



مرکز نشر و ترجمه

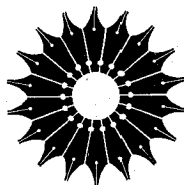
آشنایی با

اپتیک

فرانک ال. پدروتی،

لئون اس. پدروتی

ترجمه محی الدین شیخ الاسلامی



آشنایی با

اپتیک

فرانک ال. پدروتی، لنو اس. پدروتی

ترجمه محی الدین شیخ الاسلامی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



مرکز نشر دانشگاهی

Introduction to Optics

Second Edition

Frank L. Pedrotti, Leno S. Pedrotti

Prentice Hall, 1993

آشنایی با اپتیک

تألیف فرانک ال. پدروتی، لنو اس. پدروتی

ترجمه محی الدین شیخ الاسلامی

ویراسته هاله المعی
طراح جلد: بهرام کاووسی راد
حروفچین: مینا مهرابی فرد
ناظر چاپ: علی صادقی
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۲
چاپ چهارم ۱۳۸۹
تعداد ۱۰۰۰
لیتوگرافی: وسمه
چاپ و صحافی: سامان
۱۳۵۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه‌روی سینما سپیده، پاساژ خیبری، تلفن: ۶۶۴۰۸۸۹۱، ۶۶۴۱۰۶۸۶

فروش اینترنتی: www.bookiup.ir

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است
فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Pedrotti, Frank L.

پدروتی، فرانک، ۱۹۳۲- م. آشنایی با اپتیک / فرانک ال. پدروتی، لنو اس. پدروتی؛ ترجمه محی الدین شیخ الاسلامی. — [ویراست ۲] — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۲. یازده، ۸۷۵ ص.؛ مصور، جدول، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۱۲۹. فیزیک؛ ۱۰۰)

ISBN 978-964-01-1129-1

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیبا.

Introduction to optics.

عنوان اصلی:

کتابنامه.

نمایه.

چاپ چهارم: ۱۳۸۹.

۱. نورشناسی الف. پدروتی، لنو، ۱۹۲۷- م. **Pedrotti, Leno S.** ب. شیخ الاسلامی، محی الدین، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د.

عنوان.

QC ۳۵۵ / ۲ / ۴۲۵ ۵۳۵

۱۳۸۲

۱۹۴۷۲-۸۲م

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۵	۱ ماهیت نور
۱۴	۲ تولید و سنجش نور
۱۴	۱-۲ طیف الکترومغناطیسی
۱۶	۲-۲ تابش سنجی
۲۱	۳-۲ نورسنجی
۲۴	۴-۲ تابش جسم سیاه
۲۷	۵-۲ چشمه های تابش اپتیکی
۳۵	۶-۲ آشکارسازهای تابش
۴۱	مسائل
۴۴	۳ اپتیک هندسی
۴۶	۱-۳ اصل هویگنس
۵۰	۲-۳ اصل فرما
۵۲	۳-۳ اصل برگشت پذیری

۵۳	بازتاب در آینه‌های تخت	۴-۳
۵۵	شکست در سطح تخت	۵-۳
۵۸	تشکیل تصویر در دستگاه اپتیکی	۶-۳
۶۲	بازتاب در سطح کروی	۷-۳
۶۸	شکست در سطح کروی	۸-۳
۷۲	عدسیهای نازک	۹-۳
۷۹	گرابندگی و توان شکست	۱۰-۳
۸۱	معادله نیوتونی عدسی نازک	۱۱-۳
۸۲	مسائل	
۸۸	روشهای ماتریسی در اپتیک پیرامحوری	۴
۸۸	عدسی ضخیم	۱-۴
۹۳	روش ماتریسی	۲-۴
۹۴	ماتریس انتقال	۳-۴
۹۵	ماتریس شکست	۴-۴
۹۶	ماتریس بازتاب	۵-۴
۹۷	ماتریسهای عدسی ضخیم و عدسی نازک	۶-۴
۱۰۱	ماتریس تبدیل پرتو دستگاه	۷-۴
۱۰۳	معنی عناصر ماتریس دستگاه	۸-۴
۱۰۶	موقعیت نقاط بنیادی برای دستگاه اپتیکی	۹-۴
۱۱۰	چند مثال با استفاده از ماتریس دستگاه و نقاط بنیادی	۱۰-۴
۱۱۳	ردیابی پرتو	۱۱-۴
۱۱۹	مسائل	
۱۲۵	نظریهٔ ابیراهی	۵
۱۲۶	ابیراهیهای پرتوی و موجی	۱-۵
۱۲۸	بررسی مرتبهٔ سوم شکست در سطح جدایی کروی	۲-۵
۱۳۴	ابیراهی کروی	۳-۵
۱۳۸	کوما	۴-۵
۱۴۰	آستیگماتیسم و انحناى میدان	۵-۵
۱۴۴	واپیچش	۶-۵

۱۴۶	۷-۵	ابیراهی رنگی
۱۵۲		مسائل
۱۵۶	۶	ابزاربندی اپتیکی
۱۵۶	۱-۶	مانعها، مردمکها، و دریچه‌ها
۱۶۵	۲-۶	منشور
۱۷۹	۳-۶	دوربین عکاسی
۱۸۷	۴-۶	ذره‌بین و چشمی
۱۹۳	۵-۶	میکروسکوپ
۱۹۹	۶-۶	تلسکوپ
۲۰۷		مسائل
۲۱۶	۷	اپتیک چشم
۲۱۷	۱-۷	ساختار زیست‌شناختی چشم
۲۱۹	۲-۷	نمایش اپتیکی چشم
۲۲۱	۳-۷	کارهای چشم
۲۲۶	۴-۷	خطاهای شکست و تصحیح آنها
۲۳۳	۵-۷	لیزر درمانی نقایص چشم
۲۴۰		مسائل
۲۴۶	۸	معادلات موج
۲۴۶	۱-۸	معادله موج یک‌بعدی
۲۴۹	۲-۸	امواج هماهنگ
۲۵۳	۳-۸	اعداد مختلط
۲۵۵	۴-۸	امواج هماهنگ و اعداد مختلط
۲۵۶	۵-۸	امواج تخت
۲۵۸	۶-۸	امواج کروی
۲۵۹	۷-۸	امواج الکترومغناطیسی
۲۶۳	۸-۸	اثر دوپلر
۲۶۵		مسائل

۲۷۰	برهم نهش امواج	۹
۲۷۰	اصل برهم نهش	۱-۹
۲۷۲	برهم نهش امواج با بسامد یکسان	۲-۹
۲۷۷	چشمه‌های کاتوره‌ای و همدوس	۳-۹
۲۷۸	امواج ساکن	۴-۹
۲۸۰	سرعت‌های فاز و گروه	۵-۹
۲۸۵	مسائل	
۲۹۰	تداخل نور	۱۰
۲۹۰	تداخل دوباریکه‌ای	۱-۱۰
۲۹۷	آزمایش دوشکافی یانگ	۲-۱۰
۳۰۳	تداخل دوشکافی با چشمه‌های مجازی	۳-۱۰
۳۰۵	تداخل در لایه‌های دی‌الکتریک	۴-۱۰
۳۱۳	فریزهای همضخامت	۵-۱۰
۳۱۴	حلقه‌های نیوتون	۶-۱۰
۳۱۷	اندازه‌گیری ضخامت لایه با تداخل	۷-۱۰
۳۲۰	مسائل	
۳۲۵	تداخل سنجی اپتیکی	۱۱
۳۲۶	تداخل سنج مایکلسون	۱-۱۱
۳۳۱	کاربردهای تداخل سنج مایکلسون	۲-۱۱
۳۳۴	دگرگونه‌های تداخل سنج مایکلسون	۳-۱۱
۳۳۶	روابط استوکس	۴-۱۱
۳۳۷	تداخل چندباریکه‌ای در تخته موازی	۵-۱۱
۳۴۲	تداخل سنج فابری-پرو	۶-۱۱
۳۴۴	نیمرخ فریز: تابع ایری	۷-۱۱
۳۴۶	توان تفکیک	۸-۱۱
۳۵۰	گستره طیفی آزاد	۹-۱۱
۳۵۳	مسائل	

۳۵۸	۱۲	همدوسی
۳۵۹	۱-۱۲	آنالیز فوریه
۳۶۳	۲-۱۲	آنالیز فوریه قطار موج هماهنگ متناهی
۳۶۶	۳-۱۲	همدوسی زمانی و پهنای خط طبیعی
۳۶۸	۴-۱۲	همدوسی جزئی
۳۷۶	۵-۱۲	همدوسی فضایی
۳۷۸	۶-۱۲	پهنای همدوسی فضایی
۳۸۲		مسائل
۳۸۶	۱۳	هولوگرافی
۳۸۶	۱-۱۳	عکاسی معمولی و هولوگرافیک
۳۸۸	۲-۱۳	هولوگرام چشمه نقطه‌ای
۳۹۰	۳-۱۳	هولوگرام شیء گسترده
۳۹۵	۴-۱۳	ویژگیهای هولوگرام
۳۹۶	۵-۱۳	هولوگرام نور سفید
۳۹۸	۶-۱۳	کاربردهای دیگر هولوگرافی
۴۰۱		مسائل
۴۰۵	۱۴	بررسی ماتریسی قطبش
۴۰۶	۱-۱۴	نمایش ریاضی نور قطبیده: بردارهای جونز
۴۱۸	۲-۱۴	نمایش ریاضی قطبشگرها: ماتریسهای جونز
۴۲۷		مسائل
۴۳۲	۱۵	تولید نور قطبیده
۴۳۲	۱-۱۵	دوفامی: قطبش از راه جذب گزینشی
۴۳۶	۲-۱۵	قطبش از راه بازتاب از سطح دی‌الکتریک
۴۳۹	۳-۱۵	قطبش از راه پراکندگی
۴۴۲	۴-۱۵	دوشکستی: قطبش با دو ضریب شکست
۴۴۸	۵-۱۵	شکست دوگانه
۴۵۲	۶-۱۵	فعالیت نوری

۴۵۸	۷-۱۵ نورکشسانی
۴۶۰	مسائل
۴۶۷	۱۶ پراش فرانهِوفر
۴۶۹	۱-۱۶ پراش از تک شکاف
۴۷۵	۲-۱۶ پهن شدگی باریکه
۴۷۷	۳-۱۶ گشودگیهای مستطیلی و دایره‌ای
۴۸۳	۴-۱۶ تفکیک
۴۸۷	۵-۱۶ پراش شکاف دوگانه
۴۹۲	۶-۱۶ پراش از چند شکاف
۴۹۸	مسائل
۵۰۴	۱۷ توری پراش
۵۰۴	۱-۱۷ معادله توری
۵۰۷	۲-۱۷ گستره طیفی آزاد توری
۵۰۸	۳-۱۷ پاشندگی توری
۵۱۰	۴-۱۷ تفکیک توری
۵۱۲	۵-۱۷ انواع تورها
۵۱۴	۶-۱۷ توری فروزیده
۵۱۸	۷-۱۷ بدل‌های توری
۵۱۸	۸-۱۷ توری تداخلی
۵۲۰	۹-۱۷ ابزارهای توری
۵۲۴	مسائل
۵۲۸	۱۸ پراش فرنل
۵۲۹	۱-۱۸ انتگرال پراش فرنل-کیرشهوف
۵۳۲	۲-۱۸ معیار پراش فرنل
۵۳۳	۳-۱۸ ضریب تمایل
۵۳۴	۴-۱۸ پراش فرنل از گشودگی دایره‌ای
۵۳۹	۵-۱۸ انتقال فاز نور پراشیده
۵۳۹	۶-۱۸ تخته منطقه فرنل

۵۴۳	۷-۱۸	پراش فرنل از گشودگیهایی با تقارن مستطیلی
۵۴۵	۸-۱۸	چنبره کورنو
۵۵۰	۹-۱۸	کاربردهای چنبره کورنو
۵۵۷	۱۰-۱۸	اصل باینه
۵۵۹		مسائل
۵۶۳	۱۹	نظریه لایه‌های چندگانه
۵۶۵	۱-۱۹	ماتریس تبدیل
۵۷۰	۲-۱۹	بازتابندگی در فرود عمودی
۵۷۳	۳-۱۹	لایه دوگانه پادبازتاب
۵۷۷	۴-۱۹	لایه‌های سه‌گانه پادبازتاب
۵۷۹	۵-۱۹	لایه‌های پربازتابندگی
۵۸۳		مسائل
۵۸۷	۲۰	معادلات فرنل
۵۸۷	۱-۲۰	معادلات فرنل
۵۹۴	۲-۲۰	بازتابهای خارجی و داخلی
۵۹۷	۳-۲۰	تغییر فاز در بازتاب
۶۰۱	۴-۲۰	پایستگی انرژی
۶۰۴	۵-۲۰	امواج گذرا
۶۰۶	۶-۲۰	ضریب شکست مختلط
۶۰۸	۷-۲۰	بازتاب از فلزات
۶۱۰		مسائل
۶۱۴	۲۱	اصول لیزر
۶۱۵	۱-۲۱	نظریه کوانتومی تابش اینشتین
۶۲۱	۲-۲۱	عناصر اساسی لیزر
۶۲۵	۳-۲۱	توصیف ساده طرز کار لیزر
۶۳۲	۴-۲۱	مشخصات نور لیزری
۶۴۸	۵-۲۱	انواع و پارامترهای لیزر
۶۵۰		مسائل

۶۵۴	مشخصات باریکه‌های لیزری	۲۲
۶۵۵	معادله موج سه‌بعدی و امواج الکترومغناطیسی	۱-۲۲
۶۵۷	تغییر فاز امواج کروی در صفحه عرضی	۲-۲۲
۶۵۸	مبنایی برای تعریف ساختارهای مدی باریکه لیزری	۳-۲۲
۶۶۰	جواب باریکه گاوسی برای لیزرها	۴-۲۲
۶۶۵	اندازه لکه و شعاع انحنای باریکه گاوسی	۵-۲۲
۶۷۱	انتشار لیزری در دستگاه‌های اپتیکی اختیاری	۶-۲۲
۶۸۳	باریکه‌های گاوسی مرتبه بالاتر	۷-۲۲
۶۸۹	مسائل	
۶۹۵	کاربردهای لیزر	۲۳
۶۹۷	لیزرها و برهم‌کنش	۱-۲۳
۷۰۵	لیزرها و اطلاعات	۲-۲۳
۷۱۲	پیشرفتهای تازه‌تر	۳-۲۳
۷۱۵	مسائل	
۷۱۹	اپتیک تاری	۲۴
۷۱۹	کاربردها	۱-۲۴
۷۲۰	دید کلی از دستگاه مخابراتی	۲-۲۴
۷۲۳	پهنای نوار و آهنگ داده‌ها	۳-۲۴
۷۲۴	اپتیک انتشار	۴-۲۴
۷۲۷	مدهای مجاز	۵-۲۴
۷۳۰	تضعیف	۶-۲۴
۷۳۴	واپیش	۷-۲۴
۷۴۴	مسائل	
۷۵۰	اپتیک فوریه	۲۵
۷۵۱	تصویرسازی و پردازش داده‌های اپتیکی	۱-۲۵
۷۶۹	طیف‌نمایی تبدیل فوریه‌ای	۲-۲۵
۷۷۳	مسائل	

۷۷۷	۲۶ اپتیک غیرخطی و مدولاسیون نور
۷۷۸	۱-۲۶ محیط غیرخطی
۷۷۹	۲-۲۶ تولید هماهنگ دوم
۷۸۴	۳-۲۶ آمیختگی بسامد
۷۸۶	۴-۲۶ اثر پوکلز
۷۹۲	۵-۲۶ اثر کیر
۷۹۵	۶-۲۶ اثر فاراده
۷۹۸	۷-۲۶ اثر آکوستو-اپتیکی
۸۰۳	۸-۲۶ همیوگسازی فاز اپتیکی غیرخطی
۸۱۱	مسائل
۸۱۶	۲۷ خواص اپتیکی مواد
۸۱۷	۱-۲۷ قطبیدگی محیط دی الکتریک
۸۲۱	۲-۲۷ انتشار امواج نور در دی الکتریک
۸۲۷	۳-۲۷ جریان رسانش در فلز
۸۲۸	۴-۲۷ انتشار امواج نور در فلز
۸۲۹	۵-۲۷ عمق پوستی
۸۳۱	۶-۲۷ بسامد پلاسما
۸۳۳	مسائل
۸۴۰	پاسخ مسائل برگزیده
۸۶۱	نمایه

پیشگفتار

اپتیک شاید امروزه بالنده‌ترین شاخهٔ فیزیک نظری و کاربردی باشد. از دههٔ ۱۹۶۰، پیدایش و گسترش توأم لیزرها، تارهای نوری، و انواع چشمه‌ها و آشکارسازهای نیم‌رسانا باعث تجدید حیات این رشته شده‌اند. بنابراین، نیاز به کتابهای درسی روزآمد اپتیک با رهیافتها و تأکیدهای مختلف، هم برای دانشجو و هم برای آزمایشگر اپتیک که گاهگاهی به مرور میانی احتیاج پیدا می‌کند، آشکار است. هدف ما از آشنایی با اپتیک آموزش مقدمات اپتیک نوین در سطح متوسط است. این کتاب برای دانشجوی متوسط فیزیک که پیش‌نیازهای لازم را در فیزیک و ریاضیات گذرانده است نوشته شده است. از این رو، به استثنای چند فصل نهایی (۱۹، ۲۰، ۲۲، ۲۵، ۲۷) که در سطح بالاتری هستند، فرض کرده‌ایم که دانشجو از مطالب دروس فیزیک پایه و ریاضیات عمومی، در سطحی که در رشته‌های فیزیک و مهندسی لازم است، به‌خوبی آگاهی دارد. این کتاب درسی را، که حاوی مباحث مرسوم اپتیک عمومی و همچنین چند مبحث نسبتاً جدید است، می‌توان برای یک نیمسال یا یک‌سال کامل تحصیلی تنظیم کرد. البته معتقدیم که امروزه ضرورت و اهمیت اپتیک تغییری در برنامهٔ درسی برای آموزش یکسالهٔ اپتیک را ایجاد می‌کند.

برای آنهایی که با ویرایش اول این کتاب آشنا هستند شاید بیان مختصری از تغییرات عمده‌ای که در این ویرایش دوم انجام شده‌اند مفید باشد. دو فصل کاملاً جدید مربوط به مشخصات بارپکهٔ لیزری و اپتیک غیرخطی اضافه شده‌اند. فصل جدید لیزر همراه با دو فصل قدیم لیزر به اواخر کتاب انتقال یافته‌اند، و هر سه مجموعاً وظیفهٔ واحدی را به عهده دارند. علاوه بر این، فصل مربوط به اپتیک تاری را گسترش داده‌ایم و آن را بعد از فصلهای لیزر آورده‌ایم. چند بخش جدید را نیز اضافه کرده‌ایم، که عبارت‌اند از ردیابی پرتو، و عدسی نازک (فصل ۴)، اثر دوپلر (فصل ۸) و امواج گذرا (فصل ۲۰). مثالهای حل‌شده اکنون در متن کتاب کاملاً مشخص‌اند، و ۱۷۵ مسئلهٔ جدید به مسائل آخر فصل افزوده‌ایم.

ویژگیهای مشخص این کتاب، از لحاظ مطالبی فراتر از مباحث مرسوم، عبارت‌اند از استفاده گسترده از ماتریسهای 2×2 در بررسی ردیابی پرتو، قطبش، و تداخل لایه نازک چندگانه؛ سه فصل که به لیزرها اختصاص یافته‌اند؛ فصل جداگانه‌ای درباره چشم، شامل لیزر-درمانی چشم؛ تک فصلهایی درباره هولوگرافی، همدوسی، اپتیک تاری، تداخل سنجی، اپتیک فوریه، اپتیک غیرخطی، و معادلات فرنل. آخرین فصل درآمد کوتاهی است بر ثابتهای اپتیکی دی‌الکتریکها و فلزات. سعی کرده‌ایم بسیاری از فصلهای اختصاصی‌تر را از سایر فصلها مستقل کنیم تا بتوان آنها را بدون آسیب به بقیه کتاب حذف کرد. این کار می‌تواند برای تنظیم دوره‌های کوتاه‌تر مفید باشد.

تنظیم مطالب در سه قسمت عمده اساساً با روند مرسوم مطابقت دارد. قسمت اول کتاب به اپتیک هندسی مربوط می‌شود که به‌صورت حد اپتیک موجی ارائه شده است. قسمت میانی اپتیک موجی را به تفصیل شرح می‌دهد، و قسمت نهایی مباحثی را بررسی می‌کند که کلاً اپتیک نوین نامیده می‌شوند. در اولین قسمت، فصل ۱ مرور تاریخی مختصری است بر نظریه‌های نور و توصیف موج، ذره و فوتون را شامل می‌شود. در فصل ۲، انواع رایج چشمه‌ها و آشکارسازهای نور را، و همچنین واحدهای اندازه‌گیری در پرتوسنجی را که در سراسر کتاب به‌کار برده می‌شوند، توصیف می‌کنیم. در این فصل و بقیه کتاب از دستگاه واحدهای گویا شده MKS استفاده می‌کنیم. فصل ۳ اپتیک هندسی را که در درسهای فیزیک پایه بیان می‌شود، با محاسبه روابط معمولی بازتاب و شکست برای آینه‌ها و عدسیها، مرور می‌کند. فصل ۴ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان اپتیک پیرامحوری را با استفاده از ماتریسهای 2×2 به دستگاههایی با هر نوع پیچیدگی گسترش داد. همچنین در این فصل درآمدی بر فنون ردیابی پرتو را گنجانده‌ایم که کاربرد گسترده‌ای با استفاده از برنامه‌نویسی رایانه‌ای دارند. فصل ۵ یک بررسی نیمه کمی از نظریه ابیراهی مرتبه سوم ارائه می‌دهد. فصل ۶ به بحث اصول اپتیک هندسی و نظریه ابیراهی می‌پردازد که برای روزنه‌ها و چند وسیله اپتیکی — منشور، دوربین عکاسی، چشمی، میکروسکوپ و تلسکوپ — به‌کار می‌رود. اهمیت چشم به‌عنوان ابزار اپتیکی نهایی در بسیاری از دستگاههای اپتیکی در فصل جداگانه‌ای (فصل ۷) بیان می‌شود. این فصل وظایف و معایب چشم را توضیح می‌دهد و به بعضی از درمانهای این معایب که در آنها از خواص منحصر به فرد نور لیزر استفاده می‌شود اشاره می‌کند.

در قسمت دوم کتاب، با دو فصل ۸ و ۹ که درباره معادلات موج و برهم‌نهی امواج هستند وارد اپتیک موجی یا فیزیکی می‌شویم. سپس پدیده‌های تداخل را در فصلهای ۱۰ و ۱۱ بررسی می‌کنیم، و در فصل اخیر تداخل سنجهای مایکلسون و فابری-پرو را با اندکی تفصیل شرح می‌دهیم. اگر چه با مفهوم همدوسی با عباراتی کلی در بحثهای سابق سروکار داشته‌ایم، بررسی دقیق‌تر و

کمی آن در فصل ۱۲ صورت می‌گیرد. این فصل پس از توضیح مختصر رشته و انتگرال فوریه به همدوسی زمانی و فضایی می‌پردازد و بحثی کمی درباره همدوسی فضایی ارائه می‌دهد. فصل ۱۳ درآمدی بر هولوگرافی، به عنوان کاربرد خاصی از تداخل، و شامل بعضی از کاربردهای رایج آن است.

در فصلهای ۱۴ و ۱۵ قطبش نور بررسی می‌شود. ابتدا نمایش ریاضی بردار میدان الکتریکی با ماتریسهای 2×2 را بیان می‌کنیم (فصل ۱۴) و سپس به بررسی مفصل سازوکارهای فیزیکی تولید نور قطبیده می‌پردازیم (فصل ۱۵). بدین ترتیب، از ماتریسها در فصل ۱۴ برای توصیف مدهای مختلف نور قطبیده و انواع قطبشگرها بدون اشاره به فیزیک تولید آن استفاده می‌شود. اگر چه ترتیب این دو فصل را می‌توان تغییر داد، معتقدیم که این انتخاب از لحاظ آموزشی مؤثرتر است. پراش در سه فصل بعد (۱۶، ۱۷، ۱۸) بررسی می‌شود. چون بررسی مکفی پراش فرانوفر در یک فصل تنها بیش از حد طولانی می‌شود، یک فصل جداگانه (۱۷) به توری پراش و ابزارهای توری اختصاص داده‌ایم که بلافاصله پس از بحث پراش چندشکافی در فصل ۱۶ ارائه شده است. سپس در فصل ۱۸ به پراش فرنل می‌پردازیم.

فصلهای آخر به طور کلی به ریاضیات پیچیده‌تری احتیاج دارند. در فصل ۱۹ از ماتریسهای 2×2 برای بررسی بازتابندگی لایه‌های نازک چندگانه استفاده می‌شود. در فصل ۲۰ معادلات فرنل با امتحان بازتاب از سطوح دی‌الکتریک و فلزی به دست می‌آیند. عناصر اساسی لیزر و مشخصات اساسی نور لیزر در فصل ۲۱ بررسی می‌شوند، و پس از آن یک فصل نسبتاً ضروری (۲۲) برای توصیف ویژگیهای اصلی باریکه‌های لیزری می‌آید. در اینجا واگرایی و ساختار مدی باریکه‌های لیزری به روشی کمی بیان می‌شوند. فصل ۲۲ در واقع دنباله فصل ۲۱ است، و این دو همراه با فصل ۲۳، که اساساً مقاله‌ای درباره کاربردهای لیزر است، یک واحد سه فصلی مناسب برای یک درس فشرده درباره لیزر تشکیل می‌دهند. سایر فصلهای قسمت نهایی کتاب کامل هستند، به این معنی که احتیاج به دنباله خاصی ندارند.

فصل ۲۴ بررسی ویژگیهای اساسی تارهای اپتیکی با توجه خاص به کاربردهای مخابراتی است. به این دلیل، مباحث پهنای نوار، مدهای مجاز و سازوکارهای تضعیف و واپس‌چس در اینجا بیان می‌شوند. فصل ۲۵ موضوع اپتیک فوریه را در بحثی درباره پردازش داده‌های اپتیکی و طیف‌نمایی تبدیل فوریه‌ای معرفی می‌کند. فصل ۲۶ انواعی از اثرات اپتیکی را تحت عنوان اپتیک غیرخطی ارائه می‌دهد. آخرین فصل (۲۷) انتشار نور در محیطهای دی‌الکتریک و فلزی را بررسی می‌کند و نشان می‌دهد که چگونه ثابتهای اپتیکی ظاهر می‌شوند.

در آخر هر ۲۷ فصل کتاب تعداد محدودی مرجع مربوط به مطالب فصل ذکر شده‌اند، و در متن، در جای لازم، به شماره مرجع در کروسه اشاره شده است. علاوه بر این مراجع، در آخر کتاب

فهرستی از مقالات مربوط به اپتیک که حدود ۴۰ سال گذشته در *Scientific American* به چاپ رسیده‌اند به ترتیب تاریخ انتشار ضمیمه شده است. امید می‌رود که این فهرست مقاله‌های عالی مفید از آب در آید، مخصوصاً برای دانشجویان کارشناسی.

این کتاب برای تدریس در یک نیمسال یا دو نیمسال متوالی قابل تنظیم است. انتخاب دقیق مطالب به هدفهای خاص مدرس و دانشجوی بستگی دارد. صرفاً به عنوان یک پیشنهاد قابل تغییر، یک درس نیمسال می‌تواند شامل فصلهای اساسی زیر باشد:

فصل ۱ ماهیت نور

۳ اپتیک هندسی

۶ ابزاربندی اپتیکی

۸ معادله موج

۹ برهم‌نهی امواج

۱۰ تداخل نور

۱۲ همدوسی

۱۳ هولوگرافی

۱۵ تولید نور قطبیده

۱۶ پراش فرانوفر

۱۸ پراش فرنل

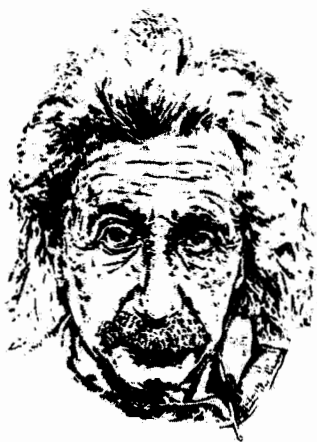
۲۱ مبانی لیزر

به عنوان راهنمایی بیشتری برای انتخاب، بخشهایی که می‌توان در دوره‌های فشرده حذف کرد با ستاره مشخص شده‌اند (به فهرست مطالب مراجعه کنید).

در اینجا ما بلیم از تمام استادانی که علاقه به اپتیک و به تدریس را در ما به وجود آوردند و از تمام دانشجویانی که باعث شدند تا با روشنی و کفایت تدریس کنیم تشکر کنیم.

فرانک پدروتی

لنو پدروتی



ماهیت نور

مقدمه

تحول درک ما از ماهیت فیزیکی نوری از جذابترین فصلهای تاریخ علم را تشکیل می‌دهد. از سپیده‌دم علوم جدید در قرون شانزدهم و هفدهم میلادی، نور یا به‌صورت ذره یا به‌صورت موج -الگوهای ناسازگار- تصویر می‌شده است و هر یک از این الگوها در دوره‌ای مورد توجه جامعه علمی بوده است. در قرن بیستم معلوم شد که نور به‌نحوی هم‌موج است و هم ذره، و در عین حال دقیقاً هیچ‌یک از این دو نیست. این وضعیت گیج‌کننده، که دوگانگی موج-ذره نامیده شد، مدتها بزرگترین مغزهای علمی معاصر را به‌کار انداخت تا چاره‌ای برای این الگوهای ظاهراً متناقض پیدا کنند. حل این معما با ابداع الکترودینامیک کوانتومی به‌دست آمد که یکی از موفقترین ساختارهای نظری در تاریخ فیزیک است.

در بحث زیر، چند نقطه برجسته در این تحول ادراکی را مطرح می‌کنیم.^۱ بعضی از عرصه‌های فیزیک که زمانی آنها را شاخه‌هایی جدا از اپتیک می‌دانستند -الکتریسیته و مغناطیس، و فیزیک اتمی- در این گزارش دخالت زیادی دارند. همین کافی است تا پی ببریم که راه حل به‌دست

۱. گزارش تاریخی عمیقتری را می‌توان به‌عنوان مثال در [۱] ملاحظه کرد (مراجع آخر این فصل را ببینید).

آمده یکی از وحدتهای بزرگ دریافت ما از جهان فیزیکی نیز هست. نتیجه نهایی این است که هم نور و هم ذرات زیراتمی مانند الکترون را باید نمودهای ماده یا انرژی دانست که یک مجموعه اصول صوری بر آنها حاکم است.

در قرن هفدهم برجسته‌ترین حامی نظریه ذره‌ای نور ایزاک نیوتون بود، همان گول خلاقی که علم کامل مکانیک و گرانش را ابداع کرد. نیوتون در رساله اپتیک خود پرتوهای نور را به وضوح جویبارهایی از ذرات بسیار کوچک در نظر گرفت که از چشمه نور گسیل می‌شوند و در خط راست حرکت می‌کنند. اگر چه نیوتون بیشتر وقتها فرضیه‌هایی را که مستقیماً از مشاهده و آزمایش استنتاج نشده بودند شدیداً رد می‌کرد، در اینجا فرضیه ذره‌ای را با اعتقاد به اینکه با پدیده‌ها به اندازه کافی توجیه می‌شود پذیرفت. آنچه در ملاحظات او اهمیت داشت این مشاهده بود که نور می‌تواند سایه واضحی از اشیاء ایجاد کند، برخلاف امواج صوت و آب که در مسیر خود در اطراف مانعها خم می‌شوند. در همین زمان، نیوتون از پدیده‌ای که اکنون حلقه‌های نیوتون نامیده می‌شود آگاه بود. این نوع نقشهای نور را نمی‌توان با در نظر گرفتن نور به صورت جویباری از ذرات که در خط راست حرکت می‌کنند به آسانی توضیح داد. اما نیوتون فرضیه ذره‌ای اساسی خود را نگه داشت و برای توضیح پدیده مزبور خاصیتی برای خود ذرات در نظر گرفت که آن را "قابلیت بازتاب آسان و عبور آسان" می‌نامید. این قابلیت نوعی حرکت دوره‌ای ناشی از نیروهای جاذبه و دافعه‌ای بود که مانع مادی اعمال می‌کند. مقام علمی ممتاز نیوتون باعث شد که دیدگاه او یک قرن بعد از ارائه آثارش حاکم باشد.

تاریخچه

کریستیان هویگنس، دانشمند هلندی معاصر نیوتون، (در کتاب نور خود) مدافع این نظر بود که نور یک حرکت موجی است که از چشمه نور در تمام راستاها به اطراف بخش می‌شود و در ماده کشسانی به نام اتر که همه‌جا را پر کرده است انتشار می‌یابد. هویگنس تحت تأثیر واقعیت‌هایی تجربی از این قبیل بود که وقتی دو باریکه نور با هم تلاقی می‌کنند بدون تغییر از هم دور می‌شوند، درست مانند دو موج صوت یا آب. او با انتخاب نظریه موجی توانست قوانین بازتاب و شکست را استنتاج کند و شکست دوگانه در کلسیت را نیز توضیح دهد.

دو سال قبل از گذشت یک قرن از انتشار اپتیک نیوتون، توماس یانگ انگلیسی آزمایش تعیین‌کننده‌ای انجام داد که تعبیری موجی را ایجاب می‌کرد و به این ترتیب اوضاع به نفع نظریه موجی نور تغییر کرد. این آزمایش معروف دوشکافی بود که در آن نور تکفامی از یک چشمه کوچک به پرده کدری دارای دو روزنه کوچک نزدیک به هم می‌تابید. "سایه"های مشاهده شده نقش تداخل پیچیده‌ای مانند آنچه با امواج آب ایجاد می‌شود تشکیل می‌دادند.

موفقیت‌های نظریه موجی تا قرن بیستم ادامه یافت. در جو اعتماد به نفس علمی که مشخصه اواخر قرن نوزدهم بود، ظاهراً تردیدی نبود که نور نیز، مانند اکثر شاخه‌های کلاسیک فیزیک، کاملاً درک شده است. چند تأیید مهم بر این ادعا را در اینجا ذکر می‌کنیم.

در سال ۱۸۲۱ اوگوستن فرنل نتایج آزمایشها و تحلیل خود را که نشان می‌داد نور باید موج عرضی باشد منتشر کرد. بر این اساس، معلوم شد شکست دوگانه در کلسیت را می‌توان پذیرفته‌ای مربوط به نور قطبیده دانست. فرض شده بود که امواج نور در اثر الزاماً طولی هستند، مانند امواج صوت در یک شاره، که نمی‌تواند حامل ارتعاشات عرضی باشد. فرنل برای هر یک از دو مؤلفه نور قطبیده معادلات فرنل را به دست آورد که دامنه نور بازتابیده و عبور کرده را در سطح مشترک تخت بین دو محیط اپتیکی تعیین می‌کنند.

جیمز کلارک ماکسول که در حوزه الکتروسیسته و مغناطیس کار می‌کرد اصول شناخته شده را در چهار معادله، به نام معادلات ماکسول، ترکیب کرد. این معادلات سرعتی برای موج الکترومغناطیسی در اثر پیش‌بینی می‌کردند که سرعت اندازه‌گیری شده نور از آب در آمد، و سرشت الکترومغناطیسی نور را نشان داد. از آن پس، نور ناحیه خاصی از طیف تابش الکترومغناطیسی در نظر گرفته شد. آزمایش آلبرت مایکلسون و ادوارد مورلی (۱۸۸۷)، که برای آشکارسازی اپتیکی حرکت زمین در اثر انجام شد، و نظریه نسبیت خاص اینشتین (۱۹۰۵) اهمیتی جاودانه دارند. مجموعه همه اینها به این نتیجه مسلم منجر شد که فرض اثر زاید است. بدین ترتیب، مشکلات مربوط به ارتعاشات عرضی در شاره از میان برداشته شدند.

با اینکه در قرن نوزدهم شالوده محکمی برای نظریه موجی نور پی‌ریزی شد، در پایان این قرن این شالوده رو به ویرانی گذاشت و مجادله موج-ذره با شدت از سر گرفته شد. در اینجا نیز تنها بعضی از رویدادهای مهم را ذکر می‌کنیم: در شرایط مربوط به برهم‌کنش نور با ماده، اشکالاتی در نظریه موجی نور بروز کردند. در سال ۱۹۰۰، همراه با آغاز قرن بیستم، ماکس پلانک در یک جلسه انجمن فیزیک آلمان اعلام کرد توانسته است طیف صحیح تابش جسم سیاه را تنها با این فرض غیرعادی محاسبه کند که اتمها نور را به جای گسیل پیوسته در بسته‌های انرژی گسسته تابش می‌کنند. بدین ترتیب، کوانتومها و مکانیک کوانتومی متولد شدند. طبق نظر پلانک، انرژی E یک کوانتوم تابش الکترومغناطیسی متناسب با پسامد تابش ν است:

$$E = h\nu \quad (1-1)$$

که در آن ضریب تناسب h ، که ثابت پلانک نامیده می‌شود، دارای مقدار بسیار کوچکی است تقریباً برابر با 6.63×10^{-34} J·s. پنج سال بعد آلبرت اینشتین، در همان سال که نظریه نسبیت خاص را منتشر کرد، توضیحی برای اثر فوتوالکتریک، گسیل الکترون از سطح فلزی که نور به آن

تابیده است، ارائه داد. در توضیح او نور به صورت جویباری از فوتونها در نظر گرفته می‌شد که انرژی آنها با معادله پلانک ۱-۱ به بسامد مربوط می‌شود. در سال ۱۹۱۳ فیزیکدان دانمارکی نیلز بور کوانتوم تابش را در توضیح خود برای فرایندهای گسیل و جذب اتم هیدروژن دخالت داد، و مبنایی فیزیکی برای درک طیف هیدروژن فراهم آورد. همچنین در سال ۱۹۲۲ آرتور کامپتون از الگوی فوتونی نور برای توضیح پراکندگی پرتوهای ایکس از الکترونها به صورت برخورد ذرات بین فوتونها و الکترونها، که در آن هم انرژی و هم تکانه پایسته‌اند، استفاده کرد.

موفقیت‌های الگوی ذره‌ای یا فوتونی نور نشان داد که نور را می‌توان به صورت نوع خاصی ماده، دارای انرژی و تکانه، در نظر گرفت. لویی دوبروی روی دیگر سکه را دید. دوبروی در سال ۱۹۲۴ نظرات خود را درباره اینکه ذرات زیر اتمی خواص موجی دارند منتشر کرد. طبق نظر او، ذره‌ای با تکانه p دارای طول موجی است برابر با

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (۲-۱)$$

که در آن h ، باز هم، ثابت پلانک است. تأیید تجربی فرضیه دوبروی طی سالهای ۱۹۲۷ و ۱۹۲۸ صورت گرفت: کلیتون دیویسون و لستر گرمر در ایالات متحده و سر جورج تامسون در انگلستان آزمایشهایی انجام دادند که تنها برحسب پراش باریکه الکترونها قابل تعبیر بودند.

بدین ترتیب، دوگانگی موج-ذره دایره کاملی را طی کرد. نور هنگام انتشار و در پدیده‌های تداخل و پراش مانند موج رفتار می‌کند، اما می‌تواند در برهم‌کنش با ماده، مثلاً در اثر فوتوالکتریک، مانند ذره هم رفتار کند. از طرف دیگر، الکترونها معمولاً مانند ذره رفتار می‌کنند، چنانکه در سوسو زدن نقطه‌گونه قطعه‌ای فسفر که در معرض باریکه الکترونی قرار گرفته باشد دیده می‌شود؛ در وضعیتهای دیگری معلوم شده است که الکترون مانند موج رفتار می‌کند، مثلاً در پراشی که در میکروسکوپ الکترونی به وجود می‌آید.

رفتار فوتونها و الکترونها هم به صورت موج و هم به صورت ذره ابتدا یک تناقض به نظر می‌رسید زیرا ذره و موج واقعاً ماهیتهای کاملاً متفاوتی هستند. به تدریج، و تا حد زیادی از طریق اندیشه‌های نیلز بور و مخصوصاً اصل مکملیت او، روشن شد که فوتونها و الکترونها نه ذره‌اند و نه موج، بلکه چیزی پیچیده‌تر هستند.

برای توضیح پدیده‌های فیزیکی، استفاده از الگوهای فیزیکی شناخته شده‌ای مانند امواج یا ذرات امری بدیهی است. اما معلوم شد که هیچ‌یک از این دو الگو اسباب درک کامل فوتون یا الکترون را فراهم نمی‌کند. در بعضی وضعیتها ممکن است صفات موجودگونه و در وضعیتهای دیگر صفات ذره‌گونه غالب باشند. هیچ الگوی فیزیکی ساده‌تری که برای بررسی تمام موارد مناسب

باشد در اختیار نداریم.

مکانیک کوانتومی با تمام ذراتی که در فضا کم و بیش جایگزیده هستند سروکار دارد، و به این دلیل هم نور و هم ماده را توصیف می‌کند. از ترکیب مکانیک کوانتومی با نسبیت خاص، تکانه p طول موج λ و سرعت v هم برای ذرات مادی و هم برای فوتونها با معادلات عمومی یکسانی بیان می‌شوند:

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{c} \quad (3-1)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}} \quad (4-1)$$

$$v = \frac{pc^2}{E} = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} \quad (5-1)$$

در این معادلات، m جرم سکون است و E عبارت است از انرژی کل، یعنی مجموع انرژی جرم سکون mc^2 و انرژی جنبشی که برابر است با کار انجام شده برای شتاب دادن به ذره از سکون تا سرعت اندازه‌گیری شده آن. جرم نسبیتی با γm داده می‌شود، و γ برابر است با $1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$. فرمول درست برای انرژی جنبشی دیگر $(1/2)mv^2$ نیست بلکه $mc^2(\gamma - 1)$ است. فرمول نسبیتی برای انرژی جنبشی به ازای $v \ll c$ به $(1/2)mv^2$ میل می‌کند.^۱

یک تفاوت مهم بین ذراتی مانند الکترونها و نوترونها و ذراتی مانند فوتونها این است که جرم سکون فوتونها صفر است. در نتیجه، معادله‌های ۳-۱ تا ۵-۱ صورت ساده‌تری پیدا می‌کنند:

$$p = \frac{E}{c} \quad (6-1)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E} \quad (7-1)$$

$$v = \frac{pc^2}{E} = c \quad (8-1)$$

بدین ترتیب، در حالی که برای ذراتی مانند الکترونها با جرم سکون مخالف صفر c یک سرعت حدی است، معادله ۸-۱ نشان می‌دهد که ذراتی مانند فوتونها با جرم سکون صفر باید با سرعت ثابت c حرکت کنند. انرژی فوتون، چنانکه از معادله ۱-۱ یا دو معادله ۶-۱ و ۷-۱ دیده می‌شود، تابع

۱. این بحث به معنی یک دوره فشرده آموزش مکانیک نسبیتی نیست بلکه، همراه با معادله‌های ۳-۱ تا ۸-۱، خلاصه‌ای از روابط اساسی است که به ذرات ماده و نور وحدت می‌بخشد.

سرعت فوتون نیست بلکه تابع بسامد آن است. توجه کنید که چون جرم سکون فوتون صفر است تفاوتی بین انرژی کل و انرژی جنبشی فوتون وجود ندارد. مثال زیر کاربرد معادله‌های بالا را نشان می‌دهد.

مثال

الکترونی تا انرژی جنبشی 2.5 MeV شتاب گرفته است. تکانه نسبی، طول موج دو بروی و سرعت آن را تعیین کنید. همین ویژگیها را برای فوتونی به دست آورید که انرژی آن برابر با انرژی الکترون است.

حل: انرژی کل الکترون، E ، عبارت است از مجموع انرژی جرم سکون آن و انرژی جنبشی آن E_k :

$$E = mc^2 + E_k = 0.511 \text{ MeV} + 2.5 \text{ MeV} = 3.011 \text{ MeV}$$

یا

$$E = 3.011 \times 10^6 \text{ eV} \times (1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 4.82 \times 10^{-13} \text{ J}$$

اکنون سایر کمیتها را به ترتیب محاسبه می‌کنیم. از معادله ۳-۱:

$$p = 1.58 \times 10^{-21} \text{ kg m/s}$$

از معادله ۴-۱:

$$\lambda = 4.18 \times 10^{-12} \text{ m} = 4.18 \text{ pm}$$

از معادله ۵-۱:

$$v = 2.95 \times 10^8 \text{ m/s}$$

اما برای فوتون، با $m = 0$ ، از معادله ۶-۱ داریم

$$p = 1.61 \times 10^{-21} \text{ kg m/s}$$

از معادله ۷-۱:

$$\lambda = 0.412 \text{ pm}$$

از معادله ۸-۱:

$$v = c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

تفاوت مهم دیگری بین الکترونها و فوتونها این است که الکترونها از آمار فرمی و فوتونها از آمار بوز پیروی می‌کنند. یکی از نتایج آمار فرمی این محدودیت است که هیچ دو الکترونی در یک دستگاه برهم‌کنش‌کننده در یک حالت، یعنی با خواص فیزیکی دقیقاً یکسان، نیستند. آمار بوز چنین محدودیتی را تحمیل نمی‌کند به طوری که فوتونهایی با انرژی و تکانه یکسان می‌توانند به تعداد زیاد با هم باشند. چون باریکه نور می‌تواند تعداد بسیار زیادی فوتون مشابه در مجاورت هم داشته باشد، ساختار دانه‌ای باریکه معمولاً مشاهده نمی‌شود و باریکه را می‌توان با موج الکترومغناطیسی پیوسته به خوبی نمایش داد. از این دیدگاه، میدانهای الکترومغناطیسی تجلی خاصی از فوتونها هستند.

نتیجه مهمی از ماهیت موجی ذرات در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ مستتر است. بنا به این اصل، ذرات از قوانین حتمیتی حرکت پیروی نمی‌کنند، بلکه نظریه تنها احتمالات را پیش‌بینی می‌کند. به هر ذره تابع موجی از طریق معادله موج بنیادی مکانیک کوانتومی همبسته است. دامنه موج یا بهتر بگوییم مجذور دامنه موج مربوط به ذره وسیله‌ای برای بیان احتمال یافت شدن ذره در ناحیه‌ای از فضا و بازه‌ای از زمان فراهم می‌کند. بدین ترتیب، تابیدگی (توان در واحد سطح) این موج در یک سطح مقطع، که متناسب با مجذور دامنه موج است، اندازه‌ای از این احتمال را به دست می‌دهد. هنگامی که تعداد زیادی ذره داشته باشیم، احتمال به یقین میل می‌کند، و در نتیجه تابیدگی E_e نور در یک مکان متناسب با تعداد فوتونهایی است که از آن مکان در ثانیه عبور می‌کنند:

$$n(\text{فوتون}/\text{m}^2 \text{ s}) = \frac{E_e}{h\nu} \quad (9-1)$$

بدین طریق، نقشهای تداخل و پراش را، که قبلاً با امواج توضیح داده می‌شدند، می‌توان جلوه‌هایی از ذرات تعبیر کرد. دامنه موج ذره احتمال مکان آن را در یک نقش پیش‌بینی می‌کند.

در نظریه الکتروپدینامیک کوانتومی، که اصول مکانیک کوانتومی را با اصول نسبیت خاص ترکیب می‌کند، فرض بر این است که فوتونها تنها با بارهای الکتریکی برهم‌کنش دارند. برای مثال، الکترون می‌تواند فوتونی را با احتمالی که متناسب با مجذور بار است جذب یا گسیل کند. برای فوتونها، برخلاف ذرات باردار، قانون پایستگی بار وجود ندارد. در این نظریه مشکل دوگانگی موج-ذره حل می‌شود؛ تفاوت‌های اساسی بین فوتونها و ذرات از بین می‌روند؛ و اصول کلی یکسانی بر هر دو حاکم می‌شوند. با این وحدت‌دهی، نور اساساً صورت دیگری از ماده در نظر گرفته شده است. با وجود این، جنبه‌های مکملیت توصیف‌های ذره‌ای و موجی نور برقرار می‌مانند، و بدین ترتیب استفاده از این یا آن توصیف در وقت مقتضی موجه است. چنانکه خواهیم دید، توصیف موجی نور برای توضیح بیشتر پدیده‌های اپتیکی که در این کتاب بررسی شده‌اند کفایت می‌کند.

مسائل

۱-۱ طول موج دوبروی را برای

- (الف) تویی به جرم 50 g که با سرعت 20 m/s حرکت می‌کند، و
 (ب) الکترونی با انرژی جنبشی 10 eV محاسبه کنید.

۲-۱ آستانه حساسیت چشم انسان حدود 100 فوتون در ثانیه است، و بیشترین حساسیت چشم تقریباً در طول موج 550 nm است. توان مربوط به این آستانه حساسیت را به‌ازای این طول موج برحسب وات تعیین کنید.

۳-۱ انرژی فوتونهای نور در دو سر طیف مرئی، یعنی در طول موجهای 400 nm و 700 nm را برحسب الکترون‌ولت به‌دست آورید.

۴-۱ طول موج و تکانه فوتونی را که انرژی آن برابر با جرم سکون الکترون است تعیین کنید.

۵-۱ نشان دهید انرژی جرم سکون الکترون 511 MeV است.

۶-۱ نشان دهید تکانه نسبی الکترونی را که در اختلاف پتانسیل یک میلیون ولتی شتاب گرفته است می‌توان به‌صورت $1.422 \text{ MeV}/c$ بیان کرد که در آن c سرعت نور است.

۷-۱ ثابت کنید طول موج یک فوتون برحسب آنگستروم را می‌توان از انرژی آن برحسب الکترون‌ولت با رابطه زیر به‌دست آورد

$$\lambda(\text{\AA}) = \frac{12400}{E(\text{eV})}$$

۸-۱ نشان دهید انرژی جنبشی نسبیتی

$$E_k = mc^2(\gamma - 1)$$

به‌ازای $v \ll c$ به فرمول کلاسیک $(1/2)mv^2$ تبدیل می‌شود.

۹-۱ پروتونی تا انرژی ۲ BeV شتاب گرفته است.

(الف) تکانه پروتون،

(ب) طول موج دو بروی پروتون، و

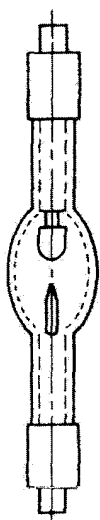
(ج) طول موج فوتونی با انرژی برابر با انرژی کل پروتون را به‌دست آورید.

۱۰-۱ نور خورشید با میانگین 1353 W/m^2 روی سطحی عمود بر پرتوهای نور به زمین می‌تابد. تعداد فوتونهایی را که در یک ثانیه به 1 cm^2 از این سطح فرود می‌آیند برای طول موج میانگین 550 nm محاسبه کنید.

۱۱-۱ دو باریکه موازی از تابش الکترومغناطیسی با طول موجهای مختلف توان یکسانی را به دو سطح مساوی و عمود بر راستای باریکه‌ها منتقل می‌کنند. نشان دهید نسبت تعداد فوتونهای دو باریکه که در هر ثانیه به دو سطح فرود می‌آیند برابر با نسبت طول موجهای آنها است.

مراجع

- [1] Ronchi, Vasco. *The Nature of Light*. Cambridge: Harvard University Press, 1970.
- [2] Hoffmann, Banesh. *The Strange Story of the Quantum*. New York: Dover Publications, 1959.
- [3] Guillemin, Victor. *The Story of Quantum Mechanics*. New York: Charles Scribner's Sons, 1968.
- [4] Feinberg, Gerald. "Light." In *Lasers and Light*, pp. 4-13. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1969.
- [5] Cantor, G. N. *Optics after Newton*. Dover, N.H.: Manchester University Press, 1983.
- [6] Strong, John. *Concepts of Classical Optics*. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1958. Appendix G.



۲

تولید و سنجش نور

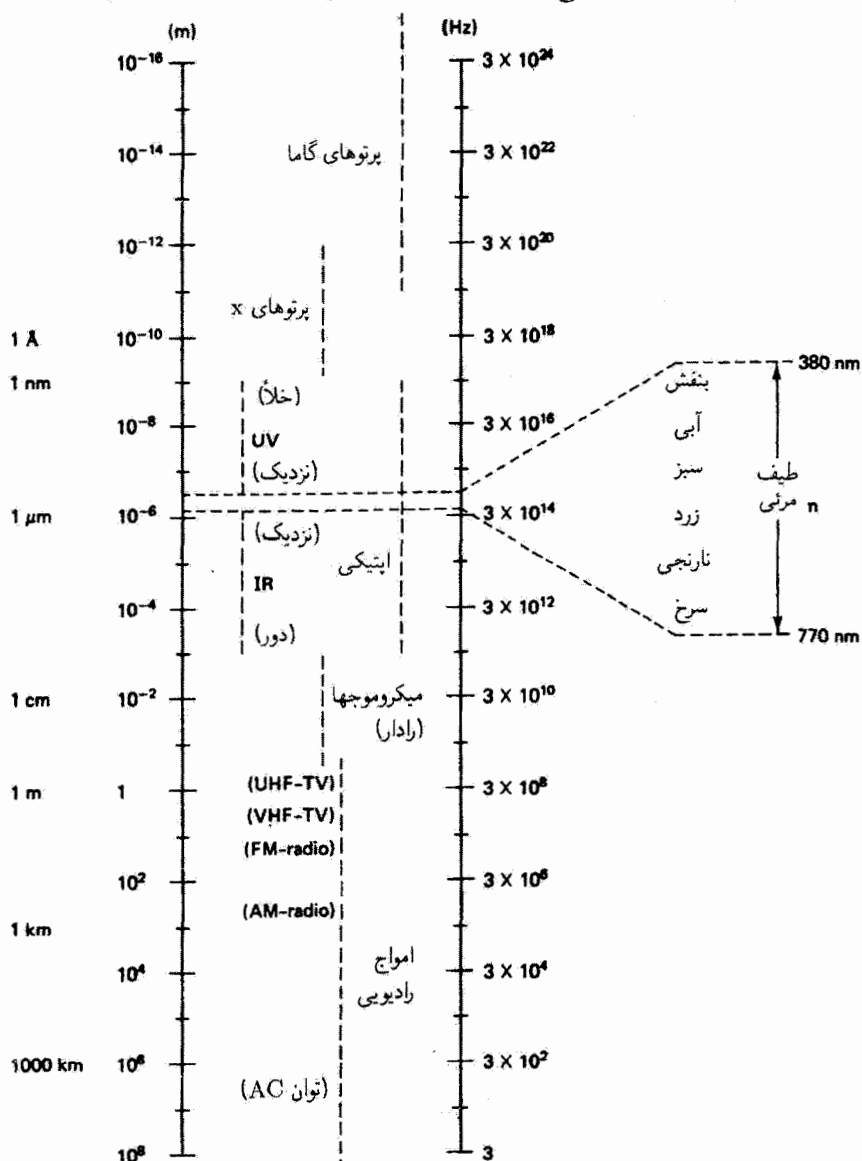
مقدمه

تابش الکترومغناطیسی می‌تواند برحسب طول‌موج (یا بسامد) و "شدت" تغییر کند. رده‌بندی از روی تغییرات طول‌موج را اختصاراً طیف الکترومغناطیسی می‌نامند. تغییرات شدت را با اصطلاحات فیزیکی دقیقتری که در زمینه‌های تابش‌سنجی و نورسنجی تکوین یافته‌اند می‌توان توصیف کرد. چشمه‌ها و آشکارسازهای تابش الکترومغناطیسی بر اساس گستره طیفی آنها و شدت علائم ایجاد شده (چشمه‌ها) یا شدت علائم آشکار شده (آشکارسازها) رده‌بندی می‌شوند. این ملاحظات برای تولید و سنجش تابش الکترومغناطیسی ضروری هستند و در این فصل درباره آنها بحث می‌کنیم.

۱-۲ طیف الکترومغناطیسی

آشفته‌گی الکترومغناطیسی که در فضا به صورت موج منتشر می‌شود ممکن است تکفام باشد، یعنی برای کاربردهای عملی با یک طول‌موج مشخص می‌شود، یا چندفام باشد که در این مورد با چند طول‌موج گسسته یا پیوسته نمایش داده می‌شود. توزیع انرژی بین امواج مختلف تشکیل‌دهنده تابش را طیف تابش می‌نامند، و صفت طیفی به معنی وابستگی به طول‌موج است. ناحیه‌های مختلف

طیف الکترومغناطیسی، به علت تفاوت در روش تولید یا آشکارسازی آنها، با اسامی خاصی مانند امواج رادیویی، پرتوهای کیهانی، نور و تابش فرابنفش نامیده شده‌اند. در شکل ۱-۲، که در آن طیف الکترومغناطیسی برحسب طول موج (λ) و بسامد (ν) نمایش داده شده است، بیشتر اصطلاحات



شکل ۱-۲ طیف الکترومغناطیسی برحسب طول موج (به متر) و بسامد (به هرتز). ناحیه باریک طیف مرئی در سمت راست بزرگ شده است.

متداول آورده شده‌اند. ارتباط طول موج و پسامد با سرعت موج (c)، چنانکه برای هر حرکت موجی صادق است، به صورت زیر است

$$c = \lambda \nu \quad (۱-۲)$$

در شکل ۱-۲ فرض شده است که تابش در خلأ منتشر می‌شود، که برای آن مقدار سرعت c تقریباً برابر است با 3×10^8 m/s. یکاهای متداول طول موج در این شکل عبارت‌اند از آنگستروم ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$)، نانومتر ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) و میکرومتر ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$). ناحیه‌های مربوط به انواع مختلف موجها، چنانکه دیده می‌شود، مرز دقیقی ندارند، و ممکن است روی هم بیفتند، مثلاً در مورد پرتوهای ایکس و پرتوهای گاما. تعیین نام بستگی به نحوه تولید یا استفاده از تابش دارد. گستره باریکی از امواج الکترومغناطیسی از تقریباً 380 nm تا 770 nm می‌تواند در چشم انسان احساس بینایی ایجاد کند و به درستی نام "نور" به آن داده شده است. این ناحیه مرئی طیف الکترومغناطیسی، که شامل طیفی از رنگها از سرخ (انتهای طول موج‌های بزرگتر) تا بنفش (انتهای طول موج‌های کوچکتر) است با دو ناحیه نامرئی فرابنفش و فروسرخ محدود شده است. این سه ناحیه مجموعاً طیف اپتیکی را تشکیل می‌دهند، و این ناحیه‌ای از طیف الکترومغناطیسی است که در کتابهای درسی اپتیک مورد توجه خاص است.

۲-۲ تابش سنجی

تابش سنجی علم اندازه‌گیری تابش الکترومغناطیسی است. در این مبحث کمیتهای تابش سنجی یا اصطلاحات فیزیکی را که برای مشخص کردن انرژی موجود در تابش به کار می‌روند ارائه می‌کنیم. بعداً بعضی از متداولترین اصولی را که در ابزارهای مخصوص اندازه‌گیری تابش به کار می‌روند مورد بحث قرار می‌دهیم. بسیاری از اصطلاحات تابش سنجی را معرفی کرده‌ایم و به کار برده‌ایم؛ اما در اینجا تنها یکاهای دستگاه بین‌المللی (SI) را آورده‌ایم. این اصطلاحات و یکاهای آنها در جدول ۱-۲ خلاصه شده‌اند.^۱

کمیتهای تابش سنجی را بدون شاخص یا با شاخص e (به معنی الکترومغناطیسی) نشان می‌دهیم تا از اصطلاحات نورسنجی مشابه، که بعداً آنها را توصیف می‌کنیم، متمایز باشند. اصطلاحات انرژی تابشی Q_e (J، ژول)، چگالی انرژی تابشی w_e (J/m^2)، و شار تابشی Φ_e ($\text{W} = \text{J/s}$ ، وات) نیازی به توضیح بیشتر ندارند. چگالی شار تابشی در یک سطح، که با وات

۱. معرفی "انتزاعی" تعداد زیادی یکای جدید، که بعضی به ندرت و بعضی غلط به کار برده می‌شوند، از لحاظ آموزشی چندان پسندیده نیست. منظور از جدول ۱-۲ ارائه خلاصه مناسبی است که می‌توان هنگام ضرورت به آن مراجعه کرد.

جدول ۱-۲ اصطلاحات تابش سنجی و نورسنجی

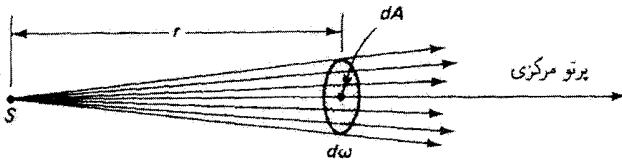
اصطلاح (تابش سنجی)	نماد، و معادله تعریف کننده	یکا	اصطلاح (نورسنجی)	نماد، و معادله تعریف کننده	یکا
انرژی تابشی	Q_e	J	انرژی درخششی	Q_v	lm s
چگالی انرژی تابشی	$w_e = dQ_e/dV$	W s یا J/m ^۳	چگالی انرژی درخششی	$w_v = dQ_v/V$	lm s/m ^۳
شار تابشی	$\Phi_e = dQ_e/dt$	W	شار درخششی	$\Phi_v = dQ_v/dt$	lm
گسیلندگی تابشی	$M_e = d\Phi_e/dA$	W/m ^۲	گسیلندگی درخششی	$M_v = d\Phi_v/dA$	lm/m ^۲
تابیدگی	$E_e = d\Phi_e/dA$	W/m ^۲	درخشانی	$E_v = d\Phi_v/dQ$	lm/m ^۲
شدت تابندگی	$I_e = d\Phi_e/d\omega$	W/sr	شدت درخشانی (توان شمعی)	$I_v = d\Phi_v/d\Omega$	lx یا lm/sr
تابندگی	$L_e = dI_e/dA \cos \theta$	W/sr m ^۲	درخشایی	$L_v = dI_v/dA \cos \theta$	cd یا cd/m ^۲

اختصارات: J، ژول؛ W، وات؛ m، متر؛ lm، لومن؛ lx، لوکس؛ sr، استرادیان؛ cd، شمع.

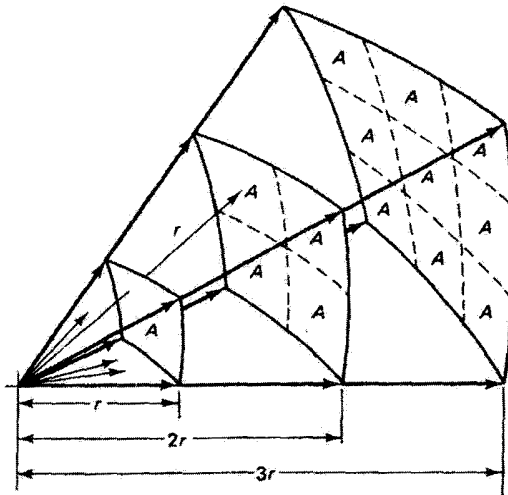
بر مترمربع اندازه گیری می شود، ممکن است از یک سطح گسیل (پراکنده، بازتابنده) شود که در این صورت آن را گسیلندگی تابشی M_e می نامند، یا به یک سطح فرود آید که در این صورت تابیدگی E_e نامیده می شود. شار تابشی (Φ_e) را که در واحد زاویه فضایی (ω) از یک چشمه نقطه ای در یک راستای معین گسیل شده است (شکل ۲-۲) شدت تابندگی I_e می نامند. این کمیت، که غالباً آن را با تابیدگی اشتباه می کنند، با رابطه زیر داده می شود

$$I_e = \frac{d\Phi}{d\omega} \text{ (W/sr)} \quad (2-2)$$

که در آن sr نماد اختصاری استرادیان است. برای مثال، شدت تابندگی I_e از کوره ای که توان $\Phi_e W$ به طور یکنواخت در تمام راستاها تابش می کند برابر است با $\Phi_e/4\pi W/sr$ ، زیرا زاویه فضایی احاطه کننده کل $4\pi sr$ است.



شکل ۲-۲ شدت تابندگی عبارت است از شاری که از سطح مقطع dA در واحد زاویه فضایی می‌گذرد. در اینجا زاویه فضایی برابر است با $d\omega = dA/r^2$.

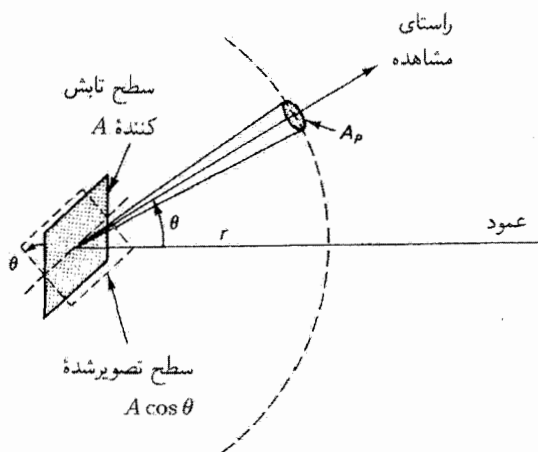


شکل ۳-۲ نمایش قانون عکس مجذور. شاری که از یک چشمه نقطه‌ای در هر زاویه فضایی خارج می‌شود در سطوحی که بزرگتر می‌شوند توزیع می‌شود، و یک تابندگی ایجاد می‌کند که با عکس مجذور فاصله کاهش می‌یابد.

قانون مشهور عکس مجذور برای تابش از یک چشمه نقطه‌ای، که در شکل ۳-۲ نشان داده شده است، اکنون با محاسبه تابندگی چشمه نقطه‌ای به یک سطح کروی احاطه‌کننده نقطه، با زاویه فضایی 4π sr و مساحت $4\pi r^2$ ، واضح است. بدین ترتیب، داریم

$$E_e = \frac{\Phi_e}{A} = \frac{4\pi I_e}{4\pi r^2} = \frac{I_e}{r^2} \quad (3-2)$$

تابندگی I_e عبارت است از شدت تابندگی در واحد سطحی که عمود بر یک راستای مشخص



شکل ۴-۲ شار تابشی جمع شده در راستایی که با عمود بر سطح تابش کننده زاویه θ می سازد. سطح تصویر شده با خط چین نشان داده شده است.

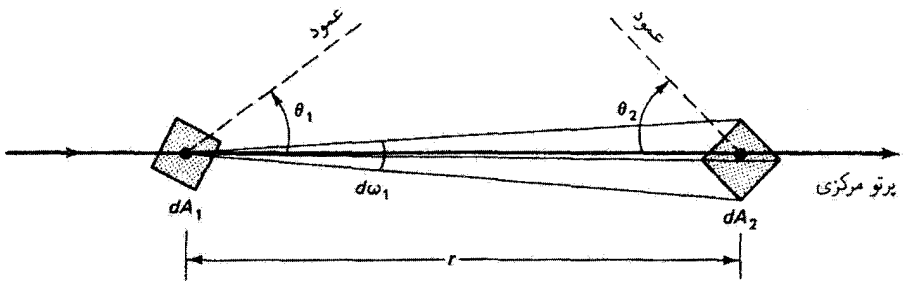
تصویر شده است، و با رابطه زیر داده می شود

$$L_e = \frac{dI_e}{dA \cos \theta} = \frac{d^2 \Phi_e}{d\omega (dA \cos \theta)} \quad (\text{W/m}^2 \text{ sr}) \quad (4-2)$$

که در آن θ زاویه بین عمود بر سطح و راستای مورد نظر است. از ملاحظات زیر می توان به اهمیت تابندگی پی برد. فرض کنید یک تابشگر یا بازتابگر تخت کاملاً پخشنده است، بدین معنی که در تمام راستاها تابش می کند. شدت تابندگی برای زاویه فضایی ثابتی که با گشودگی ثابت A_p تعریف می شود در یک فاصله r از سطح تابش کننده اندازه گیری می شود (شکل ۴-۲ را ببینید). این گشودگی ممکن است دهانه ورودی یک ابزار آشکارسازی باشد که تمام شاری را که بدین ترتیب وارد می شود اندازه گیری می کند. تحت زاویه $\theta = 0^\circ$ ، یعنی در امتداد عمود بر سطح، یک شدت ماکسیمم مشخص $I(0^\circ)$ مشاهده می شود. با حرکت دادن دهانه روی دایره به شعاع r ، و در نتیجه با افزایش زاویه θ ، سطح مقطع تابش طوری کاهش می یابد که

$$I(\theta) = I(0^\circ) \cos \theta \quad (5-2)$$

این رابطه را قانون کسینوسی لامبرت می نامند. اگر تابندگی را در هر زاویه θ تعیین کنیم، مقدار ثابتی به دست می آید، زیرا شدت باید توسط سطح تصویر شده $A \cos \theta$ طوری تقسیم شود که وابستگی



شکل ۵-۲ وضعیت هندسی ناوردایی تابندگی در یک محیط یکنواخت بدون انکسار.

کسینوسی از بین برود:

$$L_e = \frac{I(\theta)}{A \cos \theta} = \frac{I(\circ) \cos \theta}{A \cos \theta} = \frac{I(\circ)}{A} = \text{const.} \quad (6-2)$$

بدین ترتیب، وقتی سطح تابش‌کننده (یا بازتابنده) ای دارای تابندگی مستقل از زاویه مشاهده باشد این سطح را کاملاً پخشنده یا سطح لامبرتی می‌نامند.

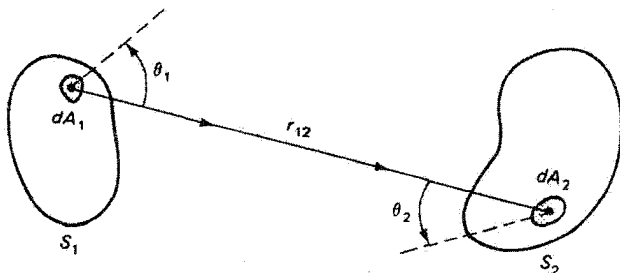
اکنون نشان می‌دهیم که تابندگی در هر نقطه از پرتوی که در یک محیط یکنواخت غیر مرکزی و منتشر می‌شود مقدار یکسانی دارد. شکل ۵-۲ یک باریکه کم‌عرض تابش، شامل پرتو مرکزی و دسته کوچکی از پرتوهای جانبی (که ترسیم نشده‌اند)، و دو سطح جزئی dA_1 و dA_2 واقع در نقاط مختلف باریکه را در چنین محیطی نشان می‌دهد. پرتو مرکزی با عمودهای این سطوح زاویه‌های θ_1 و θ_2 می‌سازد. زاویه فضایی $d\omega_1$ مساوی است با $dA_2 \cos \theta_2 / r^2$ که در آن $dA_2 \cos \theta_2$ تصویر سطح dA_2 بر صفحه عمود بر پرتو مرکزی است. مطابق معادله ۴-۲، تابندگی L_1 در dA_1 عبارت است از

$$L_1 = \frac{d^2 \Phi_1}{d\omega_1 (dA_1 \cos \theta_1)} = \frac{d^2 \Phi_1}{(dA_2 \cos \theta_2 / r^2) (dA_1 \cos \theta_1)} \quad (7-2)$$

با استدلال مشابهی که در آن جای dA_2 و dA_1 را عوض کرده‌ایم، داریم

$$L_2 = \frac{d^2 \Phi_2}{d\omega_2 (dA_2 \cos \theta_2)} = \frac{d^2 \Phi_2}{(dA_1 \cos \theta_1 / r^2) (dA_2 \cos \theta_2)} \quad (8-2)$$

برای محیط غیر جاذب، توان مربوط به تابشی که از طریق دسته پرتوهای پیوسته منتقل می‌شود ثابت می‌ماند، یعنی $d\Phi_1 = d\Phi_2$ ، و در نتیجه از معادله‌های ۷-۲ و ۸-۲ به دست می‌آوریم $L_1 = L_2$. بنابراین، تابندگی باریکه تابندگی چشمه، در نقطه شروع باریکه، نیز هست، یا $L_1 = L_2 = L_0$.



شکل ۶-۲ مورد کلی تابشگیری یک سطح از یک سطح دیگر تابش کننده. هر عنصر سطح تابش کننده \$dA_1\$ در هر عنصر سطح گیرنده تابش \$dA_2\$ سهم دارد.

با توجه به شکل ۶-۲، فرض کنید می‌خواهیم مقدار توان تابشی را که به عنصر \$dA_2\$ روی سطح \$S_2\$ می‌رسد و از عنصر \$dA_1\$ روی سطح چشمه \$S_1\$ ناشی می‌شود تعیین کنیم. خط واصل عناصر سطح، به طول \$r_{12}\$، با عمودهای سطح زاویه‌های \$\theta_1\$ و \$\theta_2\$ می‌سازند. توان تابش \$d^2\Phi_{12}\$ یک دیفرانسیل مرتبه دوم است زیرا هم چشمه و هم دریافت کننده سطوح جزئی هستند. با توجه به معادله ۷-۲ یا معادله ۸-۲ داریم

$$d^2\Phi_{12} = \frac{L dA_1 dA_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2}$$

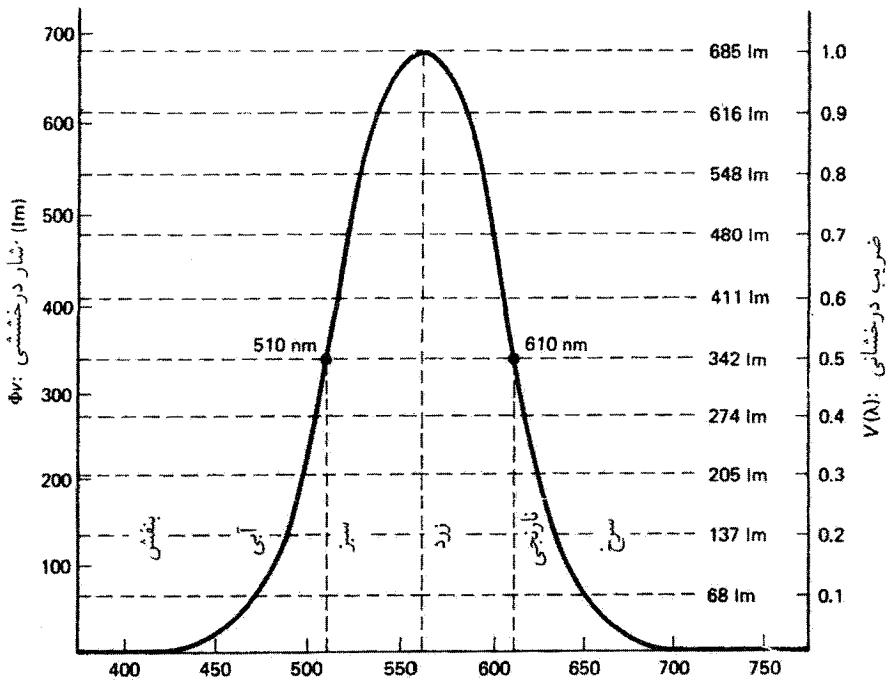
و توان تابش کل ناشی از تمام سطح اول در تمام سطح دوم برابر است با

$$\Phi_{12} = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{L \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{r_{12}^2} \quad (9-2)$$

با جمع کردن توانها به جای دامنه‌ها در این انتگرال گیری، به طور ضمنی فرض کرده ایم تابش ناهمدوس از چشمه تابش گسیل می‌شود. درباره تابش همدوس و ناهمدوس بعداً بیشتر بحث خواهیم کرد.

۳-۲ نورسنجی

تابش سنجی برای اندازه گیری تمام انرژیهای تابشی به کار می‌رود. از طرف دیگر، نورسنجی تنها در قسمت مرئی طیف اپتیکی به کار می‌رود. تابش سنجی اندازه گیریهای صرفاً فیزیکی را در بر می‌گیرد، در حالی که نورسنجی پاسخ چشم انسان به انرژی تابشی را در طول موجهای مختلف به حساب می‌آورد و در نتیجه اندازه گیریهای روان-فیزیکی را شامل می‌شود. این تفاوت مبتنی بر این واقعیت است که چشم انسان، به عنوان یک آشکارساز، دارای پاسخ طیفی "یکدست" نیست،



شکل ۲-۷ منحنی ضریب درخشندگی CIE. شار درخششی متناظر با ۱ W توان تابش در هر طول موج از ضرب ۶۸۵ lm در ضریب درخشانی در همان طول موج به دست می‌آید: $\Phi_v(\lambda) = 685 V(\lambda)$ به ازای هر وات توان تابش.

یعنی به تمام طول موجها با حساسیت مساوی پاسخ نمی‌دهد. اگر سه چشمه نور با توان تابش مساوی را که به ترتیب نور آبی، زرد و سرخ تابش می‌کنند با چشم مشاهده کنیم چشمه زرد بسیار روشنتر از دو چشمه دیگر به نظر می‌رسد. بنابراین، وقتی از کمیتهای نورسنجی استفاده می‌کنیم، خواص تابش مرئی را آن‌گونه که یک چشم عادی می‌بیند اندازه می‌گیریم نه آن‌طور که برای یک آشکارساز "بی طرف" ظاهر می‌شوند. چون چشم تمام انسانها یکسان نیست، کمیته بین‌المللی روشنایی (CIE) پاسخ استاندارد تهیه کرده است که در شکل ۲-۷ نشان داده شده است. در این نمودار احساس روشنی یا پاسخ نسبی چشم نسبت به طول موج ترسیم شده است و نشان می‌دهد که بیشترین حساسیت در طول موج "زرد-سبز" ۵۵۵ nm روی می‌دهد. در واقع، منحنی عبارت است از ضریب درخشانی چشم برای دید روشن، یعنی وقتی که چشم برای دید روز تطبیق یافته است. برای ترازهای پایینتر روشنایی، یعنی وقتی چشم برای دید شب یا دید تاریک تطبیق یافته است، منحنی به سمت سبز با قله‌ای در ۵۱۰ nm جابه‌جا می‌شود. جالب توجه است که احساس رنگ برای انسان تابعی از روشنایی است و در ترازهای پایینتر روشنایی تقریباً به کلی از بین

می‌رود. راهی برای تأیید این اثر این است که رنگ ستاره‌ها را آن‌طور که با چشم می‌بینیم با عکس رنگی آنها که با یک زمان نوردهی مناسب گرفته شده باشد مقایسه کنیم. راه جالب دیگری برای نمایش وابستگی رنگ به روشنایی در چشم انسان این است که یک اسلاید رنگی ۳۵ میلیمتری از یک صحنه را با جریان ضعیف لامپ پروژکتور روی پرده بیندازیم. برای جریانهای به اندازه کافی ضعیف، صحنه را سیاه و سفید می‌بینیم. با زیاد کردن جریان، رنگهای کامل در صحنه به تدریج ظاهر می‌شوند. از طرف دیگر، تابش بسیار شدید ممکن است در خارج از حدود منحنی CIE قابل رؤیت باشد. بازتاب یک باریکه قوی لیزری با طول موج 694.3 nm از یک لیزر یاقوتی به آسانی دیده می‌شود. حتی تابش فروسرخ حدود 900 nm از یک لیزر نیرسانای گالیوم-آرسناید را به رنگ سرخ سیر می‌توان دید.

کمیت‌های تابش‌سنجی از روی منحنی ضریب درخشانی شکل ۲-۷ به طریق زیر به کمیت‌های نورسنجی مربوط می‌شوند: متناظر با شار تابشی 1 W در طول موج قله 555 nm ، که در آن ضریب درخشانی ماکسیمم است، شار درخششی بنا به تعریف 685 lm است. بنابراین، برای مثال، به ازای $610 \text{ nm} = \lambda$ ، در گستره‌ای که در آن ضریب درخشانی 0.5 یا 50% است، 1 W شار تابشی تنها $342 \text{ lm} = 685 \times 0.5$ شار درخششی ایجاد می‌کند. منحنی همچنین نشان می‌دهد که در $510 \text{ nm} = \lambda$ ، در قسمت آبی-سبز، درخشایی به 50% افت می‌کند.

یکاهای نورسنجی برحسب تعریفشان همسنگ با یکاهای تابش‌سنجی هستند. این همسنگی در خلاصه و مقایسه‌ای که در جدول ۲-۱ آمده است به اندازه کفایت نشان داده شده است. به‌طور کلی، یکاهای مانسته با معادله زیر به هم مربوط می‌شوند

$$(2-10) \quad \text{یکای تابش‌سنجی} \times K(\lambda) = \text{یکای نورسنجی}$$

که در آن $K(\lambda)$ را کارایی درخششی می‌نامند. اگر $V(\lambda)$ ، چنانکه روی منحنی CIE داده شده است، ضریب درخشانی باشد آنگاه

$$(2-11) \quad K(\lambda) = 685 V(\lambda)$$

اصطلاحات نورسنجی با واژه‌های درخشانی همراه‌اند و یکاهای مربوط به آنها را با شاخص حرفی v (دیداری) مشخص می‌کنیم. توجه کنید که یکای انرژی درخششی در دستگاه SI تالیوت است، یکای احساس درخششی لوکس (lx) است، و یکای شدت درخشانی شمع (cd) است. همچنین به تفاوت بین دو اصطلاح مانسته تأییدگی (تابش‌سنجی) و درخشانی (نورسنجی) توجه کنید.

مثال

یک لامپ روشنایی که توان تابش 100 W گسیل می‌کند در 2 متری یک سطح قرار دارد. این سطح عمود بر خطی است که از لامپ به سطح کشیده شده است. تابیدگی در سطح را محاسبه کنید. اگر تمام 100 W از یک لامپ سرخ در $650\text{ nm} = \lambda$ گسیل شود، درخشانی در سطح را نیز محاسبه کنید.

حل:

$$E_e = P/A = 100\text{ W}/4\pi(2\text{ ft})^2 \cong 2\text{ W/m}^2 \text{ (تابیدگی)}$$

از منحنی CIE داریم $V(650\text{ nm}) = 0.1$. بنابراین،

$$E_v(\text{درخشانی}) = K(\lambda) \times \text{تابیدگی} = 685 V(\lambda) \times E_e$$

$$E_v = 685 \times 0.1 \times 2 = 137\text{ lm/m}^2 (\cong \text{lux})$$

بدین ترتیب، در حالی که یک نورسنج که دهانه‌اش در سطح قرار دارد 2 W/m^2 را اندازه می‌گیرد، یک تابش‌سنج در همان مکان 137 lx را نشان می‌دهد. ▲

وقتی تابش شامل گستره‌ای از طول موجها باشد، کمیت‌های تابش‌سنجی و نورسنجی ممکن است تابعی از طول موج باشند. این وابستگی را با آوردن واژه طیفی بعد از نام کمیت مورد نظر و با استفاده از حرف λ به صورت شاخص یا در پرانتز نشان می‌دهیم. برای مثال، شار تابشی طیفی $\Phi_{e\lambda}$ یا $\Phi_e(\lambda)$ مشخص می‌شود. شار تابشی کل از انتگرال‌گیری روی ناحیه طول موج تعیین می‌شود:

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_e(\lambda) d\lambda$$

۴-۲ تابش جسم سیاه

جسم سیاه یک جذب‌کننده آرمانی است: تمام تابشی که به جسم سیاه فرود می‌آید، طول موج یا زاویه فرود هر چه باشد، کاملاً جذب می‌شود. نتیجه می‌گیریم که جسم سیاه گسیلنده کامل نیز هست. جسم سیاه در یک دمای معین می‌تواند در هر طول موجی و در هر راستایی بیشتر از هر جسم دیگری در همان دما تابش گسیل کند. در عمل با سیاه کردن سطح یک کاواک تابشی و

ایجاد روزنه کوچکی در آن می‌توان تقریباً یک جسم سیاه به دست آورد. یک مثال عالی از جسم سیاه عبارت است از سطحی که از لبه‌های تیز یک دسته تیغ ایجاد می‌شود. ردیف لبه‌های تیغ نور فرودی را گیر می‌اندازد و باعث جذب تقریباً کامل می‌شود.

گسیلندگی تابشی طیفی M_λ مربوط به جسم سیاه را می‌توان بر مبنای نظری محاسبه کرد. ماکس پلانک که نخستین محاسبه نظری این کمیت را به انجام رساند لازم دید فرض کند فرایند تابش و جذب جسم سیاه کوانتشی است. نتیجه این محاسبه [۱] عبارت است از

$$M_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right) \quad (12-2)$$

که در آن ثابتهای فیزیکی c ، h و k به ترتیب ثابت پلانک، سرعت نور در خلأ و ثابت بولتزمن هستند. با استفاده از مقادیر معلوم این ثابتها، به دست می‌آوریم

$$M_\lambda = \frac{3.745 \times 10^8}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{1.2388/\lambda T} - 1} \right) \text{ (W/m}^2 \text{ } \mu\text{m)}$$

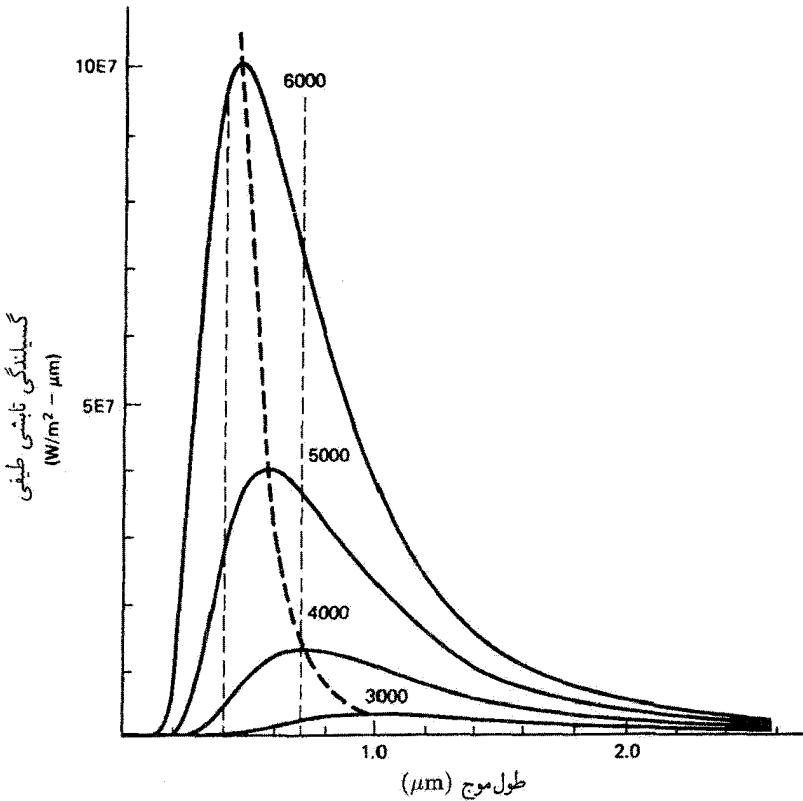
که در آن λ برحسب میکرومتر و T برحسب کلون است. کمیت M_λ در شکل ۸-۲ برای دماهای مختلف ترسیم شده است. دیده می‌شود که گسیلندگی تابشی طیفی در هر طول موج با دمای مطلق افزایش می‌یابد. همچنین قله گسیلندگی با افزایش دما به سمت طول موجهای کوچکتر منتقل می‌شود، و در دماهای بین ۵۰۰۰ تا ۶۰۰۰ K در طیف مرئی (خط چینه‌ای قائم) قرار می‌گیرد. تغییر $\lambda_{(\max)}$ ، یعنی طول موج مربوط به ماکسیم M_λ ، با دما را می‌توان با مشتق گرفتن از M_λ نسبت به λ و مساوی صفر قرار دادن آن به دست آورد. نتیجه عبارت است از قانون جابه‌جایی وین، که با رابطه زیر داده می‌شود^۱

$$\lambda_{(\max)} T = \frac{hc}{5k} = 2.898 \times 10^2 (\mu\text{m K}) \quad (13-2)$$

و در شکل ۸-۲ با منحنی خط چین نشان داده شده است. از طرف دیگر، اگر از گسیلندگی طیفی ۱۲-۲ روی تمام طول موجها انتگرال بگیریم، گسیلندگی تابشی کل یا سطح زیر منحنی تابش جسم سیاه در دمای T به دست می‌آید که عبارت است از

$$M = \sigma T^4 \quad (14-2)$$

۱. اگر چه قانون وین را غالباً به همین صورت می‌نویسند، عدد ۵ تقریب ۴.۹۶۵ است که با استفاده از آن مقدار دقیقتر $2.898 \times 10^2 \mu\text{m K}$ برای ثابت وین به دست می‌آید.



شکل ۸-۲ توزیع طیفی تابش جسم سیاه در چهار دمای کلوین. خط‌چینه‌ای قائم طیف مرئی را مشخص می‌کنند، و منحنی خط‌چین که قله‌های چهار منحنی را به هم وصل می‌کند قانون جابه‌جایی وین را نمایش می‌دهد ($5E7 = 5 \times 10^7$).

این رابطه قانون استفان-بولتزمن نامیده می‌شود که در آن σ ثابت استفان-بولتزمن است و مقدارش برابر است با $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^2$.

تابش از سطوح واقعی همیشه کمتر از تابش جسم سیاه یا چشمه پلانکی است و به‌طور کمی با گسیلمندی ϵ تعیین می‌شود. اگر در یک دمای معین گسیلندگی تابشی برای یک نمونه مورد اندازه‌گیری M و برای جسم سیاه M_{bb} باشد، بنا به تعریف داریم

$$\epsilon(T) = \frac{M}{M_{bb}} \quad (15-2)$$

از مقایسه گسیلمندی تابشی جسم سیاه و نمونه در بازه‌های کوچک طول‌موجهای مختلف می‌توان گسیلمندی طیفی را محاسبه کرد، که در حالت کلی مقدار ثابتی نیست. در مورد خاصی که

گسیلمندی مستقل از طول موج است نمونه را جسم خاکستری می‌نامند. برای این مورد، گسیلمندگی طیفی نمونه متناسب با گسیلمندگی طیفی جسم سیاه است، و منحیهای آنها تنها در یک ضریب ثابت با هم تفاوت دارند. به‌عنوان مثال، تابش طیفی از یک سیم تنگستن داغ به تابش طیفی یک جسم خاکستری با $\epsilon = 4$ تا 5 نزدیک است.

از تابش جسم سیاه برای تعیین یک مقیاس رنگ برحسب دمای مطلق استفاده می‌شود. دمای رنگ یک نمونه نور عبارت است از دمای جسم سیاه با نزدیکترین توزیع انرژی طیفی. بدین ترتیب، می‌توانیم بگوئیم شعله یک شمع دارای دمای رنگ 1900 K است، در حالی که خورشید دارای دمای رنگ نوعی 5500 K است.

۲-۵ چشمه‌های تابش اپتیکی

چشمه‌های نور ممکن است طبیعی باشند، مانند نور خورشید و نور آسمان، یا مصنوعی باشند، مانند نور لامپهای التهابی و تخلیه. همچنین می‌توان نور چشمه‌های مختلف را به‌صورت تکفام، با طیف خطی، یا پیوسته رده‌بندی کرد. نحوه توزیع انرژی در تابش رنگ نور و در نتیجه رنگ سطوحی را که در زیر نور دیده می‌شوند تعیین می‌کند. هر کس که عکس رنگی گرفته باشد می‌داند که رنگ یک شیء در عکس بستگی به نوع نوری دارد که به خود شیء تابیده شده است.

بررسی مختصر زیر درباره چشمه‌های نور را نباید جامع دانست، بلکه مقصود از آن جلب توجه به حوزه وسیعی از اطلاعات عملی است. برای این بررسی محدود، تعدادی از چشمه‌ها را به‌صورت زیر رده‌بندی می‌کنیم:

(الف) نور خورشید، نور آسمان

(ب) چشمه‌های التهابی

۱. چشمه‌های جسم سیاه

۲. میلتابه و تاباننده نرنست

۳. رشته تنگستن

(ج) لامپهای تخلیه

۱. چشمه‌های تکفام و طیفی

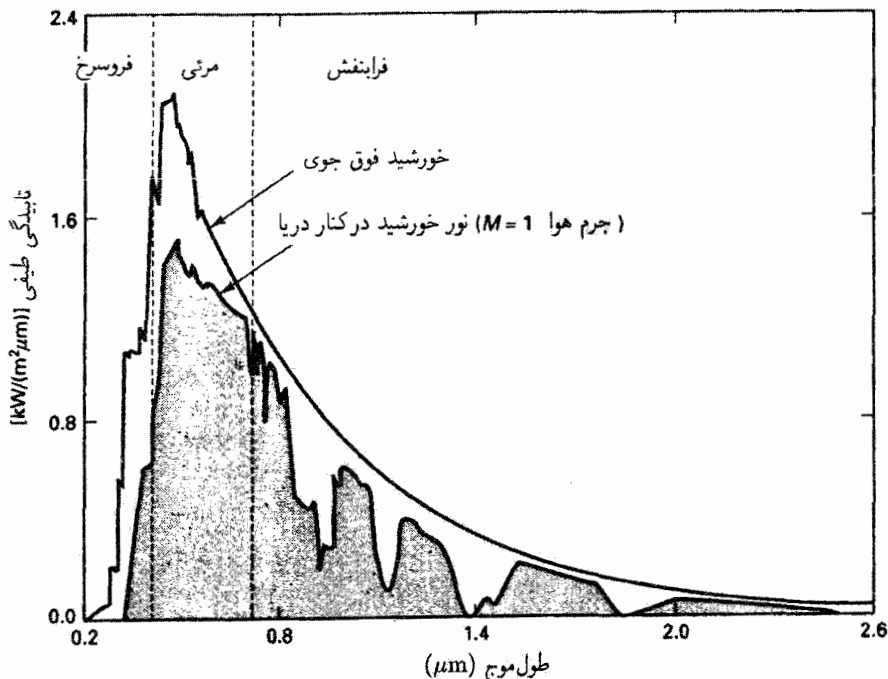
۲. چشمه‌های پرشدت

(الف) قوس کربن

(ب) قوس کوتاه فشرده

(ج) درخش

(د) قوس زرگونیم چگال



شکل ۹-۲ تابیدگی طیفی خورشیدی در بالای جو و در یک سطح افقی کنار دریا، در یک روز آفتابی وقتی خورشید در سمت‌الرأس است.

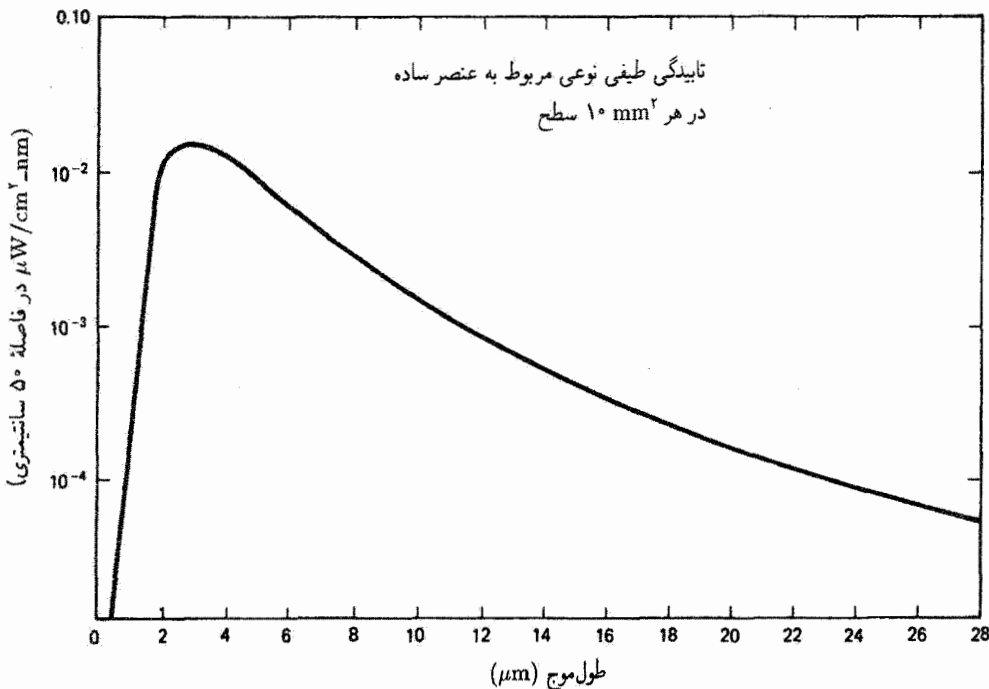
۳. لامپهای فلورسان

(د) دیودهای گسیلنده نور نیم‌رسانا (LED)

(ه) چشمه همدوس-لیزر

نور روز ترکیبی از نور خورشید و نور آسمان است. نور مستقیمی که از خورشید می‌آید توزیع طیفی‌ای دارد متفاوت با توزیع طیفی نور آسمان که در آن نور آبی غالب است. نموداری از تابیدگی طیفی خورشیدی در شکل ۹-۲ نشان داده شده است. تابش خورشیدی برون‌جوی نشان می‌دهد که خورشید تقریباً مانند یک جسم سیاه با دمای 6000 K در مرکز و 5000 K در لبه رفتار می‌کند، اما تابشی که به سطح زمین می‌رسد به علت جذب جوی تغییر می‌کند. میانگین سالانه تابیدگی کل درست خارج از جو زمین را ثابت خورشیدی می‌نامند که برابر است با 1350 W/m^2 . هر چند از تابش خورشیدی معمولاً به‌عنوان چشمه نور در آزمایشگاه استفاده نمی‌شود، لامپهای زنون پر فشار با صفایهای مناسب که در بازار یافت می‌شوند چشمه مصنوعی بسیار خوبی برای شبیه‌سازی خورشیدی فراهم می‌آورند.

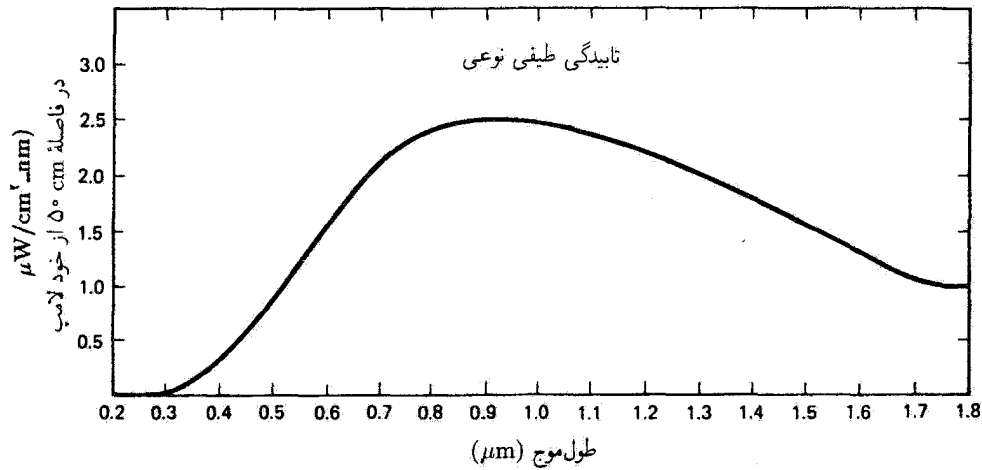
چشمه‌های اپتیکی مصنوعی را که در آنها نور از موادی تولید می‌شود که با جریان الکتریکی



شکل ۲-۱۰ چشمهٔ فرسوخ میلتابه با تابش پیوسته‌ای از ۱ تا بیشتر از $25\mu\text{m}$ در دمای متغیری تا 1000°K . این چشمه یک مقاومت از جنس سیلیسیم کاربید به قطر 6.2mm است.

تا حد التهاب گرم شده‌اند لامپهای التهابی می‌نامند. از واکنجستگی آنها و مولکولهای مواد پس از برانگیختگی گرمایی آنها تابش به‌وجود می‌آید. انرژی درگسترهٔ وسیعی از طول‌موجها گسیل می‌شود. چشمه‌های جسم سیاه تجاری از کاواکهایی با روزنهٔ کوچک تشکیل شده‌اند. گسیلمندی تابش ناشی از این روزنهٔ کوچک اساساً ثابت و برابر با یک است. این نوع چشمه‌ها در دهامای کاری از دمای نیتروژن مایع (-196°C) تا 3000°C در دسترس‌اند. چشمهٔ التهابی که مخصوصاً در فرسوخ مفید است تابانندهٔ نرنست است. این چشمه یک لوله یا میلهٔ استوانه‌ای از مواد نسوز (اکسید زرگونیم، اکسید توریم، اکسید ایتیریم) است که با جریان الکتریکی گرم می‌شوند، و از نور مرئی تا حدود $3\mu\text{m}$ قابل استفاده است. تابانندهٔ نرنست مانند جسم خاکستری با گسیلمندی بزرگتر از 75° رفتار می‌کند. وقتی چشمه یک میلهٔ سیلیسیم کاربید پیوندی باشد آن را میلتابه می‌نامند، که تقریبی است از جسم خاکستری با گسیلمندی متوسط 88° (شکل ۲-۱۰ را ببینید).

لامپ رشته‌ای تنگستن رایجترین چشمه در ابزارهای اپتیکی به‌منظور استفاده از تابش پیوسته در ناحیهٔ مرئی و فرسوخ نزدیک است. این لامپ با تنوع زیاد از لحاظ شکل رشته، حباب و پایه عرضه می‌شود. رشتهٔ این لامپ به‌صورت سیم‌پیچ یا نوار است که نوار سطح تابش‌کنندهٔ

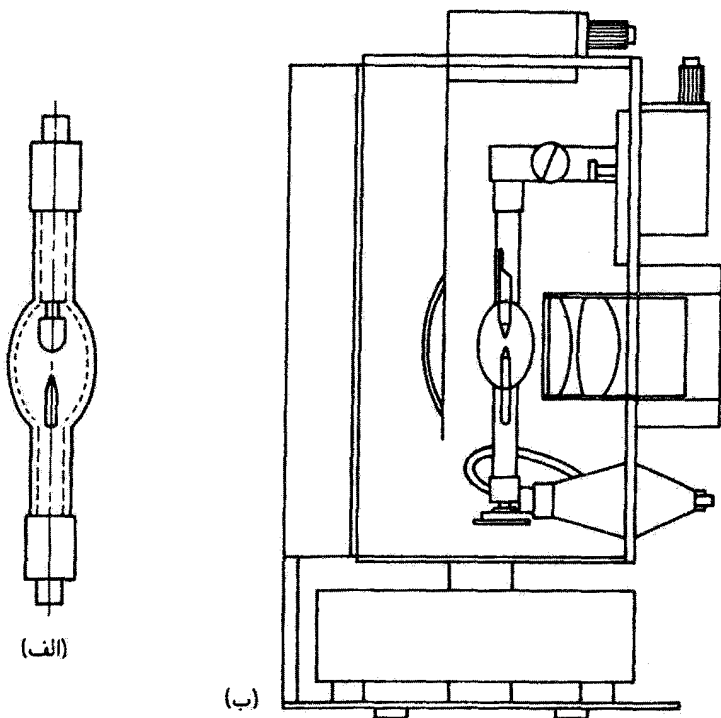


شکل ۲-۱۱ تابیدگی طیفی مربوط به لامپ هالوژن کوارتز 100 W ، که تابش پیوسته‌ای از 3 r° تا 25 r° به‌دست می‌دهد.

