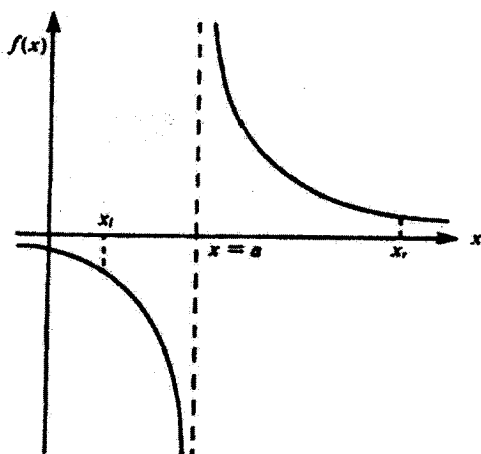
مجاورت یک نقطهٔ خمش واگرا شود. یا اگر حدس اولیه به اندازهٔ کافی صائب نباشد، روش نیوتون ممکن است به یک ریشهٔ غلط همگرا شود. روش نیوتون روشی است که، جز در مواردی که رفتار تابع مورد نظر دقیقاً معلوم است، باید از آن اجتناب شود.

روش نیمسازی

در این روش فرض می‌کنند که فقط $f(x)$ پیوسته است. این روش مستلزم آن است که مقادیر x_l و x_r را در دو سوی صفر جستجو کنیم. از این رو علامت $f(x_l)$ و $f(x_r)$ مخالفاند و حاصلضرب $f(x_l) \cdot f(x_r)$ منفی می‌شود. در ساده‌ترین صورت روش نیمسازی، نقطهٔ وسط $x_m = (1/2)(x_l + x_r)$ را در نظر می‌گیرند و امتحان می‌کنند تا ببینند نقطهٔ صفر در کدام یک از دو بازهٔ $[x_l, x_m]$ یا $[x_m, x_r]$ قرار دارد. آسانترین آزمون آن است که ببینیم یکی از دو حاصلضرب، مثلاً $f(x_m) \cdot f(x_r)$ ، منفی است یا خیر. اگر این حاصلضرب منفی باشد، آنگاه ریشه در نیم بازهٔ طرف راست، $[x_m, x_r]$ ، قرار دارد، و اگر مثبت باشد، در این صورت ریشه باید در نیم بازهٔ سمت چپ $[x_l, x_m]$ واقع باشد. به خاطر داشته باشید که $f(x)$ را پیوسته گرفته‌ایم. بازهٔ حاوی صفر را باز با $[x_l, x_r]$ مشخص می‌کنیم و عمل نیمسازی را (مطابق شکل پ ۱-۳) تا آنجا ادامه می‌دهیم که موضع صفر با دقت مطلوب تعیین شود. روشن است که هر چه انتخاب اولیهٔ x_l و x_r بهتر باشد، تعداد نیمسازیهایی لازم کمتر خواهد بود. ولی، چنانکه در ادامهٔ مطلب توضیح داده خواهد شد، مشخص کردن بیشینهٔ تعداد نیمسازیهایی مجاز حائز اهمیت است. این تکنیک نیمسازی، در مقایسه با روش نیوتون، ممکن است از مزیت چندانی برخوردار نباشد، ولی دارای سرعت معقولی است و قابل اطمینان تر هم هست — تقریباً اگر به توابع ناپیوسته‌ای مانند $f(x) = 1/(x-a)$ که در شکل پ ۱-۴ نشان داده شده است، نبردازیم این روش همواره



شکل پ-۱-۳ روش ریشه‌یابی نیمسازي.



شکل پ-۱-۴ يك قطب ساده، $f(x_1) \cdot f(x_r) < 0$.

صائب است. در اینجا نیز هیچ چیز به اندازه داشتن اطلاعات مشروح از رفتار موضعی تابع در مجاورت ریشه فرضی، ارزش ندارد. معمولاً، روش نیمسازی RTMI را توصیه می‌کنند.

دو هشدار

۱. کامپیوتر فقط تعدادی متناهی از ارقام معنی‌دار را می‌پذیرد، از این رو نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که صفری با دقت نامتناهی را محاسبه کند. لازم است که حد مجازی برای آن مشخص کنیم. در هر سه زیربرنامه SSP یعنی RTWI، RTMI، و RTNI باید حد مجازی مشخص شود (با پارامتر ورودی EPS). پس از آنکه موضع ریشه در محدوده این حد مجاز تعیین شد، زیربرنامه، کنترل را به برنامه اصلی که این زیربرنامه رافراخوانده است، باز می‌گرداند.

۲. همهٔ رهیافتهایی که در اینجا توضیح داده شد، تکنیکهای تکرار به‌شمار می‌آیند. چند بار تکرار صورت می‌گیرد؟ چگونه تصمیم به توقف می‌گیریم؟ می‌توان طوری برنامه داد که تکرار تا دستیابی به دقت مطلوب ادامه یابد. این مخاطره وجود دارد که شاید عاملی مانع همگرایی معقول شود. در این صورت، حد مجاز مورد نظر هرگز به دست نمی‌آید و یک حلقه نامتناهی داریم. لذا اگر برای تعداد تکرارها قبلاً بیشینه‌ای مشخص شود، بسیار بهتر است. این رهیافت نیز در هر سه زیربرنامه SSP وجود دارد (با پارامتر ورودی IEND). لذا این زیربرنامه‌ها، پس از آنکه یک صفر در محدوده حد مجاز مشخص شده تعیین شد، و یا پس از آنکه تعداد تکرارها به بیشینه مشخص شده رسید متوقف می‌شود؛ فرقی نمی‌کند کدام زودتر رخ دهد. در تکنیک نیمسازی ساده، گزینهٔ تعداد تکرارها به فاصله $x_r - x_l$ اولیه و به دقت مورد نیاز بستگی دارد. هر تکرار، گستره را به دو نیم می‌کند. با توجه به اینکه $10^2 \approx 10^{24} = 2^{10}$ ، باید ۱۰ بار تکرار سه رقم معنی‌دار و ۲۰ بار تکرار ۶ رقم معنی‌دار به مکان ریشه بیفزاید.

مسائل

پ۱-۱ فرض کنید: $f(x) = x - ax^2$ برای روش نیوتون چقدر باید کوچک باشد تا به $x = 0$ همگرا شود؟

پ۱-۲ برای تعیین موضع یک ریشه از توابع زیر از روش نیوتون (RTNI) یا برنامه‌ای که خودتان می‌نویسید بهره‌گیری:

$$\text{(الف)} \quad f(x) = x^2 + 1, \quad x_0 = 1, 0, 9$$

$$\text{(ب)} \quad f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}, \quad x_0 = 1, 0, 9$$

$$\text{(ج)} \quad f(x) = \sin x, \quad x_0 = 1, 2, 1, 1, 0$$

$$\text{(د)} \quad f(x) = \tanh x, \quad x_0 = 1, 1, 0, 9$$

RTNI مستلزم آن است که زیربرنامه‌ای برای تأمین $f(x)$ و مشتق آن بنویسید. برنامه را طوری بنویسید که هر بار این زیربرنامه فراخوانده شود، x و $f(x)$ نوشته شود، به طوری که بتوانید رد دنباله پرونیاییها را بگیرید.

پ۱-۳ به عنوان مثالی از آنچه که روش نیوتون می‌تواند انجام دهد، RTNI را برای یافتن بزرگترین ریشه چندجمله‌ای چبیشف، $T_{10}(x)$ ، فراخوانید. رشته‌ای از مقادیر اولیه: $0.98, 0.97, 0.96, 0.95, x =$ را بیازمایید. آنچه را که روی می‌دهد به تفصیل شرح دهید. یادآوری: RTNI به زیربرنامه‌ای نیاز دارد که تابع $(T_{10}(x))$ و مشتق آن را تأمین کند. زیربرنامه CNP در SSP، $T_{10}(x)$ و T های با شاخصهای پایینتر را فراهم می‌آورد. $T_{10}(x)$ را می‌توان از معادله $13-77$ ($x \neq \pm 1$) محاسبه کرد.
جواب: $0.98769 =$ ریشه بیشینه.

پ۱-۴ زیربرنامه‌ای برای تعیین ریشه به روش ساده‌نیمساز بنویسید که پس از آنکه دو نقطه در دو سوی یک ریشه ساده حقیقی برگزیدید، آن را تعیین کند. زیربرنامه‌ای را که نوشته‌اید، با تعیین ریشه‌های یک یا چند تا از چندجمله‌ایها یا توابع غیر جبری مقدماتی، بیازمایید.

پ۱-۵ نظریه نوسانهای شعاعی آزاد زمین همگن به معادله زیر می‌انجامد

$$\tan x = \frac{x}{1 - a^2 x^2}$$

پارامتر a به سرعت امواج اولیه و ثانویه وابسته است. سه ریشه اول مثبت این معادله را به ازای $a = 1^\circ$ بیابید.

جواب: $x_1 = 2.7437, x_2 = 6.1168, x_3 = 9.3166$

پ۱-۶ (الف) با استفاده از تابع بسل $J_0(x)$ ، که توسط زیربرنامه BESJ در SSP تولید می‌شود، موضع ریشه‌های متوالی $J_0(x)$ ، یعنی α_n و α_{n+1} را به ازای $n = 5, 10, 15, \dots, 30$ تعیین کنید. $\alpha_n, \alpha_{n+1}, (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ و $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)/\pi$ را در جدولی درج کنید. توجه کنید که کسر آخری چگونه به یک نزدیک می‌شود.

[راهنمایی: پس از آنکه دو نقطه در دو سوی ریشه یافتید، RTMI آن را با دقت تعیین کنید.]
(ب) مقادیری را که برای α_n یافته‌اید، با مقادیری که به کمک بسط مک‌ماهون در AMS-55، معادله 9-5-12، به دست می‌آید، مقایسه کنید.

مراجع

از نظر احاطه مؤلف بر محاسبه عددی و توانایی او در مخاطب قرار دادن خواننده با توانایی متوسط، هیچ کتابی برتر از این کتاب یافت نمی‌شود.

پیوست ۲

کوادراتور گاوسی

فرمولهای درونیاب

مسئله عبارت است از یافتن مقدار عددی یک انتگرال معین

$$I = \int_a^b f(x)w(x)dx$$

این انتگرال را به کمک مجموعیابی متناهی زیر تقریب می‌زنیم

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (\text{پ} ۱-۲)$$

مجموعیابی معادله پ ۱-۲ حاوی $2n + 1$ پارامتر زیر است

n نقطه x_k برای تعیین $f(x)$

n ضریب A_k

۱، گزینه برای خود n

در ادامه $f(x)$ را با یک چندجمله‌ای درونیاب $P(x)$ از درجه $n-1$ و یک جمله باقیمانده:

$$f(x) = P(x) + r(x) \quad (۲-۲)$$

تعویض می‌کنیم. در $n x_k [P(x_k) = f(x_k)]$ تابع $P(x)$ را به $f(x)$ برازش می‌دهیم؛ انتخاب به این شرح است

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)} f(x_k) \quad (۳-۲)$$

که در آن $\alpha(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n کاملاً تجزیه شده به صورت زیر است

$$\alpha(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \quad (۴-۲)$$

دقت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)} = 1 \quad (۵-۲)$$

اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه $n-1$ m نام باشد، باقیمانده $r(x)$ صفر است و معادله ۳-۲ به یک اتحاد تبدیل می‌شود. در حالت خاص (با استفاده از معادله ۵-۲) داریم: $P(x_k) = f(x_k)$. چندجمله‌ای درجه $(n-1)$ m در n نقطه x_k به $f(x)$ برازش شده است. اگر انتگرال جمله باقیمانده کوچک باشد، با استفاده از معادله ۳-۲، داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x)dx &\approx \int_a^b P(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)} w(x)dx \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری و مجموع‌یابی خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_n^b \frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)} w(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (\text{پ} ۷-۲)$$

این نوع فرمولهای کوادراتوری را درونیاب می‌نامند. از آنجا که هر چندجمله‌ای $f(x)$ درجه $n-1$ را می‌توان دقیقاً $[r(x) = 0]$ توسط چندجمله‌ای درونیاب با برآزش n نقطه‌ای $P(x)$ نمایش داد، معادله پ ۷-۲ برای چنین تابعهای چندجمله‌ای، $f(x)$ ، از دقت کافی برخوردار است. موضع x_k ها، یعنی صفرهای $\alpha(x)$ در معادله پ ۷-۲ مشخص نشده است. اگر آنها را در فواصل مساوی از هم در نظر بگیریم، چند فرمول مختلف نیوتون-کوتز به دست خواهیم آورد. شاید قاعده سیمپسون [معادله پ ۸-۲] مشهورترین و در میان فرمولهای ساده‌تر، دقیقترین آنهاست

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + 4f(b-h) + f(b)\} \quad (\text{پ} ۸-۲)$$

در اینجا h فاصله بین نقاط هم‌فاصله است، $h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ ، والی آخر. معادله پ ۸-۲ را می‌توان به صورت یک جمع‌زنی یا برآزش سه‌نقطه‌ای در نظر گرفت

$$\int_c^{c+2h} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \{f(c) + 4f(c+h) + f(c+2h)\} \quad (\text{پ} ۹-۲)$$

که انتظار داریم با وجود $f(x)$ در بازه $[c, c+2h]$ از درجه کمتر یا مساوی ۲، معادله پ ۹-۲ دقیق باشد.

قاعده سیمپسون عملاً از این بهتر است. تحلیل خطا نشان می‌دهد که خطا در قاعده سیمپسون از عبارت $-h^5 f^{(3)}(\xi)/90$ به دست می‌آید، که در آن ξ نقطه‌ای است در بازه $[c, c+2h]$ $f^{(3)}(x) \cdot [c, c+2h]$ به ازای $f(x) = x^3$ برابر صفر است، و قاعده سیمپسون برای معادله‌های درجه سوم دقیق است. خواننده می‌تواند این نکته را با نشان دادن این واقعیت که $\int_c^{c+2h} x^3 dx$ دقیقاً از معادله پ ۸-۲ به دست می‌آید، اثبات کند.

این نتیجه را می‌توان پیامدی از اصول تقارنی زیر دانست: (۱) ضرایب قاعده سیمپسون نسبت به x_k میانی متقارن‌اند؛ این ضریبها برای معادله پ ۹-۲ عبارت‌اند از ۱، ۴، ۱. (۲) در قاعده سیمپسون، $n = 3$ فرد است و x^2 تابعی فرد است. اگر قرار دهیم: $c = -h$ ، آنگاه $c + h = 0$

و دو طرف معادله پ ۲-۹ به دلیل (پاد) تقارن، صفر می‌شود. این درجه دقت اضافی برای هر یک از فرمولهای نیوتون-کوتر با n فرد ظاهر می‌شود.

کوادراتور گاوسی

گاوس خاطر نشان کرد که مواضع x_k پارامترهای استفاده نشده‌ای‌اند که از آنها می‌توان برای بهبود دقت معادله پ ۲-۷ استفاده کرد، این دقت بیشتر را در صورتی می‌توان به دست آورد که صفرهای $\alpha(x)$ در فاصله‌های مساوی از یکدیگر واقع نباشند، بلکه به صورت زیر انتخاب شوند.

x_k را طوری انتخاب می‌کنیم که چندجمله‌ای درجه m کاملاً تجزیه شده $\alpha(x)$ ، چندجمله‌ای درجه m می‌باشد که بر همه چندجمله‌ایهای از درجه‌های پایینتر در بازه $[a, b]$ نسبت به عامل وزن دهنده $w(x)$ متعامد باشد. ترکیبهایی از بازه و عامل وزنی که از همه متداولترند، آنهایی‌اند که در جدول ۹-۳ درج شده‌اند.^۱ بنابراین x_k ها عبارت‌اند از n صفر چندجمله‌ایهای درجه m لژاندر، هرمیت، لاگر، چیشف، و جز اینها: x_k ها و ضریبهای A_k متناظر در فصل ۲۵، ۵۵ - AMS جدولندی شده‌اند. زیر برنامه‌های محاسباتی نیز برای حالت‌های لژاندر، لاگر، و هرمیت، هم در دقت یگانه و هم در دقت مضاعف، وجود دارد.