یکنواخت‌تری را به‌دست می‌دهد. حباب معمولاً از جنس شیشه است، اگر چه برای کار در دماهای بالاتر از کوارتز استفاده می‌شود. تابش در طیف مرئی تقریبی است از تابش جسم خاکستری، با گسیلمندیهایی که برای رشته‌های سیم‌پیچ فشرده به یک نزدیک هستند. لومن خروجی هم به دمای رشته و هم به توان الکتریکی ورودی (واتاژ) بستگی دارد. موقع کار لامپ، تنگستن رشته به تدریج تبخیر می‌شود و روی سطح داخلی حباب می‌نشیند و در نتیجه لایه کدروی به‌وجود می‌آید که شار خروجی را تا 18% در طول عمر لامپ کاهش می‌دهد. این فرایند همچنین باعث تضعیف رشته و افزایش مقاومت الکتریکی آن می‌شود. برکردن حباب از یک گاز خنثی، معمولاً ازت یا آرگون، با فشار حدود 8 r° جو منجر به کند شدن تبخیر تنگستن می‌شود. اخیراً با افزودن یک بخار هالوژن (ید، برم) به گاز خنثی در لامپ هالوژن-کوارتز یا هالوژن-تنگستن این اشکال به حداقل رسیده است. بخار هالوژن باعث می‌شود که تنگستن در یک چرخه تولید مجدد از حباب جدا شود. ید با تنگستی که روی حباب نشسته است ترکیب می‌شود و تشکیل گاز تنگستن یدید می‌دهد. سپس این گاز در مجاورت رشته داغ تجزیه می‌شود و تنگستن روی رشته رسوب می‌کند و فرایند با ید آزاد شده تکرار می‌شود. منحنی تابیدگی طیفی نوعی برای یک چشمه رشته‌ای هالوژن-کوارتز 100 W در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده است. این لامپ تقریبی است از یک چشمه خاکستری 3000 K ، و یک طیف پیوسته از 3 r° تا 25 r° فراهم می‌کند. در لامپ قوس تنگستن تخلیه قوسی بین دو الکترود از جنس تنگستن این الکترودها را در جوی از آرگون تا حد التهاب گرم می‌کند، و توزیع طیفی تابشی مانند لامپ تنگستن در 3100 K به‌دست می‌آید.

لامپ تخلیه از لحاظ تابش خروجی خود بستگی به دینامیک تخلیه الکتریکی در گاز دارد. جریان الکتریکی از گاز یونیده بین دو الکترود واقع در یک لوله از جنس شیشه یا کوارتز عبور می‌کند. (شیشه تابش فرابنفش کمتر از حدود 300 nm را جذب می‌کند، در حالی‌که کوارتز تا حدود 180 nm را عبور می‌دهد.) میدان الکتریکی به الکترونها به اندازه کافی شتاب می‌دهد تا اتمهای بخار را یونیده کنند. چشمه الکترونها ممکن است یک کاتد گرم شده (گسیل گرمایونی)، یک میدان قوی که به کاتد اعمال می‌شود (گسیل میدانی) یا برخورد یونهای مثبت به کاتد (گسیل ثانویه) باشد. واانگیختگی اتمهای برانگیخته بخار باعث آزاد شدن انرژی به صورت فوتونهای تابش می‌شود. کنش پرفشار و جریان قوی به طیف پیوسته خروجی به علاوه خطوط طیفی مشخصه بخار منجر می‌شود. در فشار و جریان کمتر، خطوط طیفی تیزتر ظاهر می‌شوند و طیف پیوسته زمینه در کمترین حد خود است. اگر بخواهیم خطوط طیفی تیز داشته باشیم، چنانکه در چشمه‌های تکفام صادق است، لامپ برای کار در فشار، دما و جریان کم طراحی می‌شود. برای مثال، لامپ قوسی سدیم تابشی می‌دهد که تقریباً منحصر به یک نوار "زرد" باریک مربوط به خطوط 589.6 nm و 589.0 nm است. لامپ تخلیه جیوه کم فشار غالباً با استفاده از صافی برای تهیه تابش تکفام شدید در طول موجهای 404.7 nm و 435.8 nm (بنفش)، 546.1 nm (سبز)، و 579.0 nm (زرد) به‌کار می‌آید. برای تهیه سایر طول موجهای مورد نظر می‌توان از گازها یا بخارهای دیگر استفاده کرد.

وقتی به جای خلوص طیفی بخواهیم شدت زیاد در اختیار داشته باشیم طرحهای دیگری قابل استفاده‌اند. شاید قدیمی‌ترین چشمه از این نوع قوس کربن باشد که هنوز هم در نورافکن‌ها و پروژکتورهای سینما کاربرد وسیعی دارد. قوس جریان قوی بین دو میله کربن در هوا تشکیل می‌شود. لامپ قوس کربن 200 A می‌تواند درخشایی با قله 1600 cd/mm^2 داشته باشد. این چشمه دارای توزیع طیفی نزدیک به جسم خاکستری در 6000 K است. با استفاده از مواد مختلف در هسته میله کربن گستره وسیعی از خروجیهای طیفی به دست می‌آید. وقتی قوس در جوی از بخار پرفشار قرار داشته باشد، لامپ یک چشمه قوس کوتاه فشرده است و تابش بین طیفهای خطی و پیوسته تقسیم شده است. طرحی از این نوع لامپ و محفظه آن در شکل ۲-۱۲ نشان داده شده است. مفیدترین این لامپها، که برای کار از 50 W تا 25 kW طراحی شده‌اند، عبارت‌اند از لامپ قوس جیوه‌ای پرفشار، که تابش زمینه نسبتاً ضعیف اما خطوط طیفی شدیدی دارد و یک چشمه خوب فرابنفش است؛ لامپ قوس زنون، با تابش عملاً پیوسته‌ای از فرابنفش نزدیک تا فرورسرخ نزدیک؛ لامپ قوس جیوه-زون، که اساساً طیف جیوه را با سهمی از زنون در طیف پیوسته و گسیل طیفی شدید خاص خود در گستره 800 nm تا $1 \mu\text{m}$ فراهم می‌کند. چنانکه قبلاً گفته شد، کیفیت رنگ لامپ زنون شبیه به نور خورشید در دمای رنگ 6000 K است. منحنیهای گسیل طیفی برای

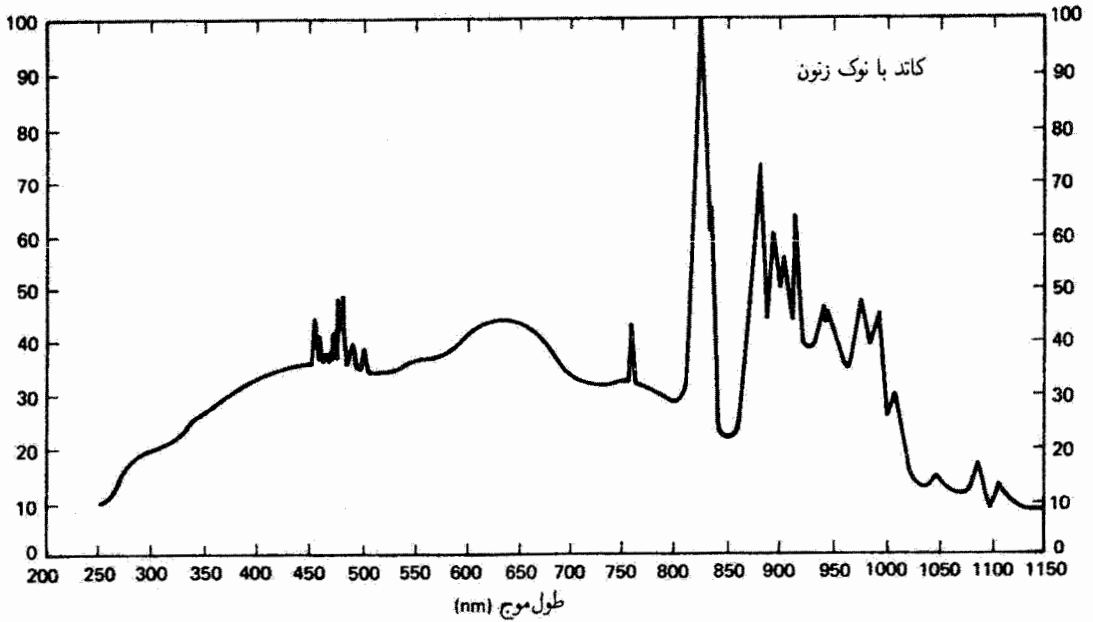


شکل ۲-۱۴ چشمه نور قوس کوتاه فشرده پُرشدت. (الف) لامپ قوس فشرده. (ب) لامپ درون محفظه، با بازتابنده پشت و دستگاه تمرکز.

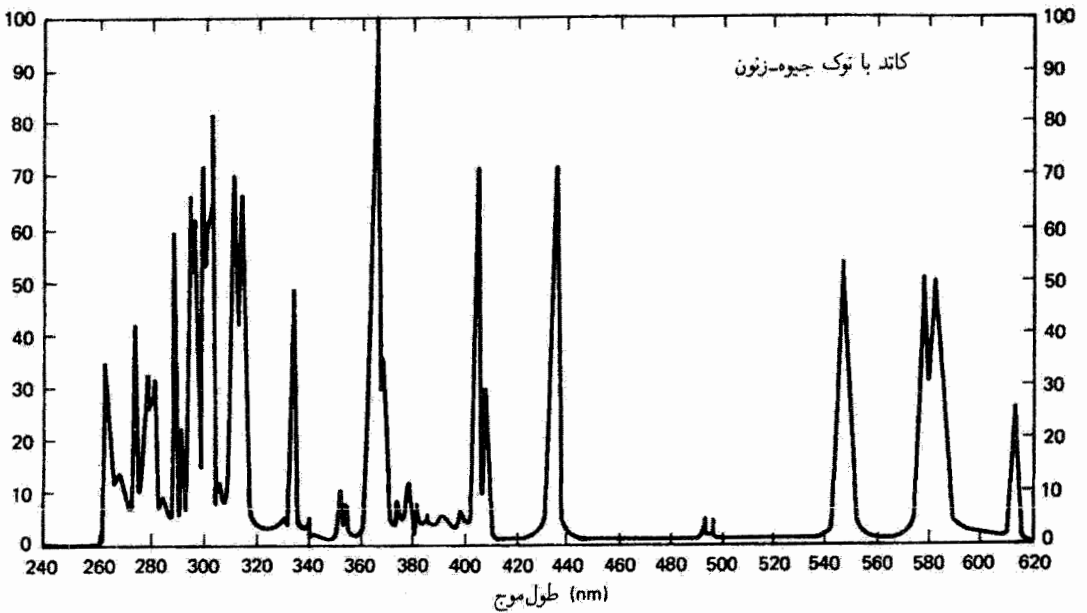
لامپهای زنون و جیوه-زنون در شکل‌های ۲-۱۳ و ۲-۱۴ نشان داده شده‌اند. لامپهای قوس هیدروژن و دوتریم برای طیف‌نمایی فرابنفش کاملاً مناسب هستند زیرا تابندگی زیادی با زمینه پیوسته در ناحیه فرابنفش ایجاد می‌کنند. شکل ۲-۱۵ خروجی طیفی نوعی را برای لامپ دوتریم، که از زیر 180 nm تا 400 nm طیف پیوسته بدون خطی تولید می‌کند، نشان می‌دهد.

لامپ درخش یک چشمه خروجی زیاد با تابش مرئی و فروسرخ نزدیک است که از تخلیه سریع انرژی الکتریکی در یک حباب پر از گاز ایجاد می‌شود. این گاز اکثراً زنون است. برعکس، لامپ درخش عکاسی روشنایی پُرشدت و کوتاه مدتی تولید می‌کند که ناشی از احتراق سریع ورقه یا سیم فلزی (آلومینیم یا زرگونیم) در جو اکسیژن خالص است.

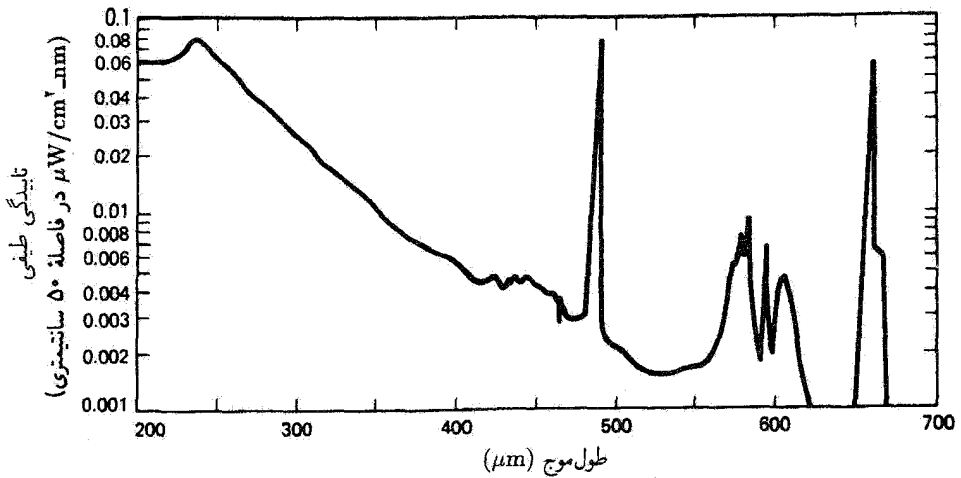
وقتی در ابزارهای اپتیکی یک چشمه نقطه‌ای پُرشدت تابش مورد احتیاج باشد لامپ قوس زرگونیم چگال با واتاژی از 2 W تا 300 W قابل استفاده است. بخار زرگونیم از یک کاتد با پوشش اکسید در جو آرگون تولید می‌شود. تابش هم از انتهاهای سطح کاتد گذاخته و هم از گاز آرگون و بخار



شکل ۱۳-۲ گسیل طیفی برای لامپ قوس فشرده زنون.



شکل ۱۴-۲ گسیل طیفی برای لامپ قوس جیوه-زنون.

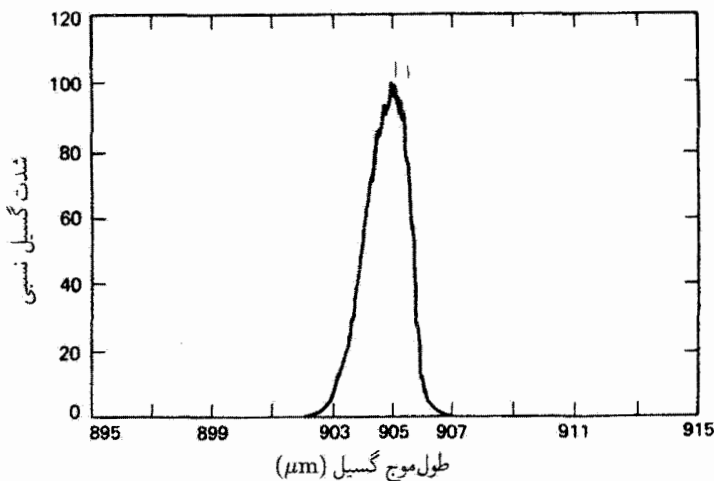


شکل ۲-۱۵ گسیل طیفی برای لامپ قوس دوتریم در ۵۰ W.

زرگونیم برانگیخته ناشی می‌شود. این تابش از یک روزنه کوچک به قطر ۱۳ ر° تا ۲۷۵ mm در آند فلزی و از دریچه‌ای که در حباب کار گذاشته شده است و از لحاظ اپتیکی تخت است دیده می‌شود. توزیع طیفی تقریبی است از یک چشمه جسم خاکستری ۳۲۰۰ K. در لامپ فلوروسان از تخلیه الکتریکی کم فشار و با جریان کم در بخار جیوه استفاده می‌شود. تابش فرابنفش از اتمهای برانگیخته جیوه با ایجاد فلوروسانی در پوشش فسفرسان روی سطح داخلی حباب شیشه‌ای به نور مرئی تبدیل می‌شود. خروجی طیفی به ماده فسفرسان خاص مورد استفاده بستگی دارد. برای مثال، در لامپ "نور روز" از مخلوطی از سیلیکات برلییم روی و تنگستات منیزیم استفاده می‌شود.

یک نوع بسیار متفاوت چشمه نور عبارت است از دیود گسیلنده نور کم شدت (LED)، که یک قطعه حالت جامدی است که در آن از پیوند $p-n$ در یک بلور نیمرسانا استفاده می‌شود. این قطعه در یک بسته متمرکز اپتیکی کار گذاشته شده است. وقتی یک پیش‌ولت کوچک در جهت جلو اعمال شود، از ترکیب الکترونها و حفره‌ها در نزدیکی پیوند انرژی اپتیکی ایجاد می‌شود. LEDهای رایج عبارتند از قطعه GaAs فرورسرخ با طول موج خروجی ماکسیممی نزدیک ۹۰۰ nm، و قطعه SiC مرئی که قله خروجی آن در ۵۸۰ nm است. LEDها نوارهای گسیل طیفی باریکی، چنانکه از شکل ۲-۱۶ مشهود است، فراهم می‌کنند. محلولهای جامد از مواد نیمرسانای مرکب مشابهی در ناحیه‌های طیفی مختلف، بسته به نوع ترکیب آلیاژ، خروجی می‌دهند.

لیزر یک چشمه بسیار مهم نوین برای تابش همدوس فوق‌العاده تکفام است که می‌تواند تابش با شدت بسیار زیاد تولید کند. لیزرها در ناحیه‌های فرابنفش، مرئی و فرورسرخ طیف تابش گسیل می‌کنند. لیزرها را به علت نقش مهمی که در تجهیزات اپتیکی دارند بعداً جداگانه بررسی می‌کنیم.



شکل ۲-۱۶ خروجی طیفی مربوط به دیود گسیلنده نور GaAs.

۲-۶ آشکارسازهای تابش

هر وسیله‌ای که به انرژی تابش فرودی پاسخ فیزیکی قابل اندازه‌گیری می‌دهد یک آشکارساز است. معمولی‌ترین آشکارساز مسلماً چشم است. در حالی که چشم پاسخی کیفی و ذهنی فراهم می‌کند آشکارسازهایی که در اینجا مورد بحث قرار می‌دهیم پاسخ کمی و عینی به دست می‌دهند. به علت نقش منحصر به فرد چشم در بینایی انسان، آن را در فصل دیگری جداگانه بررسی می‌کنیم.

متداولترین آشکارسازها را می‌توان به صورت زیر رده‌بندی کرد:

(الف) آشکارسازهای گرمایی

۱. ترموکوپلها و ترموپیلها

۲. بولومترها و ترمیستورها

۳. پیروالکتريک

۴. پنوماتیک یا گالی

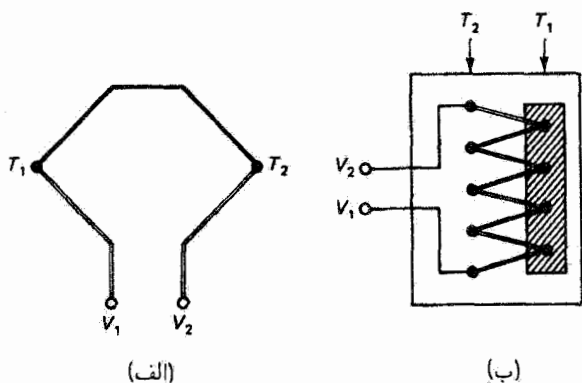
(ب) آشکارسازهای کوانتومی

۱. فوتوگسیل‌مند-لامپ عکاسی و لامپ فوتونفزونگر

۲. فوتورسانا

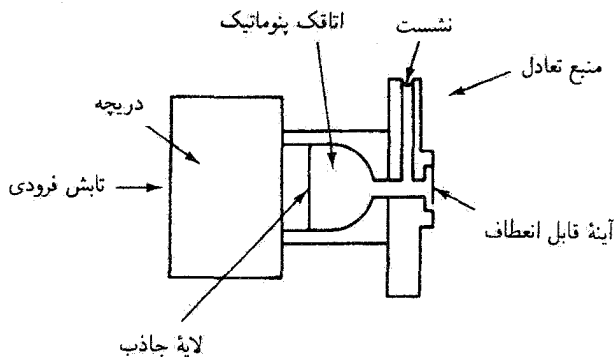
۳. فوتولتایی

۴. عکاسی



شکل ۲-۱۷ (الف) ترموکوپل ساخته شده از مواد نامشابه (خطوط سیاه و روشن) که در نقاط T_1 و T_2 به هم متصل شده‌اند؛ در این نقاط اختلاف دما باعث ایجاد نیروی الکتروموتوری بین دو سر V_1 و V_2 می‌شود. (ب) ترموکوپل ساخته شده از جفت‌های متوالی. تابش در اتصال‌های T_1 جذب می‌شود؛ این اتصالها با یک گیرنده سیاه در تماس گرمایی هستند و از لحاظ گرمایی از اتصال‌های T_2 عایق شده‌اند.

وقتی پاسخ قابل اندازه‌گیری اولیه یک آشکارساز به تابش فرودی افزایش دما باشد، اسباب را آشکارساز گرمایی می‌نامند. گیرنده معمولاً یک نوار یا قطعه فلزی سیاه‌شده است که به‌طور مؤثری در تمام طول موجها جذب می‌کند. چنین ابزاری که در آن افزایش دما در محل اتصال دو فلز یا نیم‌رسانای نامشابه تولید ولتاژ می‌کند ترموکوپل نامیده می‌شود (شکل ۲-۱۷ الف). وقتی این اثر با استفاده از ردیفی از این نوع اتصالها به‌صورت متوالی تقویت شود اسباب را ترموپیل می‌نامند (شکل ۲-۱۷ ب). آشکارسازهای گرمایی شامل بسیاری از اسبابهایی می‌شوند که به افزایش دما با تغییر قابل ملاحظه مقاومت پاسخ می‌دهند. عنصر حساس این نوع ابزار ممکن است فلز باشد (بولومتر) یا، چنانکه متداولتر است، نیم‌رسانا باشد (ترمیستور). نوعاً دو عنصر حساس سیاه‌شده در بازوهای مجاور یک مدار پل کار گذاشته می‌شود که یکی از آنها در معرض تابش فرودی قرار می‌گیرد. عدم توازن در مدار، ناشی از تغییر مقاومت، با انحراف گالوانومتر یا جریان نشان داده می‌شود. در آشکارساز پیروالکترونیک، تغییر دما باعث تغییر بار سطحی در مواد خاصی، مانند تانتالیت لیتیم یا سولفات تری‌گلیسین (TGS) که از خود اثر پیروالکترونیک نشان می‌دهند، می‌شود. این آشکارساز مانند خازنی عمل می‌کند که بار آن تابعی از دما است. سلول گالی انبساط گرمایی گاز را اندازه‌گیری می‌کند. گرمایی که یک پوسته سیاه‌شده جذب می‌کند به گاز داخل اتاقک بدون درز منتقل می‌شود. افزایش فشار گاز معمولاً با انحراف یک آینه به‌طور اپتیکی آشکارسازی می‌شود. طرحی از این سلول در شکل ۲-۱۸ نشان داده شده است. مشخصه عمومی آشکارسازهای گرمایی پاسخ کند آنها به تغییرات تابش فرودی است. اگر آشکارساز باید علامت ورودی متغیری مانند یک تپ را

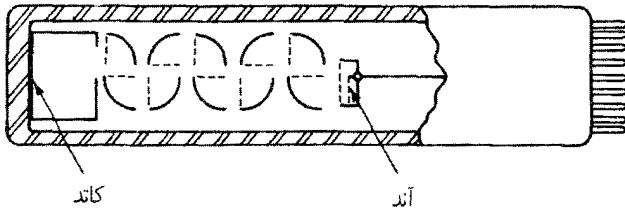


شکل ۲-۱۸ آشکارساز فرورسوخ پنوماتیک گالی.

دنبال کند، آشکارسازهای کوانتومی تندپاسخ‌تر؛ که در زیر از آنها بحث خواهیم کرد، مطلوب‌تر از آشکارسازهای گرمایی‌اند. سرعت پاسخ با یک ثابت زمانی توصیف می‌شود که معرف زمان لازم برای بازیابی تعادل در خروجی پس از تغییر در ورودی است. بدین ترتیب، آشکارسازهای کوانتومی برای عمل پریسامد مناسب‌تراند.

آشکارسازهای کوانتومی، به جای پاسخ به انرژی گرمایی، به آهنگ فوتونهای تابش فرودی پاسخ می‌دهند. فوتونها مستقیماً با ماده آشکارساز برهم‌کنش می‌کنند. وقتی اثر قابل اندازه‌گیری آزاد شدن الکترون از سطح برتابیده باشد اسباب را آشکارساز فوتوگسیلمند می‌نامند. سطح حساس به نور، که نوعاً از فلزهای قلیایی تشکیل شده است، فوتونهای فرودی‌ای را جذب می‌کند که آنقدر انرژی منتقل می‌کنند که بعضی الکترونها بتوانند بر تابع کار غلبه کنند و از سطح خارج شوند. اگر الکترونهای فوتوگسیلمده صرفاً توسط یک آند همیشه مثبت در یک لوله تخلیه شده جمع‌آوری شوند به طوری که جریانی در مدار خارجی برقرار شود، آشکارساز را فوتولوله دیود می‌نامند. وقتی که علامت در داخل باگسیل الکترون ثانویه تقویت شود آشکارساز را فوتونفزونگر می‌نامند؛ شکل ۲-۱۹ را ببینید. در این مورد، فوتوالکترونهای اولیه شتاب می‌گیرند به طوری که در نتیجه برخوردای متوالی، که هر یک از آنها جریان را با افزودن الکترونهای ثانویه چند برابر می‌کند، بهمنی از الکترونها متناظر با هر فوتوالکترون اولیه در خروجی به وجود می‌آید.

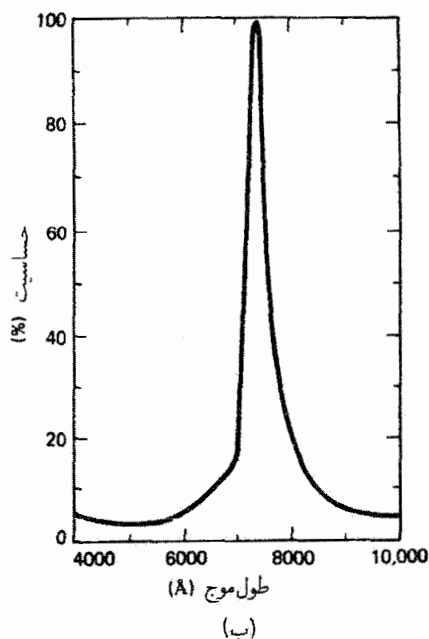
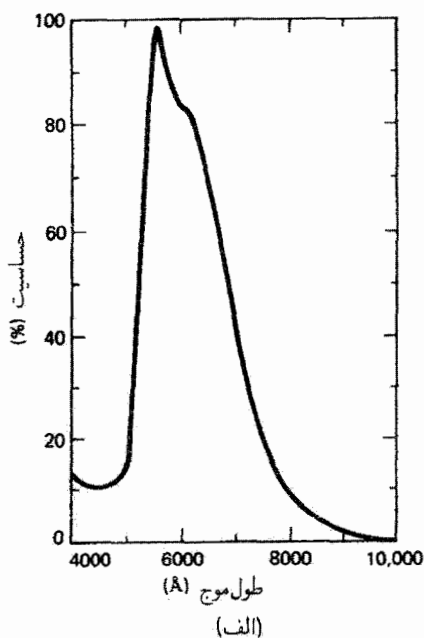
وسیله تقویت دیگری که در فوتوسلول گازی از آن استفاده می‌شود تولید الکترونهای بیشتری را با یونش گاز باقیمانده امکانپذیر می‌سازد. در مورد فوتونهای پراثری ($\lambda < 550 \text{ nm}$)، حساسیت آشکارسازهای فوتوگسیلمند برای شمارش فوتونها کفایت می‌کند. این نوع آشکارسازها در گستره‌های طیفی مرئی و فرابنفش دارای حساسیت زیادتری هستند. برای طول‌موجهای ناحیه فرورسوخ، بیشتر از



شکل ۲-۱۹ یک نوع ساختار لوله فوتونفزونگر. الکترونهاى فوتوگسیلیده در مسیره‌هاى زیگ‌زاگ ضمن برخورد با سطوح دینود خمیده در امتداد لوله شتاب می‌گیرند، و در هر برخورد الکترونهاى ثانویه دیگری ایجاد می‌کنند. جریان چندبرابر شده در آند جمع‌آوری می‌شود.

$1\mu\text{m}$ فوتوگسیلنده نداریم، و آشکارسازهای فوتورسانا به‌کار می‌روند. در این آشکارسازها، فوتونهای جذب شده در لایه‌های نازک یا ماده‌ی پر حجم بارهای آزاد اضافی به‌صورت زوجهای الکترون-حفره تولید می‌کنند. هم بارهای منفی (الکترونها) و هم بارهای مثبت (حفره‌ها) رسانندگی الکتریکی نمونه را زیاده‌تر می‌کنند. بدون برتابندگی، یک ولتاژ یکطرفه در این نوع مواد که ذاتاً مقاومت ویژه زیادی دارند جریانی کوچک یا "تیره" به‌وجود می‌آورد. وجود برتابندگی و حاملهای بار آزاد اضافی که از این راه تولید می‌شوند به‌طور مؤثری مقاومت الکتریکی ماده را کاهش می‌دهد، و فوتوجریان بزرگتری ایجاد می‌شود. از ترکیبهای نیمرسانای CdS و CdSe غالباً در ناحیه‌های مرئی و فروسرخ نزدیک استفاده می‌شود (شکل ۲-۲۰ را ببینید)، در حالی‌که در نقاط دورتر ناحیه فروسرخ نزدیک ترکیبهای PbS (برای ۸-۳ μm) و PbSe (برای ۱ تا ۵ μm) مطلوب هستند.

متداولترین آشکارساز فوتولتایی یک پیوند $p-n$ ، فوتودیود نیمرسانا، است. این اسباب از پیوندی بین مواد آلاییده نوع p (پر از حاملهای بار مثبت) و آلاییده نوع n (پر از حاملهای بار منفی)، اکثراً سیلیسیم، تشکیل شده است. آرایش عبارت است از افزودن مقدار اندکی ناخالصی به نیمرسانا برای تهیه الکترونهاى رسانش اضافی (نوع n) یا کم کردن آنها (نوع p). در ناحیه باریکی بین این مواد، در نتیجه تعادل جریان یک میدان الکتریکی داخلی به‌وجود می‌آید. وقتی فوتونها در مجاورت پیوند جذب می‌شوند جفتهای الکترون-حفره توسط میدان از هم جدا می‌شوند، و تغییر ولتاژی ایجاد می‌شود که آن را اثر فوتولتایی می‌نامند. شاید مشهورترین کاربردهای این آشکارساز سلول خورشیدی و نورسنج عکاسی باشند. گونه‌ای از سلول فوتولتایی دیود بهمینی است که یک سازوکار تقویت درونی دارد که منجر به حساسیت تقویت شده‌ای تا حدود $15\mu\text{m}$ را می‌شود. در ناحیه ۱ تا $8\mu\text{m}$ ، ترکیبهای نیمرسانای PbTe و PbSe، دارای اثر فوتولتایی قوی هستند و حساسیتی بیشتر از ترموکوپل یا بولومتر معمولی دارند. مانند همه آشکارسازهایی که برای کار در طول موجهای بزرگتر طراحی شده‌اند، آشکارسازهای فوتولتایی را غالباً سرد می‌کنند تا بتوانند با حساسیت بیشتری کار کنند.



شکل ۲-۲ (الف) پاسخ طیفی سلول فوتورسانای CdS. قلهٔ پاسخ در 5500 \AA به پاسخ چشم انسان بسیار نزدیک است. این سلول با لامپهای التهابی، فلئورسان و تون قابل استفاده است. (ب) پاسخ طیفی سلول فوتورسانای CdSe با قله‌ای در 7350 \AA . این سلول به فرسرخ نزدیک حساس است و با لامپهای التهابی و تون کاربرد دارد.

قابها یا آرایه‌های دوبعدی فوتودیودها آشکارسازی تصویرها را ممکن می‌کنند. هر فوتودیود یا قطعهٔ نیمرسانا-اکسید-فلز (MOS) به تابش فرودی پاسخ می‌دهد و یک پیکسل خروجی (عنصر تصویر) به وجود می‌آورد. با تاباندن نور، هر یک از قطعه‌های جدا، که روی تراشهٔ مربع شکلی از مثلاً سیلیسیم نشانده شده است، بار فوتوالقایی را در یک چاه پتانسیل که از اعمال یک ولتاژ درجه به وجود آمده است ذخیره می‌کند. بار ذخیره شدهٔ مربوط به هر پیکسل، که اندازه‌ای است از تابیدگی موضعی، برای ثبت الکترونی تصویر روش می‌شود. روبش و برخوانی از طریق انتقال بار در هر ردیف از این قطعه‌ها (قطعات بار-جفت‌شدگی، یا CCD) یا با تزریق بار به مادهٔ نیمرسانای بدنهٔ پایه (قطعات بار-تزریقی، یا CID) صورت می‌گیرد [۲]. با خوانش پایایی بار ذخیره شده، مجموعهٔ مختصات xy مربوط به توزیع تابیدگی اصلی بازسازی الکترونیکی می‌شود تا تصویر تشکیل شود. این نوع آرایه‌های فوتودیود در دوربینهای تلویزیونی به کار می‌روند و همچنین برای جانشینی فیلمهای عکاسی در تلسکوپهای اخترشناسی و طیف‌نگارها از آنها استفاده شده است.

و سرانجام، آشکارسازی که به علت استفاده وسیع از عکاسی بین مردم رواج یافته است فیلم عکاسی است. این اندوده‌های عکاسی با حساسیت طیفی از ناحیه پرتو ایکس تا فرسرخ نزدیک در حدود $1\mu\text{m}$ تا $10\mu\text{m}$ یافت می‌شوند. ماده حساس اندوده‌ای از دانه‌ها یا بلورهای هالیدنقره است. فوتون فرودی به الکترون‌والانس یون هالید انرژی می‌دهد، و سپس این الکترون با یون نقره ترکیب می‌شود و اتم نقره خنثی به وجود می‌آید. این اندوده حتی قبل از ظهور حاوی یک تصویر نهان است که توزیعی است از اتمهای نقره احیا شده که بستگی به تغییرات انرژی تابشی دریافت شده دارد. این تصویر نهان با کنش ماده ظهور به اصطلاح "تقویت" می‌شود. این کنش شیمیایی الکترونیهای آزاد بیشتری برای ادامه فرایند احیا فراهم می‌کند و در آن تصویر نهان به صورت کاتالیزور برای کنش بیشتر عمل می‌کند. چگالی اتمهای نقره، و در نتیجه کدری فیلم، هم به تابیدگی و هم به زمان نوردهی بستگی دارد، و در نتیجه فیلم عکاسی برخلاف سایر آشکارسازها این مزیت را دارد که علامتهای نوری را جمع می‌کند. حتی تابش ضعیف را می‌توان با اثر تجمع‌پذیر نوردهی طولانی آشکارسازی کرد.

علاوه بر آگاهی از گستره طیفی که یک آشکارساز خاص روی آن مؤثر است، دانستن حساسیت واقعی یا به عبارت دقیقتر پاسخمندی S آشکارساز که به صورت زیر تعریف می‌شود نیز مهم است

$$S = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} \quad (۱۶-۲)$$

ورودی می‌تواند شار تابشی یا تابیدگی باشد. خروجی تقریباً همیشه جریان یا ولتاژ است. برای اینکه پاسخمندی یک مشخصه مفید آشکارساز باشد باید در گستره مفید اسباب ثابت باشد. به عبارت دیگر، آشکارساز همراه با تقویت‌کننده و مدارهای وابسته به آن باید پاسخی خطی با خروجی متناسب با ورودی به دست دهد. اما به طور کلی پاسخمندی مستقل از طول موج نیست. منحنیهای پاسخمندی نسبت به طول موج با آشکارسازهای موجود در بازار ارائه می‌شوند. وقتی پاسخمندی تابعی از λ است، آشکارساز را گزیننده می‌نامند. آشکارساز ناگزیننده اسبابی است که تنها به شار تابشی بستگی دارد و از طول موج مستقل است. آشکارسازهای گرمایی که در آنها از نوار سیاه‌شده‌ای به عنوان گیرنده استفاده می‌شود می‌توانند ناگزیننده باشند، اما در یچه‌های ورودی به این نوع اسبابها ممکن است آنها را گزیننده کنند. آشکارسازی D برای یک آشکارساز عبارت است از عکس توان آشکارسازی مینیمم، Φ_N ، که توان هم‌ارز نوبه آشکارساز نامیده می‌شود:

$$D = \frac{1}{\Phi_N}$$

توان آشکارپذیر مینیمم با نوبه‌ای که ذاتاً درکنش آشکارساز وجود دارد محدود می‌شود. این نوبه آن قسمت از علامت یا خروجی است که به ورودی مورد نظر مربوط نیست. علت‌های بسیاری برای نوبه وجود دارند از جمله افت‌وخیزهای آماری فوتونها یا نوبه تابشی، و اغتشاش گرمایی حاملهای جریان یا نوبه جانسون، که ذاتی تمام آشکارسازها هستند؛ نوبه تولید و ترکیب مجدد ناشی از افت‌وخیزهای آماری حاملهای جریان در فوتورساناها؛ نوبه شلیک ناشی از گسیل اتفاقی الکترونها در آشکارسازهای فوتوگسیلمند؛ و نوبه ناشی از افت‌وخیزهای دما در آشکارسازهای گرمایی. تنها تقویت علامت، وقتی تمایزی بین علامت و نوبه حاصل نمی‌شود و نسبت علامت به نوبه ثابت می‌ماند، فایده‌ای ندارد، درست همان‌طور که صرف بزرگنمایی تصویر ایتیکی در روشن‌سازی جزئیات آن مفید نیست.

مسائل

۱-۲ بسامدهای تابش الکترومغناطیسی را که می‌توانند در چشم عادی احساس بینایی ایجاد کنند محاسبه کنید.

۲-۲ توان یک چشمه کوچک نور تکفام که در 500 nm تابش می‌کند 500 W است.

(الف) اگر چشم تنها ۲٪ از توان کل این چشمه را به‌صورت توان درخششی دریافت کند، شار درخششی خروجی آن را تعیین کنید.

(ب) اگر این چشمه به‌طور یکنواخت در تمام راستاها تابش کند، شدت تابندگی و شدت درخشانی آن را به‌دست آورید.

(ج) اگر مساحت سطح چشمه 5 cm^2 باشد، گسیلندگی تابشی و گسیلندگی درخششی آن را محاسبه کنید.

(د) تابیدگی و درخشانی را روی پرده‌ای واقع در فاصله 2 m از چشمه و عمود بر شار تابشی تعیین کنید.

(ه) اگر پرده دارای روزنه‌ای به قطر 5 cm باشد، چه مقدار شار تابشی و درخششی از آن می‌گذرد؟

۳-۲ (الف) یک لیزر هلیوم-کادمیم 50° میلی‌واتی در 667.8 nm و یک لیزر هلیوم-نون 4° میلی‌واتی در 632.8 nm تابش می‌کنند. با استفاده از شکل ۲-۷، روشنایی نسبی این دو باریکه لیزری با قطر یکسان را وقتی در کنار هم روی یک قطعه کاغذ سفید می‌افتند مقایسه کنید. دید روشن را در نظر بگیرید.

(ب) لیزر آرگونی که در 488 nm گسیل می‌کند چه توانی باید داشته باشد تا با روشنایی لیزر سبز هلیوم-نون 5° میکروواتی در 543.5 nm تحت شرایط قسمت (الف) تطبیق کند.

۴-۲ لامپی در فاصله ۳ m بالای نقطه P در کف اتاق در P درخشانی 100 lm/m^2 تولید می‌کند. (الف) شدت درخشانی این لامپ را محاسبه کنید.

(ب) درخشانی را در نقطه دیگری از کف اتاق در فاصله ۱ m از P به دست آورید.

۵-۲ محوطه‌ای با دو لامپ یکسان واقع در بالای تیرهایی به ارتفاع ۳۰ ft و به فاصله ۴۰ ft از یکدیگر در شب روشن شده است. با فرض اینکه لامپها به طور یکسان در تمام راستاها تابش می‌کنند، درخشانی را در سطح زمین برای نقطه‌ای درست در زیر یکی از لامپها و نقطه‌ای واقع در وسط آنها تعیین کنید.

۶-۲ یک چشمه کوچک 100 cd در کانون یک آینه کروی به قطر ۱۰ cm و فاصله کانونی ۵۰ cm قرار دارد. با فرض اینکه بازتابندگی کل حدود ۸۰٪ است، درخشانی متوسط باریکه موازی بازتابیده از آینه را به دست آورید.

۷-۲ (الف) خورشید تحت زاویه 5° در سطح زمین، که درخشانی در فرود عمودی حدود 10^5 lx است، دیده می‌شود. درخشایی خورشید را تعیین کنید.

(ب) درخشانی را برای سطح افقی زیر نیمکره آسمان با درخشایی یکنواخت L به دست آورید.

۸-۲ یک قرص دایره‌ای به شعاع ۲۰ cm و درخشایی یکنواخت 10^5 cd/m^2 یک سطح تخت کوچک به مساحت 1 cm^2 و در فاصله ۱ m از مرکز قرص را روشن می‌کند. سمتگیری این سطح کوچک طوری است که عمود آن با خط واصل مراکز دو سطح زاویه 45° می‌سازد. این خط بر قرص دایره‌ای عمود است. شار درخششی وارد بر سطح کوچک را تعیین کنید.

۹-۲ قانون جابه‌جایی وین را از فرمول تابندگی طیفی جسم سیاه پلانک به دست آورید.

۱۰-۲ قانون استفان-بولتزمن را از فرمول تابندگی طیفی جسم سیاه پلانک محاسبه کنید.

[راهنمایی: برای ساده شدن انتگرال‌گیری از تعویض متغیر $x = hc/\lambda kT$ استفاده کنید.]

۱۱-۲ قله طیف خورشیدی در حدود 500 nm قرار دارد. با فرض اینکه خورشید مانند جسم سیاه تابش می‌کند، دمای سطح آن را به دست آورید.

۱۲-۲ (الف) یک جسم سیاه در 6000 K در چه طول موجی دارای بیشترین تابش در واحد طول موج است؟

(ب) اگر این جسم سیاه یک روزنه به قطر ۱ mm در کاواک تابشگری در این دما باشد توان تابیده از این روزنه را در ناحیه باریک طول موج 5500 تا 5510 \AA محاسبه کنید.

۲-۱۳ برای یک کاواک جسم سیاه در یک دمای معین داریم $\lambda_{(max)} = 55^\circ \text{ nm}$. سپس دمای کاواک را زیاد می‌کنیم تا اینکه گسیلندگی تابشی کل آن دو برابر شود. دمای جدید و $\lambda_{(max)}$ جدید را به دست آورید.

۲-۱۴ یک جسم خاکستری با گسیلمندی 45° چه دمایی باید داشته باشد تا دارای گسیلندگی تابشی کل یکسان با یک جسم سیاه در 5000° K باشد؟

مراجع

- [1] Resnick, Robert. *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Mechanics*. New York: John Wiley and Sons, 1972. Ch. 4.
- [2] Barbe, D. F. "Imaging Devices Using the Charge-Coupled Concept." *Proceedings of the IEEE* 63 (Jan. 1975): 38.
- [3] Malacara, Zacarias H., and Morales R. Arquimedes. "Light Sources." In *Geometrical and Instrumental Optics*, edited by Daniel Malacara. Boston: Academic Press, 1988.
- [4] Nussbaum, Allen. *Geometrical Optics: An Introduction*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1968. Ch. 6.
- [5] Budde, W. *Physical Detectors of Optical Radiation*. Optical Radiation Measurements Series, vol. 4. New York: Academic Press, 1983.
- [6] Grum, Franc, and Richard J. Becherer. *Radiometry*. Optical Radiation Measurements Series, vol. 1. New York: Academic Press, 1979.
- [7] *IES Lighting Handbook*. New York: Illuminating Engineering Society, 1981.
- [8] *Handbook of Optics*, edited by Walter G. Driscoll and William Vaughan. Sponsored by the Optical Society of America. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978: Stephen F. Jacobs, "Nonimaging Detectors." Jay F. Snell, "Radiometry and Photometry." George J. Zissis and Anthony J. Larocca, "Optical Radiators and Sources."
- [9] Kingston, R. H. *Detection of Optical and Infrared Radiation*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [10] Stimson, A. *Photometry and Radiometry for Engineers*. New York: Wiley-Interscience, 1974.
- [11] James, T. H. "Photographic Development." *Scientific American* (Nov. 1952): 30.
- [12] Morehead, Fred F., Jr. "Light-Emitting Semiconductors." *Scientific American* (May 1967): 108.
- [13] Clark Jones, R. "How Images are Detected." In *Lasers and Light. Readings from Scientific American*, pp. 81-88. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1968.
- [14] Fitch, James Marston. "The Control of the Luminous Environment." In *Lasers and Light. Readings from Scientific American*, pp. 131-39. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1968.

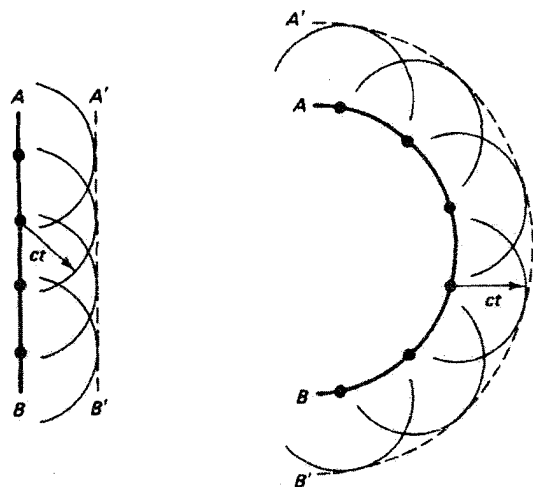
اپتیک هندسی

مقدمه

در بررسی نور به عنوان یک حرکت موجی می توان حوزه ای از تقریب را در نظر گرفت که در آن طول موج در مقایسه با اندازه های اجزای مربوط دستگاه اپتیکی قابل چشمپوشی است. این حوزه تقریب را اپتیک هندسی می نامند. اگر از سرشت موجی نور نتوانیم به این صورت صرف نظر کنیم حوزه را اپتیک فیزیکی می نامیم. بدین ترتیب، اپتیک هندسی مورد خاصی از اپتیک فیزیکی است به گونه ای که می توان به اختصار نوشت

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \{\text{اپتیک فیزیکی}\} = \{\text{اپتیک هندسی}\}$$

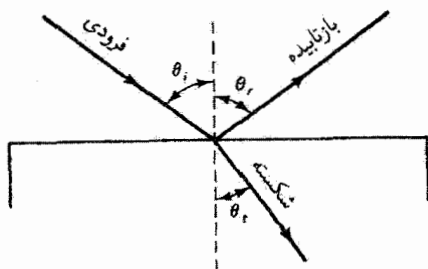
چون طول موج نور در مقایسه با اشیاء معمولی بسیار کوچک است، مشاهدات نادقیق اولیه رفتار باربکه نور موقع عبور از روزنه ها یا حول مانع های سر راه با اپتیک هندسی قابل توضیح بودند. یادآوری می کنیم که وجود سایه های واضح باعث شد نیوتون ادعا کند که انتشار راستخط نور ناشی از جویباری از ذرات نور است و نه یک حرکت موجی. معلوم بود که حرکت موجی مربوط به طول موج های بزرگتر، مانند امواج آب و امواج صوت، حول مانعها به وضوح خمیده می شود. بنابراین، به نظر می رسد که الگوی نیوتون برای انتشار نور وجود حرکت موجی با طول موج های بسیار کوچک را مجاز نمی داند.



در واقع، قبلاً شواهدی حاکی از درجه‌ای از خمیدگی، حتی برای نور، در عصر نیوتون در دست داشتند. فرانچسکو گریمالدی یسوعی متوجه ساختار ریز در لبه سایه‌ها، که برحسب انتشار راستخط نور قابل توضیح نیست، شده بود. این خمیدگی امواج نور حول لبه‌های یک مانع را بعداً پراش نامیدند. در محدوده تقریبی که با اپتیک هندسی نمایش داده می‌شود، نور بنابه فرض در امتداد خط راست یا پرتو از چشمه دور می‌شود. بنابراین، پرتو صرفاً مسیر انتقال انرژی نوری از یک نقطه به نقطه دیگر در دستگاه اپتیکی است. پرتو مفهوم ساختگی مفیدی است، اگر چه انتزاعی است زیرا یک باریکه نور را در عمل نمی‌توان به طور نامحدود باریک کرد تا به خط راست برسد. یک باریکه کم عرض لیزری شاید بهترین تقریب عملی برای پرتو نور باشد. (اما وقتی روزه‌ای که نور از آن عبور می‌کند از یک حد کوچکتر شود حتی باریکه لیزری هم شروع به پخش شدن به صورت نقش مشخصه پراش می‌کند.) وقتی پرتو نور از یک دستگاه اپتیکی شامل چندین محیط همگن متوالی عبور می‌کند، مسیر نور دنباله‌ای از پاره‌خطهای مستقیم است. نایبوستگی‌های این پاره‌خطها مربوط به نقاطی هستند که نور بازتابیده یا شکسته می‌شود. قوانین اپتیک هندسی که راستای بعدی پرتوها را توصیف می‌کنند عبارت‌اند از قانون بازتاب، وقتی پرتو نور در سطح جداکننده دو محیط یکنواخت بازتابیده می‌شود، پرتو بازتابیده در صفحه فرود باقی می‌ماند، و زاویه فرود برابر با زاویه بازتاب است. صفحه فرود شامل پرتو فرودی و خط عمود بر نقطه فرود است.

قانون شکست (قانون اسنل). وقتی پرتو نور در سطح جداکننده دو محیط یکنواخت شکسته می‌شود، پرتو عبور کرده در سطح فرود باقی می‌ماند، و سینوس زاویه شکست تناسب مستقیم با سینوس زاویه فرود دارد.

این دو قانون در شکل ۱-۳ خلاصه شده‌اند؛ در صفحه جدایی دو محیط شفاف قسمتی از پرتو فرودی بازتابیده می‌شود و قسمتی عبور می‌کند.



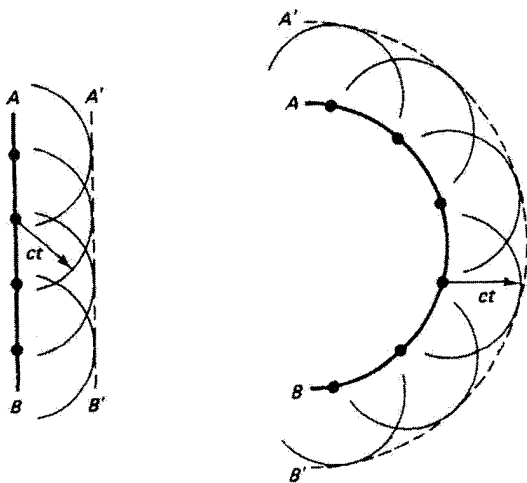
$$\theta_r = \theta_i$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \text{ثابت}$$

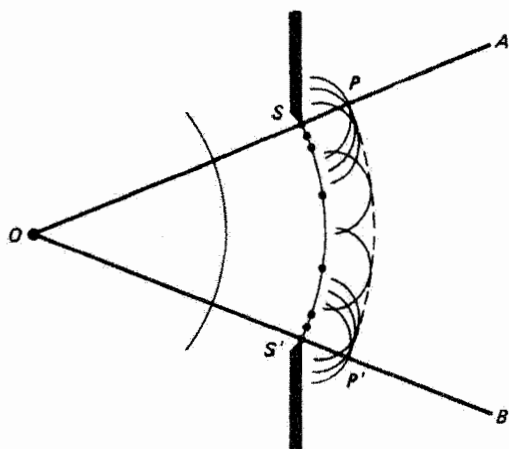
شکل ۱-۳ نمایش قانون بازتاب و قانون شکست.

۳-۱ اصل هویگنس

فیزیکدان هلندی کریستیان هویگنس نور را به صورت رشته‌ای از تپها در نظر گرفت که از هر نقطه از جسم درخشان گسیل می‌شوند و توسط ذرات اتر، یک ماده کشسان که تمام فضا را پر می‌کند، دست به دست منتشر می‌شوند. هویگنس، سازگار با این الگو، فرض کرد هر نقطه از یک آشفتگی متحرک می‌تواند منشأ تپهای جدیدی باشد که آشفتگی در لحظه بعدی را به وجود می‌آورند. او برای اینکه نشان دهد چگونه الگوی انتشار نورش قوانین اپتیک هندسی را ایجاب می‌کند، اصل مفیدی را وضع کرد که می‌توانیم آن را به صورت زیر بیان کنیم: هر نقطه از سطح پیشین یک آشفتگی موجی — جبهه موج — را می‌توان یک چشمه ثانوی برای امواج کروی (یا موجکها) در نظر گرفت که اینها نیز با سرعت نور در محیط پیش می‌روند، و پوش آنها جبهه موج جدید در زمان بعدی را تشکیل می‌دهد. شکل ۲-۳ کاربرد این اصل را برای امواج تخت و کروی نشان می‌دهد. در هر مورد، AB آشفتگی موجی اولیه یا جبهه موج است، و $A'B'$ جبهه موج جدید در زمان بعدی t است. بدین ترتیب، شعاع هر موجک برابر است با ct ، که در آن c سرعت نور در محیط است. توجه کنید که جبهه موج جدید بر هر موجک تنها در یک نقطه تماس است. بنابه نظر هویگنس، در کاربرد این اصل باید از سایر نقاط موجک صرف نظر کرد. در واقع، اگر هویگنس بقیه موجک را در انتشار آشفتگی نوری مؤثر می‌گرفت نمی‌توانست قانون راستخط انتشار نور را از اصل خود به دست آورد. برای واضح تر شدن مطلب، به شکل ۳-۳ توجه کنید که یک آشفتگی موجی کروی را نشان می‌دهد که از O شروع شده است و به روزنه‌ای به عرض SS' فرود آمده است. بنابه مفهوم



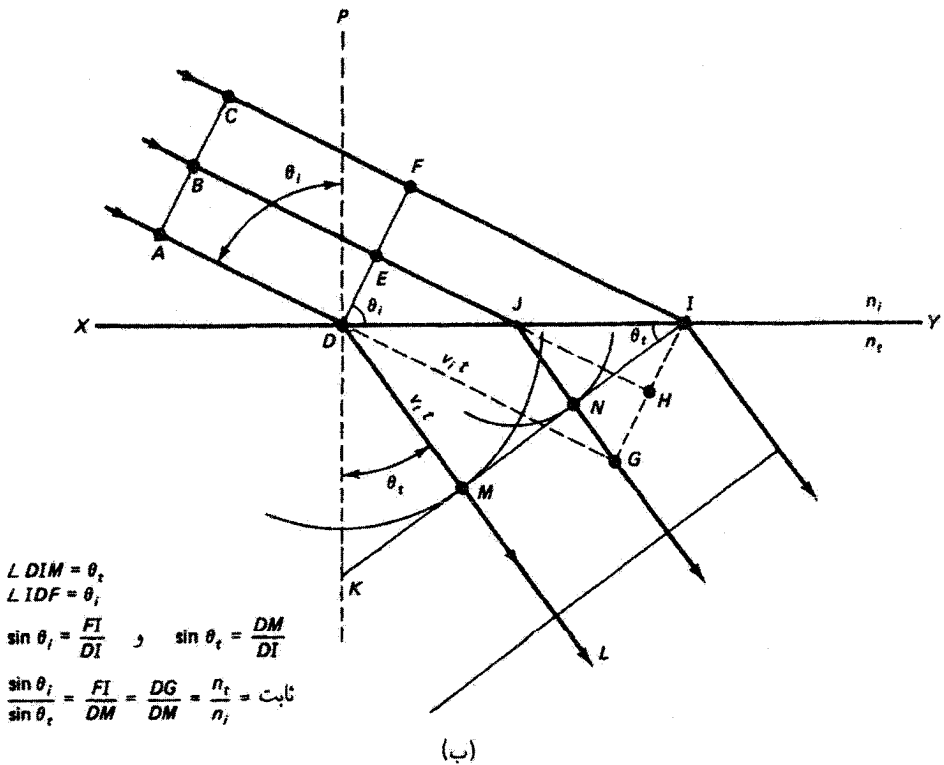
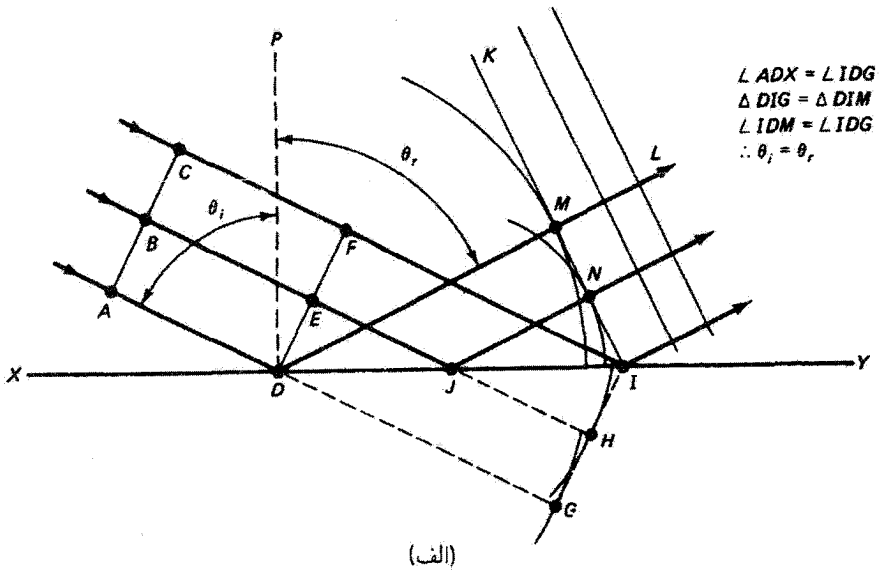
شکل ۲-۳ نمایش اصل هویگنس برای امواج تخت و کروی.



شکل ۳-۳ ترسیم هویگنس برای جبهه موج بریده.

انتشار راستخط، خطوط OA و OB لبه‌های تیز سایه را در طرف راست روزنه تشکیل می‌دهند. البته بعضی از موجکها که از نقاط جبهه موج (کمان SS') ناشی می‌شوند به درون ناحیه سایه نفوذ می‌کنند، اما مطابق نظر هویگنس از این موجکها صرف نظر می‌شود و جبهه موج جدید در نقاط P و P' ناگهان قطع می‌شود، یعنی دقیقاً نقاطی که موجکهای نهایی که از S و S' ناشی شده‌اند به جبهه موج جدید مماس هستند. بدین ترتیب، هویگنس با چشمپوشی از تأثیر موجکهای همپوشان امکان پراش نور به درون ناحیه سایه هندسی را نادیده گرفته است. هویگنس همچنین از جبهه موجی که از نیمه پسین موجکها تشکیل می‌شود صرف نظر کرده است، زیرا این جبهه‌های موج به معنی وجود آشفتنگی نوری هستند که در جهت مخالف حرکت می‌کند. به رغم ضعفهای این الگو، که بعداً توسط فرنل و دیگران اصلاح شدند، هویگنس توانست اصل خود را برای اثبات قانونهای بازتاب و شکست، چنانکه در زیر نشان خواهیم داد، به کار ببرد.

شکل ۳-۴ الف ترسیم هویگنس مربوط به یک باریکه موازی و کم عرض نور را برای اثبات قانون بازتاب نشان می‌دهد. باید اصل هویگنس را اندکی تغییر دهیم تا با این مورد که یک جبهه موج مانند AC به طور مایل به یک سطح جدایی تخت مانند XY فرود می‌آید تطبیق کند. در اینجا زاویه فرود پرتوهای AD ، BE ، و CF نسبت به عمود PD برابر با θ است. چون نقاط این جبهه موج تخت همزمان به سطح جدایی نمی‌رسند، باید در ترسیم موجکهایی که جبهه موج بازتابیده را تعیین می‌کنند این تفاوتها را به حساب آورد. اگر سطح جدایی XY وجود نداشت، ترسیم هویگنس جبهه موج GI را در لحظه‌ای تعیین می‌کرد که پرتو CF در I به سطح جدایی



شکل ۳-۴ (الف) ترسیم هویگنس برای اثبات قانون بازتاب. (ب) ترسیم هویگنس برای اثبات قانون شکست.

می‌رسید. اما وجود سطح جدایی باعث می‌شود که در همان بازه زمانی که پرتو CF از F به I می‌رسد پرتو BE فاصله E تا J و آنگاه پس از بازتاب فاصله‌های معادل با JH را طی کند. بنابراین، موجکی به مرکز J و شعاع JH بالای سطح بازتابنده ترسیم می‌کنیم. به همین ترتیب، موجکی به شعاع DG و مرکز D داریم که معرف انتشار قسمت پایین باریکه پس از بازتاب است. جبهه موج جدید که باید در نقاط M و N مماس بر این موجکها باشد و نقطه I را در بر داشته باشد به صورت KI در شکل نشان داده شده است. یک پرتو بازتابیده نمونه DL است که، چنانکه باید، عمود بر جبهه موج بازتابیده است. عمود PD را برای این پرتو ترسیم کرده‌ایم تا زاویه‌های فرود و بازتاب را برای باریکه تعریف کنیم. مساوی بودن زاویه‌های فرود و بازتاب از روی ترسیمی که در شکل ۳-۴ الف نشان داده شده است واضح به نظر می‌رسد.

به همین ترتیب، در شکل ۳-۴ ب ترسیم هویگنسی نشان داده شده است که قانون شکست را نمایش می‌دهد. در اینجا باید تفاوت سرعت نور در محیطهای بالا و پایین را در نظر داشته باشیم. اگر سرعت نور در خلأ c باشد سرعت در محیط بالا را با c/n_i بیان می‌کنیم که در آن n_i یک ثابت مشخصه محیط است و ضریب شکست نامیده می‌شود. به همین ترتیب، سرعت نور در محیط پایین c/n_t است. نقاط E ، D ، I و F روی جبهه موج فرودی در زمانهای متفاوتی به نقاط J ، D ، I از سطح جدایی تخت XY می‌رسند. در غیاب این سطح شکست، جبهه موج GI در لحظه‌ای تشکیل می‌شود که پرتو CF به I می‌رسد. اما طی پیشروی پرتو CF از F به I در زمان t ، پرتو AD به محیط پایین وارد شده است که در آن سرعتش، فرضاً، کمتر است. بدین ترتیب، اگر فاصله DG برابر با $v_t t$ باشد، موجکی به مرکز D و شعاع $v_t t$ ترسیم می‌کنیم. شعاع DM را می‌توانیم به صورت زیر نیز بیان کنیم

$$DM = v_t t = v_t \left(\frac{DG}{v_i} \right) = \left(\frac{n_i}{n_t} \right) DG$$

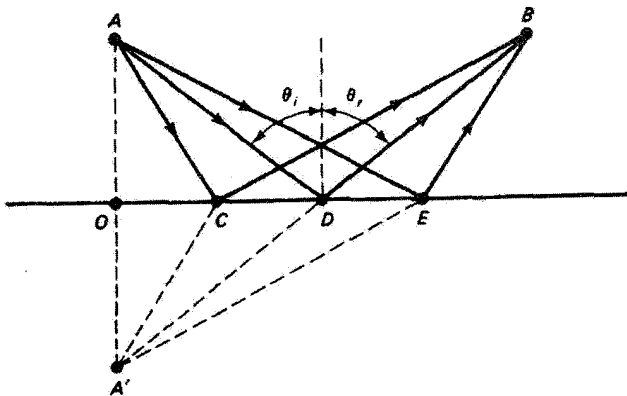
به همین ترتیب، موجکی به شعاع JH (n_i/n_t) و مرکز J ترسیم می‌کنیم. جبهه موج جدید KI شامل نقطه I از سطح جدایی است و همچنان که در شکل نشان داده شده است بر این دو موجک در نقاط M و N مماس است. رابطه هندسی بین زاویه‌های θ_i و θ_t ، که از پرتو فرودی AD و پرتو بازتابیده DL تشکیل می‌شوند، قانون اسنل است که آن را در شکل ۳-۴ ب خلاصه کرده‌ایم. قانون شکست اسنل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (۱-۳)$$

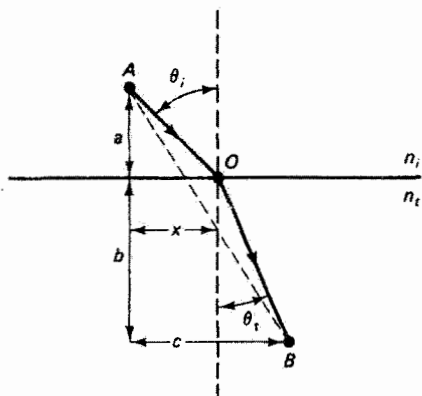
۲-۳ اصل فرما

قوانین اپتیک هندسی را می‌توان از فرضیهٔ بنیادی دیگری نیز، شاید به روشی زیباتر، به دست آورد. فکر اصلی این کار از هیرو اسکندرانی است که در قرن دوم قبل از میلاد می‌زیست. بنا به نظر هیرو، وقتی نور بین دو نقطه انتشار می‌یابد کوتاهترین مسیر را انتخاب می‌کند. واضح است که اگر این دو نقطه در یک محیط یکنواخت باشند این مسیر خط راست و اصل دو نقطه است. اما اگر مطابق شکل ۵-۳ نور از نقطهٔ اول A پس از بازتاب از یک سطح تخت به نقطهٔ دوم B برسد همین اصل قانون بازتاب را به صورت زیر پیش‌بینی می‌کند. شکل ۵-۳ سه مسیر ممکن از A تا B را نشان می‌دهد که یکی از آنها مسیر درست ADB است. اکنون مسیر اختیاری ACB را در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ A' را روی عمود AO طوری انتخاب کنیم که $AO = OA'$ ، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AOC و $A'OC$ با هم برابر خواهند بود. بنابراین، $AC = A'C$ و مسافتی که پرتو از A به B از طریق C طی می‌کند با مسافت از A' به B از طریق C برابر است. واضح است که کوتاهترین مسیر از A' به B خط راست $A'DB$ است، و در نتیجه مسیر ADB انتخاب درست پرتو نور واقعی است. از هندسهٔ مقدماتی می‌توان نشان داد که برای این مسیر داریم $\theta_i = \theta_r$. همچنین توجه کنید که برای اینکه $A'DB$ یک خط مستقیم باشد پرتو بازتابیده باید در صفحهٔ فرود، یعنی صفحهٔ کاغذ، قرار داشته باشد.

ریاضیدان فرانسوی پیر دو فرما اصل هیرو را برای اثبات قانون شکست تعمیم داد. اگر نقطهٔ نهایی B ، چنانکه شکل ۶-۳ نشان می‌دهد، در پایین سطح محیط دوم واقع باشد، مسیر درست مسلماً کوتاهترین مسیر یعنی خط راست AB نیست زیرا در این صورت زاویهٔ شکست برابر با



شکل ۵-۳ ترسیم برای اثبات قانون بازتاب از اصل هیرو.



شکل ۶-۳ ترسیم برای اثبات قانون شکست از اصل فرما.

زاویه فرود می‌شود و این متناقض با قانون به تجربه ثابت شده شکست است. در عوض، فرما با استفاده از "اقتصاد در طبیعت" فرض کرد پرتو نور مسیر مربوط به کمترین زمان از A تا B را طی می‌کند، و این تعمیمی است که اصل هیرویک مورد خاص از آن است. اگر نور همچنان که در شکل ۶-۳ فرض شده است در محیط دوم کندتر حرکت کند در سطح جدایی طوری شکسته می‌شود که مسیر آن در محیط دوم زمان کمتری می‌برد به طوری که زمان انتقال کل از A به B مینیمم می‌شود. از لحاظ ریاضی، باید زمان کل

$$t = \frac{AO}{v_i} + \frac{OB}{v_t}$$

را مینیمم کنیم، که در آن v_i و v_t به ترتیب سرعت نور در محیط فرود و محیط شکست است. با استفاده از قضیه فیثاغورث و فواصلی که در شکل ۶-۳ تعریف شده‌اند، داریم

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_t}$$

چون با انتخاب مسیرهای دیگر مکان نقطه O و در نتیجه فاصله x تغییر می‌کند، می‌توان زمان را با قرار دادن $dt/dx = 0$ مینیمم کرد:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_i \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_t \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0$$

با توجه به شکل ۶-۳، می‌توانیم زاویه‌های فرود و شکست را به آسانی در این شرط وارد کنیم و بدست آوریم

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin \theta_i}{v_i} - \frac{\sin \theta_t}{v_t} = 0$$

و در نتیجه $v_t \sin \theta_i = v_i \sin \theta_t$. با وارد کردن ضرایب شکست محیطها از طریق رابطه $v = c/n$ ، به قانون اسنل می‌رسیم:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$$

اصل فرما نیز مانند اصل هویگنس مستلزم اصلاحاتی است تا قابلیت کاربرد عمومی‌تری پیدا کند. وضعیتهایی وجود دارند که در آنها مسیر واقعی پرتو نور می‌تواند معرف زمان ماکسیمم یا حتی یکی از چندین مسیر ممکن باشد. به‌عنوان مثالی از مورد دوم، یک آینه بیضیوار در نظر بگیرید که داخل آن نور در یکی از بی‌نهایت مسیر ممکن از یک کانون به کانون دیگر می‌رسد. چون بیضی مکان هندسی تمام نقاطی است که مجموع فواصل هر یک از آنها از دو کانون ثابت است، در واقع برای تمام مسیرها زمان یکسان است. بیان دقیقتری برای اصل فرما را، که چیزی جز تعیین یک فرین نسبت مسیرهای مجاور نیست، می‌توان به‌صورت زیر فرمولبندی کرد: مسیر واقعی که نور در انتشارش بین دو نقطه معین در یک دستگاه اپتیکی طی می‌کند طوری است که راه نوری آن را با سایر مسیرهایی که در نزدیکی مسیر واقعی نور قرار دارند در تقریب اول برابر می‌کند. با این فرمولبندی، اصل فرما در رده مسائلی قرار می‌گیرد که حساب وردشی نامیده می‌شوند، یعنی روش تعیین صورت تابعی که یک انتگرال معین را مینیمم می‌کند. در اپتیک این انتگرال معین عبارت است از انتگرال زمان لازم برای انتقال نور از نقطه شروع به نقطه نهایی.^۱

۳-۳ اصل برگشت‌پذیری

یک بار دیگر موارد بازتاب و شکست را که در شکل‌های ۳-۵ و ۳-۶ نمایش داده شده‌اند در نظر می‌گیریم. اگر جای نقاط A و B را با هم عوض کنیم، به طوری که B چشمه پرتوهای نور باشد، اصل کمترین زمان فرما باید همان مسیری را پیش‌بینی کند که برای جهت اولیه انتشار نور تعیین می‌کند. بنابراین، به‌طور کلی هر پرتو نور واقعی در یک دستگاه اپتیکی اگر جهتش برعکس شود از همان مسیر باز می‌گردد. این اصل برگشت‌پذیری نور در کاربردهای مختلفی که بعداً خواهیم دید بسیار مفید خواهد بود.

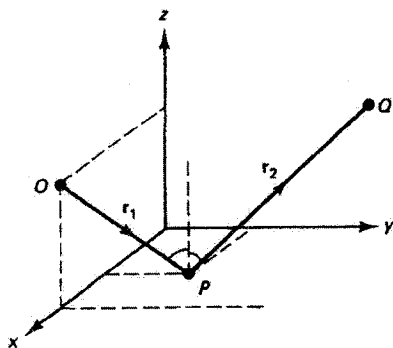
۱. در اینجا شایان تذکر است که اصل مشابهی، به نام اصل کمترین کنش هامیلتون در مکانیک مربوط به مینیمم انتگرال معین تابع لاگرانژ (انرژی جنبشی منهای انرژی پتانسیل)، فرمولبندی دیگری از قوانین مکانیک را نمایش می‌دهد و در واقع قوانین مکانیک نیوتونی را ایجاد می‌کند.

۳-۴ بازتاب در آینه‌های تخت

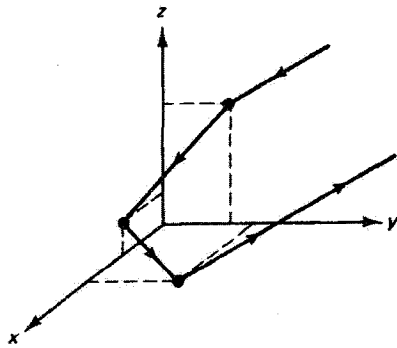
قبل از ارائهٔ یک بحث کلی دربارهٔ تشکیل تصویر، ساده‌ترین مورد — و از لحاظ تجربی قابل دسترس‌ترین — را که تصویر تشکیل شده در آینه‌های تخت است بررسی می‌کنیم. در این زمینه باید بین بازتاب آینه‌ای از یک سطح کاملاً هموار و بازتاب پخشی از یک سطح دانه‌دانه‌ای یا ناهموار فرق بگذاریم. در مورد اول، تمام پرتوهای یک باریکهٔ موازی که به سطح فرود می‌آید از قانون بازتاب از سطح تخت تبعیت می‌کنند و در نتیجه به صورت یک باریکهٔ موازی بازتابیده می‌شوند؛ در مورد دوم، اگر چه قانون بازتاب در هر نقطه حاکم است، سطح که از لحاظ میکروسکوپی ناهموار است پرتوها را در راستاهای مختلف باز می‌تاباند و بدین ترتیب باعث پراکندگی پخشی پرتوهای نور که ابتدا موازی بوده‌اند می‌شود. هر سطح تختی این نوع پراکندگی را ایجاد می‌کند زیرا سطح کاملاً هموار در عمل قابل حصول نیست. در اینجا بازتاب آینه‌ای را بررسی می‌کنیم.

بازتاب آینه‌ای تنها یک پرتو نور OP از صفحه xy را چنانکه در شکل ۳-۷ الف نشان داده شده است در نظر بگیرید. بنابه قانون بازتاب، پرتو بازتابیده PQ در صفحهٔ فرود باقی می‌ماند، و با عمود در P زاویه‌های مساوی تشکیل می‌شود. اگر مسیر OPQ را به مؤلفه‌های x ، y و z تجزیه کنیم، واضح است که راستای پرتو OP به علت بازتاب تنها در راستای z تغییر می‌کند، و در واقع جهت مؤلفهٔ z معکوس می‌شود. اگر راستای پرتو فرودی را با بردار یکهٔ آن $\hat{r}_1 = (x, y, z)$ توصیف کنیم، بازتاب باعث می‌شود که

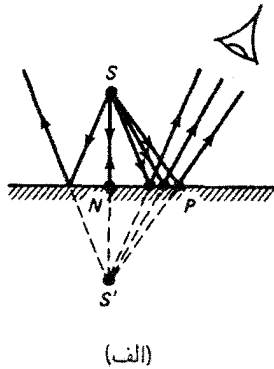
$$\hat{r}_1 = (x, y, z) \longrightarrow \hat{r}_2 = (x, y, -z)$$



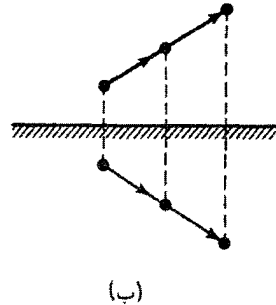
(الف)



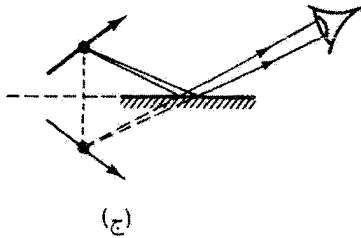
(ب)



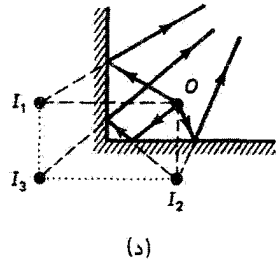
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۸-۳ تشکیل تصویر در آینه تخت.

نتیجه می‌گیریم که اگر پرتو در راستایی فرود آید که پی‌درپی از هر سه صفحه مختصات قائم بازتابیده شود، چنانکه در "بازتابنده سه‌گوش" شکل ۳-۷ نشان داده شده است، آنگاه

$$\hat{r}_1 = (x, y, z) \rightarrow \hat{r}_2 = (-x, -y, -z)$$

و این پرتو دقیقاً موازی با خط فرود اولیه‌اش باز می‌گردد. شبکه‌ای از این نوع بازتابنده‌های سه‌گوش بازتاب دقیق باریکه نور، مثلاً نور چراغ جلو خودرو از آینه‌های بزرگراه‌ها یا لیزر از ماه، را تضمین می‌کند.

تشکیل تصویر در آینه تخت در شکل ۸-۳ الف نشان داده شده است. شیء نقطه‌ای S پرتوهایی به طرف آینه تخت می‌فرستد که به صورت نشان داده شده بازتابیده می‌شوند. بنابه قانون بازتاب، جفت مثلثهایی مانند SNP و $S'NP$ با هم برابراند به طوری که به نظر می‌رسد تمام پرتوهای بازتابیده ناشی از نقطه تصویر S' هستند، در حالی که S' روی خط عمود SN و در عمقی قرار دارد که فاصله تصویر $S'N$ برابر با فاصله شیء SN است. چشم یک تصویر نقطه‌ای را در S' دقیقاً طوری می‌بیند که انگار یک شیء نقطه‌ای واقعی در آنجا قرار دارد. چون هیچ پرتو

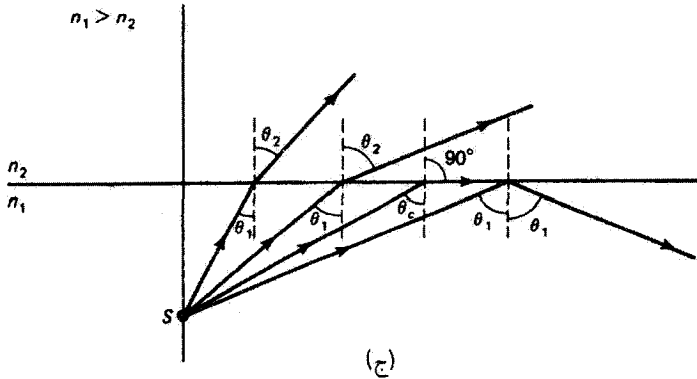
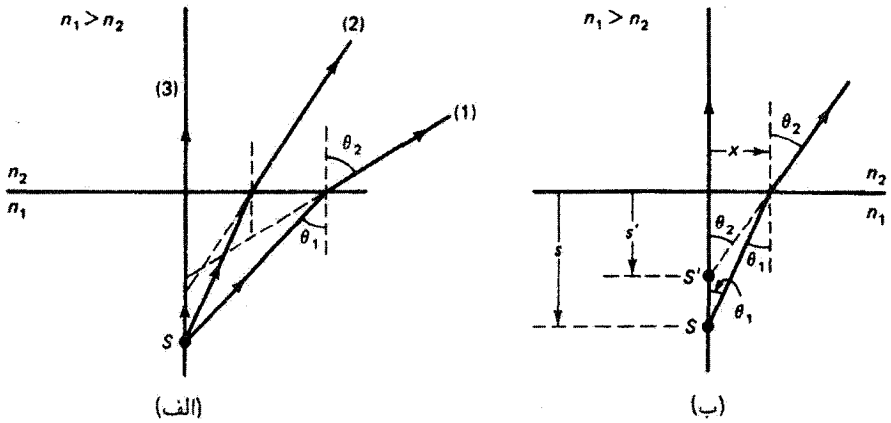
واقعی نور در زیر سطح آینه وجود ندارد، این تصویر را تصویر مجازی می‌نامند. تصویر مجازی S' را نمی‌توان مانند تصویر حقیقی روی پرده انداخت. تمام نقاط یک شیء گسترده، مانند پیکانی که در شکل ۳-۸ ب نشان داده شده است، به همین ترتیب در آینه تخت تصویر می‌شوند: هر نقطه شیء دارای نقطه تصویر در امتداد خط عمود بر سطح آینه است و این تصویر در زیر آینه به همان اندازه از سطح آینه فاصله دارد که نقطه شیء در بالای آینه. توجه کنید که مکان تصویر به مکان چشم بستگی ندارد. همچنین، ترسیم شکل ۳-۸ ب به وضوح نشان می‌دهد که اندازه تصویر برابر با اندازه شیء است، یعنی بزرگنمایی برابر با یک است. علاوه بر این، سمتگیری عرضی شیء و تصویر یکی است. اما، یک شیء راستگرد در تصویرش چپگرد دیده می‌شود. اگر آینه، مانند شکل ۳-۸ ج، درست زیر شیء قرار نداشته باشد می‌توان سطح آن را امتداد داد و مکان تصویر را از دید چشمی تعیین کرد که پرتوهای بازتابیده ناشی از جسم را دریافت می‌کند. شکل ۳-۸ د تصویرهای چندگانه شیء نقطه‌ای O را که در دو آینه عمود بر هم تشکیل شده‌اند نشان می‌دهد. تصویرهای I_1 و I_2 حاصل بازتابهای مستقیم در دو آینه هستند، اما تصویر سوم I_3 نتیجه بازتاب ثانوی از هر دو آینه است.

۳-۵ شکست در سطح تخت

پرتو نور ۱ را در شکل ۳-۹ الف در نظر بگیرید. این پرتو با زاویه θ_1 به سطح تختی فرود می‌آید که دو محیط شفاف را که به ترتیب با ضرایب شکست n_1 و n_2 مشخص می‌شوند از هم جدا می‌کند. زاویه شکست را با θ_2 نشان می‌دهیم. بنابر قانون اسنل، که در این مورد صورت زیر را دارد

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (۲-۳)$$

وقتی $n_2 < n_1$ زاویه شکست θ_2 باید طوری باشد که پرتو شکسته از عمود دور شود، چنانکه برای پرتوهای ۱ و ۲ در شکل ۳-۹ الف نشان داده شده است. از طرف دیگر، به ازای $n_2 > n_1$ پرتو شکسته به عمود نزدیک می‌شود. این قانون همچنین ایجاب می‌کند که پرتو ۳، که عمود به سطح ($\theta_1 = 0$) فرود می‌آید، نسبت ضرایب شکست هر چه که باشد، بدون تغییر راستا ($\theta_2 = 0$) عبور کند. در شکل ۳-۹ الف سه پرتو نشان داده شده‌اند که از چشمه نقطه‌ای S زیر سطح جدایی ناشی می‌شوند و به محیط بالاتر که ضریب شکست کمتری دارد وارد می‌شوند، مانند نوری که از آب ($n_1 = 1.33$) به هوا ($n_2 = 1.00$) وارد می‌شود. از این پرتوها نقطه تصویر یکتایی به دست نمی‌آید زیرا، چنانکه خط‌چینه‌های ادامه پرتوهای شکسته نشان می‌دهند، این پرتوها نقطه تلاقی مشترک، یا نقطه تصویر مجازی در زیر سطح که به نظر برسد پرتوهای شکسته از آنجا ناشی شده‌اند،



شکل ۹-۳ وضعیت هندسی پرتوهای شکسته در سطح جدایی تخت.

ندارند. اما برای پرتوهایی که زاویه کوچکی با عمود بر سطح می‌سازند تصویر قابل قبولی می‌تواند جایگزین شود. در این تقریب که تنها این پرتوهای پیرامحوری^۱ برای تشکیل تصویر دخالت دارند، زاویه‌های فرود و شکست هر دو کوچک‌اند، و تقریب زیر معتبر است

$$\sin \theta \cong \tan \theta \cong \theta \text{ (رادیان)}$$

با توجه به معادله ۲-۳، قانون اسنل را می‌توان با رابطه زیر تقریب گرفت

$$n_1 \tan \theta_1 \cong n_2 \tan \theta_2 \quad (۳-۳)$$

۱. به‌طور کلی، پرتو پیرامحوری پرتوی است که نزدیک محور مرکزی دستگاه اپتیکی تشکیل‌دهنده تصویر باقی می‌ماند، و از این رو زاویه کوچکی با محور اپتیکی می‌سازد.

و با استفاده از نائزاتهای مناسب در شکل ۳-۹، داریم

$$n_1 \left(\frac{x}{s} \right) = n_2 \left(\frac{x}{s'} \right)$$

نقطه تصویر در فاصله عمودی s' زیر سطح واقع است:

$$s' = \left(\frac{n_2}{n_1} \right) s \quad (۴-۳)$$

که در آن s عمق مربوط به شیء است. اگر به اشیاء زیر آب مستقیماً از بالا نگاه کنیم آنها را از جای واقعی خودشان بالاتر می بینیم زیرا در این مورد $s = ۳/۴ s$ (۱/۱۳۳) $s' =$ حتی وقتی زاویه دید θ_2 کوچک نباشد، تصویر شبکیه‌ای نسبتاً خوبی از شیء زیر آب تشکیل می‌شود زیرا گشودگی یا مردمک چشم تنها دسته کوچکی از پرتوها را هنگام تشکیل تصویر می‌گیرد. چون این پرتوها از لحاظ راستا تفاوت بسیار اندکی با هم دارند به نظر می‌رسد که تقریباً از یک نقطه تصویر ناشی شده‌اند. اما عمق این تصویر، دیگر مانند مورد پرتوهای پیرامحوری، $۳/۴$ عمق شیء نیست و به‌طور کلی با زاویه دید تغییر می‌کند.

چنانکه در شکل ۳-۹ ج نشان داده شده است، هر چه زاویه فرود پرتوهای ناشی از شیء بزرگتر باشد، بنابه قانون اسنل زاویه شکست آنها بزرگتر است. وقتی زاویه شکست به ۹۰° می‌رسد یک زاویه فرود بحرانی، زاویه حد θ_c ، به دست می‌آید. بدین ترتیب، از قانون اسنل داریم

$$\sin \theta_c = \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1}$$

یا

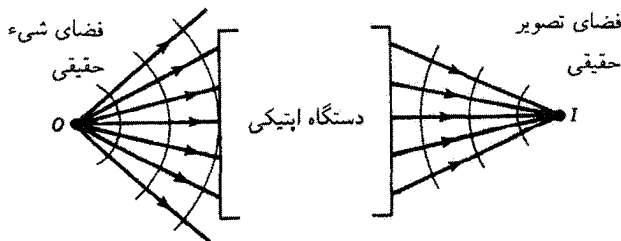
$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (۵-۳)$$

برای زاویه‌های فرود $\theta_1 > \theta_c$ ، پرتو فرودی چنانکه نشان داده شده است متحمل بازتاب داخلی کلی می‌شود. این پدیده در انتقال نور در تارهای شیشه‌ای یا بازتابهای داخلی کلی متوالی، چنانکه در فصل ۲۴ از آن بحث خواهد شد، اساسی است. توجه کنید که این پدیده روی نمی‌دهد مگر اینکه $n_1 > n_2$ ، و در نتیجه θ_c را می‌توان از معادله ۳-۵ به دست آورد.

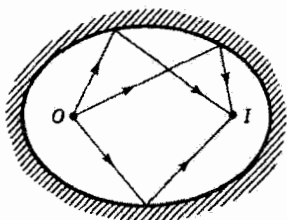
به ماهیت تصاویر تشکیل شده از شکست در سطح تخت وقتی باز می‌گردیم که این نوع شکست را به‌عنوان مورد خاصی از شکست در سطح گروی بررسی می‌کنیم.

۳-۶ تشکیل تصویر در دستگاه اپتیکی

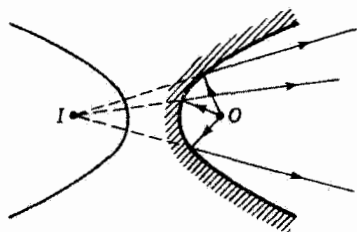
اکنون درباره آنچه به طور کلی تصویر نامیده می‌شود بحث می‌کنیم و عوامل نظری و عملی را که باعث می‌شوند تصویر کامل نباشد نشان می‌دهیم. در شکل ۳-۱۰، ناحیه‌ای که «دستگاه اپتیکی» نامیده شده است شامل سطوح بازتاب و یا شکست با هر تعداد و هر انحنای است که می‌توانند راستای پرتوهای ناشی از نقطه شیء O را تغییر دهند. این ناحیه می‌تواند شامل هر تعداد محیط واسط باشد، اما فرض می‌کنیم هر یک از این محیطها همگن و همسانگرد است، و با ضریب شکست خاص خود مشخص می‌شود. بنابراین، پرتوها از نقطه شیء O در تمام راستاها، چنانکه نشان داده شده است، به طور شعاعی در فضای شیء حقیقی که قبل از اولین سطح بازتاب یا شکست در دستگاه اپتیکی قرار دارد پخش می‌شوند. دسته سطوح کروی عمود بر این پرتوها جبهه‌های موج هستند، یعنی مکان هندسی نقاطی که برای آنها پرتوهایی که به یک جبهه موج خاص می‌رسند زمان یکسانی برای انتقال نور از چشمه تا این جبهه موج لازم دارند. در فضای شیء حقیقی پرتوها واگرا هستند و جبهه‌های موج کروی منبسط می‌شوند. اکنون فرض کنید دستگاه اپتیکی راستای این پرتوها را طوری تغییر می‌دهد که پس از خروج از دستگاه اپتیکی و ورود به فضای تصویر حقیقی، جبهه‌های موج منقبض می‌شوند و پرتوها به یک نقطه مشترک که آن را نقطه تصویر I می‌نامیم همگرا هستند. بر اساس اصل فرما، می‌توانیم بگوییم چون هر یک از این پرتوها از O شروع و به I ختم می‌شود، برای همه آنها زمان انتقال یکسان است. این پرتوها را هم مدت می‌نامند. علاوه بر این، بنابه اصل برگشت‌پذیری اگر I نقطه شیء باشد هر پرتو جهت خود را عوض می‌کند اما مسیرش را در دستگاه اپتیکی حفظ می‌کند، و O نقطه تصویر متناظر خواهد بود. نقاط O و I را نقاط همیوخ برای دستگاه اپتیکی می‌نامند. در یک دستگاه اپتیکی ایده‌آل، تمام پرتوهای ناشی از O که دستگاه آنها را قطع می‌کند — تنها این پرتوها — از I نیز می‌گذرند. برای تصویر گرفتن از یک شیء واقعی، هر نقطه شیء و نقطه تصویر همیوخ آن باید در این شرط صدق کنند.



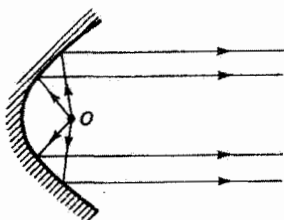
شکل ۳-۱۰ تشکیل تصویر در یک دستگاه اپتیکی.



(الف) بیضیوار



(ب) هذلولیوار

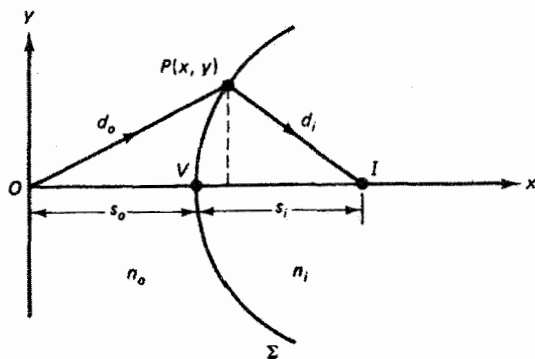


(ج) سهمیوار

شکل ۳-۱۱ سطوح شکست دکارتی با نقاط شیء و تصویر همیوغ مربوط.

در عمل، تصویروهای ناآرمانی به علل زیر تشکیل می‌شوند: (۱) پراکندگی نور، (۲) ابیراهیها، و (۳) پراش. بعضی پرتوهای ناشی از O به‌علت انکسار بازتابی در سطوح شکست، بازتاب پخشی در سطوح بازتاب، و پراکندگی حاصل از ناهمگنی در محیطهای شفاف به I نمی‌رسند. انکسار پرتوها از این راهها صرفاً روشنایی تصویر را کم می‌کند؛ اما بعضی از این پرتوها از نقاط شیء ناهمیوغ از طریق پراکندگی به I می‌رسند و تصویر را خراب می‌کنند. وقتی خود دستگاه اپتیکی نتواند بین پرتوهای شیئی و تصویری رابطه‌ی یک به یک، که برای تصویرگیری کامل از تمام نقاط شیء لازم است، برقرار کند می‌گوییم دستگاه ابیراهی دارد. این ابیراهیهای دستگاه را بعداً بررسی می‌کنیم. و سرانجام، چون هر دستگاه اپتیکی تنها با قسمتی از جبهه‌ی موج صادر از شیء تلاقی می‌کند، تصویر نمی‌تواند کاملاً واضح باشد. حتی اگر تصویر از هر لحاظ دیگر کامل باشد، استفاده از یک قسمت محدود جبهه‌ی موج منجر به پراش می‌شود و تصویر پخشیده‌ای به دست می‌آید که تصویر محدود پراشی نامیده می‌شود. این منشأ تصویروهای غیرکامل، که در بخشهای مربوط به پراش از آن بیشتر بحث می‌کنیم، نشان‌دهنده‌ی یک محدودیت بنیادی برای وضوح تصویر است و نمی‌توان آن را کاملاً از بین برد. این مشکل از ماهیت موجی نور ناشی می‌شود. تنها در حد غیرقابل دسترس اپتیک هندسی، که در آن $\lambda \rightarrow 0$ ، اثرات پراش کاملاً محو می‌شوند.

سطوح بازتاب یا شکستی را که تصویر کامل تشکیل می‌دهند سطح دکارتی می‌نامند. در مورد بازتاب، این سطوح چنانکه در شکل ۳-۱۱ نشان داده شده است مقاطع مخروطی هستند.



شکل ۱۲-۳ سطح شکست دکارتی که نقطه شیء O را در نقطه تصویر I تصویر می‌کند.

در هر یک از این شکلها می‌توان جای نقاط شیء و تصویر را بنا به اصل برگشت‌پذیری تعویض کرد. توجه کنید که تصویر در شکل ۱۱-۳ ب مجازی است. در شکل ۱۱-۳ ج، می‌گوییم پرتوهای بازتابیده موازی "در بینهایت" تصویر تشکیل می‌دهند. در هر مورد می‌توان نشان داد اصل فرما، که پرتوهای هم‌مدت بین نقاط شیء و تصویر را ایجاب می‌کند، منجر به شرطی می‌شود که معادل است با تعریف هندسی مقطع مخروطی مربوط.

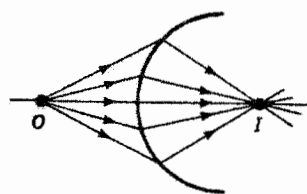
سطوح دکارتی که تصویر کامل را با شکست ایجاد می‌کنند ممکن است پیچیده‌تر باشند. معادله سطح شکست مناسبی را به دست می‌آوریم که نقطه شیء O را مطابق شکل ۱۲-۳ در نقطه تصویر I تصویر می‌کند. در این شکل، P یک نقطه اختیاری با مختصات (x, y) روی سطح مطلوب Σ است. شرط این است که هر پرتو از O ، مانند OPI ، شکسته شود و از نقطه تصویر I بگذرد. یک پرتو دیگر از این نوع مسلماً OVI است که در نقطه رأس V بر سطح عمود است. بنا به اصل فرما، اینها پرتوهای هم‌مدت هستند. اما این پرتوها از لحاظ طول با هم برابر نیستند زیرا محیطهای دو طرف سطح شکست ضرایب شکست متفاوتی دارند. زمان عبور پرتو از محیطی با ضخامت x و ضریب شکست n برابر است با

$$t = \frac{x}{v} = \frac{nx}{c}$$

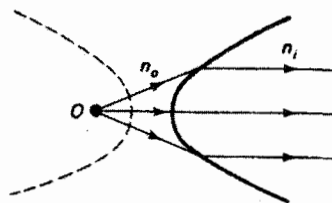
بنابراین، زمانهای مساوی منجر به مقادیر مساوی برای حاصلضرب nx ، که راه نوری نام دارد، می‌شوند. در نتیجه، در مسئله فعلی اصل فرما ایجاب می‌کند که

$$n_o d_o + n_i d_i = n_o s_o + n_i s_i = \text{const.} \quad (۶-۳)$$

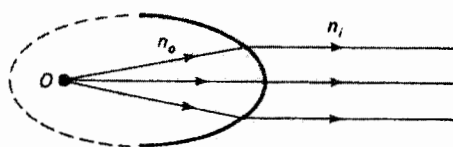
که در آن فاصله‌ها در شکل ۱۲-۳ تعریف شده‌اند. طرف چپ معادله ۶-۳ برحسب مختصات



(الف)



(ب)



(ج)

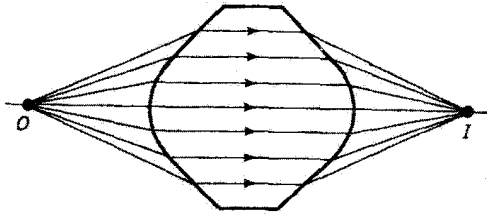
شکل ۳-۱۳ سطح شکست دکارتی. (الف) خاکوار دکارتی O را با شکست در I تصویر می‌کند. (ب) سطح هذلولوی وقتی نقطه شی O در یک کانون است و $n_i > n_o$ آن را در بینهایت تصویر می‌کند. (ج) سطح بیضیوار وقتی نقطه شی O در یک کانون است و $n_o > n_i$ آن را در بینهایت تصویر می‌کند.

(x, y) مربوط به P به صورت زیر در می‌آید

$$n_o(x^2 + y^2)^{1/2} + n_i[y^2 + (s_o + s_i - x)^2]^{1/2} = \text{const.} \quad (۷-۳)$$

ثابت طرف راست این معادله از قسمت میانی معادله ۳-۶ تعیین می‌شود که در هر مسئله خاصی می‌توان آن را محاسبه کرد. معادله ۳-۷ توصیف‌کننده خاکوار دکارتی دوار است که در شکل ۳-۱۳ الف نشان داده شده است.

اما در بسیاری موارد می‌خواهیم تصویر در همان محیط اپتیکی باشد که شیء قرار دارد. با یک عدسی که پرتو نور را دوبار می‌شکند (هر بار در یک سطح) و تصویری خارج از عدسی ایجاد می‌کند می‌توان به این مقصود رسید. بدین ترتیب، مخصوصاً مفید است سطوحی دکارتی را تعیین کنیم که تمام پرتوهای شینی را پس از اولین شکست موازی می‌کنند. سپس این پرتوها به سطح دوم فرود می‌آیند و مجدداً با شکست تشکیل تصویر می‌دهند. جوابهای این مسئله در شکل ۳-۱۳ ب و ج نشان داده شده‌اند. بسته به بزرگی نسبی ضرایب شکست، سطح شکست لازم چنانکه نشان داده شده است یک هذلولیوار ($n_i > n_o$) یا یک بیضیوار ($n_o > n_i$) است. سطح اول به مورد متداول شیء در هوا مربوط می‌شود. یک عدسی هذلولوی دوگانه آن‌طور که در شکل ۳-۱۴ نشان داده شده است کار می‌کند. اما باید توجه کرد که تشکیل تصویر بدون ابیراهی که از این راه

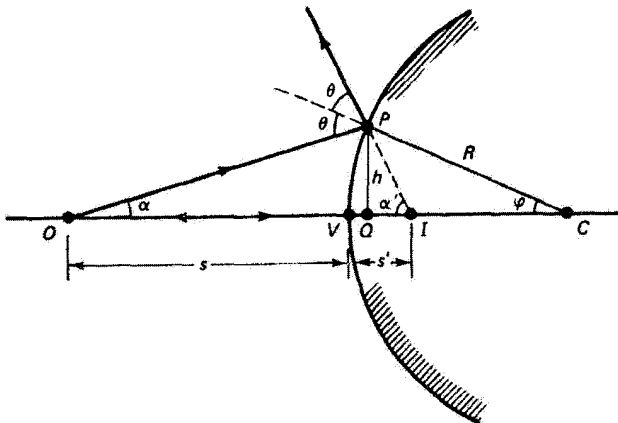


شکل ۳-۱۴ تصویرگیری بدون ابیراهی از نقطه شیء O با عدسی هذلولوی دوگانه.

صورت می‌گیرد تنها برای نقطه شیء O در فاصله درست از عدسی و روی محور امکان دارد. برای نقاط نزدیک، تصویرسازی کامل نیست. هر چه شیء واقعی بزرگتر باشد دقت تصویر آن کمتر است. چون تصویر اشیاء واقعی بدون ابیراهی نیست و چون تراش دادن دقیق به سطوح هذلولیوار مشکل است، اکثر سطوح اپتیکی کروی هستند. ابیراهی کروی که بدین ترتیب وارد می‌شود به قیمت ساخت نسبتاً آسان سطوح کروی پذیرفتنی است. در بقیه این بررسی اپتیک هندسی، تنها مورد سطوح بازتاب و شکست کروی با شعاع انحنا R را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که در حد $R \rightarrow \infty$ ، مورد خاص سطح تخت را داریم.

۳-۷ بازتاب در سطح کروی

آینه‌های کروی بسته به اینکه مرکز انحنای C در همان طرف سطح یا در طرف مقابل باشد می‌توانند نسبت به نقطه شیء O مقعر یا محدب باشند. آینه‌ای که در شکل ۳-۱۵ نشان داده شده است محدب است، و دو پرتو ناشی از O ترسیم شده‌اند که یکی عمود بر سطح کروی در رأس V



شکل ۳-۱۵ بازتاب در سطح کروی.

است و دیگری پرتوی اختیاری است که در P فرود می‌آید. پرتو اول در امتداد خودش بازتابیده می‌شود؛ پرتو دوم در P ، درست مثل اینکه از یک صفحهٔ مماس در P ، مطابق قانون بازتاب بازتابیده می‌شود. دو پرتو بازتابیده نسبت به هم واگرا هستند. محل تلاقی این دو پرتو بازتابیده (که از امتداد پس‌سوی آنها به دست می‌آید) نقطهٔ تصویر I همیوغ با O را تعیین می‌کند. این تصویر، که در پشت سطح آینه واقع است، مجازی است. فاصله‌های شیء و تصویر از رأس را به ترتیب با s و s' نشان می‌دهیم. عمودی به ارتفاع h از P به محور در Q وارد می‌کنیم. می‌خواهیم رابطه‌ای بین s و s' به دست آوریم که تنها به شعاع انحنای آینه، R ، بستگی داشته باشد. چنانکه خواهیم دید، چنین رابطه‌ای تنها در تقریب مرتبهٔ اول سینوس و کسینوس زاویه‌هایی که پرتوهای شیئی و تصویری با سطح کروی می‌سازند امکانپذیر است. معنی این گفته این است که به جای بسطهای

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \quad (۸-۳)$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

تنها جمله‌های اول را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\sin \varphi \cong \varphi \quad \text{و} \quad \cos \varphi \cong 1 \quad (۹-۳)$$

که به اندازهٔ کافی دقیق‌اند اگر زاویهٔ φ به اندازهٔ کافی کوچک باشد. این تقریب منجر می‌شود به اپتیک مرتبهٔ اول یا گاوسی — به افتخار کارل فریدریش گاوس که در سال ۱۸۴۱ مبنای این مبحث را مطرح کرد. اکنون به مسئله‌ای که در دست داریم باز می‌گردیم. با توجه به شکل ۳-۱۵، چون زاویهٔ خارجی در مثلث برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر هم‌رأس با آن، می‌توان دو رابطهٔ زاویه‌ای به دست آورد که عبارت‌اند از

$$\theta = \alpha + \varphi \quad \text{و} \quad 2\theta = \alpha + \alpha'$$

و از ترکیب اینها داریم

$$\alpha - \alpha' = -2\varphi \quad (۱۰-۳)$$

با استفاده از تقریب زاویه کوچک، می‌توانیم به جای زاویه‌های معادله ۳-۱۰ تنازانت آنها را بگذاریم، و در نتیجه

$$\frac{h}{s} - \frac{h}{s'} = -\frac{2h}{R}$$

که در آن از فاصله محوری VQ صرف‌نظر کرده‌ایم، زیرا وقتی φ کوچک است این فاصله نیز کوچک است. با حذف h ، رابطه‌ای را که می‌خواستیم به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R} \quad (۱۱-۳)$$

اگر سطح کروی را مقعر بگیریم، مرکز انحنا در طرف چپ می‌افتد، و به‌ازای مکانهای خاصی برای نقطه شیء O نقطه تصویر حقیقی به دست می‌آید که آن هم در طرف چپ آینه است. در این مورد، رابطه‌ای هندسی مشابه با معادله ۳-۱۱ به دست می‌آوریم که تمام جمله‌های آن مثبت‌اند. با استفاده از یک قرارداد علامت، می‌توان تمام موارد را تنها با یک معادله نمایش داد:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R} \quad (۱۲-۳)$$

قرارداد علامتی که برای معادله ۳-۱۲ به کار می‌بریم به صورت زیر است: با فرض اینکه نور از چپ به راست منتشر می‌شود،

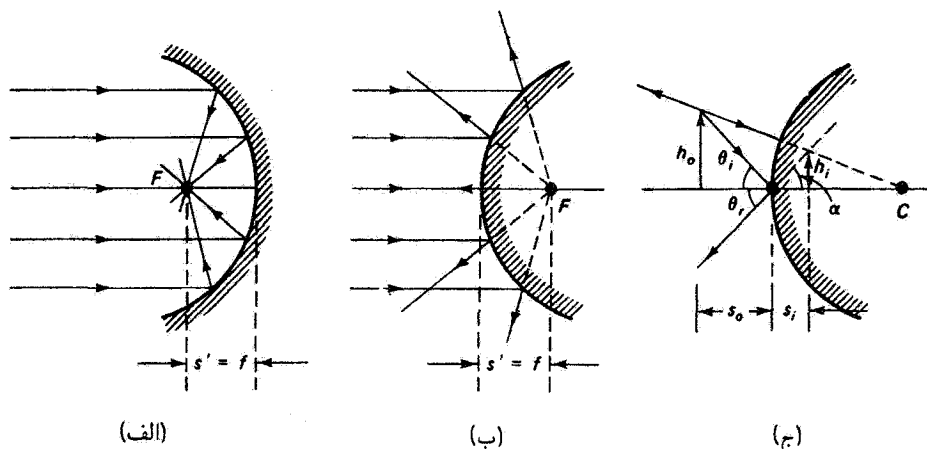
۱. فاصله شیء s مثبت است هرگاه O در طرف چپ رأس V ، متناظر با شیء حقیقی، واقع باشد. اگر O در طرف راست V ، متناظر با شیء مجازی، قرار داشته باشد s منفی است.