ثابت خواهیم کرد که این گزینه x_k (به صورت صفرهای چندجمله‌ایهای متعامد درجه m مناسب)، فرمول کوادراتور پ ۲-۷ را برای تابعی چون $f(x)$ که یک چندجمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی یا $2n - 1$ باشد، دقیق می‌سازد. توانایی این گزینه گاوسی در همین است. [دادن فاصله مساوی به x_k ها (نیوتون-کوتر) تنها به ازای تابعی چون $f(x)$ ، که به صورت یک چندجمله‌ای از درجه $(n - 1)$ ام یا کمتر برای n زوج و از درجه m ام یا کمتر برای n فرد باشد، دقیق است.]

اثبات لزوم و کفایت این گزینه ریشه‌های چندجمله‌ایهای متعامد به قرار زیر است. قضیه. شرط لازم و کافی برای آنکه فرمول درونیابی به شکل پ ۲-۷ برای همه چندجمله‌ایهای از درجه $2n - 1$ یا کمتر، دقیق باشد، آن است که $\alpha(x)$ نسبت به $w(x)$ روی بازه $[a, b]$ بر همه چندجمله‌ایهای از درجه $2n - 1$ یا کمتر متعامد باشد.

لزوم. فرض کنید که معادله پ ۲-۷ برای تابعی چون $f(x)$ که به صورت هر چندجمله‌ای درجه $2n - 1$ ام یا کمتر باشد، دقیق باشد. $Q_1(x)$ را یک چندجمله‌ای از درجه $2n - 1$ ام یا کمتر بگیرد. در این صورت $f(x) = \alpha(x)Q_1(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $2n - 1$ ام یا کمتر است. با یک جانشانی ساده، داریم

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b \alpha(x)Q_1(x)w(x)dx \quad (\text{پ ۲-۱۰ الف})$$

و از آنجا که معادله پ ۲-۷ را برای انتگرالده‌هایی به صورت چندجمله‌ایهایی با این درجه دقیق گرفتیم،

۱. اگر a و b متاهی باشند، بازه $[a, b]$ را همواره می‌توان از طریق تبدیل خطی $t = [2x - (a + b)] / (a - b)$ ، $x = [(b - a)t + (b + a)] / 2$ به $[-1, 1]$ تبدیل کرد. لذا، $\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt$.

$$\int_a^b \alpha(x) Q_1(x) w(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \alpha(x_k) Q_1(x_k) \quad (\text{پ} ۲-۱۰)$$

$$= 0$$

تساوی با صفر در مرحله آخر را به این دلیل داریم که در معادله پ ۲-۴: $\alpha(x_k) = 0$. یعنی این نکته بیان می‌شود که چندجمله‌ای درجه n ام ما، $w(x)$ ، بر همه چندجمله‌ایهای $Q_1(x)$ با درجه کمتر از $n - 1$ متعامد است.

کفایت. فرض کنید که $\alpha(x)$ بر همه چندجمله‌ایهای از درجه $n - 1$ یا کمتر متعامد باشد. $f(x)$ را یک چندجمله‌ای از درجه $n - 1$ یا کمتر بگیرد. با تقسیم $f(x)$ بر $\alpha(x)$ داریم

$$\frac{f(x)}{\alpha(x)} = Q_2(x) + \frac{\rho(x)}{\alpha(x)} \quad (\text{پ} ۲-۱۱)$$

یا

$$f(x) = \alpha(x) Q_2(x) + \rho(x) \quad (\text{پ} ۲-۱۲)$$

که در آن $Q_2(x)$ و $\rho(x)$ چندجمله‌ایهای از درجه $n - 1$ یا کمتر هستند. با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x) w(x) dx = \int_a^b \alpha(x) Q_2(x) w(x) dx + \int_a^b \rho(x) w(x) dx \quad (\text{پ} ۲-۱۳)$$

انتگرال اول سمت راست به دلیل تعامد مفروض صفر می‌شود. در این صورت به آن جهت که درجه $\rho(x)$ برابر $n - 1$ یا کمتر از آن است، معادله پ ۲-۷ (که درونیاب است) دقیق خواهد بود و

$$\int_a^b f(x) w(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \rho(x_k) \quad (\text{پ} ۲-۱۴)$$

با توجه به اینکه $\alpha(x_k) = 0$ ، از معادله پ ۲-۱۲ خواهیم داشت

$$\rho(x_k) = f(x_k)$$

بنابراین

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (\text{پ} ۱۵-۲)$$

دقیق است. این عبارت، همان معادله پ ۷-۲ است که برای هر چندجمله‌ای، مانند $f(x)$ ، از درجه $2n - 1$ یا کمتر دقیق است.

به‌عنوان مثالی خاص از معادله پ ۱۵-۲ حالتی را در نظر بگیرید که در آن $[a, b] = [-1, 1]$ و $w(x) = 1$. چندجمله‌ایهایی که روی این بازه و نسبت به این تابع وزنی متعامند، عبارت‌اند از چندجمله‌ایهای لژاندر در فصل ۱۲. x_k ها به‌ازای گزینه $n = 10$ ، عبارت‌اند از ده ریشه $P_{10}(x)$. مقادیرهای A_k ، در اصل، از معادله پ ۷-۲ به‌دست می‌آیند. کريلوف عبارت مناسبتری به‌دست می‌آورد.

سرانجام معادله پ ۱۵-۲، با در اختیار داشتن مقادیر عددی A_k ها و x_k ها به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx = & +0.066671344f(+0.97390652) \\ & +0.149451344f(+0.86506336) \\ & +0.21908636f(+0.67940956) \\ & +0.26926671f(+0.43339539) \\ & +0.29552422f(+0.14887433) \\ & +0.29552422f(-0.14887433) \\ & +0.26926671f(-0.43339539) \\ & +0.21908636f(-0.67940956) \\ & +0.149451344f(-0.86506336) \\ & +0.066671344f(-0.97390652) \end{aligned} \quad (\text{پ} ۱۶-۲)$$

که برای تابعی چون $f(x)$ که به‌صورت یک چندجمله‌ای از درجه ۱۹ یا کمتر باشد، (تا تعداد رقمهای فهرست‌شده) دقیق است.

فایده واقعی انتگرال‌گیری گاوسی به دو عامل بستگی دارد: (۱) دسترسی به کامپیوتر و (۲) دسترس بودن مقادیر $f(x)$ در نقاط $x = x_k$. این موضوع به‌طور کلی به آن معنی است

۱. جدولیتهایی از A_k ها و x_k ها در مرجعی که در انتهای فصل می‌آید، و در (فصل ۲۵) AMS - ۵۵ یافت می‌شوند.

که $f(x)$ را می‌توان به صورت بسته، یا تقریباً به شکلی مناسب مشخص کرد، به طوری که $f(x_k)$ را بشود به آسانی محاسبه کرد. اگر $f(x)$ به صورت مقادیر هم فاصله جدولبندی شده، داده شده باشد، شاید قاعدهٔ سیمپسون بهترین گزینه برای انتگرال‌گیری عددی باشد.

هشدار. فرض اساسی ما آن است که $f(x)$ را بتوان توسط یک چندجمله‌ای درجه $(2n-1)$ ام، که در آن n به طور معقولی کوچک باشد، به دقت نمایش داد. اگر $f(x)$ درون بازهٔ انتگرال‌گیری یک تکینگی داشته باشد، روشن است که فرض وجود یک نمایش چندجمله‌ای اعتبار ندارد. حتی اگر $f(x)$ متناهی بماند، حضور یک شیب نامتناهی بدان معناست که تقریب ما تقریب بدی است، و دقت عددی نسبتاً کم است. در مسئلهٔ پ ۲-۷ این نکات را ملاحظه می‌کنیم.

مسائل

پ ۱-۲ الف) معادلهٔ پ ۲-۵ را اثبات کنید. (ب) یا چندجمله‌ای، $P(x)$ ، از درجهٔ $n-1$ یا کمتر و مقداری از $\alpha(x)$ که توسط معادلهٔ پ ۲-۴ داده می‌شود، تحقیق کنید که

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)} P(x_k)$$

پ ۲-۲ با استفاده از یک زیر برنامهٔ گاوس-لزاندِر ده‌رقمی انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1 x^n dx \quad n = 0(1)40 \quad \text{به‌ازای}$$

مقدار محاسبه‌شدهٔ انتگرال، مقدار دقیق آن، و خطای نسبی را جدولبندی کنید. (خطای نسبی) \log را بر حسب n رسم کنید.

پ ۳-۲ با استفاده از یک زیر برنامهٔ گاوس-لاگر ده‌رقمی انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \quad n = 0(1)25 \quad \text{به‌ازای}$$

مقدار محاسبه‌شدهٔ انتگرال، مقدار دقیق آن، و خطای نسبی را جدولبندی کنید. (خطای نسبی) \log را بر حسب n ترسیم کنید.

پ ۴-۲ با استفاده از یک زیر برنامهٔ گاوس-هرمیت ده‌رقمی مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx \quad n = 0(2)22 \quad \text{به‌ازای}$$

مقدار محاسبه شده انتگرال، مقدار دقیق آن، و خطای نسبی را جدولبندی کنید. (خطای نسبی) \log را برحسب n رسم کنید.

پ ۲-۵ (الف) یک زیر برنامه گاوس-چیبشیف با دقتی مضاعف بنویسید که انتگرالهایی به صورت زیر را با استفاده از ۲۰ نقطه، یعنی ۲۰ ریشه چندجمله‌ای چیبشیف $T_{20}(x)$ ، محاسبه کند

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(1-x^2)^{1/2}} dx$$

این ریشه‌ها و ضریبهای A_k توسط استرود و سیکرست جدولبندی شده‌اند. (ب) زیر برنامه خود را با محاسبه

$$\int_{-1}^1 x^{2n}(1-x^2)^{-1/2} dx$$

به‌ازای $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ بیازمایید. مقدار محاسبه شده این انتگرال، مقدار دقیق آن، و خطای نسبی را در جدولی درج کنید. (خطای نسبی) \log را برحسب n رسم کنید. پ ۲-۶ با استفاده از کوادراتور گاوس-لژاندر انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

برای به‌دست آوردن نتیجه‌ای که تا ۵ رقم معنی‌دار دقیق باشد، به چند نقطه ارزیابی نیاز دارید؟ برای ۱۲ رقم با معنی به چند نقطه نیاز دارید؟

جواب: ۵ رقم با معنی \Rightarrow کوادراتور گاوس-لاگر چهار نقطه‌ای.

۱۲ رقم با معنی \Rightarrow دوازده نقطه.

پ ۲-۷ ثابت اویلر-ماشرونی، γ ، را می‌توانیم با استفاده از مسئله ۱۰-۲-۱۱ به صورت زیر بنویسیم

$$\gamma = - \int_0^{\infty} \ln r e^{-r} dr \quad .1$$

$$\gamma = 1 - \int_0^{\infty} r \ln r e^{-r} dr \quad .2$$

[۳ رقم معنی‌دار \Rightarrow ۳۲ نقطه]

$$\gamma = 1 - \int_0^{\infty} r^2 \ln r e^{-r} dr \quad .3$$

(الف) توضیح دهید که چرا برای انتگرال اول، کوادراتور گاوس-لاگر را نباید به کار برد. (ب) عبارتهای (۲) و (۳) را با به کار بردن کوادراتور گاوس-لاگر ۳۲ رقمی محاسبه کنید و توضیح دهید که چرا دقت نتایج بسیار محدود است.

پ ۲-۸ (الف) انتگرال زیر را با استفاده از فرمولهای کوادراتور گاوس-هرمیت به ازای چندین مقدار n (تعداد نقطه‌های ارزیابی) برآورد کنید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{1 + |x|}$$

(ب) این انتگرال را به صورت زیر بازنویسی کنید

$$I = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2+x}}{1+x} e^{-x} dx$$

و آن را توسط کوادراتور گاوس-لاگر، به ازای چندین مقدار n محاسبه کنید.
جواب : (ب) ۲۱۰۳٫۱

مراجع

Davis P J and P Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*. Orlando: Academic Press (1975).

Krylov V I (ترجمه توسط استرود)، *Approximate Calculation of Integrals*, New York: Macmillan (1962).

این کتاب بسیار واضح نوشته شده است، و عملاً همه جنبه‌های محاسبه تقریبی انتگرالها را دربر می‌گیرد و مبحث بسیار خوبی است برای کوادراتور گاوسی و سایر کوادراتورهای عددی. جدولهایی از نقاط ارزیابی و عاملهای وزندار نیز در این کتاب یافت می‌شود.

Stroud A H, *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematics Series, Vol 10, New, York; Springer-Verlag (1974).

این کتاب به عنوان یک بحث عالی درباره کوادراتور گاوسی و سایر کوادراتورهای عددی، حاوی جدولهایی از نقطه‌های ارزیابی و عاملهای وزندار نیز هست.

Stroud A H and D Secrest, *Gaussian Quadrature Formulas*, Englewood, N J Prentice-Hall, (1966).

کتابی است با ارزش عمدتاً به این دلیل که حاوی جدولهای گسترده‌ای از x_k ها و A_k ها برای انواع بازه‌ها و عاملهای وزندار است.

مراجع کلی

1. E T Whittaker and G N Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed, Cambridge: Cambridge University Press (1962).
این کتاب گرچه قدیمترین مرجع است (ویرایش اصلی به سال ۱۹۰۲ برمی‌گردد) ولی هنوز هم مرجعی کلاسیک به‌شمار می‌آید. در این کتاب نیز مانند ویرایش ۱۹۰۲ آن تکیه بر ریاضیات محض و دقت کامل ریاضی است.
 2. P M Morse and H Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Vol 2, New York: McGraw-Hill, Book Company, (1953).
در این کتاب ریاضیات مربوط به بخش اعظم فیزیک نظری به‌گونه‌ای مشروح ولی در سطحی نسبتاً پیشرفته ارائه شده است. این کتاب، منبع اطلاعات برجسته‌ای برای مطالعه تکمیلی و بررسیهای پیشرفته به‌شمار می‌آید.
 3. H S Jeffreys and B S Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3 rd ed, Cambridge, England: Cambridge University Press (1956).
این کتاب به بررسی پژوهشگرانه گسترده وسیعی از تحلیل ریاضی می‌پردازد، و در آن توجه قابل ملاحظه‌ای به دقت ریاضی می‌شود. کاربردهای عنوان شده بیشتر به فیزیک کلاسیک و ژئوفیزیک مربوط می‌شود.
 4. R Courant and D Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol I, New York, Wiley (Interscience) (1953). (نخستین ویرایش انگلیسی)
این کتاب، به‌عنوان یک مرجع، برای فیزیک ریاضی، خصوصاً به‌خاطر قضیه‌های وجود و مباحث مربوط به زمینه‌هایی مانند مسائل ویژه‌مقداری، معادله‌های انتگرالی، و حساب وردشها بسیار باارزش است.
 5. F W Byron, Jr and R W Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Reading, Mass: Addison-Wesley (1969).
کتاب درسی پیشرفته‌ای است که اطلاعات متوسطی از ریاضی فیزیک را دانسته فرض می‌کند.
 6. C M Bender and S A Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, New York: McGraw-Hill (1978).
 7. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series, 55 (AMS-55), National Bureau of Standards, U S Department Commerce (1964).
این کتاب، همان‌گونه که از عنوانش پیداست، بسیار بفرنج است، اما مرجع فوق‌العاده سودمندی است.
- مراجع تخصصی‌تر دیگری نیز در انتهای هر فصل آمده است.