۲. فاصله تصویر s' مثبت است هرگاه I در طرف چپ V ، متناظر با تصویر حقیقی، باشد و منفی است هرگاه I در طرف راست V ، متناظر با تصویر مجازی، باشد.

۳. شعاع انحنا R مثبت است اگر مرکز C در طرف راست V ، متناظر با آینه محدب، واقع باشد و منفی است اگر C در طرف چپ V ، متناظر با آینه مقعر، واقع باشد.

این قواعد^۱ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد: فاصله‌های شیء و تصویر مثبت متناظر با شیء حقیقی و تصویر حقیقی هستند و شعاع انحنا آینه محدب مثبت است. اگر قاعده ۲ را برای شکل ۳-۱۵ به کار ببریم، می‌بینیم معادله عمومی ۳-۱۲ با معادله ۳-۱۱، مورد خاصی که با

۱. باید متذکر شویم که این مجموعه قرارداد علامت اگر چه به طور وسیعی به کار می‌رود اما منحصر به فرد نیست. هر کس زیاد با اپتیک سروکار داشته باشد طبعاً با قراردادهای دیگری هم مواجه می‌شود که تطبیق دادن آنها کار چندان مشکلی نیست.



شکل ۱۶-۳ آینه کروی: (الف) و (ب) تعیین نقطه کانونی، و (ج) ترسیم برای تعیین بزرگنمایی.

توجه به شکل ۱۵-۳ محاسبه شده است، یکی می‌شود. اگر دو یا چند عنصر بازتاب یا شکست به‌طور متوالی قرار گیرند شیء مجازی ایجاد می‌شود که آن را بعداً در نظر می‌گیریم. از معادله ۱۲-۳ که توصیف‌کننده آینه کروی است به‌ازای $R \rightarrow \infty$ به‌دست می‌آید $s' = -s$ ، همان نتیجه‌ای است که قبلاً برای آینه تخت به‌دست آمد. علامت منفی به معنی تصویر مجازی برای شیء حقیقی است. همچنین توجه کنید که فاصله شیء و فاصله تصویر در معادله ۱۲-۳ به‌طور متقارن ظاهر می‌شوند که تعویض‌پذیری نقاط همیوخ شیء و تصویر را نشان می‌دهد. اگر شیء در بینهایت باشد پرتوهای فرودی موازی‌اند و داریم $s' = -R/2$ چنانکه در شکل ۱۶-۳ الف و ب برای آینه مقعر ($R < 0$) و آینه محدب ($R > 0$) نشان داده شده است. در هر یک از این دو مورد فاصله تصویر را فاصله کانونی آینه می‌نامند. بدین ترتیب، داریم

$$f = -\frac{R}{2} \begin{cases} > 0 & \text{آینه مقعر} \\ < 0 & \text{آینه محدب} \end{cases} \quad (13-3)$$

و معادله آینه را می‌توانیم به‌صورت فشرده‌تر زیر بنویسیم

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (14-3)$$

در شکل ۱۶-۳ ج ترسیمی نشان داده شده است که از روی آن می‌توان بزرگنمایی عرضی را تعیین کرد. شیء یک شیء گسترده با اندازه عرضی h_o است. جایگزینی تصویر نوک پیکان با دو

پرتوی که نحوه بازتاب آنها معلوم است انجام می‌شود. پرتو فرودی در رأس باید زاویه‌های مساوی با محور بسازد. پرتو دیگر به سمت مرکز انحنا متوجه است و بنابراین عمود بر سطح آینه است و باید روی خودش بازتاب کند. محل تلاقی دو پرتو بازتابیده پشت آینه واقع می‌شود و مکان یک تصویر مجازی را تعیین می‌کند. به دلیل مساوی بودن سه زاویه‌ای که در شکل نشان داده شده‌اند، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{h_o}{s_o} = \frac{h_i}{s_i}$$

بزرگنمایی خطی m بنا به تعریف عبارت است از نسبت اندازه عرضی تصویر به اندازه متناظر عرضی شیء، و در نتیجه

$$m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{s_i}{s_o} \quad (15-3)$$

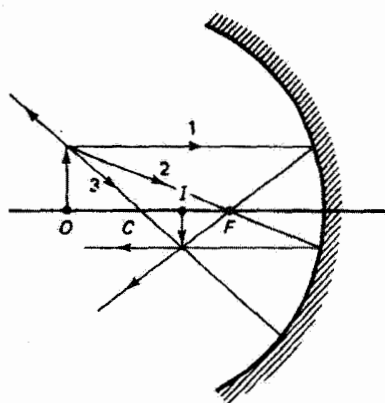
اکنون قرارداد علامت را گسترش می‌دهیم تا بزرگنمایی را هم در بر بگیرد: بزرگنمایی مثبت به موردی نسبت داده می‌شود که در آن سمتگیری تصویر با شیء یکسان است و بزرگنمایی منفی وقتی است که تصویر نسبت به شیء وارونه است. برای اینکه در ترسیم شکل ۱۶-۳ ج که در آن s' باید منفی باشد یک بزرگنمایی مثبت ایجاد شود، معادله ۱۵-۳ را به صورت زیر تغییر می‌دهیم

$$m = -\frac{s_i}{s_o} \quad (16-3)$$

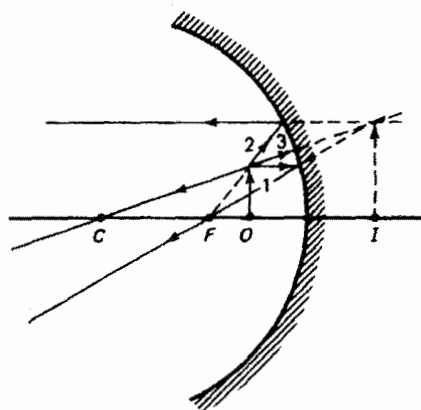
اگر جای نقاط C و F معلوم باشد، تشکیل تصویر در آینه کروی را می‌توان به روش ترسیمی به‌طور تقریبی تعیین کرد. چند مثال در شکل ۱۷-۳ نشان داده شده‌اند که باید آنها را به دقت امتحان کرد. درستی بازتاب پرتوها در هر مورد از بحث بالا معلوم می‌شود، و مکان تصویر نوک پیکان از تلاقی سه پرتو بازتابیده به‌دست می‌آید.

مثال

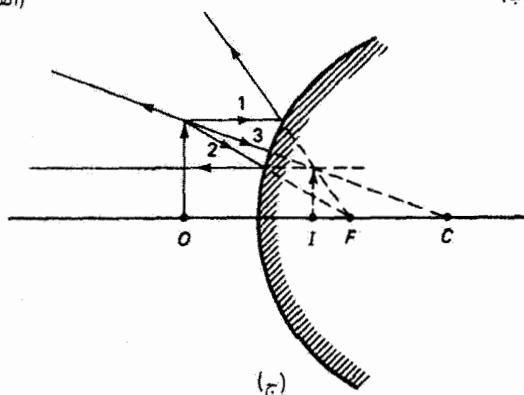
یک شیء به ارتفاع ۳ cm در فاصله ۲۰ cm از (الف) یک آینه کروی محدب و (ب) یک آینه کروی مقعر، هر دو با فاصله کانونی ۱۰ cm، واقع است. مکان و نوع تصویر را در هر مورد تعیین کنید.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳-۱۷ نمودارهای پرتو برای آینه‌های کروی. (الف) تصویر حقیقی، آینه مقعر. (ب) تصویر مجازی، آینه مقعر. (ج) تصویر مجازی، آینه محدب.

حل: (الف) آینه محدب: $f = -10 \text{ cm}$ و $s = +20 \text{ cm}$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{یا} \quad s' = \frac{fs}{s-f} = \frac{(-10)(20)}{(20) - (-10)} = -6.67 \text{ cm}$$

$$m = -\frac{s}{s'} = -\frac{20}{-6.67} = +3.0 = \frac{+1}{3}$$

تصویر در فاصله ۶٫۶۷ cm در طرف راست رأس آینه واقع است، مجازی است (زیرا s' منفی است) و مستقیم است (زیرا m مثبت است) و $1/3$ اندازه شیء یعنی به ارتفاع ۱ cm است.

(ب) آینه مقعر: $f = +10 \text{ cm}$ و $s = +20 \text{ cm}$.

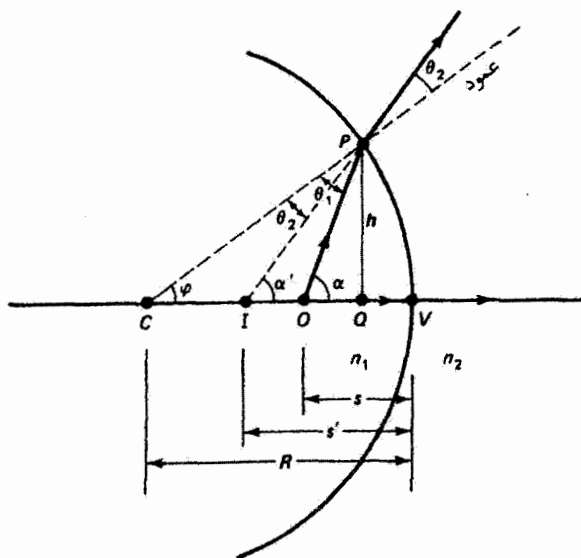
$$s' = \frac{fs}{s-f} = \frac{(10)(20)}{20-10} = +20 \text{ cm}$$

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{20}{20} = -1$$

تصویر در فاصله 20 cm در طرف چپ رأس آینه قرار دارد، حقیقی است (چون s' مثبت است)، معکوس است (چون m منفی است)، و هم اندازه شیء، یعنی به ارتفاع 3 cm است. تصویر و شیء در $2f = 20 \text{ cm}$ یعنی در مرکز انحنای آینه واقع شده‌اند. ▲

۸-۳ شکست در سطح کروی

اکنون به بررسی شکست در سطح کروی می‌پردازیم و در این مورد یک سطح مقعر انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۸-۳ را ببینید). دو پرتو ناشی از نقطه شیء O نشان داده شده‌اند. یکی از آنها پرتو محوری است، که بر سطح در رأس آن عمود است و در نتیجه بدون تغییر راستا شکسته می‌شود. پرتو دیگر



شکل ۱۸-۳ شکست در سطح کروی با $n_2 > n_1$.

در نقطهٔ اختیاری P فرود می‌آید و در آنجا مطابق قانون اسنل شکسته می‌شود:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (17-3)$$

به نظر می‌رسد که این پرتوهای شکسته از نقطهٔ تلاقیشان، نقطهٔ تصویر I ، ناشی شده‌اند. در مثلث CPO برای زاویهٔ خارجی α داریم $\alpha = \theta_1 + \varphi$. در مثلث CPI ، زاویهٔ خارجی α' برابر است با $\theta_2 + \varphi$. با تقریبگیری برای پرتوهای پیرامحوری و جاگذاری برای θ_1 و θ_2 در معادلهٔ ۱۷-۳، به دست می‌آوریم

$$n_1(\alpha - \varphi) = n_2(\alpha' - \varphi) \quad (18-3)$$

به جای زاویه‌ها تاثرات آنها را از روی شکل ۱۸-۳ می‌نویسیم، در حالی‌که باز هم در تقریب زاویه کوچک از فاصلهٔ QV صرف‌نظر می‌کنیم؛ و در نتیجه

$$n_1 \left(\frac{h}{s} - \frac{h}{R} \right) = n_2 \left(\frac{h}{s'} - \frac{h}{R} \right)$$

یا

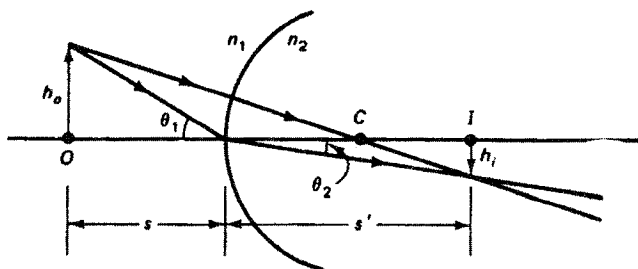
$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad (19-3)$$

با به‌کار بردن همان قرارداد علامتی که برای آینه‌ها پذیرفتیم (یعنی فاصلهٔ مثبت برای شیء و تصویر حقیقی و فاصلهٔ منفی برای شیء و تصویر مجازی)، برای فاصلهٔ تصویر مجازی $s' > 0$ و برای شعاع انحنای $R < 0$. اگر این علامتهای منفی را برای این کمیتها در مورد مربوط به شکل ۱۸-۳ منظور کنیم، معادلهٔ شکست را می‌توانیم به صورت کلی زیر بنویسیم

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (20-3)$$

که برای سطوح محدب نیز صادق است. وقتی $R \rightarrow \infty$ ، سطح کروی تبدیل به سطح شکست تخت می‌شود، و

$$s' = - \left(\frac{n_2}{n_1} \right) s \quad (21-3)$$



شکل ۱۹-۳ ترسیم برای تعیین بزرگنمایی خطی در سطح شکست کروی.

که در آن s' عمق ظاهری است که قبلاً به دست آمده بود. علامت منفی در معادله ۲۱-۳ نشان می‌دهد که تصویر برای شیء حقیقی ($s > 0$) مجازی است. بزرگنمایی خطی یک شیء گسترده را می‌توان به آسانی از شکل ۱۹-۳ به دست آورد. برای پرتو فرودی در رأس و در تقریب زاویه کوچک، از قانون اسنل داریم $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ که با استفاده از تانژانت به جای زاویه به صورت زیر در می‌آید

$$n_1 \left(\frac{h_o}{s} \right) = n_2 \left(\frac{h_i}{s'} \right)$$

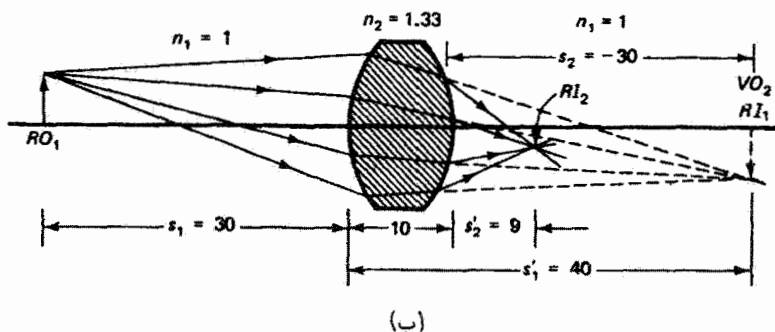
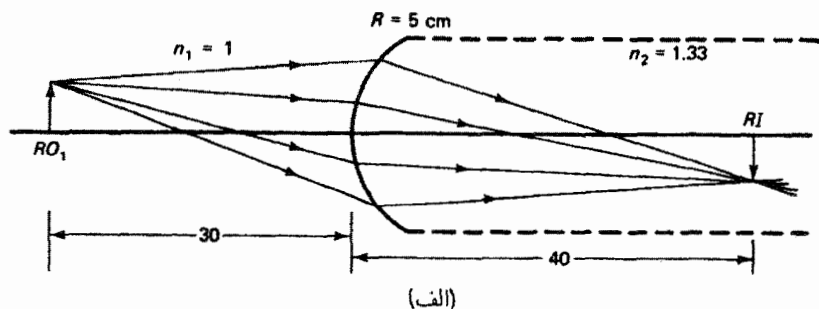
در نتیجه، بزرگنمایی خطی برابر است با

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad (۲۲-۳)$$

که در آن علامت منفی را به نشانه تصویر وارونه وارد کرده‌ایم. برای مورد مربوط به سطح شکست تخت، از ترکیب معادله‌های ۲۱-۳ و ۲۲-۳ به دست می‌آوریم $m = +1$. بنابراین، تصویری که سطح شکست تخت تشکیل می‌دهد دارای همان اندازه‌های عرضی و سمتگیری شیء است.

مثال

به عنوان یک مثال کلیتر برای شکست از سطوح کروی، شکل ۲۰-۳ را در نظر بگیرید. در (الف)، یک شیء حقیقی در هوا و به فاصله ۳۰ cm از یک سطح کروی محدب به شعاع ۵ cm قرار دارد. ضریب شکست در طرف راست این سطح جدایی متعلق به آب است. قبل از ترسیم پرتوهای نمونه، فاصله تصویر و بزرگنمایی خطی تصویر را با استفاده از معادله‌های ۲۰-۳ و ۲۲-۳ محاسبه



شکل ۳-۲۰ مثال شکست توسط سطوح کروی. (الف) شکست توسط تک سطح کروی. (ب) شکست توسط عدسی ضخیم. شاخص ۱ مربوط به شکست در سطح اول و شاخص ۲ مربوط به شکست در سطح دوم است.

می‌کنیم. از معادله ۳-۲۰ داریم

$$\frac{1}{30} + \frac{1.33}{s'_1} = \frac{1.33 - 1}{5}$$

که به دست می‌دهد $s'_1 = +40 \text{ cm}$. علامت مثبت نشان می‌دهد تصویر حقیقی است و در نتیجه در طرف راست سطح، جایی که پرتوهای حقیقی نور شکسته می‌شوند، قرار دارد. از معادله ۳-۲۲ داریم

$$m = -\frac{(1)(+40)}{(1.33)(+30)} = -1$$

که نشان‌دهنده یک تصویر وارونه است که اندازه آن با اندازه شیء یکی است. در شکل ۳-۲۰ الف این تصویر و چند پرتو که اکنون آنها را تعیین می‌کنیم نشان داده شده‌اند. در این مثال فرض کرده‌ایم

محیط سمت راست سطح کروی به حدی وسیع است که تصویر، با همان اولین شکست، داخل آن تشکیل می‌شود. اکنون فرض کنید (شکل ۳-۲۰ ب) که محیط دوم تنها 10 cm ضخامت دارد، و با یک سطح کروی دیگر که مقعر است و شعاع آن هم 5 cm است یک عدسی ضخیم تشکیل می‌دهد. بدیهی است که این تغییر تأثیری روی شکست در سطح اول ندارد. بنابراین، پرتوها در داخل عدسی در همان راستاهای قبل هستند و تصویری در فاصله 40 cm از سطح اول می‌سازند. اما این پرتوها با سطح دوم مواجه می‌شوند و در آنجا شکسته می‌شوند و چنانکه نشان داده شده است تصویر دیگری به وجود می‌آورند. چون همگرایی پرتوهایی که به سطح دوم می‌خورند از روی مکان تصویر اول تعیین می‌شود، پس مکان این تصویر اکنون فاصله شیء را مشخص می‌کند که باید برای شکست دوم از آن استفاده شود. تصویر حقیقی برای سطح اول یک شیء مجازی برای سطح دوم است. بدین ترتیب، بنا به قرارداد علامت که قبلاً وضع کردیم، موقع استفاده از معادله‌های ۳-۲۰ و ۳-۲۲ فاصله شیء مجازی، نسبت به سطح دوم، را منفی می‌گیریم. در نتیجه، برای شکست دوم از معادله ۳-۲۰ داریم

$$\frac{1}{-30} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1 - 1.33}{-5}$$

یا $s_2' = +9\text{ cm}$. بزرگنمایی بنا به معادله ۳-۲۲ برابر است با

$$m = \frac{(-1.33)(+9)}{(1)(-30)} = +\frac{2}{5}$$

اندازه تصویر نهایی $2/5$ اندازه عرضی شیء (مجازی) متناظر است و نسبت به آن مستقیم است. تصویر نهایی نسبت به شیء اصلی $2/5$ بزرگی دارد و وارونه است. ▲

به طور کلی، اگر ردیفی از سطوح بازتاب یا شکست در تشکیل یک تصویر نهایی دخالت داشته باشند تک تک این سطوح به ترتیبی در نظر گرفته می‌شوند که نور عملاً به آنها فرود می‌آید. فاصله شیء در مرحله m از فاصله تصویر در مرحله $(m-1)$ تعیین می‌شود. اگر تصویر در مرحله $(m-1)$ واقعاً تشکیل نشده باشد برای مرحله m به عنوان شیء مجازی به کار می‌رود.

۹-۳ عدسیهای نازک

اکنون از روش بالا برای به دست آوردن معادله عدسی نازک استفاده می‌کنیم. مانند مثال مربوط به شکل ۳-۲۰ ب، دو شکست در سطوح کروی روی می‌دهند. در اینجا از ضخامت عدسی در مقایسه با فواصل شیء و تصویر صرف نظر می‌کنیم، و این تقریب در اکثر کاربردهای عملی موجه

است. در اولین سطح شکست، به شعاع R_1 ، داریم

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (23-3)$$

و در سطح دوم، به شعاع R_2 ، داریم

$$\frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s'_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (24-3)$$

فرض کرده‌ایم که عدسی از هر دو طرف با محیط یکسانی با ضریب شکست n_1 تماس دارد. فاصله شیء دوم به‌طور کلی برابر است با

$$s_2 = t - s'_1 \quad (25-3)$$

که در آن t ضخامت عدسی است. توجه کنید که این رابطه علامت درست s_2 را مانند شکل ۳-۲۰ و همچنین وقتی تصویر میانی در داخل یا سمت چپ عدسی واقع می‌شود پیش‌بینی می‌کند. در تقریب عدسی نازک، با صرف نظر کردن از t ، داریم

$$s_2 = -s'_1 \quad (26-3)$$

اگر این مقدار s_2 را در معادله ۳-۲۴ جاگذاری کنیم و نتیجه را با معادله ۳-۲۳ جمع کنیم، جمله n_2/s'_1 حذف می‌شود و به‌دست می‌آوریم

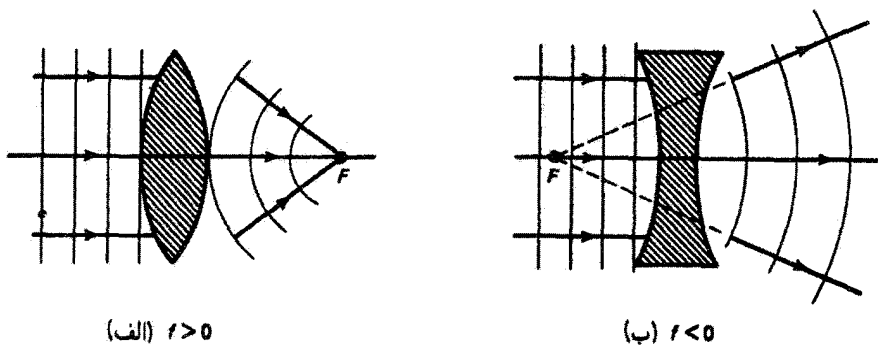
$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s'_2} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

اما s_1 فاصله شیء اصلی و s'_2 فاصله تصویر نهایی است به طوری که می‌توانیم شاخص آنها را حذف کنیم و صرفاً بنویسیم

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (27-3)$$

فاصله کانونی f برای عدسی نازک بنا به تعریف عبارت است از فاصله تصویر برای شیء در بینهایت، یا فاصله شیء برای تصویر در بینهایت، و بنابراین

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (28-3)$$



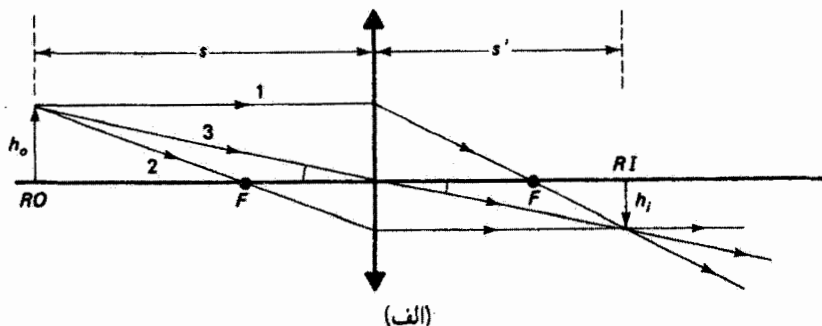
شکل ۲۱-۳ کنش (الف) عدسی همگرا و (ب) عدسی واگرا روی جبهه‌های موج تخت نور.

معادله ۲۸-۳ را معادله عدسی‌سازان می‌نامند زیرا این معادله فاصله کانونی یک عدسی را که با ضریب شکست و شعاع انحنای معین ساخته شده است و در محیطی با ضریب شکست n_1 به کار می‌رود پیش‌بینی می‌کند. در اکثر موارد، محیط اطراف عدسی را هوا تشکیل می‌دهد و $n_1 = 1$. در نتیجه، معادله عدسی نازک برحسب فاصله کانونی به صورت زیر است

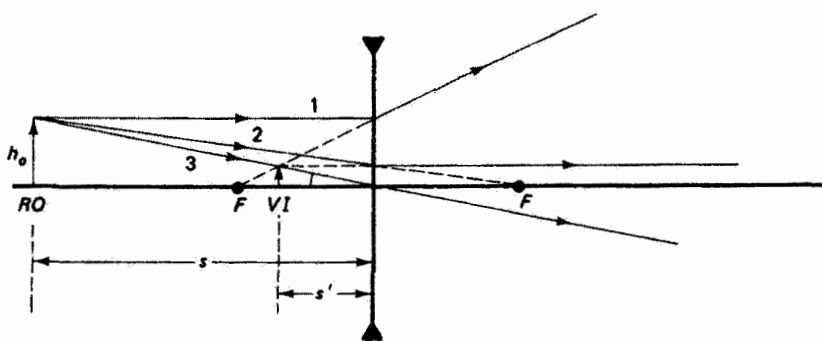
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (29-3)$$

تحلیل جبهه موجی برای جبهه‌های موج تخت نشان می‌دهد که، چنانکه در شکل ۲۱-۳ دیده می‌شود، اگر عدسی در وسط ضخیم‌تر باشد باعث واگرایی آنها می‌شود. قسمتی از جبهه موج که باید از ناحیه ضخیم‌تر در وسط نازکتر باشد باعث واگرایی آنها می‌شود. قسمتی از جبهه موج که باید از ناحیه ضخیم‌تر عبور کند نسبت به قسمتهای دیگر عقب می‌افتد. عدسیهای همگرا که برای آنها، همچنانکه از شکل به وضوح دیده می‌شود، تصویر حقیقی است با فاصله کانونی مثبت و عدسیهای واگرا که برای آنها تصویر مجازی است با فاصله کانونی منفی مشخص می‌شوند.

نمودارهای پرتو نمونه برای عدسیهای همگرا (یا محدب) و واگرا (یا مقعر) در شکل ۲۲-۳ نشان داده شده‌اند. برای ترسیم نمودار پرتو بهتر است عدسیهای نازک را با پاره خط قائمی نشان دهیم که دو سر آن معرف شکل کلی عدسی باشد. پرتو ۱ از نوک شیء موازی محور فرود می‌آید و با همگرایی (شکل ۲۲-۳ الف) از نقطه کانونی می‌گذرد یا با واگرایی (شکل ۲۲-۳ ب) انگار از نقطه کانونی ناشی می‌شود. پرتو ۲ صرفاً عکس پرتو ۱ است. اگر چه این دو پرتو برای تعیین مکان تصویر کافی هستند، می‌توان پرتو ۳ را از مرکز عدسی بدون انحراف عبور داد. قسمت میانی عدسی مانند تیغه موازی است که راستای پرتو فرودی را تغییر نمی‌دهد، و چون نازک است مقدار جابه‌جایی پرتو قابل چشمپوشی است. در ترسیم نمودار پرتو باید توجه داشت که، به استثنای پرتو مرکزی، هر



(الف)



(ب)

شکل ۲۲-۳ نمودارهای پرتو برای تشکیل تصویر با (الف) عدسی محدب و (ب) عدسی مقعر.

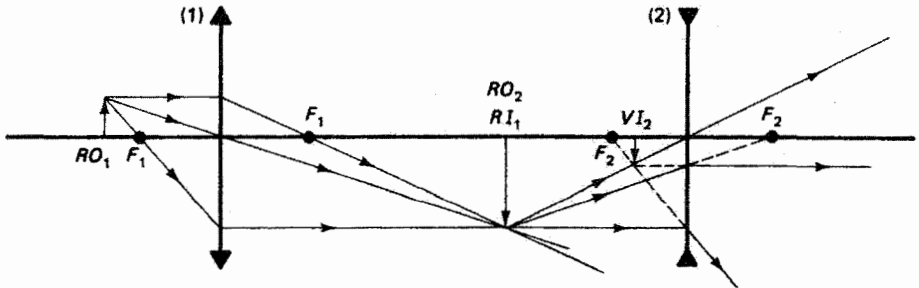
پرتوی که با عدسی محدب شکسته شود به محور نزدیک می‌شود و هر پرتوی که با عدسی مقعر شکسته شود از محور دور می‌شود. در هر دو نمودار، زاویه‌هایی که تحت آنها شیء و تصویر از مرکز عدسی دیده می‌شوند با هم برابرند. هم برای تصویر حقیقی در (الف) و هم برای تصویر مجازی در (ب)، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{h_o}{s} = \frac{h_i}{s'}$$

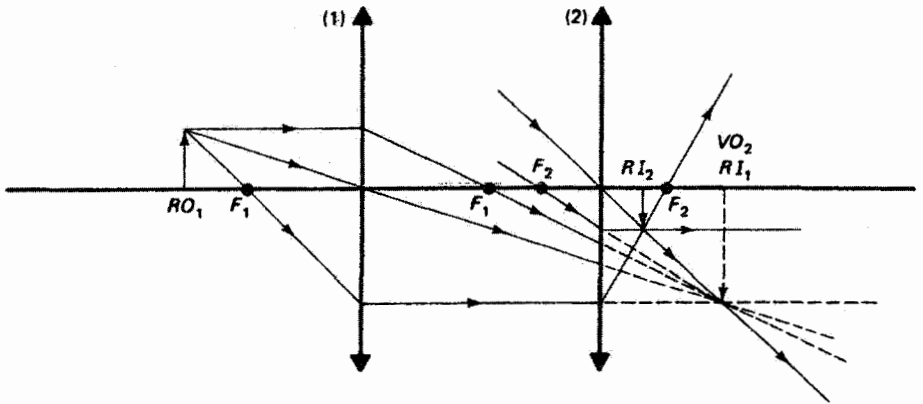
و برای بزرگنمایی خطی داریم

$$m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{s'}{s}$$

بنابه قرارداد علامت باید یک علامت منفی به رابطه بالا اضافه کنیم. در مورد (الف) داریم $s > 0$



(الف)



(ب)

شکل ۳-۲۳ (الف) تشکیل تصویر مجازی توسط دستگاهی متشکل از یک عدسی محدب (۱) و یک عدسی مقعر (۲). (ب) تشکیل تصویر حقیقی RI_2 توسط دو عدسی محدب. تصویر میانی RI_1 شیء مجازی VO_2 برای عدسی دوم است.

$m < 0$ و $s' > 0$ زیرا تصویر وارونه است؛ در مورد (ب) داریم $s > 0$ و $s' < 0$ و $m > 0$. بنابراین، در هر دو مورد می‌نویسیم

$$m = -\frac{s'}{s} \quad (3-30)$$

مثالهای نمودار پرتو برای دو عدسی در شکل ۳-۲۳ نشان داده شده‌اند. خلاصه مفیدی از تشکیل تصویر در آینه‌ها و عدسیها در جدول ۳-۱ و شکل ۳-۲۴ ارائه شده است.

جدول ۱-۳ خلاصه فرمولهای عدسی و آینه گاوسی

	سطح تخت	سطح کروی
$s' = -s$	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}, f = -\frac{R}{2}$	
$m = +1$	$m = -\frac{s'}{s}$	بازتاب
	مقعر: $f > 0, R < 0$	
	محدب: $f < 0, R > 0$	
$s' = \frac{n_2}{n_1}s$	$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$	
$m = +1$	$m = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}$	شکست تک سطح
	مقعر: $R < 0$	
	محدب: $R > 0$	
	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$	
	$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	
	$m = -\frac{s'}{s}$	شکست عدسی نازک
	مقعر: $f < 0$	
	محدب: $f > 0$	

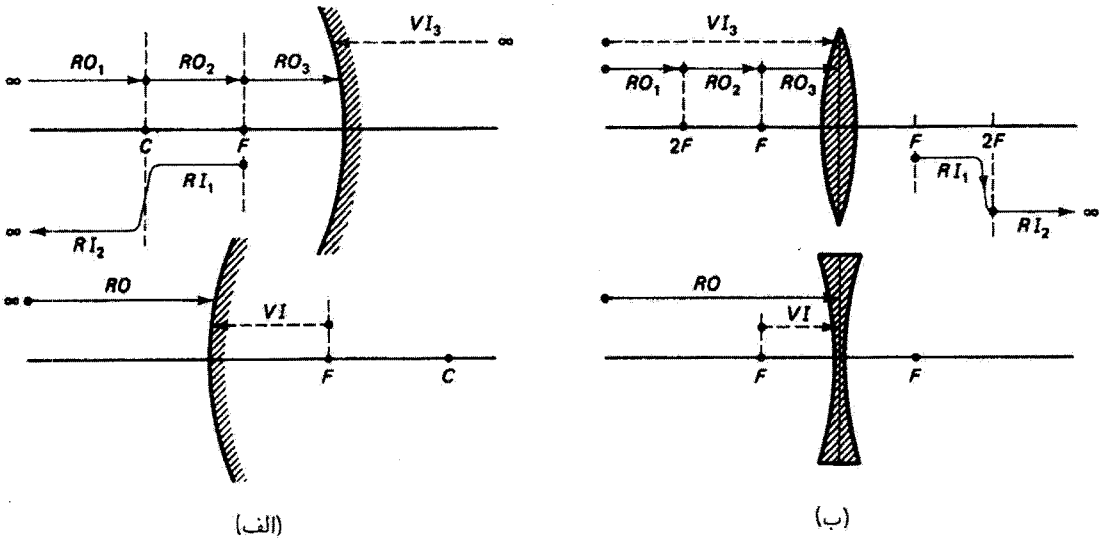
مثال

تصاویر میانی و نهایی را که در یک دستگاه دو-عدسی ایجاد می‌شوند، مانند آنچه در شکل ۲۳-۳ الف نشان داده شده است، به دست آورید و توصیف کنید. فرض کنید $f_1 = 15 \text{ cm}$, $f_2 = 15 \text{ cm}$ و فاصله بین آنها 60 cm است. شیء را در فاصله 25 سانتیمتری عدسی اول بگیرید.

حل: عدسی اول محدب است: $f_1 = +15 \text{ cm}$, $s_1 = 25 \text{ cm}$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f_1} \quad \text{یا} \quad s'_1 = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} = \frac{(25)(15)}{25 - 15} = +37.5 \text{ cm}$$

$$m_1 = -\frac{s'_1}{s_1} = -\frac{37.5}{25} = -1.5$$



شکل ۳-۲۴ خلاصه تشکیل تصویر توسط آینه‌های کروی و عدسی‌های نازک. مکان، ماهیت، بزرگنمایی، و سمتگیری تصویر ارائه شده است. (الف) آینه‌های کروی. (ب) عدسی‌های نازک.

بنابراین، تصویر اول حقیقی است (زیرا s'_1 مثبت است)، به فاصله 37.5 cm در سمت راست عدسی اول قرار دارد، وارونه است (زیرا m منفی است) و 1.5 برابر اندازه شیء است. عدسی دوم مقعر است: $f_2 = -15 \text{ cm}$. چون پرتوهای حقیقی نور از تصویر حقیقی اول و اگر می‌شوند، این تصویر برای عدسی دوم شیء حقیقی است با $s_2 = 60 - 37.5 = +22.5 \text{ cm}$ در سمت چپ عدسی. بنابراین،

$$s'_2 = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = \frac{(22.5)(-15)}{(22.5) - (-15)} = -9 \text{ cm}$$

$$m_2 = -\frac{s'_2}{s_2} = -\frac{-9}{22.5} = +0.4$$

بدین ترتیب، تصویر نهایی مجازی است (زیرا s'_2 منفی است)، به فاصله 9 cm در سمت چپ عدسی دوم واقع است، نسبت به شیء خود مستقیم است (زیرا m مثبت است)، و 0.4 برابر اندازه آن است. بزرگنمایی کل برابر است با $m = m_1 m_2 = (-1.5)(0.4) = -0.6$ بنابراین، تصویر نهایی نسبت به شیء اصلی وارونه است و $6/10$ اندازه عرضی آن است. تمام این مشخصات در نمودار پرتو شکل ۳-۲۴ الف به‌طور کیفی نمایش داده شده‌اند. ▲

۳-۱۰ گرایندگی و توان شکست

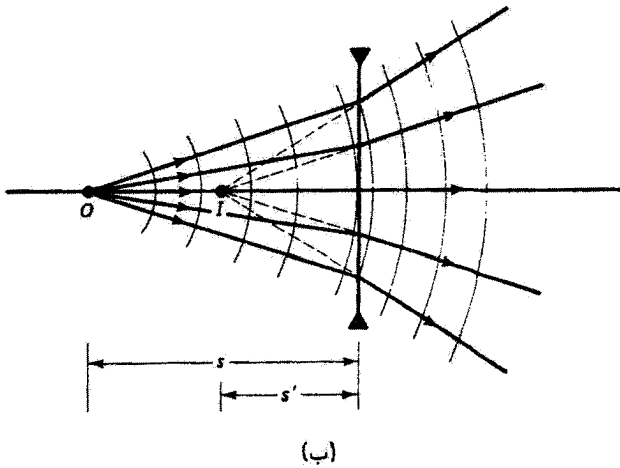
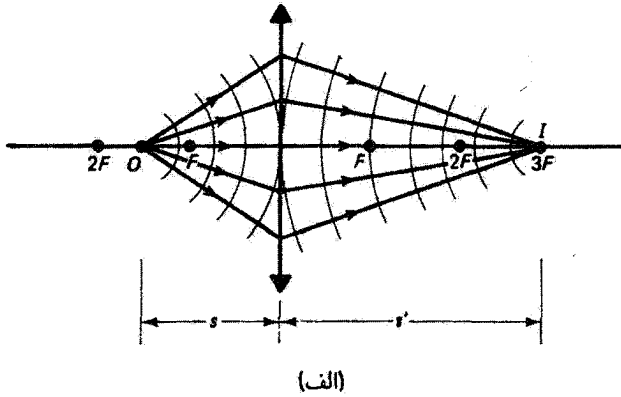
تعبیر دیگری برای معادله عدسی نازک در بعضی کاربردها از جمله دیدسنجی مفید است. این تعبیر مبتنی بر دو نکته است. در معادله عدسی نازک

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (۳۱-۳)$$

توجه کنید که (۱) معکوس فاصله‌ها در طرف چپ با هم جمع می‌شوند و معکوس فاصله کانونی را به دست می‌دهند، و (۲) معکوس فاصله‌های شیء و تصویر انحنای جبههٔ موجهایی را توصیف می‌کند که به عدسی فرود می‌آیند و مرکز آنها در مکانهای شیء O و تصویر I است. برای مثال، جبههٔ موج تخت دارای انحنای صفر است. در شکل ۳-۲۵ امواج کروی از نقطهٔ شیء O شروع می‌شوند و وقتی به عدسی نازک می‌رسند دارای انحنای گرایندگی V هستند که با $1/s$ داده می‌شود. اما این امواج با شکست توسط عدسی یا منقبض می‌شوند و تصویر نقطه‌ای حقیقی تشکیل می‌شود (مانند شکل ۳-۲۵ الف) یا بیشتر منبسط می‌شوند و تصویر نقطه‌ای مجازی ساخته می‌شود (مانند شکل ۳-۲۵ ب). انحنای گرایندگی V' مربوط به جبههٔ موجها وقتی از عدسی خارج می‌شوند $1/s'$ است. تغییر انحنای فضای شیء به فضای تصویر به علت توان شکست P عدسی است که با $1/f$ داده می‌شود. با این تعاریف، معادلهٔ ۳-۳۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V + V' = P \quad (۳۲-۳)$$

بعد جمله‌های معادلهٔ ۳-۳۲ عکس طول است. اگر طول برحسب متر بیان شده باشد واحد عکس آن را دیوپتر (D) می‌نامند. مثلاً، یک عدسی با فاصله کانونی ۲ cm دارای توان شکست ۵ دیوپتر است. در این دیدگاه، به جای فاصله‌های شیء و تصویر، بر درجهٔ انحنای موج یا همگرایی پرتو تأکید می‌شود. بنابراین، درجهٔ همگرایی V' مربوط به پرتوهای تصویری از روی درجهٔ همگرایی اصلی V مربوط به پرتوهای شیئی و توان شکست P مربوط به عدسی تعیین می‌شود. معادلهٔ ۳-۳۲ را می‌توان برای شکست در یک تک‌سطح (معادلهٔ ۳-۲۰) نیز به‌کار برد که در این مورد ضرایب شکست فضاهای تصویر و شیء الزاماً ۱ نیستند. در این صورت، توان سطح شکست برابر با $(n_2 - n_1)/R$ است. این رهیافت به دلیل دیگری نیز مفید است. وقتی عدسیهای نازک در کنار هم گذاشته شوند، فاصله کانونی f مربوط به این ترکیب را، که یک عدسی نازک محسوب می‌شود، می‌توان برحسب فواصل کانونی f_1, f_2, \dots مربوط به عدسیهای انفرادی تعیین کرد. برای مثال، فرض کنید دو عدسی



شکل ۲۵-۳ تغییر در انحنای جبهه موجها به علت شکست توسط عدسی نازک. (الف) عدسی محدب. (ب) عدسی مقعر.

نازک در کنار هم داریم. معادله عدسی را برای هر یک از آنها می‌نویسیم

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f_1} \quad \text{و} \quad \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2}$$

چون فاصله تصویر برای عدسی اول به‌منزله فاصله شیء برای عدسی دوم است، داریم

$$s_2 = -s'_1$$

و از جمع دو معادله به دست می آوریم

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

بنابراین، معکوسهای تک تک فواصل کانونی با هم جمع می شوند و عکس فاصله کانونی کل جفت را به دست می دهند. به طور کلی، برای چند عدسی نازک داریم

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots \quad (3-33)$$

اگر برحسب دیوپتر بنویسیم، کافی است توانهای شکست را با هم جمع کنیم:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots \quad (3-34)$$

در چشم نزدیک بین، توان شکست (همگرایی) عدسی زیادتر از حد است به طوری که تصویری حقیقی در جلو شبکیه تشکیل می شود. با گذاشتن تعدادی عدسی واگرا در جلو چشم و در نتیجه کم کردن همگرایی تا جایی که چشم بتواند اشیاء را به وضوح ببیند، دیدسنج می تواند با جمع کردن دیوپترهای این عدسیها دیوپتر تک عدسی اصلاح کننده لازم را تعیین کند. در چشم دور بین توان همگرایی طبیعی چشم به اندازه کافی زیاد نیست و باید توان همگرایی جبران کننده لازم را به صورت عینکی با عدسی همگرا فراهم کرد.

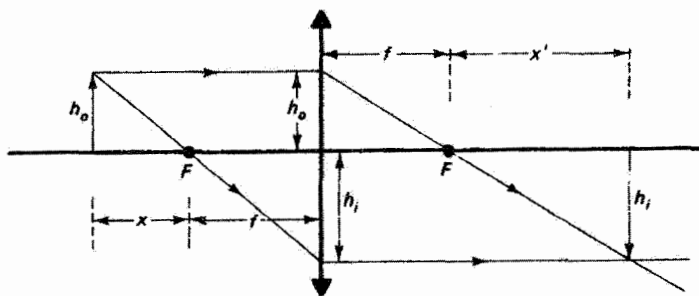
۱۱-۳ معادله نیوتونی عدسی نازک

اگر فواصل شیء و تصویر را نسبت به نقاط کانونی عدسی بسنجیم، همچنان که در شکل ۳-۲۶ با فواصل x و x' نشان داده شده اند، صورت دیگری برای معادله عدسی نازک به دست می آید که آن را صورت نیوتونی می نامند. در این شکل، دو پرتو ترسیم شده دو مثلث قائم الزاویه متشابه در هر طرف عدسی تعیین می کنند که نقطه کانونی رأس مشترک آنهاست. بنابراین، می توانیم نسبتهای اضلاعی از این مثلثها را که معرف بزرگنمایی خطی هستند به دست آوریم:

$$\frac{h_i}{h_o} = \frac{f}{x} \quad \text{و} \quad \frac{h_i}{h_o} = \frac{x'}{f}$$

با وارد کردن علامت منفی برای بزرگنمایی، به علت وارونه بودن تصویر، داریم

$$m = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f} \quad (3-35)$$



شکل ۳-۲۶ ترسیم برای به دست آوردن معادله نیوتونی عدسی نازک.

از معادله بالا صورت نیوتونی معادله عدسی نازک به دست می آید:

$$xx' = f^2 \quad (۳۶-۳)$$

این معادله تا حدی ساده تر از معادله ۳-۲۹ و در بعضی کاربردها مناسبتر است.

مسائل

۳-۱ رابطه ای برای زمان عبور پرتو نوری که فاصله x_1 را در محیطی با ضریب n_1 ، فاصله x_2 را در محیطی با ضریب n_2 ، ... و فاصله x_m را در محیطی با ضریب n_m طی می کند به دست آورید. نتیجه را به صورت یک حاصل جمع بیان کنید.

۳-۲ شاگوار دکارتی را برای تصویرسازی کامل توسط یک سطح شکست، وقتی نقطه شیء روی محور اپتیکی به فاصله 20 cm از رأس سطح و نقطه تصویر همیوخ آن 10 cm داخل محیط دوم باشد، به دست آورید. ضریب محیط شکست را 1.5 و محیط خارج را هوا بگیرید. معادله مقطع این شاگوار را با صفحه xy تعیین کنید در حالی که مبدأ مختصات در نقطه شیء است. جدولی از مختصات (x, y) برای این سطح فراهم کنید و نمودار مربوط به آن را با پرتوهای نمونه ترسیم کنید.

۳-۳ یک عدسی محدب دوگانه به قطر 5 cm دارای لابه ای به ضخامت صفر است. از یک شیء نقطه ای روی محوری که از مرکز عدسی می گذرد تصویری حقیقی در طرف مقابل به دست می آید. فاصله های شیء و تصویر که از صفحه تقارن عدسی اندازه گرفته می شوند 30 cm هستند، و ضریب شکست عدسی 1.52 است. با استفاده از هم ارزی راههای نوری که از مرکز و لبه عدسی می گذرند، ضخامت عدسی را در مرکز آن تعیین کنید.

۴-۳ کمترین طول یک آینه دیواری چقدر باشد که شخصی با قد 180 cm بتواند خود را به طور کامل در آینه ببیند؟ پرتوهای از پا و سر این شخص ترسیم کنید، و محل مناسب آینه را طوری به دست آورید که تصویر تمام قد، بدون توجه به فاصله شخص از آینه، دیده شود.

۵-۳ پرتو نوری با زاویه 45° به مرکز وجه بالایی مکعب شفاف با ضریب 1.414 فرود می آید. رد این پرتو را در مکعب ترسیم کنید.

۶-۳ برای تعیین ضریب شکست یک تخته شیشه‌ای با میکروسکوپ، ابتدا میکروسکوپ را روی خراش کوچکی در سطح بالایی تخته تنظیم می‌کنیم و مکان لوله را یادداشت می‌کنیم. سپس با پایین آوردن لوله میکروسکوپ به اندازه 1.87 mm تصویر واضحی از خراش را دوباره می‌بینیم. ضخامت تخته 1.5 mm است. دلیل تشکیل تصویر دوم چیست؟ ضریب شکست شیشه را به دست آورید.

۷-۳ یک چشمه کوچک نور در سطح پایینی یک قطعه مستطیلی شیشه‌ای به ضخامت 2.25 cm قرار دارد. پرتوهای نوری که در سطح بالایی بازتاب داخلی کلی می‌کنند دایره‌ای به قطر 0.76 cm در سطح پایینی به وجود می‌آورند. ضریب شکست شیشه را به دست آورید.

۸-۳ نشان دهید جابه‌جایی جانبی s برای پرتو نوری که از یک تخته شفاف به ضخامت t عبور می‌کند برابر است با

$$s = \frac{t \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2}$$

که در آن θ_1 و θ_2 به ترتیب زاویه‌های فرود و شکست هستند. مقدار جابه‌جایی را به ازای $t = 3 \text{ cm}$ ، $n = 1.5$ و $\theta_1 = 5^\circ$ محاسبه کنید.

۹-۳ میله‌ای به طول 1 m روی محور اپتیکی آینه محدب با فاصله کانونی 4 cm واقع شده است. به طوری که سر نزدیک آن 6 cm از سطح آینه فاصله دارد. طول تصویر این میله را به دست آورید.

۱۰-۳ در یک نیمکره شیشه‌ای که سطح خمیده آن نقره‌اندود شده است حباب کوچکی از هوا روی محور تقارن عمود بر سطح تخت نیمکره و در فاصله 5 cm از این سطح واقع است. شعاع انحنای سطح کروی 7.5 cm و ضریب شکست شیشه 1.5 است. اگر در امتداد محور مزبور به سطح تخت نگاه کنیم دو تصویر از حباب می‌بینیم. این دو تصویر چگونه و کجا تشکیل شده‌اند؟

۱۱-۳ یک آینه مقعر تصویری روی یک پرده تشکیل می‌دهد که دو بار بزرگتر از شیء است. سپس جای شیء و پرده را تغییر می‌دهیم به طوری که تصویری که روی پرده می‌افتد سه بار بزرگتر از

شیء است. اگر پرده ۷۵ cm جابه‌جا شده باشد مقدار جابه‌جایی شیء را به دست آورید. فاصله کانونی آینه را تعیین کنید.

۳-۱۲ روی سطح یک کره شیشه‌ای به قطر ۵ cm خراش کوچکی وجود دارد. اگر از پشت این شیشه و از نقطه مقابل خراش به آن نگاه کنیم خراش در کجا دیده می‌شود و بزرگنمایی آن چه اندازه است؟ فرض کنید برای شیشه $n = ۱.۵$.

۳-۱۳ (الف) در جلوی یک سطح شکست کروی در چه مکانی باید یک شیء را قرار داد تا پرتوهای شکسته موازی باشند؟ به عبارت دیگر، فاصله کانونی تک‌سطح شکست را به دست آورید.
(ب) با توجه به اینکه فاصله شیء حقیقی مثبت است، از جواب قسمت (الف) در موارد $n_2 > n_1$ و $n_2 < n_1$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳-۱۴ به یک ماهی در یک ظرف شیشه‌ای کروی به قطر ۳ cm از بیرون نگاه می‌کنیم. مکان ظاهری و بزرگنمایی چشم ماهی را به دست آورید اگر مکان واقعی آن (الف) در مرکز ظرف و

(ب) در وسط فاصله بین مرکز و جدار ظرف، روی خط دید و نزدیکتر به چشم بیننده، باشد. شیشه را به اندازه کافی نازک بگیرید تا بتوان از تأثیر آن روی شکست صرف‌نظر کرد.

۳-۱۵ شیء کوچکی رو به روی دریاچه شیشه‌ای کروی محدب یک مخزن کوچک آب قرار دارد. شعاع انحنای دریاچه ۵ cm است. جدار داخلی مقابل دریاچه آینه تختی است که تا دریاچه ۲۵ cm فاصله دارد. اگر فاصله شیء تا دریاچه ۳ cm باشد، با چشمپوشی از شکست در شیشه نازک دریاچه، ماهیت تصویر نهایی را تعیین کنید.

۳-۱۶ می‌خواهیم یک عدسی تخت-محدب با فاصله کانونی ۲۵ cm از شیشه‌ای با ضریب شکست ۱.۵۲ بسازیم. شعاع انحنای ابزارهای تراش و پرداخت را که برای ساختن عدسی باید به‌کار روند محاسبه کنید.

۳-۱۷ فاصله کانونی یک عدسی هلالی نازک را تعیین کنید که سطوح کروی آن دارای شعاعهای انحنای ۵ cm و ۱۰ cm هستند. شیشه عدسی ضریب شکست ۱.۵ دارد. هر دو نوع مثبت و منفی این عدسی را در نظر بگیرید.

۳-۱۸ یکی از دیواره‌های یک ماهیدان با استفاده از یک عدسی نازک بزرگ شیشه‌ای ($n = ۱.۵$) ساخته شده است. شعاع انحنای دو طرف این عدسی محدب مساوی ۳ cm است. یک ماهی

کوچک در این ظرف به فاصله 20 cm از عدسی قرار دارد. اگر از عدسی نگاه کنیم این ماهی را کجا می بینیم؟ بزرگنمایی آن را محاسبه کنید.

۱۹-۳ دو عدسی نازک یکی با فاصله کانونی 5 cm - و دیگری 20 cm + داریم. فاصله کانونی معادل آنها را در دو وضعیت زیر به دست آورید:
(الف) وقتی کنار هم قرار گرفته اند، و
(ب) وقتی 10 cm از هم فاصله دارند.

۲۰-۳ دو عدسی محدب-تخت نازک یکسان با شعاع انحنای 15 cm از طرف خمیده در مرکز با هم تماس دارند. فضای بین آنها از روغنی با ضریب شکست 1.65 پر شده است. ضریب شکست شیشه عدسیها 1.5 است. فاصله کانونی این ترکیب را به دست آورید. [راهنمایی: لایه روغن را به صورت یک عدسی میانی بگیریید.]

۲۱-۳ یک چشمی از دو عدسی نازک هر یک با فاصله کانونی 20 mm + و به فاصله 16 mm از یکدیگر ساخته شده است.

(الف) یک جسم کوچک را باید کجا قرار دهیم تا نور ناشی از آن توسط این ترکیب موازی شود؟
(ب) آیا تصویری که چشم می بیند نسبت به شیء مستقیم است؟ آیا این تصویر بزرگ شده است؟ برای جواب دادن به این سؤاها می توانید از نمودار پرتو استفاده کنید.

۲۲-۳ یک عدسی نازک واگرا و یک آینه مقعر فاصله کانونی یکسانی دارند. یک شیء در فاصله $f/2$ از عدسی قرار داده شده است و آینه در طرف دیگر عدسی و به فاصله $3f$ واقع است. با استفاده از اپتیک گاوسی، تصویر نهایی دستگاه را پس از دو شکست
(الف) با نمودار سه پرتوی، و
(ب) با محاسبه به دست آورید.

۲۳-۳ در جلو قطاری از سه عدسی به ترتیب با فاصله های کانونی 10 ، 15 و 20 cm و به فاصله های 30 و 20 cm از یکدیگر شیء کوچکی به فاصله 20 cm از اولین عدسی قرار دارد. مکان تصویر نهایی نسبت به آخرین عدسی و بزرگنمایی خطی آن نسبت به شیء اصلی را محاسبه کنید اگر
(الف) هر سه عدسی مثبت باشند،
(ب) عدسی میانی منفی باشد، و
(ج) اولین و سومین عدسی منفی باشند. برای هر مورد نمودار پرتو ترسیم کنید.

۲۴-۳ یک عدسی نازک محدب با فاصله کانونی 30 cm در هوا و ضریب شکست 1.5 داریم.

اگر آن را در یک مایع شفاف قرار دهیم یک عدسی منفی با فاصله کانونی 188 cm می‌شود. ضریب شکست مایع را به دست آورید.

۲۵-۳ می‌خواهیم از یک شیء نورانی تصویری چهار بار بزرگتر روی یک پرده به دست آوریم. باید از یک عدسی محدب-تخت با $n = 1.5$ و $R = 6 \text{ cm}$ استفاده کنیم. با به کار بردن صورت نیوتونی معادله عدسی، فاصله شیء و پرده را از عدسی تعیین کنید. تصویر مستقیم است یا وارونه؟ نتایج خود را با معادلات معمولی عدسی امتحان کنید.

۲۶-۳ از کنار هم گذاشتن سه عدسی نازک با فاصله‌های کانونی 1 cm ، 2 cm ، و 4 cm یک عدسی مرکب به دست آمده است.

(الف) توان تک‌تک عدسیها و عدسی مرکب را برحسب دیوپتر محاسبه کنید.

(ب) گرایی‌نگی یک نقطه شیء به فاصله 12 cm از عدسی مرکب و گرایی‌نگی تصویر حاصل را تعیین کنید. نتیجه را به فاصله تصویر برحسب سانتیمتر تبدیل کنید.

۲۷-۳ روش بسط برای تعیین فاصله کانونی عدسی: یک عدسی در امتداد محور اپتیکی بین یک شیء ثابت و یک پرده ثابت تصویر حرکت داده می‌شود. مکانهای شیء و تصویر به اندازه L که بیشتر از چها برابر فاصله کانونی عدسی است از هم فاصله دارند. دو مکان برای عدسی به دست می‌آیند که به ازای آنها تصویری واضح، در یک مورد کوچکتر و در مورد دیگر بزرگتر، روی پرده تشکیل می‌شود. اگر فاصله این دو مکان عدسی D باشد، نشان دهید فاصله کانونی عدسی با $f = (L^2 - D^2)/4L$ داده می‌شود.

۲۸-۳ روش آبه برای تعیین فاصله کانونی عدسی: با یک عدسی تصویری از یک شیء روی پرده تشکیل شده است. با ثابت نگه داشتن عدسی و بردن شیء به مکان جدید، پرده را حرکت می‌دهیم تا باز هم تصویری واضح به دست آید. اگر مکانهای شیء S_1 و S_2 و بزرگنماییهای عرضی تصویر به ترتیب M_1 و M_2 باشند، نشان دهید فاصله کانونی عدسی با رابطه زیر داده می‌شود

$$f = \frac{(S_2 - S_1)}{(1/M_1 - 1/M_2)}$$

۲۹-۳ با مینیمم کردن فاصله یک پروتو اختیاری (فرضی) از یک نقطه چشمه معین تا یک نقطه دریافت معین، قانون بازتاب را از اصل فرما به دست آورید.

۳۰-۳ دو عدسی نازک تخت-محدب یکسان داریم که یکی را از طرف تخت و دیگری را از طرف خمیده نقره‌اندود می‌کنیم. نسبت فاصله‌های کانونی را به دست آورید. نور روی طرف ناآندوده فرود می‌آید.

۳-۳۱ نشان دهید کمترین فاصله بین یک شیء و تصویرش که توسط یک عدسی نازک تشکیل شده است $f/4$ است. این مقدار در چه وضعیتی به دست می‌آید؟

۳-۳۲ یک پرتو نور از چند محیط متوالی با ضخامتها و ضرایب شکست مختلف که با سطوح تخت موازی از هم جدا شده‌اند عبور می‌کند.

(الف) نشان دهید قانون اسنل بین اولین و آخرین محیط برقرار است به طوری که انگار محیطهای میانی وجود ندارند.

(ب) جابه‌جایی جانبی کل پرتو از نقطه فرود تا نقطه خروج را محاسبه کنید.

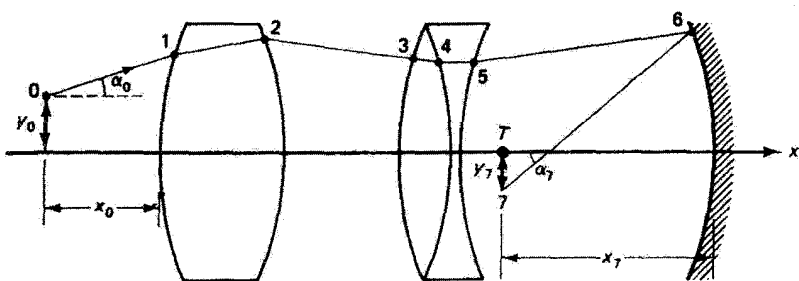
۳-۳۳ یک باریکه موازی نور به یک عدسی تخت-محدب که 4 cm ضخامت دارد فرود می‌آید. شعاع انحنای طرف خمیده عدسی نیز 4 cm است. ضریب شکست عدسی 1.5 است و در هوا به کار می‌رود. تعیین کنید نور با فرود در هر یک از دو طرف کجا متمرکز می‌شود؟

۳-۳۴ یک سطح جدایی کروی با شعاع انحنای 10 cm دو محیط با ضرایب شکست 1 و $4/3$ را از هم جدا کرده است. مرکز انحنای در طرفی است که ضریب بزرگتری دارد. فاصله‌های کانونی را به ازای فرود نور از هر یک از دو طرف تعیین کنید. اگر ضرایب شکست را تعویض کنیم نتایج چگونه تغییر می‌کنند؟

۳-۳۵ از یک هواپیما برای عکسبرداری به منظور تهیه نقشه سطح زمین استفاده می‌شود. اگر فاصله کانونی دوربین 15 cm باشد و بخواهیم مقیاس نقشه $1:50000$ باشد، ارتفاع مناسب برای عکسبرداری را تعیین کنید.

مراجع

- [1] Feynman, Richard P., Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1975. Ch. 26, 27.
- [2] Smith, F. Dow. "How Images are Formed." In *Lasers and Light. Readings from Scientific American*, pp. 59-70. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1968.
- [3] Winston, Roland. "Nonimaging Optics." *Scientific American* (March 1991): 76.
- [4] Longhurst, R. S. *Geometrical and Physical Optics*, 2d ed. New York: John Wiley and Sons, 1967. Ch. 1, 2.
- [5] Rossi, Bruno. *Optics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1957. Ch. 1, 2.



۴

روشهای ماتریسی در اپتیک پیرامحوری

مقدمه

در این فصل به بررسی روشهایی می‌پردازیم که برای تحلیل دستگاههای اپتیکی پیچیده شامل تعدادی عنصر شکست و یا بازتاب در یک ردیف به‌کار می‌روند. با توصیف یک تک عدسی ضخیم برحسب نقاط بنیادی آن شروع می‌کنیم و بحث را به تحلیل قطاری از عناصر اپتیکی، توسط ضرب ماتریسهای 2×2 که نمایشگر شکستها یا بازتابهای جزئی روی دهنده در دستگاه هستند، می‌کشانیم. بدین طریق، می‌توان یک ماتریس دستگاه برای تمام دستگاه اپتیکی به‌دست آورد که به همان نقاط بنیادی مشخص‌کننده عدسی ضخیم مربوط می‌شود. در پایان، روشهای رایانه‌ای ردیابی پرتو برای ردیابی یک پرتو معین نور در دستگاه اپتیکی به اختصار بیان می‌شود.

۱-۴ عدسی ضخیم

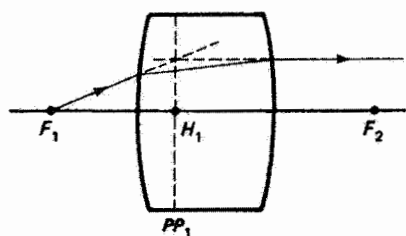
یک عدسی ضخیم کروی در نظر بگیرید، یعنی عدسی که صرف‌نظر کردن از ضخامت آن در امتداد محور اپتیکی منجر به خطاهای جدی در تحلیل می‌شود. اینکه دقیقاً در چه صورت یک عدسی نازک یا ضخیم است بستگی به دقت مورد نظر دارد. عدسی ضخیم را می‌توان با روشهای

فصل ۳ بررسی کرد. محیط شیشه‌ای با دو سطح شکست کروی محدود شده است. تصویر یک شیء معین که از شکست در سطح اول به وجود می‌آید شیء برای شکست در سطح دوم می‌شود. ضخامت عدسی در فاصله شیء برای سطح دوم وارد می‌شود. بدین ترتیب، تصویری که توسط سطح دوم تشکیل می‌شود تصویر نهایی ناشی از کنش کل عدسی ضخیم است.

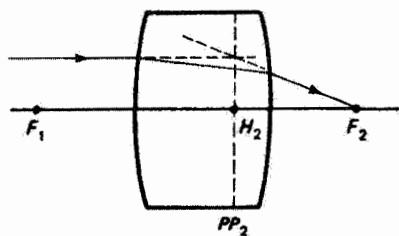
عدسی ضخیم را همچنین می‌توان به طریقی توصیف کرد که تعیین ترسیمی تصویر مربوط به یک شیء اختیاری را ممکن می‌سازد و شباهت زیادی با قواعد پرتو برای عدسی نازک دارد. این توصیف، که برحسب اصطلاح نقاط بنیادی عدسی است، از این جهت نیز مفید است که می‌توان آن را برای دستگاه‌های اپتیکی پیچیده‌تر، چنانکه در این فصل خواهیم دید، به کار برد. بدین ترتیب، اگر چه فعلاً تنها یک عدسی ضخیم را در نظر می‌گیریم اما توصیف زیر برای هر دستگاه اپتیکی اختیاری که بتوان آن را دارای مشخصات کلی عدسی ضخیم تصور کرد کارایی دارد.

روی محور یک عدسی ضخیم شش نقطه بنیادی وجود دارند که از آنها می‌توان خواص تصویرسازی عدسی را تعیین کرد. صفحه‌هایی^۱ که در این نقاط بر محور عموداند صفحه‌های بنیادی نامیده می‌شوند. این شش عدد بنیادی عبارت‌اند از (شکلهای ۱-۴ و ۲-۴ را ببینید) نقاط کانونی اول و دوم دستگاه (F_1 و F_2) که قبلاً تعریف شده‌اند؛ نقاط اصلی اول و دوم (H_1 و H_2)، و نقاط گرهی اول و دوم (N_1 و N_2).

پرتوی که از نقطه کانونی اول F_1 می‌آید با محور موازی می‌شود (شکل ۱-۴ الف) و پرتو موازی با محور توسط عدسی شکسته می‌شود و از نقطه کانونی دوم F_2 می‌گذرد (شکل ۱-۴ ب). امتدادهای پرتو فرودی و پرتو حاصل در هر مورد، بنابه تعریف، در صفحه‌های اصلی با هم تلاقی می‌کنند و این صفحه‌ها محور را در نقاط اصلی H_1 و H_2 قطع می‌کنند. در مورد یک عدسی



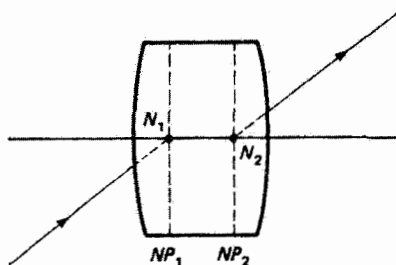
(الف)



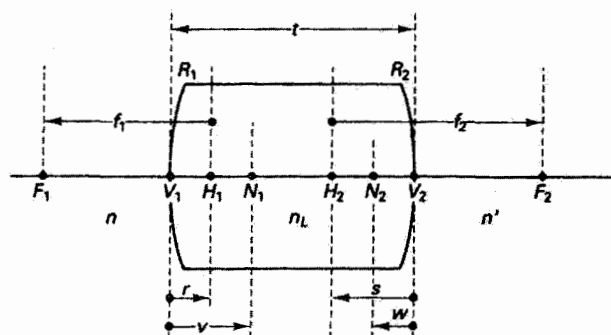
(ب)

شکل ۱-۴ نمایش صفحه‌های اصلی (الف) اول و (ب) دوم متعلق به دستگاه اپتیکی.

۱. این "صفحه‌ها" در واقع سطحهایی با خمیدگی کم هستند که در تقریب بیرامحوری می‌توان آنها را صفحه در نظر گرفت.



شکل ۲-۴ نمایش نقاط گرهی دستگاه اپتیکی.



شکل ۳-۴ نمادهایی که برای مشخص کردن نقاط بنیادی و مکانها در عدسی ضخیم به کار رفته‌اند. نقاط محوری عبارت‌اند از نقاط کانونی (F)، رأسها (V)، نقاط اصلی (P)، و نقاط گرهی (N). فاصله‌های جهتدار که صفحه‌های مربوط به این نقاط را جدا می‌کنند در شکل معرفی شده‌اند.

نازک، دو صفحه اصلی بر یک خط قائم واقع شده‌اند که معمولاً از آن برای نمایش عدسی نازک استفاده می‌شود. صفحه‌های اصلی به‌طور کلی برهم منطبق نیستند و حتی ممکن است خارج از دستگاه اپتیکی واقع شوند. با دانستن مکان صفحه‌های اصلی، ترسیم دقیق نمودار پرتو امکانپذیر می‌شود. پرتوهایی که از نقاط کانونی می‌گذرند در محل تلاقی با صفحه‌های اصلی، چنانکه در شکل ۱-۴ نشان داده شده است، خمیده می‌شوند. پرتو سوم که معمولاً در نمودار مربوط به عدسی نازک کشیده می‌شود پرتوی است که از مرکز عدسی بدون انحراف و با جابه‌جایی قابل چشمپوشی، عبور می‌کند. نقاط گرهی عدسی ضخیم یا هر دستگاه اپتیکی تصحیح این پرتو را ممکن می‌سازند (شکل ۲-۴ را ببینید). اگر پرتو در راستایی که از نقطه گرهی اول N_1 می‌گذرد به دستگاه اپتیکی فرود آید در راستایی از آن خارج می‌شود که با راستای فرودی موازی است اما به اندازه‌ای جابه‌جا شده است که به نظر می‌رسد از نقطه گرهی دوم N_2 ناشی می‌شود.

مکانهای تمام شش نقطه بنیادی در شکل ۳-۴ نشان داده شده‌اند. فاصله‌ها جهتدار هستند،

و بنا به یک قرارداد علامت فاصله‌های به طرف چپ منفی و فاصله‌های به طرف راست مثبت‌اند. توجه کنید که برای عدسی ضخیم، فاصله‌های r و s مکانهای نقاط اصلی نسبت به رأسهای V_1 و V_2 را تعیین می‌کنند در حالی که f_1 و f_2 مکانهای نقاط کانونی نسبت به نقاط اصلی را به دست می‌دهند. باید دقیقاً توجه کرد که این نقاط کانونی از رأسهای عدسی اندازه‌گیری نمی‌شوند.

معادله‌های اساسی عدسی ضخیم را بدون اثبات بیان می‌کنیم. محاسبات اگر چه جبر و هندسه ساده‌ای دارند اما نسبتاً دشوار هستند. از رهیافت ماتریسی که بعداً در این فصل ارائه می‌شود به عنوان راه ساده‌تری برای توجیه این معادلات استفاده می‌کنیم، و حتی در این مورد نیز قسمتی از کار را به مسائل محول می‌کنیم.

با استفاده از نمادهایی که در شکل ۳-۴ معرفی شده‌اند، فاصله کانونی f_1 با رابطه زیر داده

می‌شود

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n_L - n'}{nR_2} - \frac{n_L - n}{nR_1} - \frac{(n_L - n)(n_L - n')}{nn_L} \frac{t}{R_1R_2} \quad (1-4)$$

و فاصله کانونی f_2 برحسب f_1 به صورت زیر بیان می‌شود

$$f_2 = -\frac{n'}{n} f_1 \quad (2-4)$$

توجه کنید که اگر عدسی تنها با یک محیط شکست احاطه شده باشد، و در نتیجه $n = n'$ ، دو فاصله کانونی دارای یک بزرگی هستند. مکانهای صفحه‌های اصلی از روابط زیر به دست می‌آیند

$$r = \frac{n_L - n'}{n_L R_2} f_1 t \quad \text{و} \quad s = -\frac{n_L - n}{n_L R_1} f_2 t \quad (3-4)$$

مکانهای نقاط گرهی با روابط زیر داده می‌شوند

$$v = \left(1 - \frac{n'}{n} + \frac{n_L - n'}{n_L R_2} t \right) f_1 \quad \text{و} \quad w = \left(1 - \frac{n}{n'} - \frac{n_L - n}{n_L R_1} t \right) f_2 \quad (4-4)$$

فاصله‌های تصویر و شیء و بزرگنمایی خطی با روابط زیر به هم مربوط می‌شوند

$$-\frac{f_1}{s_o} + \frac{f_2}{s_i} = 1 \quad \text{و} \quad m = -\frac{ns_i}{n's_o} \quad (5-4)$$

و این به شرطی است که فاصله‌های s_o و s_i و همچنین فاصله‌های کانونی نسبت به صفحه‌های اصلی متناظر اندازه‌گیری شوند. توجه کنید که در مورد متداول عدسی در هوا ($n = n' = 1$) داریم $v = r$ و $s = w$: نقاط اصلی اول و دوم روی نقاط گرهی متناظر می‌افتند. همچنین، فاصله‌های کانونی اول و دوم از لحاظ بزرگی با هم برابرند، و معادله‌های زیر، با نمادهایی با تعبیر مناسب جدید، برقراراند

$$-\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad \text{و} \quad m = -\frac{s_i}{s_o} \quad (۶-۴)$$

این معادله‌ها، به استثنای یک علامت منفی که از قرارداد علامت ایجاد شده است، با معادله‌های عدسی نازک یکی هستند.

مثال

فاصله‌های کانونی و نقاط اصلی را برای یک عدسی محدب-محدب (دوکوژ) حساب کنید که ضخامت آن ۴ cm، ضریب شکست آن ۱٫۵۲، و شعاعهای انحنای آن ۲۵ cm است و در سر یک استوانهٔ دراز پر از آب ($n = ۱٫۳۳$) گذاشته شده است.

حل: از معادله‌های عدسی به ترتیبی که داده شده‌اند استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1.52 - 1.33}{1(-25)} - \frac{1.52 - 1}{1(+25)} - \frac{(1.52 - 1)(1.52 - 1.33)}{1(1.52)} - \frac{4}{(-25)(+25)}$$

یا $f_1 = -۳۵٫۷۴$ cm سمت چپ صفحهٔ اصلی اول. آنگاه

$$f_2 = -\left(\frac{1.33}{1}\right)(-۳۵٫۷۴) = ۴۷٫۵۳$$
 cm

سمت راست صفحهٔ اصلی دوم، و

$$r = \frac{1.52 - 1.33}{(1.52)(-25)}(-۳۵٫۷۴)(۴) = ۰٫۷۱۵$$
 cm

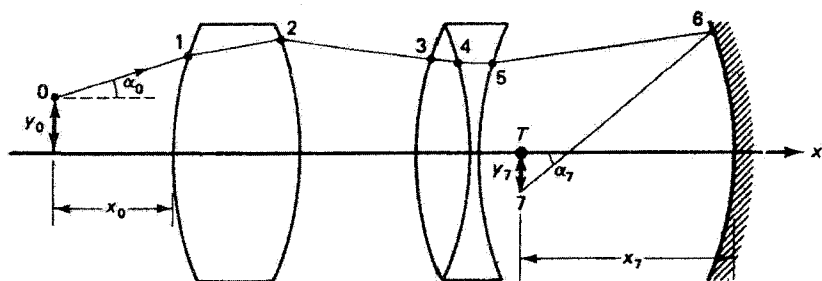
$$s = -\frac{1.52 - 1}{(1.52)(+25)}(۴۷٫۵۳)(۴) = -۲٫۶۰$$
 cm

بنابراین، نقطهٔ اصلی H_1 در فاصلهٔ ۰٫۷۱۵ cm سمت راست رأس چپ عدسی واقع شده است، و H_2 در فاصلهٔ ۲٫۶۰ cm سمت چپ رأس راست قرار گرفته است. ▲

۲-۴ روش ماتریسی

وقتی دستگاه اپتیکی شامل چند عنصر باشد — مثلاً چهار یا پنج عدسی که عدسی عکاسی را تشکیل می‌دهند — احتیاج به رهیافتی نظام‌مند داریم که تحلیل را آسان کند. اگر در تحلیل خود تنها پرتوهای پیرامحوری را در نظر بگیریم، این رهیافت نظام‌مند به خوبی با روش ماتریسی قابل حصول است. اکنون روشی را برای بررسی تشکیل تصویر ارائه می‌کنیم که در آن از ماتریسها برای توصیف تغییرات در ارتفاع و زاویه پرتوی استفاده می‌شود که با شکستها و بازتابهای متوالی از دستگاه اپتیکی عبور می‌کند. نشان می‌دهیم که در تقریب پیرامحوری تغییرات در ارتفاع و راستای پرتو را می‌توان با معادله‌هایی بیان کرد که خطی هستند و این رهیافت ماتریسی را ممکن می‌سازند. از ترکیب ماتریسهایی که شکستها و بازتابهای انفرادی را نمایش می‌دهند می‌توان یک دستگاه اپتیکی معین را با یک ماتریس منفرد نمایش داد که از آن خواص اساسی دستگاه اپتیکی مرکب قابل استنتاج است. این روش کاملاً برای فنون رایانه‌ای در ردیابی پرتوی که از دستگاه اپتیکی با پیچیدگی اختیاری می‌گذرد مناسب است.

شکل ۴-۴ پیشروی پرتو منفردی را در یک دستگاه اپتیکی اختیاری نشان می‌دهد. این پرتو در فاصله x_0 از اولین سطح شکست برحسب ارتفاع y_0 و زاویه شیب α_0 نسبت به محور اپتیکی توصیف شده است. تغییر زاویه در هر شکست، همچون در نقاط ۱ تا ۵، و در هر بازتاب، همچون در نقطه ۶، روی می‌دهد. ارتفاع پرتو طی گذارهای بین این نقاط تغییر می‌کند. می‌خواهیم راهی پیدا کنیم تا بتوانیم ارتفاع و زاویه شیب پرتو را در هر نقطه در دستگاه اپتیکی، مثلاً در نقطه T به فاصله x_7 از آینه، محاسبه کنیم. به عبارت دیگر، با داشتن داده‌های ورودی y_0 و α_0 در نقطه ۰ می‌خواهیم مقادیر y_7 و α_7 در نقطه ۷ را به عنوان داده‌های خروجی پیش‌بینی کنیم.



شکل ۴-۴ مراحل ردیابی پرتو در دستگاه اپتیکی. پیشروی پرتو را می‌توان با تغییرات ارتفاع و راستای آن توصیف کرد.

۳-۴ ماتریس انتقال

انتقال ساده پرتو را در یک محیط همگن، مانند آنچه در شکل ۵-۴ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. پیشروی محوری پرتو را مطابق شکل L بگیرید به طوری که در نقطه ۱ ارتفاع و راستای پرتو به ترتیب با "مختصات" y_1 و α_1 داده می‌شوند. واضح است که

$$\alpha_1 = \alpha_0 \quad \text{و} \quad y_1 = y_0 + L \tan \alpha_0$$

این معادله‌ها را می‌توان به صورتی مرتب در آورد که در آن تقریب پیرامحوری $\tan \alpha_0 \cong \alpha_0$ به کار برده شده است:

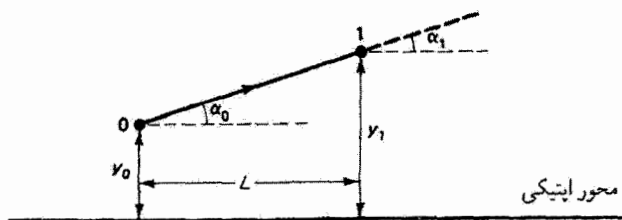
$$y_1 = (1)y_0 + (L)\alpha_0 \quad (7-4)$$

$$\alpha_1 = (0)y_0 + (1)\alpha_0$$

این دو معادله در نمادنگاری ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (8-4)$$

بدیهی است که ماتریس تبدیل پرتو 2×2 در رابطه بالا اثر انتقال روی پرتو را نمایش می‌دهد. داده‌های ورودی (y_0, α_0) توسط ماتریس تبدیل پرتو تغییر می‌کنند و داده‌های خروجی درست (y_1, α_1) به دست می‌آیند.



شکل ۵-۴ انتقال ساده یک پرتو.

۴-۴ ماتریس شکست

اکنون شکست پرتو را در یک سطح کروی جداکننده محیطهایی با ضرایب شکست n و n' چنانکه در شکل ۴-۶ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. باید مختصات پرتو (y', α') پس از شکست را به مختصات قبل از شکست (y, α) مربوط کنیم. چون شکست در یک نقطه صورت می‌گیرد تغییر ارتفاع روی نمی‌دهد و $y = y'$. از طرف دیگر، برای زاویه‌های α و α' با توجه به شکل ۴-۶ داریم

$$\alpha' = \theta' - \phi = \theta' - \frac{y}{R} \quad \text{و} \quad \alpha = \theta - \phi = \theta - \frac{y}{R}$$

با استفاده از صورت پیرامحوری قانون اسنل، یعنی

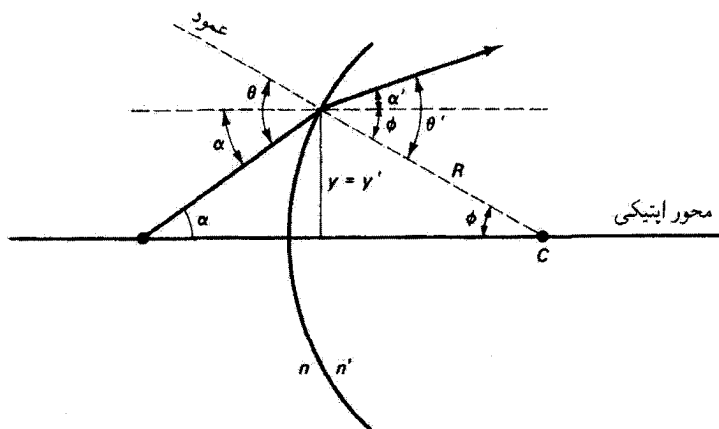
$$n\theta = n'\theta'$$

به دست می‌آوریم

$$\alpha' = \left(\frac{n}{n'}\right)\theta - \frac{y}{R} = \left(\frac{n}{n'}\right)\left(\alpha + \frac{y}{R}\right) - \frac{y}{R}$$

یا

$$\alpha' = \left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{n}{n'} - 1\right)y + \left(\frac{n}{n'}\right)\alpha$$



شکل ۴-۶ شکست پرتو در سطح جدایی.

بنابراین، معادله‌های خطی لازم عبارت‌اند از

$$y' = (1)y + (0)\alpha$$

$$\alpha' = \left[\left(\frac{1}{R} \right) \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \right] y + \left(\frac{n}{n'} \right) \alpha \quad (9-4)$$

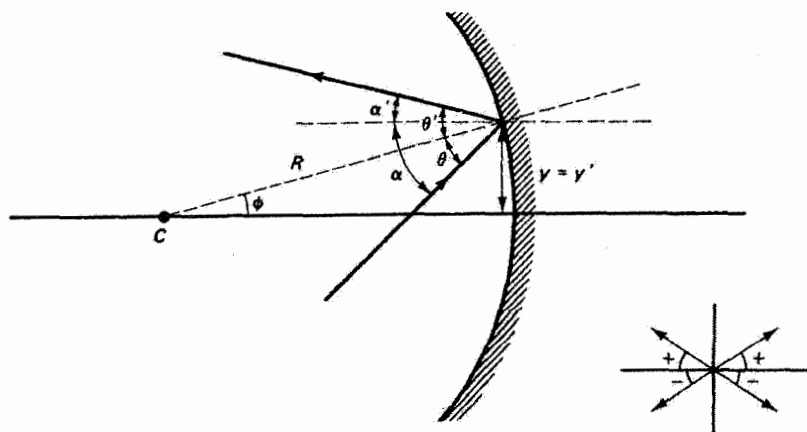
یا به صورت ماتریسی داریم

$$\begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) & \frac{n}{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (10-4)$$

از همان قرارداد علامت که قبلاً وضع کردیم استفاده می‌کنیم. اگر سطح را مقعر بگیریم، R منفی می‌شود. به علاوه، به ازای $R \rightarrow \infty$ ماتریس شکست مربوط به سطح جدایی تخت به دست می‌آید.

۵-۴ ماتریس بازتاب

در این بخش، بازتاب در سطح کروی را، چنانکه در شکل ۷-۴ دیده می‌شود، در نظر می‌گیریم. در مورد فعلی، که آینه مقعر است، R منفی است. باید یک قرارداد علامت هم برای زاویه‌هایی که



شکل ۷-۴ بازتاب پرتو در سطح کروی. قرارداد علامت برای زاویه پرتو در پایین شکل نمایش داده شده است.

جهتهای پرتوها را تعیین می‌کنند وضع می‌کنیم. زاویه‌های پرتوهای که جهت آنها به سمت بالا است مثبت گرفته می‌شوند؛ زاویه‌های پرتوهای که جهت آنها به سمت پایین است منفی می‌گیریم. این قرارداد علامت در پایین شکل ۷-۴ نمایش داده شده است. از هندسه شکل ۷-۴، در حالی که α و α' هر دو مثبت‌اند، داریم

$$\alpha = \theta + \phi = \theta + \frac{y}{-R} \quad \text{و} \quad \alpha' = \theta' - \phi = \theta' - \frac{y}{-R}$$

با استفاده از این روابط همراه با قانون بازتاب $\theta = \theta'$ ، به دست می‌آوریم

$$\alpha' = \theta' + \frac{y}{R} = \theta + \frac{y}{R} = \alpha + \frac{2y}{R}$$

و دو معادله خطی لازم عبارت‌اند از

$$y' = (1)y + (0)\alpha$$

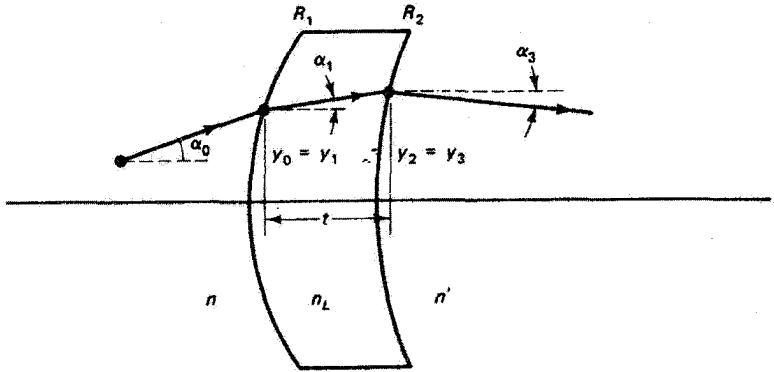
$$\alpha' = \left(\frac{2}{R}\right)y + (1)\alpha \quad (11-4)$$

به صورت ماتریسی داریم

$$\begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (12-4)$$

۶-۴ ماتریسهای عدسی ضخیم و عدسی نازک

اکنون ماتریسی می‌سازیم که کنش عدسی ضخیم روی پرتو نور را نمایش می‌دهد. به عنوان یک مورد کلی، فرض می‌کنیم محیطهای دو طرف عدسی متفاوت‌اند و همچنانکه در شکل ۸-۴ نشان داده شده است، ضرایب شکست آنها n و n' هستند. پرتو در عبور از عدسی متحمل دو شکست و یک انتقال می‌شود. مرحله‌هایی که ماتریسهای آنها را قبلاً به دست آوردیم. با توجه به شکل ۸-۴



شکل ۸-۴ پیشروی پرتو نور برای عدسی ضخیم.

که در آن برای سادگی یک عدسی با شعاعهای انحناى مثبت انتخاب کرده‌ایم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \quad \text{برای شکست اول}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad \text{برای انتقال}$$

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \text{برای شکست دوم}$$

از ادغام این معادله‌های ماتریسی به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

بدیهی است که تمام عدسی ضخیم را می‌توان با یک ماتریس $M = M_3 M_2 M_1$ نمایش داد. با یادآوری اینکه ضرب ماتریسها خاصیت انجمنی دارد اما خاصیت جابه‌جایی ندارد، ترتیب ماتریسها در ضرب باید حفظ شود. ماتریسهای انفرادی روی پرتو نور با همان ترتیبی عمل می‌کنند که کنشهای اپتیکی متناظر بر پرتو نور طی عبور از دستگاه اثر می‌گذارند. با تعمیم این بحث، معادله

ماتریسی مربوط به تعداد N انتقال، بازتاب و شکست به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} y_f \\ \alpha_f \end{bmatrix} = M_N M_{N-1} \cdots M_2 M_1 \begin{bmatrix} y_o \\ \alpha_o \end{bmatrix} \quad (13-4)$$

و ماتریس انتقال پرتو نمایشگر تمام دستگاه اپتیکی عبارت است از

$$M = M_N M_{N-1} \cdots M_2 M_1 \quad (14-4)$$

این نتیجه را ابتدا برای عدسی ضخیم شکل ۸-۴ به کار می‌بریم که ضریب آن n_L و ضخامت آن برای پرتوهای پیرامحوری t است. آنگاه تقریب درست برای عدسی نازک از حدگیری $t \rightarrow 0$ به دست می‌آید. اگر \mathcal{R} معرف ماتریس شکست و \mathcal{T} معرف ماتریس انتقال باشد، ماتریس مربوط به عدسی ضخیم بنابه معادله ۱۴-۴ ماتریس مرکب زیر است

$$M = \mathcal{R}_2 \mathcal{T} \mathcal{R}_1$$

یا

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n'}{n' R_2} & \frac{n_L}{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_L R_1} & \frac{n}{n_L} \end{bmatrix} \quad (15-4)$$

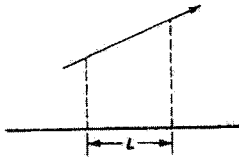
رابطه را با در نظر گرفتن موردی که در آن t قابل چشمپوشی است ($t = 0$) و عدسی با محیط یکسانی از هر طرف احاطه شده است ($n = n'$) ساده‌تر می‌کنیم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n}{n R_2} & \frac{n_L}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_L R_1} & \frac{n}{n_L} \end{bmatrix} \quad (16-4)$$

پس از ضرب کردن به دست می‌آوریم

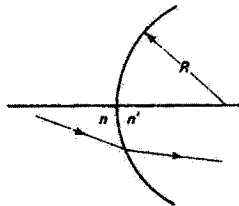
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n}{n} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) & 1 \end{bmatrix} \quad (17-4)$$

جدول ۱-۴ خلاصه چند ماتریس تبدیل ساده پرتو



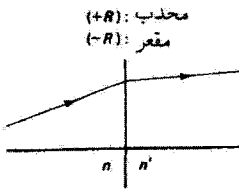
$$M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n'}{Rn'} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$

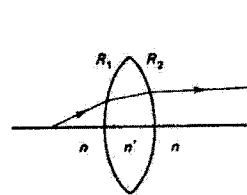
ماتریس شکست،
سطح جدایی کروی:



محدب: (+R)
مقعر: (-R)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$

ماتریس شکست،
سطح جدایی تخت:

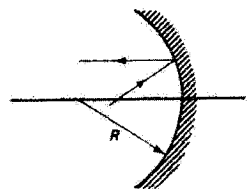


محدب: (+f)
مقعر: (-f)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس عدسی نازک:

$$\frac{1}{f} = \frac{n' - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



محدب: (+R)
مقعر: (-R)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس آینه کروی:

عنصر ماتریس در سطر دوم و ستون اول را می‌توان با استفاده از فرمول عدسی سازان

$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

برحسب فاصله کانونی نوشت که در نتیجه ماتریس تبدیل پرتو عدسی نازک به صورت ساده زیر در می‌آید

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad (18-4)$$

طبق معمول، f برای عدسی محدب مثبت و برای عدسی مقعر منفی گرفته می‌شود. این ماتریس و ماتریسهای را که قبلاً به دست آمدند در جدول ۱-۴ برای مراجعه سریع خلاصه‌نویسی کرده‌ایم.

۷-۴ ماتریس تبدیل پرتو دستگاه

از ترکیب ماتریسهای انفرادی لازم با ترتیب مناسب، مطابق معادله ۱۴-۴، می‌توان هر دستگاه اپتیکی را با تنها یک ماتریس 2×2 ، که آن را ماتریس دستگاه می‌نامیم، بیان کرد.

مثال

ماتریس دستگاه را برای عدسی ضخیم شکل ۸-۴ با استفاده از معادله ۱۵-۴ به دست آورید، با فرض اینکه برای این عدسی داریم $R_1 = 45 \text{ cm}$ ، $R_2 = 30 \text{ cm}$ ، $t = 5 \text{ cm}$ ، $n_L = 1.60$ و $n = n' = 1$

حل:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{140} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad M = \begin{bmatrix} \frac{23}{24} & \frac{25}{8} \\ \frac{7}{1200} & \frac{17}{16} \end{bmatrix}$$

چنانکه خواهیم دید، خواص مربوط دستگاه اپتیکی با عنصرهای این ماتریس تبدیل پرتو مرکب، که معمولاً به صورت نمادین زیر نشان داده می شود، توصیف می شوند

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باید توجه کرد که مقادیر خاص عناصر ماتریس دستگاه بستگی به موقعیت پرتو در ورودی و خروجی دارد. در مورد عدسی ضخیمی که در بالا محاسبه کردیم، صفحه ورودی را در سطح چپ عدسی و صفحه خروجی را در سطح راست آن انتخاب کرده ایم. اگر هر یک از این صفحه ها را به فاصله معین از عدسی دور کنیم، ماتریس دستگاه شامل ماتریس انتقال اولیه و نهایی مربوط به این فاصله ها نیز خواهد بود. عناصر ماتریس تغییر می کنند، و ماتریس دستگاه اکنون این "دستگاه" بزرگ شده را نمایش می دهد. در هر صورت، دترمینان ماتریس دستگاه خاصیت بسیار مفیدی دارد:

$$\text{Det } M = AD - BC = \frac{n_o}{n_f} \quad (۱۹-۴)$$

که در آن n_o و n_f ضرایب شکست محیطهای اولیه و نهایی دستگاه اپتیکی هستند. اثبات رابطه بالا مبتنی بر این است که اولاً مقدار دترمینان تک تک ماتریسهای تبدیل پرتو در جدول ۱-۴ چنانکه دیده می شود یا n/n' است یا ۱ است، و ثانیاً دترمینان حاصلضرب چند ماتریس برابر است با حاصلضرب دترمینانهای هر یک از ماتریسها^۱. به طور صوری، اگر $M = M_1 M_2 M_3 \dots M_N$ M دستگاه

$$\text{Det } (M) = (\text{Det } M_1)(\text{Det } M_2)(\text{Det } M_3) \dots (\text{Det } M_N) \quad (۲۰-۴)$$

با جاگذاری دترمینانهای ماتریسهای انتقال پرتو در حاصلضرب بالا، تمام ضرایب شکست میانی یکدیگر را حذف می کنند، و چنانکه در معادله ۱۹-۴ بیان شده است، تنها نسبت n_o/n_f باقی می ماند. در اکثر موارد، مثلاً در مورد مثال عدسی ضخیم، n_o و n_f مربوط به هوا هستند، و $\text{Det } (M)$ برابر با ۱ است. معادله ۱۹-۴ در امتحان درستی محاسبات تعیین ماتریس دستگاه مفید است.

۱. این قضیه را می توان برای حاصلضرب دو ماتریس به آسانی تحقیق کرد و با استقراء به حاصلضرب هر تعداد ماتریس تعمیم داد. اثبات صوری را می توان در کتابهای درسی ماتریسها و دترمینانها یافت، مثلاً

E. T. Browne, *Introduction to the Theory of Determinants and Matrices* (Chapel Hill, University of North Carolina, 1958).

۸-۴ معنی عناصر ماتریس دستگاه

اکنون بررسی می‌کنیم که اگر هر باریکی از عناصر ماتریس دستگاه صفر باشد چه پیش می‌آید. معادله ۱۳-۴ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} y_f \\ \alpha_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_o \\ \alpha_o \end{bmatrix} \quad (۲۱-۴)$$

که معادل دو رابطه جبری زیر است

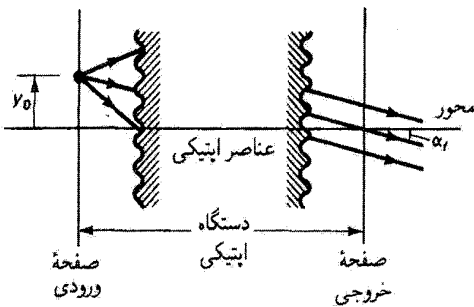
$$\begin{aligned} y_f &= Ay_o + B\alpha_o \\ \alpha_f &= Cy_o + D\alpha_o \end{aligned} \quad (۲۲-۴)$$

۱. $D = 0$. در این مورد، α_o هر چه باشد داریم $\alpha_f = Cy_o$. چون y_o ثابت است، این رابطه نشان می‌دهد تمام پرتوهایی که از یک نقطه در صفحه فرودی صادر می‌شوند، مستقل از زاویه‌ای که در این صفحه دارند دارای یک زاویه α_f در صفحه خروجی هستند. بنابراین، چنانکه در شکل ۹-۴ الف نشان داده شده است، صفحه ورودی بر صفحه کانونی اول دستگاه اپتیکی منطبق است.

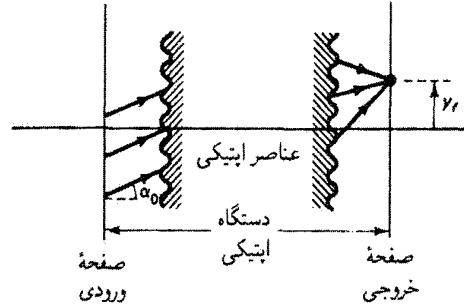
۲. $A = 0$. این مورد شباهت زیادی با مورد قبل دارد. در اینجا $y_f = B\alpha_o$ ایجاب می‌کند که y_f مستقل از y_o باشد، و در نتیجه تمام پرتوهایی که از صفحه ورودی، با هر ارتفاعی، تحت یک زاویه صادر می‌شوند در یک ارتفاع y_f به صفحه خروجی می‌رسند. بدین ترتیب، چنانکه در شکل ۹-۴ ب نشان داده شده است، صفحه خروجی همان صفحه کانونی دوم است.

۳. $B = 0$. در نتیجه، مستقل از α_o داریم $y_f = Ay_o$. بدین ترتیب، تمام پرتوهای ناشی از یک نقطه با ارتفاع y_o در صفحه ورودی به یک نقطه با ارتفاع y_f در صفحه خروجی وارد می‌شوند. بنابراین، چنانکه در شکل ۹-۴ ج نشان داده شده است، این نقاط به عنوان نقاط شیء و تصویر به هم مربوط‌اند، و صفحه‌های ورودی و خروجی با صفحه‌های همیوخ برای دستگاه اپتیکی متناظراند. به علاوه، چون $A = y_f/y_o$ ، عنصر ماتریسی A نمایشگر بزرگنمایی خطی است.

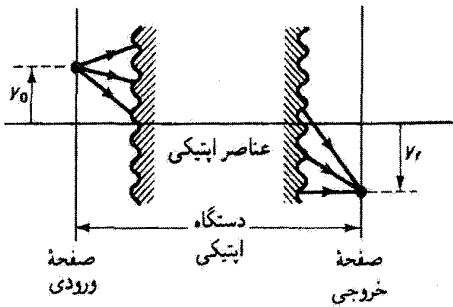
۴. $C = 0$. در اینجا مستقل از y_o داریم $\alpha_f = D\alpha_o$. این مورد مشابه مورد ۳ است که در آن راستای پرتو به جای ارتفاع پرتو قرار گرفته است. اکنون تمام پرتوهای ورودی هم‌راستا پرتوهای خروجی موازی در راستایی دیگر ایجاد می‌کنند. علاوه بر این، $D = \alpha_f/\alpha_o$ بزرگنمایی زاویه‌ای



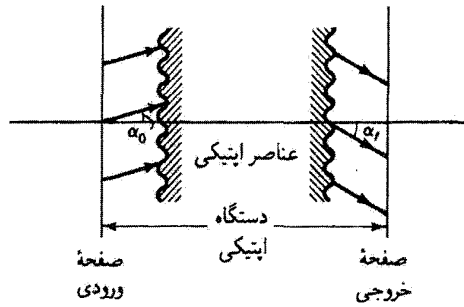
(الف)



(ب)



(ج)



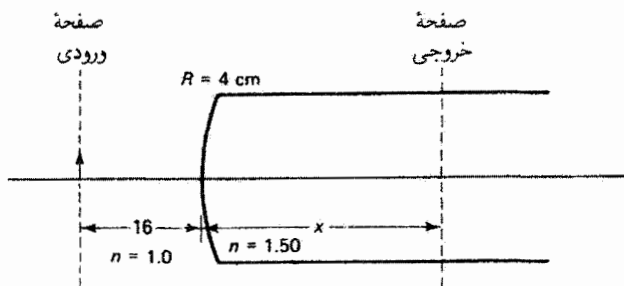
(د)

شکل ۴-۹ نمودارها معنی صفر بودن هر یک از عناصر ماتریس دستگاه را نشان می‌دهند. (الف) وقتی $D = 0$ ، صفحه ورودی متناظر با صفحه کانونی اول دستگاه اپتیکی است. (ب) وقتی $A = 0$ ، صفحه خروجی متناظر با صفحه کانونی دوم دستگاه اپتیکی است. (ج) وقتی $B = 0$ ، صفحه خروجی عبارت است از صفحه تصویر همیغ صفحه ورودی، و A بزرگنمایی خطی است. (د) وقتی $C = 0$ ، یک باریکه موازی از پرتوها در صفحه ورودی در صفحه خروجی موازی است، و D بزرگنمایی زاویه‌ای است.

است. دستگاهی که برای آن $C = 0$ گاهی "دستگاه تلسکوپی" نامیده می‌شود زیرا در تلسکوپ پرتوهای موازی وارد عدسی شیشی می‌شوند و پرتوهای موازی، برای رؤیت در چشمی، خارج می‌شوند.

مثال

مورد ۳ را با یک مثال توضیح می‌دهیم. شیء کوچکی را در فاصله 16 cm از سر سمت چپ یک میله دراز پلاستیکی قرار می‌دهیم. این سر، چنانکه در شکل ۴-۱۰ دیده می‌شود، کروی صیقلی شده و دارای شعاع 4 cm است. ضریب شکست پلاستیک 1.5 است و شیء در هوا قرار دارد. فرض کنید تصویر مجهول در صفحه مرجع خروجی به فاصله x از سر کروی میله واقع شده است.



شکل ۱۰-۴ طرح مربوط به مثال درباره روشهای ماتریس تبدیل پرتو.