فهرست راهنما

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>~ ریمان ۵۰۰</p> <p>~ سینوسی سری مجانبی ۴۶۸، ۴۶۹</p> <p>~ فرنل ۵۷۱</p> <p>~ کسینوسی سری مجانبی ۴۶۸، ۴۶۹</p> <p>~ گیری برداری ۷۰-۷۹</p> <p>~ در انتگرالهای حجمی ۷۴</p> <p>بازآرایی سریهای دوگانه ۴۰۵-۴۰۸</p> <p style="padding-left: 2em;">بردار(های)</p> <p>~ قطبی ۱۷۴</p> <p>~ متعامد ۲۱</p> <p>~ یکه ۱۳۱</p> <p>~ در استوانه‌ای دوار ۱۳۱</p> <p>~ در مختصات دکارتی ۹، ۱۰</p> <p>~ در مختصات قطبی کروی ۱۴۱</p> <p style="text-align: right;">بسط</p> <p>~ تایلور ۵۹، ۶۰، ۴۱۴-۴۲۸، ۵۱۵-۵۱۶</p> <p>~ با بیش از یک متغیر ۴۲۱، ۴۲۲</p> <p>~ سری تابع بتای ناکامل ۴۳۶، ۴۶۴-۴۶۸</p> <p>~ لوران ۴۱۹، ۴۲۲-۴۸۱</p> <p>بهبودی همگرایی، تقریبهای گویا ۳۹۷، ۳۹۸، ۴۰۴، ۴۵۸</p> | <p>آزمون کوشی همگرا ۳۸۳-۳۸۵</p> <p>اتحاد</p> <p>~ اویلر ۴۸۰</p> <p>~ زاکوبی ۲۵۱</p> <p>ادامه تحلیلی ۵۱۸-۵۲۰</p> <p>تابع مسیر برگشت ~ ۵۶۱، ۵۶۲</p> <p>ادغام تانسورها ۱۶۹</p> <p>اسپین یاؤلی ۲۵۲، ۲۸۷، ۲۸۸</p> <p>اسپینورها ۱۶۷، ۱۶۸، ۲۹۱، ۲۹۲</p> <p>اسکالر</p> <p>شبه ~ ۱۷۸</p> <p>ضرب ~ ۱۹-۲۶</p> <p>ضرب سه‌گانه ~ ۳۶-۳۹</p> <p>اصل انعکاس شوارتز ۵۱۶-۵۱۸</p> <p>اعداد برنولی ۴۴۸-۴۵۹</p> <p>انتگرال</p> <p>~ برامویچ ۵۷۲</p> <p>~ بیضوی ۴۴۰-۴۴۸</p> <p>~ نوع اول ۴۴۱</p> <p>~ نوع دوم ۴۴۱-۴۴۲</p> <p>~ یربندی ۵۰۰، ۵۰۱</p> <p>~ در انتگرالهای خطی ۷۱</p> <p>~ در انتگرالهای سطحی ۷۳</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- پارادوکس اولیروز ۳۹۷
 پارامترهای کابلی-کلاین ۳۴۵، ۱۵
 یاریته ۱۴۶
 خاصیت قطبی کروی ~ ۱۴۶
 پاشندگی ایتیکی ۵۷۸-۵۷۷
 پتانسیل
 ~ اسکالر ۱۰۸، ۸۷
 ~ برداری ۴۴۶، ۱۵۰، ۱۴۹، ۹۳، ۶۴
 ~ کار ۹۰، ۸۹
 پراش کیرشهوف ۱۹۰
 تابع
 ~ بتای ناکامل ۴۳۶، ۳۹۸
 ~ برنولی ۴۵۲
 ~ بسل کروی در قضیه جمع ۳۵۶، ۳۵۵
 ~ پلهای ۵۶۶
 ~ تحلیلی ۴۹۷
 ~ و فرمول انتگرال کوشی ۵۱۵-۵۰۸
 ~ خطای گاوس ۴۷۲
 بسط مجانبی ~ ۴۷۲
 ~ دلتای دیراک ۱۱۰
 ~ زتای ریمان ۴۵۶، ۴۵۵، ۳۹۴، ۳۸۷
 مقادیر صحیح ~ ۴۵۵
 ~ فاکتوریل ۵۹۰، ۵۸۸
 ~ از طریق سری استرلینگ ۴۰۲، ۳۹۸
 رابطه بازگشتی حاصلضرب نامتناهی ~
 ۴۷۹، ۴۷۸
 روش تندترین کاهش ~ ۵۹۱، ۵۹۰
 مسیر برگشت حساب مانده‌های تابع
 پربندی ~ ۵۷۰، ۵۶۹، ۵۶۲، ۵۶۱
 ~ کروی بسل ۱۹۰
 ~ گاما ۵۸۹
 ~ گرین پتانسیل اسکالر ۱۵۲
 ~ لژاندر در توابع همبسته ۱۴۵، ۱۴۴
 ~ مولد ۴۴۸
 ~ اعداد برنولی ۴۴۸
 ~ بسل ۵۶۶
 ~ چیشف ۵۶۷
 ~ لاگر ۵۶۷
 ~ لژاندر ۵۶۶
 تانسور ۱۶۴
 ~ آمیخته ۱۶۴
 ~ پادوردا ۱۶۴
 ~ تحویل‌ناپذیر ۱۸۳، ۱۸۲
 ~ دوگان ۲۱۳، ۲۱۲، ۱۸۰
 ~ خمش ریمان-کریستوفل ۱۶۹
 ~ کروی ۱۸۴، ۱۸۳
 ~ هموردا ۱۶۴
 تاو
 تانسور ~ ۲۲۵
 تعریف انتگرالی ~ ۷۵
 ~ در استوانه‌ای دوار مختصات دکارتی
 ۱۳۳، ۱۳۲
 ~ غیرچرخشی ۲۰۳، ۹۱، ۹۰، ۶۶، ۶۰
 مختصات دکارتی خمیده خط ~ ۱۲۵،
 ۱۲۶
 مؤلفه‌های دکارتی ~ ۶۷-۵۷
 مختصات قطبی کروی ~ ۱۴۳، ۱۴۲
 تبدیل ۱۰۰
 ~ پیمانه‌ای ۲۱۶، ۱۰۰
 ~ لورنتس ۳۷۲-۳۰۵، ۲۰۳
 ~ هیلبرت ۵۷۶
 تحلیل اعدادی
 ~ بسط مجانبی تابع خطای گاوس ۴۷۲
 ~ در ماهیت سری مجانبی ۴۷۱-۴۶۴
 ~ سری مجانبی انتگرال کسینوسی و
 سینوسی ۴۶۹، ۴۶۸
 ~ سری مجانبی فرمول استرلینگ ۴۷۱
 ~ و قضیه انتگرال کوشی ۵۱۱-۵۰۰
 تحلیل برداری ۱۱۴-۴