می‌خواهیم فاصله تصویر x و بزرگنمایی خطی را تعیین کنیم. ماتریس دستگاه از حاصلضرب سه ماتریس تشکیل شده است که مربوط اند به (۱) انتقال \mathcal{T}_1 در هوا از شیء تا میله، (۲) شکست \mathcal{R} در سطح کروی، و (۳) انتقال \mathcal{T}_2 در پلاستیک تا تصویر. با یادآوری اینکه ماتریسها را باید با ترتیب معکوس در نظر بگیریم، داریم $M = \mathcal{T}_2 \mathcal{R} \mathcal{T}_1$ ، یعنی

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1 - 1.50}{4(1.50)} & \frac{1}{1.50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{12} & 16 - \frac{2x}{3} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

که در آن کمیت مجهول x در عناصر ماتریس وارد شده است. با توجه به بحث بالا، وقتی $B = 0$ صفحه خروجی صفحه تصویر است و در نتیجه فاصله تصویر با برابر صفر قرار دادن عنصر سطر اول و ستون دوم تعیین می‌شود:

$$16 - \frac{2x}{3} = 0 \quad \text{یا} \quad x = 24 \text{ cm}$$

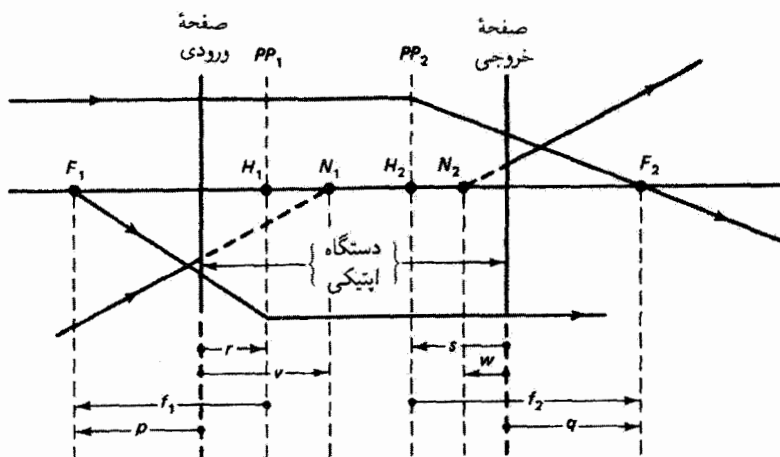
به علاوه، بزرگنمایی خطی از مقدار عنصر A به دست می‌آید:

$$m = A = 1 - \frac{x}{12} = -1$$

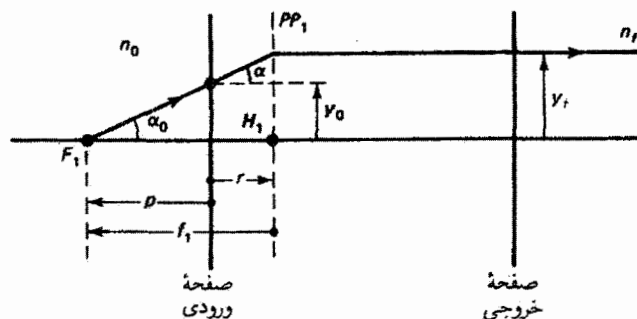
نتیجه می‌گیریم که تصویر در فاصله 24 cm داخل میله تشکیل می‌شود، وارونه است، و دارای اندازه خطی شیء است. این مثال نشان می‌دهد چگونه می‌توان از ماتریس دستگاه برای رسیدن به هدف متداول که یافتن موقعیت و اندازه تصویر است استفاده کرد، اگر چه این کار را معمولاً می‌توان با استفاده از فرمولهای تصویر گاوسی که قبلاً به دست آوردیم سریعتر به انجام رسانید. ▲

۹-۴ موقعیت نقاط بنیادی برای دستگاه اپتیکی

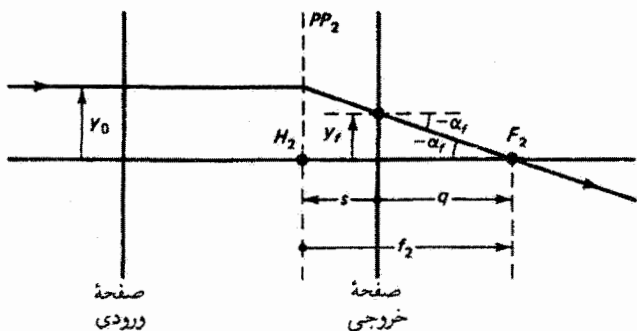
چون خواص هر دستگاه اپتیکی را می‌توان از عناصر ماتریس تبدیل پرتو دستگاه به دست آورد، پس باید روابطی بین عناصر ماتریسی A, B, C, D و نقاط بنیادی دستگاه وجود داشته باشند. شکل ۴-۱۱ تعمیم شکل ۴-۳ است که در آن فواصلی که موقعیت شش نقطه بنیادی را نشان می‌دهند نسبت به صفحه‌های ورودی و خروجی، که حدود دستگاه اپتیکی را تعیین می‌کنند، تعریف شده‌اند. نقاط کانونی در فاصله‌های f_1 و f_2 از صفحه‌های اصلی و در فاصله‌های p و q از صفحه‌های مرجع ورودی و خروجی واقع شده‌اند. به علاوه، فاصله‌های s و r موقعیت نقاط اصلی و فاصله‌های v و w موقعیت نقاط گرهی را نسبت به صفحه‌های ورودی و خروجی تعیین می‌کنند. فاصله‌های واقع در طرف راست صفحه‌های مرجعشان را مثبت و در طرف چپ را منفی می‌گیریم. نقاط اصلی و گرهی غالباً خارج از دستگاه اپتیکی، یعنی خارج از ناحیه‌ای که صفحه‌های ورودی و خروجی تعریف می‌کنند، قرار می‌گیرند.



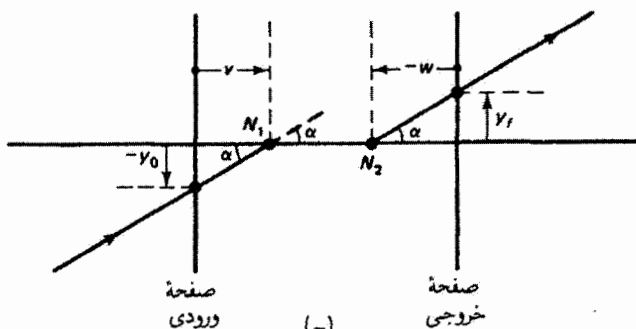
شکل ۴-۱۱ نشانه‌های موقعیت برای شش نقطه بنیادی دستگاه اپتیکی. پرتوهای مربوط به نقاط گرهی و صفحه‌های اصلی نیز نشان داده شده‌اند.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۲-۴ ترسیم برای مربوط کردن (الف) فواصل p, r, f_1 ، (ب) فواصل s, q, f_2 ، و (ج) فواصل v, w به عناصر ماتریسی.

اکنون روابط بین فواصلی که در شکل ۱۱-۴ تعریف شده‌اند و عناصر ماتریس دستگاه را به دست می‌آوریم. شکل ۱۲-۴ الف را در نظر بگیرید که فاصله‌های p, r, f_1 را، که نسبت به مکانهای نقطه کانونی اول و صفحه اصلی اول تعیین شده‌اند، به وضوح نشان می‌دهد. مختصات ورودی پرتو مفروض (y_0, α_0) و مختصات خروجی (y_f, α) است. بنابراین، معادله‌های پرتو ۲۲-۴

برای این پرتو به صورت زیر در می‌آیند

$$y_f = Ay_o + B\alpha_o$$

و

$$0 = Cy_o + D\alpha_o \quad \text{یا} \quad y_o = -\left(\frac{D}{C}\right)\alpha_o \quad (23-4)$$

با توجه به شکل ۱۲-۴ الف، برای زاویه‌های کوچک داریم

$$\alpha_o = \frac{y_o}{-p}$$

که در آن علامت منفی نشان می‌دهد F_1 به فاصله p در سمت چپ صفحه ورودی واقع شده است. با استفاده از معادله ۲۳-۴، به دست می‌آوریم

$$p = \frac{-y_o}{\alpha_o} = \frac{D}{C} \quad (24-4)$$

به همین ترتیب، داریم $\alpha_o = y_f / (-f_1)$ و در نتیجه

$$f_1 = \frac{-y_f}{\alpha_o} = \frac{-(Ay_o + B\alpha_o)}{\alpha_o} = \frac{AD}{C} - B$$

$$f_1 = \frac{AD - BC}{C} = \frac{\text{Det}(M)}{C} = \left(\frac{n_o}{n_f}\right) \frac{1}{C} \quad (25-4)$$

و سرانجام، با استفاده از معادله‌های ۲۴-۴ و ۲۵-۴ می‌توان فاصله مثبت r را بر حسب p و f_1 بیان کرد:

$$r = p - f_1 = \frac{D}{C} - \frac{n_o}{n_f} \frac{1}{C} = \frac{1}{C} \left(D - \frac{n_o}{n_f} \right) \quad (26-4)$$

با توجه به شکل ۱۲-۴ ب، می‌توانیم به روش مشابهی روابط مربوط به فاصله‌های خروجی f_2 ، q و s را به دست آوریم. این نتایج همراه با آنچه برای p ، f_1 و r محاسبه کردیم در جدول ۲-۴ آورده شده‌اند. با استفاده از شکل ۱۲-۴ ج، فاصله‌های صفحه‌های گرهی v و w را نیز می‌توان تعیین کرد. به عنوان مثال، برای زاویه کوچک α داریم

جدول ۲-۴ موقعیت نقاط بنیادی برحسب عناصر ماتریس دستگاه

$p = \frac{D}{C}$	F_1	موقعیت نسبت به صفحه‌های (۱) ورودی و (۲) خروجی
$q = -\frac{A}{C}$	F_2	
$r = \frac{D - n_o/n_f}{C}$	H_1	
$s = \frac{1 - A}{C}$	H_2	
$v = \frac{D - 1}{C}$	N_1	
$w = \frac{n_o/n_f - A}{C}$	N_2	
<hr/>		
$f_1 = p - r = \frac{n_o/n_f}{C}$	F_1	موقعیت نسبت به صفحه‌های اصلی
$f_2 = q - s = -\frac{1}{C}$	F_2	

$$\alpha = \frac{-y_o}{v} \quad (27-4)$$

که در آن علامت منفی نشاندهنده این است که پرتو صفحه ورودی را پایین محور قطع می‌کند. پرتوهای ورودی و خروجی زاویه یکسانی با محور می‌سازند. از معادله ۲۲-۴ به ازای $\alpha = \alpha_f = \alpha_o$ داریم

$$\alpha = Cy_o + D\alpha \quad \text{یا} \quad \frac{y_o}{\alpha} = \frac{1 - D}{C} \quad (28-4)$$

از ترکیب معادله‌های ۲۷-۴ و ۲۸-۴ به دست می‌آوریم

$$v = \frac{D - 1}{C} \quad (29-4)$$

به همین ترتیب، با استفاده از $\text{Det}(M) = AD - BC = n_o/n_f$ می‌توان نشان داد

$$w = \frac{(n_o/n_f) - A}{C} \quad (30-4)$$

این نتایج نیز در جدول ۴-۲ گنجانده شده‌اند. از روابطی که در این جدول آورده شده‌اند می‌توان برای اثبات تعمیمهای مفید زیر استفاده کرد:

۱. اگر محیطهای اولیه و نهایی دارای ضریب شکست یکسانی باشند، نقاط اصلی و نقاط گرهی

برهم منطبق‌اند، یعنی $s = w$ و $r = v$.

۲. اگر محیطهای اولیه و نهایی دارای ضریب شکست یکسانی باشند، فاصله‌های کانونی اول و دوم دستگاه اپتیکی از لحاظ بزرگی با هم برابراند.

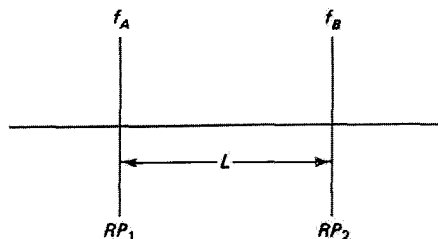
۳. فاصله بین نقاط اصلی برابر است با فاصله بین نقاط گرهی، یعنی $r - s = v - w$.

۱۰-۴ چند مثال با استفاده از ماتریس دستگاه و نقاط بنیادی

به‌عنوان مثال، دستگاهی اپتیکی شامل دو عدسی نازک در هوا در نظر بگیرید که مطابق شکل ۴-۱۳ به اندازه L از هم فاصله دارند. این عدسیها دارای فاصله‌های کانونی f_A و f_B هستند که ممکن است مثبت یا منفی باشند. اگر صفحه‌های مرجع ورودی و خروجی روی عدسیها واقع باشند ماتریس دستگاه شامل دو ماتریس عدسی نازک \mathcal{L}_B و \mathcal{L}_A و یک ماتریس انتقال \mathcal{F} مربوط به فاصله جدایی L است، به‌طوری که $M = \mathcal{L}_B \mathcal{F} \mathcal{L}_A$ یا

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_A} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{L}{f_A} & L \\ \frac{1}{f_B} \left(\frac{L}{f_A} - 1 \right) - \frac{1}{f_A} & 1 - \frac{L}{f_B} \end{bmatrix} \quad (31-4)$$



شکل ۴-۱۳ دستگاه اپتیکی متشکل از دو عدسی نازک در هوا به فاصله L از یکدیگر.

فاصله کانونی معادل برای هر دستگاه از این نوع را، که نسبت به صفحه‌های اصلی اندازه‌گیری شده است، می‌توان به سادگی از روی عنصر C "محاسبه" کرد. چون $f_{\infty} = |1/C|$ ،

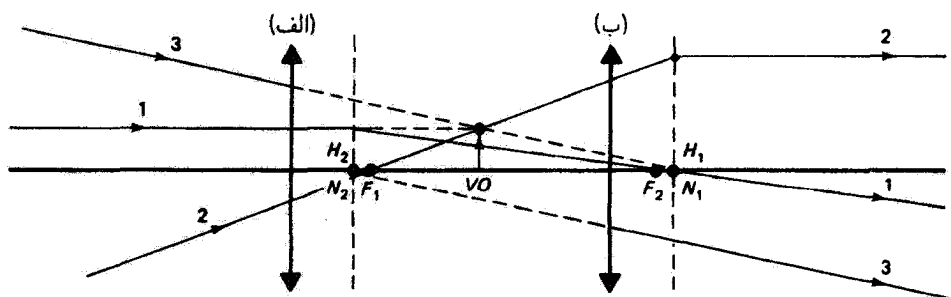
$$\frac{1}{f_{\infty}} = \frac{1}{f_A} + \frac{1}{f_B} - \frac{L}{f_A f_B} \quad (۳۲-۴)$$

علاوه بر این، نقاط اصلی و گرهی اول در فاصله $(D-1)/C$ از عدسی اول واقع‌اند، و نقاط اصلی و گرهی دوم در فاصله $(1-A)/C$ از عدسی دوم قرار دارند. در نتیجه،

$$r = v = \left(\frac{f_{\infty}}{f_B}\right) L \quad \text{و} \quad s = w = -\left(\frac{f_{\infty}}{f_A}\right) L \quad (۳۳-۴)$$

مثال

اکنون این نتایج را برای یک چشمی هویگنس به‌کار می‌بریم که از دو عدسی نازک مثبت با جدایی L برابر با میانگین فواصل کانونی آنها تشکیل شده است. فرض کنید $f_A = ۳۱۲۵ \text{ cm}$ و $f_B = ۲۰۸۳ \text{ cm}$ ، و در نتیجه $L = ۲۶۰۴ \text{ cm}$ و بنابه معادله ۳۲-۴، داریم $f_{\infty} = ۲۰۵ \text{ cm}$. در ضمن، توان درشتنمایی این چشمی که با $f/۲۵$ داده می‌شود برابر است با $\times ۱۰$. از معادله ۳۳-۴ نتیجه می‌گیریم $r = +۳۱۲۵ \text{ cm}$ و $s = -۲۰۸۳ \text{ cm}$. این دستگاه اپتیکی همراه با نقاط بنیادی آن و پرتوهای نمونه در شکل ۴-۱۴ تقریباً با رعایت مقیاس نشان داده شده است. از پرتوهای فرودی تصویری بین دو عدسی تشکیل می‌شود که به‌منزله شیء مجازی برای دستگاه اپتیکی است. با نگاه کردن از چشمی، یک تصویر مجازی بزرگ (در شکل نشان داده نشده است) دیده می‌شود که توسط پرتوهای واگرا که از دستگاه خارج می‌شوند به‌وجود آمده است. درباره این چشمی در فصل ۶ بیشتر بحث می‌کنیم.



شکل ۴-۱۴ ترسیم پرتو برای چشمی هویگنس، با استفاده از نقاط بنیادی.

مثال

در این مثال آخر، برای عدسی نیمکره‌ای شیشه‌ای که در شکل ۱۵-۴ نشان داده شده است نقاط بنیادی را به دست می‌آوریم، و نمودار پرتو را ترسیم می‌کنیم. شعاعهای انحنای عبارت‌اند از $R_1 = 3 \text{ cm}$ و $R_2 \rightarrow \infty$ ، عدسی در هوا است و ضریب شکست آن 1.5° است.

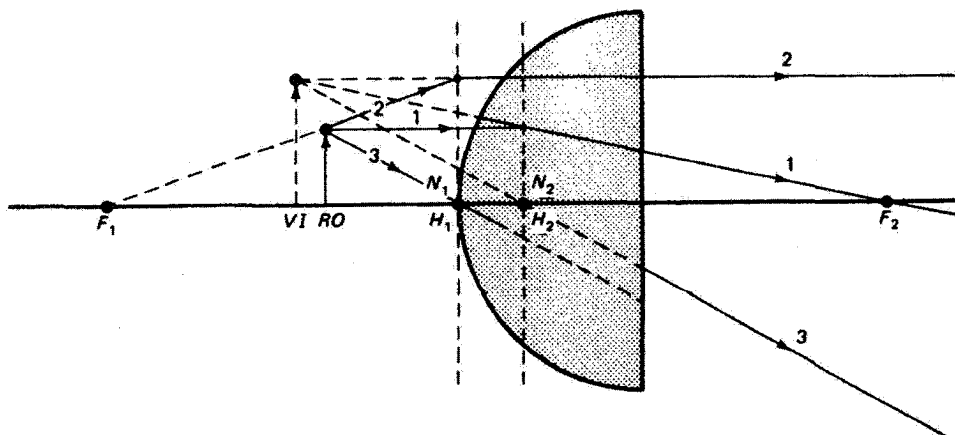
حل: در این مورد، ماتریس دستگاه به‌ازای صفحه‌های مرجع ورودی و خروجی واقع در دو سطح عدسی عبارت است از $M = \mathcal{R}_2 \mathcal{T} \mathcal{R}_1$ ، به طوری که

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-0.5}{1.5(3)} & 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 2 \\ -\frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{با } \text{Det}(M) = 1$$

در نتیجه، از رابطه‌های جدول ۲-۴ به دست می‌آوریم $p = -6 \text{ cm}$ ، $q = 4 \text{ cm}$ ، $r = 0$ ، $s = -2 \text{ cm}$ ، $f_1 = -6 \text{ cm}$ ، و $f_2 = 6 \text{ cm}$. نقاط اصلی و گرهی برهم منطبق‌اند. این نقاط بنیادی در شکل ۱۵-۴ با مقیاس تقریبی جایگزین شده‌اند. نمودار پرتو با استفاده از صفحه‌های



شکل ۱۵-۴ ترسیم پرتو برای عدسی نیمکره‌ای، با استفاده از نقاط بنیادی.

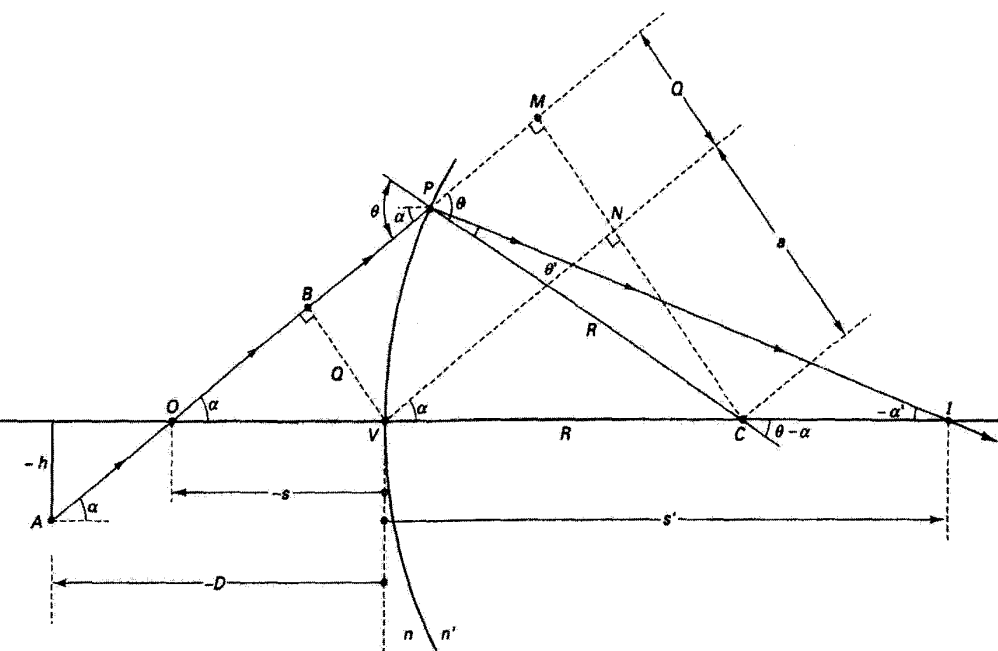
اصلی و نقاط گرهی برای یک شیء حقیقی اختیاری ترسیم شده است. در این مثال، پرتوهای خارج شونده یک تصویر مجازی نزدیک شیء تشکیل می‌دهند که مستقیم و کمی بزرگتر است. ▲

۱۱-۴ ردیابی پرتو

فرض پرتوهای پیرامحوری توصیف پیشروی پرتوهای نور در دستگاه اپتیکی را تا اندازه زیادی ساده می‌کند، زیرا جمله‌های مثلثاتی در معادله‌ها ظاهر نمی‌شوند. برای بسیاری از کاربردها این روش بررسی کفایت می‌کند. از لحاظ عملی، پرتوهای نوری که در تشکیل تصویر در دستگاه اپتیکی دخالت دارند در واقع معمولاً پرتوهای نزدیک به محور اپتیکی هستند. اما اگر بخواهیم کیفیت تصویر بهتر شود باید برای کم کردن ابیراهیایی که همیشه از حضور پرتوهای کم‌و بیش دور از محور ناشی می‌شوند راههایی پیدا کنیم. برای تعیین مسیر واقعی تک‌تک پرتوهای نور در دستگاه اپتیکی، باید هر پرتو را مستقلاً و تنها با استفاده از قوانین بازتاب و شکست همراه با هندسه، ردیابی کرد. این فن را ردیابی پرتو می‌نامند زیرا سابقاً با دست، با ترسیم دقیق طرح دستگاه اپتیکی و نمودار توسط خط‌کش و پرگار، مرحله به مرحله انجام می‌شد. امروزه، محاسبات لازم برای تعیین تغییرات ارتفاع و زاویه در پیشروی پرتو با رایانه آسانتر و سریعتر صورت می‌گیرد. برای ترسیم عملی دستگاه اپتیکی و ردیابی پیشروی پرتو در دستگاه اپتیکی روی نمایشگر از فنون گرافیک استفاده می‌شود.^۱ روشهای ردیابی پرتو، مانند روشی که در اینجا توضیح می‌دهیم، غالباً تنها برای پرتوهای نصف‌النهاری به‌کار می‌روند، یعنی پرتوهایی که از محور اپتیکی دستگاه می‌گذرند. چون قانون شکست ایجاب می‌کند که پرتوهای شکسته در صفحه فرود باقی بمانند، پرتو نصف‌النهاری در تمام مسیر خود در یک صفحه نصف‌النهاری باقی می‌ماند. بنابراین، بررسی برحسب پرتوهای نصف‌النهاری یک بررسی دوبعدی است^۲ که روابط هندسی لازم را بسیار ساده می‌کند. پرتوهایی را که در تصویر سهیم هستند اما از محور اپتیکی نمی‌گذرند پرتوهای متناظر می‌نامند، و در محاسبات مربوط به آنها به هندسه سه‌بعدی احتیاج داریم. این پیچیدگی اضافی، اگر برنامه ردیابی پرتو نوشته شده باشد، برای رایانه مسئله‌ای نیست. برای تحلیل ابیراهیهای مختلف، مانند ابیراهی کروی، آستیگماتیسم، و کوما (که در فصل بعد بررسی می‌شوند) احتیاج به دانستن پیشروی پرتوهای متناظر و پرتوهای ناپیرامحوری برگزیده داریم. طراحی یک دستگاه عدسی پیچیده، مانند عدسی عکاسی با چهار یا پنج عنصر، ترکیبی از علم و تجربه است. با ایجاد تغییرات کوچک در مکان، فاصله

۱. یک نمونه از نرم‌افزار تجارتي موجود، که برای کاربردهای دانشگاهی مناسب است و نسبتاً ارزان، BEAM2 محصول سنتر سافت‌ور، برکلی کالیفرنیا است.

۲. این دو بعد بعدهای صفحه‌ای هستند که روی آن نمودار پرتو را ترسیم می‌کنیم. قبلاً بدون اینکه صریحاً گفته باشیم، از پرتوهای نصف‌النهاری در تمام نمودارها استفاده می‌کرده‌ایم.



شکل ۱۶-۴ یک شکست در سطح کروی. این شکل نمادها را معرفی می‌کند و روابط هندسی را که منجر به معادلات ردیابی پرتوی برای پرتو نصف‌النهاری می‌شوند نشان می‌دهد.

کانونی و شعاع انحنای سطوح به‌کار رفته و در ضریب شکست عنصرها و سپس ردیابی مجدد پرتو، طرح دستگاه عدسی را به تدریج بهتر می‌کنند.

برای اهداف فعلی ما، کافی است نشان دهیم چگونه معادلات لازم را برای ردیابی پرتو نصف‌النهاری به‌دست می‌آوریم و چگونه می‌توانیم با تکرار آنها به روش مرحله‌ای پرتو را در عبور از هر تعداد سطح شکست کروی که دستگاه اپتیکی را تشکیل می‌دهند دنبال کنیم. این فن کاملاً به حلقه‌های تکراری در برنامه‌های رایانه‌ای قابل تطبیق است.

شکل ۱۶-۴ یک مرحله نمونه را در تحلیل ردیابی پرتوی نشان می‌دهد. با وضع یک قرارداد علامت، می‌توانیم معادله‌های به‌دست آمده از این نمودار را برای هر پرتو و هر سطح شکست کروی به‌کار ببریم. پرتو انتخاب شده از نقطه A ناشی می‌شود (یا می‌گذرد) و با محور اپتیکی زاویه α می‌سازد. این پرتو از محور اپتیکی در O می‌گذرد و سپس با سطح شکست در P تلاقی می‌کند

و در آنجا به درون محیطی با ضریب شکست n' شکسته می‌شود و محور را در I قطع می‌کند. زاویه‌های فرود θ و شکست θ' با قانون اسنل به هم مربوط‌اند. نقاط O و I نقاط همیوگ‌اند و به فاصله s و s' از رأس سطح V قرار دارند. شعاع سطح که از مرکز انحنای C می‌گذرد نیز نشان داده شده است. سایر نقاط و خطوط برای تسهیل در به‌دست آوردن روابط هندسی لازم اضافه شده‌اند.

قرارداد علامت همان است که قبلاً در این فصل به‌کار برده شد. فاصله‌ها در طرف چپ رأس V منفی و در طرف راست آن مثبت هستند. اگر از پرتوهایی استفاده کنیم که از چپ به راست پیش می‌روند، علامت زاویه آنها با علامت شیبشان یکی است. فاصله‌هایی که بالای محور اندازه‌گیری می‌شوند مثبت و در زیر محور منفی هستند. یک کمیت مهم در این محاسبات، که آن هم از قرارداد علامت بالا تبعیت می‌کند، پارامتر Q است که مطابق شکل فاصله عمودی از رأس تا پرتو است.

بنابراین فرض، پارامترهای ورودی برای پرتو عبارت‌اند از ارتفاع h ، زاویه α ، و فاصله D . از شکل ۱۶-۴ می‌توان دید که رابطه "فاصله شیء" s با D به صورت زیر است

$$s = D - \frac{h}{\tan \alpha} \quad (۳۴-۴)$$

علاوه بر این، در $\triangle OBV$:

$$\sin \alpha = \frac{Q}{-s} \quad (۳۵-۴)$$

در $\triangle PMC$:

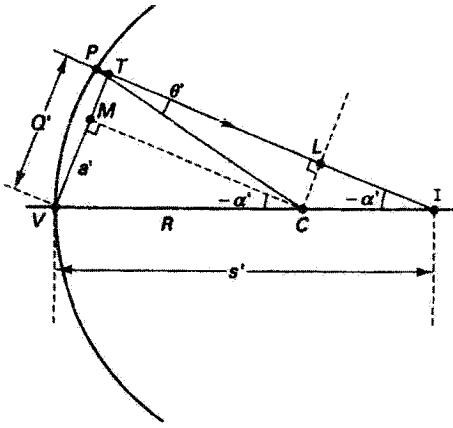
$$\sin \theta = \frac{a + Q}{R}$$

در $\triangle VNC$:

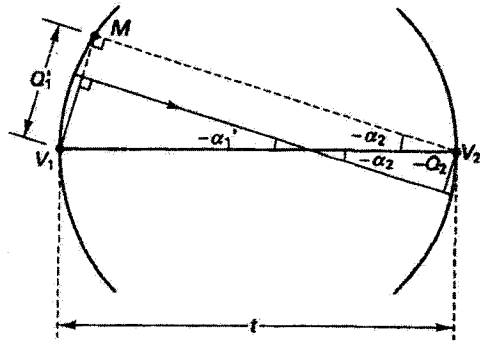
$$\sin \alpha = \frac{a}{R}$$

با حذف طول a از دو معادله آخر، به دست می‌آوریم

$$\sin \theta = \frac{Q}{R} + \sin \alpha \quad (۳۶-۴)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۷-۴ (الف) رابطه هندسی پارامترهای پرتو شکسته با فاصله Q' . (ب) روابط هندسی نشاندهنده انتقال بین Q و Q' پس از یک شکست و پیش از شکست بعدی.

قانون اسنل در P :

$$n \sin \theta = n' \sin \theta' \quad (۳۷-۴)$$

در $\triangle CPI$:

$$\theta - \alpha = \theta' - \alpha' \quad (۳۸-۴)$$

پارامتر Q برای پرتو شکسته در شکل ۱۷-۴ الف نشان داده شده است. مشابه با روابطی که در بالا به دست آوردیم، داریم

در $\triangle CMV$:

$$\sin(-\alpha') = \frac{a'}{R}$$

در $\triangle PLC$:

$$\sin \theta' = \frac{Q' - a'}{R}$$

جدول ۳-۴ معادلات ردیابی پرتو نصف‌النهاری (ورودی: D, h, α, R, n', n)

مورد عام	پرتو موازی با محور: $\alpha = 0^\circ$	سطح تخت: $R \rightarrow \infty$
$s = D - \frac{h}{\tan \alpha}$	—	$s = D - \frac{h}{\tan \alpha}$
$Q = -s \sin \alpha$	$Q = h$	$Q = -s \sin \alpha$
—	$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{Q}{R} + \sin \alpha \right)$	$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{Q}{R} + \sin \alpha \right)$
—	$\theta' = \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \theta}{n'} \right)$	$\theta' = \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \theta}{n'} \right)$
$\alpha' = \sin^{-1} \frac{n}{n' \sin \alpha}$	$\alpha' = \theta' - \theta + \alpha$	$\alpha' = \theta' - \theta + \alpha$
$Q' = Q \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}$	$Q' = R(\sin \theta' - \sin \alpha')$	$Q' = R(\sin \theta' - \sin \alpha')$
$s' = \frac{-Q'}{\sin \alpha'}$	$s' = \frac{-Q'}{\sin \alpha'}$	$s' = \frac{-Q'}{\sin \alpha'}$

تبدیل: Input : t : Transfer :

$$Q = Q' + t \sin \alpha'$$

$$\alpha = \alpha'$$

$$n = n'$$

Input : new n', R

Return : to calculate θ

مانند قبل، با حذف a' به دست می آوریم

$$Q' = R(\sin \theta' - \sin \alpha') \quad (39-4)$$

در ΔITV :

$$\sin(-\alpha') = \frac{Q'}{s'} \quad \text{یا} \quad s' = \frac{-Q'}{\sin \alpha'} \quad (40-4)$$

معادلات مربوط به اولین شکست را در جدول ۳-۴ در ستون اول برای مورد کلی آورده ایم. مقادیر

جدید α ، Q و s که شکست بعدی را تعیین می‌کنند (و اکنون با پریم نشان داده شده‌اند) از محاسبه به دست می‌آیند. تبدیل هندسی به سطح بعد که در فاصله t از سطح اول قرار دارد در شکل ۴-۱۷ ب نشان داده شده است. با توجه به این شکل، در $\Delta V_2 M V_1$ داریم

$$\sin(-\alpha_2) = \frac{V_1 M}{t} = \frac{Q'_1 - Q_2}{t}$$

یا

$$Q_2 = Q'_1 + t \sin \alpha_2 \quad (4-41)$$

جدول ۴-۳ همچنین نشان می‌دهد چگونه باید معادلات را برای دو مورد خاص تغییر داد: (۱) وقتی پرتو فرودی موازی با محور است، و (۲) وقتی سطح تخت است (شعاع انحنای بینهایت دارد).

مثال

ردیابی پرتو را برای دو پرتو در عبور از عدسی عکاسی منظره‌رایید متشکل از سه عنصر انجام دهید. پرتوها از یک شیء دور در ارتفاعهای ۱ mm و ۵ mm بالای محور اپتیکی وارد عدسی می‌شوند. عدسی دارای مشخصات زیر است (تمام طولها برحسب mm هستند)

$$R_1 = -120.8 \quad t_1 = 6 \quad n_1 = 1.521$$

$$R_2 = -34.6 \quad t_2 = 2 \quad n_2 = 1.581$$

$$R_3 = -96.2 \quad t_3 = 3 \quad n_3 = 1.514$$

$$R_4 = -51.2$$

حل: چون پرتوها موازی با محور هستند، از دومین ستون جدول ۴-۳ برای محاسبه پیشروی پرتو استفاده می‌کنیم. داده‌ها و نتایج را به صورت زیر جدول‌بندی می‌کنیم:

نتایج: پرتو در $h = 5$	نتایج: پرتو در $h = 1$	ورودی:
		سطح اول
$Q = 5$	$Q = 1$	$n = 1, n' = 1.521$
$\alpha' = 0.8128^\circ$	$\alpha' = 0.1625^\circ$	$\alpha = 0$
$s' = -352.53$	$s' = -352.66$	$h = 1 \text{ یا } 5$
$Q' = 5.0010$	$Q' = 1.0000$	$R = -12.08$
		سطح دوم
$Q = 5.0861$	$Q = 1.0170$	$t = 6$
$\alpha' = 1.1041^\circ$	$\alpha' = 0.2202^\circ$	$n = 1.581$
$s' = -264.03$	$s' = -264.59$	$R = -34.6$
$Q' = 5.0876$	$Q' = 1.0170$	
		سطح سوم
$Q = 5.1261$	$Q = 1.0274$	$t = 2$
$\alpha' = 1.0178^\circ$	$\alpha' = 0.2030^\circ$	$n = 1.514$
$s' = -288.58$	$s' = -289.26$	$R = -96.2$
$Q' = 5.1260$	$Q' = 1.0247$	
		سطح آخر
$Q = 5.1793$	$Q = 1.0353$	$t = 3$
$\alpha' = -1.4520^\circ$	$\alpha' = -0.2883^\circ$	$n = 1$
$s' = 203.91$	$s' = 205.72$	$R = -51.2$
$Q' = 5.1672$	$Q' = 1.0353$	

بدین ترتیب، این دو پرتو محور اپتیکی را در نقاط 205.72 و 203.91 mm پشت آخرین سطح قطع می‌کنند، و 1.8 mm از کانون مشترک فاصله دارند. ▲

مسائل

۱-۴ یک عدسی دوکوز به ضخامت 5 cm و ضریب 1.60 دارای سطوحی به شعاع 40 cm است. اگر این عدسی را برای اشیاء درون آب به کار ببریم در حالی که طرف دیگر آن هوا است، فاصله کانونی مؤثر آن را به دست آورید و نقاط کانونی و اصلی آن را ترسیم کنید.

۲-۴ یک عدسی دوکاو از شیشه با $n = ۱.۵۳$ دارای سطوحی با $۵D$ (دیوپتر) و $۸D$ است. این عدسی را در هوا به کار می‌بریم، و ضخامت محوری آن ۳ cm است.

(الف) مکان صفحه‌های کانونی و اصلی عدسی را تعیین کنید.

(ب) اگر یک شیء در فاصله ۳۰ cm از رأس اولین عدسی قرار داشته باشد مکان تصویر از نسبت به مرکز عدسی به دست آورید.

(ج) فاصله تصویر پیرامحوری را در تقریب عدسی نازک محاسبه کنید. درصد خطای ایجاد شده را تعیین کنید.

۳-۴ یک عدسی دوکاو دارای شعاعهای انحنای ۲۰ cm و ۱۰ cm است. ضریب شکست آن ۱.۵۰ و ضخامت مرکزی آن ۵ cm است. تصویر یک شیء به بلندی ۲.۵ cm واقع در فاصله ۸ cm از رأس اول را توصیف کنید.

۴-۴ یک عدسی دوکوز با سطوح کروی به شعاع ۱۰ cm ، ضخامت مرکزی ۲ cm ، و ضریب شکست ۱.۶۱ بین هوا و آب ($n = ۱.۳۳$) قرار دارد. یک شیء به ارتفاع ۵ cm در فاصله ۶۰ cm از سطح عدسی واقع شده است. نقاط بنیادی عدسی و مکان و اندازه تصویر تشکیل شده را به دست آورید.

۵-۴ یک کره شیشه‌ای توخالی به شعاع ۱۰ cm از آب پر شده است. از شکست ناشی از جدار شیشه‌ای نازک برای پرتوهای پیرامحوری صرف نظر می‌کنیم.

(الف) نقاط بنیادی عدسی را تعیین کنید و نموداری از روی مقیاس ترسیم کنید.

(ب) مکان و بزرگنمایی شیء کوچکی به فاصله ۲۰ cm از کره را محاسبه کنید.

(ج) نتایج تحلیلی را با ترسیم پرتوهای لازم روی نمودار تحقیق کنید.

۶-۴ پرتوهای نور به سطح تخت یک نیمکره شیشه‌ای به شعاع ۵ cm و ضریب شکست ۱.۵ فرود می‌آیند.

(الف) با استفاده از ماتریس دستگاه نمایشگر این نیمکره، ارتفاع و زاویه خروج پرتوی را تعیین کنید که موازی محور اپتیکی در ارتفاع ۱ cm وارد نیمکره می‌شود.

(ب) دستگاه را تا فاصله x در پشت نیمکره گسترش دهید و ماتریس دستگاه جدید را به صورت تابع x به دست آورید.

(ج) با استفاده از این ماتریس دستگاه جدید، تعیین کنید پرتوی که در بالا توصیف شد کجا محور اپتیکی را قطع می‌کند.

۷-۴ با استفاده از شکل ۱۲-۴ ب و ج، روابطی را که در جدول ۲-۴ برای فاصله‌های q ، f_2 ، s و w داده شده‌اند تحقیق کنید.

۸-۴ یک عدسی با مشخصات $R_1 = +1.5 \text{ cm} = R_2$ ، $d = 2.0 \text{ cm}$ (ضخامت)، $n_1 = 1.00$ ، $n_2 = 1.60$ ، $n_3 = 1.30$ را در نظر بگیرید. نقاط اصلی را با استفاده از روش ماتریسی تعیین کنید. با استفاده از نتایج به‌دست آمده، یک نمودار پرتو برای جسمی متناهی به انتخاب خودتان با مقیاس تقریبی ترسیم کنید.

۹-۴ یک عدسی نازک مثبت با فاصله کانونی 1.0 cm به فاصله 5 cm از یک عدسی نازک منفی با فاصله کانونی -1.0 cm قرار گرفته است. فاصله کانونی معادل این ترکیب و مکان کانونها و صفحه‌های اصلی را با رهیافت ماتریسی به‌دست آورید. اینها را در طرحی از دستگاه اپتیکی با مقیاسی تقریبی نشان دهید و تصویر یک شیء اختیاری واقع در جلو عدسی را تعیین کنید.

۱۰-۴ یک عدسی شیشه‌ای که در امتداد محور 3 cm ضخامت دارد دارای سطوح کوژ یکی به شعاع 5 cm و دیگری 2 cm است. سطح اول در طرف چپ است و با هوا تماس دارد و سطح دوم مجاور مایعی با ضریب 1.4 است. ضریب شکست شیشه 1.50 است. مکان کانونها، صفحه‌های اصلی و فواصل کانونی دستگاه را به‌دست آورید. از رهیافت ماتریسی استفاده کنید.

۱۱-۴ (الف) ماتریس مربوط به "دستگاه" ساده‌ای را به‌دست آورید که یک عدسی نازک با فاصله کانونی 1.0 cm است در حالی که صفحه ورودی در فاصله 3.0 cm در جلو عدسی و صفحه خروجی در فاصله 1.5 cm در پشت عدسی قرار دارد.

(ب) نشان دهید عناصر این ماتریس مکان شش نقطه بنیادی را که مخصوص عدسی نازک هستند پیش‌بینی می‌کنند.

(ج) چرا در این مورد $B = 0$ ؟ معنی خاص A را در این مورد بیان کنید.

۱۲-۴ یک گوی بلورین به شعاع 2.0 cm دارای ضریب شکست 1.50 است.

(الف) با رهیافت ماتریسی، مکان نقاط اصلی آن را تعیین کنید.

(ب) اگر گوی را در برابر خورشید بگیریم نور آن کجا متمرکز می‌شود؟

۱۳-۴ به یک عدسی ضخیم با دو سطح مقعر، هر یک به شعاع 5 cm ، نور تابیده می‌شود. ضخامت عدسی 1 cm و ضریب شکست آن 1.50 است.

(الف) ماتریس دستگاه را برای این عدسی وقتی در هوا به کار می رود به دست آورید.

(ب) نقاط بنیادی آن را تعیین کنید. نمودار پرتو را برای یک شیء اختیاری ترسیم کنید.

۱۴-۴ یک عدسی دوتایی نافام تشکیل شده است از یک عدسی مثبت شیشه‌ای با ضریب 1.52 و ضخامت 1 cm که به یک عدسی منفی شیشه‌ای با ضریب 1.62 و ضخامت 0.5 cm چسبیده است. بزرگی شعاع انحنای تمام سطحها 20 cm است. اگر از این عدسی دوتایی در هوا استفاده شود، تعیین کنید

(الف) عناصر ماتریس دستگاه را برای صفحه‌های ورودی و خروجی که بر سطوح عدسیها

منطبق‌اند؛

(ب) نقاط بنیادی را؛

(ج) فاصله کانونی ترکیب را، با استفاده از معادله عدسی‌سازان و فاصله کانونی معادل دو

عدسی چسبیده به هم. این مقدار f را که با فرض عدسیهای نازک به دست می‌آید با مقدار اول مقایسه کنید.

۱۵-۴ دستگاه اپتیکی شکل ۴-۱۵ را با افزودن یک فضای شیء در طرف چپ عدسی و یک فضای تصویر در طرف راست گسترش دهید. صفحه ورودی جدید را در فاصله s در فضای شیء و صفحه خروجی جدید را در فاصله s' در فضای تصویر بگیرید.

(الف) ماتریس دستگاه را برای این دستگاه بزرگ شده محاسبه کنید.

(ب) با بررسی عنصر B رابطه کلی بین فواصل شیء و تصویر را برای عدسی تعیین کنید.

همچنین رابطه کلی بزرگنمایی خطی را به دست آورید.

(ج) از نتایج (ب) فاصله تصویر و بزرگنمایی خطی را برای شیئی در فاصله 20 cm در سمت

چپ عدسی محاسبه کنید.

(د) با صفر کردن عناصر ماتریسی A و D چه اطلاعاتی می‌توان درباره دستگاه به دست

آورد؟ (شکل ۴-۹ را ببینید).

۱۶-۴ ماتریس دستگاه را برای یک عدسی عکاسی سه‌تایی کوک (شکل ۶-۱۹ الف) به دست

آورید. نور که از چپ وارد می‌شود با شش سطح گروهی مواجه می‌شود که شعاعهای انحنای آنها

به ترتیب r_1 تا r_6 هستند. ضخامتهای سه عدسی به ترتیب t_1 ، t_2 و t_3 و ضرایب شکست آنها n_1 ،

n_2 و n_3 هستند. فاصله میان عدسیهای اول و دوم d_1 و عدسیهای دوم و سوم d_2 است. طرح

این دستگاه عدسی را با نقاط بنیادی آن ترسیم کنید. فیلم عکاسی در چه فاصله‌ای پشت آخرین

سطح باید قرار داده شود تا پرتوهای پیرامحوری روی آن جمع شوند؟

داده‌ها: $r_1 = 19.4 \text{ mm}$ $t_1 = 4.29 \text{ mm}$ $d_1 = 1.63 \text{ mm}$ $n_1 = 1.6110$

$r_2 = -128.3 \text{ mm}$ $t_2 = 0.93 \text{ mm}$ $d_2 = 12.90 \text{ mm}$ $n_2 = 1.5744$

$r_3 = -57.8 \text{ mm}$ $t_3 = 3.03 \text{ mm}$ $n_3 = 1.6110$

$r_4 = 18.9 \text{ mm}$

$r_5 = 311.3 \text{ mm}$

$r_6 = -66.4 \text{ mm}$

۱۷-۴ ضرب ماتریسها را برای عدسی ضخیم، همچون معادله ۱۵-۴، بدون فرض شرایط خاص $n = n'$ و $t = 0$ ، انجام دهید و عناصر ماتریسی A, B, C و D را برای عدسی ضخیم به دست آورید.

۱۸-۴ با استفاده از مکانهای نقاط بنیادی (جدول ۲-۴) برحسب عناصر ماتریسی برای عدسی ضخیم کلی (مسئله ۱۷-۴)، تحقیق کنید که f_1 و f_2 با معادله‌های ۱-۴ و ۲-۴ داده می‌شوند.

۱۹-۴ با استفاده از مکانهای نقاط بنیادی (جدول ۲-۴) برحسب عناصر ماتریسی برای عدسی ضخیم کلی (مسئله ۱۷-۴)، تحقیق کنید که فاصله‌های s, s', v و w با معادله‌های ۳-۴ و ۴-۴ داده می‌شوند.

۲۰-۴ یک برنامه رایانه‌ای بنویسید که در آن از معادله‌های ۳۴-۴ تا ۴۱-۴ برای ردیابی پرتو در عبور از هر تعداد سطح کروی شکست استفاده شده باشد. این برنامه باید موارد خاص پرتوهای ناشی از اشیاء دور و سطوح شکست تخت را در بر بگیرد.

۲۱-۴ دو پرتو در عبور از عدسی نیمکروی شکل ۱۵-۴ را ردیابی کنید. این پرتوها از یک نقطه شیء، که ۲ cm بالای محور اپتیکی و به فاصله محوری ۱۰ cm از اولین سطح قرار دارد، صادر می‌شوند. یکی از پرتوها موازی با محور است و دیگری با محور زاویه 20° می‌سازد.

۲۲-۴ پرتوی را ردیابی کنید که از ۷ mm پایین محور اپتیکی و ۱۰۰ mm دور از یک عدسی دوتایی ناشی می‌شود. این پرتو با افق زاویه $5^\circ +$ می‌سازد. دوتایی مزبور عبارت است از یک عدسی دوکوز به شعاع ۵ mm، ضریب 1.5 و ضخامت مرکزی ۲ mm که در مجاورت یک عدسی هلالی به شعاعهای ۵ mm - و ۸۷ mm -، ضریب ۱.۸ و ضخامت مرکزی ۵ mm به آن جفت شده است. مقادیر نهایی s, α و β را به دست آورید.

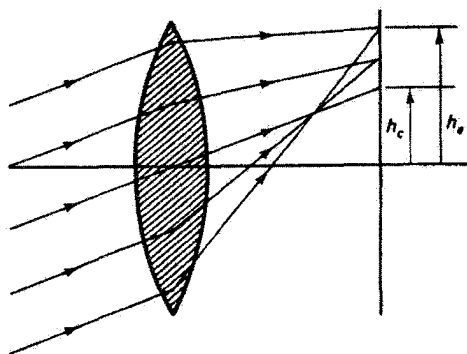
۲۳-۴ دو پرتو ناشی از اشیاء دور را در عبور از عدسی عکاسی پرتو ردیابی کنید در حالی که یکی از آنها در ارتفاع ۱ mm و دیگری در ارتفاع ۵ mm است. تعیین کنید کجا و با چه زاویه‌ای

هر پرتو محور اپتیکی را قطع می‌کند. مشخصات این عدسی چهار عنصری، شامل یک لایه میانی از هوا به ضخامت ۳ mm، در زیر داده شده‌اند که در آنها فاصله‌ها برحسب میلیمتر هستند

$$\begin{array}{lll}
 R_1 = 17.5 & t_1 = 2.9 & n_1 = 1.6489 \\
 R_2 = 5.8 & t_2 = 1.3 & n_2 = 1.6031 \\
 R_3 = 18.6 & t_3 = 3.0 & n_3 = 1 \\
 R_4 = -12.8 & t_4 = 1.1 & n_4 = 1.5154 \\
 R_5 = 18.6 & t_5 = 1.8 & n_5 = 1.6112 \\
 R_6 = -14.3 & &
 \end{array}$$

مراجع

- [1] Fincham, W. H. A, and M. H. Freeman. *Optics*, 9th ed. Boston: Butterworth Publishers, 1980. Ch. 8, 9, 19.
- [2] Kingslake, Rudolf. *Lens Design Fundamentals*. New York: Academic Press, 1978. Ch. 2, 3, 7.
- [3] Smith, Warren J. "Image Formation: Geometrical and Physical Optics." In *Handbook of Optics*, edited by Walter G. Driscoll and William Vaughan. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978.
- [4] Brouwer, William. *Matrix Methods in Optical Instrument Design*. New York: W. A. Benjamin, 1964.
- [5] Gerard, A., and J. M. Burch. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1975.
- [6] Atneosen, Richard, and Richard Feinberg. "Learning Optics with Optical Design Software." *American Journal of Physics* 59 (March 1991): 242-47.
- [7] Nussbaum, Allen. *Geometric Optics: An Introduction*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1968. Ch. 2-4.
- [8] Nussbaum, Allen, and Richard A. Phillips. *Contemporary Optics for Scientists and Engineers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1976. Ch. 1.
- [9] Blaker, J. Warren. *Geometric Optics: The Matrix Theory*. New York: Marcel Dekker, 1971.



نظریهٔ ابیراهی

مقدمه

فرمولهای پیرامحوری که قبلاً برای تشکیل تصویر توسط سطوح کروی بازتاب و شکست به دست آوردیم مسلماً تنها به طور تقریبی درست هستند. در محاسبهٔ این معادلات، لازم بود پرتوهای پیرامحوری را در نظر بگیریم، یعنی پرتوهایی که هم نزدیک محور اپتیکی هستند و هم زاویهٔ کوچکی با آن می‌سازند. بنابراین، از لحاظ ریاضی، بسطهای توانی توابع سینوس و کسینوس، یعنی

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

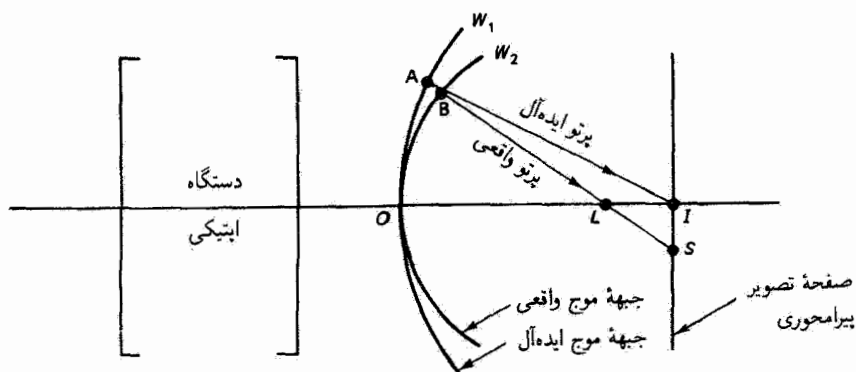
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

با جمله‌های اول آنها تقریب گرفته شده‌اند. تا جایی که این تقریبهای مرتبهٔ اول معتبر هستند، اپتیک گاوسی به تصویرگیری دقیق منجر می‌شود. اما منظور کردن جمله‌های مرتبهٔ بالاتر در محاسبات باعث می‌شود هر چه زاویه بزرگتر باشد انحراف از تصویرگیری "کامل" بیشتر شود. این نوع انحراف را "ابیراهی" می‌نامند. اگر در تقریب مربوط به $\sin x$ جملهٔ بعدی را که شامل x^3 است در نظر

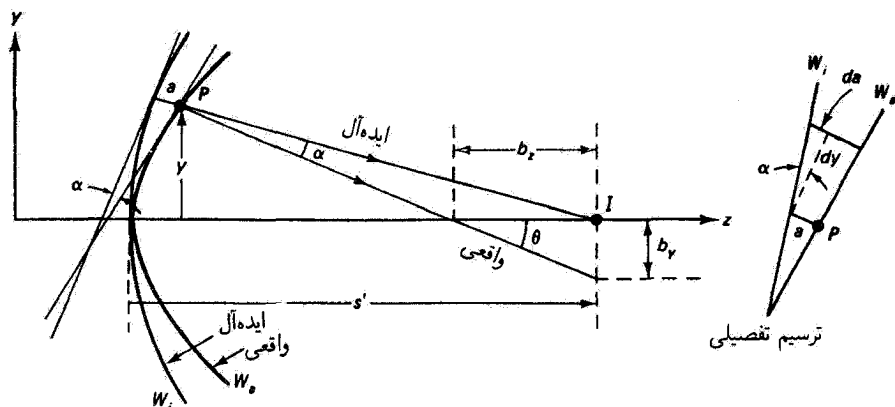
بگیریم به نظریهٔ ابیراهی مرتبهٔ سه می‌رسیم. این ابیراهیها را ریاضیدان آلمانی لودویگ فون زایدل مطالعه و رده‌بندی کرده است و به ابیراهیهای زایدل یا مرتبهٔ سه معروف هستند. برای نور تکفام، پنج ابیراهی زایدل وجود دارند: ابیراهی کروی، کوما، آستیگماتیسم، انحنای میدان، و واپیچش. یک ابیراهی دیگر، یعنی ابیراهی رنگی، از وابستگی ویژگیهای تصویرسازی دستگاه اپتیکی به طول موج ناشی می‌شود. جزئیات نظریهٔ ابیراهی دشوارتر از آن هستند که در این فصل بررسی شوند. در اینجا توصیفی کمتی و مختصر از چگونگی ایجاد ابیراهیهای مختلف از بررسی مرتبهٔ سوم و توصیفی کیفی از هر ابیراهی و روشهای نوعی برای حذف آن بیان می‌کنیم.

۱-۵ ابیراهیهای پرتوی و موجی

انحراف از تصویرگیری پیرامحوری آرمانی را می‌توان به چند طریق به‌طور کیفی توصیف کرد. شکل ۱-۵ دو جبههٔ موج را که از یک دستگاه اپتیکی خارج شده‌اند نشان می‌دهد. W_1 یک جبههٔ موج کروی نمایشگر تقریب گاوسی یا پیرامحوری است که تصویری در I تشکیل می‌دهد. W_2 نمونه‌ای است از جبههٔ موج واقعی، یعنی یک پوش ناکروی که شکل آن نمایشگر جواب دقیق دستگاه اپتیکی است. این شکل را می‌توان با ردیابی دقیق تعداد کافی پرتو در عبور از دستگاه اپتیکی با روشهایی که در بخش ۴-۱۱ بیان شدند به دست آورد. پرتوهای ناشی از دو نقطهٔ نزدیک A و B ، که عمود بر جبهه‌های موج مربوط به خود هستند، صفحهٔ تصویر پیرامحوری را در یک نقطه قطع نمی‌کنند. این "خطا" در امتداد محور اپتیکی را، که با فاصلهٔ LI نمایش داده شده است، ابیراهی طولی می‌نامند، و خطای IS را که در صفحهٔ تصویر اندازه‌گیری می‌شود ابیراهی عرضی یا جانبی می‌نامند. اینها ابیراهیهای پرتوی هستند. به طریقی دیگر، ابیراهی را می‌توان برحسب انحراف



شکل ۱-۵ نمایش ابیراهیهای پرتوی و موجی.



شکل ۲-۵ ترسیم مربوط کردن ابیراهیهای پرتوی b_y و b_z به ابیراهی موجی a . ضمیمه نشان می‌دهد چگونه تغییر da در ابیراهی موجی به تغییر dy در اندازه گشودگی مربوط می‌شود.

جبهه موج تغییر شکل یافته از جبهه موج ایده آل در فواصل مختلف از محور اپتیکی توصیف کرد. در مکان نقطه B (شکل ۱-۵ را ببینید) فاصله AB ابیراهی موجی است. توجه کنید که پرتوهای مربوط به نقطه تماس دو جبهه موج، یعنی نقطه O روی محور اپتیکی، به یک نقطه تصویر I می‌رسند. پرتوهای مربوط به نقاط میانی جبهه موج واقعی بین O و B پرتو تصویر را در نقاطی اطراف I قطع می‌کنند و یک تصویر پخشیده که نتیجه ابیراهی است به وجود می‌آورند. بدین ترتیب، ابیراهی پرتوی ماکسیمم معرف اندازه تصویر پخشیده است. هدف نهایی طراحی اپتیکی کاهش دادن ابیراهیهای پرتوی است تا وقتی که اینها با پخشیدگی چاره‌ناپذیر ناشی از پراش قابل مقایسه شوند.

ابیراهیهای پرتوی عرضی متناظر با ابیراهی موجی AB را، اگر تغییر در AB برحسب اندازه گشودگی λ معلوم باشد، می‌توان محاسبه کرد. با توجه به شکل ۲-۵، زاویه α بین پرتوهای واقعی و ایده آل مربوط به نقطه P جبهه موج در ارتفاع y با زاویه بین خطوط مماس بر جبهه‌های موج در P یکی است. جبهه‌های موج که توسط دستگاه اپتیکی شکل گرفته‌اند در فضای تصویر با ضریب شکست n_2 وجود دارند. ضمیمه شکل ۲-۵ نشان می‌دهد ابیراهی موجی جزئی da برحسب راه نوری در فضای تصویر عبارت است از

$$da = n_2(\alpha dy) \quad (1-5)$$

مشتق da/dy انحنای موضعی جبهه موج را در P توصیف می‌کند. بنابراین، ابیراهی پرتوی عرضی

b_y ناشی از پرتوهای مربوط به همسایگی P را می‌توان با رابطهٔ زیر تقریب گرفت

$$b_y = \alpha s' = \frac{s' da}{n_2 dy} \quad (۲-۵)$$

که در آن s' فاصلهٔ تصویر بیرامحوری از جبههٔ موج است و α از معادلهٔ ۱-۵ گرفته شده است. به همین ترتیب، در امتداد راستای عرضی دیگر، عمود بر محورهای yz در صفحهٔ متن، داریم

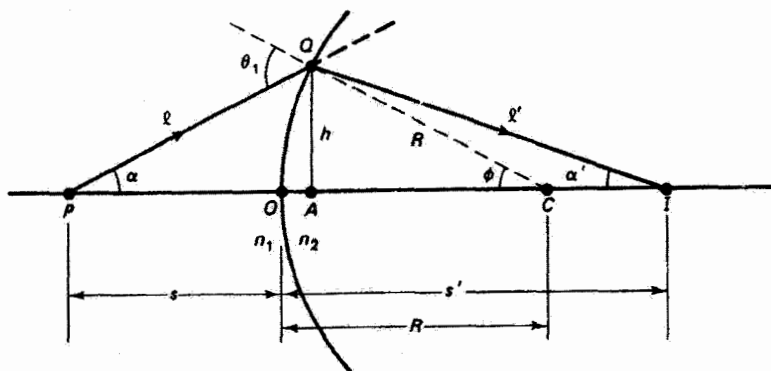
$$b_x = \frac{s' da}{n_2 dx} \quad (۳-۵)$$

ابیراهی پرتوی طولی b_z به ابیراهی پرتوی عرضی b_y با رابطهٔ زیر مربوط می‌شود

$$b_z = \frac{b_y}{\tan \theta} = \frac{s' b_y}{y} \quad (۴-۵)$$

۲-۵ بررسی مرتبهٔ سوم شکست در سطح جدایی کروی

اکنون مورد شکست در یک سطح کروی را حل می‌کنیم که در آن با وارد کردن اثرات زاویه‌ای "مرتبهٔ سوم" تقریب بهتری به‌کار می‌بریم. در شکل ۳-۵، پرتو اختیاری PQ از نقطهٔ شیء محوری P توسط یک سطح کروی به مرکز C که محیطهایی با ضرایب شکست n_1 و n_2 را جدا می‌کند شکسته می‌شود. پرتو شکسته تصویر محوری در I جایگزین می‌کند. در تقریب اول، راههای نوری پرتوهای PQI و POI ، بنابه اصل فرما، یکسان هستند. ابیراهی در تشکیل تصویر دخالت



شکل ۳-۵ شکست پرتو در سطح کروی.

دارد زیرا در تقریب بالاتر از مرتبه اول مسیره‌های PQI به‌ازای نقاط مختلف Q روی سطح کروی با هم تفاوت دارند. بدین‌ترتیب، ابیراهی در Q را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a(Q) = (PQI - POI)_{opd} \quad (5-5)$$

که در آن opd به معنی اختلاف راه نوری است. به‌طور دقیقتر، داریم

$$a(Q) = (n_1 \ell + n_2 \ell') - (n_1 s + n_2 s') \quad (6-5)$$

با استفاده از قانون کسینوسها می‌توان طولهای ℓ و ℓ' را به‌طور دقیق برحسب کمیت‌هایی که در شکل ۳-۵ تعریف شده‌اند بیان کرد:

$$\ell^2 = R^2 + (s + R)^2 - 2R(s + R) \cos \phi \quad (7-5)$$

$$\ell'^2 = R^2 + (s' - R)^2 + 2R(s' - R) \cos \phi \quad (8-5)$$

اگر $\cos \phi$ را با رابطه زیر تقریب بگیریم

$$\cos \phi \cong 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} \quad (9-5)$$

و با $\phi \cong h/R$ داریم

$$\cos \phi \cong 1 - \frac{h^2}{2R^2} + \frac{h^4}{24R^4} \quad (10-5)$$

با جاگذاری معادله ۱۰-۵ در معادله‌های ۷-۵ و ۸-۵ و با مرتب‌سازی جمله‌ها به‌دست می‌آوریم

$$\ell = s \left\{ 1 + \left[\frac{h^2(R+s)}{Rs^2} - \frac{h^4(R+s)}{12R^2s^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (11-5)$$

$$\ell' = s' \left\{ 1 + \left[\frac{h^2(R-s')}{Rs'^2} - \frac{h^4(R-s')}{12R^2s'^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (12-5)$$

اکنون اگر کمیت‌های داخل کروشه را در معادلهٔ ۱۱-۵ با x و در معادلهٔ ۱۲-۵ با x' نشان دهیم، می‌توانیم ریشهٔ دوم عبارتهای داخل آکولاد را با استفاده از بسط دوجمله‌ای به صورت زیر تقریب بگیریم

$$(1+x)^{1/2} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (13-5)$$

بنابراین،

$$\ell \cong s \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right) \quad (14-5)$$

$$\ell' \cong s' \left(1 + \frac{x'}{2} - \frac{x'^2}{8} \right) \quad (15-5)$$

پس از حذف تمام جمله‌های با مرتبهٔ بالاتر از h^2 به دست می‌آوریم

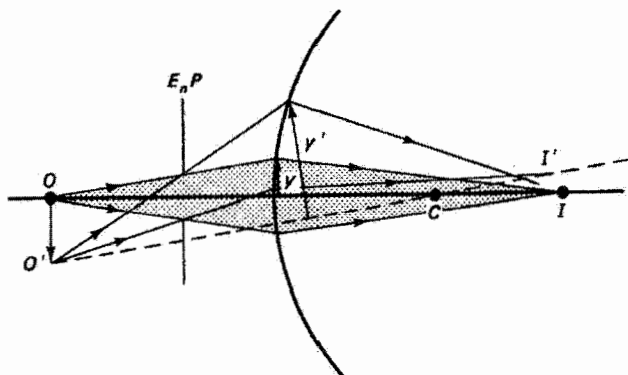
$$\ell = s \left[1 + \frac{h^2(R+s)}{2Rs^2} - \frac{h^2(R+s)}{24R^2s^2} - \frac{h^2(R+s)^2}{8R^2s^2} \right] \quad (16-5)$$

$$\ell' = s' \left[1 + \frac{h^2(R-s')}{2Rs'^2} - \frac{h^2(R-s')}{24R^2s'^2} - \frac{h^2(R-s')^2}{8R^2s'^2} \right] \quad (17-5)$$

با جاگذاری این عبارتهای ℓ و ℓ' در معادلهٔ ۵-۶ و مرتب کردن، نتیجه می‌گیریم

$$a(Q) = \frac{h^2}{2} \left[\left(\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} \right) - \left(\frac{n_2 - n_1}{R} \right) \right] - \frac{h^2}{8} \left[\frac{n_1}{s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{n_2}{s'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right)^2 \right] \quad (18-5)$$

اولین جمله برحسب h^2 نمایشگر تقریب مرتبهٔ اول در ابیراهی است و از این رو صفر است زیرا کمیت داخل کروشه بنا بر اصل فرما صفر می‌شود. در واقع، با صفر کردن این کمیت فرمول گائوس برای تشکیل تصویر توسط سطح شکست کروی را به دست می‌آوریم.^۱ باقی می‌ماند ابیراهی مرتبهٔ سه که با جمله‌ای که برحسب h^2 است نمایش داده می‌شود. وقتی h به اندازهٔ کافی کوچک است پرتوها اساساً همین کمیت در عملیات مربوط به جملهٔ h^2 ظاهر می‌شود و در به دست آوردن معادلهٔ ۱۸-۵ برابر با صفر قرار داده می‌شود.



شکل ۴-۵ مقایسه باریکه‌های پرتوهای محوری و مایل مربوط به شیء، که با عبور از گشودگی ورودی $E_n P$ تعریف می‌شوند.

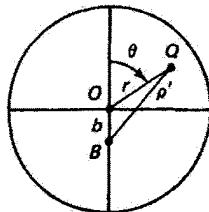
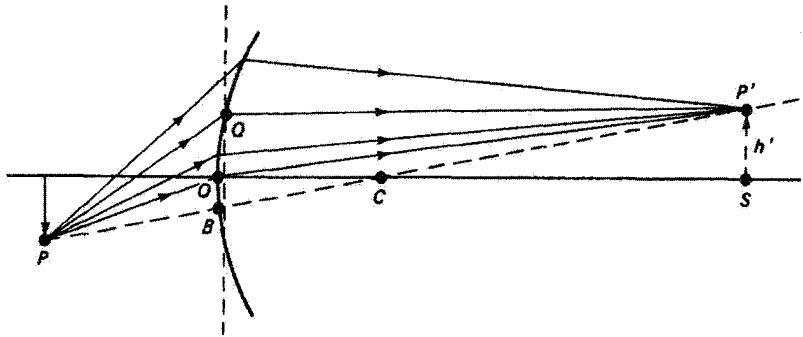
پیرامحوری هستند و می‌توان از ابیراهی مربوط به این جمله صرف نظر کرد. در هر حال، چون کمیت‌های داخل کروشه‌ها مستقل از h هستند، ثابت کرده‌ایم که نظریه مرتبه سه یک ابیراهی موجی پیش‌بینی می‌کند که متناسب است با توان چهارم گشودگی h که از محور اپتیکی اندازه گرفته می‌شود، یا

$$a = ch^4 \quad (۱۹-۵)$$

که در آن c ثابت تناسب است. این رابطه نتیجه اصلی محاسبات ما برای نقاط شیء محوری است. از این نتیجه برای تعمیم محاسبه ابیراهی در تصویرگیری برون‌محوری استفاده خواهیم کرد. در این راه سایر ابیراهیهای زائد نیز ظاهر خواهند شد.

ابیراهی $a(Q)$ که به صورت اختلاف راههای نوری پرتوهای ایده‌آل و واقعی محاسبه کرده‌ایم باید به ابیراهی موجی AB در شکل ۱-۵ مربوط باشد. AB یعنی انحراف جبهه موج کروی واقعی از ایده‌آل به وضوح تابعی است از فاصله بین محور اپتیکی و نقطه‌ای که پرتو جبهه موج را قطع می‌کند و ابیراهی کروی نامیده می‌شود.

اما قبل از بررسی ابیراهی کروی با تفصیل بیشتر، می‌خواهیم نشان دهیم چگونه سایر ابیراهیهای مرتبه سه روی می‌دهند. برای این کار، باید مورد یک نقطه شیء برون‌محوری را در نظر بگیریم. در شکل ۴-۵ دو باریکه از پرتوهایی نشان داده شده‌اند که حدود آنها با گشودگی $E_n P$ که به منزله مردمک ورودی عمل می‌کند تعیین می‌شوند. یک باریکه محوری از نقطه شیء روی محوری O تصویری روی نقطه تصویر پیرامحوری I و اطراف آن تشکیل می‌دهد. ابیراهی کروی، چنانکه قبلاً گفته شد، روی این تصویر اثر می‌گذارد و درجه این تأثیر با جابه‌جایی h مربوط به پرتوهای کناری



ترسیم تفصیلی

شکل ۵-۵ تصویرگیری از نقطهٔ برون محوری P . ابیراهی در نقطهٔ اختیاری Q روی جبههٔ موج را می‌توان به محور تقارن PBP' یا محور اپتیکی OCS مربوط کرد. در ضمیمه قسمتی از جبههٔ موج از جلو نشان داده شده است.

باریکه تعیین می‌شود. این باریکه حول محور OCl ، که در آن C مرکز انحنای سطح شکست است، تقارن دارد. در شکل همچنین یک باریکهٔ مایل از پرتوهای ناشی از نقطهٔ برون محوری O' نشان داده شده است. بدیهی است که این باریکه حول محور OI متقارن نیست؛ اگر گشودگی محدودکننده $E_n P$ نبود، محور تقارن باریکهٔ مایل خط $O'Cl'$ بود. از این محور است که باید جابه‌جایی y' مربوط به پرتوهای باریکهٔ مایل اندازه‌گیری شود تا درجهٔ ابیراهی توصیف شده با معادلهٔ ۱۹-۵ به دست آید. توجه کنید که این جابه‌جایی از محور تقارن در مورد باریکهٔ مایل بسیار بزرگتر است. بدین ترتیب، باریکهٔ مایل پرتوهای ناشی از نقاط شیء برون محوری بسیار بیشتر از نقاط محوری متناظر می‌تواند متحمل ابیراهی شود. مکان گشودگی در تعیین بزرگی y' اهمیت قاطع دارد و از این لحاظ وقتی در مرکز انحنای C قرار داشته باشد کمترین آسیب را وارد می‌کند. (در این باره، می‌توان به استفاده از عدسیهای متقارن تا ترکیبهای عدسی، مانند شیئی دوهلالی نافام، اشاره کرد که در آنها گشودگی را در نقطهٔ میانی بین آنها قرار می‌دهند.)

اکنون باریکهٔ برون محوری پرتوهای ناشی از نقطهٔ شیء P را، مانند آنچه در شکل ۵-۵ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. تابع ابیراهی $a'(Q)$ برای نقطهٔ Q روی جبههٔ موج را می‌توان

به صورت زیر بیان کرد

$$a'(Q) = (PQP' - PBP')_{opd} = c(BQ)^{\epsilon} = c\rho'^{\epsilon} \quad (20-5)$$

در معادله ۲۰-۵ ارتفاع پرتو PQP' را به محور PBP' مربوط می‌کنیم و نقاط O ، B و Q را واقع بر یک صفحه قائم که تقریب جبهه موج در O است در نظر می‌گیریم. می‌توان نشان داد که این تقریب اثری روی نتایج نظریه ابیراهی مرتبه سه ندارد. به علاوه، از معادله ۱۹-۵ استفاده کرده‌ایم و فاصله BQ را با کمیت ρ' نشان داده‌ایم. همچنین، بخشی از صفحه که نقاط مربوط را در بر دارد و فاصله‌های ρ' ، b و r در ضمیمه شکل ۵-۵ نشان داده شده‌اند. به روشی مشابه، می‌توانیم برای نقطه جبهه موجی O بنویسیم

$$a'(O) = (POP' - PBP')_{opd} = c(BO)^{\epsilon} = cb^{\epsilon} \quad (21-5)$$

برای نقطه Q ، در ارتباط با محور اپتیکی OC ، می‌توانیم یک تابع ابیراهی برون‌محوری $a(Q)$ به صورت تفاضل ابیراهیهای محوری در O و Q که قبلاً به دست آمدند بنویسیم:

$$a(Q) = a'(Q) - a'(O) = c\rho'^{\epsilon} - cb^{\epsilon} = c(\rho'^{\epsilon} - b^{\epsilon}) \quad (22-5)$$

با به کار بردن قانون کسینوس برای ضمیمه هندسی شکل ۵-۵، داریم

$$\rho'^2 = r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta$$

و با جاگذاری ρ' از این رابطه در معادله ۲۲-۵ به دست می‌آوریم

$$a(Q) = c(r^{\epsilon} + \epsilon r^{\epsilon} b^{\epsilon} \cos^2 \theta + 2r^{\epsilon} b^{\epsilon} + \epsilon r^{\epsilon} b^{\epsilon} \cos \theta + \epsilon r b^{\epsilon} \cos \theta) \quad (23-5)$$

از مثلثهای متشابه OBC و SCP' در شکل ۵-۵ دیده می‌شود که فاصله $OB = b$ با ارتفاع از h' مربوط به تصویر پیرامحوری P' بالای محور اپتیکی متناسب است. این واقعیت را می‌توان با رابطه زیر بیان کرد

$$b = kh' \quad (24-5)$$

که در آن k ضریب تناسب لازم است. با گذاشتن kh' به جای b در معادلهٔ ۲۳-۵ می‌توانیم این معادله را به صورت زیر بنویسیم

$$a(Q) = {}_0C_{\rho_0} r^{\rho} + {}_1C_{\rho_1} h' r^{\rho} \cos \theta + {}_2C_{\rho_2} h'^2 r^{\rho} \cos^2 \theta \\ + {}_2C_{\rho_0} h'^2 r^{\rho} + {}_3C_{\rho_1} h' r^{\rho} \cos \theta \quad (25-5)$$

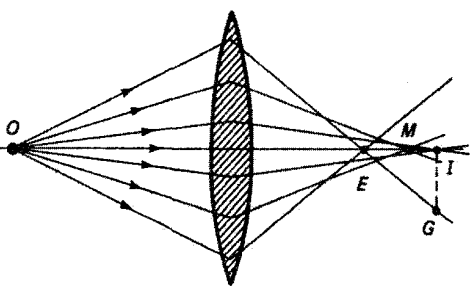
شاخصهای ضرایب C در معادلهٔ ۲۵-۵ اعدادی هستند که به ترتیب توانهای h' ، r ، و $\cos \theta$ را در جملهٔ مربوط مشخص می‌کنند. به عنوان مثال، ضریب ${}_1C_{\rho_1}$ همراه با جملهٔ $h' r^{\rho} \cos \theta$ است که در آن h' دارای توان ۱، r دارای توان ۳ و $\cos \theta$ دارای توان ۱ است. هر یک از جمله‌ها ابیراهیهای جبههٔ موج را که در ابیراهی کل تصویر سهیم هستند توصیف می‌کنند. این جمله‌ها پنج ابیراهی تکفام یا زاید را به قرار زیر تشکیل می‌دهند

r^{ρ}	ابیراهی کروی
$h' r^{\rho} \cos \theta$	کوما
$h'^2 r^{\rho} \cos^2 \theta$	آستیگماتیسم
$h'^2 r^{\rho}$	انحنای میدان
$h' r^{\rho} \cos \theta$	وابیچش

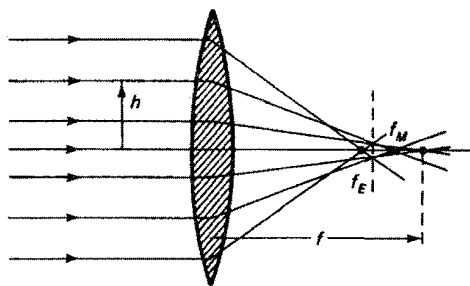
هر ابیراهی با وابستگی آن به h' (انحراف از تصویرسازی محوری)، r (گشودگی سطح شکست)، و θ (تقارن حول محور) مشخص می‌شود. توجه کنید که جملهٔ اول برای ابیراهی کروی با معادلهٔ ۱۹-۵، که برای تصویرسازی محوری به دست آمد و در آن h معرف گشودگی است، توافق دارد. اکنون هر یک از این ابیراهیها را برحسب اثرات دیداری آنها به اختصار توصیف می‌کنیم و بعضی از وسایلی را که در کاهش آنها به کار می‌روند ذکر می‌کنیم.

۳-۵ ابیراهی کروی

پدیده‌ای که آن را ابیراهی کروی می‌نامند از جملهٔ اول معادلهٔ ۲۵-۵ یعنی ${}_0C_{\rho_0} r^{\rho}$ ناشی می‌شود. این تنها جمله در ابیراهی موجی مرتبهٔ سهٔ $a(Q)$ است که بستگی به h' ندارد. بنابراین، ابیراهی کروی حتی برای نقاط شیء و تصویر محوری نیز وجود دارد، چنانکه برای تک‌عدسی در شکل ۵-۱۶ الف نشان داده شده است. نقطهٔ تصویر پیرامون I از نقاط تصویر محوری، مانند E ، ناشی از پرتوهایی



(الف)



(ب)

شکل ۶-۵ ابیراهی کروی یک عدسی که در (الف) فواصل تصویر متفاوت و در (ب) فواصل کانونی متفاوت، بسته به گشودگی عدسی، تولید می‌کند.

که توسط گشودگیهای بزرگتر عدسی شکسته می‌شوند، متمایز است. فاصله خطای محوری EI ناشی از پرتوهایی که از قسمتهای کناری عدسی می‌گذرند، معرف متداول ابیراهی کروی طولی است، در حالی که فاصله IG در صفحه تصویر پیرامحوری اندازه ابیراهی کروی عرضی را به دست می‌دهد. این کمیته‌ها به فاصله شیء نیز بستگی دارند. وقتی E در سمت چپ I قرار دارد، چنانکه برای مورد عدسی مثبت نشان داده شده است، ابیراهی کروی مثبت است؛ برای عدسی منفی E در سمت راست I واقع می‌شود و ابیراهی کروی را منفی می‌گیریم. در یک نقطه میانی بین E و I ، ”بهترین“ کانون از تجربه به دست می‌آید. در اینجا تصویر پهن شده‌ای داریم که آن را به طور توصیفی ”دایره کمترین تاری“ می‌نامند. با استفاده از معادله‌های ۲-۵ و ۴-۵ برای ابیراهی عرضی و طولی، ابیراهیهای پرتو کروی متناظر را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد

$$b_y = \frac{s'}{n_2} \frac{da}{dy} = \frac{s'}{n_2} \frac{da}{dr} = \frac{f_0 C_{f_0} s'}{n_2} r^2$$

۳

$$b_z = \frac{s' b_y}{r} = \frac{f_0 C_{f_0} s'^2}{n_2} r^2$$

مثال

نوری که به طور محوری باریک شده است از یک سر میله‌ای شیشه‌ای که یک سطح کروی محدب به شعاع ۴ cm است وارد می‌شود. ضریب شکست میله ۱٫۶۰ است. ابیراهیهای پرتوی کروی عرضی و طولی را برای پرتوهایی که در ارتفاع گشودگی ۱ cm وارد می‌شوند تعیین کنید.

حل: مطابق معادلهٔ ۵-۱۸، وقتی فاصلهٔ شیء s بسیار بزرگ باشد داریم

$$a = -\frac{h^2}{\lambda} \left[\frac{n_2}{s'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right) \right]^2$$

برای محاسبهٔ b_z باید مشتق da/dh را حساب کنیم:

$$\frac{da}{dh} = -\frac{h^2}{2} \left[\frac{n_2}{s'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right) \right]^2$$

فاصلهٔ تصویر s' ، که فاصلهٔ کانونی سطح ورودی نیز هست، از معادلهٔ پیرامحوری به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1.6}{s'} = \frac{0.6}{4} \quad \text{یا} \quad s' = 10.667 \text{ cm}$$

پس برای da/dh داریم

$$\frac{da}{dh} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1.6}{10.667} \left(\frac{1}{10.667} - \frac{1}{4} \right) \right]^2 = -0.001831$$

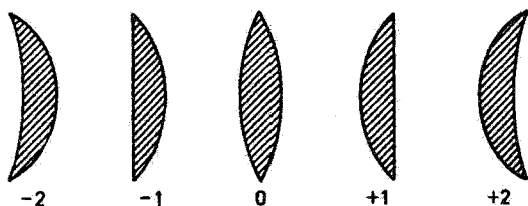
$$b_y = \frac{s'}{n_2} \frac{da}{dy} = \frac{10.667}{1.6} (-0.001831) = -0.0122 \text{ cm}$$

$$\blacktriangle \quad b_z = \frac{s'}{r} b_y = \frac{10.667}{1} (-0.0122) = -0.130 \text{ cm}$$

شکل ۵-۶ ابیراهی کروی را وقتی شیء در بینهایت است نشان می‌دهد. مناطق دایره‌ای مختلف عدسی حول محور فاصله‌های کانونی مختلفی ایجاد می‌کنند، و در نتیجه f تابعی از گشودگی h است. فاصلهٔ کانونی مخصوص عدسی ناشی از تلاقی پرتوهای پیرامحوری است که برای آنها $h \rightarrow 0$. این فاصلهٔ کانونی برای یک عدسی نازک با ضریب شکست n و شعاعهای انحنای r_1 و r_2 ، وقتی در هوا به‌کار برده شود، با فرمول عدسی‌سازان داده می‌شود:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (26-5)$$

از معادلهٔ ۵-۲۶ واضح است که یک f معین می‌تواند از ترکیبهای مختلف r_1 و r_2 نتیجه شود. انتخابهای مختلف شعاعهای انحنای، در حالی که فاصلهٔ کانونی بدون تغییر است، می‌توانند تأثیر زیادی



شکل ۷-۵ "خمش" یک عدسی به گونه‌های مختلف با فاصله کانونی یکسان. ضریب شکل کادینگتون برای رده‌بندی گونه‌ها در زیر هر یک از آنها نوشته شده است.

روی درجه ابیراهی کروی عدسی داشته باشند. شکل ۷-۵ "خمش" یا تغییر در شکل عدسی را وقتی شعاعهای انحنای آن تغییر می‌کنند اما فاصله کانونی آن ثابت می‌ماند نشان می‌دهد. اندازه‌ای از این خمش ضریب شکل کادینگتون σ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \quad (27-5)$$

که در آن قرارداد علامت متداول برای r_2 و r_1 اعمال شده است. برای مثال، یک عدسی نازک با $n = 1.5$ و $f = 10 \text{ cm}$ ممکن است یک عدسی همکوز با $\sigma = 0$ ($r_1 = 10$) و $r_2 = -10 \text{ cm}$ ، یا یک عدسی تخت-کوز با $\sigma = +1$ ($r_1 = 5 \text{ cm}$)، یا یک عدسی هلالی با $\sigma = +2$ ($r_1 = 3.33 \text{ cm}$ و $r_2 = 10 \text{ cm}$) باشد. این عدسیها، و همچنین تصاویر آینه‌ای آنها با ضریب شکل منفی، در شکل ۷-۵ نشان داده شده‌اند.

ابیراهی کروی یک سطح شکست کروی در معادله ۱۸-۵ داده شده است. عدسی نازک ترکیبی است از دو سطح از این نوع که هر یک از آنها در ابیراهی کروی کل سهم هستند. ابیراهی کروی طولی کل برای یک عدسی نازک با فاصله کانونی f و ضریب n در حالی که s'_h فاصله تصویر برای پرتوی در ارتفاع h است، s'_p فاصله تصویر پیرامحوری است، و

$$p = \frac{s' - s}{s' + s}$$

با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{s'_h} - \frac{1}{s'_p} = \frac{h^2}{\lambda f^2} \frac{1}{n(n-1)} \left[\frac{n+2}{n-1} \sigma^2 + 4(n+1)p\sigma + (3n+2)(n-1)p^2 + \frac{n^2}{n-1} \right] \quad (28-5)$$

علاوه بر این، می‌توان نشان داد (مسئله ۵-۱۱) که ابیراهی کروی مینیم (که صفر نیست!) وقتی روی می‌دهد که خمش به صورت زیر باشد

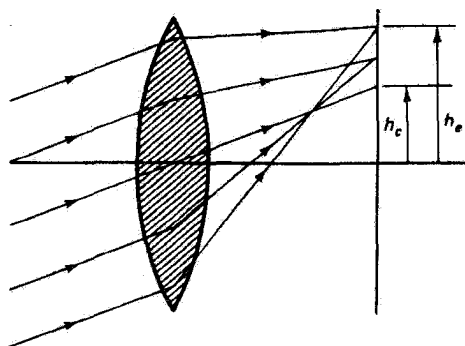
$$\sigma = -\frac{2(n^2 - 1)}{n + 2}p \quad (29-5)$$

توجه کنید که وقتی شیء در بینهایت است، برای عدسی با ضریب شکست $n = 1.50$ داریم $\sigma \cong 0.7$. این نتیجه نزدیک به ضریب شکل عدسی تخت-کوژ با $\sigma = +1$ است. از این رو، در دستگاه‌های اپتیکی غالباً از عدسیهای تخت-کوژ (که طرف محدب آنها رو به روی پرتوهای فرودی موازی است) استفاده می‌شود تا ابیراهی کروی کاهش یابد. به طور کلی، مینیم در ابیراهی کروی به وضعیت شکست مساوی در هر یک از دو سطح مربوط می‌شود، و این تداعی‌کنندهٔ انحراف مینیم در منشور است. وقتی از عدسیها به صورت ترکیب استفاده می‌شود امکان حذف ابیراهی کروی پیش می‌آید زیرا عدسیهای مثبت و منفی ابیراهیهای کروی با علامت مخالف تولید می‌کنند. یک کاربرد رایج این فن در عدسی "دوتایی" متصل دیده می‌شود.

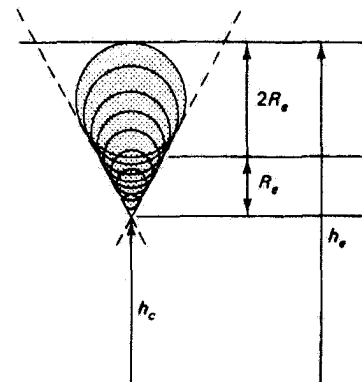
۴-۵ کوما

کوما با جمله $C_3 r^3 h' \cos \theta$ نمایش داده می‌شود که نشاندهندهٔ یک ابیراهی بیرون محوری است ($h' \neq 0$) که نسبت به محور اپتیکی نامتقارن است ($\cos \theta \neq \text{const.}$) و با گشودگی r سریعاً افزایش می‌یابد. ابیراهی ناشی از یک پرهٔ قائم یا مماسی مربوط به پرتوهای موازی که توسط یک عدسی شکسته شده‌اند در شکل ۸-۵ الف نشان داده شده است. هر منطقهٔ دایره‌ای عدسی تصویری دایره‌ای که دایرهٔ کومایی نامیده می‌شود تشکیل می‌دهد. پرتوهای منطقه‌ای که در پرهٔ مماسی واقع شده‌اند تصویری در بالای هر دایرهٔ کومایی تشکیل می‌دهند، در حالی که پرتوهای منطقه‌ای واقع در یک پرهٔ پیکانی، در صفحهٔ افقی، تصویری در پایین دایرهٔ کومایی به وجود می‌آورند. پره‌های دیگر پرتوها تصویری تشکیل می‌دهند که دایرهٔ کومایی را کامل می‌کنند. ترکیب تمام این دایره‌های کومایی، که شعاع آنها با شعاع منطقه زیاد می‌شود، دنبالهٔ دارگونه‌ای است که در شکل ۸-۵ ب نشان داده شده است و این ابیراهی نام خود را از آن گرفته است. در عمل، هر منطقه بزرگنمایی متفاوتی ایجاد می‌کند به طوری که h_c ناشی از پرتوهای مرکزی با h_e ناشی از پرتوهای کناری برابر نیست. کوما، مانند ابیراهی کروی، به صورت کمیتی مثبت ($h_e > h_c$) یا منفی ($h_e < h_c$) ظاهر می‌شود.

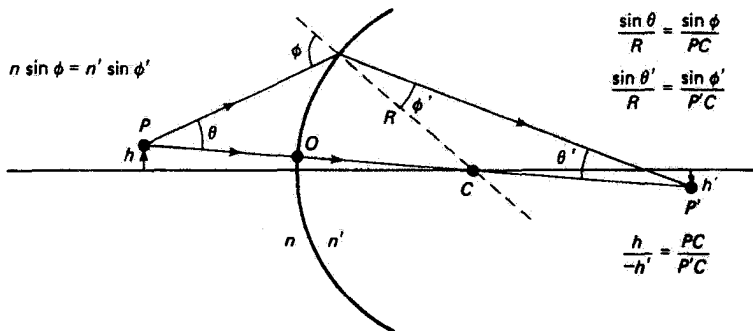
بدون تقریب پیرامحوری معمولی — که محدود به پرتوهایی می‌شود که زاویه‌های کوچکی با



(الف)



(ب)



(ج)

$$\frac{\sin \theta}{R} = \frac{\sin \phi}{PC}$$

$$\frac{\sin \theta'}{R} = \frac{\sin \phi'}{P'C}$$

$$\frac{h}{-h'} = \frac{PC}{P'C}$$

شکل ۸-۵ (الف) کوماى ناشى از يك پره مماسى پرتوهای موازى. وقتى تمام این پره‌های سمتى در نظر گرفته شوند، هر نقطه‌ی تصویر در شکل نقطه‌ی بالایی یک دایره‌ی کومايي مربوط به نقاط تصویر می‌شود. (ب) تشکیل تصویر کومايي از یک رشته دایره‌های کومايي. شکل تصویر کومايي طوری است که وسعت ماکسیم آن سه برابر شعاع دایره‌ی کومايي حاصل از پرتوهای مربوط به منطقه‌ی کناری عدسی است. زاویه‌ی بین خط‌چینها ۶۰° است. (ج) پرتوهای ناپیرامحوری از نقطه‌ی شیء P نزدیک محور تصویری، تحت شرط سینوس آبه، در P' تشکیل می‌دهند. این شرط از قانون اسنل و روابط هندسی که در شکل داده شده‌اند نتیجه می‌شود.

محور می‌سازند— می‌توان نشان داد برای یک شیء کوچک نزدیک محور هر پرتو ناشی از نقطه‌ی شیء که در سطح جدایی کروی شکسته می‌شود باید در شرط سینوس آبه صدق کند:

$$nh \sin \theta + n'h' \sin \theta' = 0$$

در اینجا h و h' به ترتیب اندازه‌های شیء و تصویر، و زاویه‌های θ و θ' به ترتیب زاویه‌های شیب پرتوها در محیط‌های n و n' هستند. این کمیتها در شکل ۵-۸ نشان داده شده‌اند. اگر از معادلهٔ ۵-۳ بزرگنمایی خطی را به دست آوریم شرط سینوس آبه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$m = \frac{h'}{h} = -\frac{n \sin \theta}{n' \sin \theta'}$$

برای جلوگیری از کوما، بزرگنمایی خطی حاصل از شکست توسط تمام منطقه‌های عدسی باید یکسان باشد. بدین ترتیب، کوما وجود ندارد اگر به ازای تمام مقادیر θ داشته باشیم

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \text{const.}$$

خمش عدسی، که مفید بودن آن را برای کاهش ابیراهی کروی دیدیم، برای کاهش کوما نیز مفید است. ضریب شکل کادینگتون، معادلهٔ ۵-۲۷، که منجر به ابیراهی کروی مینیمم می‌شود، به ضریبی که باعث کومای صفر می‌شود نزدیک است، و در نتیجه با خمش مناسب می‌توان هر دو ابیراهی را در یک عدسی به طور قابل ملاحظه‌ای کم کرد. می‌توان نشان داد کوما برای عدسی صفر است اگر

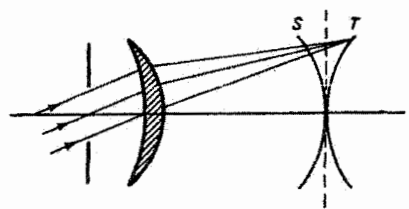
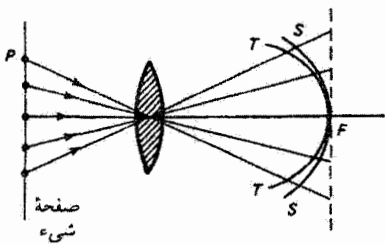
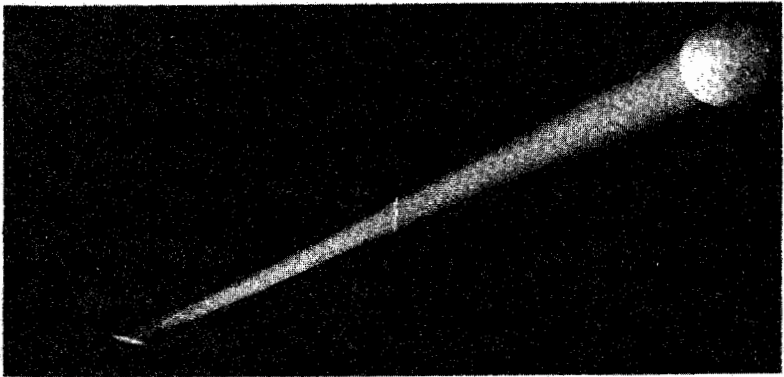
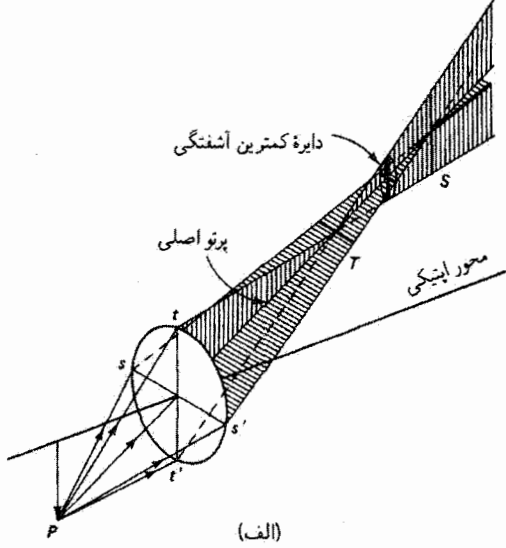
$$\sigma = \left(\frac{2n^2 - n - 1}{n + 1} \right) \left(\frac{s - s'}{s + s'} \right) \quad (۳۱-۵)$$

با $n = ۱.۵$ و شیء در بینهایت، از معادلهٔ ۳۱-۵ مقدار $\sigma = ۰.۸$ را به دست می‌آوریم که به مقدار $\sigma = ۰.۷$ است، که ابیراهی کروی مینیمم را تعیین می‌کند، کاملاً نزدیک است. عدسی یا دستگاه اپتیکی بدون ابیراهی کروی و کوما را آپلاناتیک (بی‌بخش) می‌نامند.

۵-۵ آستیگماتیسم و انحنای میدان

اپتیک آپلاناتیک هنوز نسبت به دو ابیراهی کاملاً مرتبطی حساس است که جمله‌های ابیراهی موجی آنها را می‌توان به صورت $({}_2C_{22} \cos^2 \theta + {}_2C_{20}) h^2 r^2$ با هم ترکیب کرد. جملهٔ اول ایجادکنندهٔ آستیگماتیسم است و جملهٔ دوم را که حول محور اپتیکی متقارن است انحنای میدان می‌نامند. هر دو ابیراهی به طور مشابهی با فاصلهٔ برون‌محوری شیء و با گشودگی سطح شکست افزایش می‌یابند.

در شکل ۹-۵ الف و ب تصویرهای آستیگماتیک مربوط به نقطهٔ برون‌محوری P ناشی از



شکل ۵۶ (الف) تصاویر خطی آستیگماتیک S و T مربوط به نقطه برون محوری P ناشی از پره‌های مماسی (tt') و بیکانی (ss') پرتوهای نور که از عدسی می‌گذرند. (ب) عکسی از تصاویر آستیگماتیک که توسط عدسی تشکیل شده‌اند و نمودار آنها در قسمت (الف) نشان داده شده است. تصاویر خطی مجزای S و T به صورت مقاطع باریکه توسط پرده‌های فلئورسان آشکار شده‌اند. (ج) سطوح آستیگماتیک در میدان یک عدسی. (د) استفاده از مانع برای "تخت" کردن مصنوعی میدان عدسی. سطح میانه بین سطوح S و T با خط چین نشان داده شده است.

پره مماسی پرتوهایی که از مقطع tt' مربوط به یک عدسی می‌گذرند و پره پیکانی پرتوهایی که از مقطع ss' می‌گذرند نشان داده شده‌اند. چون این پره‌های متعامد پرتوها در فواصل مختلف از عدسی کانونی می‌شوند، دو تصویر مزبور تصاویر خطی هستند و برای پره‌های مماسی و پیکانی به ترتیب با T و S نشان داده شده‌اند. خط کانونی T در صفحه پیکانی و خط کانونی S در صفحه مماسی واقع است. اگر یک پرده عمود بر پرتو اصلی را از S به T جابه‌جا کنیم تصاویر میانی به شکل بیضی خواهند بود. تقریباً در نقطه میانی بین T و S کانون به شکل دایره است که آن را دایره کمترین تاری می‌نامند. مکان هندسی تصاویر خطی S و T برای نقاط شیء مختلف P سطوح هذلولوی هستند که در شکل ۵-۹ ج نشان داده شده‌اند. انحراف بین این دو سطح در امتداد هر پرتو اصلی ناشی از یک نقطه شیء معین اندازه‌ای است از بزرگی آستیگماتیسم برای این شیء، و تقریباً متناسب با مجذور فاصله از محور اپتیکی است. وقتی سطح T در سمت چپ سطح S واقع شده باشد، چنانکه در شکل چنین است، اختلاف آستیگماتیک را مثبت می‌گیریم؛ در غیر این مورد، این اختلاف منفی است.

اگر نقاطی مانند P روی دایره‌ای در یک صفحه شیء عمود بر محور اپتیکی واقع باشند، تصاویر خطی متناظر در سطح T به یک دایره تصویر کاملاً واضح تبدیل می‌شوند. اما در سطح S تصویر دایره شیء مزبور واضح نیست و همه جا دارای پهنای خط کانونی S است. از طرف دیگر، نقاط شیء در امتداد خطوط شعاعی در دایره شیء تنها در سطح S تصاویر شعاعی واضح تولید می‌کنند، یعنی جایی که تصاویر شعاعی کشیده یکی می‌شوند تا خطوط شعاعی کاملاً کانونی تشکیل بدهند. بدین ترتیب، اگر صفحه شیء شامل عناصر دایره‌ای و شعاعی باشد، فاصله تصویر برای وضوح خوب در مورد هر یک از این عناصر متفاوت است، و جایی بین این دو فاصله تصویری میانه به دست می‌آید.

با توجه به شکل ۵-۹ ج، برای حذف آستیگماتیسم باید سطوح مماسی و پیکانی برهم منطبق شوند. وقتی انحنای این سطوح را با تغییر شکل یا فاصله عدسی تغییر دهیم تا برهم منطبق شوند سطح به دست آمده را سطح پتروال می‌نامیم. برای دستگاه اپلاناتیک، تصاویر نقطه‌ای در این سطح کانونی تشکیل می‌شوند. در این مورد، اگر سطح خمیده باشد، اگر چه آستیگماتیسم حذف شده است، ابیراهی وابسته‌ای باقی می‌ماند که آن را انحنای میدان می‌نامند. برای به دست آوردن تصاویر واضح تحت این شرایط، باید به پرده مطابق با سطح پتروال شکل دهیم. برای هر دستگاه اپتیکی، حتی وقتی سطوح T و S برهم منطبق نیستند، می‌توان یک سطح پتروال تعیین کرد. برخلاف سطوح T و S ، سطح پتروال مستقل از خمش یا مکان عدسی است و تنها به ضریب شکست و فاصله کانونی عدسی بستگی دارد. در نظریه مرتبه سه، فاصله سطح پتروال از سطح T همیشه

سه برابر فاصله آن از سطح S است و سطح پتزوآل هیچگاه بین سطوح T و S واقع نمی‌شود. برای مثال، دو عدسی دارای یک سطح پتزوآل تخت هستند اگر، با حذف انحنا می‌دان، داشته باشیم

$$n_1 f_1 + n_2 f_2 = 0$$

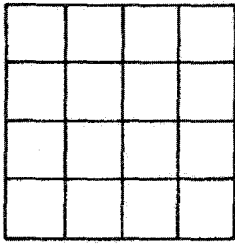
به‌طور کلی، سطح پتزوآل برای چند عدسی نازک در هوا در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\sum \frac{1}{n_i f_i} = \frac{1}{R_p} \quad (۳۲-۵)$$

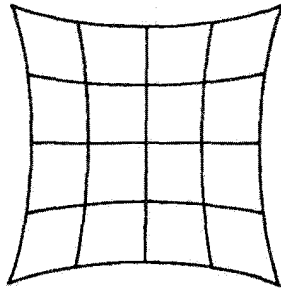
که در آن R_p شعاع انحناى سطح پتزوآل است. تخت کردن میدان را با این شرط نمی‌توان برای تنها یک عدسی انجام داد، اما تخت کردن مصنوعی میدان با استفاده از یک مانع روزنه‌دار، که مطابق شکل ۵-۹ قرار داده می‌شود، امکانپذیر است. در این آرایه، پرتوهای عمده مایل که اکنون توسط روزنه تعیین می‌شوند به مرکز عدسی نمی‌رسند. بدین ترتیب، سطوح آستیگماتیک S و T به‌طور مخالف خمیده‌اند و سطح کمترین تاری، چنانکه نشان داده شده است، تخت است. این روش ارزان برای تخت کردن مصنوعی میدان در دوربینهای عکاسی ساده به‌کار می‌رود. در وضعیتهای پیچیده‌تر که در آنها شرط پتزوآل را نمی‌توان بدون برهم زدن شرایط دیگر برقرار کرد، گاهی از یک عدسی کم‌توان در نزدیکی صفحه تصویر استفاده می‌شود. این عدسی به از بین رفتن انحناى میدان کمک می‌کند بدون اینکه از سایر جهات کیفیت تصویر زیاد تغییر کند. در پایان این بخش متذکر می‌شویم که مطابق نظریهٔ ابیراهی مرتبهٔ پنج، می‌توان باز هم سطوح T و S را با هم سازگار کرد و آنها را در فاصله‌ای از محور اپتیکی تلاقی داد. نتیجه آستیگماتیسم متوسط کمتر روی صفحه کانونی میانه است. شیئی دوربین عکاسی آناستیگمات برای بهره بردن از این امر طراحی شده است.