- ~ اسکالر (زنده‌ای) ۲۲،۴
 ~ بهنجار ۲۱
 ~ یادوردا ۱۶۳
 ~ تعریف بردار در ~ ۱۹-۱۲،۴
 ~ چرخش مختصات ۲۶، ۱۳، ۲۶۴، ۲۶۵
 ~ سه شبکه وارون ۲۸، ۴۴، ۴۵، ۲۸۲، ۳۸۳
 ~ قانون تبدیل ۱۵، ۱۶۳، ۲۶۵، ۲۶۶
 ~ قانون مثلثی جمع ۵
 ~ متعامد ۲۱
 ~ مؤلفه‌های ~ ۹
 تحلیل تانسوری ۱۶۲
 ~ بردار هموردا ۱۶۲، ۱۶۴
 ~ تعریف تانسورهای مرتبه دو ~ ۱۶۴
 ~ تقارن-پادتقارن ۱۶۷
 ~ در تانسورهای دکارتی ۲۱۴-۲۲۶
 ~ عملگرهای دیفرانسیلی ۲۲۳
 ~ قانون تبدیل تانسور ۱۶۴، ۱۶۵
 ~ کمیت عددی یا اسکالر ۱۶۲
 ~ همسانگرد ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۸۴، ۱۸۵
 ترمودینامیک-دیفرانسیل کامل ۹۳
 ~ تعریف
 ~ اسکالر ۱، ۱۴، ۱۵، ۲۲، ۱۶۲، ۱۶۳
 ~ سری مجانبی ۴۷۰
 تقارن ۵۷۶
 ~ تانسور ۱۶۷
 ~ دو تایی ۱۸۷
 ~ ماتریسها ۲۷۵
 نظریه پاشندگی ~ ۵۷۶، ۵۷۷
 تکینگی ۵۴۰-۵۴۶
 ~ اساسی ۵۴۱، ۵۴۵، ۵۴۶
 ~ سری لوران ۵۴۰، ۵۴۱
 ~ قطبی ۵۴۰، ۵۴۱
 محاسبه انتگرال ~ ۵۵۶-۵۶۰
 ~ نقطه‌های شاخه ۵۴۲، ۵۴۳
 تنش و کرنش تانسورها ۱۴۰-۱۹۷
 ثابت
 ~ اولر-ماشرونی ۳۸۸، ۳۹۶، ۴۶۳، ۴۷۳
 ~ کاتلان ۳۹۹، ۴۳۹، ۴۵۸
 ~ لامه ۱۹۹
 ~ مادلونگ ۴۰۷
 جایگشت دوری شاخصها ۲۸۸-۲۹۱
 جداسازی متغیرها ۱۵۱-۱۵۹
 ~ در معادله‌های دیفرانسیل ۱۵۲-۱۵۹
 جواب سری معادلات دیفرانسیل ۳۹۸
 ~ در رابطه بازگشتی جواب سری تابع
 فراکروی ۳۹۸
 ~ در سری معادله چیشف ۳۹۸
 گستره همگرایی سری فوق هندسی ۳۹۶
 چرخش
 ~ بردار ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷
 ~ توابع ۳۵۹، ۳۶۰
 ~ مختصات ۱۳-۱۸، ۱۶۲، ۱۶۳،
 ۱۶۴-۳۵۹، ۲۶۲-۲۷۶، ۳۵۶-۳۵۹
 ~ و تکانه زاویه‌ای ۳۵۵-۳۶۴
 چندجمله‌ای دورنیایی ۲۶۱
 حاصلضربهای نامتناهی ۴۷۴-۴۸۰
 ~ تابع گاما ۴۷۶-۴۷۷
 ~ رابطه بازگشتی گستره ۴۷۸
 ~ سینوسی ۴۷۶-۴۷۷
 ~ کسینوسی ۴۷۶-۴۷۷
 همگرایی ~ ۴۷۵
 حاصلضرب هادامارد ۲۸۰
 حرکت تقدیمی توماس ۳۷۴
 حساب مانده‌ها(ی) ۵۴۰-۵۷۳

- قضیه مانده ~ ۵۴۶-۵۴۷
 ~ لم جوردن ۵۵۶
 مقدار اصلی کوشی ~ ۵۴۸-۵۵۴
 حلقه جریان میدان مغناطیسی ۴۴۶-۴۴۷
 حل معادلات دیفرانسیل در چندجمله‌ایهای لژاندر ۴۰۷
 خطای انتگرال بسطهای مجانبی ۴۷۲
 دالامبری ۱۷۲، ۲۰۶
 درمینانها(ی) ۲۲۸-۲۳۹
 بسط لاپلاس برحسب کهادها در ~ ۲۳۰
 پادتقارن ~ ۲۳۱
 جواب مجموعه‌ای از معادلات ناهمگن ~ ۲۳۳
 جواب معادلات همگن ~ ۲۳۲، ۳۰۲
 ~ در روش حذف گاوس-جوردن ۲۳۶، ۲۳۷
 ~ ماتریس هیلبرت ۲۳۸، ۳۱۸
 ~ معادله سدهای ۳۰۱
 نمایش ضرب برداری ~ ۲۹، ۳۰، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۳۲، ۱۴۲
 دل (∇) ۴۶
 کاربرد ~ متوالی ۶۵-۷۰
 دلتای کرونکر ۱۷
 ~ تانسور مرتبه دوم آمیخته ۱۶۶، ۱۶۷
 دوتایی‌ها(ی) ۱۸۶-۱۹۰
 ~ مقارن ۱۸۷
 دوقطبی الکتریکی ۲۶، ۶۴
 انرژی برهم‌کنش ~ ۲۶
 تابش میدانهای ~ ۱۵۰
 دوقطبی مغناطیسی ۲۶، ۶۴، ۶۵، ۱۴۹، ۱۵۰
 دیورژانس
 تانسور ~ ۲۲۳
 تعریف انتگرالی ~ ۷۵
 ~ در استوانه‌ای دوار ۱۳۲، ۱۳۳
 ~ در مختصات قطبی کروی ۱۴۲، ۱۴۳
 ~ سیمولوله‌ای ۵۶، ۶۷، ۱۰۶، ۱۰۷، ۲۰۳
 مختصات خمیده خط ~ ۱۲۲
 مؤلفه‌های دکارتی ~ ۵۲-۶۱
 ذره مکانیک کوانتومی در جعبه مکعب مستطیلی ۱۵۹
 رابطه
 ~ پارسوال ۵۷۸، ۵۷۹
 ~ پاشندگی کروینیک و کرامرز ۵۷۳-۵۷۷
 ~ لورنتس ۲۰۵
 روش تندترین کاهش ۵۸۲-۵۹۱
 تابع تعدیل یافته ~ ۵۹۲
 تابع فاکتوریل ~ ۵۸۸، ۵۹۰
 توابع هنکل ~ ۵۸۷، ۵۸۸
 زاویه‌های اویلر ۱۵، ۲۷۱-۲۷۴، ۲۷۹
 ۳۴۷-۳۵۳
 زیرگروهها و مجموعه‌ها ۳۳۰
 زاکوبی ۵۱، ۱۲۲
 سریهای استرلینگ ۵۹۰، ۵۹۲
 سری توانی ۴۲۹-۴۴۸
 قضیه یکتایی ~ ۴۳۰-۴۳۱، ۴۳۷، ۴۳۸
 مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ~ ۴۳۰-۴۳۱
 ~ نزولی یکتا ۴۳۷
 وارونی ~ ۴۳۲
 سری جواب معادلات دیفرانسیل ۳۹۳
 تابع لژاندر ~ در آهنگ همگرایی ۳۹۳
 سری فوریه در همگرایی یکنواخت ۴۱۳
 سری مجانبی ۴۴۴-۴۷۱

~ مطلق ۴۰۱
 ~ یکنواخت ۴۰۹
 سیستمهای با شرایط نامطلوب ۳۱۸
 شبهاسکالرها ۱۷۸
 شبهبردارها ۱۷۸
 شبهتانسورها ۱۸۵-۱۷۴
 تعریف ~ ۱۷۸
 شرط
 ~ تعامد ۲۶۹، ۲۶۶، ۱۱
 ~ ضربدری ۵۷۶
 ~ کوشی-ریمان ۴۹۵-۴۹۴
 جریان سیال ~ ۶۴، ۵۰۰
 مختصات قطبی ~ ۴۹۹
 معادله لاپلاس ۴۹۸
 شناسه مشتق نگاشت همدیس ۵۳۶-۵۳۷
 صورت مجانبی توابع هنکل ۵۸۷، ۵۸۸
 ضرب
 ~ اسکالریا نقطه‌ای ۱۹-۲۶
 ~ برداری ۲۶-۳۰
 ~ سه‌گانه اسکالر ۳۶-۳۹
 ~ سه‌گانه برداری ۳۹-۴۱
 ~ در قاعده BAC-CAB ۳۶، ۶۱، ۶۳، ۶۲
 ~ مستقیم ۱۶۹
 ~ تانسورها ۱۶۹
 ~ ماتریسها ۲۴۳
 علیت ۵۷۹، ۵۸۰
 عملگر
 ~ تکانه زاویه‌ای ۵۷، ۶۲، ۶۳، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹
 ~ در یادتقارن دترمینان ۲۳۱