۵-۶ وایپچش

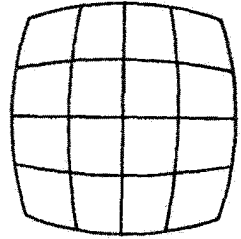
پنجمین و آخرین ابیراهی زاید تکفام، که حتی اگر تمام سایر ابیراهیها حذف شوند وجود دارد، وایپچش است که با جمله ${}^3 C_{11} h'^3 r \cos \theta$ نمایش داده می‌شود. اگر چه نقاط شیء به صورت نقطه تصویر می‌شوند، وایپچش به صورت تغییری در بزرگنمایی خطی برای نقاط شیء در فواصل مختلف از محور اپتیکی ظاهر می‌شود. اگر این بزرگنمایی با فاصله از محور افزایش یابد، شبکه قائم



(الف)



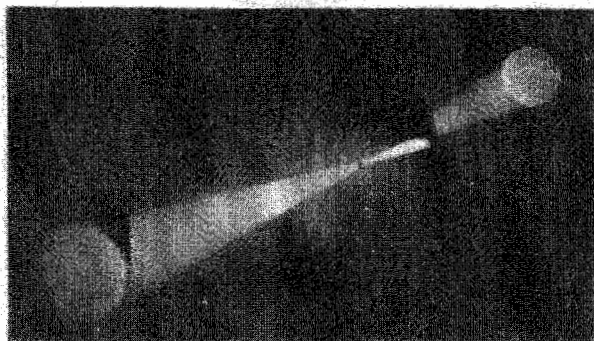
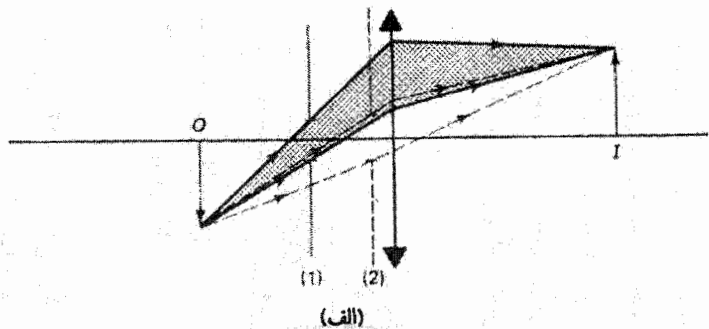
(ب)



(ج)

شکل ۵-۱۰ (الف) یک شبکهٔ مربعی. تصاویر ناشی از بزرگنمایی نایکخواخت آن به صورت (ب) و (ج) واپیچش بالشتکی و (ج) واپیچش بشکه‌ای.

شکل ۵-۱۰ الف که به عنوان شیء به کار می‌رود تصویری خواهد داشت که در شکل ۵-۱۰ ب نشان داده شده است و آن را به لحاظ توصیفی واپیچش بالشتکی می‌نامند. از طرف دیگر، اگر بزرگنمایی با فاصله از محور کاهش یابد تصویر به صورتی است که در شکل ۵-۱۰ ج نشان داده شده است و واپیچش بشکه‌ای نامیده می‌شود. تصویر در هر دو مورد واضح اما واپیچیده است. این نوع واپیچش غالباً به علت محدود شدن دسته‌های پرتو توسط مانع یا عناصری که مانند مانع عمل می‌کنند تقویت می‌شود. برای دیدن این اثر به شکل ۵-۱۱ الف مراجعه کنید. در این شکل تصویر یک نقطهٔ برون‌محوری را می‌بینید که با یک عدسی تشکیل شده است. دو باریکه از پرتوها ترسیم شده‌اند که با مانع روزه‌ای واقع در (۱) فاصلهٔ نسبتاً دوری از عدسی و (۲) فاصلهٔ نسبتاً نزدیکی به عدسی محدود شده‌اند. وقتی روزه به عدسی نزدیک می‌شود مسیر کوچکتری را تا عدسی ایجاد می‌کند. می‌بینیم که برای موقعیت ۱ فاصلهٔ مؤثر شیء تا تصویر بزرگتر — و در نتیجه بزرگنمایی خطی کوچکتر — است. این کاهش در بزرگنمایی خطی به علت مکان روزه وقتی نقطهٔ شیء از محور دورتر می‌شود بزرگتر می‌شود، و در نتیجه تصویر واپیچش بشکه‌ای پیدا می‌کند. اثر قرار دادن مانع روزه‌ای در سمت تصویر عدسی را می‌توان از همین شکل با وارونه کردن تمام پرتوها و تعویض جای شیء و تصویر مشاهده کرد. اکنون نسبت فاصلهٔ مؤثر شیء تا تصویر کوچکتر است، و واپیچش بالشتکی در تصویر ظاهر می‌شود. اگر مانع روزه‌ای در مکان عدسی قرار داده شود واپیچش روی نمی‌دهد. همچنین، یک دوتایی متقارن با مانع مرکزی، که دو اثر را با هم ترکیب می‌کند، برای بزرگنمایی واحد بدون واپیچش است. عکسهای اثرات مکان مانع روی واپیچش در شکل ۵-۱۱ ب، ج و د نشان داده شده‌اند.

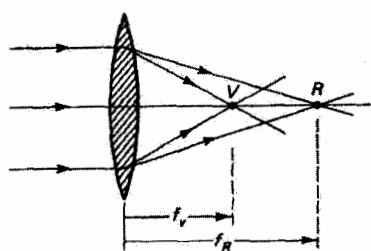


شکل ۱۱-۵ (الف) اثر مانع روزنه‌ای روی واپیچش تصویر ناشی از عدسی. روزنه در موقعیت (۱) نسبت به وقتی که در موقعیت (۲) است واپیچش بشکهای بیشتری ایجاد می‌کند. اگر شیء و تصویر را با هم عوض کنیم همین دستگاه واپیچش بالشتکی تولید می‌کند. (ب) تصویر شبکه مربعی ناشی از عدسی مثبت. وقتی مانع بین شیء (متناهیه راست) و عدسی قرار دارد، واپیچش بشکهای در تصویر روی می‌دهد. (ج) تصویر شبکه مربعی ناشی از عدسی مثبت. وقتی مانع روی عدسی قرار دارد، تصویر بدون واپیچش است. (د) تصویر شبکه مربعی ناشی از عدسی مثبت. وقتی مانع بین عدسی و تصویر قرار دارد، واپیچش بالشتکی در تصویر روی می‌دهد.

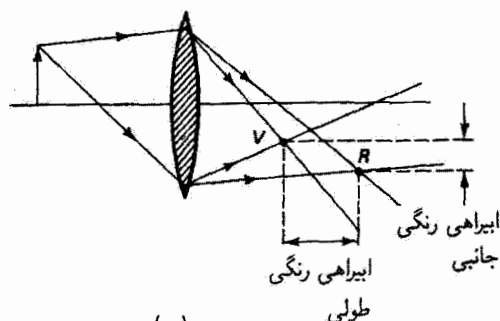
۷-۵ ابیراهی رنگی

آخرین ابیراهی که می‌خواهیم از آن بحث کنیم جزو ابیراهیهای زائد که همگی تکفام هستند نیست. نه در تقریب (گاوسی یا پیرامحوری) مرتبهٔ اول و نه در نظریهٔ مرتبهٔ سه، که آنها را در بخشهای قبل به اختصار بررسی کردیم، واقعیت مهمی مربوط به شکست، که عبارت است از تغییر ضریب شکست با طول موج یا پدیدهٔ پاشیدگی، در نظر گرفته نشد. به علت پاشیدگی، یک ابیراهی اضافی که ابیراهی رنگی ($C \cdot A$) نامیده می‌شود، حتی برای اپتیک پیرامحوری ظاهر می‌شود که در آن تصاویر مربوط به رنگهای مختلف نور برهم منطبق نمی‌شوند. برحسب ابیراهیهای مرتبهٔ سه تکفام در معادلهٔ ۵-۲۵، می‌توانستیم اثرات رنگی را با در نظر گرفتن وابستگی هر یک از ضرایب جمله‌ها به طول موج وارد کنیم.

ابیراهی رنگی عدسی در شکل ۵-۱۲ الف به‌طور ساده نشان داده شده است. چون فاصلهٔ کانونی عدسی f بستگی به ضریب شکست مادهٔ عدسی n دارد، f تابع طول موج نیز هست. در این شکل تجمع پرتوهای موازی نور فرودی توسط عدسی در نقاط کانونی مجزا برای کناره‌های سرخ و بنفش طیف مرئی نشان داده شده است. توجه کنید که مخروط نور بنفش هاله‌ای حول کانون سرخ در R ایجاد می‌کند. اگر نور فرودی تمام طول موجهای طیف مرئی را در بر داشته باشد، رنگهای میانی بین این دو نقطه روی محور کانونی می‌شوند. درست مانند مورد منشور، شکست بزرگتر برای طول موجهای کوچکتر باعث می‌شود برای عدسی مثبت، که در شکل نشان داده شده است، کانون بنفش به عدسی نزدیکتر باشد. در شکل ۵-۱۲ ب ابیراهی رنگی برای نقطهٔ شیء برون محوری، و همچنین ابیراهی رنگی طولی و ابیراهی رنگی عرضی نشان داده شده‌اند. توجه کنید که اگر ابیراهی رنگی طولی وجود نداشت، ابیراهی رنگی عرضی را می‌شد به‌عنوان اختلاف

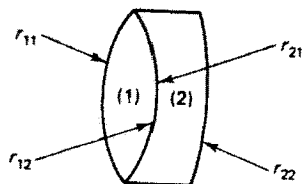


(الف)



(ب)

شکل ۵-۱۲ ابیراهی رنگی (بزرگ شده) برای عدسی نازک: (الف) تأثیر روی فاصلهٔ کانونی، و (ب) خطاهای عرضی و طولی، برای طول موجهای سرخ (R) و بنفش (V).



شکل ۵-۱۳ دوتایی پادرنگ، متشکل از (۱) یک عدسی همکوز از شیشه کراون چسبیده به (۲) یک عدسی منفی از شیشه فلینت. نمادهای مربوط به چهار شعاع انحنا نیز نشان داده شده‌اند.

در بزرگنمایی برای رنگهای مختلف تعبیر کرد. ابیراهی رنگی طولی برای عدسی محدب را می‌توان به آسانی با ابیراهی کروی آن برای پرتوهای مربوط به بیشترین گشودگی مقایسه کرد.

ابیراهی رنگی را می‌توان با به‌کار بردن عناصر شکست چندگانه با توانهای مخالف حذف کرد. متداولترین کار استفاده از دوتایی پادرنگ است، که از عدسیهای مقعر و محدب با شیشه‌های مختلف که به هم چسبیده‌اند تشکیل شده است. فواصل کانونی و توانهای عدسیها به علت شکل متفاوت سطوح آنها با هم مختلف‌اند، و یک توان کل برای دوتایی به‌دست می‌آید که می‌تواند مثبت یا منفی باشد. توان پاشندگی هر یک از مؤلفه‌ها، با انتخاب مناسب شیشه، تناسب معکوس با توان آنها دارد. نتیجه یک عدسی مرکب با یک فاصله کانونی اما با پاشندگی کاهیده در قسمت مهمی از طیف مرئی است.

اکنون جزئیات کمی این طرح را بررسی می‌کنیم. طرح کلی دوتایی پادرنگ در شکل ۵-۱۳ نشان داده شده است. توانهای دو عدسی مؤلفه برای مرکز زرد طیف مرئی، که مناسب است آن را با طول موج فرانهوفر $\lambda_D = 587.6 \text{ nm}$ نشان دهیم، عبارت‌اند از

$$P_{1D} = \frac{1}{f_{1D}} = (n_{1D} - 1) \left(\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} \right) = (n_{1D} - 1)K_1 \quad (33-5)$$

$$P_{2D} = \frac{1}{f_{2D}} = (n_{2D} - 1) \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right) = (n_{2D} - 1)K_2 \quad (34-5)$$

که در آنها شعاعهای انحنا در شکل ۵-۱۳ معرفی شده‌اند، n_D به ضریب شکست هر شیشه برای خط فرانهوفر D مربوط می‌شود، و K_1 و K_2 علائم اختصاری برای انحنا هستند. قبلاً با معادله ۴-۳۲ نشان دادیم که توان دوتایی با جدایی عدسی L به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2} \quad (35-5)$$

$$P = P_1 + P_2 - LP_1P_2 \quad (36-5)$$

برای یک دوتایی از عدسیهای چسبیده به هم داریم $L = 0$ ، و توانهای عدسیها صرفاً با هم جمع می‌شوند:

$$P = P_1 + P_2 \quad (37-5)$$

با استفاده از معادله‌های ۳۳-۵ و ۳۴-۵، به دست می‌آوریم

$$P = (n_1 - 1)K_1 + (n_2 - 1)K_2 \quad (38-5)$$

آبراهی رنگی در طول موج λ_D وجود ندارد به شرطی که این توان از طول موج مستقل باشد، یعنی $(\partial P / \partial \lambda)_D = 0$. از تحمیل این شرط روی معادله ۳۸-۵، داریم

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = K_1 \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + K_2 \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} = 0 \quad (39-5)$$

تغییر n با λ در همسایگی λ_D را می‌توان با استفاده از طول موجهای فرانوفر سرخ و آبی، به ترتیب $\lambda_C = 6563 \text{ nm}$ و $\lambda_F = 4861 \text{ nm}$ ، به صورت زیر تقریب گرفت

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} \cong \frac{n_F - n_C}{\lambda_F - \lambda_C} \quad (40-5)$$

ثابت پاشندگی برای شیشه‌ها را می‌توان با بیان جمله‌های معادله ۳۹-۵ به صورت زیر، معرفی کرد

$$K_1 \frac{\partial n_{1D}}{\partial \lambda} = K_1 \left(\frac{n_{1F} - n_{1C}}{\lambda_F - \lambda_C} \right) \left(\frac{n_{1D} - 1}{n_{1D} - 1} \right) = \frac{P_{1D}}{(\lambda_F - \lambda_C)V_1} \quad (41-5)$$

$$K_2 \frac{\partial n_{2D}}{\partial \lambda} = K_2 \left(\frac{n_{2F} - n_{2C}}{\lambda_F - \lambda_C} \right) \left(\frac{n_{2D} - 1}{n_{2D} - 1} \right) = \frac{P_{2D}}{(\lambda_F - \lambda_C)V_2} \quad (42-5)$$

که در آنها از معادله‌های ۳۳-۵ و ۳۴-۵ استفاده کرده‌ایم، و همچنین ثابت پاشندگی V را وارد کرده‌ایم که به صورت معکوس توان پاشندگی (رابطه ۱۸-۶ و بحث مربوط به آن را ببینید) با رابطه

زیر تعریف می شود

$$V \equiv \frac{1}{\Delta} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (۴۳-۵)$$

با جاگذاری معادله های ۴۱-۵ و ۴۲-۵ در معادله ۳۹-۵، شرط نبود ابیراهی رنگی را می توان به صورت زیر نوشت

$$V_2 P_{1D} + V_1 P_{2D} = 0 \quad (۴۴-۵)$$

از ترکیب معادله های ۳۷-۵ و ۴۴-۵، توانهای تک تک عنصرها را می توانیم برحسب توان مطلوب P_D مربوط به عنصر مرکب با روابط زیر بیان کنیم

$$P_{1D} = P_D \frac{-V_1}{V_2 - V_1} \quad \text{و} \quad P_{2D} = P_D \frac{V_2}{V_2 - V_1} \quad (۴۵-۵)$$

اکنون می توانیم ضرایب انحنای K در معادله های ۳۳-۵ و ۳۴-۵ را به صورت زیر به دست آوریم

$$K_1 = \frac{P_{1D}}{n_{1D} - 1} \quad \text{و} \quad K_2 = \frac{P_{2D}}{n_{2D} - 1} \quad (۴۶-۵)$$

و سرانجام، از این مقادیر K_1 و K_2 می توان چهار شعاع انحنای سطوح عدسیها را تعیین کرد. برای سادگی ساختاری، عدسی شیشه کراونی (۱) را همکوژ می گیریم. به علاوه، انحناهای سطوح متقابل دو عدسی باید با هم تطبیق داده شوند. بدین ترتیب، شعاعهای انحنای در روابط زیر صدق می کنند

$$r_{12} = -r_{11}, \quad r_{21} = r_{12}, \quad \text{و} \quad r_{22} = \frac{r_{12}}{1 - K_2 r_{12}} \quad (۴۷-۵)$$

در طراحی یک دوتایی پادرنگ، سه ضریب شکست برای هر یک از شیشه هایی که باید به کار روند توسط کارخانه سازنده داده می شود، نظیر آنچه در جدول ۱-۵ آمده است. همچنین باید فاصله کانونی کل مطلوب را در نظر گرفت. در مجموعه محاسبات مربوط به چهار شعاع انحنای که به سادگی قابل برنامه نویسی است، به ترتیب معادله های ۴۳-۵، ۴۴-۵، ۴۵-۵ و ۴۶-۵ و ۴۷-۵ به کار برده می شوند. برای مثال، اگر در طراحی یک پادرنگ با فاصله کانونی ۱۵ cm از شیشه

جدول ۱-۵ نمونهٔ شیشه‌های اپتیکی

n_f	n_D	n_C	V	کد کاتالوگ	نوع
			$\frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$	$\frac{n_D - 1}{1.0V}$	
۴۸۶٫۱ nm	۵۸۷٫۶ nm	۶۵۶٫۳ nm			
۱٫۵۲۲۶۲	۱٫۵۱۷۰۷	۱٫۵۱۴۶۱	۶۴٫۵۵	۵۱۷/۶۴۵	کراون بوروسیلیکات
۱٫۵۲۵۸۲	۱٫۵۲۰۱۵	۱٫۵۱۷۶۴	۶۳٫۵۹	۵۲۰/۶۳۶	کروان بوروسیلیکات
۱٫۵۷۹۵۳	۱٫۵۷۲۵۹	۱٫۵۶۹۵۶	۵۷٫۴۳	۵۷۳/۵۷۴	کراون باریم سبک
۱٫۶۴۶۱۱	۱٫۶۳۸۱۰	۱٫۶۳۴۶۱	۵۵٫۴۹	۶۳۸/۵۵۵	کراون باریم چگال
۱٫۶۲۹۰۴	۱٫۶۱۷۱۵	۱٫۶۱۲۱۸	۳۶٫۶۰	۶۱۷/۳۶۶	فلینت چگال
۱٫۶۳۱۹۸	۱٫۶۲۰۴۵	۱٫۶۱۵۶۴	۳۷٫۹۷	۶۲۰/۳۸۰	فلینت
۱٫۷۰۴۶۲	۱٫۶۸۸۹۳	۱٫۶۸۲۵۰	۳۱٫۱۵	۶۸۹/۳۱۲	فلینت چگال
۱٫۸۲۷۷۱	۱٫۸۰۵۱۸	۱٫۷۹۶۰۸	۲۵٫۴۶	۸۰۵/۲۵۵	فلینت چگال
۱٫۴۶۳۱۳	۱٫۴۵۸۴۶	۱٫۴۵۶۳۷	۶۷٫۸۳	۴۵۸/۶۷۸	سیلیکای مذاب

کراون ۵۲۰/۶۳۶ و شیشهٔ فلینت ۶۱۷/۳۶۶ استفاده شود، از این معادله‌ها معلوم می‌شود که عدسیها باید دارای شعاعهای انحنای زیر باشند

$$r_{11} = ۶۶۲۱۸ \text{ cm}$$

$$r_{12} = -۶۶۲۱۸ \text{ cm}$$

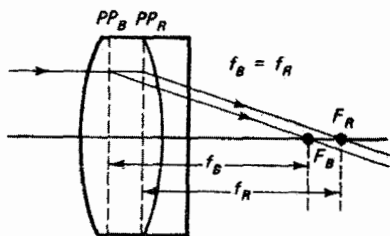
$$r_{21} = -۶۶۲۱۸ \text{ cm}$$

$$r_{22} = -۲۲۳٫۲۹ \text{ cm}$$

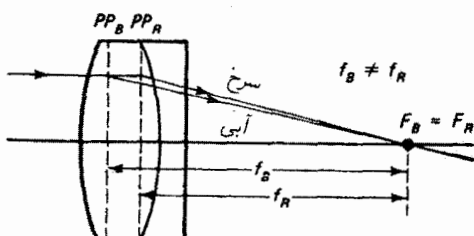
با این مقادیر، می‌توان فاصله‌های کانونی برای هر یک از طول‌موجهای فرانهوفر را از معادله‌های ۳-۵ و ۳۴-۵ محاسبه کرد. در این مورد، به‌دست می‌آوریم

f	f_2	f_1	
۱۵٫۰۰۰۰ cm	-۱۱٫۰۵۷۵ cm	۶٫۳۶۵۳ cm	λ_D
۱۵٫۰۰۰۷ cm	-۱۱٫۱۴۷ cm	۶٫۳۹۶۱ cm	λ_C
۱۵٫۰۰۰۷ cm	-۱۰٫۸۴۸۵ cm	۶٫۲۹۶۶ cm	λ_F

برای عدسی نازک، پادرنگ‌سازی باعث مساوی شدن (تقریبی) فاصله‌های کانونی، و حذف



(الف)



(ب)

شکل ۵-۱۴ دوتایی با صفحه‌های اصلی دوم مجزا شده برای نور سرخ و آبی. (الف) فاصله‌های کانونی مساوی به ابیراهی رنگی طولی باقیمانده منجر می‌شوند. (ب) کانونهای منطبق به ابیراهی رنگی عرضی باقیمانده منجر می‌شوند.

ابیراهیهای طولی و عرضی در آن واحد، می‌شود. در عدسی ضخیم یا یک دستگاه اپتیکی با ترکیبات عدسی، صفحه‌های اصلی دوم برای طول موجهای مختلف ممکن است، برخلاف مورد عدسی نازک، روی هم واقع نشوند. در این مورد، فاصله‌های کانونی مساوی برای دو طول موج، که از صفحه‌های اصلی متناظرشان سنجیده می‌شوند، به یک نقطه کانونی منفرد روی محور منجر نمی‌شوند، و ابیراهی رنگی طولی باقی می‌ماند (شکل ۵-۱۴ الف). اگر فاصله‌های کانونی برای نور سرخ و آبی را طوری نامساوی بگیریم که تنها یک کانون به وجود آید (شکل ۵-۱۴ ب)، اختلاف بین f_B و f_R به بزرگنماییهای عرضی مختلف منجر می‌شود، و ابیراهی رنگی عرضی باقی می‌ماند. بدین ترتیب، شرط حذف ابیراهی رنگی عرضی این است که صفحه‌های اصلی برای دو طول موج تصحیح شده با هم انطباق داده شوند. راه حل دیگری برای صفر کردن ابیراهی رنگی را می‌توان با استفاده از دو عدسی فاصله‌دار ($L \neq 0$) از یک نوع شیشه ($n_1 = n_2 = n$)، به دست آورد. اکنون با تحمیل شرط $\partial P / \partial \lambda = 0$ بر معادله ۵-۳۶ داریم

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} [(n-1)(K_1 + K_2) - (n-1)^2 K_1 K_2 L] = 0$$

با مشتق‌گیری و حذف $\partial n / \partial \lambda$ ، به دست می‌آوریم

$$L = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (۴۸-۵)$$

که با نتیجه‌ای که در فصل بعد برای یک چشمی دو-عدسی به دست می‌آوریم یکسان است. بنابراین، دو عدسی از یک ماده، و با فاصله‌ای برابر یا میانگین فاصله‌های کانونی آنها، برای طول موجی که فاصله‌های کانونی به ازای آن محاسبه شده‌اند ابیراهی رنگی صفر به دست می‌دهند.

مسائل

۱-۵ "بازنویسی" لازم برای رسیدن به معادلهٔ ۱۸-۵ را انجام دهید.

۲-۵ اگر فاصله‌های شیء و تصویر برای سطح شکست کروی در رابطه $1/s' = (1/s) + (1/R)$ — علاوه بر معادلهٔ ۳-۲۰ — صدق کنند، نشان دهید

$$s' = -(n_1/n_2)s \quad (\text{الف})$$

(ب) برای ابیراهی کروی در معادلهٔ ۱۸-۵ صفر می‌شود،

(ج) $a(Q)$ برای $s' = R$ و برای پرتوهایی که با رأس سطح کروی تلاقی می‌کنند نیز صفر است؛ این نوع نقاط تصویر را نقاط آپلاتاتیک می‌نامند.

(د) نقاط اپلاتاتیک را برای سطح کروی $8 \text{ cm} +$ که دو محیط با ضرایب شکست 1.36 و 1.70 را جدا می‌کند تعیین کنید.

۳-۵ یک باریکهٔ نور موازی به طرف تخت یک عدسی تخت-کوژ با ضریب شکست 1.50 ، شعاع 40 mm و قطر 50 mm فرود می‌آید. ابیراهی موجی کروی و ابیراهیهای پرتوی کروی طولی و عرضی را به دست آورید.

۴-۵ نشان دهید برای آینهٔ مقعر کروی، محاسبه‌ای مانند آنچه برای سطح شکست انجام شد ابیراهی مرتبهٔ سهٔ زیر را به دست می‌دهد

$$a = \frac{h^2}{4R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right)^2$$

که در آن R بزرگی شعاع انحنا است.

۵-۵ با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۴-۵، ابیراهی موجی، ابیراهی عرضی و ابیراهی طولی را برای آینهٔ کروی با فاصلهٔ کانونی 2 m و قطر 50 cm ، وقتی تصویری از یک نقطهٔ شیء دور تشکیل می‌دهد، تعیین کنید.

۶-۵ در یک تلسکوپ بازتابی از آینهٔ کروی با فاصلهٔ کانونی 3 m و گشودگی $f/3.75$ استفاده شده است.

(الف) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۴-۵، مقدار ابیراهی موجی کروی را برای این تلسکوپ به دست آورید.

(ب) اگر برای تصحیح این ابیراهی کروی یک تختهٔ تصحیح‌کنندهٔ نوع اشमित با ضریب شکست 1.40 کار گذاشته شود، تفاوت لازم در ضخامت بین مرکز و لبهٔ تخته را تعیین کنید.

۷-۵ در تشکیل تصویر از یک شیء نقطه‌ای محوری، یک عدسی با $4^\circ +$ دیوپتر و قطر 6° cm ابیراهی کروی طولی به مقدار $1^\circ \text{ cm} +$ ایجاد می‌کند. اگر فاصله این شیء از عدسی 5° cm باشد،

(الف) ابیراهی کروی عرضی و

(ب) قطر دایره پخشیدگی در صفحه کانونی پیرامحوری را تعیین کنید.

۸-۵ ابیراهی پرتوی کروی طولی و عرضی را برای عدسی نازکی با $1^\circ 5' = n$ ، $1^\circ + = r_1$ و $1^\circ - = r_2$ ناشی از پرتوهای موازی با محور که از منطقه‌ای به شعاع $h = 1 \text{ cm}$ می‌گذرند به دست آورید.

۹-۵ با استفاده از معادله مربوط به ابیراهی کروی عدسی نازک در مسئله ۸-۵، ابیراهی پرتوی کروی طولی عدسی را به صورت تابعی از ارتفاع پرتو h به دست آورید. این کار را با ترسیم ابیراهی پرتوی طولی به صورت تابعی از ارتفاع پرتو به ازای 5 cm ، 4 cm ، 3 cm ، 2 cm ، 1 cm ، $0 = h$ انجام دهید. عدسی دارای ضریب شکست $1^\circ 6'$ و شعاعهای $36 \text{ cm} = r_1$ و $18 \text{ cm} - = r_2$ است. پرتوهای نور فرودی با محور اپتیکی موازی هستند.

۱۰-۵ یک عدسی نازک همکوز با ضریب $1^\circ 5'$ و شعاع 15 cm از یک نقطه شیء محوری واقع در فاصله 25 cm از عدسی و برای پرتوهایی که از منطقه‌ای به شعاع $h = 2 \text{ cm}$ می‌گذرند تصویری تشکیل می‌دهد. ابیراهی پرتوی کروی عرضی و طولی را تعیین کنید. (مسئله ۸-۵ را ببینید.)

۱۱-۵ نشان دهید اگر $L = 1/s'_h - 1/s'_p$ ، قرار دادن $dL/d\sigma = 0$ شرط ابیراهی کروی مینیمم را به دست می‌دهد:

$$\sigma = -\frac{2(n^2 - 1)p}{n + 2}$$

۱۲-۵ یک عدسی مثبت با ضریب شکست $1^\circ 5'$ و فاصله کانونی 3° cm را "خمیده" می‌کنیم تا ضرایب شکل کادینگتون $7^\circ 0'$ و $3^\circ 0'$ به دست آیند. شعاعهای انحنای متناظر را تعیین کنید.

۱۳-۵ یک عدسی نازک مثبت با فاصله کانونی 2° cm طوری طراحی شده است که دارای ابیراهی کروی مینیمم در صفحه تصویر آن، به فاصله 3° cm از عدسی، باشد. اگر ضریب شکست عدسی $1^\circ 6'$ باشد، شعاعهای انحنای آن را به دست آورید.

۱۴-۵ می‌خواهیم از یک عدسی نازک تخت-کوژ با فاصلهٔ کانونی 1 m و ضریب شکست 1.60 در راستایی استفاده کنیم که ضمن کانونی کردن یک باریکهٔ موازی نور کمترین ابیراهی کروی را به وجود آورد. با مقایسهٔ ضریب شکل کادینگتون برای هر راستا با مقداری که ابیراهی کروی مینیمم را تعیین می‌کند، ثابت کنید راستای مناسب وقتی به دست می‌آید که نور به طرف کروی عدسی فرود آید.

۱۵-۵ یک عدسی مثبت را برای کانونی کردن باریکهٔ موازی نور با ابیراهی کروی مینیمم به کار می‌بریم. فاصلهٔ کانونی لازم 3 cm است. اگر شیشه دارای ضریب شکست 1.50 باشد،

(الف) ضریب کادینگتون لازم و

(ب) شعاعهای انحنای عدسی را تعیین کنید.

(ج) اگر بخواهیم از عدسی برای تولید نور موازی استفاده کنیم، جوابهای بالا چه تغییری می‌کنند؟

۱۶-۵ مسئلهٔ ۱۵-۵ را با این فرض حل کنید که عدسی برای کاهش کوما طراحی شده باشد.

۱۷-۵ می‌خواهیم از یک عدسی با فاصلهٔ کانونی 2 cm به عنوان عدسی وارونگر استفاده کنیم، یعنی عدسی تنها تصویر را وارونه می‌کند و اندازهٔ آن را تغییر نمی‌دهد. در این کاربرد، شعاعهای انحنایی را که باعث ابیراهی کروی مینیمم می‌شوند به دست آورید. ضریب شکست عدسی 1.50 است.

۱۸-۵ مسئلهٔ ۱۷-۵ را با این فرض که عدسی برای کم کردن کوما طراحی شود حل کنید.

۱۹-۵ می‌خواهیم انحنای میدان یک عدسی با فاصلهٔ کانونی 2 cm از جنس شیشهٔ کراون ($n = 1.5230$) را کاهش دهیم. برای این منظور، یک عدسی دیگر از شیشهٔ فلیت ($n = 1.7200$) را اضافه می‌کنیم. فاصلهٔ کانونی این عدسی را تعیین کنید. ضرایب شکست برای نور سدیم 589.3 nm داده شده‌اند.

۲۰-۵ یک شیئی تلسکوپ از دو عدسی چسبیدهٔ مثبت ($n_1 = 1.51736$, $f_1 = 3.543\text{ cm}$) و منفی ($n_2 = 1.6039$, $f_2 = 5.391\text{ cm}$) ساخته شده است.

(الف) شعاع انحنای سطح پتزوال آنها را به دست آورید.

(ب) چه فاصلهٔ کانونی برای عدسی منفی یک سطح پتزوال تخت به دست می‌دهد؟

۲۱-۵ یک دوتایی پادرنگ از شیشه‌های کراون $517/645$ و فلیت $620/380$ که فاصلهٔ کانونی کل آن 2 cm باشد طراحی کنید. عدسی شیشهٔ کراونی را همکوژ بگیرید. شعاعهای انحنای سطوح خارجی عدسی و همچنین فاصلهٔ کانونی برآیند آن را برای خطوط فرانهوفر D ، C و F تعیین کنید.

۲۲-۵ یک دوتایی پادرنگ با فاصله کانونی ۵ cm با استفاده از شیشه کراون ۶۳۸/۵۵۵ و شیشه فلینت ۸۰۵/۲۵۵ طراحی کنید.

(الف) شعاعهای انحنای

(ب) فاصله‌های کانونی برای خطوط فرانهوفر D ، C و F ، و

(ج) توانها و توانهای پاشندگی تک‌تک عنصرها را به‌دست آورید.

(د) آیا معادله ۴۴-۵ صادق است؟

۲۳-۵ با استفاده از شیشه‌های ۵۷۳/۵۷۴ و ۶۳۹/۳۱۲، یک دوتایی پادرنگ با فاصله کانونی ۱۰ cm - طراحی کنید. عدسی شیشه کراونی را هم‌کوژ بگیرد.

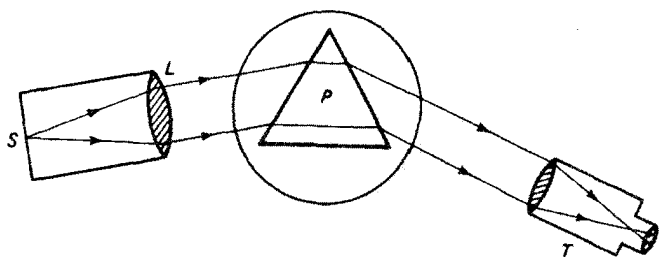
(الف) شعاعهای انحنای سطوح عدسی،

(ب) فاصله‌های کانونی انفرادی برای خط فرانهوفر D ، و

(ج) فاصله‌های کانونی کل عدسی برای خطوط فرانهوفر D ، C و F را به‌دست آورید.

مراجع

- [1] Martin, L. C. *Technical Optics*, Vol. 2, 2d ed. London: Sir Isaac Pitman & Sons, 1960. Ch. V and Appendix V.
- [2] Fincham, W. H. A., and M. H. Freeman. *Optics*, 9th ed. Boston: Butterworth Publishers, 1980. Ch. 18.
- [3] Welford, W. T. *Geometrical Optics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1962. Ch. 6.
- [4] Welford, W. T. *Aberrations of Optical Systems*. Boston: Adam Hilger Ltd., 1986.
- [5] Guenther, Robert D. *Modern Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1990. Appendix 5-B.
- [6] Kingslake, Rudolf. *Lens Design Fundamentals*. New York: Academic Press, 1978.
- [7] Conrady, A. E. *Applied Optics and Optical Design*. New York: Dover Publications, 1957.
- [8] Smith, Warren J. "Image Formation: Geometrical and Physical Optics." In *Handbook of Optics*, edited by Walter G. Driscoll and William Vaughan. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978.
- [9] Hopkins, R. E. "Geometrical Optics." In *Geometrical and Instrumental Optics*, edited by Daniel Malacara. Boston: Academic Press, 1988.
- [10] Brouwer, William. *Matrix Methods in Optical Instrument Design*. New York: W. A. Benjamin, 1964.
- [11] Nussbaum, Allen. *Geometric Optics: An Introduction*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1968. Ch. 7, 8.
- [12] Smith, F. Dow. "How Images Are Formed." *Scientific American* (Sept. 1968): 59-70.



ابزار بندی اپتیکی

مقدمه

در این فصل اصول اپتیک هندسی را، که قبلاً بررسی شدند، برای بحث دربارهٔ چند ابزار اپتیکی عملی به کار می‌بریم. این بحث را با مقدمه‌ای بر کار مانعها، مردمکها و دریچه‌ها، که اهمیت عملی زیادی در ابزار بندی اپتیکی دارند، شروع می‌کنیم. آنگاه در بخشهای بعد ابزارهای اپتیکی شامل منشور، دوربین عکاسی، چشمی، میکروسکوپ و تلسکوپ را بررسی خواهیم کرد.

۱-۶ مانعها، مردمکها، و دریچه‌ها

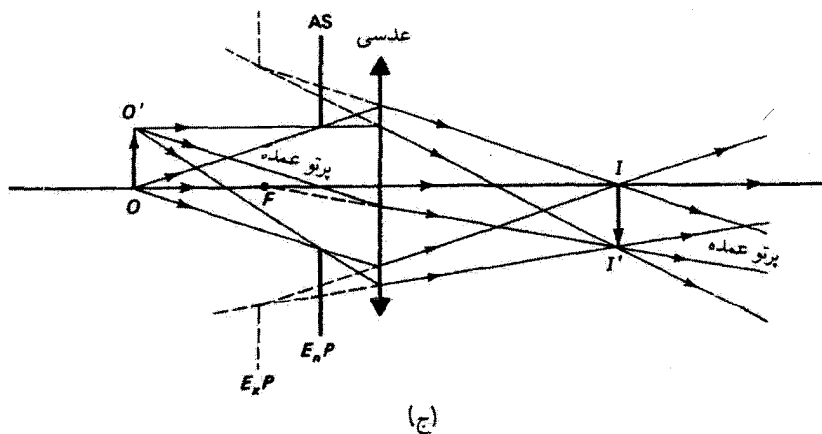
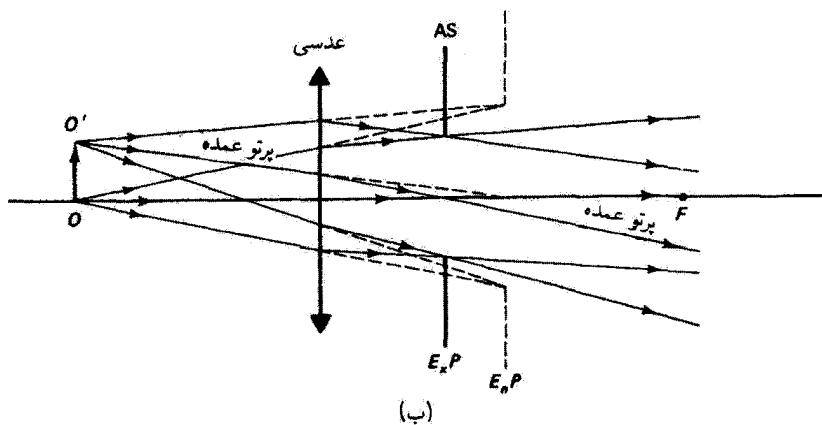
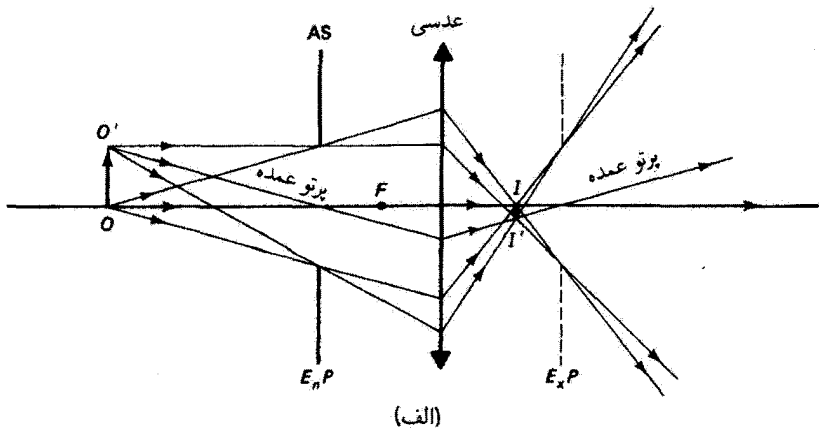
قبلاً راههای ردیابی کردن پرتوها را در عبور از دستگاه اپتیکی با استفاده از کاربرد گام به گام فرمولهای گاوسی، روشهای ماتریسی و ردیابی پرتو مطالعه کرده‌ایم. اما تمام پرتوهای نور ناشی از یک نقطه شیء، که به سمت یا به درون دستگاه اپتیکی فرستاده می‌شوند، در تصویر نهایی حضور ندارند. بسیاری از این پرتوها، بسته به مکان نقطه شیء و زاویه پرتو، به علت گشودگی محدود عدسیها یا توسط گشودگیهای واقعی که عمداً در دستگاه اپتیکی کار گذاشته شده‌اند، مسدود می‌شوند. در این بخش، تأکید ما روی اثرهای این نوع محدودیتهای فضایی باریکه‌های نور در دستگاه اپتیکی است.

گشودگیهای مورد نظر ما اغلب برای رسیدن به هدفهای عملی مختلفی عمداً در دستگاه اپتیکی کار گذاشته می‌شوند. قبلاً (در فصل ۵) دیدیم که چگونه می‌توان از گشودگیها برای اصلاح اثرهای ابیراهی کروی، آستیگماتیسم و واپیچش استفاده کرد. در کاربردهای دیگر ممکن است گشودگیها را برای ایجاد کناره‌های واضح در تصویر، مانند خطوط اصلی واضحی که در نگاه کردن از چشمی یک ابزار اپتیکی می‌بینیم، به‌کار ببرند. همچنین می‌توان از گشودگیها برای محفوظ داشتن تصویر از نورهای ناخواسته‌ای که از عنصرهای اپتیکی پراکنده می‌شوند استفاده کرد. در هر حال، وجود گشودگیها چاره‌ناپذیر است زیرا عدسیها قطر محدودی دارند و عملاً در دستگاه گشودگی وارد می‌کنند.

وجود گشودگی در دستگاه اپتیکی روی ویژگیهای دستگاه اثرهای مهمی دارد. دیدیم که چگونه کم کردن گشودگی مفید یک عدسی می‌تواند ابیراهی کروی را کاهش دهد. بدیهی است که روشنایی تصویری که با این عدسی تشکیل می‌شود نیز کاهش می‌یابد. در این فصل بررسی می‌کنیم که وقتی قطر مؤثر یک عدسی کوچکتر شود چگونه عمق میدان (یا کانون) آن افزایش می‌یابد. در مبحث پراش (فصل ۱۶) اثر قطر عدسی روی تفکیک تصویر را مطالعه می‌کنیم. وجود گشودگیها در ابزارهای اپتیکی پیچیده‌تر نیز روی تمام این ویژگیها اثر می‌گذارد. علاوه بر این، گشودگیها محدود کردن میدان دید، وسعت میدان شیء که در تصویر نهایی ظاهر می‌شود، تأثیر دارند. نوع در پیچیدگی دستگاههای اپتیکی عملی، و در موقعیت گشودگیها نسبت به سطوح بازتاب و شکست، البته بسیار زیاد است. به ناچار، این بحث مقدماتی را به تعریف و توضیح اصطلاحات لازم برای این نوع تحلیل و کاربرد آنها در چند دستگاه اپتیکی ساده محدود می‌کنیم.

روشنایی تصویر: مانعهای روزنه‌ای و مردمکها

مانع روزنه‌ای (AS). مانع روزنه‌ای در دستگاه اپتیکی یک مؤلفه اپتیکی واقعی است که اندازه مخروط ماکسیمم پرتوهای ناشی از نقطه شیء محوری را که می‌توانند توسط تمام دستگاه پردازش شوند محدود می‌کند. در نتیجه، این مانع روشنایی تصویر را تنظیم می‌کند. میانبند دوربین عکاسی و عنبیه چشم انسان مثالهایی از مانع روزنه‌ای هستند. مثال دیگر تلسکوپ است که در آن عدسی اول یا شیئی تعیین می‌کند چه مقدار نور برای تشکیل تصویر نهایی روی شبکه چشم وارد تلسکوپ شود. در این مورد ساده، عدسی شیئی مانع روزنه‌ای دستگاه اپتیکی است. اما، مانع روزنه‌ای همیشه اولین مؤلفه دستگاه اپتیکی نیست. برای مثال، شکل ۱-۶ الف را ببینید که در آن یک مانع روزنه‌ای (AS) در جلو عدسی نشان داده شده است که پرتوهای کناری (یا حاشیه‌ای) را که می‌توانند به عدسی برسند تعیین می‌کند. اما اگر شیء OO' را به طرف AS حرکت دهیم، در یک نقطه این لبه عدسی است که گشودگی تعیین‌کننده می‌شود. (این نقطه محل تلاقی محور با خطی است که



شکل ۱-۶ محدود شدن پرتوهای نور توسط ترکیبهای مختلفی از عدسی مثبت و میانبد.

از لبهٔ عدسی و لبهٔ مانع روزنه‌ای AS می‌گذرد. در این وضعیت، زاویه‌ای که عدسی در O تشکیل می‌دهد کوچکتر از زاویه‌ای می‌شود که گشودگی می‌سازد، و عدسی را مانع روزنه‌ای می‌گیریم.

مردمک ورودی (E_nP). مردمک ورودی گشودگی محدودکننده‌ای است که پرتوهای نور، در نگاه از شیء به دستگاه اپتیکی، "می‌بینند". در شکل ۱-۶ الف، این ابزار همان مانع روزنه‌ای است، و در این مورد AS و E_nP یکی هستند. برای اینکه ببینیم همیشه این امر صادق نیست، به شکل ۱-۶ ب نگاه کنید که در آن مانع روزنه‌ای، مانند بیشتر دوربینهای عکاسی، پشت عدسی قرار دارد (مانع پشت). اکنون کدام مؤلفه مخروط پرتوهای نور را محدود می‌کند؟ آن مؤلفه‌ای که لبه‌های گشودگی اش پرتوهای ناشی از O را به کوچکترین زاویهٔ آنها نسبت به محور محدود می‌کنند. با نگاه به دستگاه اپتیکی از فضای شیء، عدسی را مستقیماً می‌بینیم اما AS را از عدسی می‌بینیم. به عبارت دیگر، گشودگی مؤثر ناشی از AS تصویر آن است که توسط عدسی تشکیل می‌شود، یعنی خط چینی که با E_nP نشانگذاری شده است. چون پرتوهای ناشی از O ، که به سمت این گشودگی مجازی می‌آیند، زاویهٔ کوچکتری نسبت به پرتوهایی که به سمت لبهٔ عدسی می‌آیند می‌سازند، این گشودگی مجازی مانند مردمک ورودی مؤثر برای دستگاه عمل می‌کند. توجه کنید که پرتوهای ناشی از O ، که به سمت لبه‌های E_nP می‌آیند، در واقع توسط عدسی طوری شکسته شده‌اند که از لبه‌های مانع روزنه‌ای واقعی بگذرند. باید هم همین‌طور باشد، زیرا AS و E_nP ، بنابه تعریف، صفحه‌های همیوگ‌اند: لبه‌های E_nP تصاویر لبه‌های AS هستند. این مثال قاعدهٔ کلی را نشان می‌دهد: مردمک ورودی عبارت است از تصویر مانع روزنه‌ای تنظیم‌کننده‌ای که توسط عناصر تصویرساز قبل از آن تشکیل شده است.^۱ وقتی مانع روزنه‌ای تنظیم‌کننده اولین عنصر از این نوع باشد (مانع جلو)، خودش به منزلهٔ مردمک ورودی عمل می‌کند.

مثال دیگری که در آن گشودگی واقع در جلو عدسی کار AS را برای دستگاه انجام می‌دهد در شکل ۱-۶ ج نشان داده شده است. تفاوت این مورد با مورد شکل ۱-۶ الف در این است که گشودگی داخل فاصلهٔ کانونی عدسی قرار دارد. با وجود این، گشودگی به منزلهٔ AS برای دستگاه است زیرا این گشودگی است که پرتوهای دستگاه را به کوچکترین زاویهٔ آنها با محور محدود می‌کند و نه عدسی. به علاوه، این گشودگی E_nP ی دستگاه نیز هست زیرا اولین عنصری است که نور ناشی از شیء با آن مواجه می‌شود.

مردمک خروجی (E_oP). گفتیم که E_nP برای دستگاه اپتیکی تصویر AS است که با نگاه به دستگاه اپتیکی از شیء دیده می‌شود. اگر از فضای تصویر به دستگاه اپتیکی نگاه کنیم، تصویر

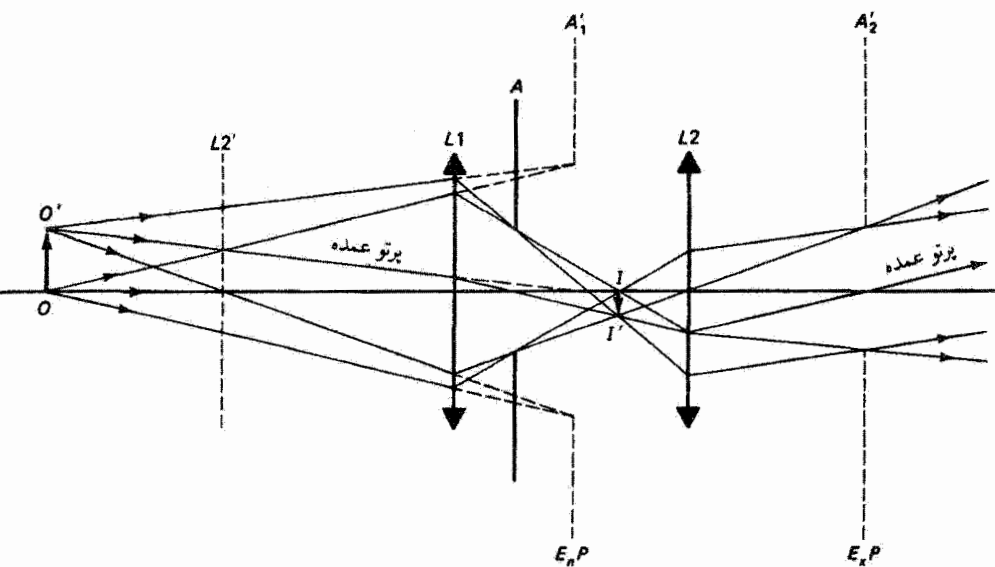
۱. "قبل از" به این معنی به کار برده شده است که نور باید ابتدا از آن عناصر تصویرساز بگذرد. اگر همیشه پرتوهای نور را از چپ به راست بفرستیم، می‌توانیم صرفاً بگوییم "توسط تمام عناصر تصویرساز واقع در سمت چپ آن"

دیگری از AS را می‌توانیم ببینیم که به نظر می‌رسد اندازه باریکه ورودی را محدود می‌کند. این تصویر را مردمک خروجی دستگاه اپتیکی می‌نامند. بدین ترتیب، مردمک خروجی تصویر مانع روزنه‌ای تنظیم‌کننده‌ای است که توسط عناصر تصویرساز بعد از آن (یا در شکلهایی که نشان داده‌ایم، واقع در سمت راست آن) تشکیل می‌شود. مانع پشت در شکل ۱-۶ ب در واقع همان $E_{\infty}P$ برای دستگاه است زیرا آخرین مؤلفه اپتیکی است. مطابق تعریف بالا برای $E_{\infty}P$ ، مردمک خروجی همیوگ اپتیکی مانع روزنه‌ای است؛ $E_{\infty}P$ و AS صفحه‌های همیوگ هستند. بنابراین، $E_{\infty}P$ همیوگ E_nP نیز هست. در شکل ۱-۶ الف، $E_{\infty}P$ تصویر حقیقی E_nP است؛ در شکل ۱-۶ ج، $E_{\infty}P$ تصویر مجازی است. توجه کنید که در هر مورد، پرتوهایی که لبه‌های مردمک ورودی را قطع می‌کنند نیز (خود آنها یا ادامه آنها) لبه‌های مردمک خروجی را قطع می‌کنند.

در دستگاهی مانند مورد شکل ۱-۶ الف، تصویر واضحی از سوراخ دایره‌ای مانع روزنه‌ای روی پرده واقع در مکان مردمک خروجی می‌افتد. اگر این دستگاه چشمی یک ابزار اپتیکی باشد، مردمک خروجی از لحاظ مکان و قطر با مردمک چشم تطبیق داده می‌شود. همچنین توجه کنید که اگر پرده را به سمت عدسی حرکت دهیم، تصویر واضح II' از شیء OO' روی آن می‌افتد. دیده می‌شود که مردمک خروجی زاویه فضایی پرتوهای تشکیل‌دهنده نقاط تصویر را محدود می‌کند.

پرتو عمده، پرتو عمده یا اصلی پرتوی است ناشی از شیء که از نقطه محوری، در صفحه مردمک ورودی، می‌گذرد. با توجه به همیوگی مردمک ورودی با مانع روزنه‌ای و مردمک خروجی، این پرتو باید (خودش یا ادامه‌اش) از نقاط محوری آنها هم عبور کند. این ویژگی را می‌توانید در دستگاههای شکل ۱-۶ تحقیق کنید. باید توجه کرد که پرتو عمده در باریکه پرتوهای ناشی از نقطه محوری O بر محور اپتیکی منطبق است.

قبل از اینکه به مجموعه مفاهیم جدیدی که از بررسی گشودگیها در دستگاههای اپتیکی ناشی می‌شوند چیزی اضافه کنیم، دستگاهی را در نظر می‌گیریم که اندکی پیچیده‌تر از دستگاههای شکل ۱-۶ است. البته هر یک از عدسیها در این دستگاهها می‌تواند نمایشگر یک دستگاه کلی باشد که مسیره‌های پرتو آن با نقاط بنیادی‌اش تعیین می‌شود. اما در شکل ۲-۶ دستگاه اپتیکی خاصی را نشان داده‌ایم که متشکل است از دو عدسی L_1 و L_2 که بین آنها گشودگی A قرار دارد. اولین سؤالی که باید به آن پاسخ دهیم این است: چه عنصری عملاً به منزله مانع روزنه‌ای (AS) برای تمام دستگاه است؟ جواب این پرسش همیشه بدیهی نیست. اما همیشه می‌توان به آن پاسخ داد اگر تعیین کنیم کدام یک از عناصر واقعی در دستگاه مفروضه در مورد فعلی، A ، یا L_1 یا L_2 — دارای مردمک ورودی است که پرتوها را به کوچکترین زاویه آنها با محور، چنانکه از نقطه شیء دیده می‌شود، محدود می‌کند. برای اینکه پی ببریم کدام یک از عناصر مزبور گشودگی



شکل ۲-۶ محدود شدن پرتوهای نور در یک دستگاه اپتیکی متشکل از دو عدسی مثبت و یک میانبنده.

محدودکننده را ارائه می‌کند، باید مردمک ورودی را برای هر یک از آنها با تصویر کردن هر یک توسط قسمتی از دستگاه اپتیکی که در سمت چپ آن واقع شده است تعیین کنیم:

L_2 : با نمودار پرتو یا با محاسبه، تصویر عدسی L_2 ، که توسط L_1 تشکیل می‌شود (چنانچه نور از راست به چپ می‌رود) L_2' است. مکان و اندازه آن (بزرگنمایی) نشان داده شده‌اند.
 A : تصویر گشودگی A از پس‌سو توسط L_1 مجازی است و با A_1' نشان داده شده است.
 L_1 : چون عدسی L_1 اولین عنصر است به‌منزله مردمک ورودی خودش عمل می‌کند.

اکنون به سه مردمک ورودی L_1 ، L_2 ، و L_2' از نقطه محوری O نگاه می‌کنیم. چون A_1' کوچکترین زاویه را در O می‌سازد نتیجه می‌گیریم گشودگی A مانع روزنه‌ای دستگاه است.

همینکه مانع روزنه‌ای AS مشخص شد تصویر آن را در عناصر اپتیکی سمت راستش تعیین می‌کنیم تا مردمک خروجی به‌دست آید. در مورد فعلی، A_1' تصویر گشودگی A در عدسی L_2 است. پرتو عمده، همراه با دو پرتو حاشیه‌ای، از هر یک از دو نقطه انتهایی O و O' ترسیم شده است. توجه کنید که این پرتو (خودش یا ادامه‌اش) از مرکز AS و مراکز صفحه‌های همیوخ آن، E_nP و E_rP می‌گذرد. پرتو عمده محور را در A ، در A_1' (به‌صورت مجازی) و در A_1' قطع می‌کند. دسته پرتوهای فرودی ناشی از هر یک از نقاط شیء O یا O' ، که با اندازه مردمک ورودی

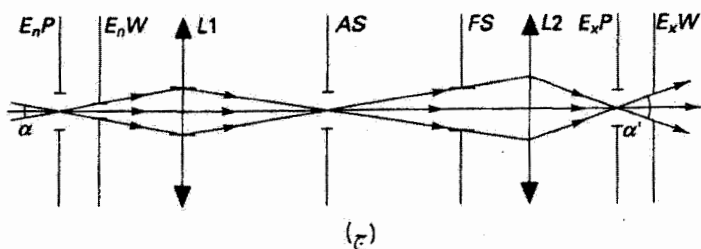
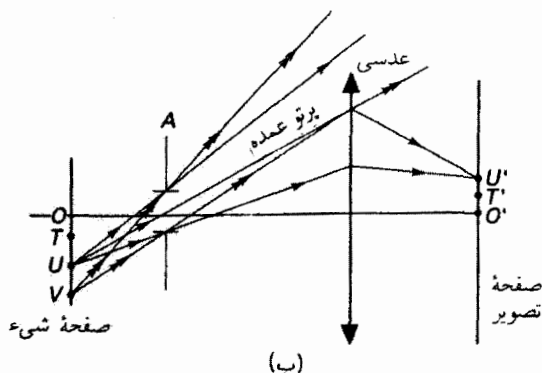
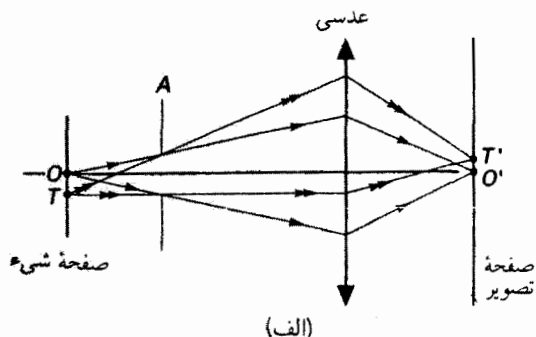
A_1' محدود شده است، درست از مردمک خروجی A_2' می‌گذرد. تصویر ناشی از L_1 را با II' نشان داده‌ایم؛ تصویر نهایی (که آن را نشان نداده‌ایم) مجازی است، زیرا پرتوهای ناشی از O یا O' با عبور از L_2 واگرا می‌شوند.

میدان دید: مانعهای میدانی و دریچه‌ها. در توصیف محدودیتهای مخروط پرتوهای ناشی از نقطه شیء محوری دیدیم که مردمکهای ورودی و خروجی به مانع روزنه‌ای مربوطاند و از این رو روشنایی تصویر را تنظیم می‌کنند. گشودگیها همچنین میدان دید را که توسط دستگاه ارائه می‌شود تعیین می‌کنند. عنصر تنظیم‌کننده در این مورد را مانع میدانی می‌نامند، و به همان نحوی که مانع روزنه‌ای به مردمکهای ورودی و خروجی مربوط می‌شود مانع میدانی به دریچه ورودی و دریچه خروجی مربوط می‌شود.

ساده‌ترین نمونه محدودیت در میدان دید نگاه کردن از یک گشودگی مانند پنجره است. لبه‌های پنجره تعیین می‌کنند که چه مقدار از فضای بیرون را می‌توانیم ببینیم. این میدان دید را می‌توان برحسب اندازه‌های جانبی شبی که به آن نگاه می‌کنیم، یا برحسب وسعت زاویه‌ای پنجره، نسبت به خط دید توصیف کرد. همچنین، می‌توان میدان را برحسب شیء یا برحسب تصویر (در مثال فعلی روی شبکیه) بیان کرد.

برای اینکه ببینیم گشودگی چگونه میدان دید را محدود می‌کند — با استفاده از نمودارهایی که در مورد پنجره و عدسی چشم نیز می‌توانستیم به‌کار ببریم — شکل ۳-۶ را در نظر می‌گیریم. در قسمت (الف)، دستگاه اپتیکی عبارت است از یک گشودگی A که در جلو یک عدسی قرار دارد. صفحه‌های شیء و تصویر نیز نشان داده شده‌اند. پرتوهای ناشی از نقطه محوری O از لحاظ زاویه توسط گشودگی محدود می‌شوند و در نقطه O' توسط عدسی متمرکز می‌شوند. برای نقطه برون محوری T و تصویر آن T' همین امر صادق است. در هر دو مورد، عدسی به اندازه‌ای بزرگ است که می‌تواند تمام مخروط پرتوها را قطع کند. اگر صفحه تصویر به‌طور یکنواخت روشن باشد و گشودگی یک روزنه دایره‌ای باشد، دایره‌ای به شعاع $O'T'$ با روشنایی یکنواخت در صفحه تصویر تشکیل می‌شود.

اما، اگر نقاط شیء پایتتر از T را در نظر بگیریم، پرتوهای بالایی ناشی از این نقاط، که از گشودگی می‌گذرند، از عدسی عبور نمی‌کنند. U یکی از این نقاط است که در قسمت (ب)، که مربوط به همان دستگاه اپتیکی قسمت (الف) است اما برای وضوح از نو ترسیم کرده‌ایم، نشان داده شده است. این نقطه طوری انتخاب شده است که پرتو عمده یا مرکزی دسته پرتوها درست به زیر لبه عدسی فرود آید. حدود نیمی از باریکه از دست می‌رود به طوری که نقطه تصویر U' تنها حدود نصف نوری را دریافت می‌کند که به نقاط O' و T' می‌رسد. بدین ترتیب، تصویر دایره‌ای با



شکل ۳-۶ نمودارهای (الف) و (ب)، مربوط به یک دستگاه اپتیکی، که در آنها هم نحوه محدود شدن میدان دید توسط گشودگی و هم سایه‌زنی نشان داده شده‌اند. نمودار (ج) نمونه‌ای است از یک دستگاه اپتیکی پیچیده‌تر، که میدان دید زاویه‌ای را در فضاهای شیء و تصویر نشان می‌دهد.

افزایش شعاعش شروع به تار شدن می‌کند. این پوشاندن جزئی قسمت بیرونی تصویر توسط گشودگی برای نقاط شیء بیرون محوری را سایه‌زنی می‌نامند. سایه‌زنی زیاد ممکن است باعث آستیگماتیک شدن تصویر شیء نقطه‌ای شود. و سرانجام، نقطه شیء V طوری انتخاب شده است که تمام پرتوهای ناشی از آن که از گشودگی می‌گذرند به عدسی فرود نمی‌آیند. میدان دید جانبی که با این

دستگاه اپتیکی فراهم می‌آید دایره‌ای حداکثر به شعاع OV است. این میدان دید را غالباً دایره کوچکتري به شعاع OU تعريف می‌کنند و این در صورتی است که میدان دید مفید را متشکل از تمام نقاط شیء که نقاط تصویر آنها حداقل دارای نیمی از تابیدگی ماکسیمم در نزدیکی مرکز هستند در نظر بگیریم. آنگاه می‌توانیم میدان دید زاویه‌ای را به صورت زاویه‌ای تعريف کنیم که پرتو عمده در مرکز گشودگی نمایشگر مردمک ورودی با محور می‌سازد. در این مورد، عدسی هم به عنوان مانع میدانی و هم به عنوان دریچه ورودی عمل می‌کند. در سایر دستگاههای پیچیده‌تر مفاهیم مربوط را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد.

مانع میدانی (F/S). مانع میدانی آن گشودگی است که با محدود کردن زاویه فضایی متشکل از پرتوهای عمده میدان دید را تنظیم می‌کند. مانع میدانی (یا تصویر آن) کوچکترین زاویه را در مرکز مردمک ورودی می‌سازد. اگر بخواهیم لبه میدان دید به وضوح مشخص باشد باید مانع میدانی را در صفحه تصویر قرار دهیم به طوری که همراه با تصویر نهایی به وضوح دیده شود. مثال ساده‌ای از مانع میدانی عبارت است از گشودگی در دوربین عکاسی که مستقیماً جلو فیلم قرار دارد و چارچوب تصویر نهایی را تعیین می‌کند. محدود کردن میدان دید با استفاده از گشودگی وقتی لازم است که یا تصویرگیری برون محوری دور به علت ابیراهیها دارای کیفیت نامطلوبی است یا سایه‌زنی باعث کاهش زیاد روشنایی در قسمتهای خارجی تصویر می‌شود.

دریچه ورودی ($E_n W$). دریچه ورودی عبارت است از تصویر مانع میدانی که توسط تمام عناصر اپتیکی قبل از آن تشکیل می‌شود (درست همان‌طور که مردمک ورودی تصویر مانع روزه‌ای است). دریچه ورودی اندازه‌های عرضی شیء مورد نظر را، مثلاً در دیدیاب دوربین عکاسی، مشخص می‌کند و قطر زاویه‌ای آن میدان دید زاویه‌ای را تعیین می‌کند. وقتی مانع میدانی در صفحه تصویر واقع می‌شود، دریچه ورودی در صفحه شیء همیوغ قرار می‌گیرد، و در آنجا اندازه‌های عرضی میدان شیء را که دستگاه اپتیکی از آن تصویر می‌دهد تعیین می‌کند.

دریچه خروجی ($E_o W$). دریچه خروجی، که مانسته مردمک خروجی است، تصویر مانع میدانی است که توسط تمام عناصر اپتیکی بعد از آن تشکیل می‌شود. برای ناظر واقع در فضای تصویر، دریچه خروجی مساحت تصویر را به همان نحوی محدود می‌کند که پنجره اتاق حدود قابل رؤیت منظره بیرون را مشخص می‌سازد.

در شکل ۳-۶ ج کار مانعهای میدانی و دریچه‌های ورودی و خروجی در یک دستگاه اپتیکی پیچیده‌تر شامل دو عدسی و دو گشودگی نشان داده شده است. اولین گشودگی عبارت است از AS متعلق به دستگاه و، چنانکه قبلاً دیدیم، به یک مردمک ورودی (تصویر AS در L) و یک

مردمک خروجی (تصویر AS در $L2$) مربوط می‌شود. گشودگی دوم مانع میدانی است، که با تصاویرش در عدسیها همراه است: درجهٔ ورودی در سمت چپ و درجهٔ خروجی در سمت راست. پس می‌توان میدان دید در فضای شیء را با α توصیف کرد، یعنی زاویه‌ای که درجهٔ ورودی در مرکز مردمک ورودی می‌سازد. به همین ترتیب، میدان دید در فضای تصویر با α' توصیف می‌شود که عبارت است از زاویه‌ای که درجهٔ خروجی در مرکز مردمک خروجی تشکیل می‌دهد. چنانکه می‌بینیم، اندازهٔ میدان تصویر شده توسط دستگاه اپتیکی عمدتاً با درجهٔ ورودی و در واقع با اندازهٔ مانع میدانی تعیین می‌شود. توجه کنید که $E_{\parallel}W$ و $E_{\perp}W$ ، چون تصویرهای FS هستند، صفحه‌های همیوگ یکدیگراند. بنابراین، باریکه‌ای که درجهٔ ورودی را پر می‌کند مانع میدانی و درجهٔ خروجی را نیز پر می‌کند.

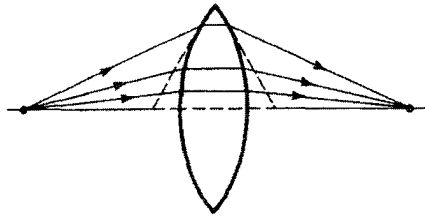
خلاصهٔ اصطلاحات زیر مرجع مناسبی است برای مبحثی که تسلط بر آن احتیاج به شکیبایی و کسب تجربه از طریق مثالهای متعدد دارد.

خلاصهٔ اصطلاحات

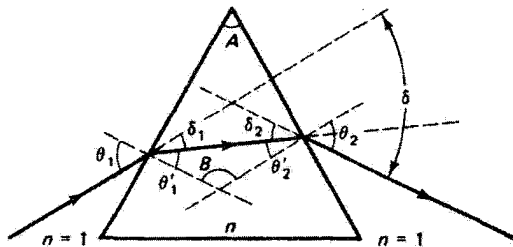
روشنایی	
مانع روزنه‌ای:	گشودگی واقعی در دستگاه اپتیکی که اندازهٔ مخروط پرتوهای ناشی از نقطهٔ شیء محوری را که به دستگاه وارد می‌شوند محدود می‌کند.
مردمک ورودی:	تصویر مانع روزنه‌ای که در عناصر اپتیکی قبل از آن (اگر وجود داشته باشند) تشکیل می‌شود.
مردمک خروجی:	تصویر مانع روزنه‌ای که در عناصر اپتیکی بعد از آن (اگر وجود داشته باشند) تشکیل می‌شود.
میدان دید	
مانع میدانی:	گشودگی واقعی که میدان دید زاویه‌ای تشکیل شده توسط دستگاه اپتیکی را محدود می‌کند.
درجهٔ ورودی:	تصویر مانع میدانی که در عناصر اپتیکی قبل از آن (اگر وجود داشته باشند) تشکیل می‌شود.
درجهٔ خروجی:	تصویر مانع میدانی که در عناصر اپتیکی بعد از آن (اگر وجود داشته باشند) تشکیل می‌شود.

۲-۶ منشور

انحراف زاویه‌ای منشور. نیمهٔ بالایی یک عدسی کروی دوکوز می‌تواند، چنانکه در شکل ۲-۶ نشان داده شده است، تصویری از یک نقطهٔ شیء محوری در تقریب پیرامحوری تشکیل دهد. اگر



شکل ۴-۶ تمرکز پرتوها توسط نیمه عدسی محدب تقریبی است از کار منشور.



شکل ۵-۶ عبور یک پرتو اختیاری از منشور.

دو سطح این نیم عدسی تخت باشند منشور ساخته می شود، و پرتوهای پیرامحوری دیگر نمی توانند یک نقطه تصویر یکتا به وجود آورند. با اینهمه، مفید است که در بعضی موارد منشور را به این گونه در نظر بگیریم که تقریباً مانند نیمی از یک عدسی محدب کار می کند.

در اینجا روابطی را به دست می آوریم که عبور یک پرتو را از منشور دقیقاً توصیف می کنند. شکستی که در هر وجه منشور روی می دهد با قانون اسنل تعیین می شود. درجه شکست تابعی است از ضریب شکست و در نتیجه تابع طول موج نور فرودی است. تغییر ضریب شکست و سرعت نور بر حسب طول موج را پاشیدگی می نامند که آن را بعداً بررسی می کنیم. فعلاً نور تکفام را در نظر می گیریم که در محیط منشور ضریب شکست مشخصه خاص خود را دارد. زاویه های مربوطی که عبور پرتو را از منشور توصیف می کنند در شکل ۵-۶ تعریف شده اند. زاویه های فرود و شکست در هر وجه منشور نسبت به عمودهای واقع در نقاط تلاقی پرتو نور نشان داده شده اند. انحراف زاویه ای کل δ پرتو ناشی از کش تمام منشور عبارت است از مجموع انحرافهای زاویه ای δ_1 و δ_2 که پرتو به ترتیب در وجه های اول و دوم متحمل می شود. بنابه قانون اسنل، در هر وجه منشور داریم

$$\sin \theta = n \sin \theta' \quad (۱-۶)$$

$$n \sin \theta' = \sin \theta_2 \quad (۲-۶)$$

و از بررسی شکل می‌توان دید که روابط هندسی زیر بین زاویه‌ها برقراراند

$$\delta_1 = \theta_1 - \theta'_1 \quad (۳-۶)$$

$$\delta_2 = \theta_2 - \theta'_2 \quad (۴-۶)$$

$$B = 180^\circ - \theta'_1 - \theta'_2 = 180^\circ - A \quad (۵-۶)$$

$$A = \theta'_1 + \theta'_2 \quad (۶-۶)$$

دو قسمت معادله ۵-۶ برای این است که مجموع زاویه‌های مثلث 180° است و مجموع زاویه‌های چهارضلعی 360° است. توجه کنید که چهارضلعی در اینجا دارای زاویه‌های A و B و دو زاویه قائمه‌ای است که از عمودها با وجوه منشور ساخته شده‌اند.

با استفاده از معادله‌های ۱-۶ تا ۶-۶، و از مجموعه عملیاتی که با ماشین حساب برنامه‌پذیر یا رایانه به‌آسانی قابل برنامه‌نویسی است، زاویه انحراف δ محاسبه می‌شود. با فرض اینکه زاویه رأس منشور A و ضریب شکست n معلوم‌اند محاسبات مربوط به پرتو فرودی تحت زاویه θ_1 به ترتیب زیر هستند

$$\theta'_1 = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_1}{n} \right) \quad (۷-۶)$$

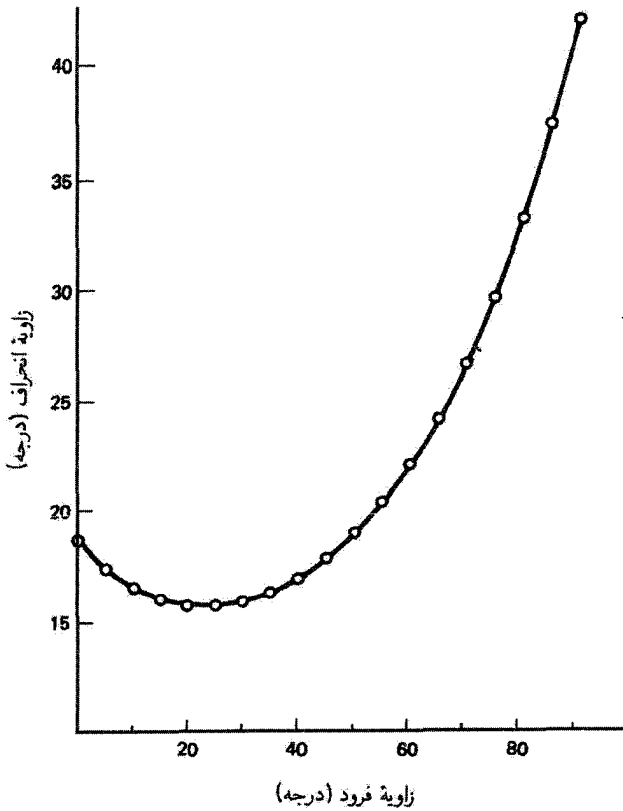
$$\delta_1 = \theta_1 - \theta'_1 \quad (۸-۶)$$

$$\theta'_2 = A - \theta'_1 \quad (۹-۶)$$

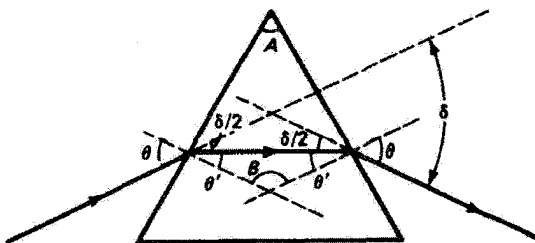
$$\theta_2 = \sin^{-1}(n \sin \theta'_2) \quad (۱۰-۶)$$

$$\delta = \theta_1 + \theta_2 - \theta'_1 - \theta'_2 \quad (۱۱-۶)$$

تغییر انحراف برحسب زاویه فرود به‌ازای $A = 30^\circ$ و $n = 1.5$ در شکل ۶-۶ نشان داده شده است. توجه کنید که یک انحراف مینیمم به‌ازای $\theta_1 = 23^\circ$ روی داده است. شکست توسط منشور تحت وضعیت انحراف مینیمم در عمل کاربرد زیادی دارد. می‌توان به سادگی ثابت کرد وقتی انحراف مینیمم روی می‌دهد پرتو نور به‌طور متقارن از منشور عبور می‌کند، و زاویه‌ها را می‌توان بدون شاخص، مانند شکل ۷-۶، نشان داد. فرض کنید این امر صادق نباشد و انحراف مینیمم برای یک وضعیت نامتقارن، مانند شکل ۵-۶، روی دهد. آنگاه اگر پرتو را وارونه کنیم به‌طوری که از همان مسیر برگردد، باید دارای همان انحراف کل مربوط به پرتو پیشرونده باشد، که آن را مینیمم فرض کرده‌ایم. در نتیجه باید دو زاویه فرود θ_1 و θ_2 داشته باشیم که انحراف مینیمم ایجاد می‌کنند



شکل ۶-۶ نمودار انحراف کل برحسب زاویه فرود برای پرتو نوری که از منشوری با $A = 30^\circ$ و $n = 1.5$ عبور می‌کند. انحراف مینیمم به‌ازای زاویه 23° روی می‌دهد.



شکل ۷-۶ عبور پرتو از منشور در وضعیت انحراف مینیمم.

و این برخلاف تجربه است. روابط هندسی در وضعیت انحراف مینیم ساده می شوند: از معادله ۱۱-۶ داریم

$$\delta = 2\theta - 2\theta' \quad (12-6)$$

و از معادله ۶-۶،

$$A = 2\theta' \quad (13-6)$$

از دو رابطه بالا به دست می آوریم

$$\theta' = \frac{A}{2} \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\delta + A}{2} \quad (14-6)$$

بنابراین، معادله ۱-۶ به صورت زیر در می آید

$$\sin\left(\frac{A + \delta}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

یا

$$n = \frac{\sin[(A + \delta)/2]}{\sin(A/2)} \quad (15-6)$$

معادله ۱۵-۶ روشی برای تعیین ضریب شکست ماده‌ای که منشور از آن ساخته شده است فراهم می کند. با اندازه گیری زاویه رأس منشور و انحراف مینیم نمونه ضریب شکست n به دست می آید. صورت تقریبی معادله ۱۵-۶ را می توان برای وقتی که زاویه رأس، و در نتیجه انحراف، کوچک است تعیین کرد. از تقریب گرفتن سینوس زاویه ها با خود زاویه ها بر حسب رادیان، می توانیم بنویسیم

$$n \cong \frac{(A + \delta)/2}{A/2}$$

یا

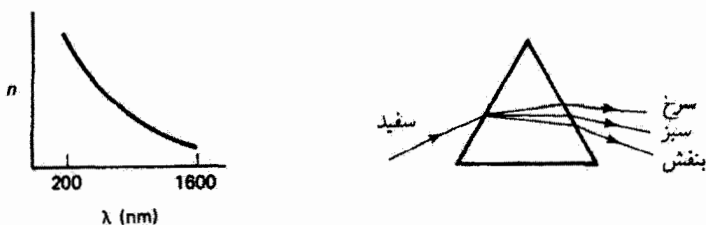
$$\delta \cong A(n - 1) \quad \text{انحراف مینیم با } A \text{ کوچک} \quad (16-6)$$

به‌ازای $A = 15^\circ$ ، انحراف حاصل از معادلهٔ ۱۶-۶ با خطای حدود ۱٪ درست است. به‌ازای $A = 30^\circ$ ، خطا حدود ۵٪ است.

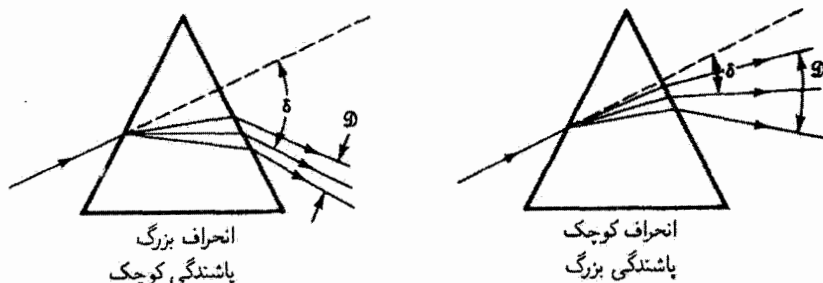
پاشیدگی. انحراف مینیمم برای باریکهٔ تک‌فامی که از منشور عبور می‌کند به‌طور ضمنی با معادلهٔ ۱۵-۶ برحسب ضریب شکست داده می‌شود. اما ضریب شکست بستگی به طول‌موج دارد، و در نتیجه بهتر است این کمیت را با n_λ نشان دهیم. بنابراین، انحراف کل به طول‌موج بستگی دارد، و این نشان می‌دهد مؤلفه‌های مختلف طول‌موجی نور فرودی به‌علت شکست در منشور تفکیک می‌شوند. یک منحنی پاشیدگی بهنجار نوعی و کیفیت تفکیک رنگی حاصل در شکل ۸-۶ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که طول‌موجهای کوچکتر دارای ضرایب شکست بزرگتر و در نتیجه سرعت‌های کمتری در منشور هستند. بدین ترتیب، نور بنفش در عبور از منشور بیشتر از همه منحرف می‌شود. پاشیدگی نشان داده شده در نمودار شکل ۸-۶ را پاشیدگی "بهنجار" می‌نامند. وقتی محیط شکست دارای برانگیختگیهای مشخصه‌ای باشد که نور را با طول‌موجهایی درگسترهٔ منحنی پاشیدگی جذب می‌کنند، این منحنی، چنانکه نشان داده شده است، نزولی یکنوا است اما در ناحیهٔ جذب طول‌موج دارای شیب مثبت است. در این وضعیت، اصطلاح پاشیدگی بی‌هنجار را به‌کار می‌برند، اگر چه هیچ چیز غیرعادی در این باره وجود ندارد. (این مبحث را در بخش ۲۷-۲ بیشتر بررسی می‌کنیم.) منحنی پاشیدگی بهنجاری که نشان داده شده است جنبهٔ نمونه دارد و برای مواد مختلف کم‌وبیش تغییر می‌کند. یک رابطهٔ تجربی که تقریبی برای این منحنی است، و توسط آگوستن کوشی به‌دست آمده است، عبارت است از

$$n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (17-6)$$

که در آن A ، B ، C ، ... ثابتهای تجربی هستند که باید با داده‌های پاشیدگی مربوط به یک مادهٔ به‌خصوص تطبیق داده شوند. غالباً دو جملهٔ اول برای به‌دست آوردن یک تطبیق مناسب کفایت می‌کنند، و در این مورد دانستن مقادیر آزمایشی n در دو طول‌موج متمایز کافی است



شکل ۸-۶ منحنی پاشیدگی بهنجار نوعی و تفکیک رنگی حاصل برای نور سفید در عبور از منشور.



شکل ۹-۶ موارد حدی پاشیدگی \mathcal{D} برای سه طول موج و انحراف δ برای طول موج میانی.

جدول ۱-۶ خطوط فرانوفر

n		علامت مشخصه	طول موج (nm)
شیشه فلینت	شیشه کراون		
۱٫۷۳۲۸	۱٫۵۲۸۶	آبی، F	۴۸۶٫۱
۱٫۷۲۰۵	۱٫۵۲۳۰	زرد، D	۵۸۹٫۲
۱٫۷۰۷۶	۱٫۵۲۰۵	سرخ، C	۶۵۶٫۳

تا مقادیر A و B که نمایشگر این پاشیدگی هستند تعیین شوند. بنابراین، پاشیدگی که به صورت $dn/d\lambda$ تعریف می‌شود با استفاده از فرمول کوشی تقریباً برابر است با $dn/d\lambda = -2B/\lambda^2$. توجه به تفاوت بین پاشیدگی و انحراف اهمیت دارد. اگر چه منشور ساخته شده از ماده‌ای که ضریب شکست بزرگی دارد انحراف بزرگی در یک طول موج معین ایجاد می‌کند، لازم نیست که مطابق با آن پاشیدگی یا تفکیک طول موجهای مجاور نیز بزرگ باشد. شکل ۹-۶ دو مورد حدی را برای نمایش این تفاوت نشان می‌دهد. از لحاظ تاریخی، پاشیدگی با استفاده از سه طول موج نور در نزدیکی وسط و کناره‌های طیف مرئی، که خطوط فرانوفر نامیده می‌شوند، مشخص شده است. این سه خط از خطهایی هستند که در طیف خورشیدی دیده شده‌اند و جوزف فون فرانوفر آنها را مطالعه کرده است. طول موج این سه خط همراه با ضرایب شکست آنها در جدول ۱-۶ آمده است. خطهای تاریک F و C از جذب توسط اتمهای هیدروژن ناشی می‌شوند، و خط تاریک D ناشی از جذب توسط اتمهای سدیم در جو خارجی خورشید است.^۱ با استفاده از منشور نازک در

۱. چون خط زرد سدیم D دوتایی است (۵۸۹٫۰ و ۵۸۹٫۶ nm)، خط تکفامتر d هلیوم در ۵۸۷٫۵۶ nm غالباً برای مشخص کردن مرکز طیف مرئی ترجیح داده می‌شود. خط سبز جیوه در ۵۴۶٫۰۷ nm، که به مرکز منحنی درخشندگی (شکل ۲-۷) نزدیکتر است، نیز به‌کار برده می‌شود.

مینیم انحراف برای مثلاً خط D ، نسبت پخش زاویه‌ای طول موجهای F و C به انحراف طول موج D ، چنانکه در شکل ۹-۶ ارائه شده است، برابر است با

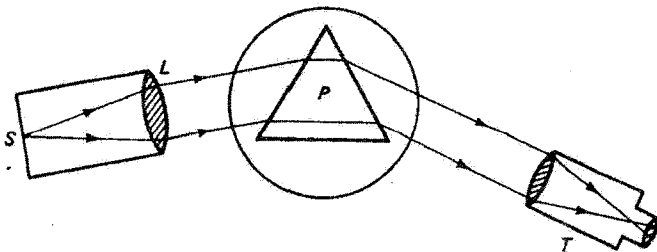
$$\frac{\mathcal{D}}{\delta} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

این نسبت پاشیدگی به انحراف را به‌عنوان توان پاشندگی تعریف می‌کنند:

$$\Delta = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (۱۸-۶)$$

با استفاده از جدول ۱-۶، توان پاشندگی شیشه‌کراون برابر با $۱/۶۵$ به‌دست می‌آید. در حالی‌که برای شیشه‌فلینت $۱/۲۹$ یعنی بیشتر از دو برابر آن است. معکوس توان پاشندگی را عدد آبه می‌نامند.

طیف‌سنج منشوری. ابزاری تحلیلی را که در آن از منشور به‌عنوان عنصر پاشنده استفاده می‌شود، همراه با وسیله‌ای برای اندازه‌گیری زاویهٔ رأس منشور و زاویه‌های انحراف مؤلفه‌های طول‌موجی نور فرودی، طیف‌سنج منشوری می‌نامند. قسمتهای اصلی این طیف‌سنج در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده‌اند. نوری که باید تجزیه شود از شکاف باریک S می‌گذرد و سپس توسط عدسی L موازی می‌شود و در منشور P که معمولاً روی یک میزچهٔ قابل دوران قرار دارد، می‌شکند. پرتوهای نور مربوط به هر مؤلفهٔ طول‌موجی پس از شکست در منشور موازی با هم خارج می‌شوند و در دوربینی که برای بینهایت تنظیم شده است دیده می‌شوند. وقتی دوربین را حول میزچهٔ منشور بگردانیم، تصویر واضحی از شکاف را می‌توان برای هر مؤلفه طول‌موجی مشاهده کرد و انحراف زاویه‌ای مربوط به آن را اندازه گرفت. انحراف δ نسبت به مکان دوربین وقتی که در غیاب منشور به شکاف نگاه می‌کنیم اندازه‌گیری می‌شود. اگر از این ابزار برای مشاهدات عینی و بدون قابلیت اندازه‌گیری جابه‌جایی زاویه‌ای "خط" طیفی استفاده شود آن را طیف‌نما می‌نامند. اگر این ابزار



شکل ۱۰-۶ قسمتهای اصلی طیف‌سنج.

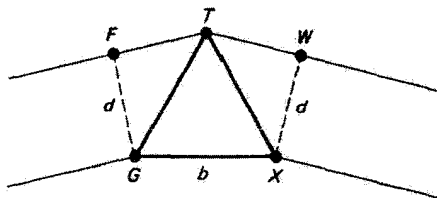
به وسیله‌ای برای ثبت کردن طیف، مثلاً با فیلم عکاسی در صفحه کانونی شیئی دوربین، مجهز شود آن را طیف‌نگار می‌نامند. هنگامی که منشور از یکی از انواع شیشه ساخته شده باشد، گستره طول موجی آن، به علت جذب شیشه در خارج از ناحیه مرئی، محدود است. برای گسترش کارایی طیف‌نگار به ناحیه فرابنفش، منشورهایی از جنس کوارتز (SiO_2) و فلوئوریت (CaF_2) به‌کار برده می‌شوند. طول موجهای ناحیه فروسرخ را می‌توان با استفاده از منشورهایی از نمک (NaCl و KCl) و یاقوت (Al_2O_3) بررسی کرد.

توان تفکیک رنگی. اگر اختلاف طول موج دو مؤلفه نور فرودی به منشور را به تدریج کم کنیم به جایی می‌رسیم که منشور دیگر نمی‌تواند آنها را از هم جدا کند. بنابراین، توان تفکیک طیف‌نگار منشوری عامل کاری مهمی است که آن را در اینجا محاسبه می‌کنیم. دو خط طیفی را تصور کنید که روی فیلم عکاسی در طیف‌نگار منشوری تشکیل شده‌اند. این خطها تصویرهای شکاف هستند، و در نتیجه برای اندازه‌گیری دقیق طول موج باید شکاف ورودی را تا حدی که روشنایی کافی برای فیلم فراهم شود باریک کنیم. اما، تصویر خط طیفی حتی برای باریکترین شکافها دارای پهنایی است که مستقیماً به محدودیتی مربوط می‌شود که لبه‌های عدسی موازی‌کننده یا وجه منشور روی باریکه نور تحمیل می‌کنند. این پدیده ناشی از پراش نور است که بعداً بررسی خواهیم کرد. چون وقتی $\Delta\lambda$ کاهش می‌یابد و خطوط به هم نزدیک می‌شوند تصاویر خطها دارای پهنای تقلیل‌ناپذیری ناشی از پراش هستند، به جایی می‌رسیم که دو خط یکی به نظر می‌رسند و حد تفکیک ابزار به دست می‌آید. بزرگنمایی تصاویر هر چه هم زیاد باشد نمی‌تواند تفکیک بیشتر یا تقویت توانایی تمایز بین این نوع خطوط طیفی نزدیک به هم ایجاد کند.

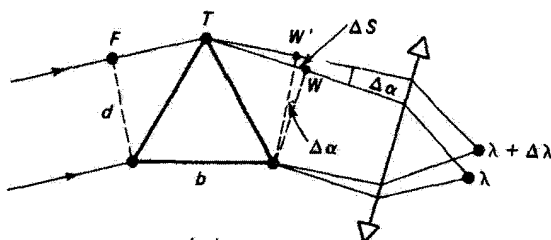
شکل ۱۱-۶ الف را در نظر بگیرید که در آن باریکه موازی تکفام نور به یک منشور فرود می‌آید به طوری که تمام وجه منشور را در بر می‌گیرد. بنابه اصل فرما، پرتو FTW با پرتو GX هم‌مدت است، زیرا هر دو از جبهه موج تخت GF شروع و به جبهه موج تخت XW ختم می‌شوند. با نسای قرار دادن راههای نوری آنها داریم

$$FT + TW = nb$$

که در آن b قاعده منشور و n ضریب شکست منشور مربوط به طول موج λ است. اما اگر یک مؤلفه طول موجی مجاور دیگر λ' در باریکه فرودی وجود داشته باشد به طوری که $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ ، این مؤلفه به ضریب شکست دیگری برابر با $n' = n - \Delta n$ مربوط می‌شود. برای پاشیدگی بهنجار، Δn یک کمیت مثبت کوچک است. بدین ترتیب، جبهه‌های موج خروجی برای این دو مؤلفه، که در شکل ۱۱-۶ ب نشان داده شده‌اند، به اندازه اختلاف زاویه‌ای کوچک $\Delta\alpha$ از هم جدا



(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۶ ترسیمهای مربوط به تعیین توان تفکیک رنگی منشور. (الف) شکست نور تکفام. (ب) شکست دو مؤلفه طول موجی با اختلاف $\Delta\lambda$.

شده‌اند و از این رو در نقاط مختلفی از صفحه کانونی شیئی دورین متمرکز می‌شوند. از کاربرد اصل فرما برای مؤلفه λ' داریم

$$FT + TW - \Delta s = (n - \Delta n)b$$

از تفریق دو معادله بالا به دست می‌آوریم

$$\Delta s = b\Delta n \quad (۱۹-۶)$$

یا، با استفاده از پاشیدگی،

$$\Delta s = b \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) \Delta \lambda \quad (۲۰-۶)$$

معادله ۲۰-۶ اختلاف راه Δs را به اختلاف طول موج $\Delta \lambda$ مربوط می‌کند. اختلاف زاویه‌ای $\Delta \alpha$ را نیز می‌توان وارد کرد:

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta s}{d} = \left(\frac{b}{d} \right) \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) \Delta \lambda \quad (۲۱-۶)$$

که در آن d پهنای باریکه است. اکنون از معیار ریلی استفاده می‌کنیم که حد تفکیک تصاویر خطی محدود از پراش را تعیین می‌کند. بعداً در بررسی پراش این معیار را توضیح می‌دهیم و آن را به‌کار می‌بریم، و نشان خواهیم داد که جدایی مینیم $\Delta\alpha$ ی دو جبهه موج به طوری که تصاویر تشکیل شده در آستانه تفکیک‌پذیری باشند، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{d} \quad (22-6)$$

بنابراین، از ترکیب معادله‌های ۲۱-۶ و ۲۲-۶ داریم

$$\frac{\lambda}{d} = \left(\frac{b}{d}\right) \left(\frac{dn}{d\lambda}\right) \Delta\lambda$$

و در نتیجه جدایی طول موج مینیم مجاز برای تصاویر تفکیک‌پذیر برابر است با

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\lambda}{b(dn/d\lambda)} \quad (23-6)$$

توان تفکیک راه دیگری برای توصیف حد تفکیک ابزار به دست می‌دهد. بنابه تعریف، توان تفکیک عبارت است از

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = b \frac{dn}{d\lambda} \quad (24-6)$$

که در آن از معادله ۲۳-۶ استفاده کرده‌ایم. چون شیشه پاشیدگی را محدود می‌کند، توان تفکیک منشور را می‌توان با زیاد کردن قاعده b بهتر کرد. اما، این روش احتیاج به منشورهای سنگین و بزرگی پیدا می‌کند که ساخت آنها عملی نیست. پاشیدگی $dn/d\lambda$ را می‌توان برای مثال با استفاده از فرمول کوشی ۱۷-۶ برای ماده منشور محاسبه کرد.

مثال

توان تفکیک و اختلاف طول موج تفکیک‌پذیر مینیم را برای منشوری از جنس شیشه فلینت و با قاعده ۵ cm تعیین کنید.

حل: می‌توانیم مقدار متوسط تقریبی پاشیدگی را به‌ازای $\lambda = 550 \text{ nm}$ محاسبه کنیم:

$$\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{n_F - n_D}{\lambda_F - \lambda_D} = \frac{1.7328 - 1.7205}{486 - 589} = -1.19 \times 10^{-4} \text{ nm}^{-1}$$

بنابراین، توان تفکیک برابر است با

$$\mathcal{R} = b \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) = (0.5 \times 10^4 \text{ nm}) (1.19 \times 10^{-4} \text{ nm}^{-1}) = 5971$$

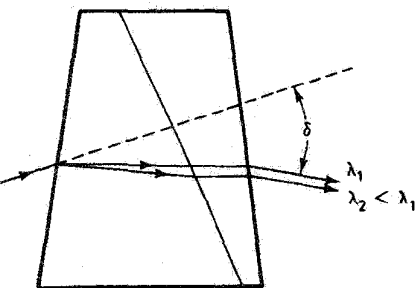
و در نتیجه اختلاف طول موج تفکیک پذیر مینیمم در ناحیه حول 550 nm برابر است با

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\lambda}{\mathcal{R}} = \frac{5550 \text{ \AA}}{5971} \cong 1 \text{ \AA}$$

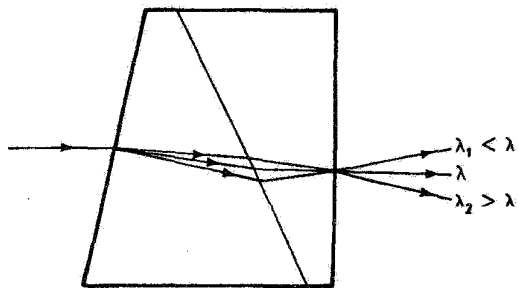
اگر چه طیف نگارهای توری توانهای تفکیک بزرگتری دارند اما عموماً نور بیشتری تلف می کنند. علاوه بر این، آنها برای یک مؤلفه طول موجی تصاویر مرتبه بالاتر را نیز ایجاد می کنند که این می تواند باعث اشتباه در تعبیر ثبتهای طیفی شود. ▲

منشورهایی با کاربردهای خاص، منشورها را می توان با هم ترکیب کرد تا یک کنش برابند پادرنگ ایجاد کنند، یعنی پاشیدگی کل برای دو طول موج معین را می توان صفر کرد حتی اگر انحراف صفر نباشد. از طرف دیگر، منشور دید مستقیم انحراف صفر برای یک طول موج معین ایجاد می کند در حالی که پاشیدگی وجود دارد. طرحهای مربوط به ترکیبهای این دو نوع منشور در شکل ۱۲-۶ نشان داده شده اند. آرایه منشورها در شکل ۱۲-۶ الف را، که طوری ترکیب شده اند که پاشیدگی ناشی از یک منشور توسط دیگری خنثی می شود، می توان همچنین وارونه کرد به طوری که پاشیدگیها با هم جمع می شوند و پاشیدگی دو برابر به دست می آید.

یک طرح منشوری که در طیفسنجها به کار می رود طرحی است که انحراف ثابتی برای تمام طول موجها در مشاهده یا آشکارسازی ایجاد می کند. یک نمونه عبارت است از منشور پلین-بروکا

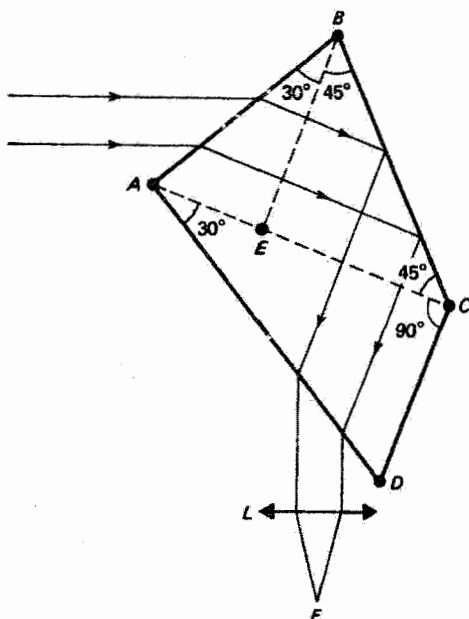


(الف) منشور پادرنگ



(ب) منشور دید مستقیم برای طول موج λ

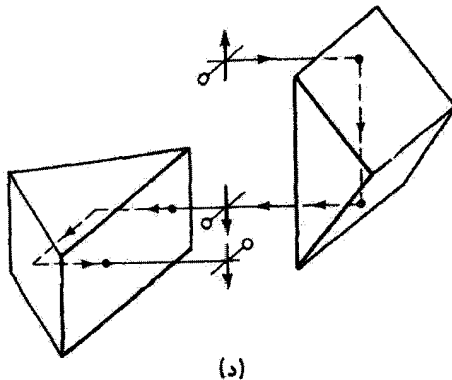
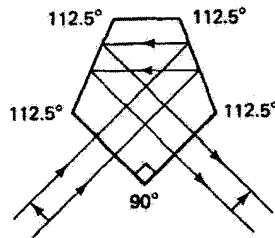
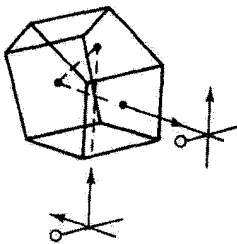
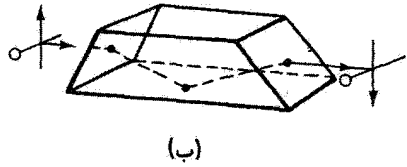
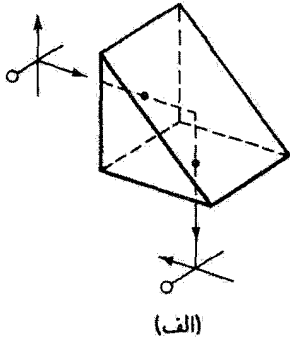
شکل ۱۲-۶ منشورهای ناپاشنده و بی انحراف.



شکل ۱۳-۶ منشور انحراف ثابت پلین-بروکا.

که در شکل ۱۳-۶ نشان داده شده است. باریکه موازی شده نور از وجه AB وارد منشور می شود و از وجه AD خارج می شود، به طوری که با راستای فرود زاویه 90° می سازد. خط چینها صرفاً برای این اضافه شده اند که به تحلیل کار منشور که ساختار واحدی دارد کمک کنند. از طول موجهای فرودی تنها یکی دقیقاً تحت زاویه ای شکست پیدا می کند که با وضعیت مینیم انحراف مطابقت دارد در حالی که، چنانکه نشان داده شده است، پرتوهای نور با قاعده منشور AE موازی هستند. در وجه BC بازتاب داخلی کلی روی می دهد و در نتیجه باریکه نور به قسمت ACD هدایت می شود و باز در اینجا تحت وضعیت مینیم انحراف عبور می کند. چون قسمت BEC صرفاً مانند آینه عمل می کند، باریکه عمدتاً با مینیم انحراف از قسمتهای ABE و ACD که مجموعاً منشوری با زاویه رأس 60° تشکیل می دهند می گذرد. در عمل، خط طیفی در F که نقطه کانونی عدسی L است مشاهده یا ثبت می شود. بدین ترتیب، می توان دوربین مشاهده را به طور ثابت مستقر کرد. به جای دوربین، منشور روی میزچه اش (یا حول محور عمود بر صفحه شکل) چرخانده می شود، و طول موجهای مختلف در باریکه فرودی طی چرخش منشور متوالیاً شرط زاویه فرود برای انحراف مینیم را برقرار می کنند و مسیری را که نشان داده شده است و به کانون F منتهی می شود به وجود می آورند. این چرخش را می توان برحسب زاویه، یا بهتر از آن برحسب طول موج، مدرج کرد.

منشور بازتاب. از منشورهای بازتاب داخلی کلی غالباً در دستگاههای اپتیکی، هم برای تغییر راستای محور اپتیکی و هم برای تغییر سمتگیری تصویر، استفاده می‌شود. البته منشور به تنهایی نمی‌تواند تصویر ایجاد کند. وقتی منشور را با عناصر تشکیل‌دهنده تصویر به‌کار می‌برند، نور فرودی به منشور را ابتدا موازی می‌کنند و برای اجتناب از ابیراهیهای منشوری در تصویر آن را بر وجه منشور



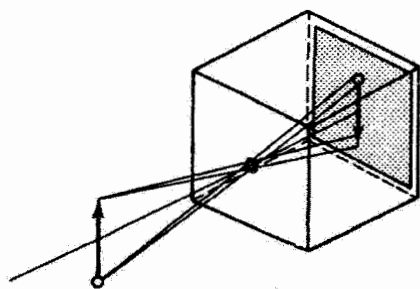
شکل ۶-۱۴ سمت‌دهی تصویر با منشورهای بازتاب. (الف) منشور قائم. (ب) منشور دوزنقه‌ای. (ج) منشور پنج‌وجهی (با مقطع پنج‌ضلعی). (د) منشور پرور.

عمود می‌کنند. به جای منشور بازتاب می‌توان از آینه تخت استفاده کرد اما وجه بازتابنده منشور را آسانتر می‌توان از آلودگی پاک کرد، و فرایند بازتاب داخلی کلی بازتابندگی بیشتری دارد. پایداری در رابطه زاویه‌ای وجوه منشور نیز می‌تواند مزیت مهمی در بعضی کاربردها باشد. چند نمونه از منشورهای بازتاب و کار آنها در شکل ۶-۱۴ نشان داده شده‌اند. منشور پورو (شکل ۶-۱۴د) از دو منشور تشکیل شده است که وجوه آنها به‌طور ناقص روبه‌روی هم قرار گرفته‌اند و نور فرودی از قسمت آزاد وجه یک منشور وارد می‌شود و نور شکسته از قسمت آزاد وجه منشور دیگر خارج می‌شود. در شکل منشورها را برای نشان دادن کار آنها جدا از هم ترسیم کرده‌ایم. این زوج منشور تصویر را هم در راستای افقی و هم در راستای قائم وارونه می‌کند، و از این رو منشور پورو عموماً در دوربینهای چشمی برای مستقیم کردن تصویر به‌کار برده می‌شود.

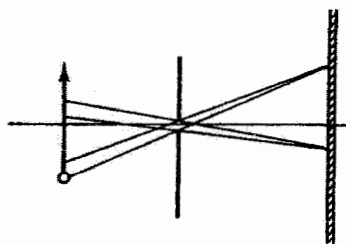
۳-۶ دوربین عکاسی

ساده‌ترین نوع دوربین عکاسی جعبه روزنه‌دار است که در شکل ۶-۱۵ الف نشان داده شده است. پرتوهای نور ناشی از شیء از راه روزنه کوچکی به یک جعبه تاریک وارد می‌شوند و تصویر شیء را روی یک قطعه فیلم عکاسی که روی دیواره مقابل نصب شده است تشکیل می‌دهند. روزنه را می‌توان با هر وسیله ساده‌ای، مثلاً یک قطعه نوار سیاه، باز و بسته کرد.

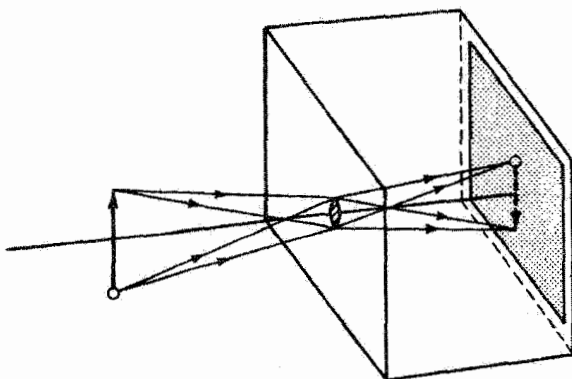
چنانکه قبلاً گفته شد، یک نقطه تصویر وقتی به‌طور ایده‌آل به‌دست می‌آید که تمام پرتوهای ناشی از نقطه شیء متناظر آن، که توسط دستگاه اپتیکی پردازش می‌شوند، در نقطه تصویر با هم تلاقی کنند. روزنه عمل تجمع انجام نمی‌دهد و عملاً اکثر پرتوهای ناشی از هر نقطه شیء مسدود می‌شوند. اما، به علت کوچکی روزنه، به هر نقطه تصویر تنها پرتوهایی می‌رسند که تقریباً از یک نقطه شیء، چنانکه در شکل ۶-۱۵ ب نشان داده شده است، ناشی می‌شوند. به عبارت دیگر، هر



(الف)



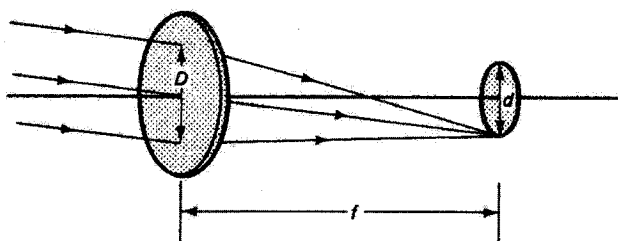
(ب)



شکل ۱۶-۶ دوربین عکاسی ساده.

نقطه شیء دسته‌ای از پرتوها را که توسط روزنه کوچک محدود می‌شوند به سمت پرده می‌فرستد و در نتیجه این پرتوها یک دایره کوچک روی پرده تشکیل می‌دهند (شکل ۱۵-۶ الف را ببینید). از روی هم افتادن این دایره‌های نور ناشی از هر نقطه شیء تصویری ظاهر می‌شود که وضوح آن بستگی به قطر تک‌تک دایره‌ها دارد. اگر این دایره‌ها خیلی بزرگ باشند تصویر حاصل تار است. اگر اندازه روزنه را به تدریج کم کنیم وضوح تصویر بهتر می‌شود تا اینکه به یک اندازه مشخص برای روزنه برسیم. وقتی روزنه را از این هم کوچکتر کنیم تصویر هر نقطه شیء به علت پراش بزرگتر می‌شود و در نتیجه تصویر بدتر خواهد شد. می‌توان از تجربه معلوم کرد که وقتی فاصله روزنه تا فیلم حدود ۲۵ cm باشد اندازه بهینه روزنه حدود ۵ mm است. خود روزنه را باید در یک جدار تا حد امکان نازک به دقت ایجاد کرد. روزنه‌ای در یک ورقه آلومینیمی، که روی یک گشودگی بزرگتر نصب می‌شود، برای این منظور کاملاً خوب است. مزیت عمده دوربین عکاسی روزنه‌ای (غیر از سادگی زیبای آن!) این است که چون هیچ میزان کردنی در کار نیست تمام اشیاء روی پرده میزان می‌شوند. به عبارت دیگر، عمق میدان این دوربین عکاسی نامحدود است. عیب عمده آن این است که چون روزنه مقدار بسیار اندکی از نور فرودی را عبور می‌دهد، مدت نوردهی باید زیاد باشد. دوربین عکاسی روزنه‌ای برای ثبت تصویر اشیاء متحرک به‌کار نمی‌آید. فاصله روزنه تا فیلم روی وضوح تصویر و میدان دید اثر می‌گذارد. اگر این فاصله را کم کنیم گشودگی زاویه‌ای در برابر فیلم بزرگ می‌شود، و در نتیجه قسمت بیشتری از صحنه ثبت می‌شود اما با کاهش متناظری در اندازه اجزاء صحنه همراه است. همچنین، اندازه دایره‌های تصویر کم می‌شود و در نتیجه تصویر روشنتری به دست می‌آید.

اگر دهانه روزنه را چنان بزرگ بگیریم که بتوانیم یک عدسی همگرا در آن نصب کنیم، عناصر اصلی دوربین عکاسی معمولی را در اختیار داریم (شکل ۱۶-۶). آنی‌ترین فواید این تغییر عبارت‌اند



شکل ۶-۱۷ روشنائی تصویر. گشودگی (که نشان داده نشده است) قطر مفید D عدسی را تعیین می‌کند.

از (۱) افزایش روشنائی تصویر به علت تجمع تمام پرتوهای ناشی از هر نقطه شیء در نقطه تصویر همیوخ آن، و (۲) افزایش وضوح تصویر که این نیز به علت توان کانونی کردن عدسی است. فاصله عدسی تا فیلم اکنون مهم است و به فاصله شیء و فاصله کانونی عدسی بستگی دارد. برای اشیاء دور، فیلم باید در صفحه کانونی عدسی قرار داشته باشد. برای اشیاء نزدیکتر، کانون در پشت فیلم واقع می‌شود. چون صفحه فیلم ثابت است، با دور کردن عدسی از فیلم، یعنی با "میزان کردن" دوربین عکاسی، تصویری واضح به دست می‌آید. دورترین مکان ممکن عدسی تعیین‌کننده نزدیکترین فاصله اشیائی است که می‌توان از آنها با این دوربین عکاسی عکس گرفت. "نمای نزدیک" را می‌توان با استفاده از یک عدسی با فاصله کانونی کوچکتر فراهم کرد. بدین ترتیب، فاصله کانونی عدسی مساحتی از صحنه را که در عکس می‌افتد و اندازه تصویر مربوط را تعیین می‌کند. به طور کلی، اندازه تصویر متناسب با فاصله کانونی است. یک عدسی بزرگ زاویه دارای فاصله کانونی کوچک با میدان دید بزرگ است. عدسی دورنما (تله فوتو) دارای فاصله کانونی زیاد است و بزرگنمایی را زیاد و میدان دید را کم می‌کند. با عدسی دورنما، متشکل از یک عدسی مثبت و یک عدسی منفی جدا از آن با فاصله کانونی کمتر به طوری که ترکیب آنها مثبت است، دیگر نیازی به دوربین عکاسی "دراز" نیست. همچنین، آنچه در کار دوربین عکاسی اهمیت دارد اندازه گشودگی آن است که از آنجا نور به فیلم می‌رسد. در بیشتر دوربینهای عکاسی، این گشودگی قابل تغییر است و آن را با زمان نوردهی (سرعت بستاور) برای تعیین مدت زمان کلی که فیلم در معرض نور صحنه است هم‌آهنگ می‌کنند. توان نور فرودی در صفحه تصویر (تاییدگی) E_e برحسب وات بر مترمربع) به طور مستقیم به مساحت گشودگی و به طور معکوس به اندازه تصویر بستگی دارد. اگر، مانند شکل ۶-۱۷، گشودگی یک دایره به قطر D باشد و انرژی نور فرضاً روی دایره تصویر متناظر، به قطر d ، به طور یکنواخت توزیع شده باشد، آنگاه

$$E_e \propto \frac{\text{مساحت گشودگی}}{\text{مساحت تصویر}} = \frac{D^2}{d^2} \quad (۲۵-۶)$$

اندازه تصویر، همچون در شکل ۶-۱۷، با فاصله کانونی عدسی متناسب است، و در نتیجه می توان نوشت

$$E_e \propto \left(\frac{D}{f}\right)^2 \quad (۲۶-۶)$$

کمیت f/D گشودگی نسبی عدسی است (که عدد f یا " f بر مانع" نیز نامیده می شود) و آن را با حرف A نشان می دهیم:

$$A \equiv \frac{f}{D} \quad (۲۷-۶)$$

اما متناسبانه این کمیت را معمولاً با نماد f/A مشخص می کنند. برای مثال، یک عدسی با فاصله کانونی ۴ cm که با گشودگی ۵ره سانتیمتری محدود شده است دارای گشودگی نسبی $A = ۴/۰۵ = ۸$ است. این گشودگی نسبی را عکاسان معمولاً با $f/۸$ بیان می کنند. اکنون تاییدگی عبارت است از

$$E_e \propto \frac{1}{A^2} \quad (۲۸-۶)$$

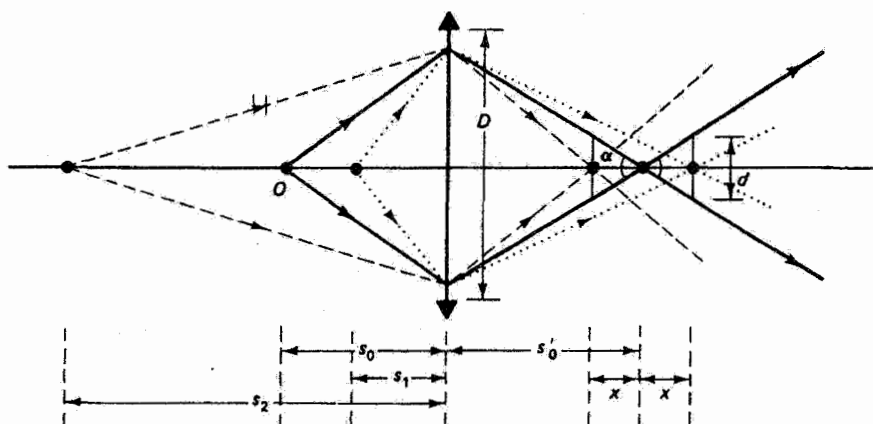
در بیشتر دوربینهای عکاسی می توان گشودگی را به طور متوالی در هر مرحله با ضریب ۲ تغییر داد. بنابراین، اعداد f متناظر، چنانکه از جدول ۶-۲ دیده می شود، یک رشته هندسی با قدر نسبت $\sqrt{2}$ تشکیل می دهند. اعداد گشودگی بزرگتر با نوردهیهای کوچکتر متناظراند. چون نوردهی کل (J/m^2) مربوط به فیلم بستگی به حاصلضرب تاییدگی (J/m^2s) و زمان (s) دارد، یک نوردهی کل مطلوب را می توان از راههای مختلفی به دست آورد. بنابراین، اگر یک فیلم به خصوص (که سرعت آن با یک عدد استاندارد توصیف می شود) کاملاً در معرض نور ناشی از یک صحنه به خصوص با سرعت بستاور $1/50$ s و گشودگی نسبی $f/8$ قرار گیرد، این فیلم همچنین با هر ترکیب دیگری که همین نوردهی کل را به دست می دهد، مثلاً با انتخاب سرعت بستاور $1/100$ s و گشودگی $f/56$ ، کاملاً نور می گیرد. این تغییر سرعت بستاور نوردهی کل را نصف می کند اما گذاشتن گشودگی روی " f بر مانع" بعدی گشودگی را دو برابر می کند، و در نتیجه نوردهی کل ثابت می ماند.

ترکیب خاصی از سرعت بستاور و گشودگی نسبی برای به دست آوردن یک نوردهی کل بهینه همیشه اختیاری نیست. البته برای عکسبرداری از یک صحنه متحرک بدون خراب شدن تصویر، باید سرعت بستاور زیاد باشد. انتخاب گشودگی نسبی همچنین روی ویژگی دیگری از تصویر یعنی

جدول ۲-۶ گشودگیهای نسبی استاندارد و تاییدگی ثبت شده روی دوربینهای عکاسی

E_e	A^2	A (عدد f)
E_e	۱	۱
$E_e/2$	۲	۱٫۴
$E_e/4$	۴	۲
$E_e/8$	۸	۲٫۸
$E_e/16$	۱۶	۴
$E_e/32$	۳۲	۵٫۶
$E_e/64$	۶۴	۸
$E_e/128$	۱۲۸	۱۱
$E_e/256$	۲۵۶	۱۶
$E_e/512$	۵۱۲	۲۲

عمق میدان اثر می‌گذارد. برای تعریف دقیق این کمیت، از شکل ۶-۱۸ استفاده می‌کنیم که یک نقطه شیء محوری در فاصله s_0 از عدسی و تصویر آن را در فاصله s'_0 در سمت دیگر نشان



شکل ۶-۱۸ ترسیم برای نمایش عمق میدان. فضاهاى شیء و تصویر با یک مقیاس نشان داده نشده‌اند.

می دهد. ابیراهیهای عدسی هر چه باشند، تمام اشیاء در صفحه شیء دقیقاً در صفحه تصویر میزان می شوند. اما اشیائی که به عدسی نزدیکتر یا دورتر باشند دسته پرتوهای می فرستند که به ترتیب دورتر یا نزدیکتر از صفحه تصویر متمرکز می شوند. بنابراین، یک فیلم تخت واقع در فاصله s'_0 از عدسی دایره های کمترین تاری مربوط به این نقاط شیء را قطع می کند. اگر قطر این دایره ها به اندازه کافی کوچک باشد، تصویر حاصل هنوز قابل قبول است. فرض کنید بزرگترین قطر قابل قبول، چنانکه نشان داده شده است، d باشد به طوری که تمام تصاویری که در محدوده x از تصویر دقیق واقع می شوند به طور مناسبی "میزان" شده اند. بدین ترتیب، عمق میدان عبارت است از بازه ای در فضای شیء که، چنانکه نشان داده شده است، همیوخ بازه $s'_0 - x$ تا $s'_0 + x$ است. توجه کنید که اگر چه بازه اخیر در فضای تصویر حول s'_0 متقارن است اما بازه عمق میدان حول s_0 متقارن نیست.

پس از انتخاب پارامتر پخشیدگی مجاز d و مشخص کردن عدسی با فاصله کانونی و گشودگی نسبی، می توان فواصل نقطه نزدیک و نقطه دور عمق میدان، به ترتیب s_1 و s_2 را تعیین کرد. زاویه α در شکل ۱۸-۶ از دو راه تعیین می شود:

$$\tan \alpha \cong \frac{D}{s'_0} \quad \text{و} \quad \tan \alpha \cong \frac{d}{x}$$

و در نتیجه

$$x \cong \frac{ds'_0}{D} \quad (29-6)$$

آنگاه باید از معادله عدسی فاصله شیء s_1 متناظر با فاصله تصویر $s'_0 + d$ و فاصله شیء s_2 متناظر با فاصله تصویر $s'_0 - x$ را تعیین کنیم. پس از عملیات جبری لازم، به دست می آوریم

$$s_1 = \frac{s_0 f (f + Ad)}{f^2 + Ads_0} \quad (30-6)$$

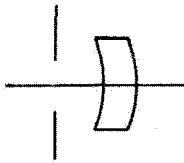
$$s_2 = \frac{s_0 f (f - Ad)}{f^2 - Ads_0} \quad (31-6)$$

که در آن گشودگی برابر است با $A = f/D$. عمق میدان $s_2 - s_1$ را می توان به صورت زیر بیان کرد

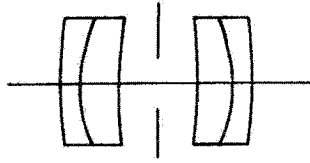
$$\text{عمق میدان} = \frac{2 \text{Ads}_0 (s_0 - f) f^2}{f^2 - A^2 d^2 s_0^2} \quad (۳۲-۶)$$

مقادیر قابل قبول قطر دایره d بستگی به کیفیت عکس مورد نظر دارد. برای اسلایدی که روی پرده انداخته می‌شود یا نگاتیوی که باید بزرگ شود، جزئیات دقیقتر و در نتیجه مقدار کمتری برای d لازم است. برای بیشتر عکسبرداریها، d از مرتبه چند هزارم سانتیمتر است. به عنوان مثال، فرض کنید $d = 0.04 \text{ mm}$. یک عدسی با فاصله کانونی 5 cm و گشودگی $f/16$ که برای میزان شدن روی یک شیء به فاصله حدود 27 cm به کار می‌رود تمام اشیاء از حدود 15 cm تا 90 cm را با درجه قابل قبولی میزان می‌کند. بیشتر دوربینهای عکاسی مجهز به مقیاس عمق میدان هستند که از روی آن، پس از انتخاب فاصله شیء و گشودگی، می‌توانیم مقادیر s_1 و s_2 را بخوانیم. بنابه معادله ۶-۳۲، برای گشودگیهای کوچکتر (اعداد f بزرگتر)، فواصل کانونی کوچکتر و فواصل عکسبرداری بزرگتر، عمق میدان بزرگتر است.

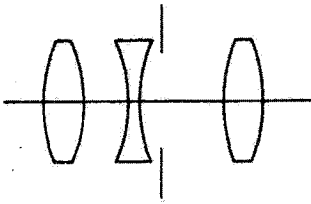
عدسی دوربین عکاسی باید کار حیرت‌انگیزی انجام دهد. این عدسی باید یک عمق میدان بزرگ، در گستره 35° تا 65° برای عدسیهای معمولی و تا 120° یا بیشتر برای عدسیهای بزرگ‌زاویه، فراهم کند. این تصویر باید در تمام سطح فیلم در صفحه کانونی میزان باشد و ابیراهیهای آن تا حد معقولی اصلاح شود. ابیراهیایی که باید تا حد قابل قبولی کاهش یابند، علاوه بر ابیراهی رنگی، عبارت‌اند از پنج ابیراهی تکفام: ابیراهی کروی، کوما، آستیگماتیسم، انحنای میدان، و وایپچس. چون هر تصحیحی در یک نوع ابیراهی غالباً منجر به خرابتر شدن تصویر به علت نوع دیگری از ابیراهی می‌شود، راه حل اپتیکی استفاده از ترکیب مناسبی از انواع عدسیها است. مشکلات موجود در طراحی یک عدسی مناسب که ویژگیهای به‌خصوصی در حدهای قابل قبول داشته باشد با استفاده از برنامه‌نویسی رایانه‌ای به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. با این همه، نبوغ انسانی یک مؤلفه ضروری در کار طراحی است، زیرا بسیار بیشتر از یک راه حل برای یک مجموعه معین از ویژگیها وجود دارد. تمام انتظاراتی را که از یک عدسی عکاسی داریم نمی‌توان با استفاده از تنها یک عنصر برآورده کرد. مراحل مختلف در حل مسئله طراحی عدسی در شکل ۶-۱۹ الف نشان داده شده‌اند: از عدسی هلالی تک‌عنصری، که هنوز می‌توان آن را در دوربینهای عکاسی ساده پیدا کرد، تا عدسی تسار چهار عنصری. استفاده از جاگذاری متقارن عدسیها، یا گروههای عدسی، نسبت به گشودگی غالباً ویژگی مشخصه این نوع طراحیهای عدسی است. در این نوع جاگذاری، یک گروه عدسی ابیراهیهای ناشی از گروهی دیگر را وارونه می‌کند، و در نتیجه خرابی تصویر ناشی از عواملی مانند کوما، وایپچس، و ابیراهی رنگی عرضی در کل کاهش می‌یابد. عدسی چند عنصری در یک دوربین عکاسی ۳۵ میلیمتری جدید در تصویر برشی شکل ۶-۱۹ ب نشان داده شده است.



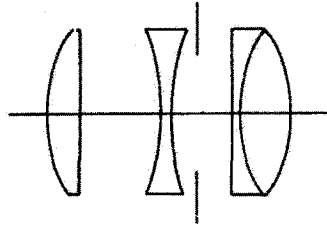
عدسی هلالی منفرد



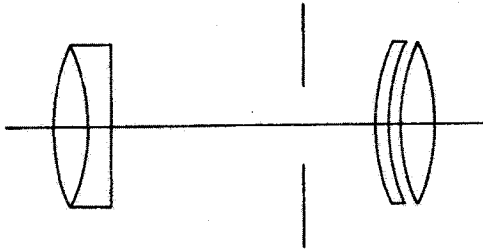
عدسی دوتایی پادرنگ



سه‌تایی کوچک

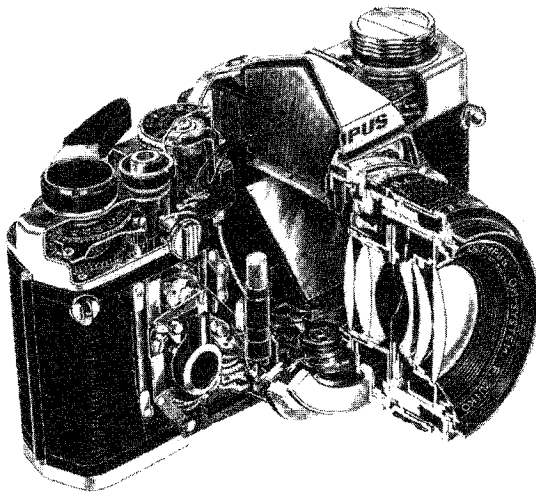


تسار



پتزوال

(الف)



(ب)

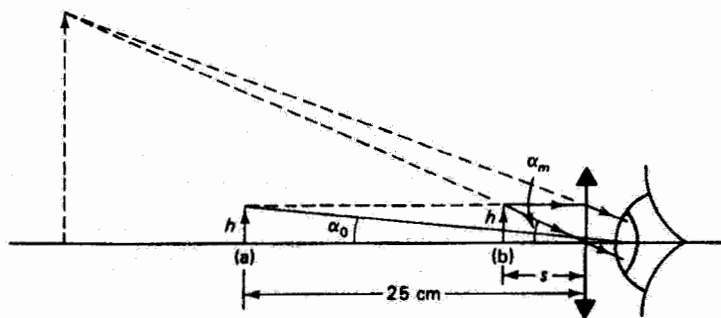
شکل ۱۹-۶ (الف) طراحی عدسی دوربین عکاسی. (ب) نمای برشی یک دوربین عکاسی ۳۵ میلیمتری جدید، که عدسی چند عنصری را نشان می‌دهد.

۴-۶ ذره‌بین و چشمی

ذره‌بین معمولی اساساً یک عدسی مثبت است که برای خواندن حروف کوچک، که در این صورت آن را غالباً عینک مطالعه می‌نامند، یا برای کمک به چشم در معاینه جزئیات یک شیء حقیقی به‌کار می‌رود. ذره‌بین غالباً یک عدسی محدب ساده است اما می‌تواند یک عدسی دوتایی یا سه‌تایی باشد که در نتیجه تصاویری با کیفیت بهتر فراهم می‌کند.

شکل ۴-۶ اصول کار ذره‌بین ساده را نشان می‌دهد. وقتی با چشم غیرمسلح به یک شیء با اندازه h نگاه می‌کنیم، این شیء بنابه فرض در نقطه نزدیک چشم عادی - نزدیکترین مکان برای دید واضح - واقع است که در شکل با (a) مشخص شده است و ۲۵ cm از چشم فاصله دارد. در این مکان، شیء زاویه α_0 در چشم می‌سازد. برای اینکه تصویر بزرگتری روی شبکیه بیفتد، ذره‌بین ساده را بین چشم و شیء می‌گذاریم و شیء را به مکان نزدیکتر (b) می‌آوریم که روی نقطه کانونی عدسی یا از داخل متصل به آن است. در این مکان، عدسی تصویری مجازی که زاویه بزرگتر α_M را در چشم می‌سازد تشکیل می‌دهد. بزرگنمایی زاویه‌ای ذره‌بین ساده بنابه تعریف برابر است با α_M/α_0 . در تقریب پیرامحوری، این زاویه‌ها را می‌توان با تانژانت آنها نمایش داد و در نتیجه داریم

$$\frac{\alpha_M}{\alpha_0} = \frac{h/s}{h/25} = \frac{25}{s}$$



شکل ۴-۶ طرز کار ذره‌بین ساده.

۱. وقتی با ابزارهای اپتیکی به تصاویر مجازی نگاه می‌کنیم، این تصاویر ممکن است بسیار دور حتی در "بینهایت" باشند، یعنی وقتی پرتوهای ورودی به چشم با هم موازی هستند. در این‌گونه موارد، بزرگنمایی خطی نیز به بینهایت میل می‌کند و چندان مفید نیست. کمیت مناسبتر عبارت است از بزرگنمایی زاویه‌ای که معرف اندازه تصویر است که روی شبکیه تشکیل می‌شود و برای چشمی، مثلاً در میکروسکوپ یا تلسکوپ، به‌کار می‌رود.

اگر تصویر در بینهایت دیده شود، $s = f$ و

$$M = \frac{25}{f} \quad \text{تصویر در بینهایت} \quad (۳۳-۶)$$

در حد دیگر، اگر تصویر مجازی در نقطه نزدیک چشم دیده شود، آنگاه $s' = -25 \text{ cm}$ ، و از معادله عدسی نازک داریم

$$s = \frac{25f}{25 + f}$$

که بزرگنمایی زیر را به دست می دهد

$$M = \frac{25}{f} + 1 \quad \text{تصویر در نقطه نزدیک عادی} \quad (۳۴-۶)$$

بنابراین، بزرگنمایی زاویه ای واقعی بستگی به بیننده دارد که ذره بین ساده را جابه جا می کند تا تصویر مجازی را به آسودگی ببیند. برای فواصل کانونی کوچک، معادله های ۳۳-۶ و ۳۴-۶ اختلاف زیادی با هم ندارند، و برای بزرگنمایی اکثراً معادله ۳۳-۶ به کار برده می شود. ذره بینهای ساده دارای بزرگنماییهای در گستره $2 \times$ تا $10 \times$ هستند، و برای رسیدن به بزرگنماییهای بیشتر معمولاً باید از عدسیهای با تصحیح ابیراهی استفاده کنیم.

به طور کلی، وقتی از ذره بین برای دیدن تصویر حاصل از اجزاء مقدم دستگاه اپتیکی استفاده شود آن را عدسی چشمی یا آکولار می نامند. برای مثال، تصویر حقیقی حاصل از عدسی شیئی یک میکروسکوپ به منزله شیء برای چشمی آن است، و بزرگنمایی زاویه ای این چشمی در بزرگنمایی کل ابزار سهیم است. برای تشکیل تصاویری با کیفیت خوب، باید ابیراهیهای چشمی مخصوصاً ابیراهی رنگی عرضی را کاهش داد. برای این تصحیح، اکثراً از دو عدسی استفاده می کنند. قبلاً نشان دادیم که فاصله کانونی مؤثر f (که نسبت به صفحه های اصلی اندازه گیری می شود) برای دو عدسی نازک به فاصله L از یکدیگر، با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2} \quad (۳۵-۶)$$

که در آن f_1 و f_2 فاصله های کانونی هر یک از عدسیها است. بنابه فرمول عدسی سازان، برای عدسیهایی که از یک شیشه ساخته شده اند داریم

$$\frac{1}{f_1} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right) = (n - 1) K_1 \quad (۳۶-۶)$$

$$\frac{1}{f_r} = (n-1) \left(\frac{1}{R_{r1}} - \frac{1}{R_{r2}} \right) = (n-1)K_r \quad (37-6)$$

که در آنها عبارتهای شامل شعاعهای انحنای سطوح عدسیها در پراوتزها به ترتیب با ثابتهای K_1 و K_2 نشان داده شده‌اند. با جاگذاری معادله‌های ۳۶-۶ و ۳۷-۶ در معادله ۳۵-۶، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{f} = (n-1)K_1 + (n-1)K_2 - L(n-1)^2 K_1 K_2 \quad (38-6)$$

برای تصحیح ابیراهی رنگی عرضی، باید فاصله کانونی مؤثر زوج عدسی مستقل از ضریب شکست باشد،^۱ یعنی

$$\frac{d(1/f)}{dn} = 0$$

از معادله ۳۸-۶ داریم

$$\frac{d(1/f)}{dn} = K_1 + K_2 - 2LK_1 K_2 (n-1) = 0$$

بنابراین، وقتی این شرط برقرار می‌شود که فاصله عدسیها از یکدیگر برابر باشد با

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_1(n-1)} + \frac{1}{K_2(n-1)} \right]$$

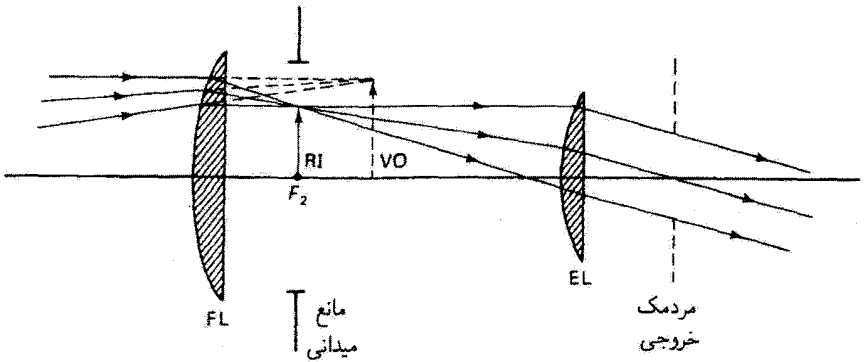
یا به عبارت ساده‌تر، وقتی که

$$L = \frac{1}{2} (f_1 + f_2) \quad (39-6)$$

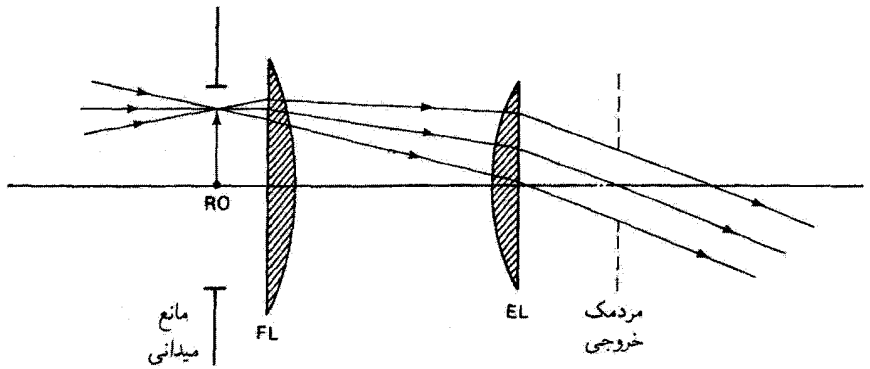
اعتبار این شرط مستقل از شکل عدسیها است، و در نتیجه با انتخاب شکلهای مختلف می‌توان سایر ابیراهیا را تصحیح کرد.

چشمی هویگنس و چشمی رامسدن، که به ترتیب در شکلهای ۲۱-۶ و ۲۲-۶ نشان داده

۱. مقداری ابیراهی رنگی طولی باقی می‌ماند زیرا صفحه‌های اصلی دستگاه برهم منطبق نیستند. به شکل ۱۴-۵ و بحث مربوط به آن مراجعه کنید.

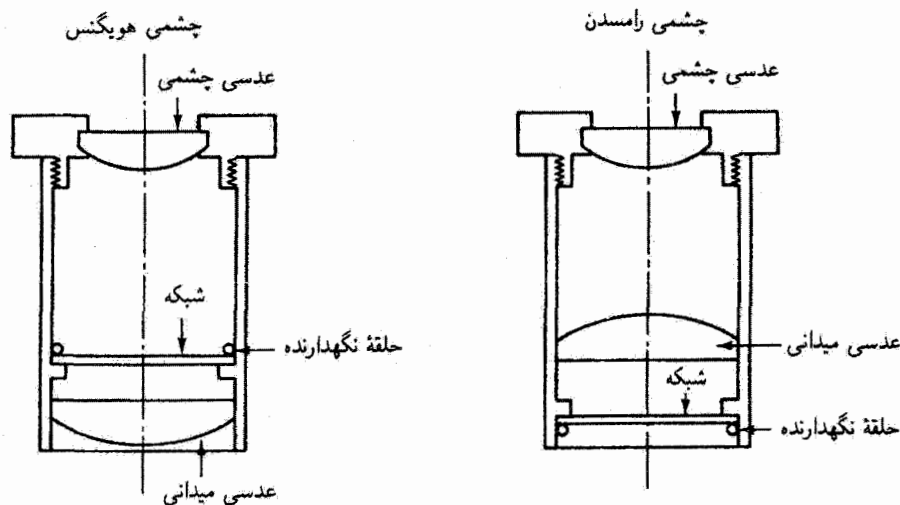


شکل ۲۱-۶ چشمی هویگنس.



شکل ۲۲-۶ چشمی رامسندن.

شده‌اند، ویژگی لازم از معادله ۳۹-۶ برای طراحی را در بردارند، یعنی فاصله عدسیهای تخت‌کوز از یکدیگر به اندازه نصف مجموع فواصل کانونی آنها است. در نمودار شکل ۲۱-۶، فاصله کانونی عدسی میدانی FL تقریباً ۱٫۷ برابر فاصله کانونی عدسی چشمی EL است. در این مورد، تصویر اولیه‌ای که چشمی "مشاهده می‌کند" یک شیء مجازی (VO) برای عدسی میدانی است زیرا مکان مجازی آن بین عدسیها واقع است. بنابراین، عدسی میدانی یک تصویر حقیقی (RI) تشکیل می‌دهد که توسط عدسی چشمی دیده می‌شود. وقتی این تصویر حقیقی در صفحه کانونی عدسی چشمی واقع باشد، چشم واقع در مردمک خروجی تصویر بزرگ شده را در بینهایت می‌بیند. توجه کنید که نمی‌توان چشمی هویگنس را به عنوان یک ذره بین معمولی به کار برد. اگر از تارهای قائم یا



شکل ۶-۲۳ ترسیم چشمیهای هویگنس و رامسدن.

شبكة مدرج برای اندازه‌گیری کمتی در چشمی استفاده شود، تارهای قائم برای اینکه با تصویر میزان باشند باید در صفحه کانونی مربوط به RI ، که مناسب است به مانع روزنه‌ای یا میدانی واقع در آنجا متصل شود (شکل ۶-۲۳)، قرار داده شوند. اما، تصویر تارهای قائم در کیفیت تصویر که کل چشمی فراهم می‌کند سهیم نیستند زیرا عدسی چشمی به تنهایی در تشکیل این تصویر دخالت دارد. در چشمی رامسدن، شکل ۶-۲۲، که در آن تصاویر اولیه و میدانی درست در جلو عدسی میدانی واقع می‌شوند، با این مسئله مواجه نیستیم. در این چشمی عدسیها دارای فاصله کانونی یکسان f هستند، و بنابه معادله ۶-۳۹ فاصله آنها از یکدیگر برابر با f است. پرتوها به طور ایده‌آل موازی با هم از چشمی خارج می‌شوند، و یک تصویر بزرگ شده مجازی در بینهایت به دست می‌دهند اگر شیء حقیقی RO در مکان عدسی اول واقع باشد. شبکه در این نقطه قرار داده می‌شود. عیب این آرایه، در این صورت، این است که سطح عدسی، همراه با غبار و لکه‌هایش، نیز کانونی شده است. اگر فاصله عدسیها را اندکی کوچکتر از f انتخاب کنیم، شبکه در مکانی در جلو این عدسی و به فاصله کم از آن، چنانکه در نمودار پرتو و در شکل ۶-۲۳ نشان داده شده است، کانونی می‌شود. اما، اگر فاصله عدسیها تا اندازه‌ای کمتر از f باشد، شرط روی L برای تصحیح ابیراهی رنگی عرضی تا اندازه‌ای به هم می‌خورد. اصلاح شده چشمی رامسدن که نقایص رنگی را تقریباً حذف می‌کند چشمی کلنر است که در آن یک دوتایی پادرنگ به جای عدسی چشمی رامسدن نشسته است. چشمیهای دیگری نیز برای به دست آوردن بزرگنماییهای بیشتر و میدانهای وسیعتر طراحی شده‌اند.

مثال

در یک چشمی هویگنس از دو عدسی با فاصله‌های کانونی 6.25 cm و 2.50 cm استفاده شده است. فاصله بهینه برای کاهش ابیراهی رنگی، فاصله کانونی معادل و بزرگنمایی زاویه‌ای آنها را وقتی تصویر در بینهایت دیده می‌شود به دست آورید.

حل: فاصله بهینه برابر است با

$$L = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} (6.25 + 2.50) = 4.375\text{ cm}$$

فاصله کانونی معادل از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2} = \frac{1}{6.25} + \frac{1}{2.50} - \frac{4.375}{(6.25)(2.50)}$$

و در نتیجه $f = 3.57\text{ cm}$. بزرگنمایی زاویه‌ای برابر است با

$$M = \frac{25}{f} = \frac{25}{3.57} = 7$$

در طراحی چشمیها معمولاً مردمک خروجی باید از اندازه مردمک چشم زیاد بزرگتر نباشد تا تابندگی تلف نشود. یادآوری می‌کنیم که مردمک خروجی تصویر مردمک ورودی است که توسط چشمی تشکیل می‌شود و نسبت قطرهای مردمکهای ورودی به خروجی برابر با بزرگنمایی است. چون مردمک ورودی توسط عناصر مقدم در دستگاه اپتیکی تعیین می‌شود (قطر عدسی شیئی در یک تلسکوپ ساده)، این شرط حدی برای توان بزرگنمایی چشمی و در نتیجه حد پایینی برای فاصله کانونی به دست می‌دهد.

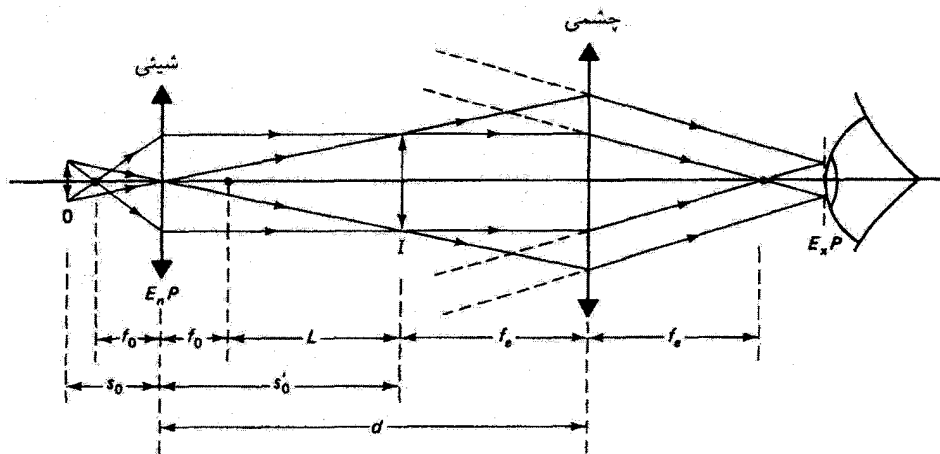
ویژگیهای مهم یک چشمی، با فرض اینکه ابیراهیهای آن در حدهای قابل قبولی برای یک کاربرد خاص قرار دارند، عبارت‌اند از

۱. بزرگنمایی زاویه‌ای که با $25/f$ داده می‌شود و در آن f فاصله کانونی برحسب سانتیمتر است. مقادیر قابل حصول از $4\times$ تا $25\times$ ، متناظر با فاصله‌های کانونی 6.25 cm تا 1 cm هستند.
۲. چشم‌آسودگی، یعنی فاصله از عدسی چشمی تا مردمک خروجی. چشمیهای موجود دارای چشم‌آسودگیهایی در گستره 6 mm تا 26 mm هستند.
۳. عدد میدان دید، یا اندازه تصویر اولیه که چشمی می‌تواند پوشش دهد، در گستره 6 mm تا 30 mm .

۵-۶ میکروسکوپ

بزرگنمایی اشیاء کوچک که با ذره‌بین ساده به دست می‌آید در میکروسکوپ مرکب زیادتر می‌شود. این ابزار در ساده‌ترین نوع آن از دو عدسی مثبت تشکیل شده است که یکی عدسی شیئی با فاصله کانونی کوچک است که در برابر شیء قرار می‌گیرد و دیگری ذره‌بینی است که به منزله چشمی کار می‌کند. این چشمی به تصویر حقیقی حاصل از عدسی شیئی "نگاه می‌کند". با توجه به شکل ۶-۲۴، که در آن شیء خارج از فاصله کانونی f مربوط به شیئی قرار دارد، تصویر حقیقی I در لوله میکروسکوپ تشکیل می‌شود. پرتوهای نور پس از تجمع به چشمی می‌رسند. برای مشاهدات عینی، باید تصویری میانی در نقطه کانونی اول چشمی یا درست پس از آن تشکیل شود. آنگاه چشم که نزدیک چشمی قرار دارد تصویری مجازی، وارونه و بزرگ شده، مطابق شکل، می‌بیند. عدسی شیئی کار مردمک ورودی این دستگاه اپتیکی را انجام می‌دهد. بنابراین، تصویر شیئی در چشمی همان مردمک خروجی است که مکان چگالی انرژی تابشی ماکسیمم و در نتیجه مکان بهینه برای مردمک ورودی چشم را تعیین می‌کند. یک گشودگی مخصوص، که به منزله مانع میدانی کار می‌کند، در مکان تصویر میانی قرار داده می‌شود. بنابراین، چشم هر دو را با هم کانونی می‌بیند، و این باعث ایجاد مرز کاملاً معینی برای میدان دید می‌شود. اگر یک دوربین عکاسی روی میکروسکوپ سوار کنیم، یک تصویر نهایی حقیقی به دست می‌آید. در این مورد، تصویر میانی باید خارج از فاصله کانونی f_2 چشمی واقع شود.

بزرگنمایی کل. وقتی با چشم به تصویر نهایی نگاه کنیم، بزرگنمایی میکروسکوپ را می‌توان مانند مورد ذره‌بین ساده تعریف کرد. بدین ترتیب، بزرگنمایی زاویه‌ای برای تصویری که در بینهایت دیده



شکل ۶-۲۴ تشکیل تصویر در میکروسکوپ مرکب.

می‌شود عبارت است از

$$M = \frac{25}{f_z} \quad (40-ع)$$

که در آن f_z (برحسب سانتیمتر) فاصله کانونی مؤثر دو عدسی، به فاصله d از یکدیگر، است که با معادله ۴-۳۲ داده می‌شود، یا

$$\frac{1}{f_z} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{f_e} - \frac{d}{f_o f_e} \quad (41-ع)$$

با جاگذاری ۴۱-ع در ۴۰-ع، به دست می‌آوریم

$$M = \frac{25(f_e + f_o - d)}{f_o f_e} \quad (42-ع)$$

اما با استفاده از معادله عدسی نازک می‌توانیم نسبت فاصله شیء به تصویر را برای عدسی شیئی به صورت زیر بیان کنیم

$$\frac{s'_o}{s_o} = \frac{d - f_e - f_o}{f_o} \quad (43-ع)$$

که در آن از $s'_o = d - f_e - f_o$ ، که از شکل آشکار است، استفاده کرده‌ایم. از جاگذاری معادله ۴۳-ع در ۴۲-ع داریم

$$M = -\frac{25s'_o}{f_e s_o} \quad (44-ع)$$

که نشان می‌دهد بزرگنمایی کل برابر است با حاصلضرب بزرگنمایی خطی شیئی و بزرگنمایی زاویه‌ای چشمی وقتی تصویر نهایی در بینهایت دیده شود. علامت منفی به معنی تصویر وارونه است. با استفاده از فرمول نیوتون برای بزرگنمایی عدسی نازک (معادله ۳-۳۵) داریم

$$m = \frac{x'_o}{f_o} = \frac{L}{f_o} \quad (45-ع)$$

که در آن L ، چنانکه در شکل نشان داده شده است، فاصله بین تصویر شیئی و نقطه کانونی دوم آن است. بنابراین، بزرگنمایی میکروسکوپ را می‌توان به صورت زیر، که شاید مناسبتر باشد، بیان کرد

$$M = -\left(\frac{25}{f_e}\right) \left(\frac{L}{f_o}\right) \quad (46-ع)$$

در بسیاری از میکروسکوپها، طول L به اندازه ۱۶ cm به عنوان استاندارد انتخاب شده است. f_e و f_o در واقع فاصله‌های کانونی مؤثر عدسیهای چندعنصری هستند، که به طور مناسبی برای ابیراهیها تصحیح شده‌اند.

مثال

میکروسکوپی دارای یک شیئی با فاصله کانونی ۳۸ cm و یک چشمی با فاصله کانونی ۵ cm است. اگر فاصله بین دو عدسی ۱۶۴ cm باشد، بزرگنمایی میکروسکوپ را به دست آورید.

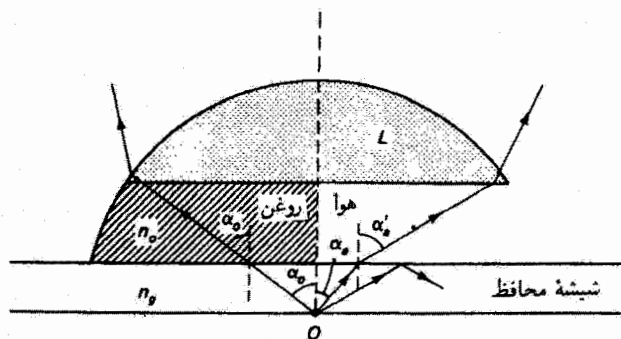
حل:

$$L = d - f_o - f_e = ۱۶۴ - ۳۸ - ۵ = ۷۶\text{ cm}$$

و

$$\blacktriangle M = - \left(\frac{۲۵}{f_e} \right) \left(\frac{L}{f_o} \right) = - \left(\frac{۲۵}{۵} \right) \left(\frac{۷۶}{۳۸} \right) = -۱۰$$

گشودگی عددی. برای جمع‌آوری نور بیشتر و تشکیل تصویر روشنتر، مخروط پرتوهای ناشی از شیء، که توسط عدسی شیئی قطع می‌شود، باید تا حد امکان بزرگ باشد. با افزایش بزرگنمایی در نتیجه کاهش فاصله کانونی و قطر عدسی شیئی، زاویه فضایی پرتوهای مفید ناشی از شیء نیز کاهش می‌یابد. مطابق شکل ۲۵-۶، پرتوهای مفید نور ناشی از نقطه شیء O ، که از یک شیشه محافظ نازک و سپس هوا عبور می‌کنند و به اولین عنصر عدسی شیئی L می‌رسند، نیم‌زاویه α_a



شکل ۲۵-۶ شیئی میکروسکوپ، با نمایش توان جمع‌آوری نور افزایش یافته یک عدسی غوطه‌ور در روغن.

در سمت راست محور اپتیکی می‌سازند. به علت شکست در سطح جدایی شیشه-هوا، پرتوهایی که زاویه‌های بزرگتر از α_a می‌سازند به عدسی نمی‌رسند. این محدودیت با استفاده از یک مایع شفاف واسطه که ضریب شکست آن تا حد ممکن با ضریب شکست شیشه تطبیق می‌کند تا اندازه‌ای رفع می‌شود. در سمت چپ محور اپتیکی در نمودار شکل ۶-۲۵، با استفاده از لایه‌ای از روغن نیم‌زاویه بزرگتر α_o حاصل شده است. نوعاً ضریب شکست شیشه محافظ ۱٫۵۲۲ و ضریب شکست روغن ۱٫۵۱۶ است که با هم تطبیق بسیار خوبی دارند. بدین ترتیب، با افزایش ضریب شکست در فضای شیء قابلیت جمع‌آوری نور عدسی شیئی افزایش می‌یابد. یک معیار برای این قابلیت عبارت است از حاصلضرب نیم‌زاویه و ضریب شکست، که گشودگی عددی نامیده می‌شود:

$$\text{N.A.} = n \sin \alpha \quad (۶-۴۷)$$

گشودگی عددی بنا به قانون اسنل یک ناوردا در فضای شیء است. یعنی در مورد هوا داریم

$$\text{N.A.} = n_g \sin \alpha_a = \sin \alpha'_a$$

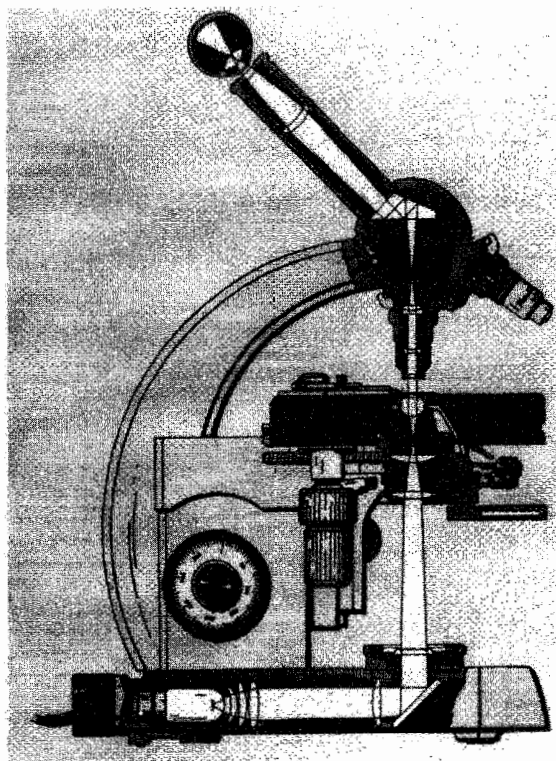
و اگر از شیئی غوطه‌ور در روغن استفاده کنیم،

$$\text{N.A.} = n_g \sin \alpha_o = n_o \sin \alpha'_o$$

مقدار ماکسیمم گشودگی عددی در مورد هوا برابر با یک است، اما وقتی فضای شیء پر از مایعی با ضریب n باشد گشودگی عددی ماکسیمم می‌تواند تا مقدار n افزایش یابد. این حد در عمل حدود ۱٫۶ است. گشودگی عددی راه دیگری است برای تعریف گشودگی نسبی یا توصیف اینکه یک عدسی چه اندازه "سریع" است. چنانکه قبلاً نشان داده شد، روشنایی تصویر با مجذور عدد f تناسب معکوس دارد. در اینجا نیز روشنایی تصویر متناسب با $(\text{N.A.})^2$ است. گشودگی عددی به این دلیل نیز پارامتر طراحی مهمی است که توان تفکیک و عمق کانون عدسی را محدود می‌کند. توان تفکیک متناسب با گشودگی عددی است، در حالی که عمق میزان تناسب معکوس با $(\text{N.A.})^2$ دارد. در بیشتر میکروسکوپها از شیئهایی با گشودگی عددی در گستره تقریبی 0.8° تا 1.3° استفاده می‌شود.

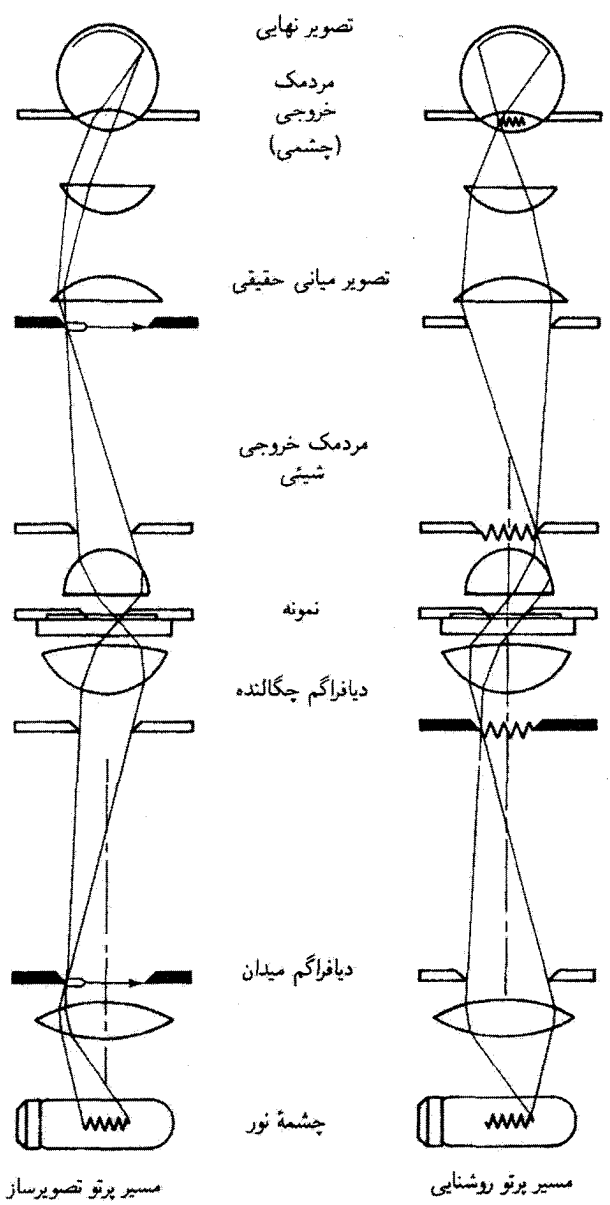
نمونه‌های زیست‌شناختی با شیشه‌ای به ضخامت 17° یا 18 mm° پوشانده می‌شوند. برای شیئهایی با گشودگیهای عددی بیشتر از 0.3° ، محافظ شیشه‌ای تأثیر بیشتری بر کیفیت تصویر دارد زیرا وقتی غوطه‌ور در روغن نباشد ابیراهی کروی شدیدتری ایجاد می‌کند. بنابراین، یک شیئی زیست‌شناختی ابیراهی ناشی از شیشه محافظ را جبران می‌کند؛ برعکس، در شیئی متالورژی

احتیاجی به این جبران نیست. شیشه‌ها را می‌توان در ارتباط با تصحیح‌هایی که در طراحی آنها منظور می‌شوند رده‌بندی کرد. برای بزرگنمایی‌های کوچک، با فواصل کانونی در گستره ۸ تا ۶۴ mm، کلاً از شیشه پادرنگ استفاده می‌شود. این نوع شیشه‌ها معمولاً برای طول موجهای C (سرخ) و F (آبی) فرانهوفر از لحاظ رنگی و برای طول موج D (زرد) فرانهوفر از لحاظ کروی تصحیح شده‌اند. برای بزرگنمایی‌های بیشتر، در عدسیهای شیشه با فواصل کانونی در گستره ۴ تا ۱۶ mm بعضی اجزاء فلوروتیتی، که همراه با اجزاء شیشه‌ای تصحیح بهتری در طیف مرئی به دست می‌دهند، به کار می‌روند. وقتی تصحیح در تمام طیف مرئی تقریباً کامل باشد، شیشه را پادکرنگ می‌نامند. چون تصحیح در بزرگنمایی‌های بیشتر دارای حساسیت بیشتری است، پادکرنگها معمولاً شیشه‌هایی با فواصل کانونی در گستره ۱۵ تا ۴ mm هستند. برای بزرگنمایی‌های باز هم بیشتر، شیشه را معمولاً به صورت شیشه غوطه‌ور طراحی می‌کنند. فنون و مواد جدید همچنین ساختن شیشه تخت-میدان را امکانپذیر کرده‌اند، که اساساً انحنای میدان را در قسمت مفید میدان حذف می‌کند. در میکروسکوپهای غوطه‌وری



(الف)

شکل ۲۶-۶ میکروسکوپ استاندارد با نمایش نور تابانی کوهرلر.



(ب)

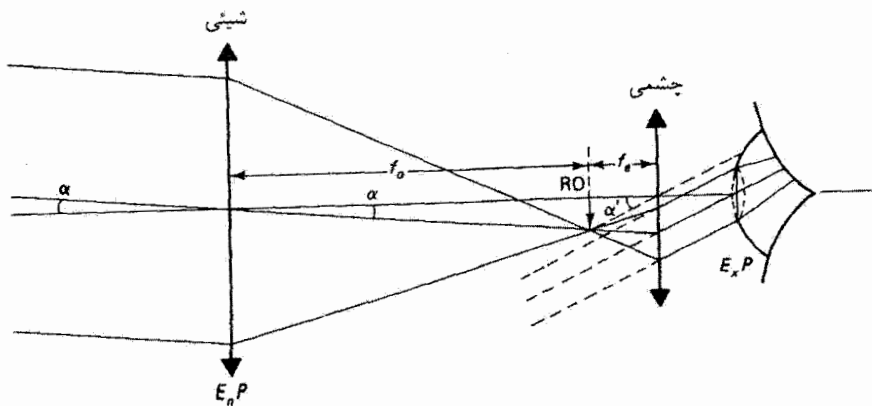
فرابنفش، معمولاً به عنوان روغن از گلیسرین استفاده می‌شود و به جای اجزاء شیشه‌ای اپتیکی اجزاء کوارتزی و فلوئوریتی به کار برده می‌شوند زیرا در طول موجهای کوچکتر تراکسیلمندی آنها بیشتر است. در این بحث باید تصریح کنیم که امروزه میکروسکوپیهای با کیفیت خوب را به صورت یکپارچه و معمولاً برای استفاده خاصی طراحی می‌کنند. طراحی یک شیئی یا یک چشمی مستقیماً به کار سایر عناصر اپتیکی در ابزار، که در میان آنها غالباً یک عدسی رله در لوله میکروسکوپ نیز وجود دارد، مربوط می‌شود. بنابراین، به طور کلی نمی‌توان شیئها یا چشمیها را بین گونه‌های مختلف میکروسکوپ بدون از دست دادن یا خراب شدن تصویر ردوبدل کرد.

در شکل ۶-۲۶ مؤلفه‌های اپتیکی در یک میکروسکوپ استاندارد و تفصیل پردازش پرتوهای نور در عبور از این ابزار نشان داده شده است.

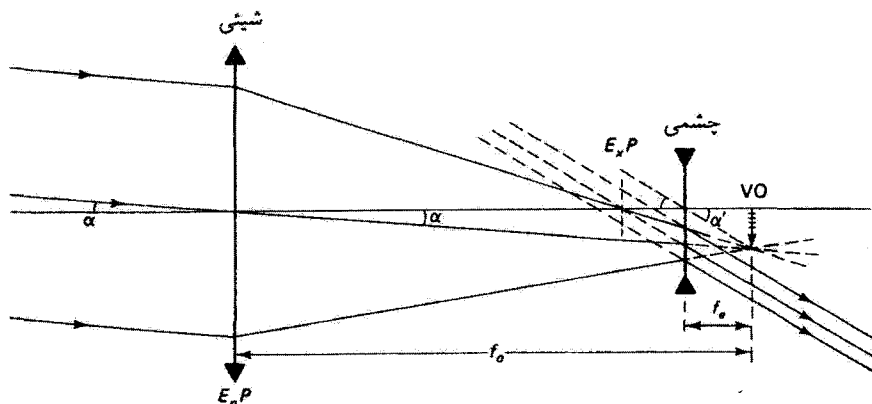
۶-۶ تلسکوپ

تلسکوپها را می‌توان عموماً بسته به اینکه در آنها برای تولید تصویر از عدسی یا آینه استفاده شده باشد به شکستی یا بازتابی رده‌بندی کرد. به علاوه، دستگاههای کاتادوپتربیک نیز وجود دارند که سطوح بازتاب و شکست را با هم ترکیب می‌کنند. میکروسکوپیها را می‌توان همچنین از روی مستقیم بودن یا وارونه بودن تصویر نهایی و وسیله مشاهده عینی یا عکاسی از هم متمایز کرد.

تلسکوپ شکستی. در شکلهای ۶-۲۷ و ۶-۲۸ دو نوع تلسکوپ شکستی که به ترتیب تصویر وارونه و مستقیم تولید می‌کنند نشان داده شده‌اند. تلسکوپ کپلری، در شکل ۶-۲۷، غالباً تلسکوپ نجومی نامیده می‌شود زیرا وارونی اشیاء نجومی در تصویرهای تشکیل شده مشکلی به وجود نمی‌آورد. تلسکوپ گالیله‌ای، که در شکل ۶-۲۸ نشان داده شده است، توسط یک چشمی با فاصله



شکل ۶-۲۷ تلسکوپ نجومی.



شکل ۲۸-۶ تلسکوپ گالیله‌ای.

کانونی منفی تصویری مستقیم ایجاد می‌کند. در هر دو مورد، پرتوهای تقریباً موازی نور از شیء دور توسط یک عدسی شیئی مثبت جمع‌آوری می‌شوند و تصویری حقیقی در صفحه کانونی آن تشکیل می‌شود. عدسی شیئی که قطر آن بزرگتر از مردمک چشم است نور بیشتری را جمع‌آوری می‌کند و رؤیت چشمه‌های نقطه‌ای مانند ستاره‌ها را که در غیر این صورت ممکن بود آشکارسازی نشوند امکانپذیر می‌سازد. عدسی شیئی معمولاً یک دوتایی است که برای ابیراهی رنگی تصحیح شده است. تصویر حقیقی ناشی از این شیئی توسط چشمی، که در شکل به صورت یک تک‌عدسی نشان داده شده است، مشاهده می‌شود. این تصویر میانی که در نقطه کانونی چشمی یا نزدیک آن واقع می‌شود، به منزله شیء حقیقی (RO) برای چشمی در تلسکوپ نجومی و شیء مجازی (VO) در تلسکوپ گالیله‌ای است. در هر مورد، پرتوهای نور پس از شکست توسط چشمی به صورت موازی یا تقریباً موازی در می‌آیند. چشم که در نزدیکی چشمی قرار می‌گیرد تصویری را در بینهایت می‌بیند که بزرگنمایی زاویه‌ای آن با نسبت α'/α تعیین می‌شود (زاویه‌های α و α' در شکل نشان داده شده‌اند). شیء در چشم غیر مسلح زاویه α و در چشمی زاویه α' می‌سازد. از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که از تصویر میانی و محور اپتیکی ساخته شده‌اند دیده می‌شود که بزرگنمایی زاویه‌ای برابر است با

$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_o}{f_e} \quad (۲۸-۶)$$

علامت منفی طبق معمول برای این است که نشان دهیم تصویر در موردی که $f_e > 0$ (شکل ۲۷-۶) وارونه و در موردی که $f_e < 0$ (شکل ۲۸-۶) مستقیم است. در هر مورد، طول تلسکوپ L برابر است با

$$L = f_o + f_e \quad (۴۹-۶)$$

که حاصلش یک تلسکوپ گالیله‌ای کوتاه است، و این طراحی برای دوربین تماشای تئاتر مناسب است. تلسکوپ نجومی را می‌توان با اضافه کردن یک عدسی مثبت سوم که کار آن صرفاً وارونه کردن تصویر میانی است تغییر داد و تصویری مستقیم به دست آورد، اما این باعث می‌شود طول تلسکوپ دست‌کم چهار برابر فاصله کانونی عدسی اضافی باشد. وارونی تصویر را می‌توان همچنین بدون افزایش طول با استفاده از منشور وارونه‌ساز، مثلاً در دوربین (که قبلاً از آن بحث شد)، به دست آورد. عدسی شیئی هر یک از دو تلسکوپ به منزله مردمک ورودی عمل می‌کند که تصویر آن در چشمی، چنانکه نشان داده شده است، مردمک خروجی است. در تلسکوپ نجومی، مردمک خروجی درست خارج از چشمی واقع می‌شود و طوری طراحی می‌شود که با اندازه مردمک چشم تطبیق کند. در تلسکوپ باید مردمک خروجی در فاصله کافی از چشمی ایجاد شود تا چشم آسودگی مناسبی را باعث شود. آسانی بیشتری برای مشاهده را نیز می‌توان به دست آورد اگر مردمک خروجی از لحاظ قطر اندکی بزرگتر از مردمک چشم باشد تا یک حرکت نسبی بین چشم و چشمی را ممکن سازد. توجه کنید که در تلسکوپ گالیله‌ای مردمک خروجی داخل چشمی می‌افتد که برای چشم غیرقابل دسترسی است. این وضعیت معرف یک عیب برای تلسکوپ گالیله‌ای است که باعث محدودیت در میدان دید می‌شود. همچنین باید متذکر شد که می‌توان از یک مانع میدانی با شبکه در مکان تصویر میانی در تلسکوپ نجومی استفاده کرد، در حالی که این امکان در مورد تلسکوپ گالیله‌ای وجود ندارد. قطر مردمک خروجی D_{ex} از طریق بزرگنمایی زاویه‌ای، به ترتیبی که در زیر بیان می‌شود، به قطر عدسی شیئی D_{obj} مربوط می‌شود. چون مردمک خروجی تصویر مردمک ورودی است که توسط چشمی تشکیل شده است، می‌توانیم برای بزرگنمایی عرضی خطی بنویسیم

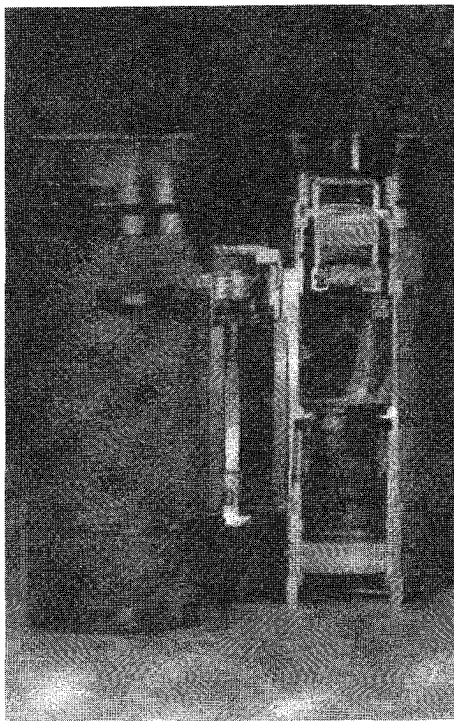
$$m_e = \frac{D_{ex}}{D_{obj}} \quad (۵۰-۶)$$

یا، با استفاده از صورت نیوتونی بزرگنمایی،

$$m_e = -\frac{f}{x} = -\frac{f_e}{f_o} \quad (۵۱-۶)$$

که در آن x فاصله شیئی (عدسی شیئی) از نقطه کانونی چشمی یا f_o است. از ترکیب معادله‌های ۴۸-۶ و ۵۰-۶ و ۵۱-۶، داریم

$$m_e = \frac{1}{M} = \frac{D_{ex}}{D_{obj}}$$



شکل ۲۹-۶ برشی از یک دوربین دو چشمی با نمایش عدسیهای مرکب شیئی و چشمی و منشور وارونه ساز تصویر.

و در نتیجه

$$D_{\text{ex}} = \frac{D_{\text{obj}}}{M} \quad (۵۲-۶)$$

بدین ترتیب، قطر دسته پرتوهای موازی که عدسی شیئی را می پوشانند به نسبت ضریب M از قطر دسته پرتوهایی که از مردمک خروجی می گذرند بزرگتر است. اما باید توجه کرد که تصویر با همین نسبت روشنتر نیست زیرا اندازه ظاهری تصویر با همان ضریب M افزایش می یابد. روشنی تصویر را نمی توان از روشنی شیء بیشتر کرد؛ در واقع، روشنی تصویر به علت اتلاف چاره ناپذیر نور، ناشی از بازتاب در سطوح عدسی، کمتر است.

دوربین (شکل ۲۹-۶) رؤیت تلسکوپی آسانتری را فراهم می کند زیرا اجازه می دهد هر دو چشم فعال باشند. علاوه بر این، استفاده از منشور پورو یا سایر منشورها برای تولید تصویر نهایی

مستقیم همچنین باعث می‌شود بتوان فاصله بین عدسیهای شیئی را بزرگتر از فاصله بین مردمکهای چشم گرفت، و در نتیجه اثر برجسته‌نمایی ناشی از دید دوربین معمولی تقویت می‌شود. نشانهٔ "۳۰ × ۶" برای دوربین به معنی این است که بزرگنمایی زاویه‌ای ایجاد شده M برابر است با $6 \times$ و قطر عدسی شیئی ۳۰ mm است. با استفاده از معادلهٔ ۶-۵۲ نتیجه می‌گیریم که مردمک خروجی برای این دوربین ۵ mm است، که تطبیق خوبی با قطر مردمک عادی دارد. برای دید شب، که در آن مردمکها تا اندازه‌ای بزرگتر هستند، درجه‌ای مانند 50×7 ، که معرف قطر مردمک خروجی ۷ mm است، ارجحیت دارد.

مثال

چشم‌آلودگی و میدان دید را برای دوربین 30×6 که در بالا توصیف شد به دست آورید. فرض کنید فاصلهٔ کانونی شیئی ۱۵ cm و قطر عدسی میدان (چشمی) ۱٫۵ cm است.

حل: فاصلهٔ کانونی چشمی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$f_e = -\frac{f_o}{M} = -\frac{15}{-6} = 2.5 \text{ cm}$$

چشم‌آلودگی عبارت است از فاصلهٔ مردمک خروجی تا چشمی. چون مردمک خروجی تصویر شیئی در چشمی است، چشم‌آلودگی برابر است با فاصلهٔ تصویر s' ، که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$s' = \frac{sf}{s-f} = \frac{Lf_e}{L-f_e} = \frac{(f_o+f_e)f_e}{(f_o+f_e)-f_e} = \frac{(15+2.5)(2.5)}{15} = 2.92 \text{ cm}$$

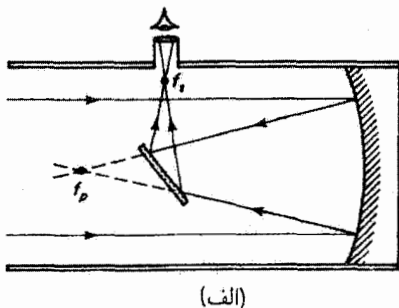
میدان دید زاویه‌ای از عدسی شیئی از یک طرف به شیء و از طرف دیگر به عدسی میدان چشمی محدود می‌شود. بدین ترتیب، برای اشیاء واقع در یک فاصلهٔ متعارف 1000 یاردی، داریم

$$\theta = \frac{h}{s} = \frac{D_f}{L}$$

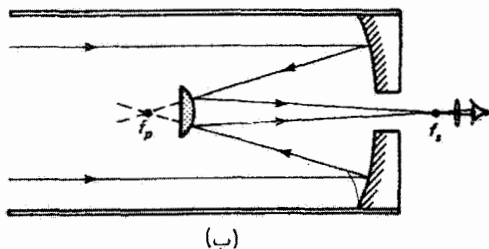
یا

$$\blacktriangle \quad h = s\theta = \frac{sD_f}{L} = \frac{(3000 \text{ ft})(1.5^\circ)}{15+2.5} = 257 \text{ ft} \quad (\text{در } 1000 \text{ یارد})$$

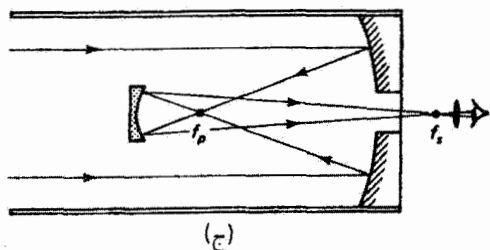
تلسکوپ بازتابی. عدسیهای شیئی با گشودگی بزرگتر تفکیک و توانایی جمع‌آوری نور بیشتری را فراهم می‌کنند. اما تولید عدسیهای همگن بزرگ بدون نقایص اپتیکی مشکل است، و نگهداری



(الف)



(ب)

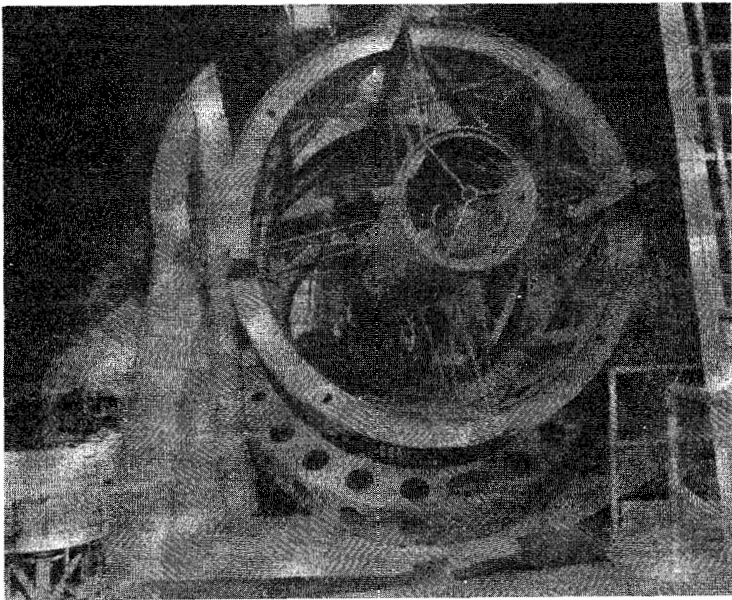


(ج)

شکل ۳۰-۶ طرحهای اساسی تلسکوپهای بازتابی. (الف) تلسکوپ نیوتونی. (ب) تلسکوپ کاسیگرینی. (ج) تلسکوپ گریگوری.

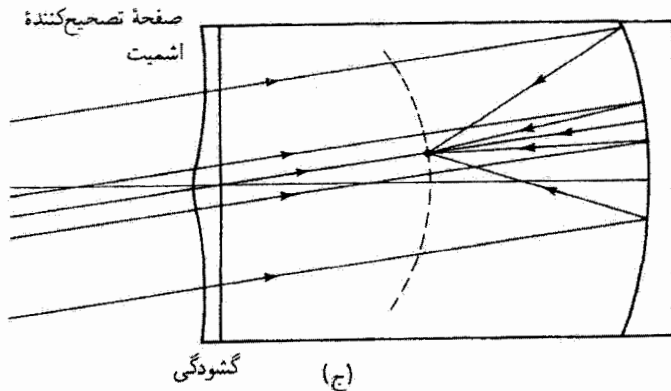
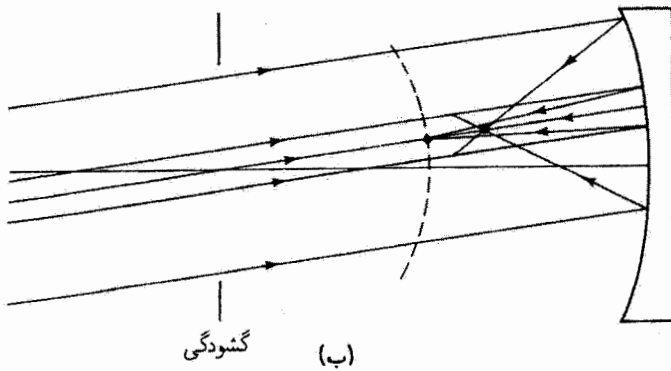
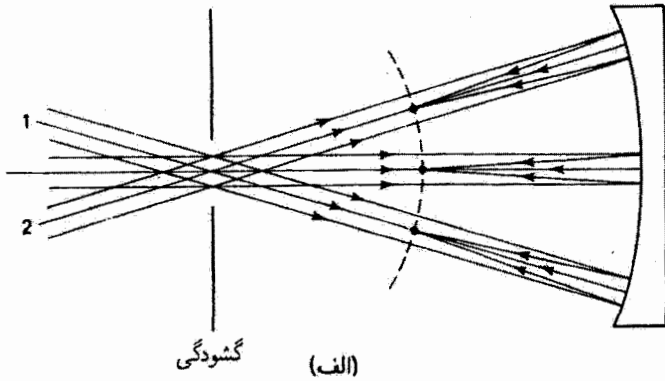
وزن آنها نیز مشکل است. این مسائل، و همچنین حذف ابیراهیهای رنگی، با استفاده از سطوح بازتاب خمیده به جای عدسیها حل می‌شوند. در بزرگترین تلسکوپها، مانند بازتابگر ۲۰۰ اینچی هیل در مونت پالومار، از این نوع آینه‌ها استفاده می‌شود. در رصدها، این نوع تلسکوپهای بازتابی بزرگ برای بررسی اشیاء نجومی بسیار کم‌نور به‌کار برده می‌شوند و در آنها از فیلمهای عکاسی که مدت‌های طولانی در معرض نور قرار می‌گیرند استفاده می‌شود.

چند طرح اساسی برای تلسکوپهای بازتابی در شکل ۳۰-۶ نشان داده شده‌اند. در طرح نیوتونی (شکل ۳۰-۶ الف)، از یک آینه سهموی برای تجمع دقیقاً تمام پرتوهای نور موازی در یک نقطه



شکل ۳۱-۶ تلسکوپ هیل (۲۰۰ اینچی) با نمایشی از راصد در جایگاه کانون اولیه و سطح بازتابنده آینه ۲۰۰ اینچی.

کانونی اولیه f_p استفاده می‌شود. پرتوهای همگرا قبل از رسیدن به f_p توسط یک آینه تخت به سمت نقطه کانونی ثانویه f_s واقع در نزدیکی بدنه تلسکوپ، بازتابیده می‌شوند و آنگاه تصویر را می‌توان با یک چشمی مشاهده کرد. استفاده از آینه سهموی باعث حذف ابیراهیهای کروی و رنگی می‌شود، اما برای نقاط برون محوری کوما وجود دارد و میدان دید مفید را به طور جدی محدود می‌کند. در تلسکوپ ۲۰۰ اینچی هیل می‌توان آینه تخت را کنار گذاشت تا پرتوها بتوانند در کانون اولیه خود جمع شوند. این تلسکوپ به قدری بزرگ است که راصد باید از سکوی مخصوصی که درست پشت کانون اولیه کار گذاشته شده است (شکل ۳۱-۶) بالا برود. البته هر مانعی در داخل تلسکوپ مقطع امواج نور فرودی را که در تصویر سهیم هستند کاهش می‌دهد. در طرح کاسگرینی (شکل ۳۰-۶ ب) آینه ثانویه یک آینه محدب هذلولیوار است که نور بازتابیده از آینه اولیه را از راه روزنه‌ای در آن به کانون ثانویه بازتاب می‌دهد و این نور در آنجا به آسانی دیده یا ثبت می‌شود. سطح هذلولیوار تصویرسازی کاملی را بین نقاط کانونی اولیه و ثانویه، که به منزله کانونهای هذلولیوار عمل می‌کنند، امکانپذیر می‌سازد. این تصویرسازی دقیق همچنین وقتی ممکن است که آینه ثانویه، همچون در تلسکوپ گریگوری (شکل ۳۰-۶ ج)، یک آینه مقعر شلجمی باشد. نقاط کانونی اولیه و ثانویه این تلسکوپ کانونهای این شلجمی هستند.



شکل ۳۲-۶ دستگاه اپتیکی اشمیت.

تلسکوپ اشمیت. شاید مشهورترین تلسکوپ کاتادیوپتریک مربوط به طرح برنهاردت اشمیت باشد. هدف اشمیت این بود که ابیراهی کروی آینه کروی اولیه را با استفاده از یک تخته نازک بازتابنده تصحیح کننده در گشودگی تلسکوپ حذف کند. طرح او در شکل ۳۲-۶ نشان داده شده است.

یک بازتابگر مقعر اولیه در (الف) دسته‌های کوچک پرتوهای موازی را از راستاهای مختلف دریافت می‌کند. هر دسته نور از گشودگی، که در مرکز انحنای آینه اولیه واقع است، وارد می‌شود. چون محور هر یک از این دسته‌های نور را می‌توان محور اپتیکی گرفت، هیچ نقطه برون‌محوری وجود ندارد و از این رو کوما و آستیگماتیسم در ابیراهیهای دستگاه وارد نمی‌شوند. اگر این دسته‌های نور کوچک باشند، هر دسته از پرتوهای پیرامحوری تشکیل می‌شود که در فاصله یکسانی از آینه، که برابر است با فاصله کانونی آن یا نصف شعاع انحنای آینه، متمرکز می‌شوند. بنابراین، مکان هندسی این نقاط تصویر یک سطح کروی است که در شکل با خط چین نشان داده شده است. اما وقتی دسته‌های نور بزرگ باشند، مانند آنچه در (ب) نشان داده شده است، ابیراهی کروی روی می‌دهد که برای پرتوهای بازتابیده از مناطق خارجی‌تر آینه نسبت به محور اپتیکی دسته نور کانون کوتاه‌تری ایجاد می‌کند. اشمیت یک تخته تصحیح‌کننده شفاف طراحی کرد که باید در گشودگی قرار داده شود و کار آن، چنانکه در (ج) نشان داده شده است، آوردن کانون تمام منطقه‌ها به یک نقطه روی سطح کانونی کروی است. شکل این تخته طوری طراحی می‌شود که نقطه کانونی تمام منطقه‌ها بر نقطه کانونی منطقه‌ای به شعاع $۷۰۷r$ شعاع گشودگی، که یک انتخاب رایج است، منطبق باشد. بنابراین، دستگاه اپتیکی اشمیت حاصل تا حد زیادی از لحاظ کوما، آستیگماتیسم و ابیراهی کروی تصحیح شده است. چون این تخته تصحیح‌کننده در مرکز انحنای آینه قرار دارد، از لحاظ اپتیکی به طور تقریباً یکسانی با باریکه‌های موازی که از راستاهای مختلف می‌آیند رفتار می‌کند و در نتیجه میدان دید گسترده‌ای را امکانپذیر می‌سازد. ابیراهیهای باقیمانده به علت خطاهای همراه با تولید عملی تخته تصحیح‌کننده و همچنین به این دلیل هستند که این تخته مقطع دقیقاً یکسانی و در نتیجه تصحیح یکسانی برای باریکه‌های ورودی از راستاهای مختلف ارائه نمی‌کند. یک عیب این است که صفحه کانونی کروی است و شکل دهی دقیقی برای فیلم عکاسی لازم می‌کند. همچنین توجه کنید که چون تخته تصحیح‌کننده در فاصله دو برابر فاصله کانونی آینه واقع شده است، طول این تلسکوپ دو برابر طول تلسکوپی است که قبلاً توصیف شدند (شکل ۶-۳۰). با اینهمه، این دستگاه، که غالباً آن را دوربین عکاسی اشمیت می‌نامند، کاملاً موفق بوده است و باعث ایجاد گونه‌های متعددی از جمله طراحیهای برای تخت کردن میدان نزدیک به صفحه کانونی شده است.

مسائل

۱-۶ یک شیء به ارتفاع ۲ cm روی محور یک دستگاه اپتیکی قرار دارد. این دستگاه از یک مانع روزنه‌ای ۲ سانتیمتری و یک عدسی محدب نازک با فاصله کانونی ۵ cm و گشودگی ۵ cm تشکیل شده است. شیء در فاصله ۱۰ cm و مانع در فاصله ۲ cm جلو عدسی قرار دارند. مکان

و اندازه مردمکهای ورودی و خروجی و تصویر را به دست آورید. پرتو عمده و دو پرتو کناری را که از دستگاه اپتیکی می‌گذرند از رأس شیء تا نقطه تصویر همیوخ ترسیم کنید.

۲-۶ مسئله ۱-۶ را برای شیئی به ارتفاع 4 cm و با مانع روزنه‌ای 2 سانتیمتری و عدسی محدب نازک با فاصله کانونی 6 cm و گشودگی 5 cm حل کنید. شیء در فاصله 14 cm از عدسی و مانع 25 cm پشت عدسی است.

۳-۶ مسئله ۱-۶ را برای شیئی به ارتفاع 2 cm و با مانع روزنه‌ای 2 سانتیمتری و عدسی محدب نازک با فاصله کانونی 6 cm و گشودگی 5 cm حل کنید. شیء در فاصله 14 cm از عدسی و مانع 4 cm جلو عدسی است.

۴-۶ یک دستگاه اپتیکی، حول یک محور اپتیکی، متشکل است از (از چپ به راست)

۱. صفحه چشمه

۲. عدسی نازک L_1 در فاصله 40 cm از صفحه چشمه.

۳. دهانه A به فاصله 20 cm از L_1 .

۴. عدسی نازک L_2 به فاصله 10 cm از A .

۵. صفحه تصویر

عدسی L_1 دارای فاصله کانونی $40/3\text{ cm}$ و قطر 2 cm است؛ عدسی L_2 دارای فاصله کانونی $20/3\text{ cm}$ و قطر 2 cm است؛ دهانه A دارای یک روزنه دایره‌ای مرکزی به قطر 5 cm است. (الف) دستگاه را ترسیم کنید.

(ب) مکان صفحه تصویر را به دست آورید.

(ج) جای مانع روزنه‌ای و مردمک ورودی را تعیین کنید.

(د) جای مردمک خروجی را تعیین کنید.

(ه) جای مانع میدانی، دریچه ورودی و دریچه خروجی را به دست آورید.

(و) میدان دید زاویه‌ای را تعیین کنید.

۵-۶ منحنی زاویه انحراف کل نسبت به زاویه ورودی را برای منشوری با زاویه رأس 60° و ضریب شکست 1.52 ترسیم کنید.

۶-۶ یک باریکه موازی نور سفید توسط منشوری شیشه‌ای با زاویه رأس 60° در وضعیت انحراف مینیمم شکسته می‌شود. جدایی زاویه‌ای نور سرخ ($n = 1.525$) و آبی (1.535) خروجی را به دست آورید.

۷-۶ الف) ثابتهای کوشی A و B را به طور تقریبی برای شیشه‌های کراون و فلینت با استفاده از داده‌های مربوط به خطوط فرانوفر C و F در جدول ۱-۶ تعیین کنید. با استفاده از این ثابتها و رابطه کوشی با تقریب دو جمله، ضریب شکست مربوط به خط فرانوفر D را برای هر مورد به دست آورید. جوابهای خود را با مقادیر جدول مقایسه کنید.

ب) با استفاده از رابطه کوشی، پاشیدگی در مجاورت خط فرانوفر D را برای هر شیشه محاسبه کنید.

ج) اگر طول قاعده منشورهای کراون و فلینت 75 mm باشد، توان تفکیک رنگی هر یک از منشورها را در مجاورت خط فرانوفر D به دست آورید. همچنین، بازه طول موجی تفکیک پذیر مینیم را در این ناحیه محاسبه کنید.

۸-۶ در یک طیف‌نما، از یک منشور متساوی‌الاضلاع از جنس شیشه کراون باریم چگال که تغییر ضریب شکست آن با طول موج در جدول زیر داده شده است استفاده می‌شود.

nm	n
۶۵۶٫۳	۱٫۶۳۴۶۱
۵۸۷٫۶	۱٫۶۳۸۱۰
۴۸۶٫۱	۱٫۶۴۶۱۱

الف) زاویه انحراف مینیم را برای خط سدیم 589.3 nm تعیین کنید.

ب) توان پاشندگی منشور را به دست آورید.

ج) ثابتهای کوشی A و B را در ناحیه طول موجهای بزرگ محاسبه کنید؛ پاشندگی منشور را در 656.3 nm از رابطه کوشی به دست آورید.

د) اگر بخواهیم این منشور دوتایی هیدروژن با طول موجهای 656.2716 nm و 656.2852 nm را تفکیک کند طول قاعده مینیم آن را تعیین کنید. آیا این کار عملی است؟

۹-۶ یک منشور با زاویه شکست 60° زاویه‌های مینیم انحراف زیر را در یک طیف‌سنج به دست می‌دهد: خط C با $38^\circ 20'$ ؛ خط D با $38^\circ 33'$ ؛ خط F با $39^\circ 12'$. توان پاشندگی منشور را به دست آورید.

۱۰-۶ ضرایب شکست دو شیشه معین کراون و فلینت عبارت‌اند از

$$\text{کراون: } n_C = 1.527, \quad n_D = 1.530, \quad n_F = 1.536$$

$$\text{فلینت: } n_C = 1.630, \quad n_D = 1.635, \quad n_F = 1.648$$

می‌خواهیم این دو شیشه را به صورت یک منشور دوتایی که یک منشور دید مستقیم برای طول موج D است ترکیب کنیم. زاویه شکست منشور فلینت 5° است. زاویه لازم برای منشور کراون و زاویه پاشیدگی حاصل بین پرتوهای C و F را به دست آورید. فرض کنید منشورها نازک‌اند و وضعیت انحراف مینیمم برقرار است.

۱۱-۶ می‌خواهیم با استفاده از شیشه‌های کراون و فلینت که در جدول ۱-۶ توصیف شده‌اند یک منشور نازک پادرنگ برای خطوط فرانهوفر C و F بسازیم. اگر زاویه رأس منشور شیشه کراون 15° باشد، (الف) زاویه رأس لازم برای منشور شیشه فلینت، و (ب) انحراف "میانگین" حاصل برای خط D را تعیین کنید.

۱۲-۶ یک سطح کاملاً پخشنده یا لامبرتی به شکل مربعی به ضلع 5 cm است. این شیء توان کل 25 W را در راستاهای جلو (در نصف زاویه فضایی کل 4π) تابش می‌کند. از یک دوربین عکاسی، دارای یک عدسی با فاصله کانونی 4 cm و تنظیم شده روی $f/8$ ، برای عکسبرداری از این شیء که به فاصله 1 m از عدسی قرار دارد استفاده می‌شود.

(الف) تابندگی، شدت تابندگی، و تابندگی فضایی این شیء را به دست آورید. (جدول ۱-۲ را ببینید.)

(ب) شار تابشی داده شده به فیلم را تعیین کنید.

(ج) تابیدگی در فیلم را به دست آورید.

۱۳-۶ رفتار معادله ۳۲-۶ را، که نمایشگر بستگی عمق میدان به گشودگی، فاصله کانونی و فاصله شیء است، بررسی کنید. با استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای، منحنیهای نشاندهنده هر یک از وابستگیها را به دست آورید.

۱۴-۶ برای عکسبرداری از سه ردیف دانشجو از فاصله 6 m متری، از یک دوربین عکاسی که روی ردیف وسط میزان شده است استفاده می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم دایره‌های پخشیدگی یا نامیزانی تصویر را که از نقاط شیء در ردیفهای اول و سوم ناشی می‌شوند کوچکتر از دانه‌های تفره‌اندوده عکاسی، که نوعاً $1\ \mu\text{m}$ قطر دارند، نگه داریم. اگر دوربین عکاسی دارای فاصله کانونی 50 mm باشد و روی $f/4$ تنظیم شده باشد، فاصله شیء نزدیکتر و دورتر از ردیف وسط را که برای آن پخشیدگی نامطلوب روی می‌دهد به دست آورید.

۱۵-۶ یک عدسی دورنما از ترکیب دو عدسی نازک با فاصله‌های کانونی $+20\text{ cm}$ و -8 cm ساخته شده است. فاصله این عدسیها از یکدیگر 15 cm است.

(الف) فاصله کانونی ترکیب، فاصله عدسی منفی تا صفحه فیلم، و اندازه تصویر شیء دوری را که در دوربین عکاسی زاویه ۲° می‌سازد تعیین کنید.

(ب) همین کمیتها و همچنین مکان صفحه‌های اصلی را با استفاده از روش فصل ۴ به دست آورید.

۱۶-۶ عدسی یک دوربین عکاسی با گشودگی $f/4$ و فاصله کانونی 5 cm روی یک شیء به فاصله 6 ft میزان شده است. اگر قطر ماکسیمم دایره کمترین تاری را 5 mm 5° بگیریم، عمق میدان عکس را محاسبه کنید.

۱۷-۶ در سطح زمین، که درخشانی برای فرود عمودی حدود 10^5 lx است، خورشید زاویه 5° می‌سازد. درخشانی تصویر خورشید را در یک عدسی به قطر 5 cm و فاصله کانونی 50 cm به دست آورید.

۱۸-۶ (الف) یک دوربین عکاسی دارای عدسی محدب با فاصله کانونی 15 cm است. بزرگی تصویر انسانی به ارتفاع 180 cm و به فاصله 30 m را روی فیلم تعیین کنید.

(ب) به جای این عدسی محدب از یک ترکیب دورنما متشکل از یک عدسی محدب با فاصله کانونی 12 cm و یک عدسی مقعر استفاده می‌کنیم. عدسی مقعر در مکان عدسی اصلی و عدسی محدب به فاصله 8 cm در جلو آن قرار گرفته است. اگر بخواهیم اشیاء دور تصاویر واضح روی همان صفحه فیلم تشکیل دهند، فاصله کانونی لازم برای عدسی مقعر را به دست آورید. با استفاده از این عدسی دورنما، تصویر انسان مزبور چه اندازه بزرگتر می‌شود؟

۱۹-۶ عدسی یک دوربین عکاسی 35 میلیمتری با علامت " $1:1.8$ " و 50 mm " مشخص شده است.

(الف) قطر گشودگی ماکسیمم چه اندازه است؟

(ب) با شروع از تنظیم روی گشودگی ماکسیمم، سه عدد f بعدی را تعیین کنید که باعث می‌شوند تابیدگی در هر مرحله به $1/3$ مقدار قبلی کاهش یابد.

(ج) قطرهای گشودگی متناظر با این عددهای f را به دست آورید.

(د) اگر عکسی با گشودگی ماکسیمم و با $1/1000\text{ s}$ گرفته شود، مدت نوردهی برای سایر گشودگیها را که نوردهی کل معادلی فراهم می‌کند تعیین کنید.

۲۰-۶ اگر از فاصله کانونی معادل که با معادله ۳۵-۶ داده می‌شود استفاده شود، بزرگنمایی $33-6$ برای چشمی دو-عدسی نیز معتبر است. نشان دهید بزرگنمایی یک چشمی دو-عدسی، که برای

حذف ابیراهی رنگی طراحی شده است، برای تصویر در بینهایت عبارت است از

$$M = ۱۲٫۵ \left(\frac{۱}{f_1} + \frac{۱}{f_2} \right)$$

۲۱-۶ یک ذره بین از دو عدسی کوژ-تخت نازک، هر یک با فاصله کانونی ۳ cm و به فاصله ۲٫۸ cm از یکدیگر، ساخته شده است. (الف) فاصله کانونی معادل را و (ب) توان درشتنمایی را برای تصویری که در نقطه نزدیک چشم تشکیل شده است به دست آورید.

۲۲-۶ شیئی یک میکروسکوپ دارای فاصله کانونی ۵ cm است و تصویر میانی را در فاصله ۱۶ cm از نقطه کانونی دوم تشکیل می‌دهد.

(الف) بزرگنمایی کل میکروسکوپ را وقتی چشمی روی $\times ۱۰$ گذاشته شده است تعیین کنید.

(ب) یک شیء نقطه‌ای باید در چه فاصله‌ای از شیئی باشد تا با این میکروسکوپ دیده شود؟

۲۳-۶ یک میکروسکوپ مرکب دست‌ساخت دارای عدسیهای نازکی با فاصله‌های کانونی ۱ cm به‌عنوان شیئی و ۳ cm به‌عنوان چشمی است. یک شیء به فاصله ۲۰ cm از شیئی قرار دارد. اگر تصویر مجازی ناشی از چشمی در فاصله ۲۵ cm از چشم واقع باشد، (الف) توان درشتنمایی میکروسکوپ و (ب) فاصله عدسیها از یکدیگر را به دست آورید.

۲۴-۶ دو عدسی محدب نازک به فاصله ۲۵ cm از یکدیگر یک میکروسکوپ مرکب تشکیل می‌دهند که بزرگنمایی ظاهری آن ۲۰ است. اگر فاصله کانونی عدسی چشمی ۴ cm باشد فاصله کانونی عدسی دیگر را محاسبه کنید.

۲۵-۶ یک تلسکوپ پایه‌دار دارای یک شطرنجی-شیشه دایره‌ای که روی آن مقیاسی حک شده است. در صفحه کانونی مشترک شیئی و چشمی است به طوری که با یک شیء دور میزان دیده می‌شود. اگر این تلسکوپ روی تیر تلفنی در فاصله ۳۰ m میزان شده باشد، چه مقدار از این تیر بین خطوط میلیمتر شطرنجی می‌افتد؟ فاصله کانونی شیئی ۲۰ cm است.

۲۶-۶ یک دوربین دوچشمی با علامت "۷ × ۳۵" مشخص شده است. فاصله کانونی شیئی ۱۴ cm و قطر عدسی میدان چشمی ۱٫۸ cm است.

(الف) بزرگنمایی زاویه‌ای یک شیء دور

(ب) فاصله کانونی چشمی،

(ج) قطر مردمک خروجی،

(د) چشم آسودگی، و

(ه) میدان دید برحسب فوت در ۱۰۰۰ یاردی را به دست آورید.

۲۷-۶ الف) نشان دهید بزرگنمایی زاویه‌ای یک تلسکوپ نجومی، وقتی تصویر نهایی در بینهایت دیده نشود، با رابطه زیر بیان می‌شود

$$M = \frac{m_{oc} f_{obj}}{s''}$$

که در آن m_{oc} بزرگنمایی خطی چشمی و s'' فاصله از چشمی تا تصویر نهایی است.

(ب) اگر در این تلسکوپ از دو عدسی همگرا با فاصله‌های کانونی ۳۰ cm و ۴ cm استفاده شده باشد، بزرگنمایی زاویه‌ای را وقتی تصویر در بینهایت دیده می‌شود و وقتی تصویر در نقطه نزدیک ۲۵ سانتیمتری دیده می‌شود به دست آورید.

۲۸-۶ ماه زاویه ۵° در عدسی شیئی یک تلسکوپ زمینی می‌سازد. فاصله‌های کانونی عدسیهای شیئی و چشمی به ترتیب ۲۰ cm و ۵ cm هستند. قطر تصویر ماه را در تلسکوپ در نقطه نزدیک ۲۵ سانتیمتری محاسبه کنید.

۲۹-۶ در یک دوربین تماشای تئاتر از شیئی و چشمی به ترتیب با فاصله‌های کانونی $۱۲\text{ cm} +$ و $۴\text{ cm} -$ استفاده شده است. طول ابزار (فاصله عدسیها از یکدیگر) و توان درشتنمایی آن را برای تماشگری که چشمهایش برای الف) بینهایت و ب) نقطه نزدیک ۳۰ سانتیمتری میزان شده است به دست آورید.

۳۰-۶ یک تلسکوپ نجومی برای انداختن تصویر حقیقی ماه روی پرده‌ای به فاصله ۲۵ cm از چشمی با فاصله کانونی ۵ cm به کار برده می‌شود. این چشمی را باید چه اندازه از مکان عادی خود جابه‌جا کرد؟

۳۱-۶ الف) چشمی رامسدن در یک تلسکوپ از دو عدسی مثبت هر یک با فاصله کانونی ۲ cm و به فاصله ۲ cm از یکدیگر تشکیل شده است. توان درشتنمایی آن را وقتی تصویری در بینهایت دیده می‌شود به دست آورید.

(ب) شیئی این تلسکوپ یک عدسی مثبت با فاصله کانونی ۳۰ cm و قطر ۴.۵ cm است. بزرگنمایی کل تلسکوپ را محاسبه کنید.

(ج) مکان و قطر مردمک خروجی را تعیین کنید.

(د) قطر عدسی میدان چشمی ۲ cm است. زاویه معرف میدان دید تلسکوپ را به دست آورید.

۳۲-۶ نشان دهید بزرگنمایی زاویه‌ای تلسکوپ بازتابی نیوتونی، مانند مورد تلسکوپ شکستی وقتی تصویر در بینهایت تشکیل شده باشد، با نسبت فاصله‌های کانونی شیئی به چشمی داده می‌شود.

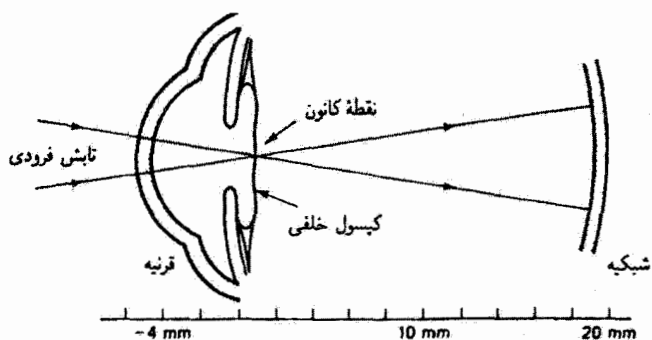
۳۳-۶ آینه اولیه یک تلسکوپ بازتابی کاسگرینی دارای فاصله کانونی ۱۲ ft است. آینه ثانویه، که محدب است، در فاصله ۱۰ ft از آینه اولیه در امتداد محور اصلی قرار دارد و تصویر یک شیء دور را در رأس آینه اولیه تشکیل می‌دهد. روزنه‌ای حول رأس این آینه رؤیت تصویر را با یک چشمی با فاصله کانونی ۴ in واقع در پشت آینه امکانپذیر می‌سازد. فاصله کانونی آینه محدب و بزرگنمایی زاویه‌ای ابزار را محاسبه کنید.

مراجع

- [1] Horne, D. F. *Optical Instruments and Their Applications*. Bristol, England: Adam Hilger Ltd., 1980.
- [2] Goodman, Douglas S. "Basic Optical Instruments." In *Geometrical and Instrumental Optics*, edited by Daniel Malacara. Boston: Academic Press, 1988.
- [3] Brouwer, William. *Matrix Methods in Optical Instrument Design*. New York: W. A. Benjamin, 1964.
- [4] Benford, James R., and Harold E. Rosenberger. "Microscope Objectives and Eye-pieces." In *Handbook of Optics*, edited by Walter G. Driscoll and William Vaughan. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978.
- [5] Cox, A. *Photographic Optics*, 15th ed. New York: Focal Press, 1974.
- [6] Horne, D. F. *Optical Production Technology*. New York: Crane, Russak and Company, 1972.
- [7] Kingslake, R. *Lens Design Fundamentals*. New York: Academic Press, 1978.
- [8] McLaughlin, R. B. *Special Methods in Light Microscopy*. London: Microscope Publications Ltd., 1977.
- [9] Smith, W. J. *Modern Optical Engineering*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [10] Nussbaum, Allen. *Geometric Optics: An Introduction*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1968.
- [11] Klein, Miles V. *Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1970. Ch. 4.1: Radiometry and Photometry.
- [12] Kirkpatrick, Paul. "X-ray Microscope." *Scientific American* (Mar. 1949): 44.
- [13] Wald, George. "Eye and Camera." *Scientific American* (Aug. 1950): 32.
- [14] Wilson, Albert G. "The Big Schmidt." *Scientific American* (Dec. 1950): 34.
- [15] Muller, Erwin W. "A New Microscope." *Scientific American* (May 1952): 58.
- [16] McClain, Edward, Jr. "The 600-Foot Radio Telescope." *Scientific American* (Jan. 1960): 45.
- [17] Crewe, Albert. "A High-Resolution Scanning Electron Microscope." *Scientific Ameri-*

can (Apr. 1971): 26.

- [18] Price, William H. "The Photographic Lens." *Scientific American* (Aug. 1976): 72.
- [19] Quate, Calvin. "Acoustic Microscope." *Scientific American* (Oct. 1979): 62.
- [20] Bahcall, J. N., and L. Spitzer, Jr. "The Space Telescope." *Scientific American* (July 1982): 40.
- [21] Howells, Malcolm R., Janos Kirz, and William Sayre. "X-ray Microscopes." *Scientific American* (Feb. 1991): 88.



اپتیک چشم

مقدمه

در این فصل با اپتیک چشم آشنا می‌شویم. ابتدا ساختمان چشم و کار آن را بررسی می‌کنیم. سپس خطاهای شکست را در چشم معیوب متذکر می‌شویم و راههای تصحیح اپتیکی آنها را نشان می‌دهیم. در پایان، چند عمل جراحی متداول — برش شعاعی قرنیه و برش کپسول خلفی — را ذکر می‌کنیم که در آنها از نور لیزر با تابیدگی و طول موج معینی برای بازگرداندن تیزی بینی به چشمهای ناسالم استفاده می‌شود.