انتگرالهای کسینوسی و سینوسی ~ ۴۶۸
 تابع گامای کامل ~ ۴۶۵
 روش تندترین کاهش ~ ۵۸۷-۵۸۹
 کاربردهای مربوط به محاسبه ~ ۴۷۱، ۴۷۲
 ماهیت ~ ۴۶۴-۴۷۱
 ~ یا نیم‌همگرا ۴۶۴-۴۶۸
 سری مکلورن ۵۴
 سری نامتناهی ۳۷۹-۴۸۱
 آزمون مقایسه ~ ۳۸۳
 ~ آزمونهای همگرایی ۳۸۳-۴۰۰
 ~ آبل ۴۱۲-۴۱۳
 ~ انتگرال کوشی ۳۸۷
 ~ انتگرال مکلورن ۳۸۶، ۳۸۷
 ~ دالامبر ۳۸۵
 ~ رابه ۳۹۰، ۳۹۱
 ~ ریشه کوشی ۳۸۴
 ~ کوفر ۳۸۸
 ~ گاوس ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۶
 ~ نسبت کوشی ۳۸۵
 ~ وایراشترزاس ۴۱۰-۴۱۲
 بازآرایی سریهای دوگانه ~ ۴۰۵، ۴۰۶
 سری توابع در ~ ۴۰۸-۴۱۴
 سری توانی در ~ ۴۲۹-۴۴۸
 سری متناوب در ~ ۴۰۰-۴۰۱
 سری همساز در ~ ۳۸۱
 سری هندسی در ~ ۳۸۰
 قضیه ریمان ~ ۴۰۴
 مجموع جزئی ~ ۳۷۸، ۴۶۶
 محک لایب‌نیتس ~ ۴۰۰
 ~ معیار کوشی ۳۷۹
 مقایسه ~ ۳۸۳
 همگرایی ~ ۳۹۳
 افزایش سرعت ~ ۳۹۳، ۴۵۸
 ~ مشروط ۴۰۱

- ~ خطی ۱۵۳، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۶، ۲۵۷
 عملگر دیفرانسیلی ~ ۱۵۳، ۱۵۴
 دل (∇) ۴۶، ۴۷
 ~ دیفرانسیل خطی ۱۵۳، ۱۵۴
 ~ نزدیکی ۲۵۵
 فرمول
 ~ انتگرال کوشی ۵۰۸-۵۱۵
 توابع مختلط مشتق‌های ~ ۵۱۰-۵۱۱
 شالوده حساب ~ ۵۱۲
 ~ انتگرال اولبر-مکلورن ۴۵۳-۴۵۵
 ~ دومآور ۴۸۷-۴۸۹
 ~ لایب‌نیتس برای π ۴۳۵
 ~ نیوتون برای یافتن ریشه ۴۲۳
 ~ والیس ۴۷۸
 ~ برای π ۴۷۸
 فضا(ی)
 ~ برداری ۱۸
 ~ مینوکوفسکی ۱۸۲، ۱۸۳، ۲۰۶، ۳۷۰
 ~ هیلبرت ۱۹، ۲۰
 قاعده
 ~ بک‌بک ۶۷
 ~ خارج قسمت ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۸۳
 ~ هویتال ۴۲۳
 قانون
 ~ بیوساوار ۴۵
 ~ جمع سرعت‌های اینشتین ۲۱۳، ۳۷۵
 ~ گاوس ۱۰۱-۱۰۵
 ~ برای حالت دوبعدی ۱۰۵
 ~ هابل ۱۲
 قرارداد جمع ۱۶۶، ۱۷۰، ۱۷۱
 قضیه(ع)
 ~ استوکس ۸۳-۸۷، ۱۲۵
 اثبات به کمک ~ ۵۰۲-۵۰۵
 ~ انتگرال کوشی ۵۰۰-۵۰۱
 ~ اثبات کشی-گورسا ۵۰۴-۵۰۵
 ~ بسط هویساد ۵۴۴، ۵۴۵
 ~ تیج مارش ۵۸۰
 ~ جمع لزاندر ۳۵۵
 نظریه گروه در ~ ۳۵۵
 هماهنگ‌های کروی ~ ۳۵۵
 ~ دو جمله‌ای ۴۱۸
 ~ فاکتورگیری ویراشتراوس ۴۷۷
 ~ گاوس ۷۸-۸۳، ۹۷، ۱۲۲
 ~ برای دوتاییها ۱۸۹
 ~ گرین ۷۹، ۱۰۵، ۱۰۶
 ~ لیوویل ۵۱۴، ۵۴۴
 ~ مکلورن ۴۱۶-۴۱۷
 ~ مورآ ۵۱۱
 ~ هلمهولتز ۱۰۶-۱۱۴
 کسینوسهای هادی ۹، ۲۶۳
 تعریف ~ ۳۱
 شرط تعامد در ~ ۱۶، ۱۷، ۲۶۳، ۲۶۶
 کنسسان(ی) ۱۹۰-۲۰۳
 تقارن مکعبی ~ ۲۰۲
 تنش ~ ۱۹۰، ۱۹۱
 جسم ~ همسانگرد ۲۰۲
 ~ در قانون هوگ ۱۹۷، ۲۰۰
 کرنش ~ ۱۹۱
 کمیت اسکالر ۱، ۱۴، ۱۵، ۲۲، ۱۶۲، ۱۶۳
 کواترنیونها ۱۵، ۲۹، ۲۴۹، ۲۵۰
 گرادیان
 تعریف انتگرالی ~ ۷۵
 ~ در استخراج نیروی پتانسیل ۸۷-۹۳
 ~ در استوانه‌های دوار ۱۳۲، ۱۳۳
 مختصات خمیده خط ~ ۱۲۲-۱۲۳
 مختصات دکارتی ~ ۴۶-۵۱

- تعریف اساسی ~ ۲۴۰
 تکانه زاویه‌ای ~ ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۷۵، ۳۷۶
 چرخش تانسور ~ ۲۷۶-۲۷۷
 چرخش زاویه‌های اوپلر ~ ۲۷۲-۲۷۴
 ~ دیراک ۲۸۸-۲۹۰
 رد ~ ۲۴۶، ۲۵۶، ۲۵۷
 روش گاوس-جردن برای وارون‌سازی ~ ۲۴۸
 ضرب ~ ۲۴۱
 ضرب مستقیم ~ ۲۴۳
 عملگرهای نزدبانی ~ ۲۵۵
 قطری کردن ~ ۲۹۶-۳۱۲
 کوآرنیونهای ~ ۲۵۲
 گشتاور لختی ~ ۲۹۶
 ~ متعامد ۲۶۲-۲۷۹
 ~ نرمال ۳۱۲-۳۱۵
 وارونی ~ ۲۴۶-۲۶۸
 ~ هرمیتی ۲۸۶، ۲۹۸
 ویژه‌مقدارهای ~ ۲۹۸
 ویژه‌مقدارهای حقیقی متعامد ~ ۲۹۸-۳۰۰
 ~ یکانی ۲۹۲، ۳۲۲، ۳۲۳
 همیوخ مختلط ~ ۲۸۶
 ~ یکانی ۲۸۶
 متریک ۱۱۹، ۱۷۳، ۲۱۰، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۸۴، ۲۸۵
 متغیر مختلط ۴۸۲-۵۳۹، ۵۴۰-۵۹۳
 ~ انتگرال پربندی ۵۰۱، ۵۰۰
 جبر مختلط در ~ ۴۸۳-۴۹۴
 ~ در حساب مانده‌ها ۵۴۰-۵۷۳
 شرایط کوشی-ریمان ~ ۴۹۴-۵۰۰
 ~ فرمول انتگرال کوشی ۵۰۸-۵۱۵
 ~ قضیه انتگرال کوشی ۵۰۰-۵۱۱
 نگاشت ~ ۵۲۵-۵۳۵