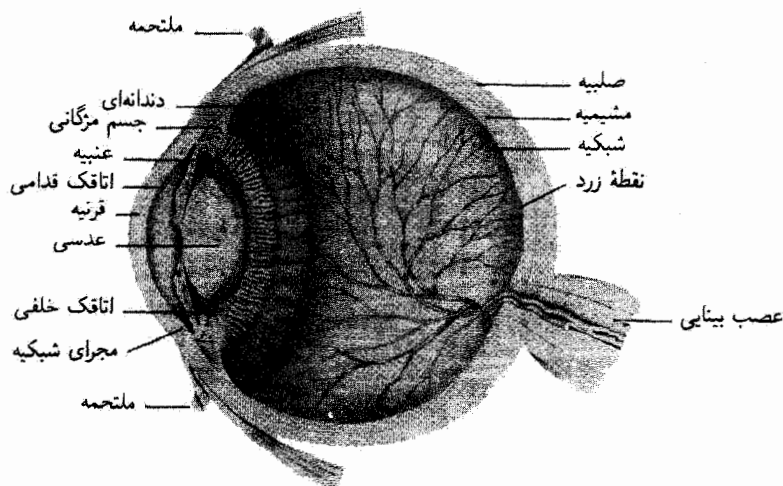
چشم، همراه با مغز، دستگاه بیوپتیکی واقعاً جالب توجهی تشکیل می‌دهد. ویژگیهای متمایز این دستگاه را در نظر بگیرید. چشم تصویر اشیاء واقع در فاصله یک چهارم متر تا بینهایت را تشکیل می‌دهد، صحنه‌ای به وسعت آسمان را در یک آن می‌بیند، و روی جزئیاتی به کوچکی سر سوزن میزان می‌شود. چشم می‌تواند خود را با گستره فوق‌العاده بزرگی از شدتها توافق دهد که از سوسوزدن شمعی فرسنگها دور در یک شب تاریک تا نور خورشید که چنان درخشان است که تصویر آن روی شبکیه باعث آفتاب سوختگی جدی می‌شود وسعت دارد. چشم می‌تواند اختلافهای جزئی رنگ، از ارغوانی سیر تا سرخ سیر، را تمیز دهد. و آنچه برای ما از همه مهمتر است، چشم

به‌عنوان یک عضو حسی فضایی منحصر به فرد اشیاء را در فضا جایگزین می‌کند و بدین‌ترتیب تصویر دقیقی از جهان سه‌بعدی ما به‌دست می‌دهد.

۱-۷ ساختار زیست‌شناختی چشم

از لحاظ تشریحی، چشم تقریباً به شکل کره‌ای است که قطر آن حدود ۲۲ mm است. کره چشم در میان بافت پر چربی درون حلقه یا کاسه چشم در جمجمه جای گرفته است و با دیواره‌های استخوانی احاطه شده است. از لحاظ اپتیکی، کره چشم را می‌توان یک دستگاه عدسی مثبت دانست که، مانند دوربین عکاسی معمولی، نور فرودی را به سطح عقب خود می‌شکند و تصویری حقیقی تشکیل می‌دهد.

قسمتهای اساسی چشم در شکل ۱-۷ نشان داده شده‌اند. اجزاء زیست‌شناختی چشم در امتداد محور اپتیکی به‌ترتیبی که نور در تشکیل تصویر معمولی به آنها می‌رسد به قرار زیر هستند. نور ابتدا از قرنیه، که بافت شفافی بدون رگ اما پر از سلولهای عصبی است، وارد چشم می‌شود. قرنیه با ضریب شکست ۱٫۳۷۶ تقریباً به قطر ۱۲ mm است و ضخامت آن در مرکز ۰٫۶ mm است که در لبه‌ها اندکی بیشتر می‌شود. نور با ورود به چشم در سطح جدایی هوا-قرنیه، جایی که ضریب شکست ناگهان از 1° به ۱٫۳۸ تغییر می‌کند، متحمل شکست قابل‌توجهی می‌شود. در واقع، سطح قرنیه حدود ۷۳٪ توان شکست کل چشم را فراهم می‌کند. درست پشت قرنیه اتاقک قدامی قرار دارد که فضای کوچکی است پر از مایعی به نام زلالیه که مواد مغذی برای قرنیه را تأمین



شکل ۱-۷ مقطع عمودی چشم.

می‌کند. ضریب شکست زلالیه ۱٫۳۳۶ است که تقریباً برابر با ضریب شکست آب (۱٫۳۳۳) است. چون ضرایب شکست قرنیه و زلالیه به هم نزدیک‌اند، شکست اضافی پرتوهای نور در عبور از قرنیه به اتافک قدامی کم است. درون مایع زلالیه عنبیه قرار دارد که در بجه‌ای است که مقدار نوری را که وارد می‌شود تنظیم می‌کند و نیز رنگ چشم را مشخص می‌کند. مقدار و محل ماده رنگی در عنبیه باعث می‌شود که چشم سیاه، قهوه‌ای، آبی، ... دیده شود. روزنه قابل تنظیم در عنبیه را که نور از آن عبور می‌کند مردمک می‌نامند. عنبیه دارای دو ماهیچه ظریف است که اندازه مردمک را در پاسخ به تحریک نوری تغییر می‌دهند و قطر آن را از مینیمی حدود ۲ mm در روز روشن تا ماکسیممی حدود ۸ mm در شب تاریک تنظیم می‌کنند. پزشکان موقع معاینه داخل چشم غالباً از داروهایی مانند آتروپین برای اتساع یا بزرگ کردن مردمک استفاده می‌کنند.

نور درست پس از عبور از مردمک به عدسی بلورین می‌رسد که ساختار شفاف تقریباً با اندازه و شکل یک عدس کوچک است. این عدسی با تغییر شکل خود فرایند تجمع نهایی نور را به دقت تنظیم می‌کند تا تصویر واضحی از صحنه خارجی روی شبکیه تشکیل شود. این تغییر شکل عدسی توسط ماهیچه مزگانی، که با رشته‌هایی (منطقه مزگانی) به کناره عدسی وصل شده است، صورت می‌گیرد. وقتی این ماهیچه‌ها در حال استراحت هستند، عدسی تخت‌ترین شکل خود را دارد و در نتیجه کمترین شکست را به پرتوهای نور فرودی می‌دهد. در این حالت، چشم روی اشیاء دور میزان شده است. هر چه ماهیچه‌های مزگانی کشیده‌تر می‌شوند تحدب عدسی و در نتیجه شکست نور بیشتر می‌شود. در این حالت "کشیدگی"، چشم روی اشیاء نزدیک شده است. خود عدسی یک بافت لایه‌ای پیازگونه پیچیده است که با یک غشاء کشسان احاطه شده است. به علت ساختار لایه‌ای نسبتاً پیچیده بافت الیافی، ضریب شکست عدسی همگن نیست. نزدیک مرکز یا هسته عدسی (روی محور) ضریب شکست حدود ۱٫۴۱ است و نزدیک کناره عدسی به حدود ۱٫۳۸ کاهش می‌یابد.

نور پس از شکست نهایی توسط عدسی بلورین وارد اتافک خلفی یا مایع زجاجیه می‌شود که ماده شفاف زله‌مانندی است که ضریب شکست آن نیز به ضریب شکست آب نزدیک است (۱٫۳۳۶). زجاجیه، که اساساً بدون ساختار است، حاوی ذرات سلولی کوچکی است که آنها را شناور می‌نامند. علت این نامگذاری این است که اگر موقع نگاه کردن به مثلاً یک سقف سفید نگاه خود را از یک گوشه به گوشه دیگر بیندازیم آنها را به صورت شناور در میدان دید خود می‌بینیم.

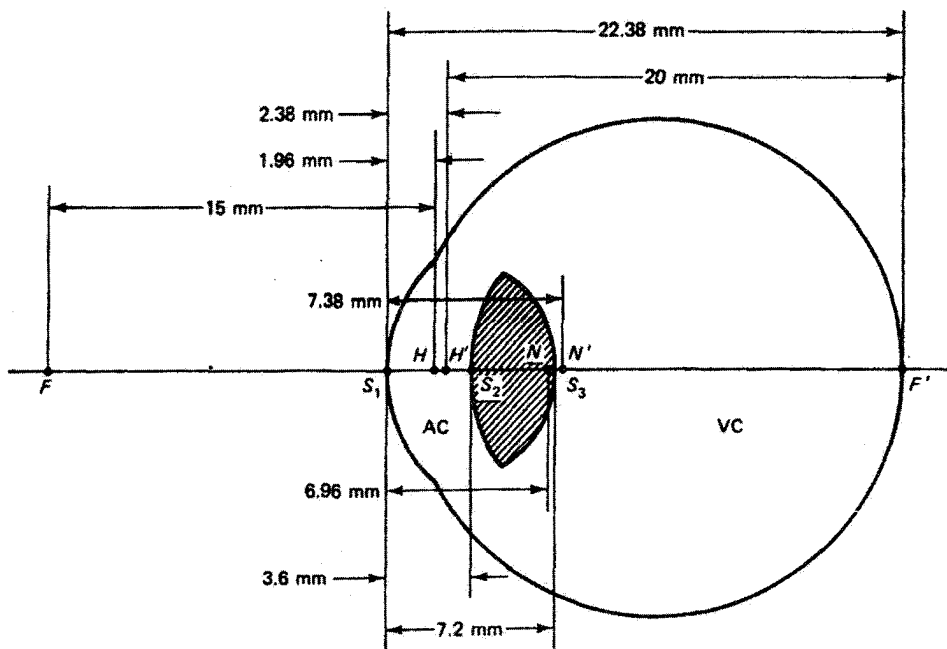
پرتوهای نور پس از عبور از زجاجیه به پایان راه خود در لایه داخلی عقب چشم می‌رسند که شبکیه نامیده می‌شود و از واژه شبکه به معنی "توری" گرفته شده است. شبکیه پر از ذره‌هایی است که از سلولهای نورگیرنده به نام میله و مخروط تشکیل شده‌اند. میله‌ها که باریک و بلند

هستند و تعداد آنها به بیش از 10^6 میلیون می‌رسد به سمت کناره شبکه انبوه‌تر می‌شوند. این سلولها به نور ضعیف فوق‌العاده حساس هستند اما نمی‌توانند رنگها را از هم تشخیص دهند. مخروطها که بهتر هستند و تعداد آنها کمتر از 10^6 میلیون است عمدتاً در نزدیکی مرکز شبکه تجمع یافته‌اند، که ناحیه‌ای است به قطر 3 mm و لکه زرد نامیده می‌شود. مخروطها، کاملاً برخلاف میله‌ها، به نور شدید و رنگ حساس هستند اما در نور ضعیف خوب کار نمی‌کنند. سه نوع سلول عصبی متمایز (آمورین، دوقطبی، افقی) به سلولهای نورگیرنده متصل شده‌اند که تحریکات دیداری را به عصب بینایی منتقل می‌کنند. عصب بینایی خط اصلی انتقال اطلاعات دیداری از شبکه به مغز است؛ و بدین ترتیب، فرایند شگفتی که آن را دیدن می‌نامیم کامل می‌شود.

علاوه بر اجزاء اپتیکی کلیدی که نور در مسیر خود روی محور بینایی با آنها مواجه می‌شود، چشم دارای اجزاء دیگری است که شایان ذکراند. چنانکه در شکل ۷-۱ نشان داده شده است، چشم با یک پوشش سفید مقاوم احاطه شده است که صلبیه نامیده می‌شود و قالب نگهدارنده چشم را تشکیل می‌دهد. درست داخل صلبیه مشیمیه قرار دارد که حدود چهارپنجم چشم به سمت عقب را می‌پوشاند و حاوی اکثر رگهای خونی است که چشم را تغذیه می‌کنند. مشیمیه به‌نوبه خود پشتیبان شبکه است که توری فوق‌العاده مهمی است که میله‌ها و مخروطها را در خود جای داده است. در مرکز لکه زرد که کمی بالاتر از عصب بینایی قرار دارد گودال مرکزی واقع است که ناحیه مربوط به بیشترین تیزی بینی است. وقتی بخواهیم با دقت به جزئیات نگاه کنیم — مثلاً هنگامی که تراشه چوب کوچکی را با سرسوزن از پوست بدن خارج می‌کنیم — چشمها مدام حرکت می‌کنند تا نور ناشی از ناحیه مورد نظر دقیقاً روی این گودال بیفتد، که ناحیه‌ای بدون میله است و حدود $200\ \mu\text{m}$ قطر دارد. کاملاً برعکس، ناحیه کوچک دیگری در شبکه هست که محل خروج عصب بینایی است و هیچ حساسیتی به نور ندارد. این ناحیه را که بدون هیچ گیرنده‌ای است به همین مناسبت نقطه کور می‌نامند.

۷-۲ نمایش اپتیکی چشم

چنانکه دیدیم، چشم زیست‌شناختی عادی تقریباً یک کره‌وار است که از قرنیه تا شبکه 22 mm قطر دارد. سطوح اپتیکی که عمده توان تمرکز نور را فراهم می‌کنند اساساً سه تا هستند: سطح جدایی هوا-قرنیه، سطح جدایی زلالیه-عدسی، و سطح جدایی عدسی-زجاجیه. در مجموع، چشم را می‌توان به‌طور کاملاً ساده به‌صورت یک عدسی نازک مثبت نمایش داد که فاصله کانونی آن در حالت استراحت (دید دور) 17 mm و در حالت کشیدگی (دید نزدیک) 14 mm است. برای اینکه بتوانیم تواناییهای اپتیکی چشم را بهتر نمایش بدهیم از چشم نموداری استفاده می‌کنیم. چشم



شکل ۲-۷ نمایش چشم نموداری هلمهولتز که توسط لورانس اصلاح شده است. برای تعریف نمادها به جدول ۱-۷ مراجعه کنید.

نموداری در عین حال که یک تقریب است نمایش خوبی از چشم زیست‌شناختی واقعی (اما پیچیده) ارائه می‌کند.

یک چشم نموداری که چشم زیست‌شناختی زنده را با دقت زیاد نمایش می‌دهد در شکل ۲-۷ نشان داده شده است (از هرمن فون هلمهولتز و ل. لورانس). مکانهای نسبی سطوح شکست و همچنین نقاط بنیادی مورد نظر برای کل چشم نشان داده شده‌اند. این چشم نموداری مربوط به حالت استراحت چشم است. برای چشم در حالت کشیدگی کامل، سطح جلو عدسی شعاع انحنای خود را از $R = 10 \text{ mm}$ به $R = 6 \text{ mm}$ تغییر می‌دهد. در ارتباط با شکل ۲-۷ و برای اختصار، سطوح اپتیکی مهم، فاصله‌های آنها از رأس قرنیه روی محور اپتیکی، چند شعاع انحنای ضریب شکست، و توانهای شکست سطوح اپتیکی مربوط به قرنیه و عدسی را در جدول ۱-۷ گردآوری کرده‌ایم. باید توجه کرد که مقادیر ضرایب شکست قسمتهای مختلف چشم و همچنین شعاعهای انحنای سطوح ممکن است با مقادیر مربوط به چشم زیست‌شناختی مطابقت نداشته باشند. اما مقادیر اپتیکی توصیف‌کننده چشم نموداری، در مجموع، کارکرد اپتیکی چشم زیست‌شناختی زنده را به‌طور کامل نمایش می‌دهند.

جدول ۱-۷ ثابتهای چشم نموداری

توان شکست (دیوپتر)	ضریب شکست	شعاع انحنای سطح (mm)	فاصله از رأس قرنیه (mm)	نماد معرف	سطح یا عنصر اپتیکی
+۴۱٫۶	-	+۸	-	S_1	قرنیه
+۳۰٫۵	۱٫۴۵	-	-	L	عدسی (واحد)
+۱۲٫۳	-	+۱۰۳	+۳٫۶	S_2	سطح جلو
+۲۰٫۵	-	-۶	+۷٫۲	S_2	سطح عقب
+۶۶٫۶	-	-	-	-	چشم (واحد)
-	-	-	-۱۳٫۰۴	F	صفحه کانونی جلو
-	-	-	+۲۲٫۳۸	F'	صفحه کانونی پشت
-	-	-	+۱٫۹۶	H	صفحه اصلی جلو
-	-	-	+۲٫۳۸	H'	صفحه اصلی پشت
-	-	-	+۶٫۹۶	N	صفحه گرهی جلو
-	-	-	+۷٫۳۸	N'	صفحه گرهی پشت
-	۱٫۳۳۳	-	-	AC	اتاقک قدامی
-	۱٫۳۳۳	-	-	VC	اتاقک زجاجیه‌ای
-	-	-	+۳٫۰۴	E_nP	مردمک ورودی
-	-	-	+۳٫۷۲	E_xP	مردمک خروجی

منبع:

Mathew Alpern "The Eyes and Vision," Table 1, Section 12, in *Handbook of Optics*, New York: McGraw-Hill book Company, 1978.

(الف) قرنیه کاملاً نازک فرض شده است.

(ب) این مربوط به چشم در حال استراحت است. برای چشم در حالت کشیدگی یا کاملاً تطابق‌یافته، شعاع انحنای سطح جلو +۶ mm می‌شود.

۳-۷ کارهای چشم

برای اینکه چشم به‌عنوان یک دستگاه اپتیکی مؤثر عمل کند باید از شیء یا صفحه خارجی، چه دور چه نزدیک، در نور شدید و ضعیف یک تصویر شبکیه‌ای تشکیل دهد. برای رسیدن به نتیجه مطلوب، چشم کارهای خاصی را انجام می‌دهد. برای دیدن اشیاء دور و نزدیک، چشم تطابق

می‌کند. برای پردازش علائم نوری با روشنایی متغیر، چشم توافق می‌کند. برای حس کردن سمتگیری فضایی صحنه‌های سه‌بعدی، چشمها از دید برجسته‌نما استفاده می‌کنند. برای تشکیل تصویر دقیق و صادق از شیء خارجی، چشم از تیزبینی خود بهره می‌گیرد. در زیر، هر یک از این کارهای دیداری را نسبتاً به تفصیل بررسی می‌کنیم.

تطابق. عدسی، بسته به فاصله شیء یا صحنه از چشم، به‌طور مناسب تطابق می‌کند. سکشیده یا شل می‌شود تا تصویر را دقیقاً روی شبکیه میزان کند. برای شیء دور، ماهیچهٔ مزگانی متصل به عدسی شل می‌شود و عدسی شکل تختتری به خود می‌گیرد، و شعاعهای انحنای آن بزرگتر می‌شوند و در نتیجه فاصلهٔ کانونی آن افزایش می‌یابد. همچنانکه شیء به چشم نزدیکتر می‌شود، ماهیچهٔ مزگانی کشیده یا منقبض می‌شود و باعث فشردگی یا تحدب عدسی می‌شود و در نتیجه شعاعهای انحنای فاصلهٔ کانونی کاهش می‌یابند. هر چه شعاعهای انحنای فاصلهٔ کانونی کوچکتر باشند توان شکست یا خم‌کنندگی عدسی بیشتر است، و این دقیقاً شرط لازم برای به میزان در آوردن دقیق اشیاء نزدیک است. در چشم عادی — پیش از آنکه روند عادی پیر شدن باعث شود عدسی کشسانی و توانایی تغییر شکل خود را از دست بدهد — تطابق تشکیل تصاویر شبکیه‌ای اشیاء را از نقاط دور (بینهایت) تا نقاط نزدیک به فاصلهٔ یک‌چهارم متر امکانپذیر می‌کند. نقطهٔ نزدیک (نزدیکترین نقطهٔ تطابق) با زیاد شدن عمر از چشم دور می‌شود، به طوری که از فاصلهٔ ۷ تا ۱۰ cm از چشم در جوانی شروع می‌شود، در میانسالی به ۲۰ تا ۴۰ cm افزایش می‌یابد و در سالهای بعد به ۲۰۰ cm هم می‌رسد. برای شخص معمولی، پیرچشمی (از دست دادن تطابق) در اوایل ۴۰ سالگی شروع می‌شود و حاکی از احتیاج به عینک مطالعه برای بازگرداندن نقطهٔ نزدیک به مکان مناسب خود یعنی حدود ۲۵ cm است.

توافق. توانایی چشم را برای پاسخ دادن به علائم نوری که در گستره‌ای از بسیار تیره تا بسیار روشن قرار می‌گیرند گسترهٔ شدتهایی که نسبت آنها به مقدار حیرت‌انگیز 10^5 می‌رسد توافق می‌نامیم. مقدار نور (شار یا تعداد فوتونها) که وارد چشم می‌شود قبل از همه با گشودگی قابل تنظیم عنبیه، یعنی مردمک، تعیین می‌شود. این تنظیم قطر مردمک (از ۸ mm تا حداقل ۲ mm) نمی‌تواند به تنهایی گسترهٔ فوق‌العاده زیاد شدتهایی را که چشم پردازش می‌کند توضیح دهد. در واقع، توافقپذیری قابل توجه چشم از نورپذیرنده‌های شبکیه، یعنی میله‌ها و مخروطها، و حساسیت مخصوص آنها به نور ریشه می‌گیرد. به نظر می‌رسد که عنصر اصلی عبارت است از رنگدانه‌ای در میله‌ها و مخروطها که رنگدانهٔ بینایی نامیده می‌شود. میله‌ها که با علائم نوری تراز پایین تحریک می‌شوند (دید تاریک) حاوی تنها یک نوع رنگدانه هستند که آن را ارغوانی بینایی می‌نامند. مخروطها که به علائم نوری با شدت زیاد و ترکیب رنگ متغیر حساس‌اند (دید روشن) هر یک

حاوی یکی از سه نوع رنگدانهٔ بینایی هستند. میله‌های باریک که تعداد آنها زیاد است به صورت چندتایی به رشته‌های عصبی متصل‌اند، و این باعث می‌شود تقریباً هر صد تا میله یک رشتهٔ عصبی منفرد را تحریک کنند. برعکس، مخروطها در ناحیهٔ لکه‌ای که پهن‌تراند و تعداد آنها کمتر است تک‌تک به رشته‌های عصبی متصل‌اند و آنها را به‌طور انفرادی تحریک می‌کنند. تحریک رشته‌های عصبی — که بخش اصلی فرایند دیدن است — به تغییرات شیمیایی که در رنگدانهٔ بینایی موجود در میله‌ها و مخروطها روی می‌دهند بستگی دارد. وقتی نور به هر یک از این دو نوع نورگیرنده می‌رسد رنگدانهٔ بینایی، طی نوعی فرایند سفیدشدگی، از حالت تیره به حالت روشنتر تغییر می‌یابد. تغییر حالت رنگدانهٔ بینایی در میله‌ها و مخروطها به خروجی الکتریکی یا تحریک رشتهٔ عصبی تبدیل می‌شود. این ضربه‌های الکتریکی به عصب بینایی و به مغز منتقل می‌شوند و به‌عنوان شدت نور علامت محرک ثبت می‌شوند. وقتی ارغوانی بینایی در میله‌ها کاملاً سفید شد، سلولهای نورپذیرنده به علام نوری بعدی ناحساس می‌شوند؛ و برای اینکه بتوانند دوباره پاسخ دهند باید رنگدانه در میله‌ها نوسازی شود. ظاهراً نوع منفرد رنگدانهٔ بینایی در میله‌ها بسیار بیشتر از هر یک از سه رنگدانهٔ مخروطها به نور حساس است. بنابراین، میله‌ها در مقایسه با مخروطها در ترازهای نور بسیار پاینتری کاملاً سفید می‌شوند. تغییر از نور تراز پایین یا دید تاریک به نور تراز بالا یا دید روشن در فرایند توافق شامل سفیدشدگی سریع رنگدانهٔ میله و بی‌حساسیتی حاصل برای پذیرنده‌های میله‌ای است. بنابراین، نور روشن عملاً با مخروطهای کمتر-حساس پردازش می‌شود. برعکس، توافق از نور روشن شدید (که توسط مخروطها پردازش می‌شود) تا نور بسیار تیره شامل نوسازی رنگدانه در میله‌ها و تجدید ”دید شب“ است. در فرایند کامل توافق، پاسخ تاریک روی ترازهای نوری فعال است که گسترهٔ آنها از نور ستاره در شب صاف بی‌مهتاب تا نور ماه در حالت تربیع است. پاسخ روشن (میله‌های کاملاً سفیدشده و نافع‌ال) بین ترازهای نوری عمل می‌کند که گسترهٔ آنها از فلق تا آفتاب درخشان است. بین ترازهای نور مربوط به حالت تربیع ماه و فلق، هم میله‌ها و هم مخروطها نور می‌گیرند و ضربه‌های عصبی را منتقل می‌سازند.

دید برجسته‌نما. توانایی تشخیص دقیق عمق یا مکان اشیاء در میدان سه‌بعدی را دید برجسته‌نما می‌نامند. در انسانها، اعصاب بینایی ناشی از دو چشم در تقاطع بینایی، نزدیک مغز، به هم می‌رسند. از تقاطع بینایی، رشته‌های عصبی ناشی از نیمهٔ راست هر چشم تا نیمهٔ راست مغز کشیده شده‌اند. رشته‌های عصبی ناشی از نیمهٔ چپ هر چشم به نیمهٔ چپ مغز منتهی می‌شوند. بدین ترتیب، با اینکه هر نیمهٔ مغز تصویری از هر دو چشم دریافت می‌کند، مغز تنها یک تصویر منفرد تشکیل می‌دهد. ترکیب دو تصویر متمایز در یک تصویر منفرد توسط مغز را دید دوچشمی می‌نامند. با وجود این،

اختلافات جزئی دو تصویر چشمهای چپ و راست اساس دید برجسته‌نما را در انسان تشکیل می‌دهند. باید توجه کرد که حتی دید تک‌چشمی بدون ادراک عمق نیست. این امر از آثار دیداری مانند پارالاکس، سایه‌افکنی و پرسپکتیو خاص اشیاء آشنا ناشی می‌شود.

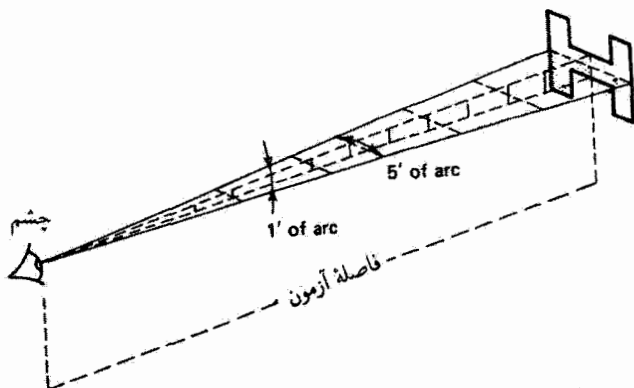
برای داشتن دید دوچشمی مناسب بدون دید دوتایی، تصاویر یک شیء باید در نقاط مربوط روی هر شبکیه واقع شوند. البته این چیزی است که وقتی روی می‌دهد که کره‌های چشم به‌طور مناسب حرکت می‌کنند تا روی شیء یا صحنه میزان شوند و در نتیجه تصویر روی لکه‌های زرد هر چشم می‌افتد. اکثر افراد یا راست چشم هستند یا چپ‌چشم، یعنی یک چشم بر دیگری تسلط دارد. برای اینکه چشم مسلط خود را تعیین کنید، آزمون ساده‌ی زیر را انجام دهید. قلمی را جلو خود هم‌تراز با چشم نگه دارید. در حالی که هر دو چشمتان باز هستند، قلم را در امتداد لبه‌ی قائم یک تصویر، پنجره یا در اتاق بگیرید. با ثابت نگه‌داشتن قلم، هر دفعه یک چشم خود را ببندید. چشمی که موقع باقی ماندن قلم در امتداد لبه‌ی مرجع باز است چشم مسلط شما است. مغز پیامی را ثبت می‌کند که چشم مسلط می‌بیند و پیام چشم دیگر را تضعیف می‌کند.

تیزبینی. توانایی دیدن واضح و ادراک تفاوت‌های واقعی مستگیری فضایی اشیاء به تیزبینی مربوط می‌شود. این توانایی مستقیماً به توان تفکیک چشم یا زاویه‌ی تفکیک مینیمم آن بین دو نقطه یا شیء نزدیک به هم بستگی دارد. به زبان فنی، تیزبینی بنا به تعریف معکوس زاویه‌ی مینیمم تفکیک است.

در عمل، تعیین توان تفکیک یا تیزبینی چشم به روش‌های مختلفی صورت می‌گیرد. تفکیک دو نقطه‌ای را جدایی‌پذیر مینیمم می‌نامند، کوچکترین زاویه‌ی تفکیک‌پذیری را که روی میله‌ی سیاهی واقع در یک متن سفید ساخته می‌شود پیدای مینیمم می‌نامند، و کوچکترین زاویه‌ای که روی حرف سیاهی (در یک لوح دید) که می‌توان آن را خواند ساخته می‌شود خوانای مینیمم نامیده می‌شود. چون برای اکثر ما پیش می‌آید که در آزمون بینایی لوح دید را بخوانیم، بحث خود را درباره‌ی تیزبینی به توانهای تفکیک مربوط به تفکیک خوانای مینیمم اختصاص می‌دهیم.

اصل لوح دید ابداع چشمپزشک آلمانی هرمان اسنلن است. طبق نظر اسنلن، حروف لوح دید طوری ترسیم می‌شوند که اندازه‌ی کل هر حرف، از بالا تا پایین و از پهلو تا پهلو، زاویه‌ای برابر با ۵' در فاصله‌ی آزمون می‌سازد. خطوط جزئی داخلی حروف، مانند خط قائم در حرف T یا خط افقی در حرف H، تماماً طوری ترسیم می‌شوند که پهنای هر "خط" زاویه‌ای برابر با ۷' در فاصله‌ی آزمون تشکیل می‌دهد. این دو انتخاب زاویه حاصل بهترین داده‌هایی هستند که اسنلن درباره‌ی تفکیک جدایی‌پذیر مینیمم چشم در اختیار داشته است. از نظر اسنلن، چشم عادی می‌توانست درست حرفی را تفکیک کند که در فاصله‌ی ۲۰ ft زاویه‌ی ۵' می‌سازد و زاویه‌ی مربوط به اجزاء آن ۷'

H	V	O	T	$\frac{20}{100}$		
H	T	O	V	T	H	$\frac{20}{40}$
T	V	H	O	V	T	$\frac{20}{20}$



شکل ۳-۷ ترسیم حرف H از لوح دید اسنلن برای اندازه‌گیری تیزی، به انضمام بخشی از لوح دید (کوچک شده) شامل حرف H و چند حرف دیگر.

است. شکل ۳-۷ را ببینید. در این وضعیت چشم را "عادی" می‌دانند، و تیزی آن را "دید $\frac{20}{20}$ " می‌نامند.

برای تشخیص نقایص تیزی، حروف اسنلن با اندازه‌های مختلف در لوح دید گنجانده می‌شوند. برای مثال، یک حرف بسیار بزرگ ممکن است طوری باشد که زاویه‌های $5'$ و $1'$ به‌ازای فاصله آزمون مثلاً 300 ft ساخته شوند. حروف دیگر را با اندازه مناسب ترسیم می‌کنند تا زاویه‌های $5'$ و $1'$ در فاصله‌های آزمونی مانند 200 ft ، 100 ft ، 80 ft و غیره تا حداقل 15 ft یا حتی 10 ft تشکیل شوند. آنگاه این حروف توسط شخص مورد آزمون در فاصله آزمون 20 ft خوانده می‌شوند و آنگاه تیزی را برحسب کسر اسنلن تعیین می‌کنند. صورت کسر اسنلن بیانگر فاصله آزمون ثابت است، و مخرج کسر فاصله‌ای را نشان می‌دهد که در آن کوچکترین حرف قابل خواندن کلاً زاویه $5'$ می‌سازد. برای مثال، اگر حرف سیاه بزرگ E که زاویه $5'$ در فاصله 300 ft تشکیل می‌دهد توسط شخص مورد آزمون که در فاصله 20 ft از این حرف نشسته است درست قابل خواندن باشد، تیزی را $\frac{20}{300}$ ثبت می‌کنند. کسر اسنلن $\frac{20}{300}$ به معنی این است که شخص مورد آزمون خوب نمی‌بیند، زیرا آنچه او در فاصله 20 ft می‌خواند با چشم عادی در فاصله 300 ft به همان خوبی خوانده می‌شود. در حالی که دید عادی $\frac{20}{20}$ است، افرادی که تیزی آنها به خوبی $\frac{20}{15}$ است نادر نیستند.

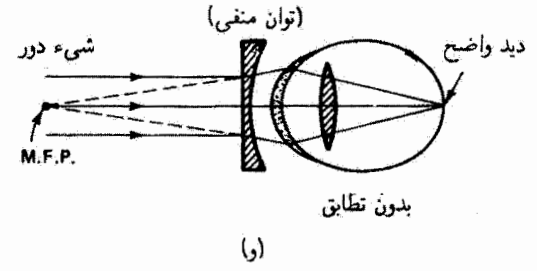
۷-۴ خطاهای شکست و تصحیح آنها

خطاهای شکست چشم باعث سه نقص مشهور در بینایی می‌شوند: نزدیک‌بینی، دوربینی، و آستیگماتیسم. دو نقص اول اکثراً به علت شکل غیرعادی کره چشم هستند، یعنی وقتی که چشم در امتداد محور بیش از حد بزرگ یا کوچک است. هر انحرافی از طول عادی به توانایی عناصر مرکب شکست، یعنی قرنیه و عدسی، برای تشکیل تصویر واضح اشیاء واقع در مکانهای دور و نزدیک آسیب می‌رساند. نقص سوم، آستیگماتیسم، از انحنای نامساوی یا نامتقارن در سطح قرنیه ناشی می‌شود که در نتیجه تمرکز همزمان تمام نور فرودی به چشم را غیرممکن می‌سازند. خطاهای شکست چه به صورت انفرادی باشند چه ترکیبی (که معمولاً به این صورت روی می‌دهند) عموماً با عینکهای مناسب قابل تصحیح‌اند.

به‌عنوان مرجعی برای تعیین انحراف دید ناقص از عادی، به نمودار چشم عادی که در قسمت چپ شکل ۷-۴ نشان داده شده است مراجعه کنید. چشم عادی با تطابق تصویری واضح از اشیائی تشکیل می‌دهد که بین نقطه دور آن (F.P.) در بینهایت و نقطه نزدیک آن (N.P.) اسماً در فاصله ۲۵ cm برای بزرگسال جوان قرار دارند. وقتی چشم عادی برای بینهایت (اشیاء دور) میزان شده است پرتوهای موازی نور وارد چشم آسوده می‌شوند و تصویر واضحی تشکیل می‌دهند (شکل ۷-۴الف). وقتی چشم عادی برای نقطه نزدیک میزان شده است (تطابق کامل) نور واگرا به چشم کشیده وارد می‌شود، و باز هم روی شبکیه کاملاً متمرکز می‌شود (شکل ۷-۴ب).

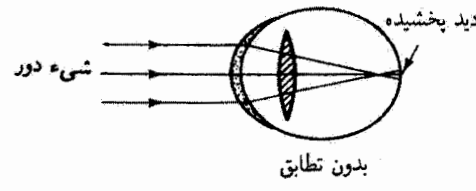
نزدیک‌بینی، چشم نزدیک‌بین در مقایسه با چشم عادی عموماً در امتداد محور از قرنیه تا شبکیه—درازتر از فاصله معمول و پذیرفته‌شده ۲۲ mm است. در نتیجه، و چنانکه در شکل ۷-۴ج با نمودار نشان داده شده است، چشم نزدیک‌بین تصویر واضحی از اشیاء دور را جلو شبکیه و البته تصویر پخشیده‌ای روی شبکیه تشکیل می‌دهد. تصاویر واضح شبکیه‌ای با چشم نزدیک‌بین تطابق نیافته تشکیل نمی‌شوند مگر اینکه شیء از بینهایت نزدیکتر آید و به نقطه دور نزدیک‌بینی، یعنی دورترین نقطه برای دید واضح (شکل ۷-۴د) برسد. از نقطه دور به این طرف، چشم نزدیک‌بین با تطابق مناسب کاملاً واضح می‌بیند، حتی در نقاط نزدیکتر از نقطه نزدیک عادی (شکل ۷-۴ه). چون بزرگنمایی زاویه‌ای جزئیات با نزدیکی به چشم افزایش می‌یابد، چشم نزدیک‌بین برای اشیائی که نزدیک چشم گرفته می‌شوند دید "عالی" دارد. (بنابراین، نزدیک‌بینی برای ساعت‌سازان، حداقل موقع کار، می‌تواند یک مزیت باشد.) پس به‌طور خلاصه، شخص نزدیک‌بین نسبت به شخصی با دید عادی میدان دید منقبض و کشیده به درون، نقطه دور نزدیکتر و نقطه نزدیک نزدیکتری دارد. در حالی که نقطه نزدیک نزدیکتر می‌تواند یک مزیت به حساب آید، نقطه دور نزدیکتر یک عیب بارز است و باید تصحیح شود.

چشم نزدیک بین (تصحیح شده)
عدسی

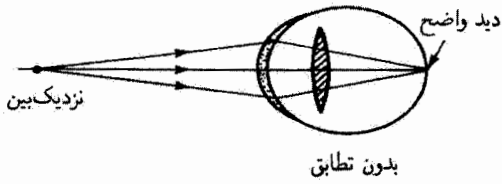


(ا)

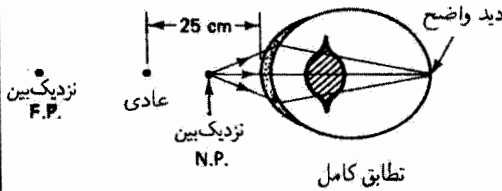
چشم نزدیک بین (غیر مسلح)



(ج)

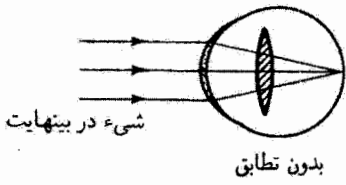


(د)

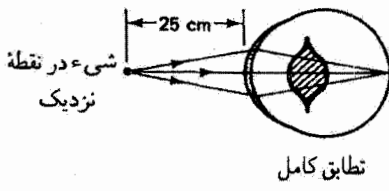


(ه)

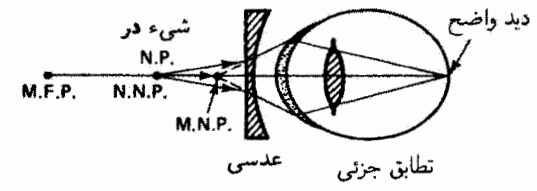
چشم عادی



(الف)



(ب)



(ز)

شکل ۷-۴ مقایسه دید عادی و نزدیک بین، با تصحیح اپتیکی. توجه کنید که شکست توسط عدسی چشم نشان داده نشده است. اختصارات عبارتند از: نقطه دور نزدیک بین، N.N.P. = نقطه نزدیک عادی؛ M.N.P. = نقطه نزدیک نزدیک بین.

دید نزدیک بین معمولاً با عینکی با توان شکست منفی (عدسی واگرا) که عملاً نقطه نزدیک و نقطه دور نزدیک بین را به مکانهای عادی می برد تصحیح می شود. شکل ۷-۴ و دید تصحیح شده را برای اشیاء دور نشان می دهد. توجه کنید که تا جایی که به اپتیک خود چشم مربوط می شود، به نظر می رسد که نور ناشی از اشیاء دور از نقطه دور مخصوص چشم نزدیک بین می آید. به طور مشابه، شکل ۷-۴ از وضعیت را برای دید نزدیک تصحیح شده تحت تطابق جزئی نشان می دهد. در این مورد، نور ناشی از شیء واقع در نقطه نزدیک عادی به نظر می رسد از نقطه ای می آید که از نقطه نزدیک واقعی چشم نزدیک بین کمی نزدیکتر است.

برای به دست آوردن بینشی درباره درجه عدسی با توان منفی که برای تصحیح دید نزدیک بین لازم است، به مثال زیر توجه کنید.

مثال

یک شخص نزدیک بین (بدون آستیگماتیسم) دارای نقطه دور 100 cm و نقطه نزدیک 15 cm است. (الف) چه تصحیحی باید چشمپزشک تجویز کند تا نقطه دور نزدیک بین را به بینهایت برسد؟ (ب) با این تصحیح، آیا این شخص نزدیک بین می تواند کتابی را که در نقطه نزدیک عادی، یعنی 25 cm از چشم، گرفته شده است بخواند؟

حل: (الف) با توجه به شکل ۷-۴ و استفاده از معادله عدسی نازک، به ازای $s \rightarrow \infty$ و $s' = -100 \text{ cm}$ داریم

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-100} = \frac{1}{f}$$

که از آن به دست می آوریم $f = -100 \text{ cm}$. بنابراین، عدسی عینک تصحیح کننده باید دارای فاصله کانونی -100 cm باشد. چشمپزشک باید عینکی با تصحیح -1.00 D (دیوپتر) تجویز کند.

(ب) با توجه به شکل ۷-۴ و باز هم استفاده از معادله عدسی نازک به ازای $f = -100 \text{ cm}$ و $s = 25 \text{ cm}$ ، تصویر مجازی s' به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{25} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{-100}$$

پس از حل داریم $s' = -20 \text{ cm}$. بدین ترتیب، تصویر مجازی حروف کتابی که در $s = 25 \text{ cm}$ گرفته شده است توسط عینک در فاصله 20 cm در جلو چشم تشکیل می شود. چون این شخص

نزدیک بین می‌تواند اشیائی را که تا فاصله 15 cm به چشم نزدیک‌اند به‌وضوح ببیند، تصویر مجازی حروف کتاب که در فاصله 20 cm تشکیل شده است بدون اشکال دیده می‌شود. در واقع، با استفاده از $1/s + 1/s' = 1/f$ به‌ازای $s' = -15\text{ cm}$ (نقطه نزدیک نزدیک بین برای این شخص) و $f = -100\text{ cm}$ ، معلوم می‌شود که اشیاء را می‌توان تا $s = 17.6\text{ cm}$ به چشم نزدیک کرد و باز هم آنها را به‌وضوح دید. ▲

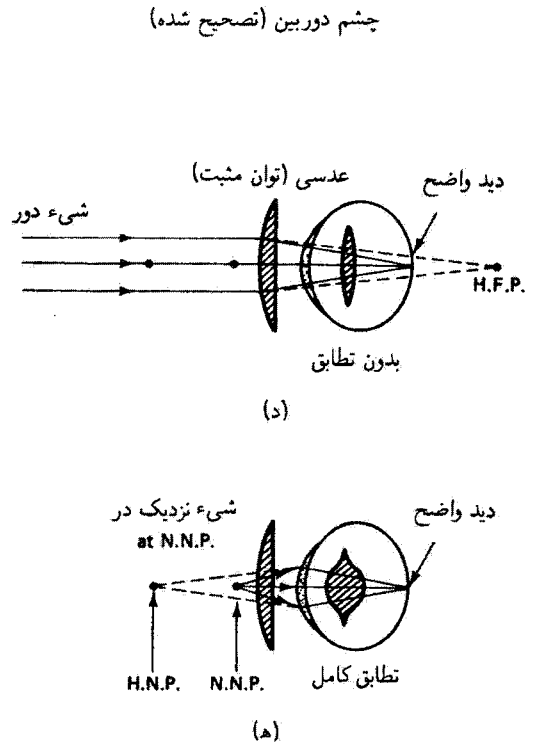
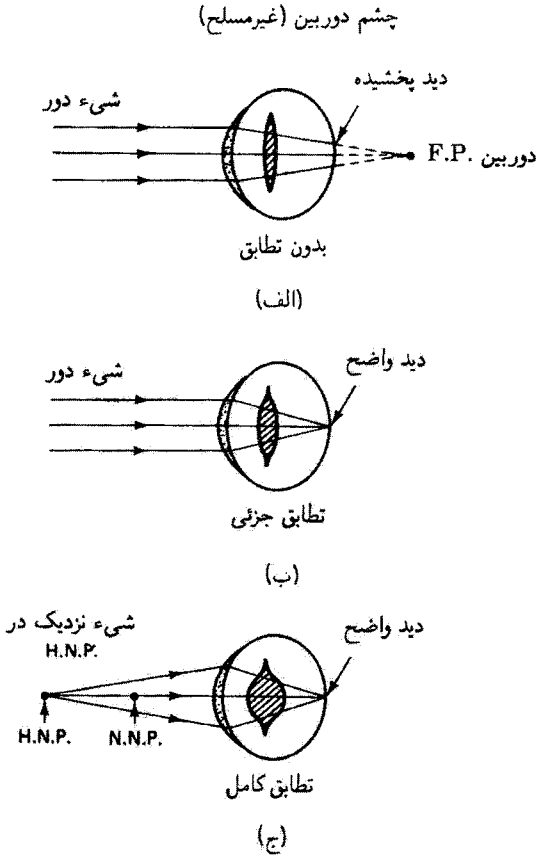
دوربینی. چشم دوربین عموماً کوتاه‌تر از چشم عادی است. در حالی که چشم نزدیک بین که درازتر از چشم عادی است در "دستگاه اپتیکی" خود دارای همگرایی بیش از حد است و احتیاج به عدسی واگرا برای تصحیح شکست زیادی خود دارد، چشم دوربین که کوتاه‌تر از چشم عادی است دارای همگرایی کمتر از حد است و احتیاج به عدسی همگرا برای افزایش شکست دارد. نمودارهای شکل ۵-۷، مشابه با نمودارهای شکل ۴-۷، نقایص و تصحیح مربوط به چشم دوربین را نشان می‌دهند. در شکل ۵-۷ الف، نور ناشی از شیء دور وارد چشم آسوده می‌شود و پشت شبکه متمرکز می‌شود، و باعث دید پخشیده می‌شود. نقطه کانونی پشت شبکه را به‌عنوان نقطه دور دوربین در نظر می‌گیرند. شکل ۵-۷ ب نشان می‌دهد چشم دوربین برای دید واضح اشیاء دور باید (و می‌تواند) تطابق کند. در شکل ۵-۷ ج دیده می‌شود که برای دید واضح، نقطه نزدیک دوربین دورتر از نقطه نزدیک عادی است. بنابراین، اشیائی که نزدیکتر از نقطه نزدیک دوربین واقع شده‌اند خارج از میزان هستند، حتی با تطابق کامل. دو اندازه تصحیح برای نقطه دور و نقطه نزدیک، با عینک مثبت مناسب روی چشم، در شکل ۵-۷ د و ه نشان داده شده‌اند. چشم تصحیح شده اکنون اشیاء دور را بدون تطابق واضح می‌بیند، و در نقطه نزدیک عادی اشیاء را با تطابق کامل واضح می‌بیند. در مثال زیر خواهیم دید که چگونه عینک‌سازان می‌توانند توان عینک لازم برای تصحیح دید دوربین را محاسبه کنند.

مثال

تشخیص داده شده است که یک شخص دوربین دارای نقطه نزدیک در 150 cm است. چه توان تصحیحی برای عینک لازم است تا به این شخص امکان دهد اشیائی را که به نقطه نزدیک عادی، فاصله 25 cm از چشم، آورده می‌شوند ببیند؟

حل: با توجه به شکل ۵-۷ ه و استفاده از معادله عدسی نازک، به‌ازای $s = 25\text{ cm}$ و $s' = -150\text{ cm}$ ، می‌توانیم فاصله کانونی عدسی لازم را به‌صورت زیر محاسبه کنیم

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{25} + \frac{1}{-150} = \frac{1}{f}$$



شکل ۷-۵ دید دوربین با تصحیح. اختصارات عبارت‌اند از: نقطه نزدیک دوربین؛ H.N.P. = نقطه نزدیک دوربین؛ N.N.P. = نقطه نزدیک عادی؛ H.F.P. = نقطه دور دوربین.

که به دست می‌دهد $f = +30 \text{ cm}$. چون توان برحسب دیوپتر با $1/f$ (برحسب m^{-1}) داده می‌شود، توانی برابر با 33 D به دست می‌آوریم. این شخص دوربین، با عینکی با توان $+33 \text{ D}$ اکنون می‌تواند اشیائی را که به فاصله 25 cm از چشم آورده شده‌اند واضح ببیند. ▲

آستیگماتیسم. چشم آستیگمات دچار انحنای نابرابر در سطح عناصر شکست و مهمتر از همه در قرنیه است. به‌طور کلی، شعاعهای انحنای سطح قرنیه در دو صفحه نصف‌النهاری (صفحه‌هایی که شامل محور اپتیکی هستند) با هم مساوی نیستند. این نامتقارنی منجر به توانهای شکست مختلف و در نتیجه تمرکز نور در فواصل مختلف از قرنیه می‌شود که البته حاصل آن دید پخشیده است. اگر این دو صفحه بر یکدیگر عمود باشند، مثلاً یکی افقی و دیگری قائم باشد، نقص را آستیگماتیسم منظم می‌نامند، و این وضعیت با عینک مناسب قابل تصحیح است. اگر دو

صفحه بر هم عمود نباشند — وضعیت نسبتاً نادری که آستیگماتیسم نامنظم نامیده می‌شود — بی‌هنجاری سطح را نمی‌توان به آسانی تصحیح کرد. آستیگماتیسم منظم را با سطوح استوانه‌ای که در سطح پشت شیشه عینک لازم تراش داده می‌شوند چاره می‌کنند. برای مثال، فرض کنید توان شکست در نصف‌النهار قائم قرنیه به اندازه یک دیوپتر بزرگتر از توان در نصف‌النهار افقی است. این وضعیت به معنی این است که سطح قرنیه در نصف‌النهار قائم خمیده‌تر است و اجزاء واقع در یک راستای قائم در یک شیء، نسبت به اجزاء واقع در راستای افقی، نزدیکتر به قرنیه میزان می‌شوند. یک سطح استوانه‌ای با توان منفی ۱ دیوپتر در نصف‌النهار قائم در نظر بگیرد. چون استوانه در امتداد محورش انحنا ندارد، سطح مزبور در نصف‌النهار افقی دارای توان نیست. اگر این سطح در طراحی عینک منظور شود، باید واپیچش ناشی از قرنیه را دقیقاً خنثی کند و توانهای مربوط به هر دو نصف‌النهار را با هم برابر کند. در نتیجه، جزئیات قائم و افقی در صحنه شیء در یک فاصله از قرنیه تشکیل می‌شوند، و پخشیدگی آستیگماتیک روی نمی‌دهد.

برای اکثر افراد، دید پخشیده نتیجه آستیگماتیسم توأم با نزدیک‌بینی یا دوربینی است. برای مثال، اگر شخصی آستیگماتیسم نزدیک‌بین داشته باشد، دید او به دو علت معیوب است. خود نزدیک‌بینی باعث پخشیدگی کلی اشیاء دور می‌شود؛ آستیگماتیسم با افزودن پخشیدگی بسیار زیادتری در یک نصف‌النهار نسبت به دیگری مشکل را مضاعف می‌کند. تصحیح این دو نقص با عدسیهای استوانه‌کروی صورت می‌گیرد: سطوح کروی برای تصحیح نزدیک‌بینی و سطوح استوانه‌ای برای تصحیح آستیگماتیسم.

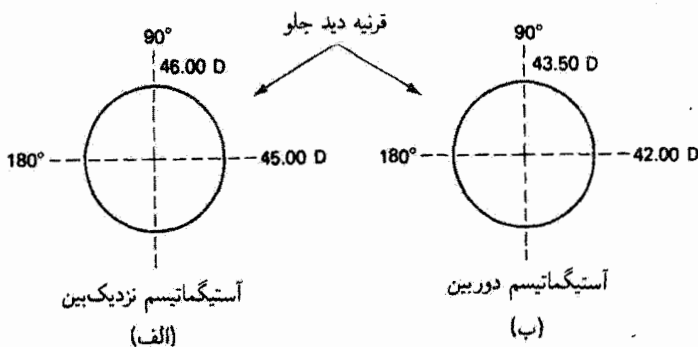
وقتی چشم‌پزشکان شیشه عینک تصحیح‌کننده را برای آستیگماتیسم نزدیک‌بین یا دوربین تجویز می‌کنند، کلاً سه عدد را تعیین می‌کنند. این سه عدد برای آستیگماتیسم نزدیک‌بین، که در نسخه نوشته می‌شوند، ممکن است به صورت زیر باشند

$$R_x : -2.00 - 1.00 \times 180$$

برای آستیگماتیسم دوربین، این تجویز می‌تواند به صورت زیر باشد

$$R_x : +2.00 - 1.50 \times 180$$

اولین عدد مربوط به توان کره است، یعنی توان لازم برحسب دیوپتر مربوط به سطح کروی عدسی عینک که نزدیک‌بینی یا دوربینی کل را تصحیح می‌کند. دومین عدد مربوط به توان استوانه است، یعنی توان لازم مربوط به سطح استوانه‌ای که در سطح پشت عدسی عینک برای تصحیح



شکل ۶-۷ شرایط آستیگماتیسم نزدیک بین و دور بین با تجویزهای عینک تصحیح کننده. (الف) شکست در نصف النهار 180° مقدار $D - 20^\circ$ برای نزدیک بینی تعیین می کند. تجویز شیشه عینک عبارت است از $180^\circ \times 180^\circ - 20^\circ$. R_x : (ب) شکست در نصف النهار 180° مقدار $D + 20^\circ$ برای دور بینی به دست می دهد. تجویز شیشه عینک عبارت است از $180^\circ \times 180^\circ - 15^\circ$. R_x :

آستیگماتیسم قرار دارد. سومین عدد مربوط به سمتگیری محور استوانه است و تعیین می کند این محور باید قائم، افقی یا در راستایی بین این دو باشد. در نمادنگاری عینک سازی، محور افقی با 180° یا $180^\circ \times$ و محور قائم با $90^\circ \times$ نشان داده می شوند.

شکل ۶-۷ شرایط اپتیکی مربوط به تجویزهای تصحیح کننده را که در بالا برای آستیگماتیسم نزدیک بین و دور بین بیان کردیم نشان می دهد. برای مورد آستیگماتیسم نزدیک بین (شکل ۶-۷ الف) سطح قرنیه به وضوح در نصف النهار افقی ($D = 4500^\circ$ = توان) کمتر از نصف النهار قائم ($D = 4600^\circ$ = توان) خمیده است. در این مثال، تصحیح نزدیک بین، که همیشه در نصف النهار مربوط به کمترین توان شکست اندازه گیری می شود، برابر با $D - 20^\circ$ در امتداد نصف النهار افقی است. تصحیح آستیگمات، با محور استوانه ای افقی ($180^\circ \times$)، برابر با $D - 15^\circ$ به دست می آید. با این سطح استوانه ای مناسب که در پشت شیشه عینک تراش داده شده است، این تصحیح $15^\circ -$ دیوپتری توان در نصف النهار قائم را از $D = 4600^\circ$ به $D = 4500^\circ$ کاهش می دهد، و در نتیجه توانهای شکست در دو نصف النهار را با هم برابر می کند و آستیگماتیسم قرنیه را خنثی می سازد.

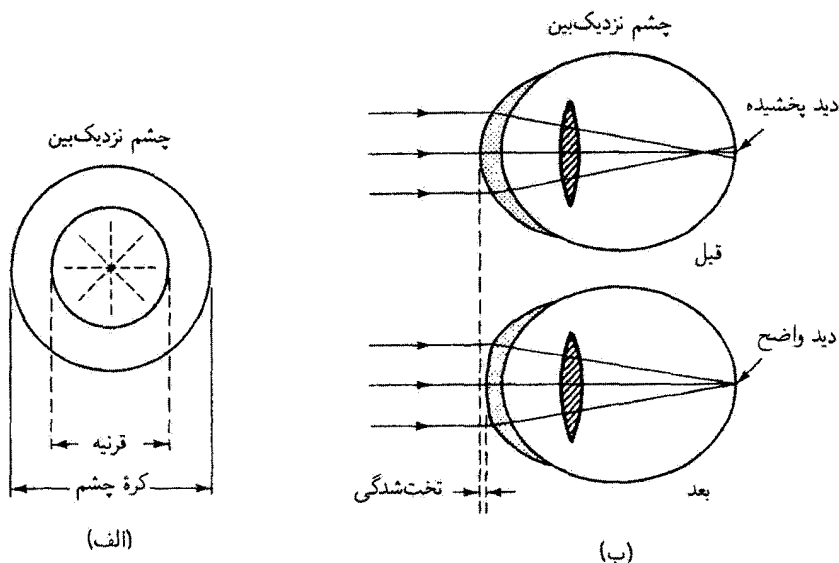
شکل ۶-۷ ب وضعیت و تجویز مشابهی را برای آستیگماتیسم دور بین نشان می دهد. توجه کنید که تصحیح توان کره ای برابر با $D + 20^\circ$ لازم است تا دور بینی تصحیح شود، و تصحیح توان استوانه $D - 15^\circ$ در امتداد نصف النهار قائم ($180^\circ \times$) لازم است تا توان شکست در دو نصف النهار متعادل را یکسان کند.

۷-۵ لیزر درمانی نقایص چشم

تمام مسائل چشم را نمی‌توان مانند نقایص ساختاری که در بالا از آنها بحث کردیم با روشهای اپتیکی توسط عینکهای مناسب حل کرد. بعضی اختلالات اندامی وجود دارند که مستلزم معالجه اساسی، از جمله غالباً جراحی، هستند. لیزر، که در فصل ۲۱ از آن بحث می‌کنیم، به‌عنوان ابزاری قوی در اتاق عمل پدیدار شده است و استفاده از آن در معالجه نقایص عمده چشم موفقیت‌آمیز بوده است.

باریکه‌های لیزری، هم به‌صورت موج پیوسته و هم به‌صورت تپ، برای معالجه آب سیاه، خونریزی شبکیه، واگنی لکه زرد، جداولدگیهای شبکیه، و غشاهای درون‌چشمی کدر شده کاربرد رایج دارند. آب سیاه گوشه‌ای که مشخصه آن افزایش فشار مایع داخل چشم است و منجر به کوری تدریجی می‌شود، با لیزرهای آرگون (A) و نئودیمیم: ایتیریم آلومینیم لعل (Nd : YAG) معالجه می‌شود. این معالجه عبارت است از اصلاح معایب ساختاری در چشم، که باعث افزایش فشار می‌شوند، با استفاده از باریکه لیزری برای باز کردن مجاری گرفته یا ایجاد مجاری جدید برای زهکشی بهتر بین اتاقکهای چشم. از لیزر همچنین برای معالجه آسیبهای شبکیه‌ای ناشی از دیابت که علت عمده کوری است به‌طور مؤثری استفاده می‌شود. برای از بین بردن این نوع اختلالات اندامی، از انرژی گرمایی باریکه لیزری برای ایجاد هزاران سوختگی یا جوش کوچک در پشت شبکیه استفاده می‌شود، و در نتیجه جلوه رشد مضر یا رشد عروق خونی ناخواسته جدید (پدیده رگ‌دار شدن) گرفته می‌شود. از گرمای باریکه لیزری، که هر جا انعقاد شبکیه لازم باشد بسیار مؤثر است، همچنین برای دوختن یا جوش دادن شبکیه‌هایی که در نقاط کناری از مشیمیه دور می‌افتند استفاده می‌شود. در واقع، این روش اولین کاربرد موفقیت‌آمیز لیزر در دنیای پزشکی بود.

لیزرهای با گسیل در فرابنفش دور، اصولاً لیزرهای اکسایمر، باعث امیدواری زیاد برای تغییر شکل کره چشم به‌منظور تصحیح دید نزدیک‌بین (برش شعاعی قرنیه) شده‌اند و همچنین برای تخلیه آب مروارید به‌کار می‌روند که مشخصه بیماری آن بسته‌های ابری یا تغییر رنگ کدر در بافت عدسی چشم است و باعث کاهش شدید دید می‌شود. امروزه، رایجترین کاربرد لیزرها در درمان چشم عبارت است از استفاده از لیزر Nd : YAG در عملی که غشاهای داخلی چشم را پاره می‌کند. پس از جراحی آب مروارید - برداشتن عدسی آب آورده و نشان دادن یک عدسی پلاستیکی - بعضی از غشاهایی که به نگهداری عدسی جدید در جای خود کمک می‌کنند کدر می‌شوند و عملاً راه نور را در امتداد محور دید می‌بندند. در یک عمل ترمیمی که برش کپسول خلفی نامیده می‌شود یک باریکه لیزری پرا انرژی را در نقطه کوچکی نزدیک غشای کدر شده متمرکز می‌کنند. به‌علت تولید چگالیهایی توان بسیار زیاد، فروریزش دی‌الکتریکی محیط اپتیکی که امواج شوک آکوستیکی را به



شکل ۷-۷ حذف نزدیک بینی با تغییر شکل قرنیه در عمل برش شعاعی قرنیه. (الف) نمای جلو از برشهای شعاعی. (ب) نمای جانبی قبل و بعد از برش.

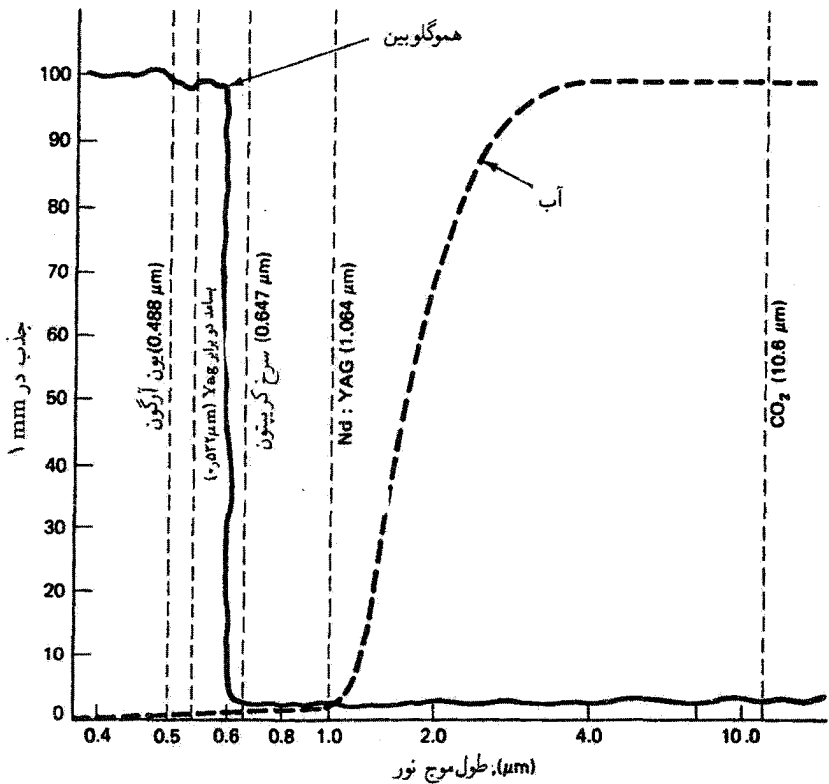
دنبال دارد روی می دهد. فشار بسیار زیاد مربوط به این امواج غشا را پاره می کند و باعث عبور نور و بازگشت بینایی می شود. عملهایی که تحت عنوان برش شعاعی قرنیه و برش کپسول خلفی نام برده شدند با تفصیل بیشتری در بخشهای زیر بررسی می شوند.

برش شعاعی قرنیه. در این عمل تغییر شکل چشم برشهای شعاعی در قرنیه کره دراز شده چشم نزدیک بین ایجاد می شود (شکل ۷-۷ را ببینید). پس از اینکه برشها بهبود یافتند، قرنیه تخت می شود و در نتیجه طول محوری چشم کم می شود. بدین ترتیب، دید عادی یا نزدیک به عادی باز می گردد. این عمل اساسی، که اکثراً با تیغ جراحی در دست چشمپزشک ماهر انجام می شود، ابتدا در اتحاد شوروی در سال ۱۹۷۲ صورت گرفت. چنانکه نقل کرده اند، یک نوجوان نزدیک بین روسی به نام باریس پتروف درگیر یک زدو خورد در حیاط مدرسه ای در مسکو شده بود. یک ضربه محکم مشت از حریف باعث خرد شدن یکی از شیشه های ضخیم عینک او می شود. بعضی از خرده های شیشه، در یکی از حوادث عجیب روزگار، به طرز شعاعی منظمی وارد قرنیه نوجوان می شوند اما عمیقاً در آن نفوذ نمی کنند. چشمپزشک شوروی به نام اسویاتوسلاو ن. فیودوروف، که این نوجوان را عمل کرد، با وجود اینکه بریدگیها سطحی بودند امید چندان زیادی به بازگشت دید چشم نداشت. اما با کمال تعجب، وقتی سطح قرنیه با تمام زخمهایش خوب شد، قرنیه تخت شده بود و بیشتر نزدیک بینی از بین رفته بود. فیودوروف که به اهمیت آنچه شاهدش بود پی برده بود تصمیم گرفت چیزی را که با

یک مشت و تصادف به انجام رسیده بود تحت شرایط کنترل شده تکرار کند. او این کار را بارها در عملی که بعداً برش شعاعی قرنیه نام گرفت انجام داد. همین عمل در ایالات متحده با هیاهوی بسیار همراه بوده است. این عمل با یک تیغ جراحی مانعدار با موفقیت انجام شده است (و می‌شود). نتایج کوتاه مدت چشمگیر بوده‌اند؛ اما برای تضمین نتایج درازمدت و سودمند، زمان به اندازه کافی سپری نشده است. در واقع، در بعضی موارد، نزدیک بینی بهبود یافته است اما متأسفانه آستیگماتیسم جانشین آن شده است. بدین ترتیب، این عمل امروزه با یک زمینه تجربی صورت می‌گیرد.

تا آنجا که به لیزر مربوط می‌شود، مسئله برش شعاعی قرنیه عبارت است از استفاده از یک لیزر پر قدرت و دقیقاً میزان شده به جای تیغ جراحی. چون قرنیه حاوی مقدار فراوانی آب است، ضریب جذب بسیار زیادی برای تابش فروسرخ در $10.6 \mu\text{m}$ (لیزر دی‌اکسید کربن، CO_2) و تابش فرابنفش زیر 400 nm دارد. شکل ۷-۸ جذب نسبی نور لیزر در 1 mm را بر حسب طول موج برای آب (منحنی چین) و هموگلوبین (منحنی پر) نشان می‌دهد. توجه کنید که در $10.6 \mu\text{m}$ ، ضریب جذب تقریباً 100% است، و این ادعا را که تابش لیزر CO_2 توسط قرنیه شدیداً جذب می‌شود تأیید می‌کند. (در ضمن، همچنین توجه کنید که تابش لیزر یون آرگون و Nd : YAG با بسامد دو برابر شدیداً در نزدیکی 500 nm در هموگلوبین جذب می‌شود، و از این رو هر یک از این دو برای معالجات همراه با انعقاد نوری کاملاً مفید است.) باریکه لیزری پراورزی، که تقریباً به طور کامل توسط بافت قرنیه جذب می‌شود، با ایجاد بریدگی یا شیار ظریفی در حدود پهنای باریکه لیزری قرنیه را حکاکی می‌کند. تیغ جراحی که معمولاً در برش شعاعی قرنیه به کار برده می‌شود حدود $50 \mu\text{m}$ تا $100 \mu\text{m}$ ضخامت دارد. نور لیزرهای CO_2 را تا کمتر از $50 \mu\text{m}$ و لیزرهای اکسایمر را حتی از این هم کمتر می‌توان باریک کرد. شکل ۷-۹ یک مقطع بافت شناختی ($\times 100$) از برشی را که با لیزر CO_2 در قرنیه گاو ایجاد شده است نشان می‌دهد. این لیزر با توان متوسط 5 W متمرکز در باریکه‌ای با پهنای کمتر از $50 \mu\text{m}$ ، پس از 20 عبور، شیاری به عرض حدود $60 \mu\text{m}$ و به عمق بیشتر از $400 \mu\text{m}$ ایجاد کرده است. پس اگر بتوانیم پهنای باریکه لیزری را تنظیم و توان باریکه را کنترل کنیم، می‌توانیم برشهای شعاعی تمیزی با پهنای و عمق مطلوب (به ترتیب $50 \mu\text{m}$ و حدود $400 \mu\text{m}$) در سطح قرنیه به وجود آوریم. با این کار بزرگ، که با کنترل ریزردازشگر دور از واقعیت نیست، دقیقاً برشهایی با تعداد و ماهیت لازم برای از بین بردن نزدیک بینی و پیشگیری از آستیگماتیسم جنبی ناخواسته به وجود می‌آیند. در این صورت، افرادی که نزدیک بین هستند می‌توانند به تصحیح با عینک یا تصحیح "دائم" با تغییر شکل کره چشم امیدوار باشند.

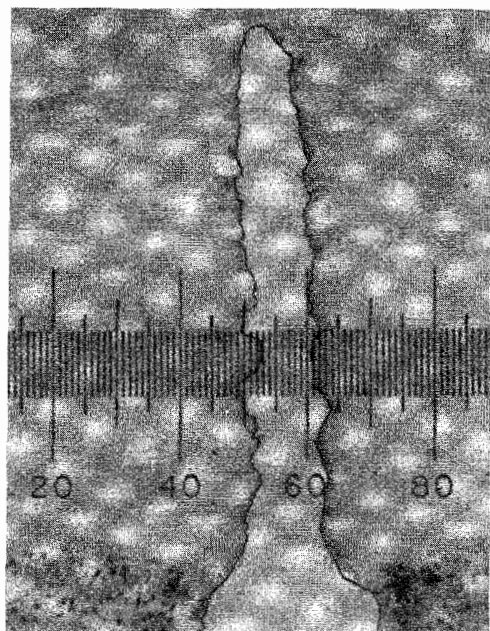
برش کپسول خلفی. در یک عمل اندکی متفاوت که برش کپسول خلفی نامیده می‌شود از یک لیزر Nd : YAG برای پاره کردن غشاهای کدر شده ناخواسته استفاده می‌کنند. لیزر تپی Nd : YAG



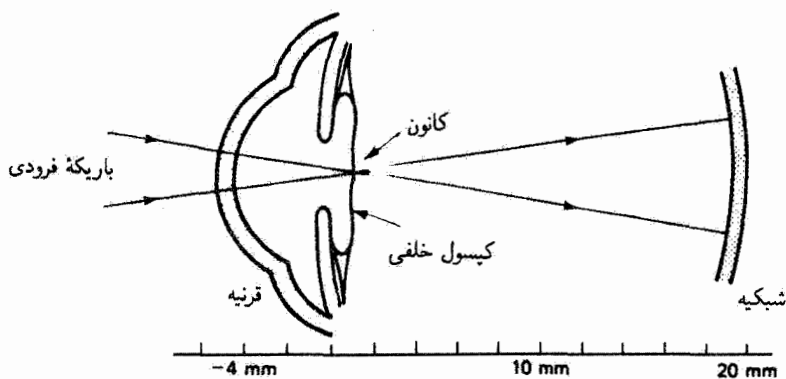
شکل ۷-۸ جذب نور لیزر در بافت چشم برای چند لیزر مهم. درصد جذب برای ۱ mm آب (منحنی خط چین) و ۱ mm هموگلوبین (منحنی پر) است. توجه کنید که تابش در $1.06 \mu\text{m}$ تقریباً به طور کامل در قرنیه جذب می‌شود، در حالی که در $1.06 \mu\text{m}$ را تقریباً به طور کامل عبور می‌کند.

باریکه‌ای در $1.06 \mu\text{m}$ گسیل می‌کند که اساساً بدون جذب از قرنیه و زلالیه و عدسی می‌گذرد. (شکل ۷-۸ را برای درصد جذب در $1.06 \mu\text{m}$ ببینید.) باریکه لیزری پر شدت به قسمت جلو چشم نفوذ می‌کند و درست پشت عدسی نشانده، تقریباً به فاصله ۴ mm از سطح جلو قرنیه، دقیقاً متمرکز می‌شود (شکل ۷-۱۰ را ببینید). در اینجا غشای کدر شده قرار دارد که قسمت خلفی یک بالش تارمانند (کپسول) است که قبلاً عدسی آب آورده را دربر داشته است و اکنون عدسی مصنوعی را می‌پوشاند.

قبل از جراحی لیزری، غشای کدر شده چشم را همیشه با ابزارهای جراحی شکافنده داخل وریدی برمی‌داشتند. این نوع جراحی علاوه بر آسبایی که به همراه دارد همیشه با امکان وارد شدن



شکل ۹-۷ مقطع بافت شناختی (×۱۰۰) برش لیزری در قرنیه گاو. کوچکترین تقسیمات مقیاس برابر با ۵μm است.



شکل ۱۰-۷ نمای جانبی باریکه لیزری Nd : YAG که روی کپسول خلفی میزان شده است.

اشیاء خارجی و خطر مضاعف عفونت صورت می‌گیرد. اما جراحی لیزری Nd : YAG، که به روش سرپایی و در مدت چند دقیقه انجام می‌شود، نه آسیب‌رسان است و نه عفونت‌زا. جراحی لیزری بدون تخریب عمدتاً به علت عملهای موفقیت‌آمیزی گسترش یافت که دانیل آرون-رزا و

همکارانش در بیمارستان تروزو در پاریس و فرانتس فانکهارزو همکارانش در کلینیک چشم دانشگاه در برن سوئیس انجام دادند. در برش کپسول خلفی، چنانکه امروزه در سراسر دنیا صورت می‌گیرد، یک تپ کوتاه از تابش لیزری $106\mu\text{m}$ تا 10^6 روی هدف متمرکز می‌شود. تپی که نوعاً لیزر Nd : YAG با سوئیچ Q می‌فرستد دارای انرژی ۱ تا ۴ mJ و پهنای تپ چند نانوثانیه است. با یک لیزر مد قفل‌شده، انرژی تپ در همین حدود است اما پهنای تپ بسیار کمتر است و تنها چند ده پیکوثانیه ادامه دارد. با این زمان کوتاه، توان لیزر، حتی برای انرژی تپی به کمی چند میلی ژول، به گسترهٔ مگاوات و بیشتر از آن می‌رسد.

مثال

تابیدگی (توان در واحد سطح) را برای یک تپ لیزر Nd : YAG با انرژی ۴ mJ و پهنای تپ ۱ ns وقتی روی هدفی با قطر $30\mu\text{m}$ میزان شده است به دست آورید.

حل: تابیدگی E_e مستقیماً به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E_e = \frac{P}{A}$$

که در آن

$$P = \frac{4 \times 10^{-3} \text{ J}}{1 \times 10^{-9} \text{ s}} = 4 \times 10^6 \text{ W}$$

و

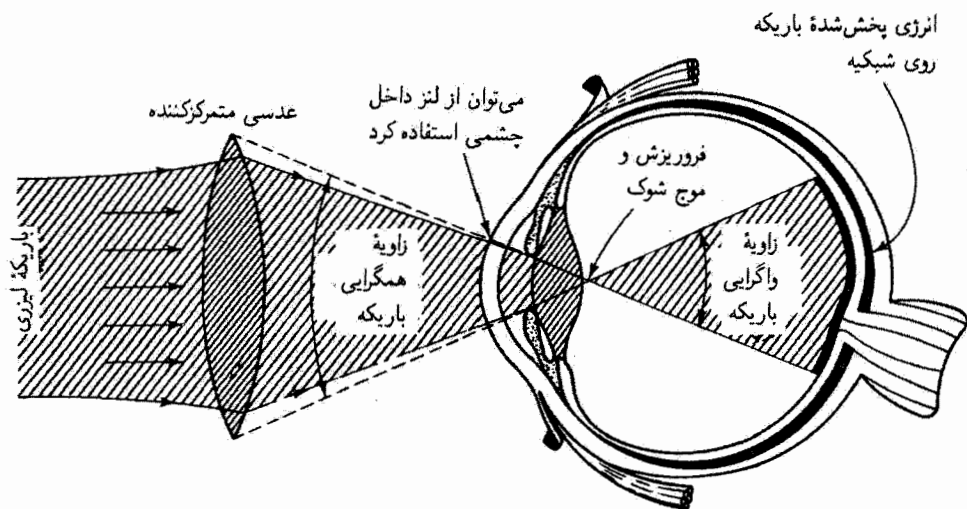
$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{(3.14)(30 \times 10^{-6})^2}{4} = 7.065 \times 10^{-10} \text{ m}^2$$

بنابراین،

$$E_e = \frac{4 \times 10^6 \text{ W}}{7.065 \times 10^{-10} \text{ m}^2} = 5.7 \times 10^{15} \text{ W/m}^2$$

یا

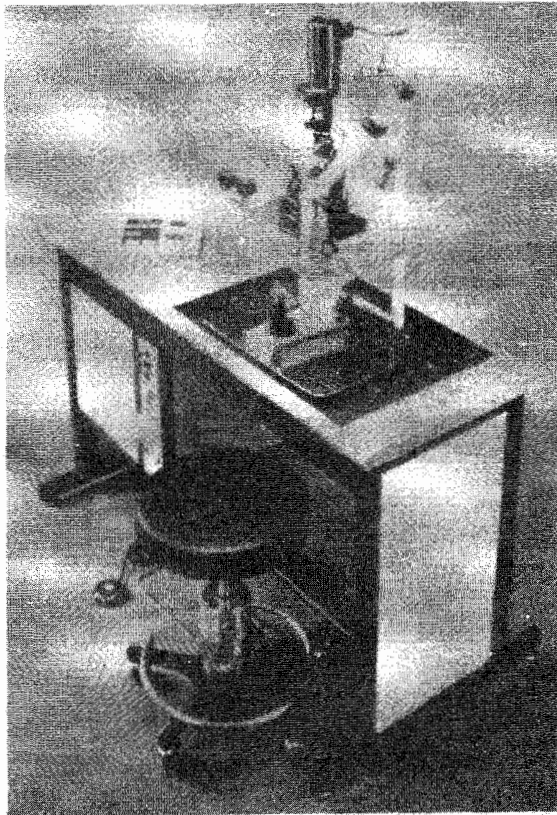
$$E_e = 5.7 \times 10^{11} \text{ W/cm}^2$$



شکل ۷-۱۱ تمرکز نور لیزر برای پاره کردن غشا در برش کپسول خلفی. هر چه زاویه همگرایی باریکه (حدود 17°) که توسط گشودگی مردمک محدود می شود بیشتر باشد زاویه واگرایی باریکه بیشتر است و تأثیر تابش لیزر روی شبکیه کمتر است.

چنانکه مثال بالا نشان می دهد، وقتی توانهای زیاد روی هدفی در لکه های کوچک با قطره هایی در گستره ۵ تا $50 \mu\text{m}$ متمرکز می شوند، تابیدگی یا چگالی توانی حدود 10^{11}W/cm^2 تولید می شود. این مقدار چگالی توان با میدان الکتریکی بسیار شدیدی همراه است که اولاً باعث فروریزش دی الکتریکی بافت اپتیکی می شود و ثانیاً پلاسما تولید می کند. این تولید انفجاری پلاسما منجر به یک موج شوک قوی می شود که به طور شعاعی به سمت خارج حرکت می کند و غشای کدر شده محکمی را که به آن نزدیک است پاره می کند. نه تابش لیزری که به سمت شبکیه پیش می رود و نه موج شوک در حال انبساط آسیبی به نقاط دیگر چشم وارد نمی کنند.

نمای بزرگ شده ای از این جزئیات در شکل ۷-۱۱ نشان داده شده است. باریکه لیزری که به عدسی متمرکزکننده فرود می آید توسط عناصر اپتیکی قبلی انبساط یافته است به طوری که واگرایی آن بسیار کم است (باریکه فوق العاده موازی شده است). به علت این امر و توانایی تمرکز باریکه های لیزری بسیار همدوس و موازی شده روی مساحت های بسیار کوچک هدف، باریکه به یک "نقطه" نزدیک غشای کدر شده می گراید، و فروریزش دی الکتریکی ایجاد می کند که باعث پارگی مکانیکی غشا می شود. در شکل ۷-۱۲ نمونه دستگاه لیزر Nd : YAG که در عمل پاره کردن غشا به کار می رود نشان داده شده است. شکل ۷-۱۳ موقعیت بیمار، چشمپزشک، و دستگاه لیزر را در عمل برش کپسول خلفی نشان می دهد.

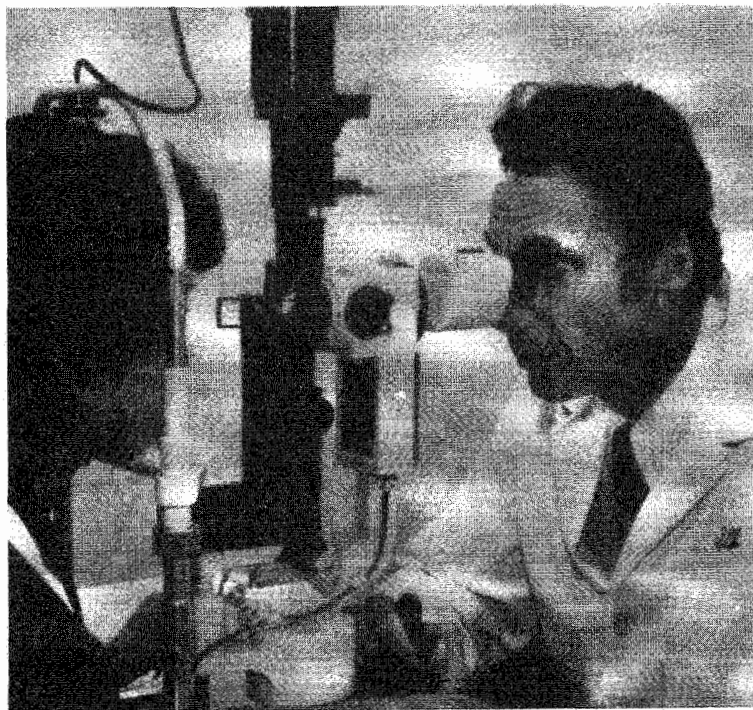


شکل ۱۲-۷ نمونه دستگاه لیزر Nd : YAG با لامپ شکاف چشمپزشکی برای انجام دادن برش کپسول.

مسائل

۱-۷ از جدول ۱-۷ دیده می‌شود که شعاع انحنای قرنیه برای چشم نموداری بدون تطابق ۸ mm است. اگر قرنیه را یک جدار نازک (که از شکست آن می‌توان صرف‌نظر کرد) بگیریم که از یک طرف توسط هوا و از طرف دیگر توسط مایع زلالیه احاطه شده است، توان شکست سطح قرنیه را به دست آورید. (توجه کنید که توان شکست مزبور بنا به قرارداد به فاصله کانونی کوتاه‌تر آن مربوط می‌شود.)

۲-۷ عدسی بلورین تطابق نیافته چشم را به صورت یک واحد منفرد در نظر بگیرید که شعاعهای انحنای ضریب شکست مؤثر آن برای چشم نموداری در جدول ۱-۷ داده شده‌اند. (الف) فاصله کانونی و توان شکست آن را به عنوان یک عدسی نازک در هوا محاسبه کنید.



شکل ۱۳-۷ دستگاه لیزر با لامپ شکاف چشمپزشکی برای پاره کردن غشای کدرشده.

(ب) فاصله کانونی و توان شکست آن را به عنوان یک عدسی نازک در محیط واقعی، که در دو طرف آن مایعی با ضریب شکست ۱.۳۳ قرار دارد، به دست آورید.

(ج) فاصله کانونی و توان شکست آن را به عنوان یک عدسی ضخیم با ضخامت ۳.۶ mm تعیین کنید. (فنون ماتریسی فصل ۴ را می‌توانید برای این مسئله به‌کار ببرید.)

۳-۷ با استفاده از جدول ۱-۷ و شکل ۲-۷ برای مقادیر ضرایب شکست و فاصله‌های میان عناصر چشم نموداری بدون تطابق، تعیین کنید در چه فاصله‌ای پشت قرنیه تصویر واضح از (الف) شیء در بینهایت و

(ب) شیء واقع در فاصله ۲۵ cm از چشم، تشکیل می‌شود. در زنجیره‌ای از محاسبات سه مرحله‌ای، از فرمول گاوس برای تشکیل تصویر در آینه کروی استفاده کنید. در قسمت (ب) فرض کنید تطابق کامل چشم به صورت زیر انجام می‌شود: سطح جلو عدسی خمیده‌تر است و شعاع آن $+۶ \text{ mm}$ است اما سطح پشت در -۶ mm باقی می‌ماند. در نتیجه، ضخامت عدسی در امتداد محور به ۴ mm افزایش می‌یابد و فاصله قرنیه تا سطح جلو عدسی به ۳.۲ mm کاهش می‌یابد.

۴-۷ با استفاده از رهیافت ماتریسی برای تعیین ماتریس دستگاه مربوط به چشم نموداری بدون تطابق (جدول ۱-۷ و شکل ۲-۷).

(الف) چهار عنصر ماتریسی مربوط به ماتریس دستگاهی را به دست آورید که از شکست اول در قرنیه تا شکست نهایی در دومین سطح عدسی گسترده است.

(ب) از این عناصر ماتریسی، نقاط کانونی اول و دوم و نقاط اصلی اول و دوم را نسبت به سطح قرنیه تعیین کنید. با فاصله‌ای که در شکل ۲-۷ داده شده است مقایسه کنید.

۵-۷ فرض کنید از شما خواسته شده است یک لوح چشم اسنلن را برای فاصلهٔ آزمون ۵ ft طراحی کنید. این لوح باید شامل سطوری با حروف آزمون برای تیزبینهای $20/300$ (برابر با $5/75$)، $20/100$ ، $20/60$ ، $20/20$ ، و $20/15$ باشد. اندازه‌های حرف بزرگ و جزئیات هر حرف را (برحسب اینچ) برای هر سطر از حروف تعیین کنید.

۶-۷ یک شخص دوربین دارای آستیگماتیسم نیست و نقطهٔ نزدیک او ۱۲۵ cm است. تصحیح با عینک باعث می‌شود این شخص اشیاء را در نقطهٔ نزدیک عادی (۲۵ cm) واضح ببیند.

(الف) توان عدسی تصحیح‌کننده را به دست آورید.

(ب) آیا این عینک تصحیح‌کننده می‌تواند اشیاء دور را روی شبکه میزان کند؟

۷-۷ شخصی دارای نقطهٔ دور ۵۰ cm و نقطهٔ نزدیک ۱۵ cm است. عینک او چه توانی باید داشته باشد تا این نقطهٔ دور را تصحیح کند؟ با استفاده از این عینک، نقطهٔ نزدیک جدید این شخص در چه فاصله‌ای است؟

۸-۷ با بررسی شکل ۸-۷، تعیین کنید چه لیزرهایی برای موارد زیر مناسب‌اند:

(الف) انعقاد نوری رگهای خونی روی شبکه؛

(ب) برش گرمایی لایه‌های قرنیه؛

(ج) تمرکز انرژی نور در اتاقک زجاجیه‌ای بدون جذب در عبور از قرنیه، مایع زلالیه، عدسی، و رگهای مربوط.

۹-۷ با توجه به تجویزهای زیر برای عینک، خطاهای شکست مربوط به هر یک را تعیین کنید.

(الف) $180^\circ \times -1.50^\circ, -1.50^\circ$

(ب) -2.00

(ج) $+2.00$

(د) $180^\circ \times -1.50^\circ, +2.00$

۷-۱۰ برای انجام برش قرنيه که در شکل ۷-۹ نشان داده شده است از یک لیزر CO_2 استفاده شده است که دارای توان متوسط 5 W و واگرایی باریکه 2.2 mrad است. باریکه پس از خارج شدن از لیزر از یک انبساطگر باریکه $5\times$ عبور می‌کند و سپس با یک عدسی ژرمانیم با فاصله کانونی 33 cm روی قرنيه متمرکز می‌شود.

(الف) چرا از ژرمانیم (و نه شیشه) برای ماده عدسی استفاده شده است؟

(ب) در بخش ۲۱-۴ که در آن از تمرکزپذیری لیزر بحث می‌شود، نشان داده شده است که پخش شدگی زاویه‌ای (واگرایی) برای باریکه لیزری انبساط یافته برابر است با واگرایی باریکه فرودی تقسیم بر ضریب انبساط باریکه. بدین ترتیب، واگرایی باریکه این لیزر CO_2 را پس از عبور از انبساطگر باریکه $5\times$ به دست آورید.

(ج) با استفاده از فرمول تقریبی $D = f\phi$ ، که در آن f فاصله کانونی و ϕ واگرایی باریکه انبساط یافته است، قطر D مربوط به لکه کانون روی قرنيه را تعیین کنید. (برای بحثی درباره این معادله به بخش ۲۱-۴ مراجعه کنید.)

(د) چگالی توان (تابیدگی) این باریکه لیزر CO_2 متمرکز روی قرنيه را به دست آورید.

۷-۱۱ برای جراحی برش کپسول خلفی که در این فصل توصیف شد، داده‌های نوعی زیر را در اختیار داریم:

لیزر: Nd : YAG

طول موج: $1064\text{ }\mu\text{m}$

پهنای تپ: 10 ns

انرژی هر تپ: 10 mJ

واگرایی باریکه در عدسی متمرکزکننده: 1 mrad

توان عدسی متمرکزکننده: 20 D

(الف) توان متوسط هر تپ را به دست آورید.

(ب) اندازه لکه باریکه لیزر Nd : YAG متمرکز شده در غشای کدر در داخل چشم را تعیین

کنید. (مسئله ۷-۱۰ ج را ببینید.)

(ج) با فرض اینکه توان فرودی اصلاً تلف نمی‌شود، تابیدگی باریکه روی هدف را به دست آورید.

۷-۱۲ موقع کار با لیزرها، تذکر داده می‌شود که "هرگز به باریکه لیزری خیره نشوید." با لیزرهای هلیوم-نئون کم‌توان (تراز میلی‌وات) ممکن است اشخاصی نخواهند این هشدار را جدی بگیرند. حتی اگر توان باریکه لیزری بسیار کم باشد، چشم با عمل میزان کردن می‌تواند توان لیزری را روی سطح شبکیه متمرکز کند و تراز تابیدگی بزرگی به وجود آورد. برای توضیح این اثر، یک لیزر He-Ne

با توان ۴ mW در نظر بگیرید که باریکه موازی شده‌ای به قطر ۷ mm در ۶۳۲٫۸ nm با واگرایی باریکه ۱۵ mrad گسیل می‌کند.

(الف) تابیدگی این باریکه را برحسب W/cm^2 درست خارج از لیزر محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید تمام باریکه وارد چشم با تاریکی توافق‌یافته (قطر مردمک ۷ mm) می‌شود که برای بینهایت میزان شده است و به باریکه خیره شده است. این چشم را به صورت یک عدسی نازک ساده با فاصله کانونی ۱۷ mm در نظر بگیرید و تابیدگی لکه تمرکز روی سطح شبکیه را به دست آورید. (برای محاسبه اندازه لکه تمرکز به مسئله ۷-۱۰ ج مراجعه کنید.)

(ج) عمل میزان کردن چشم تقریباً با چه ضریبی تابیدگی را افزایش می‌دهد؟ چه نتیجه‌ای درباره جدی بودن هشدار بالا می‌گیرید؟

۷-۱۳ فردی که با باریکه‌های لیزری کار می‌کند از صافیهای محافظ چشم در برابر لیزر استفاده می‌کند. چگالی اپتیکی OD برای یک صافی خاص با فرمول $OD = \log_{10}(E_p/MPE)$ داده می‌شود که در آن E_p چگالی انرژی (J/cm^2) در تپ لیزری و MPE "نورگیری مجاز ماکسیمم" برای چشم است که این هم برحسب یکاهای چگالی انرژی است. فرض کنید بخواهید صافی مناسبی برای لیزر Nd: YAG ($1.06 \mu m$) که تپهای لیزری منفردی با 80 mJ گسیل می‌کند تعیین کنید. به دلایل ایمنی، این لیزر به عنوان یک لیزر رده ۴ با MPE $10^{-6} J/cm^2$ درجه بندی شده است.

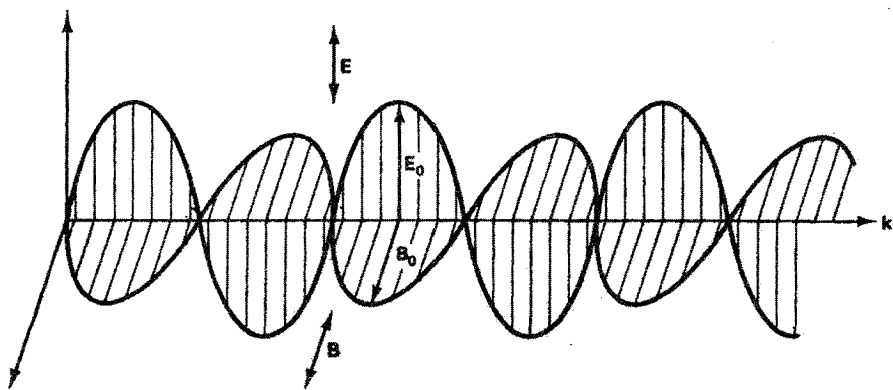
(الف) چگالی انرژی را (برحسب J/cm^2) برای لیزر 80 mJ که تپ لیزری با قطر ۷ mm گسیل می‌کند به دست آورید.

(ب) ODی مربوط به صافی محافظی که تابش $1.06 \mu m$ را جذب می‌کند چه اندازه باید باشد؟

مراجع

- [1] Alpern, Mathew. "The Eyes and Vision." In *Handbook of Optics*, edited by Walter G. Driscoll and William Vaughan. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978.
- [2] Duke-Elder, S., and D. Abrams. *Ophthalmic Optics and Refraction*. Vol. 5 of *Systems of Ophthalmology*, edited by S. Duke-Elder. St. Louis: C. V. Mosby Company, 1970.
- [3] Michaels, D. D. *Visual Optics and Refraction*, 2d ed. St. Louis: C. V. Mosby Company, 1980.
- [4] Rubin, M. L. *Optics for Clinicians*, 2d ed. Gainesville, Fla.: Triad Scientific Publishers, 1974.
- [5] Fincham, W. H. A., and M. H. Freeman. *Optics*, 9th ed. Boston: Butterworth Publishers, 1980. Ch. 20.
- [6] Feynman, Richard P., Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures in Physics*, vol. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1975. Ch. 35, 36.

- [7] Sperry, R. W. "The Eye and the Brain." *Scientific American* (May 1956): 48.
- [8] Milne, L. J., and M. J. Milne. "Electrical Events in Vision." *Scientific American* (Dec. 1956): 113.
- [9] Michael, Charles R. "Retinal Processing of Visual Images." *Scientific American* (May 1969): 104.
- [10] Sliney, D. H., and M. L. Wolbarsht. *Safety with Lasers and Other Optical Sources: A Comprehensive Handbook*. New York: Plenum Press, 1980.



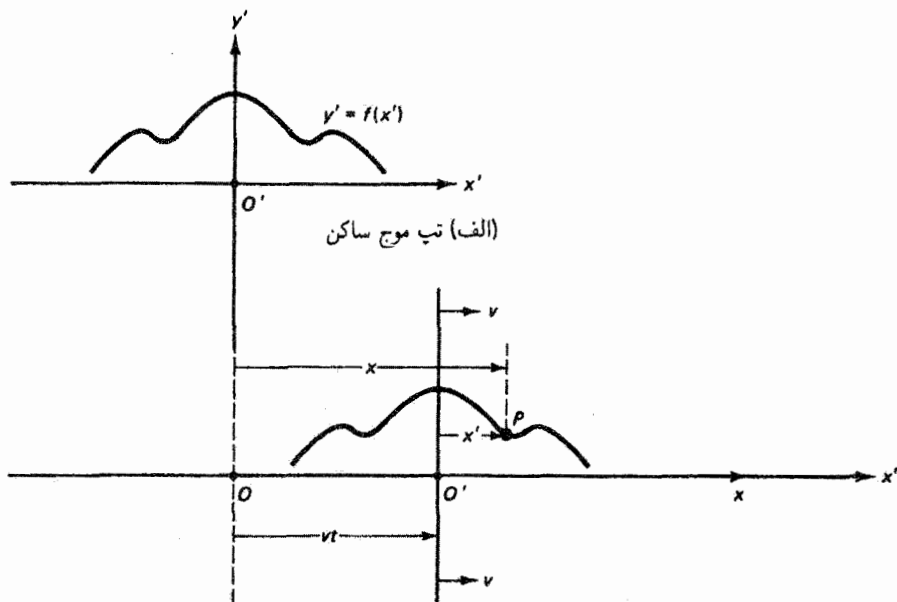
معادلات موج

مقدمه

در این فصل روابط ریاضی حرکت موجی را در مورد عام اما با تأکید بر مفیدترین مورد خاص یعنی موج هماهنگ به دست می آوریم. آنگاه توابع موج هماهنگ را اختصاصی تر می کنیم تا امواج الکترومغناطیسی را که شامل امواج نور هستند نمایش دهیم. برای تعیین انرژی منتقل شده توسط این امواج از روابط الکترومغناطیسی که فیزیک امواج الکترومغناطیسی را توصیف می کنند استفاده می کنیم.

۱-۸ معادله موج یک بعدی

کلی ترین صورت یک موج متحرک و معادله دیفرانسیلی که در آن صدق می کند به روش زیر تعیین می شود. ابتدا یک تپ موج یک بعدی با شکل اختیاری در نظر بگیرید که با $y' = f(x')$ توصیف می شود و مطابق شکل ۱-۸ الف به دستگاه مختصات $O'(x', y')$ متصل شده است. سپس در نظر بگیرید که دستگاه O' همراه با این تپ، با سرعت یکنواخت v نسبت به یک دستگاه مختصات ثابت $O(x, y)$ در امتداد محور x به طرف راست حرکت می کند (شکل ۱-۸ ب). فرض



شکل ۱-۸ تپ موج متحرک.

می‌کنیم این تپ شکل خود را ضمن حرکت حفظ می‌کند. هر نقطه روی تپ مانند P را می‌توان با یکی از دو مختصه x یا x' ، به طوری که $x' = x - vt$ ، توصیف کرد. مختصه y در هر دو دستگاه یکی است. بدین ترتیب، از دیدگاه دستگاه مختصات ساکن، تپ متحرک دارای صورت یا قالب ریاضی زیر است

$$y = y' = f(x') = f(x - vt)$$

اگر تپ به طرف چپ حرکت کند، علامت v را باید تغییر دهیم. بنابراین، به طور کلی می‌توانیم بنویسیم

$$y = f(x \pm vt) \quad (1-8)$$

که در آن به ازای $t = 0$ فرض کرده‌ایم $x = x'$. شکل اصلی تپ، یعنی $y' = f(x')$ ، تغییر نمی‌کند، اما در امتداد محور x در زمان t به اندازه vt منتقل می‌شود. تابع f می‌تواند هر تابعی

باشد، به طوری که به عنوان مثال

$$y = A \sin(x - vt)$$

$$y = A(x + vt)^2$$

$$y = e^{(x-vt)}$$

همه اینها امواج متحرک را نمایش می دهند، اما تنها اولی نمایشگر مورد مهم موج دوره ای است. اکنون می خواهیم معادله دیفرانسیل جزئی را که تمام این نوع امواج دوره ای، صرف نظر از تابع به خصوص f ، در آن صدق می کنند به دست آوریم. چون y تابعی از دو متغیر x و t است، از قاعده زنجیره ای مشتق گیری جزئی استفاده می کنیم و می نویسیم

$$y = f(x')$$

که در آن

$$x' = x \pm vt$$

و در نتیجه

$$\partial x' / \partial x = 1 \quad \text{و} \quad \partial x' / \partial t = \pm v$$

با توجه به قاعده زنجیره ای، مشتق فضایی عبارت است از

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}$$

به همین ترتیب، مشتق دوم را به دست می آوریم:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial (\partial y / \partial x)}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

همچنین، مشتقهای زمانی به صورت زیر هستند

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial (\partial y / \partial t)}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) (\pm v) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

از ترکیب نتایج که برای مشتقات دوم به دست آمده‌اند، به معادلهٔ دیفرانسیل موج یک بعدی می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۲-۸)$$

هر موجی به صورت معادلهٔ ۱-۸ باید، صرف‌نظر از ماهیت فیزیکی خود موج، در معادلهٔ موج ۲-۸ صدق کند. بنابراین، برای تعیین اینکه تابع داده شده‌ای از x و t نمایشگر موج متحرک است کافی است یا نشان دهیم این تابع به صورت کلی معادلهٔ ۱-۸ است یا اینکه در معادلهٔ موج ۲-۸ صدق می‌کند.

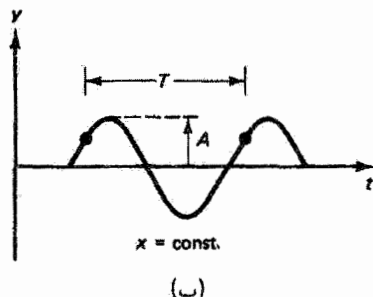
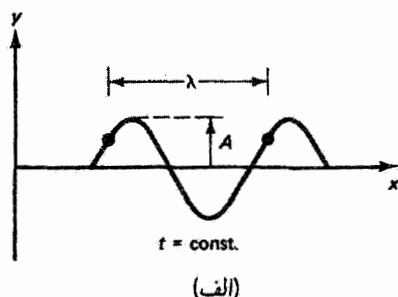
۲-۸ امواج هماهنگ

امواج هماهنگ که دارای اهمیت خاصی هستند توابع سینوسی و کسینوسی را شامل می‌شوند:

$$y = A \sin_{\cos}[k(x \pm vt)] \quad (۳-۸)$$

که در آن A و k ثابت‌هایی هستند که می‌توانند بدون تغییر دادن سرشت هماهنگ موج از یک موج به موج دیگر تغییر کنند. این امواج دوره‌ای تپهای همواری را نمایش می‌دهند که به‌طور نامحدود تکرار می‌شوند. این نوع امواج غالباً توسط نوسانگرهای نامیرایی که حرکت هماهنگ ساده دارند تولید می‌شوند. از این مهمتر، توابع سینوسی و کسینوسی با هم یک مجموعهٔ کامل تشکیل می‌دهند، به این معنی که می‌توان هر موج دوره‌ای واقعی را با یک ترکیب خطی از جمله‌هایی مانند توابع معادلهٔ ۳-۸ نمایش داد. این نوع ترکیب خطی یا رشتهٔ توابع سینوسی و کسینوسی را رشتهٔ فوریه می‌نامند و آن را در بخش ۱۲-۱ به تفصیل بررسی می‌کنیم. بدین ترتیب، ترکیبهای امواج هماهنگ بالقوه می‌توانند صورتهای موجی پیچیده‌تر مانند رشته‌ای از تپهای مستطیلی یا امواج مربعی را نمایش دهند.

چون $\sin x = \cos(x - \pi/2)$ ، تنها تفاوت بین توابع سینوسی و کسینوسی در یک انتقال نسبی $\pi/2$ است. بنابراین، کافی است تنها یکی از این توابع را بررسی کنیم. یک موج سینوسی در شکل ۲-۸ نشان داده شده است. شکل ۲-۸ الف قسمتی از این موج را با دامنهٔ A در یک لحظهٔ معین نشان می‌دهد. شکل ۲-۸ ب تغییرات زمانی این موج را در یک نقطهٔ معین x در امتداد موج نشان می‌دهد. در شکل ۲-۸ الف واحد فضایی تکرارشوندهٔ موج با طول موج λ نشان داده شده است. به علت این خاصیت دوره‌ای، اگر تمام x ها به اندازهٔ یک λ زیاد شوند همین موج دوباره به دست می‌آید. از لحاظ ریاضی، موج به این دلیل تجزید می‌شود که شناسهٔ تابع سینوسی



شکل ۲-۸ گسترش موج سینوسی در فضا و زمان. (الف) موج سینوسی در یک زمان معین. (ب) موج سینوسی در یک نقطه معین.