- مؤلفه‌های دکارتی ~ در مختصات قطبی
 کروی ۱۴۲، ۱۴۳
 گروه(های)
 ~ بیوسته ۳۴۲-۳۵۴
 ~ تحویل‌پذیر ۳۲۸
 ~ چهارتایی ۲۵۱، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۴
 ~ لی ۳۴۳
 ~ مولد ۳۴۳، ۳۷۲
 ~ مولدها ۳۵۵-۳۶۴
 ~ یکانی خاص (۳) SU ۳۶۵، ۳۶۶
 ~ ماتریسهای اسپین پاؤلی ۳۶۲-۳۶۵
 ~ هم‌ریختی O^+ ۳۴۷-۳۵۱
 ~ (۲) SU ۳۴۴-۳۴۷
 گشتاور لختی ۲۹۶-۲۹۸
 لاپلاس(ای)
 ~ اسکالر ۶۷، ۸۱، ۸۲
 ~ استوانه‌ای دوار ۱۳۲، ۱۳۳
 ~ مؤلفه‌های دکارتی ۶۷
 بردار ~ ۱۴۳
 ~ در مختصات قطبی کروی ۱۴۳، ۱۴۴
 لم جوردن ۵۵۶
 ماتریس(ها)(ای) ۲۳۹-۳۲۱
 ~ اسپینی پاؤلی ۲۵۲، ۲۸۷، ۲۸۸
 ~ در گروه یکانی خاص (۲) SU ۳۶۲-۳۶۵
 ~ با شرایط نامطلوب ۳۱۸
 پادتعویض‌پذیری ~ ۲۸۸-۲۹۱
 ~ پادهرمیتی ۳۰۰
 تبدیل تشابهی ~ ۲۷۵-۲۷۷
 تبدیل مؤلفه‌های ~ ۲۶۵، ۲۶۶
 ترانهاد ~ ۲۶۹

- هموردایی ~ ۲۰۳-۲۱۰
 ~ موج ۶۷
 استخراج معادلهٔ ماکسول از ~ ۶۷، ۶۸
 ~ ناویه-استوکس ۱۳۳، ۱۳۶
 ~ هلمهولتز ۱۱۶
 مکانیک کوانتومی ۵۵۷
 پراکندگی در ~ ۵۵۷-۵۶۰
 قواعد جمع در ~ ۵۸۱
 مکانیک ماتریسی ۲۸۶
 موجبر هم‌محور ۱۳۸
 میدان پتانسیل بینهایت ۴۹، ۸۷-۹۳
 ناوردهای الکترومغناطیسی ۱۲۳، ۲۱۰، ۲۱۱
 نسبت پواسون ۱۹۷، ۲۰۱
 نظریهٔ
 ~ پاشندگی ۵۷۳-۵۷۷
 ~ تبدیلهای هیلبرت ۵۷۵-۵۷۶
 روابط تقارنی ~ ۵۷۶، ۵۷۷
 شرایط ضربدری ~ ۵۷۶
 قواعد جمع ~ ۵۷۷
 ~ پتانسیل ۸۷-۱۰۱
 ~ در پتانسیل اسکالر ۸۷، ۱۰۸
 ~ در پتانسیل اسکالر گرانشی ۹۰
 ~ در پتانسیل برداری ۶۴، ۹۳، ۱۰۸
 ۱۴۹، ۱۵۰، ۲۰۴، ۲۰۵، ۴۴۶
 ~ در پتانسیل برداری الکترومغناطیسی
 ۲۰۶-۲۰۸
 ~ در پتانسیل برداری حلقهٔ جریان ۱۴۴،
 ۴۴۶
 ~ در نیروی پایستار ۸۷، ۸۸
 ~ ترابرد نوترون ۴۳۷
 ~ گروه ۳۲۵-۳۵۵
 تعریف ~ ۳۲۵
 ~ در گروههای پیوستهٔ لورنتس
 ۳۶۹-۳۷۵
 ~ و نگاشت همدیس ۵۳۶-۵۳۸
 محاسبهٔ انتگرال معین ۵۵۲، ۵۵۴
 محورهای اصلی ۲۹۸
 مختصات ۱۲۹
 ~ استوانه‌ای دوار ۱۲۹-۱۳۴
 ~ خمیده خط ۱۱۶-۱۳۲
 ~ متریک ۱۱۸
 ~ متعامد ۱۱۸
 عاملهای مقیاس ~ ۱۱۹
 عملگرهای برداری دیفرانسیلی ~
 ۱۲۲-۱۲۷
 ~ قطبی کروی ۱۳۹-۱۴۸
 ~ مایل ۲۲۱-۲۲۲، ۲۸۱-۲۸۵
 مدول یانگ ۱۹۷، ۲۰۱
 مدهای بهنجار ارتعاش ۳۱۵-۳۱۸
 مستقل خطی ۱۰
 مشتق‌گیری دکارتی ۲۱۹
 مشخصه ۳۲۹
 معادلهٔ
 ~ بسل ۱۵۶
 ~ پواسون ۱۰۴
 ~ پیوستگی ۵۵
 ~ چیشف ۳۹۸
 حل سری همگرایی ~ ۳۹۸
 ~ سدهای ۳۰۱
 ~ کروی بسل ۱۵۸
 ~ لاپلاس ۶۵، ۶۶، ۱۰۷
 ~ یکتایی برای جوابهای ۱۰۷
 ~ لژاندر ۳۹۷
 جواب همگرایی ~ ۳۹۷-۳۹۸
 ~ در معادلهٔ همبستهٔ لژاندر ۱۵۸-۱۵۹
 ~ ماکسول ۶۷
 استخراج ~ از معادلهٔ موج ۶۷، ۶۸
 بسط قانون گاوس ~ ۷۷
 تبدیل دوگانی ~ ۲۱۳

ویژه بردار(های)

~ متقارن حقیقی ۳۱۲

ماتریسهای نرمال ~ ۳۱۲-۳۱۵

ویژه مقدار(های)

~ حقیقی ۲۹۱

~ ماتریسهای نرمال ۳۱۲

~ ماتریسهای هرمیتی ۲۹۸

~ واگن ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۳، ۳۱۳

همانگهای کروی تانسوری ۱۹۰

همگرایی ۳۸۳-۳۹۵

ادامهٔ تحلیلی ~ ۵۱۸-۵۲۰

افزایش سرعت ~ ۳۹۳، ۴۰۴، ۴۵۷،

۴۵۸

~ در جواب سری معادلهٔ چیشف ۳۹۸

~ در معادلهٔ فراکروی ۳۹۸

~ سری لژاندر ۳۹۳، ۳۹۷، ۳۹۸

هموردایی لورنتسی معادلات ماکسول ۲۰۳-۲۲۲

یکتایی

~ بسط لوران ۵۲۴، ۵۲۵

~ جوابهای معادلهٔ لاپلاس ۱۰۷

~ سری توانی ۴۳۰-۴۳۱، ۴۳۷، ۴۳۸

~ سری توانی نزولی ۴۳۷

~ درگروه چهارتایی ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۳۴

~ گروه پیوستهٔ متعامد O_p^+ ۳۴۳

~ گروههای پیوستهٔ ماتریس چرخش

۳۵۱-۳۵۳

~ گروههای پیوستهٔ یکانی خاص،

$SU(2)$ ۳۴۴

~ گروههای پیوستهٔ مولد ۳۵۵-۳۶۴

~ گروههای پیوستهٔ همریختی

$O_p^+(2)$ -۳۴۷-۳۵۱

~ گروههای جایگشت ۳۴۰

~ گروههای گسسته ۳۳۲-۳۳۸

~ گروههای گسستهٔ گروههای دوجهی

۳۳۳

~ نمایش اصلی تحویل‌پذیری ۳۲۸

~ همریختی ۳۲۷، ۳۳۱، ۳۳۲

~ یکرختی ۳۲۷

نقطه‌های شاخه ۵۴۲

نگاشت همدیس ۵۳۶-۵۳۸

نماد

~ کریستوفل ۲۱۷

~ لوی-چی‌ویتا ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۲۲۹

~ یکرخت ۲۴۹، ۲۵۰، ۳۲۷، ۳۲۸

وارونی سری توانی ۴۳۷

واگنی هشت‌تایه ۳۶۷