به اندازه 2π زیاد شده است. به طور صوری، داریم

$$A \sin k[(x + \lambda) + vt] = A \sin[k(x + vt) + 2\pi]$$

یا

$$A \sin(kx + k\lambda + kvt) = A \sin(kx + kvt + 2\pi)$$

نتیجه می‌گیریم که $k\lambda = 2\pi$ ؛ بنابراین، ثابت انتشار k حاوی اطلاعات مربوط به طول موج است:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (۴-۸)$$

از طرف دیگر، اگر از یک مکان ثابت به موج نگاه کنیم، مانند شکل ۲-۸ ب، موج نسبت به زمان دوره‌ای است و واحد زمانی تکرارشونده آن دوره T نامیده می‌شود. اگر تمام t ها را به اندازه T زیاد کنیم، شکل موج دقیقاً تجدید می‌شود به طوری که

$$A \sin k[x + v(t + T)] = A \sin[k(x + vt) + 2\pi]$$

یا

$$A \sin(kx + kvt + kvT) = A \sin(kx + kvt + 2\pi)$$

واضح است که $k v T = 2\pi$ ، و رابطه‌ای داریم که دوره T را به ثابت انتشار k و سرعت موج v مربوط می‌کند. رابطه زیر حاوی همین اطلاعات است

$$v = \nu \lambda \quad (5-8)$$

که در آن از معادله ۴-۸ و نسبت معکوس دوره T و بسامد ν یعنی

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (6-8)$$

استفاده کرده‌ایم. از توصیفهای مرتبط پارامترهای موج زیاد استفاده می‌شود. ترکیب $\omega = 2\pi\nu$ را بسامد زاویه‌ای و معکوس طول موج، $k = 1/\lambda$ را عدد موج می‌نامند. با این روابط به آسانی می‌توان هم‌ارزی صورتهای متداول زیر را برای امواج هماهنگ نشان داد:

$$y = A \frac{\sin}{\cos}[k(x \pm vt)] \quad (7-8)$$

$$y = A \frac{\sin}{\cos} \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T} \right) \right] \quad (8-8)$$

$$y = A \frac{\sin}{\cos}[(kx \pm \omega t)] \quad (9-8)$$

در هر مورد، شناسه سینوس یا کسینوس را، که زاویه‌ای است که بستگی به فضا و زمان دارد، فاز φ می‌نامند. برای مثال، در معادله ۷-۸ داریم

$$\varphi = k(x \pm vt) \quad (10-8)$$

وقتی x و t با هم طوری تغییر می‌کنند که φ ثابت بماند، جابه‌جایی $y = A \sin \varphi$ نیز ثابت است. واضح است که این شرط فاز ثابت حرکت نقطه معینی با سرعت موج را روی شکل موج توصیف می‌کند. بنابراین، اگر φ ثابت باشد آنگاه

$$d\varphi = 0 = k(dx \pm v dt)$$

و

$$\frac{dx}{dt} = \mp v$$

که تأیید می‌کند v سرعت موج است و منفی است اگر $\varphi = k(x + vt)$ و مثبت است اگر $\varphi = k(x - vt)$.

توجه کنید که در هر یک از صورتهای موج، معادله‌های ۷-۸ تا ۹-۸، تحت شرایط اولیه $x = 0$ و $t = 0$ اگر از تابع سینوسی استفاده کنیم داریم $y = 0$ و اگر از تابع کسینوسی استفاده کنیم $y = A$. چنانکه قبلاً گفته شد، با افزودن زاویه 90° به فاز می‌توانیم هر دو وضعیت را با تابع سینوسی یا کسینوسی بررسی کنیم. به‌طور کلی، برای داشتن جابه‌جایی اولیه اختیاری، یک زاویه φ_0 باید به فاز اضافه کنیم. برای مثال، معادله ۷-۸ با تابع سینوسی به‌صورت زیر در می‌آید

$$y = A \sin[k(x \pm vt) + \varphi_0]$$

اکنون فرض کنید شرایط مرزی اولیه ما طوری هستند که $y = y_0$ وقتی $x = 0$ و $t = 0$. آنگاه

$$y = A \sin \varphi_0 = y_0$$

که از آن می‌توان زاویه فاز اولیه لازم را به‌دست آورد:

$$\varphi_0 = \sin^{-1} \left(\frac{y_0}{A} \right)$$

بنابراین، برای منظور کردن هر جابه‌جایی اولیه‌ای، می‌توانیم صورتهای موج ۷-۸ تا ۹-۸ را با افزودن زاویه فاز اولیه φ_0 به فاز باز هم تعمیم دهیم. در بسیاری از موارد، فاز دقیق موج اهمیت ندارد. در این موارد، φ_0 را برای سادگی مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال

یک موج متحرک مطابق با رابطه زیر انتشار می‌یابد

$$y(x, t) = 0.35 \sin \left(3\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$$

که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. طول موج، بسامد، سرعت، و زاویه فاز اولیه را به‌دست آورید. همچنین جابه‌جایی را در $x = 10 \text{ cm}$ و $t = 0$ تعیین کنید.

حل: از مقایسه با معادله ۹-۸ داریم $k = 3\pi$ و $\omega = 10\pi$. بنابراین،

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3} \text{ m} \quad \text{و} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \text{ Hz}$$

فاز اولیه ($x = 0$ و $t = 0$) برابر است با $\pi/4$. سرعت موج را می‌توان از $v = \lambda f$ به دست آورد: $v = (2/3) \times 5 = 3.33 \text{ m/s}$ در جهت مثبت x (به دلیل علامت منفی در فاز). همچنین می‌توانیم فاز $\varphi = 3\pi x - 10\pi t + \pi/4$ را برابر با یک ثابت قرار دهیم، و در نتیجه

$$d\varphi = 3\pi dx - 10\pi dt = 0$$

یا $v = dx/dt = 10\pi/3\pi = +3.33 \text{ m/s}$ و سرانجام، برای جابه‌جایی در $x = 10 \text{ cm}$ در $t = 0$ داریم

$$\blacktriangle \quad y(0, 10, 0) = 0.35 \sin\left(0.3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = +0.346 \text{ m}$$

۳-۸ اعداد مختلط

معلوم شده است که در بسیاری از موارد بهتر است امواج هماهنگ را با نمادنگاری اعداد مختلط نمایش دهیم. با این هدف، ابتدا صورتهای نوشتن یک عدد مختلط و مفیدترین روابط آنها را به اختصار مرور کنیم.

عدد موج \tilde{z} به صورت مجموع قسمتهای حقیقی و انگاری آن نوشته می‌شود:

$$\tilde{z} = a + ib \quad (11-8)$$

که در آن اعداد

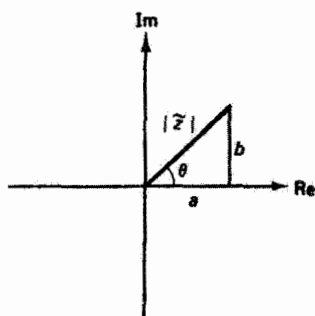
$$a = \text{Re}(\tilde{z}) \quad \text{و} \quad b = \text{Im}(\tilde{z})$$

حقیقی هستند و $i = \sqrt{-1}$. عدد مختلط را که با معادله ۱۱-۸ داده شده است می‌توان به صورت قطبی نیز در آورد. با توجه به شکل ۳-۸، عدد مختلط \tilde{z} برحسب قسمتهای حقیقی و انگاری آن در امتداد محورهای مربوط نمایش داده می‌شود. بزرگی عدد مختلط \tilde{z} ، که آن را با $|\tilde{z}|$ نشان می‌دهیم، و قدرمطلق یا مدول نیز نامیده می‌شود، بنابه قضیه فیثاغورث به صورت زیر است

$$|\tilde{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (12-8)$$

چون $a = |\tilde{z}| \cos \theta$ و $b = |\tilde{z}| \sin \theta$ (شکل ۳-۸)، می‌توانیم \tilde{z} را با رابطه زیر نیز بیان کنیم

$$\tilde{z} = |\tilde{z}|(\cos \theta + i \sin \theta)$$



شکل ۳-۸ نمایش نموداری عدد مختلط در امتداد محورهای حقیقی (Re) و انکاری (Im).

عبارت داخل پرانتز را مطابق با فرمول اویلر می‌نویسیم:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (۱۳-۸)$$

و در نتیجه

$$\bar{z} = |\bar{z}|e^{i\theta} \quad (۱۴-۸)$$

که در آن

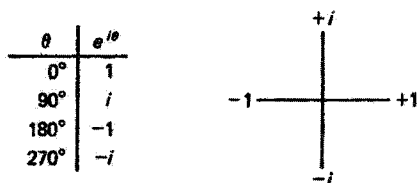
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (۱۵-۸)$$

اگر در عدد مختلط $\bar{z} = a + ib = |\bar{z}|e^{i\theta}$ به جای i قرار دهیم $-i$ ، همیوغ مختلط آن $\bar{\bar{z}}$ به دست می‌آید:

$$\bar{\bar{z}} = a - ib \quad \text{یا} \quad \bar{\bar{z}} = |\bar{z}|e^{-i\theta} \quad (۱۶-۸)$$

توجه کنید که از علامت ستاره برای نشان دادن همیوغ مختلط استفاده می‌کنیم. یک قضیه بسیار مفید این است که حاصلضرب یک عدد مختلط و همیوغ مختلط آن برابر است با مجذور قدرمطلق آن: با استفاده از صورت قطبی داریم

$$\bar{\bar{z}}z = (|\bar{z}|e^{-i\theta})(|\bar{z}|e^{i\theta}) = |\bar{z}|^2 \quad (۱۷-۸)$$



شکل ۴-۸ مقادیر $e^{i\theta}$ که از آنها زیاد استفاده می‌شود.

در پایان، مفید است که چند مقدار $e^{i\theta}$ را با استفاده از فرمول اویلر (معادله ۸-۱۳) برای موارد خاصی که زیاد پیش می‌آیند ذکر کنیم. این مقادیر همراه با یک نمودار کمک آموزشی برای یادآوری سریع آنها در شکل ۴-۸ داده شده‌اند.

۴-۸ امواج هماهنگ و اعداد مختلط

با استفاده از فرمول اویلر، می‌توان موج هماهنگ را به صورت زیر نوشت

$$\tilde{y} = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (18-8)$$

که در آن

$$\text{Re}(\tilde{y}) = A \cos(kx - \omega t) \quad (19-8)$$

و

$$\text{Im}(\tilde{y}) = A \sin(kx - \omega t) \quad (20-8)$$

بدین ترتیب، تابع موج هماهنگ به صورت معادله ۸-۱۸ امواج سینوسی و کسینوسی را به عنوان قسمتهای حقیقی و انگاری در بردارد. محاسبات با استفاده از صورت مختلط به طور ضمنی نتایج صحیح را برای امواج سینوسی و کسینوسی به دست می‌دهند. در هر جا از این محاسبات، می‌توان با گرفتن قسمتهای حقیقی و انگاری از دو طرف معادله روابط لازم را برای هر یک از دو صورت استخراج کرد. چون عملیات ریاضی توابع نمایی معمولاً ساده‌تر از توابع مثلثاتی است، غالباً بهتر است با امواج هماهنگ به صورت معادله ۸-۱۸ کار کنیم.

۵-۸ امواج تخت

اکنون می‌خواهیم صورت موج هماهنگ را بیشتر تعمیم دهیم به طوری که بتواند انتشار در هر راستایی در فضا را نمایش دهد. چون راستای اختیاری در فضا شامل سه مختصه فضایی x ، y و z است، جابه‌جایی موج را به جای y با ψ نشان می‌دهیم؛ برای مثال،

$$\psi = A \sin(kx - \omega t) \quad (21-8)$$

معادله ۲۱-۸ موج متحرکی را نمایش می‌دهد که در جهت x حرکت می‌کند. در یک زمان معین (که برای سادگی قرار می‌دهیم $t = 0$)، گستره فضایی این موج عبارت است از

$$\psi = A \sin kx \quad (22-8)$$

وقتی $x = \text{const}$ ، برای فاز داریم $\varphi = kx = \text{const}$. بنابراین، سطوح فاز ثابت عبارت‌اند از خانواده صفحه‌هایی که در شکل ۵-۸ نشان داده شده‌اند. سطوح فاز ثابت جبهه‌های موج را تشکیل می‌دهند. بدین ترتیب، واضح است که جابه‌جایی موج که با ψ داده می‌شود برای تمام نقاط یک جبهه موج یکی است. بنابراین، آشفستگی موج در هر نقطه اختیاری از فضا، که با بردار \mathbf{r} در شکل ۶-۸ الف تعریف می‌شود، برابر است با آشفستگی برای نقطه x روی محور x . اما $x = r \cos \theta$ ، و می‌توان معادله ۲۲-۸ را به صورت زیر نوشت

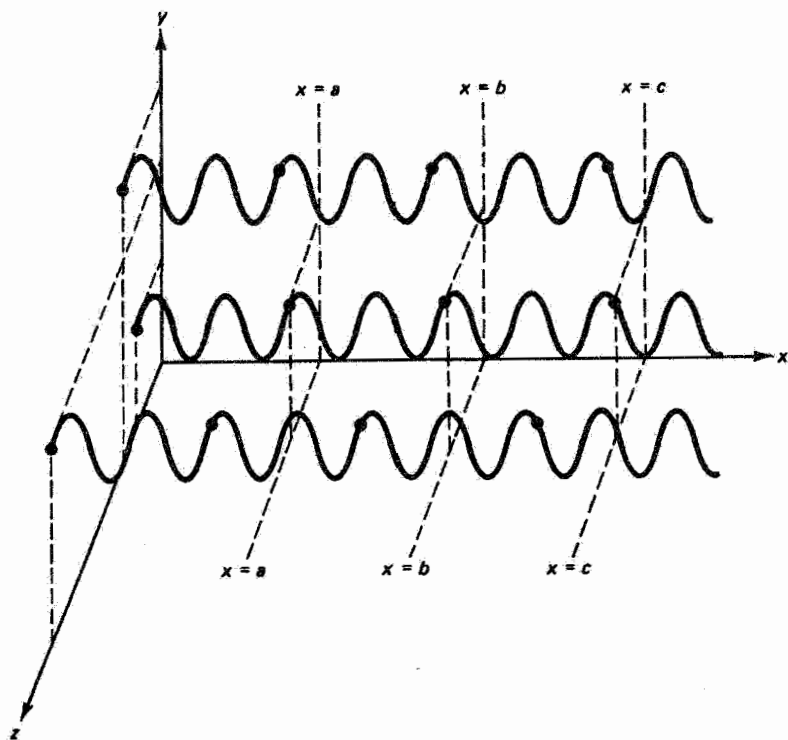
$$\psi = A \sin(kr \cos \theta)$$

اکنون اگر ثابت انتشار را، با بزرگی $2\pi/\lambda$ که در معادله ۴-۸ داده شده است، یک کمیت برداری بگیریم که جهت آن در راستای انتشار است، نوعی سادگی در نوشتن روابط به دست می‌آوریم. بدین ترتیب، داریم $kr \cos \theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ، و موج هماهنگ ۲۱-۸ به صورت زیر در می‌آید

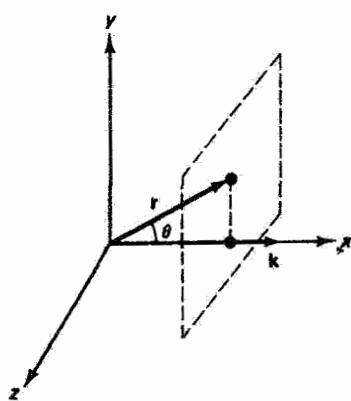
$$\psi = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (23-8)$$

معادله ۲۳-۸ نمایشگر موج تختی است که در یک راستای اختیاری که با \mathbf{k} داده می‌شود، مانند شکل ۶-۸ ب، انتشار می‌یابد. در وضعیت کلی،

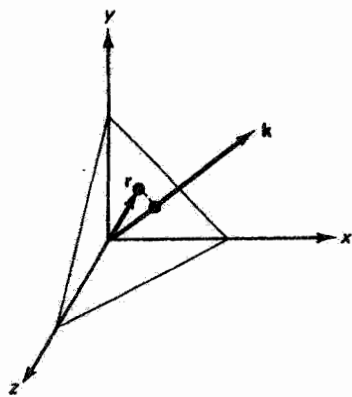
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = xk_x + yk_y + zk_z$$



شکل ۵-۸ امواج تخت در امتداد محور x . سطوح فاز ثابت صفحه‌های $x = \text{const.}$ هستند. این امواج از صفحه‌های $x = a, x = b, x = c$ که در شکل نشان داده شده‌اند می‌گذرند.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۸ تعمیم موج تخت به راستای اختیاری. راستای موج با بردار k در امتداد محور x در (الف) و در امتداد یک راستای اختیاری در (ب) داده می‌شود.

که در آن مؤلفه‌های بردار انتشار و (x, y, z) مختصات نقطه‌ای از فضا هستند که در آن جابه‌جایی ψ محاسبه می‌شود.

صورت موج هماهنگ اکنون یک تابع موج سه‌بعدی است که می‌توان آن را به صورت مختلط نیز نوشت:

$$\psi = Ae^{i(k \cdot r - \omega t)} \quad (24-8)$$

معادله دیفرانسیل جزئی که این نوع امواج سه‌بعدی در آن صدق می‌کنند تعمیمی است از معادله ۲-۸ به صورت

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (25-8)$$

که می‌توان آن را با محاسبه مشتقات جزئی دوم ψ از معادله ۲۴-۸ به آسانی تحقیق کرد. با جدا کردن مشتقات فضایی دوم به عنوان عملگر از تابع موج ψ ، معادله موج ۲۵-۸ غالباً به صورت فشرده‌تر زیر نوشته می‌شود

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

و با تعریف تمام عملگر داخل پرانتز به عنوان عملگر لاپلاسی

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

معادله ۲۵-۸ به صورت ساده زیر در می‌آید

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (26-8)$$

۶-۸ امواج کروی

آشفتگیهای موج هماهنگ ناشی از یک چشمه نقطه‌ای در یک محیط همگن در تمام راستاها با آهنگ یکسان حرکت می‌کنند. در این مورد، سطوح فاز ثابت یا چپه‌های موج سطوحی کروی

هستند که مرکز آنها در چشمه است. همچنین این امواج را می‌توانیم با یک تغییر در صورت موج هماهنگ که برای امواج تخت به‌دست آوردیم نمایش دهیم. دامنه را باید بر فاصله r تقسیم کنیم:

$$\psi = \left(\frac{A}{r}\right) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (27-8)$$

برخلاف دامنه موج تخت که ثابت است، دامنه موج کروی، همچنانکه از چشمه دور می‌شود، کاهش می‌یابد. اگر دامنه در فاصله r از چشمه A/r باشد، تابیدگی موج (W/m^2) در این فاصله متناسب با $(A/r)^2$ است، و چنانکه دیده می‌شود همان قانون عکس مجذور آشنا برای انتشار آشفته‌گیهای موج کروی است. توجه کنید که در این مورد معنی A باید به دقت بیان شود. واضح است که وقتی r به صفر میل می‌کند نمی‌توانیم دامنه را بینهایت بگیریم. مقدار A باید مربوط به دامنه موج در فاصله واحد ($r = 1$) از چشمه باشد.

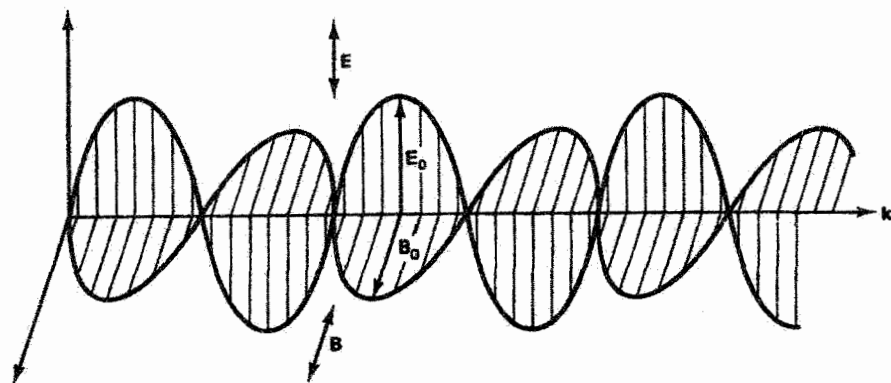
۷-۸ امواج الکترومغناطیسی

تابع موج هماهنگی که تا کنون از آن بحث کرده‌ایم می‌تواند هر نوع آشفته‌گی موج را که به صورت سینوسی تغییر می‌کند نمایش دهد. برای مثال، این نمایش ممکن است مربوط به امواج روی ریسمان، امواج آب و امواج صوت باشد. همینکه مصداق فیزیکی جابه‌جایی ψ مشخص شد، تابع را می‌توان برای این وضعیت خاص به‌کار برد. کمیت ψ ممکن است مربوط به جابه‌جاییهای قائم یک ریسمان یا تغییرات فشار ناشی از موج صوت در یک گاز باشد. برای امواج الکترومغناطیسی نمایشگر انتشار نور، ψ به‌جای یکی از دو میدان متغیر الکتریکی یا مغناطیسی است که با هم تشکیل موج می‌دهند. در شکل ۷-۸ یک موج الکترومغناطیسی تخت که در یک راستای اختیاری حرکت می‌کند نشان داده شده است. از معادلات ماکسول که این نوع امواج را به‌دست می‌دهند می‌دانیم که تغییرات هماهنگ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی همیشه بر هم و بر راستای انتشار که با \mathbf{k} داده می‌شود عمود هستند؛ این وضعیت با مجموعهٔ محورهای متعامد در شکل ۷-۸ نشان داده شده است. این تغییرات را می‌توان با تابع موج هماهنگ به‌صورت زیر نشان داد

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (28-8)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (29-8)$$

که در آنها \mathbf{E} و \mathbf{B} به‌ترتیب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و \mathbf{E}_0 و \mathbf{B}_0 دامنه آنها هستند. هر دو مؤلفهٔ موج با یک بردار انتشار \mathbf{k} و یک بسامد ω و در نتیجه با طول‌موج و سرعت یکسان حرکت



شکل ۷-۸ موج الکترومغناطیسی تخت. میدان الکتریکی E ، میدان مغناطیسی B و بردار انتشار k همه جا بر هم عموداند.

می‌کنند. علاوه بر این، مطابق نظریه الکترومغناطیس دامنه‌های میدانها با رابطه $E_0 = cB_0$ به هم مربوطاند که در آن c سرعت موج است. در هر زمان و مکان خاص داریم

$$E = cB \quad (۳۰-۸)$$

در فضای آزاد، سرعت c با رابطه زیر داده می‌شود

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (۳۱-۸)$$

که در آن ثابتهای ϵ_0 و μ_0 به ترتیب گذردهی و تراوایی خلأ هستند. مقادیر اندازه‌گیری شده این ثابتها، یعنی $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ (Cs)}^2 / \text{kg m}^3$ و $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m} / (\text{As})^2$ ، روش غیرمستقیمی برای تعیین سرعت نور در فضای آزاد فراهم می‌کنند و مقدار $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$ را به دست می‌دهند.

بدیهی است که این موج نمایشگر انتقال انرژی است. چگالی انرژی (J/m^3) وابسته به میدان الکتریکی در فضای آزاد برابر است با

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (۳۲-۸)$$

و چگالی انرژی وابسته به میدان مغناطیسی در فضای آزاد برابر است با

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (۳۳-۸)$$

این روابط که به آسانی برای میدان الکتریکی استاتیک مربوط به یک خازن ایده‌آل و میدان مغناطیسی استاتیک مربوط به یک سیم‌لوله ایده‌آل به دست می‌آیند اعتبار عام دارند. با جاگذاری معادله‌های ۳۰-۸ و ۳۱-۸ در یکی از دو معادله ۳۲-۸ یا ۳۳-۸، نشان داده می‌شود که u_E و u_B با هم برابرند. برای مثال، با شروع از معادله ۳۳-۸ داریم

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E}{c} \right)^2 = \left(\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2\mu_0} \right) E^2 = u_E \quad (۳۴-۸)$$

بنابراین، انرژی موج الکترومغناطیسی به طور مساوی بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مؤلف آن تقسیم شده است. چگالی انرژی کل برابر است با مجموع

$$u = u_E + u_B = 2u_E = 2u_B$$

یا

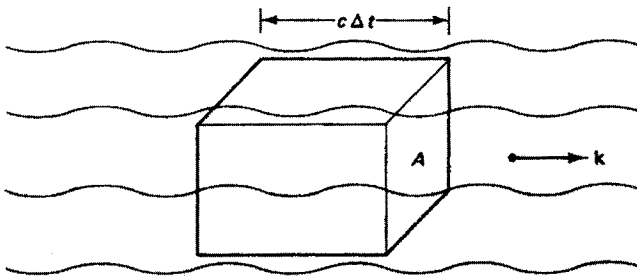
$$u = \epsilon_0 E^2 = \left(\frac{1}{\mu_0} \right) B^2 \quad (۳۵-۸)$$

اکنون آهنگ انتقال انرژی توسط موج الکترومغناطیسی یا توان آن را در نظر می‌گیریم. در مدت Δt ، انرژی منتقل شده از مقطعی با مساحت A (شکل ۸-۸) عبارت است از انرژی وابسته به حجم ΔV مربوط به مکعب مستطیلی با طول $c\Delta t$. بنابراین،

$$\text{توان} = \frac{\text{انرژی}}{\Delta t} = \frac{u \Delta V}{\Delta t} = \frac{u(Ac\Delta t)}{\Delta t} = ucA \quad (۳۶-۸)$$

یا توان منتقل شده در واحد سطح برابر است با

$$S = uc \quad (۳۷-۸)$$



شکل ۸-۸ شارش انرژی موج الکترومغناطیسی. در مدت Δt ، انرژی موجود در حجم مکعب مستطیل از سطح A عبور می‌کند.

چگالی انرژی u برحسب E و B را با استفاده از معادله‌های ۸-۳۱ و ۸-۳۵ به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$u = \sqrt{u}\sqrt{u} = (\sqrt{\epsilon_0} E) \left(\frac{B}{\sqrt{\mu_0}} \right) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} EB = \epsilon_0 c EB \quad (38-8)$$

با جاگذاری این نتیجه در معادله ۸-۳۷ به دست می‌آوریم

$$S = \epsilon_0 c^2 EB \quad (39-8)$$

این توان در واحد سطح، S ، همراه با جهت انتشار را بردار پوینتینگ می‌نامند. چون این جهت همان جهتی است که حاصلضرب برداری بردارهای متعامد E و B نشان می‌دهد، می‌توانیم سرانجام بنویسیم

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (40-8)$$

به علت تغییر سریع میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، که بسامد آنها در طیف مرئی حدود 10^{12} تا 10^{15} Hz است، بزرگی بردار پوینتینگ ۸-۳۹ نیز تابع تندتغییری از زمان است. در اکثر موارد تنها متوسط زمانی توان منتقل شده در واحد سطح را لازم داریم. این کمیت را تابیدگی E_e می‌نامند:

$$E_e = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \epsilon_0 c^2 \langle E_0 B_0 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) \rangle \quad (41-8)$$

که در آن کره ششگانه معرف متوسط زمانی است و میدانها را به صورت توابع سینوسی فاز بیان کرده‌ایم. به آسانی می‌توان نشان داد متوسط توابع $\sin^2 \theta$ یا $\cos^2 \theta$ روی یک دوره دقیقاً $1/2$

است، و در نتیجه

$$E_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_0 c^2 E_0 B_0$$

$$E_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_0 c E_0^2 \quad (۴۲-۸)$$

$$E_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{c}{\mu_0} \right) B_0^2$$

صورت‌های هم‌ارز ۴۲-۸ برای مورد فضای آزاد نوشته شده‌اند. این روابط برای محیطی با ضریب شکست n هم به‌کار می‌روند اگر به جای ε_0 قرار دهیم $n^2 \varepsilon_0$ و به جای c قرار دهیم c/n . توجه کنید که این جاگذاری اولین رابطه از صورت‌های هم‌ارز بالا را تغییر نمی‌دهد.

مثال

یک باریکه لیزری به شعاع ۱ mm توان ۶ kW منتقل می‌کند. تابیدگی متوسط و دامنه میدانهای E و B آن را تعیین کنید.

حل: تابیدگی متوسط برابر است با

$$E_e = \frac{\text{توان}}{\text{مساحت}} = \frac{۶۰۰۰}{\pi(۱۰^{-۲})^2} = ۱,۹۱ \times ۱۰^۹ \text{ W/m}^2$$

از معادله ۴۲-۸ داریم

$$E_0 = \left(\frac{2E_e}{\varepsilon_0 c} \right)^{1/2} = \left[\frac{2(۱,۹۱ \times ۱۰^۹)}{\varepsilon_0 c} \right]^{1/2} = ۱,۲۰ \times ۱۰^۶ \text{ V/m}$$

و از معادله ۴۲-۸،

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{۱,۲۰ \times ۱۰^۶}{c} = ۴,۰۰ \times ۱۰^{-۲} \text{ T}$$

۸-۸ اثر دوپلر

اثر دوپلر برای امواج صوت دارای همتایی با یک اختلاف مهم برای امواج نور است. یادآوری می‌کنیم که وقتی با امواج صوت سروکار داریم بسامد ظاهری چشمه بسته به حرکت چشمه و ناظر در امتداد خط

واصل آنها افزایش یا کاهش می‌یابد. انتقال بسامد ناشی از حرکت چشمه از لحاظ فیزیکی مبتنی بر تغییر در طول موج انتقال یافته است. انتقال بسامد ناشی از حرکت ناظر از لحاظ فیزیکی مبتنی بر تغییر در سرعت امواج صوت نسبت به ناظر است. این دو اثر از لحاظ فیزیکی با هم متفاوت اند و با معادله‌های مختلفی توصیف می‌شوند. آنها همچنین با مورد امواج نور تفاوت اساسی دارند. تفاوت بین اثر دوپلر برای امواج صوت و اثر دوپلر برای امواج نور چیزی بیشتر از تفاوت بین سرعت‌های این امواج است. در حالی که امواج صوت در محیط مادی انتشار می‌یابند، امواج نور برای انتشار احتیاج به محیط مادی ندارند. اگر محیطی مادی برای انتشار در میان نباشد، پایه فیزیکی برای تمایز بین ناظر متحرک و چشمه متحرک دیگر وجود ندارد. تنها یک حرکت نسبی بین این دو وجود دارد که انتقال بسامد در اثر دوپلر برای نور را تعیین می‌کند. محاسبه فرمول اثر دوپلر برای نور مستلزم نظریه نسبیت خاص است و به این دلیل آن را در اینجا انجام نمی‌دهیم. نتیجه [۱] به صورت زیر است

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (۴۳-۸)$$

که در آن λ' طول موج انتقال یافته دوپلری و v سرعت نسبی بین چشمه و ناظر است. وقتی این دو به هم نزدیک می‌شوند علامت v مثبت است. وقتی $v \ll c$ ، معادله ۴۳-۸ با معادله زیر تقریب گرفته می‌شود

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 - \frac{v}{c} \quad (۴۴-۸)$$

اثر دوپلر مخصوصاً وقتی اهمیت می‌یابد که برای تعیین سرعت چشمه‌های نجومی گسیلنده تابش الکترومغناطیسی به کار رود. انتقال به سرخ عبارت است از انتقال در طول موج این نوع تابش به سمت طول موجهای بزرگتر که ناشی از سرعت نسبی چشمه‌ای است که از ناظر دور می‌شود. پهن‌شدگی دوپلری خطوط طیفی نمایشگر کاربرد مهم دیگری است که در آن اتمهای تندرو در یک گاز نوری تابش می‌کنند که، بسته به اینکه حرکت اتفاقی آنها به سمت ناظری که اندازه‌گیری طیف‌نمایی انجام می‌دهد باشد یا به سمت مخالف، با افزایش یا کاهش در بسامد همراه است.

مثال

نور ناشی از یک کهکشان دور خطوط مشخصه طیف اکسیژن را نشان می‌دهد، با این تفاوت که این طول‌موجها نسبت به آنچه برای چشمه‌های آزمایشگاهی اندازه‌گیری می‌شوند انتقال یافته‌اند.

به خصوص، خطی که در 513 nm انتشارش را داریم در 525 nm دیده می‌شود. سرعت این کهکشان را نسبت به زمین به دست آورید.

حل: در اینجا $\lambda = 513 \text{ nm}$ و $\lambda' = 525 \text{ nm}$. بنابراین، با استفاده از معادله ۸-۴۴ داریم

$$\frac{525}{513} = 1 - \frac{v}{c}$$

$$v = -0.0234c = -7020 \text{ km/s}$$

چون λ ظاهری بزرگتر (بسامد کمتر) است کهکشان با سرعتی تقریباً برابر با 7020 km/s از زمین دور می‌شود. ▲

مسائل

۱-۸ تپی به صورت $y = ae^{-bx^2}$ ، که در آن a و b ثابت‌اند و x برحسب سانتیمتر است، روی یک طناب تشکیل شده است. این تپ را ترسیم کنید. تابع نمایشگر این تپ را وقتی با سرعت 10 cm/s در جهت منفی حرکت می‌کند بنویسید.

۲-۸ یک تپ موج عرضی که با

$$y = \frac{4}{x^2 + 2}$$

توصیف می‌شود در $t = 0$ در یک ریسمان کشیده شروع می‌شود.

(الف) اگر این تپ با سرعت 25 m/s در جهت منفی x حرکت کند تابع نمایشگر آن را بنویسید.

(ب) تپ را در $t = 0$ ، $t = 2$ و $t = 5 \text{ s}$ ترسیم کنید.

۳-۸ روابط ریاضی زیر را که در آنها فاصله‌ها برحسب متر هستند در نظر بگیرید

$$1. \quad y(z, t) = A \sin^2[4\pi(t + z)]$$

$$2. \quad y(x, t) = A(x - t)^2$$

$$3. \quad y(x, t) = A/(Bx^2 - t)$$

(الف) کدام یک از این تابعها توصیف‌کننده موج متحرک است؟ جواب خود را با دلیل بیان کنید.

(ب) برای هر موج، بزرگی و جهت سرعت موج را تعیین کنید.

۴-۸ اگر تابع زیر که در آن فاصله‌ها برحسب متر هستند نمایشگر یک موج متحرک باشد سرعت

(بزرگی و جهت) آن را به دست آورید

$$y = \frac{100e^{x^2 - 20xt + 100t^2}}{x - 10t}$$

۵-۸ یک موج متحرک هماهنگ با دامنه ۲ (واحد اختیاری)، طول موج ۵ m و دوره ۳ s در جهت منفی z حرکت می کند. در زمان صفر جابه جایی آن در مبدأ صفر است. تابع موج مربوط را

(الف) به طور صریح برحسب طول موج و دوره،

(ب) به طور صریح برحسب ثابت انتشار و سرعت، و

(ج) به صورت مختلط بنویسید.

۶-۸ (الف) تابع نمایشگر یک موج هماهنگ را که در راستای محور x حرکت می کند و دامنه آن ۵ m و طول موج آن ۵۰ m است در $t = 0$ بنویسید.

(ب) اگر این موج در جهت منفی x با سرعت ۲ m/s حرکت کند تابع توصیفگر آن را در $t = 4$ s بنویسید.

۷-۸ برای موج هماهنگ $y = 10 \sin(628.3x - 6283t)$ که در آن x و y برحسب سانتیمتر و t برحسب ثانیه است، کمیت های زیر را تعیین کنید:

(الف) طول موج،

(ب) بسامد،

(ج) ثابت انتشار،

(د) بسامد زاویه ای،

(ه) دوره،

(و) سرعت،

(ز) دامنه.

۸-۸ با استفاده از شرط فاز ثابت، سرعت هر یک از موج های زیر را برحسب ثابت های A ، B ، C و D به دست آورید. فاصله ها برحسب متر هستند و زمان برحسب ثانیه است. نتایج خود را از لحاظ ابعادی تحقیق کنید.

$$f(y, t) = A(y - t)^2 \quad (\text{الف})$$

$$f(x, t) = A(Bx + Ct + D)^2 \quad (\text{ب})$$

$$f(z, t) = A \exp(Bz^2 + BC^2t^2 - 2BCzt) \quad (\text{ج})$$

۹-۸ یک موج هماهنگ متحرک در جهت $x +$ در $t = 0$ دارای جابه‌جایی ۱۳ واحد در $x = 0$ و جابه‌جایی -۷.۵ واحد در $x = ۳\lambda/۴$ است. تابع موج را در $t = 0$ بنویسید.

۱۰-۸ (الف) نشان دهید اگر جابه‌جایی مثبت ماکسیمم یک موج سینوسی در $t = 0$ در فاصله x_0 سانتیمتر از مبدأ باشد، زاویه فاز اولیه آن با رابطه زیر داده می‌شود

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) x_0.$$

که در آن طول موج λ برحسب سانتیمتر است.

(ب) فاز اولیه را به دست آورید و موج را به ازای $\lambda = ۱۰ \text{ cm}$ و فاصله‌های اولیه x_0 برابر با 0 ، $۵/۶$ ، $۵/۲$ ، ۵ و $۱/۲ \text{ cm}$ ترسیم کنید.

(ج) اگر به جای تابع سینوسی از تابع کسینوسی استفاده کنیم، زاویه‌های فاز اولیه را برای قسمت (ب) تعیین کنید.

۱۱-۸ با استفاده از عبارتهای لازم برای $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ، توابع توصیفگر یک موج تخت سینوسی در سه بعد را که در آنها طول موج و سرعت صریحاً وارد شده باشند برای راستاهای انتشار زیر بنویسید.
(الف) در امتداد محور $z +$.

(ب) در امتداد خط $y = x$ ، $z = 0$.

(ج) عمود بر صفحه‌های $x + y + z = \text{const.}$

۱۲-۸ نشان دهید اگر \bar{z} یک عدد مختلط باشد آنگاه

$$\text{Re}(\bar{z}) = (\bar{z} + z^*)/2 \quad \text{(الف)}$$

$$\text{Im}(\bar{z}) = (\bar{z} - z^*)/2i \quad \text{(ب)}$$

$$\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 \quad \text{(ج)}$$

$$\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i \quad \text{(د)}$$

۱۳-۸ نشان دهید یک تابع موج به صورت مختلط اگر

(الف) در i ضرب شود به اندازه $\pi/2$ و اگر

(ب) در -۱ ضرب شود به اندازه π انتقال فاز می‌یابد.

۱۴-۸ دو موج با دامنه، سرعت و بسامد یکسان با هم در یک ناحیه از فضا حرکت می‌کنند. موج برابند را می‌توان به صورت مجموع موجهای انفرادی نوشت:

$$\psi(y, t) = A \sin(ky + \omega t) + A \sin(ky - \omega t + \pi)$$

با استفاده از نمایشهای مختلط نشان دهید

$$\psi(y, t) = 2A \cos(ky) \sin(\omega t)$$

۱۵-۸ شارش انرژی نور خورشید به زمین حدود 1.4 kW/m^2 است. مقادیر ماکسیم E و B را برای موجی با این چگالی انرژی به دست آورید.

۱۶-۸ یک موج نور در شیشه‌ای با ضریب 1.5° حرکت می‌کند. اگر دامنه میدان الکتریکی این موج 100 V/m باشد،

(الف) دامنه میدان مغناطیسی و

(ب) بزرگی متوسط بردار پوینتینگ را به دست آورید.

۱۷-۸ ثابت خورشیدی عبارت است از چگالی شار تابشی (تابیدگی) از خورشید در سطح زمین و مقدار آن حدود 135 W/cm^2 است. طول موج متوسط را برای تابش خورشید که به زمین می‌رسد 700 nm بگیرید.

(الف) دامنه میدانهای E و B را،

(ب) تعداد فوتونهایی را که در هر ثانیه به هر مترمربع از یک انبارة خورشیدی می‌رسند،

(ج) تابع موج هماهنگ برای میدان E ی تابش خورشیدی را با درج مقادیر عددی تمام ثابتها به دست آورید.

۱۸-۸ (الف) نور ناشی از یک لامپ 220 واتی به طور یکنواخت در تمام راستاها پخش می‌شود. تابیدگی این امواج الکترومغناطیسی اپتیکی و دامنه میدان E ی آنها را در فاصله 10 m از لامپ تعیین کنید. فرض کنید 5% انرژی لامپ به نور تبدیل می‌شود.

(ب) فرض کنید یک باریکه لیزری 2000 واتی با عدسی در سطحی حدود $1 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$ متمرکز می‌شود. تابیدگی مربوط و دامنه میدانهای E و B را در این سطح به دست آورید.

۱۹-۸ نشان دهید دامنه یک موج استوانه‌ای باید به طور معکوس با \sqrt{r} تغییر کند.

۲۰-۸ نشان دهید معادله ۴۴-۸ برای اثر دوپلر از معادله ۴۳-۸ به‌ازای $v \ll c$ نتیجه می‌شود.

۲۱-۸ با چه سرعتی باید به چراغ قرمز راهنمایی نزدیک شویم تا آن را سبز ببینیم؟ برای به دست آمدن یک جواب مشخص، طول موج سرخ را 640 nm و طول موج سبز را 540 nm بگیرید.

۲۲-۸ یک شبه‌ستاره نزدیک مرزهای جهان مشاهده شده امروز طول موجی می‌فرستد که 4.8×10^8 برابر طول موج گسیل شده از همان مولکولها در زمین است. اگر این انتقال به علت اثر دوپلر باشد، این اثر چه سرعتی برای شبه‌ستاره تعیین می‌کند؟

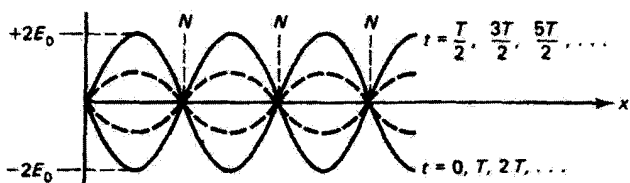
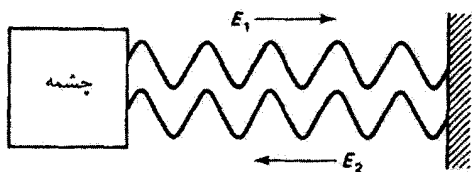
۲۳-۸ پهن‌شدگی دوپلری را برای خط 70652 نانومتری گاز هلیومی که در دمای 1000 K است تخمین بزنید. از سرعت ریشه میانگین مجذوری ذرات گاز

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

استفاده کنید که در آن R ثابت گاز، T دمای کلون، و M جرم مولکولی است.

مراجع

[1] Resnick, Robert. *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Mechanics*. New York: John Wiley and Sons, 1972. Ch. 2.
 [2] Hecht, Eugene, and Alfred Zajac. *Optics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1974. Ch. 2.
 [3] Ghatak, Ajoy K. *An Introduction to Modern Optics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972. Ch. 1.



۹

برهم نهش امواج

مقدمه

در فصل ۸ توابع توصیف‌کننده امواجی با دامنه، طول موج و بسامد معین را به دست آوردیم. چنانکه اکثراً پیش می‌آید، لازم است وضعیت‌هایی را در نظر بگیریم که در آنها دو یا چند موج از این نوع به یک نقطه از فضا وارد می‌شوند یا با هم در یک راستا وجود دارند. چند مورد مهم از ترکیب دو یا چند موج هماهنگ را در این فصل بررسی می‌کنیم. اولین مورد به برهم نهش امواج هماهنگ با دامنه‌ها و فازهای مختلف اما بسامد یکسان مربوط می‌شود. تحلیل نشان می‌دهد که نتیجه دقیقاً موج هماهنگ دیگری با همان بسامد است. از اینجا اختلاف مهمی که بین تابیدگی مربوط به امواج هماهنگ هم‌دوس و امواج هماهنگ با فازهای اتفاقی وجود دارد ظاهر می‌شود. سپس امواج ایستاده را بررسی می‌کنیم که حاصل برهم نهش یک موج هماهنگ و موج بازتابیده آن هستند. آنگاه این فصل را با بحثی درباره سرعت پخش مدوله‌کننده یک گروه از امواج هماهنگ با بسامدهای مختلف، که مستقیماً برای مورد مهم پاشندگی کاربرد دارد، به پایان می‌بریم.

۹-۱ اصل برهم نهش

برای اینکه اثرات ترکیب امواج را به درستی توضیح دهیم باید جابه‌جایی برابند ψ را در یک نقطه از فضا که در آن دو جابه‌جایی مستقل ψ_1 و ψ_2 با هم وجود دارند دقیقاً تعیین کنیم. در اکثر مواردی

که با آنها سروکار داریم، نتیجه صحیح از اصل برهم‌نهمش به دست می‌آید: جابه‌جایی برابند عبارت است از مجموع جابه‌جاییهای جداگانهٔ موجهای مؤلف:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (۱-۹)$$

با استفاده از این اصل می‌توان دامنه و چگالی توان موج برابند را محاسبه و با اندازه‌گیری تحقیق کرد. بدین ترتیب، معلوم شده است که اصل برهم‌نهمش برای تمام انواع موجها معتبر است. اصل برهم‌نهمش را می‌توان به‌نحو صورتی تری به طریق زیر بیان کرد. اگر ψ_1 و ψ_2 جوابهای مستقل معادلهٔ موج

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

باشند آنگاه ترکیب خطی

$$\psi = a\psi_1 + b\psi_2$$

که در آن a و b ثابت‌اند نیز یک جواب است.

برهم‌نهمش امواج الکترومغناطیسی را می‌توان برحسب میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی آنها با روابط برداری زیر بیان کرد

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

به‌طور کلی، جهت میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی را باید به حساب آورد. نتیجهٔ برهم‌نهمش امواج در نقطه‌ای که میدانهای الکتریکی، به‌عنوان مثال، برهم عموداند با نتیجهٔ موردی که با هم موازی‌اند یکسان نیست. در نظر گرفتن ماهیت برداری \mathbf{E} در برهم‌نهمش دو موج الکترومغناطیسی را در فصل بعد به‌نحو صورتی تری انجام می‌دهیم. مورد امواج متعامد \mathbf{E} را در بحث قطبش نور به تفصیل بررسی خواهیم کرد. در حال حاضر، میدانهای الکتریکی را به‌صورت کمیت‌های نرده‌ای در نظر می‌گیریم. این بررسی برای مواردی دقیقاً اعتبار دارد که تک‌تک میدانهای \mathbf{E} با هم موازی‌اند، و غالباً در مواردی هم که این میدانها تقریباً موازی‌اند به‌کار می‌رود. این بررسی همچنین برای مورد نور ناقطبیده که در آن میدان \mathbf{E} را می‌توان با دو مؤلفهٔ متعامد نمایش داد معتبر است. نظریهٔ نرده‌ای برای هر مؤلفه و همتای موازی آن در امواج برهم‌نهاد، و در نتیجه برای تمام موج، به‌کار می‌رود.

اثرات غیرخطی که برای آنها اصل برهم‌نهش تمام نتایج مشاهده شده را پیش‌بینی نمی‌کند وقتی روی می‌دهند که نوری با دامنه بسیار بزرگ با ماده برهم‌کنش می‌کند. امکان تولید چگالیهای انرژی زیاد با استفاده از نور لیزر مطالعه و کاربرد این اثرات را آسان کرده است، و اپتیک غیرخطی را به‌صورت شاخه مهمی از اپتیک نوین در آورده است. در فصل ۲۶ یک بحث مقدماتی از این موضوع ارائه خواهد شد.

۲-۹ برهم‌نهش امواج با بسامد یکسان

اولین موردی را که از برهم‌نهش بررسی می‌کنیم وضعیتی است که در آن دو موج هماهنگ با بسامد یکسان با هم ترکیب می‌شوند و آشفتگی موج برآیند را تشکیل می‌دهند. این دو موج می‌توانند از لحاظ دامنه و فاز با هم متفاوت باشند. از موجی به‌صورت

$$E = E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \varphi_0)$$

شروع می‌کنیم که در آن زاویه فاز اولیه φ_0 را به لحاظ کلیت اضافه کرده‌ایم. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ را برابر با یک مقدار ثابت می‌گیریم زیرا می‌خواهیم امواج را در یک نقطه ثابت از فضا بررسی کنیم. بنابراین، می‌نویسیم

$$E = E_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (2-9)$$

که در آن زاویه فاز ثابت α عبارت است از

$$\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0 \quad (3-9)$$

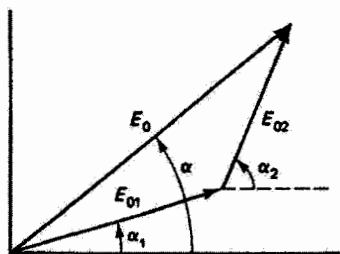
دو موج از این نوع که به یک نقطه معین از فضا می‌رسند اختلاف فازی دارند برابر با

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + (\varphi_{0_2} - \varphi_{0_1})$$

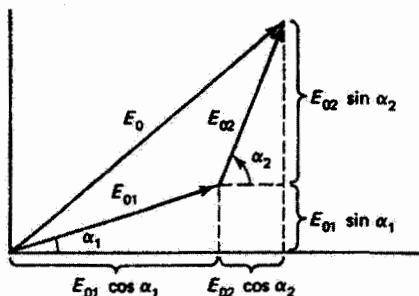
که از اختلاف راه (که با جمله اول داده می‌شود) و اختلاف فاز اولیه (که با جمله دوم داده می‌شود) ناشی شده است. تغییرات زمانی امواج الکترومغناطیسی در نقطه معین را می‌توان با روابط زیر بیان کرد

$$E_1 = E_{0_1} \sin(\omega t + \alpha_1) \quad (4-9)$$

$$E_2 = E_{0_2} \sin(\omega t + \alpha_2) \quad (5-9)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱-۹ نمودار فاز برای برهم‌نهی دو موج هماهنگ. (الف) جمع دو موج هماهنگ. (ب) مؤلفه‌های فازور.

بنابه اصل برهم‌نهی، میدان الکتریکی برآیند E_R در این نقطه عبارت است از

$$E_R = E_1 + E_2 = E_{o_1} \sin(\omega t + \alpha_1) + E_{o_2} \sin(\omega t + \alpha_2)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر برای مجموع دو زاویه،

$$\sin(A + B) \equiv \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

و پس از مرتب کردن داریم

$$E_R = (E_{o_1} \cos \alpha_1 + E_{o_2} \cos \alpha_2) \sin \omega t + (E_{o_1} \sin \alpha_1 + E_{o_2} \sin \alpha_2) \cos \omega t \quad (۶-۹)$$

از طرف دیگر، اگر هر یک از امواج مؤلف، معادله‌های ۴-۹ و ۵-۹ را با ترسیم بزرگی و زاویه فاز به صورت فازور نمایش دهیم و آنها را مانند بردارها با هم جمع کنیم (شکل ۱-۹ الف)، برآیند یا مجموعی با بزرگی E_o و فاز α به دست می‌آوریم. با توجه به شکل ۱-۹ ب، مؤلفه‌های این برآیند عبارت‌اند از

$$E_o \cos \alpha = E_{o_1} \cos \alpha_1 + E_{o_2} \cos \alpha_2$$

$$E_o \sin \alpha = E_{o_1} \sin \alpha_1 + E_{o_2} \sin \alpha_2$$

اکنون معادله ۹-۶ برحسب کمیتهای E_0 و α ، که با این روش ترسیمی تعریف می‌شوند، به صورت زیر در می‌آید

$$E_R = E_0 \cos \alpha \sin \omega t + E_0 \sin \alpha \cos \omega t$$

یا

$$E_R = E_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (۷-۹)$$

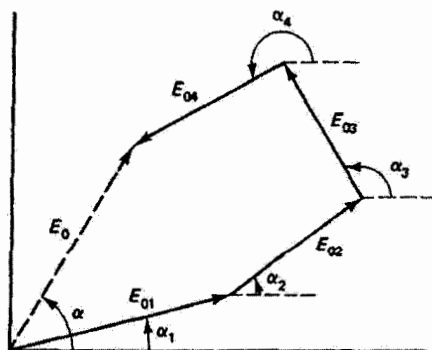
نتیجه می‌گیریم که موج برآیند E_R موج هماهنگ دیگری است با بسامد یکسان ω و با دامنه E_0 و فاز α که مطابق نمودار فازور (شکل ۹-۱) به امواج هماهنگ مؤلف مربوط می‌شوند. با استفاده از قانون کسینوس برای شکل ۹-۱ الف، رابطه زیر برای E_0 به دست می‌آید

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (۸-۹)$$

و با توجه به شکل ۹-۱ ب، زاویه فاز با رابطه زیر داده می‌شود

$$\tan \alpha = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2} \quad (۹-۹)$$

این روش ترسیمی را می‌توانیم، مانند مورد بردارها، به هر تعداد موج مؤلف با بسامد یکسان تعمیم دهیم. شکل ۹-۲ به چهار موج از این نوع مربوط می‌شود. برای N موج هماهنگ با بسامد یکسان،



شکل ۹-۲ نمودار فازور برای چهار موج هماهنگ با بسامد یکسان. نتیجه برهم‌نهی این امواج موج برآیندی با همین بسامد و با دامنه E_0 و فاز α است.

نمودار نشان می‌دهد که تعمیم مناسب معادله ۹-۹ عبارت است از

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^N E_{o_i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N E_{o_i} \cos \alpha_i} \quad (10-9)$$

و تعمیم معادله ۸-۹ بنابه قضیه فیثاغورث به صورت زیر است

$$E_o^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_{o_i} \sin \alpha_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N E_{o_i} \cos \alpha_i \right)^2 \quad (11-9)$$

بهرتر است معادله ۹-۱۱ را به صورتی در آوریم که به‌عنوان تعمیم شباهت بیشتری با قانون کسینوس در معادله ۸-۹ داشته باشد. از بسط جمله‌های معادله ۹-۱۱ داریم

$$\left(\sum_{i=1}^N E_{o_i} \sin \alpha_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N E_{o_i}^2 \sin^2 \alpha_i + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{o_i} E_{o_j} \sin \alpha_i \sin \alpha_j \quad (12-9)$$

$$\left(\sum_{i=1}^N E_{o_i} \cos \alpha_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N E_{o_i}^2 \cos^2 \alpha_i + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{o_i} E_{o_j} \cos \alpha_i \cos \alpha_j \quad (13-9)$$

اولین جمله در طرف راست هر یک از دو معادله بالا مجموع مجزورهای تک‌تک جمله‌ها در رشته‌های طرف چپ است. جمله‌های دوم شامل جمع دوگانه روی تمام حاصلضربهای عرضی هستند و در آنها نماد $i > j$ معرف این است که اولاً حاصلضربهای خودی، که قبلاً در جمله‌های اول آمده‌اند، منظور نمی‌شوند و ثانیاً حاصلضربهای عرضی تکرار نمی‌شوند، و البته مورد اخیر با ضریب ۲ جبران شده است. از جمع معادله‌های ۹-۱۲ و ۹-۱۳ داریم

$$E_o^2 = \sum_{i=1}^N E_{o_i}^2 (\sin^2 \alpha_i + \cos^2 \alpha_i) + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{o_i} E_{o_j} (\cos \alpha_i \cos \alpha_j + \sin \alpha_i \sin \alpha_j)$$

پراتنز جمله اول متحد با ۱ و پراتنز جمله دوم متحد با $\cos(\alpha_i - \alpha_j)$ است، به طوری که در نهایت به دست می‌آوریم

$$E_o^2 = \sum_{i=1}^N E_{o_i}^2 + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{o_i} E_{o_j} \cos(\alpha_j - \alpha_i) \quad (14-9)$$

به‌طور خلاصه، مجموع N موج هماهنگ با بسامد یکسان باز هم یک موج هماهنگ با همان بسامد است که دامنه آن با معادله ۹-۱۱ یا ۹-۱۴ و فاز آن با معادله ۹-۱۰ داده می‌شود.

مثال

نتیجهٔ برهم‌نهش امواج هماهنگ زیر را تعیین کنید: $E_1 = 7 \sin(\omega t + \pi/3)$ ، $E_2 = 12 \cos(\omega t + \pi/4)$ و $E_3 = 20 \sin(\omega t + \pi/5)$.

حل: ابتدا، برای سازگار کردن تمام زاویه‌های فاز، موج کسینوسی را به موج سینوسی تبدیل می‌کنیم: $E_2 = 12 \sin(\omega t + \pi/4 + \pi/2) = 12 \sin(\omega t + 3\pi/4)$ داریم

$$E_0 = \left[7 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 12 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 20 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^2 + \left[7 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 12 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 20 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^2$$

یا $E_0 = 26,303^2 + 11,195^2 = 28,6$ و همین نتیجه را می‌توان از معادله ۹-۱۴ به‌دست آورد، که به‌صورت زیر در می‌آید

$$E_0 = 7^2 + 12^2 + 20^2 + 2 \left[7 \times 12 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + 7 \times 20 \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right) + 12 \times 20 \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

زاویهٔ فاز موج هماهنگ برآیند با استفاده از معادله ۹-۱۰ تعیین می‌شود. مجموعهای تشکیل‌دهندهٔ صورت و مخرج قبلاً در بخش اول محاسبه شده‌اند، و در نتیجه داریم

$$\tan \alpha = \frac{26,303}{11,195} \quad \text{و} \quad \alpha = 1,17 \text{ (رادیان)}$$

بدین ترتیب، موج هماهنگ برآیند را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\blacktriangle \quad E_0 = 28,6 \sin(\omega t + 1,17) = 28,6 \sin(\omega t + 0,3772\pi)$$

۳-۹ چشمه‌های کاتوره‌ای و همدوس

ثمره کوششی که برای به دست آوردن معادله ۹-۱۴ کردیم این است که می‌توانیم دو مورد مهم برای برهم‌نهی را به آسانی از هم متمایز کنیم: (۱) مورد N چشمه با فازهای کاتوره‌ای (اتفاقی) و دامنه و بسامد یکسان، در حالی که N یک عدد بزرگ است، و (۲) مورد N چشمه همدوس از یک نوع. در مورد اول، که فازها کاتوره‌ای هستند، اختلاف فاز $\alpha_j - \alpha_i$ نیز کاتوره‌ای است. بنابراین، مجموع جمله‌های کسینوس در معادله ۹-۱۴ وقتی N زیاد می‌شود به صفر میل می‌کند، زیرا این جمله‌ها بین قسمتهای مثبت و منفی که از -1 تا $+1$ گسترده‌اند به‌طور مساوی تقسیم شده‌اند. در نتیجه باقی می‌ماند

$$E_o^r = \sum_{i=1}^N E_{o_i}^r = N E_{o_1}^r \quad (15-9)$$

زیرا N چشمه با دامنه مساوی داریم. بدین ترتیب، برای N چشمه با فاز کاتوره‌ای مجذورهای تک‌تک دامنه‌ها با هم جمع می‌شوند و مجذور دامنه برآیند را به وجود می‌آورند. با توجه به اینکه تابیدگی (W/m^2) متناسب با مجذور دامنه میدان الکتریکی است، می‌توانیم بگوییم تابیدگی برآیند N چشمه یکسان اما با فازهای کاتوره‌ای برابر است با مجموع تابیدگیهای انفرادی. از طرف دیگر، اگر N چشمه همدوس باشند و همفاز، یعنی تمام α ها با هم برابر باشند، آنگاه معادله ۹-۱۴ به صورت زیر در می‌آید.

$$E_o^r = \sum_{i=1}^N E_{o_i}^r + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{o_i} E_{o_j}$$

زیرا تمام کسینوسها ۱ هستند. طرف راست معادله بالا در واقع مجذور مجموع تک‌تک دامنه‌ها است. بنابراین، معادله به صورت ساده‌تر زیر بیان می‌شود

$$E_o^r = \left(\sum_{i=1}^N E_{o_i} \right)^2 = (N E_{o_1})^2 = N^2 E_{o_1}^2 \quad (16-9)$$

در اینجا دامنه‌ها مستقیماً با هم جمع می‌شوند و برآیند $E_o = N E_{o_1}$ را به وجود می‌آورند، در حالی که در مورد قبل نتیجه $\sqrt{N} E_{o_1}$ است. بدین ترتیب، تابیدگی برآیند N چشمه یکسان همدوس، که همفاز با یکدیگر تابش می‌کنند، N^2 برابر تابیدگی هر یک از چشمه‌ها است. توجه کنید که برای این مورد لازم نیست N عدد بزرگی باشد. نتیجه می‌گیریم که تابیدگی مثلاً 100

چشمه همدوس همفاز ۱۰° بار بیشتر از تابیدگی مورد متداولتر ۱۰° چشمه کاتوره‌ای است. اگر E را دامنه موج تراکمی تعبیر کنیم، نتیجه بالا برای شدت صوت نیز معتبر است.

۴-۹ امواج ساکن

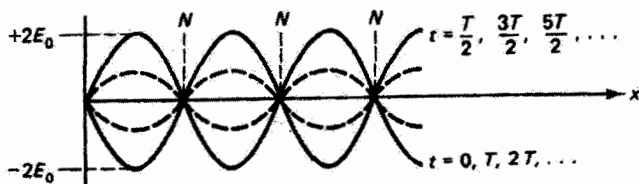
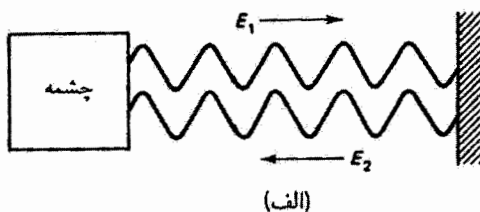
مورد مهم دیگری از برهم‌نهی وقتی پیش می‌آید که یک موج معین در یک محیط در دو جهت مخالف وجود داشته باشد. این وضعیت اکثراً وقتی روی می‌دهد که موج پیشرونده در یک نقطه از مسیر خود متحمل بازتاب شود، چنانکه در شکل ۳-۹ الف نشان داده شده است. فعلاً وضعیت ایده‌آلی را در نظر می‌گیریم که در آن هیچ مقدار انرژی نه در بازتاب تلف می‌شود و نه توسط محیط انتقال‌دهنده جذب می‌شود. امواج رفت و برگشت به ترتیب عبارت‌اند از

$$E_1 = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad (۱۷-۹)$$

$$E_2 = E_0 \sin(kx + \omega t) \quad (۱۸-۹)$$

موج برآیند در این محیط بنا به اصل برهم‌نهی عبارت است از

$$E_R = E_1 + E_2 = E_0 [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)] \quad (۱۹-۹)$$



(ب)

شکل ۳-۹ امواج ساکن. (الف) وضعیت موج ساکن وقتی روی می‌دهد که یک موج و بازتاب آن در یک محیط وجود داشته باشند. به‌طور کلی در بازتاب انتقال فاز (که نشان داده نشده است) روی می‌دهد. (ب) نمایش جابه‌جایی برآیند برای موج ساکن در لحظه‌های مختلف. خطوط پر جابه‌جایی ماکسیمم موج را نشان می‌دهند. جابه‌جایی در گره‌ها (نقاط N) همیشه صفر است.

در این مورد، مناسب است کمیتهای زیر را تعریف کنیم

$$\alpha = kx + \omega t \quad \text{و} \quad \beta = kx - \omega t$$

و از اتحاد مثلثاتی

$$\sin \alpha + \sin \beta \equiv 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

استفاده کنیم. بنابراین، معادله ۹-۱۹ به صورت زیر در می آید

$$E_R = (2E_0 \sin kx) \cos \omega t \quad (9-20)$$

که نمایشگر یک موج ساکن است که در شکل ۹-۳ ترسیم شده است. اگر کمیت داخل پرانتز را به عنوان دامنه وابسته به فضا در نظر بگیریم تعبیر ساده تر می شود. در هر نقطه در امتداد این محیط، نوسانها با رابطه زیر داده می شوند

$$E_R = A(x) \cos \omega t$$

که در آن $A(x) = 2E_0 \sin kx$. مقادیری از x وجود دارند که به ازای آنها $A(x) = 0$ ، و در نتیجه به ازای تمام t ها داریم $E_R = 0$. این مقادیر وقتی روی می دهند که $\sin kx = 0$ ، یعنی

$$kx = \frac{2\pi x}{\lambda} = m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

یا

$$x = m \left(\frac{\lambda}{2} \right) = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots \quad (9-21)$$

این نقاط را گره موج ساکن می نامند و به اندازه نصف طول موج از هم فاصله دارند. موج ساکن در زمانهای مختلف، مانند آنچه در شکل ۹-۳ نشان داده شده است، به صورت امواج سینوسی به نظر می رسد. اگر چه دامنه های این امواج با زمان تغییر می کنند، همگی در نقاط ثابت گره از صفر می گذرند. مقدار E_R در هر نقطه در زمانی ماکسیمم است که $\cos \omega t = \pm 1$ ، یا وقتی که

$$\omega t = 2\pi f t = \left(\frac{2\pi}{T} \right) t = m\pi$$

بنابراین، پوش خارجی موج ساکن در زمانهای زیر تشکیل می‌شود

$$t = m \left(\frac{T}{4} \right) = 0, \frac{T}{4}, T, \frac{3T}{4}, \dots$$

که در آن T دوره است. همچنین زمانهای دوره‌ای معینی وجود دارند که موج ساکن همه جا صفر است؛ در واقع، به‌ازای $t = T/4, 3T/4, \dots$ داریم $\cos \omega t = 0$.

برخلاف امواج متحرک، امواج ساکن انرژی منتقل نمی‌کنند. تمام انرژی موج برای نگهداری نوسانها بین نقاط گره، که در آنها موجهای رفت و برگشت یکدیگر را خنثی می‌کنند، صرف می‌شود. اما، از آنجا که آینه‌ها بازتابگرهای کاملی نیستند و محیط منتقل‌کننده به‌طور کلی مقداری از انرژی موج را جذب می‌کند، دامنه موج با x کاهش می‌یابد. اگر چشمه انرژی تلف‌شده را جبران نکنند، دامنه با زمان نیز کاهش می‌یابد. در این مورد، دو موج یکدیگر را در گره‌ها کاملاً خنثی نمی‌کنند و ماکسیمم برآیند آنها در شکمها (پادگره‌ها)، نقاط وسط فاصله گره‌ها، به $2E_0$ نمی‌رسد. در نتیجه، موج برآیند یک مؤلفه موج متحرک در بردارد که انرژی به آینه منتقل می‌کند و برمی‌گرداند.

وارد کردن یک فاز نسبی بین موجهای $9-17$ و $9-18$ ، چنانکه در بازتاب باید انتظار داشته باشیم، منجر به یک مؤلفه زاویه فاز در عوامل سینوس و کسینوس در معادله $9-20$ می‌شود. در نتیجه، گره‌ها از مکانهایی که در شکل $9-3$ نشان داده شده‌اند جابه‌جا می‌شوند اما فاصله آنها همان $\lambda/2$ باقی می‌ماند. زمانهایی که در آنها صورت موج همه جا صفر است یا در هر نقطه در ماکسیمم جابه‌جایی خود است نیز تغییر می‌کنند. اما ویژگیهای اصلی موج ساکن بدون تغییر می‌مانند.

۵-۹ سرعتهای فاز و گروه

یک مورد دیگر برهم‌نهش، که کاربردهای مهمی در اپتیک دارد، به امواجی مربوط می‌شود که دامنه‌های یکسان یا تقریباً یکسان اما بسامدهای مختلف دارند. اختلاف بسامد به معنی اختلاف طول موج و سرعت است. برهم‌نهش چند موج از این نوع، که قله‌های آنها با سرعتهای مختلف حرکت می‌کنند، منجر به دامنه‌های برآیندی می‌شود که به‌طور دوره‌ای بزرگ و کوچک می‌شوند. مکان نقطه‌ای که در آن تک‌تک قله‌ها برهم منطبق می‌شوند، و در نتیجه دامنه برآیند ماکسیمم را به‌وجود می‌آورند، با زمان تغییر می‌کند و از این‌رو این نقطه سرعت مشخصه خاص خود را دارد. بین این نقاط مربوط به پاسخ ماکسیمم، در هر زمان، دامنه‌های مینیمم ناشی از کنار هم قرار گرفتن امواج مؤلفی که کم‌وبیش خارج از فاز هستند ظاهر می‌شوند. این ویژگیهای موج برآیند حتی برای مورد دو موج مؤلف، چنانکه در زیر دیده خواهد شد، بروز می‌کنند.

دو موج زیر با بسامد و عدد موج مختلف را در نظر بگیرید

$$E_1 = E_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad (22-9)$$

$$E_2 = E_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad (23-9)$$

برهم‌نهمش این دو موج، که با هم در یک محیط معین حرکت می‌کنند، عبارت است از

$$E_R = E_1 + E_2 = E_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$\cos \alpha + \cos \beta \equiv 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (24-9)$$

و با تعریف

$$\alpha = k_1 x - \omega_1 t$$

$$\beta = k_2 x - \omega_2 t$$

داریم

$$E_R = 2E_0 \cos \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t \right] \cos \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t \right] \quad (25-9)$$

اکنون می‌نویسیم

$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad k_p = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (26-9)$$

و

$$\omega_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad k_g = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (27-9)$$

در نتیجه، معادله ۲۵-۹ به صورت زیر در می‌آید

$$E_R = 2E_0 \cos(k_p x - \omega_p t) \cos(k_g x - \omega_g t) \quad (28-9)$$

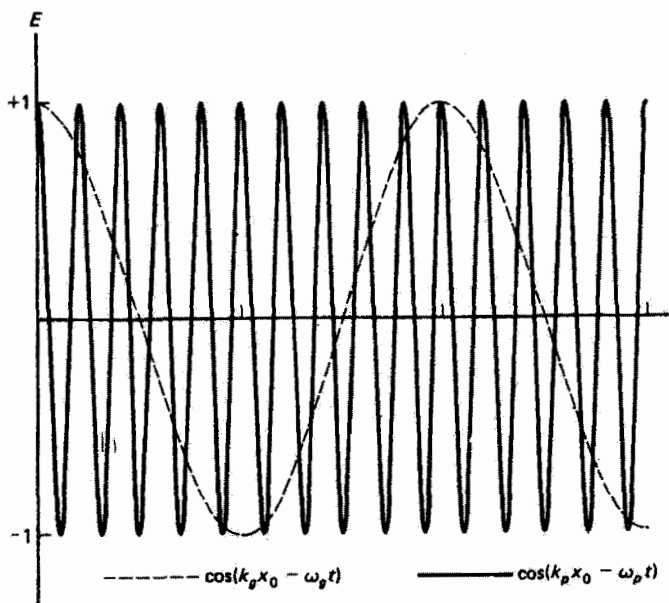
معادله ۲۸-۹ حاصلضرب دو موج کسینوسی است. عامل اول دارای بسامد ω_p و ثابت انتشار k_p است که به ترتیب میانگینهای بسامدها و ثابتهای انتشار امواج مؤلف هستند. عامل دوم نمایشگر موجی است با بسامد ω_g و ثابت انتشار k_g که در مقایسه بسیار کوچکتراند، زیرا با توجه به معادله ۲۷-۹ تفاضل مقادیر اصلی هستند. با $\omega_g \gg \omega_p$ ، نمودارهای این توابع کسینوسی به ازای نقطه معین x نوعاً شبیه به آنهایی هستند که در شکل ۹-۴ الف نشان داده شده‌اند. تابع کسینوسی کند تغییر را می‌توان کسری بین $+1$ تا -1 برای مقادیر مختلف t در نظر گرفت. چنین کسری اگر در تابع تند تغییر ضرب شود به همین نسبت جابه‌جایی مربوط به آن را کاهش می‌دهد. نتیجه کلی این است که امواج کم‌بسامد به‌عنوان پوش مدوله‌کننده امواج پر بسامد عمل می‌کنند (شکل ۹-۴ ب). خط‌چینها پوش آشفته‌گی موج برآیند را نشان می‌دهند. این آشفته‌گی موج نمایشگر پدیده زنش است. چون مجذور دامنه موج در هر زمان معرف چگالی شار تابشی است، انرژی منتقل شده توسط دنباله تپهای متحرک در شکل ۹-۴ ب خودش کمیت تپندهای با بسامد زنش ω_b است. این شکل نشان می‌دهد که بسامد زنش دو برابر بسامد پوش مدوله‌کننده است، یا

$$\omega_b = 2\omega_g = 2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) = \omega_1 - \omega_2 \quad (29-9)$$

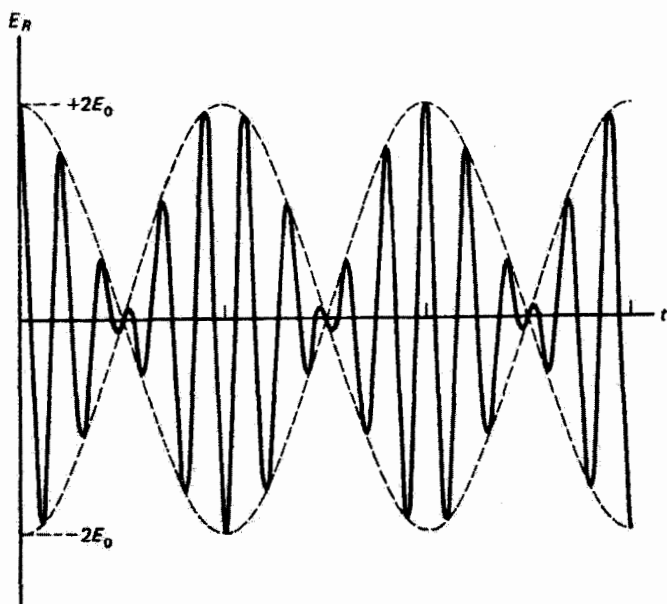
از معادله ۲۹-۹ دیده می‌شود که بسامد زنش صرفاً تفاضل بسامدهای دو موج مؤلف است. در مورد صوت، وقتی دو چنگال کوک را به‌طور هم‌زمان به ارتعاش در می‌آوریم آنچه می‌شنویم بسامد زنشی است که برابر با تفاضل بسامدهای چنگالها است.

بحث بالا کاربرد اپتیکی مستقیمی در پدیده پاشیدگی دارد. مؤلفه‌های با طول موجهای مختلف نور به علت پاشیدگی با سرعتهای مختلف در محیط شکست حرکت می‌کنند. حتی نور به اصطلاح تکفام دارای طیفی، هر چند باریک، حول طول موج متوسط است. دو مؤلفه طول موج اختیاری از این باریکه نور را که در محیط پاشنده حرکت می‌کند می‌توان با معادله‌های ۲۲-۹ و ۲۳-۹ نمایش داد و بدین ترتیب برآیندی مانند آنچه در شکل ۹-۴ ب نشان داده شده است به‌دست آورد. سرعت موجی که بسامد بیشتری دارد و همچنین سرعت پوش که بسامد آن کمتر است از رابطه کلی سرعت به‌دست می‌آید:

$$v = \nu \lambda = \frac{\omega}{k} \quad (30-9)$$



(الف)



(ب)

شکل ۴-۹ (الف) نمودارهای جداگانه عوامل کسینوسی معادله ۲۸-۹ در $x = x_0$ با $\omega_p \gg \omega_g$. (ب) موج مدوله شده نمایشگر معادله ۲۸-۹ در $x = x_0$.

در نتیجه، سرعت موج با بسامد بیشتر، با توجه به معادله ۹-۲۶، عبارت است از سرعت فاز

$$v_p = \frac{\omega_p}{k_p} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \cong \frac{\omega}{k} \quad (۳۱-۹)$$

که در آن آخرین قسمت یک تقریب در مورد ω و $\omega_1 \cong \omega_2 = \omega$ و $k_1 \cong k_2 = k$ برای مؤلفه‌های بسامد و طول موج مجاور در طیف پیوسته است. از طرف دیگر، سرعت پوش که سرعت گروه نامیده می‌شود عبارت است از

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \cong \frac{d\omega}{dk} \quad (۳۲-۹)$$

که در آن در آخرین قسمت باز هم فرض کرده‌ایم تفاضلهای بین بسامدها و ثابتهای انتشار کوچک‌اند. البته لازم نیست سرعت گروه $v_g = d\omega/dk$ و سرعت فاز $v_p = \omega/k$ با هم برابر باشند. اگر $v_p > v_g$ ، به نظر می‌رسد موج پربسامد نسبت به پوش، که این هم در حرکت است، سرعتی به سمت راست دارد. این امواج، که می‌توان آنها را با اسیلوسکوپ تولید کرد، به نظر می‌رسد که در گره چپ هر تب ایجاد می‌شوند و در گره راست آن از بین می‌روند. اگر $v_p < v_g$ ، بدیهی است که حرکت نسبی وارونه می‌شود. اگر $v_p = v_g$ ، موج پربسامد و پوش با یک آهنگ، بدون حرکت نسبی، با هم حرکت می‌کنند. رابطه بین سرعتهای گروه و فاز را می‌توان به طریق زیر به دست آورد. v را از معادله ۹-۳۱ در معادله ۹-۳۲ جاگذاری می‌کنیم و مشتق می‌گیریم:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_p) \quad (۳۳-۹)$$

$$v_g = v_p + k \left(\frac{dv_p}{dk} \right)$$

اگر سرعت موج بستگی به طول موج نداشته باشد، یعنی در محیط ناپاشنده، داریم $dv_p/dk = 0$ و سرعتهای فاز و گروه با هم برابرند. برای انتشار نورا، این مورد در خلأ پیش می‌آید که در آن $v_p = v_g = c$. اما در محیطهای پاشنده $v_p = c/n$ که در آن ضریب شکست n تابع k (یا λ) است. بنابراین، می‌نویسیم $n = n(k)$ و

$$\frac{dv_p}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{c}{n} \right) = \frac{-c}{n^2} \left(\frac{dn}{dk} \right)$$

با جاگذاری در معادله ۳۳-۹ رابطه معادلی بین سرعت‌های فاز و گروه به دست می‌آوریم:

$$v_g = v_p \left[1 - \frac{k}{n} \left(\frac{dn}{dk} \right) \right] \quad (۳۴-۹)$$

با استفاده از $k = 2\pi/\lambda$ و $dk = -(2\pi/\lambda^2)d\lambda$ ، باز هم می‌توان معادله ۳۴-۹ را به صورت دیگری در آورد:

$$v_g = v_p \left[1 + \frac{\lambda}{n} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) \right] \quad (۳۵-۹)$$

در محیط‌هایی با پاشندگی عادی، داریم $v_g < v_p$ و $dn/d\lambda < 0$.

این نتایج، که در بحث بالا برای دو مؤلفه موج به دست آمدند، به طور کلی برای تعدادی از امواج با گستره باریکی از بسامدها معتبراند.^۱ مجموع این امواج را می‌توان هم با سرعت فاز، سرعت متوسط موجهای انفرادی، و هم با سرعت گروه، سرعت صورت موج مدوله‌کننده، مشخص کرد. چون سرعت گروه سرعتی است که انرژی با آن منتقل می‌شود، سرعت مستقیماً قابل اندازه‌گیری امواج است. وقتی اطلاعاتی را با مدوله کردن سوار امواج حامل می‌کنیم، مثلاً در مدوله‌سازی دامنه (AM) برای امواج رادیویی، سرعت گروه را سرعت علامت می‌نامیم، که معمولاً کمتر از سرعت فاز امواج حامل است. وقتی تپهای نوری، متشکل از تعدادی موج هماهنگ روی گستره‌ای از بسامدها، از یک محیط پاشنده عبور می‌کنند سرعت گروه سرعت تپها است و با سرعت تک‌تک امواج هماهنگ تفاوت دارد. در مکانیک موجی، الکترون با بسته موج جایگزیده‌ای نمایش داده می‌شود که می‌توان آن را به تعدادی موج هماهنگ با گستره‌ای از طول‌موجها تجزیه کرد. سرعتی که برای الکترون اندازه‌گیری می‌شود سرعت این بسته موج، یعنی سرعت گروه امواج مؤلف، است.

مسائل

۹-۱ دو موج تخت با توابع زیر داده شده‌اند

$$E_1 = \frac{\Delta E_0}{(3x - 4t)^2 + 2} \quad \text{و} \quad E_2 = \frac{-\Delta E_0}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

که در آنها x برحسب متر و t برحسب ثانیه است.

۱. آنالیز فوریه روشهایی برای بررسی برهم‌نهمش چندین مؤلفه هماهنگ به دست می‌دهد. این موضوع در فصل ۱۲ بیان می‌شود.

(الف) حرکت این موجها را توصیف کنید.

(ب) برهم‌نهش آنها در چه لحظه‌ای همه جا صفر است؟

(ج) برهم‌نهش آنها در چه نقطه‌ای همیشه صفر است؟

۹-۲ (الف) دو موج هماهنگ زیر را در یک نمودار فازور نشان دهید

$$E_1 = 2 \sin \omega t \quad \text{و} \quad E_2 = 7 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

(ب) رابطه ریاضی موج برآیند را به‌دست آورید.

۹-۳ نتیجه برهم‌نهش دو موج هماهنگ به‌صورت

$$E = E_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

را به‌ازای دامنه‌های ۳ و ۴ و فازهای 30° و 90° به‌دست آورید. دوره این دو موج ۱ s است.

۹-۴ دو موج که با هم روی یک خط حرکت می‌کنند با توابع زیر توصیف می‌شوند

$$y_1 = 5 \sin \left[\omega t + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$y_2 = 7 \sin \left[\omega t + \frac{\pi}{3} \right]$$

تابع موج برآیند را بنویسید.

۹-۵ تابع برهم‌نهش امواج هماهنگ $E_1 = \sin(\omega t - 10^\circ)$ ، $E_2 = 3 \cos(\omega t + 100^\circ)$ و

$E_3 = 2 \sin(\omega t - 30^\circ)$ را که دوره آنها ۲ s است بنویسید و ترسیم کنید.

۹-۶ صد آتن امواج یکسانی با تابع زیر می‌فرستند

$$E = 0.2 \sin(\omega t + \epsilon) \text{ V/m}$$

این امواج به یک نقطه می‌گیرند. دامنه برآیند را به‌دست آورید اگر

(الف) تمام موجها هم‌فاز باشند (چشمه‌های همدوس) و

(ب) این موجها اختلاف فازهای اتفاقی (کاتوره‌ای) داشته باشند.

۷-۹ دو موج تخت با بسامد یکسان که ارتعاشهای آنها در راستای z است با توابع زیر داده می‌شوند

$$\psi(x, t) = 4 \sin \left[20t + \left(\frac{\pi}{3} \right) x + \pi \right]$$

$$\psi(y, t) = 2 \sin \left[20t + \left(\frac{\pi}{4} \right) y + \pi \right]$$

تابع موج برابند مربوط به برهم‌نهی آنها را در نقطه $x = 5$ و $y = 2$ بنویسید.

۸-۹ با شروع از رابطه بین سرعت گروه و سرعت فاز به صورت

$$v_g = v_p - \lambda(dv/d\lambda)$$

(الف) این رابطه را برحسب n و ω بیان کنید، و

(ب) تعیین کنید در محیطی با پاشندگی عادی سرعت گروه کمتر از سرعت فاز است یا بیشتر

از آن.

۹-۹ توان پاشندگی شیشه به صورت کسر $(n_F - n_C)/(n_D - 1)$ تعریف می‌شود که در آن C ، D و F مربوط به طول‌موجهای فرانهوفر $\lambda_C = 6563 \text{ \AA}$ ، $\lambda_D = 5890 \text{ \AA}$ و $\lambda_F = 4861 \text{ \AA}$ هستند. سرعت گروه تقریبی را در شیشه‌ای که توان پاشندگی آن $1/30$ است و برای آن $n_D = 1.50$ به دست آورید.

۱۰-۹ منحنی پاشندگی شیشه را می‌توان به‌طور تقریبی با معادله تجربی کوشی $n = A + B/\lambda^2$ نمایش داد. سرعتهای فاز و گروه را برای نوری با طول‌موج 500 nm در شیشه‌ای که برای آن $A = 1.40$ و $B = 2.5 \times 10^6 \text{ \AA}^2$ تعیین کنید.

۱۱-۹ رابطه ثابت دی‌الکتریک K برای یک گاز با ضریب شکست آن به صورت $K = n^2$ است. (الف) نشان دهید سرعت گروه برای امواج متحرک در این گاز را می‌توان برحسب ثابت دی‌الکتریک با رابطه زیر بیان کرد

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{K}} \left[1 - \frac{\omega}{2K} \frac{dK}{d\omega} \right]$$

که در آن c سرعت نور در خلأ است.

(ب) یک رابطه تجربی مربوط به تغییرات K با بسامد عبارت است از

$$K = 1 + [A/(\omega_0^2 - \omega^2)]$$

که در آن A و ω_0 ثابتهای مربوط به گاز هستند. اگر جمله دوم نسبت به جمله اول بسیار کوچک باشد، نشان دهید

$$v_g \cong c \left[1 - \frac{\omega^2 A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right]$$

۱۲-۹ الف) نشان دهید سرعت گروه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$v_g = v_p - \lambda \left(\frac{dv_p}{d\lambda} \right)$$

(ب) سرعت گروه را برای امواج تخت در محیط پاشنده‌ای به دست آورید که برای آن $v_p = A + B\lambda$ که در آن A و B ثابت‌اند. نتیجه را تعبیر کنید.

۱۳-۹ امواج اقیانوس دارای سرعتهای مختلفی هستند که بستگی به عمق آنها دارد. امواج با طول موج بزرگ، که در عمق اقیانوس حرکت می‌کنند، سرعتی دارند که به طور تقریبی با رابطه زیر داده می‌شود

$$v = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2}$$

که در آن g شتاب گرانش است. سرعت امواج با طول موج کوچک که در سطح اقیانوس حرکت می‌کنند تقریباً برابر است با

$$v = \left(\frac{2\pi T}{\lambda\rho} \right)^{1/2}$$

که در آن ρ چگالی و T کشش سطحی است. نشان دهید سرعت گروه برای امواج با طول موج بزرگ $1/2$ سرعت فاز آنها و سرعت گروه برای امواج با طول موج کوچک $3/2$ سرعت فاز آنها است.

۱۴-۹ یک لیزر باریکه تکفامی با طول موج λ گسیل می‌کند که از آینه تختی که با سرعت v دور می‌شود به‌طور قائم بازتابیده می‌شود. بسامد زنش بین نور فرودی و بازتابیده را به‌دست آورید.

۱۵-۹ امواج ساکن از برهم‌نهی موج

$$y = Y \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{Yx}{\pi} \right] \quad (x \text{ و } y \text{ برحسب سانتیمتر؛ } t \text{ برحسب ثانیه})$$

و بازتاب آن در محیطی که جذب آن قابل چشمپوشی است به‌وجود می‌آید. دامنه، طول موج، طول حلقه، سرعت و دوره را برای موج برآیند تعیین کنید.

۱۶-۹ محیطی با ارتعاشی که رابطه زیر توصیف می‌کند آشفته می‌شود

$$y = 3 \sin \left(\frac{\pi x}{10} \right) \cos(50\pi t) \quad (x \text{ و } y \text{ برحسب سانتیمتر؛ } t \text{ برحسب ثانیه})$$

(الف) دامنه، بسامد، طول موج، سرعت و جهت امواج مؤلفی را به‌دست آورید که از برهم‌نهی آنها نتیجه‌ی بالا تولید شده است.

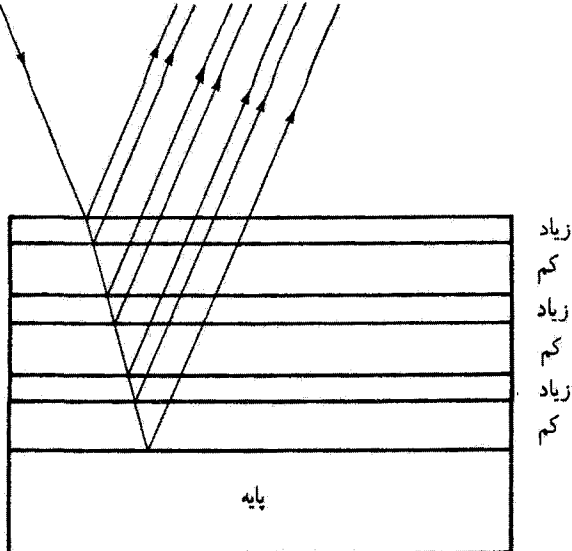
(ب) فاصله بین گره‌ها را تعیین کنید.

(ج) جابه‌جایی، سرعت و شتاب ذره‌ای در این محیط را در $x = 5 \text{ cm}$ و $t = 0.22 \text{ s}$ به‌دست آورید.

۱۷-۹ امواج تخت ۱۷-۹ و ۱۸-۹ را در نمایش مختلط بنویسید. با استفاده از این نمایش، نشان دهید برهم‌نهی این امواج موج ساکنی است که با رابطه ۲۰-۹ داده می‌شود.

مراجع

- [1] Hecht, Eugene, and Alfred Zajac. *Optics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1974. Ch. 7.
- [2] Ghatak, Ajoy K. *An Introduction to Modern Optics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972. Ch. 1.



تداخل نور

مقدمه

پدیده تداخل، مانند امواج ساکن و زنش که در فصل قبل بررسی کردیم، به برهم نهش دو یا چند موج منفرد تحت شرایط دقیقی که به زودی مشخص می‌کنیم بستگی دارد. وقتی عمدتاً به پدیده‌های تقویت یا تضعیف امواج نور که دقیقاً از برهم نهش آنها ناشی می‌شوند توجه داریم، معمولاً می‌گوییم این اثرات ناشی از تداخل نور هستند. وقتی وضعیتهای تقویت، یا تداخل سازنده، و تضعیف، یا تداخل ویرانگر، در یک آرایه مکانی به تناوب ظاهر می‌شوند، می‌گوییم تداخل یک نقش فریز ایجاد کرده است، مانند آنچه در نقش تداخل دوشکافی دیده می‌شود. همین وضعیت ممکن است منجر به تقویت یک بازه طول موج مرئی یا رنگ و تضعیف رنگهای دیگری شود، که در این مورد رنگهای تداخلی تولید می‌شوند، مانند آنچه در لایه آبصایون یا لایه نفت روی آب می‌بینیم. ساده‌ترین توضیح درست این پدیده‌ها با در نظر گرفتن نور به‌عنوان یک حرکت موجی امکانپذیر است. در این فصل و فصل بعد، چند کاربرد از این نوع را تحت عنوان کلی تداخل بررسی می‌کنیم.

۱-۱۰ تداخل دوباریکهای

ابتدا تداخل دو موج E_1 و E_2 را بررسی می‌کنیم که در آن خاصیت برداری میدانهای الکتریکی در نظر گرفته می‌شود. در مورد تداخل، هر دو موج نوعاً از یک چشمه ناشی می‌شوند و پس از

حرکت در مسیرهای مختلف دوباره به هم می‌پیوندند. این دو موج وقتی به هم می‌رسند لازم نیست راستای حرکت یکسانی داشته باشند، و از این رو در حالی که بسامد یکسانی دارند به‌طور کلی دارای بردار انتشار یکسان k نیستند. بنابراین، می‌توانیم توابع موج را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varepsilon_1) \quad (1-10)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varepsilon_2) \quad (2-10)$$

در یک نقطه کلی مانند P که با بردار مکان \mathbf{r} تعریف می‌شود، این امواج با هم تلافی می‌کنند و یک آشفتگی به‌وجود می‌آورند که برای آن میدان الکتریکی \mathbf{E}_p از اصل برهم‌نهی به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

اما \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 توابع تندتغییری با بسامدهای اپتیکی از مرتبه 10^{14} تا 10^{15} Hz برای نور مرئی هستند. بنابراین، متوسط \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 روی بازه‌های زمانی بسیار کوچک صفر است. اندازه‌گیری این امواج از روی تأثیر آنها بر چشم یا آشکارسازهای نوری دیگر بستگی به انرژی باریکه نور دارد. چگالی توان تابشی یا تابیدگی E_e (W/m^2) معرف متوسط زمانی مجذور دامنه موج است. متأسفانه، نماد متعارف برای تابیدگی، به‌استثنای شاخص آن، با نماد مربوط به میدان الکتریکی یکسان است. برای اجتناب از اشتباه، فعلاً برای تابیدگی از نماد I استفاده می‌کنیم:

$$I = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}^2 \rangle \quad (3-10)$$

بدین ترتیب، تابیدگی برآیند در نقطه P با رابطه زیر داده می‌شود

$$I = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_p^2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_p \rangle = \varepsilon_0 c \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \rangle$$

یا

$$I = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle \quad (4-10)$$

بنابه معادله ۳-۱۰، دو جمله اول مربوط به تابیدگیهای امواج انفرادی، I_1 و I_2 ، هستند. آخرین جمله بستگی به برهم‌کنش امواج دارد و جمله تداخلی I_{12} نامیده می‌شود. پس می‌توانیم بنویسیم

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \quad (5-10)$$

اگر نور مانند ذرات کلاسیک تداخل نداشت، آنگاه می‌بایست $I = I_1 + I_2$ وجود جمله سوم I_{12} نشاندهنده ماهیت موجی نور است، که می‌تواند تابیدگی را از طریق تداخل تقویت و تضعیف کند. توجه کنید که وقتی \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 برهم عموداند، و در نتیجه حاصلضرب زده‌ای آنها صفر است، تداخل روی نمی‌دهد. از طرف دیگر، وقتی میدانهای الکتریکی با هم موازی‌اند، جمله تداخلی بیشترین مقدار خود را دارد. دوباریکه نور ناقطبیده به این علت تداخل به وجود می‌آورند که هر یک از آنها می‌تواند به مؤلفه‌های متعامد \mathbf{E} تجزیه شود که در نتیجه با مؤلفه‌های مشابه مربوط به باریکه دیگر تشکیل زوج می‌دهند. هر مؤلفه یک جمله تداخلی با $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{E}_2$ (\mathbf{E}_1 موازی با \mathbf{E}_2) ایجاد می‌کند.

جمله تداخلی I_{12} را در نظر بگیرید:

$$I_{12} = 2\epsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle \quad (6-10)$$

که در آن \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 با معادله‌های $1-10$ و $2-10$ داده شده‌اند. حاصلضرب زده‌ای

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{o1} \cdot \mathbf{E}_{o2} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \epsilon_1) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \epsilon_2)$$

را می‌توان با بسط عوامل کسینوس ساده کرد. برای این منظور، می‌نویسیم

$$\alpha \equiv \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \epsilon_1 \quad \text{و} \quad \beta \equiv \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \epsilon_2$$

و در نتیجه

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{o1} \cdot \mathbf{E}_{o2} \cos(\alpha - \omega t) \cos(\beta - \omega t)$$

پس از بسط عوامل کسینوس، با گرفتن متوسط زمانی به دست می‌آوریم

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \mathbf{E}_{o1} \cdot \mathbf{E}_{o2} [\cos \alpha \cos \beta \langle \cos^2 \omega t \rangle + \sin \alpha \sin \beta \langle \sin^2 \omega t \rangle + (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle]$$

که در آن متوسطهای زمانی برای هر یک از عوامل وابسته به زمان را باید محاسبه کنیم. به آسانی می‌توان نشان داد که روی هر تعداد چرخه کامل داریم

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

بنابراین،

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \frac{1}{4} \mathbf{E}_{o_1} \cdot \mathbf{E}_{o_2} \cos(\alpha - \beta)$$

یا

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \frac{1}{4} \mathbf{E}_{o_1} \cdot \mathbf{E}_{o_2} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] \quad (7-10)$$

که در آن عبارت داخل کروشه اختلاف فاز بین \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 ، که با معادله‌های ۱-۱۰ و ۲-۱۰ داده شده‌اند، است:

$$\delta = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (8-10)$$

از ترکیب معادله‌های ۱-۱۰، ۶-۱۰ و ۸-۱۰، به دست می‌آوریم

$$I_{12} = \varepsilon_o c \mathbf{E}_{o_1} \cdot \mathbf{E}_{o_2} \cos \delta \quad (9-10)$$

به همین ترتیب، برای جمله‌های تابیدگی I_1 و I_2 در معادله ۵-۱۰ داریم

$$I_1 = \varepsilon_o c \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_o c E_{o_1}^2 \quad (10-10)$$

و

$$I_2 = \varepsilon_o c \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_o c E_{o_2}^2 \quad (11-10)$$

در مورد $\mathbf{E}_{o_1} \parallel \mathbf{E}_{o_2}$ ، حاصلضرب زده‌ای آنها با حاصلضرب بزرگیهای آنها یکی است. این بزرگیها را می‌توان با استفاده از معادله‌های ۱۰-۱۰ و ۱۱-۱۰ برحسب I_1 و I_2 نوشت، و در نتیجه معادله ۹-۱۰ به صورت زیر در می‌آید

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (12-10)$$

به طوری که برای معادله $10-5$ در این مورد داریم

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (13-10)$$

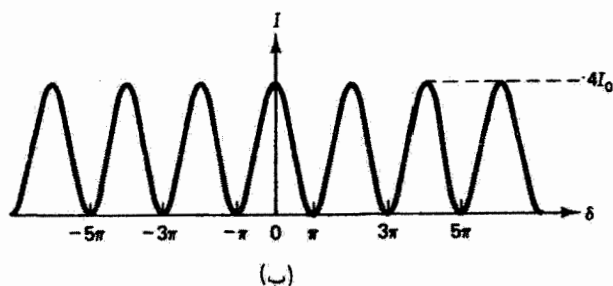
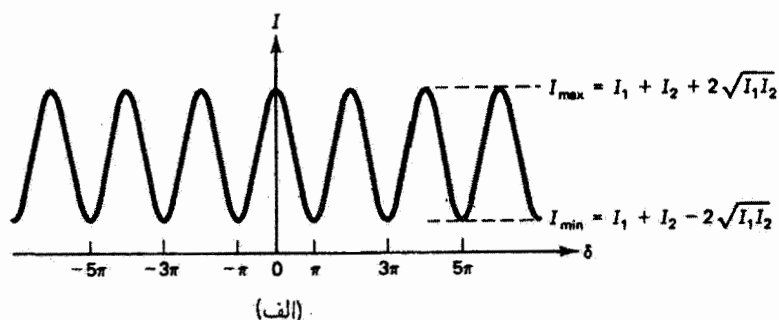
توجه کنید که همینکه فرض کنیم میدانهای E با هم موازی اند، بررسی بالا با نظریه نرده‌ای فصل قبل یکسان می‌شود. به خصوص، معادله $10-13$ مستقیماً از معادله $9-14$ به ازای $N = 2$ و استفاده از معادله‌های $10-10$ و $10-11$ برای قرار دادن تابیدگیها به جای دامنه‌ها به دست می‌آید. بسته به اینکه در معادله $10-13$ داشته باشیم $\cos \delta > 0$ یا $\cos \delta < 0$ ، جمله تداخلی مجموع تابیدگیهای انفرادی I_1 و I_2 را افزایش یا کاهش می‌دهد، و در نتیجه تداخل سازنده یا ویرانگر ایجاد می‌شود. از طرف دیگر، اگر اختلاف فاز اولیه $\epsilon_2 - \epsilon_1$ در معادله $10-8$ تغییرات اتفاقی (کتوره‌ای) داشته باشد، امواج را نسبت به هم ناهمدوس می‌نامند، و $\cos \delta$ یک عامل وابسته به زمان می‌شود که متوسط آن صفر است. با اینکه تداخل همیشه روی می‌دهد، هیچ نقشی به مدت کافی ادامه نمی‌یابد تا بتوان آن را آشکارسازی کرد. بنابراین، برای مشاهده تداخل تا حدی همدوسی لازم است، یعنی باید $\cos \delta \neq 0$. به خصوص، اگر این دو موج از چشمه‌های مستقل مانند لامپهای التهابی یا تخلیه گازی ناشی شوند، نسبت به هم ناهمدوس خواهند بود. چشمه‌های لیزری اگر چه مستقل از هم اند می‌توانند به حد کافی همدوسی متقابل برای مشاهده تداخل در بازه‌های زمانی کوچک داشته باشند. جمله دیگر $\cos \delta$ با توجه به معادله $10-8$ عبارت است از $(k_1 - k_2) \cdot r$. وقتی نقطه مشاهده که با r داده می‌شود تغییر می‌کند، $\cos \delta$ متناوباً مقادیر ماکسیمم و مینیمم می‌گیرد و فریزهای تداخل با فاصله مکانی روی می‌دهند. در اینجا چند مورد را به صورت مشخص‌تر بیان می‌کنیم. وقتی $\cos \delta = +1$ ، از تداخل سازنده تابیدگی ماکسیمم به دست می‌آید:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (14-10)$$

این وضعیت وقتی پیش می‌آید که برای اختلاف فاز داشته باشیم $\delta = 2m\pi$ که در آن m یک عدد درست یا صفر است. از طرف دیگر، وقتی $\cos \delta = -1$ ، تداخل ویرانگر تابیدگی مینیمم یا زمینه را به دست می‌دهد:

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (15-10)$$

و در این وضعیت داریم $\delta = (2m+1)\pi$. نمودار تابیدگی I نسبت به فاز δ ، در شکل $10-1$ الف، فریزهای دوره‌ای را نشان می‌دهد. تداخل ویرانگر به ازای $I_1 = I_2 = I_0$ کامل است، یعنی حذف



شکل ۱-۱۰ تأییدگی فریزهای تداخل به صورت تابعی از فاز: (الف) موردی که $I_1 \neq I_2$ و در نتیجه تأییدگی زمینه I_{min} مخالف صفر است. (ب) موردی که $I_1 = I_2$ و در نتیجه $I_{min} = 0$. تباین فریز در این مورد شدیدتر است.

به طور کامل روی می‌دهد. در این وضعیت، از معادله‌های $14-10$ و $15-10$ به دست می‌آوریم

$$I_{max} = 4I_0 \quad \text{و} \quad I_{min} = 0$$

اکنون فریزهای حاصل، که در شکل ۱-۱۰ ب نشان داده شده‌اند، تباین بهتری دارند. اندازه‌ای از تباین فریز، که مرثیت نیز نامیده می‌شود، با مقادیری بین 0 و 1 ، با کمیت زیر داده می‌شود

$$\text{تباین فریز} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

بنابراین، در کاربرد تجربی نقشه‌های فریز بهتر است ترتیبی داده شود که باریکه‌های تداخل‌کننده دامنه‌های یکسانی داشته باشند.

صورت مفید دیگری از معادله $13-10$ را، برای موردی که باریکه‌های تداخل‌کننده دامنه‌های

برابر دارند، به این ترتیب به دست می‌آوریم که بنویسیم

$$I = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0^2} \cos \delta = 2I_0 (1 + \cos \delta)$$

و در آن از اتحاد مثلثاتی زیر استفاده کنیم

$$1 + \cos \delta \equiv 2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

در نتیجه، تابیدگی برای باریکه‌های تداخل‌کننده یکسان عبارت است از

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (16-10)$$

توجه کنید که انرژی در هر نقطه از برهم‌نهی پایسته نیست، یعنی $I \neq 2I_0$ ، اما روی حداقل یک دوره مکانی از نقش فریز داریم $I_{\text{متوسط}} = 2I_0$. این وضعیت مختص پدیده‌های تداخل و پراش است: اگر چگالی توان در بعضی نقاط کمتر از متوسط باشد در نقاط دیگری بیشتر از متوسط است به طوری که اصل پایستگی انرژی برای کل نقش برقرار می‌ماند.

مثال

دوباریکه تداخل‌کننده، با میدانهای الکتریکی موازی، با روابط زیر توصیف می‌شوند

$$E_1 = 2 \cos \left(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \frac{\pi}{3} \right) \quad (\text{kV/m})$$

$$E_2 = 5 \cos \left(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{kV/m})$$

می‌خواهیم تباین فریز را به دست آوریم. ابتدا تابیدگی مربوط به هر باریکه به تنهایی و تابیدگی مربوط به تداخل آنها را در نقطه‌ای که اختلاف راه آنها صفر است تعیین می‌کنیم. می‌نویسیم

$$I_1 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 c E_{1,r}^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 c (2000)^2 = 5309 \text{ W/m}^2$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 c E_{2,r}^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 c (5000)^2 = 33180 \text{ W/m}^2$$

$$I_{1,2} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta = 2\sqrt{(5309 \times 33180)} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = 25640 \text{ W/m}^2$$

برای به دست آوردن تباين فریز نزدیک ناحیه برهم نهش باید مقادير زیر را محاسبه کنیم

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 5309 + 33180 + 2\sqrt{(5309 \times 33180)}$$

$$= 65034 \text{ W/m}^2$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = 5309 + 33180 - 2\sqrt{(5309 \times 33180)}$$

$$= 11945 \text{ W/m}^2$$

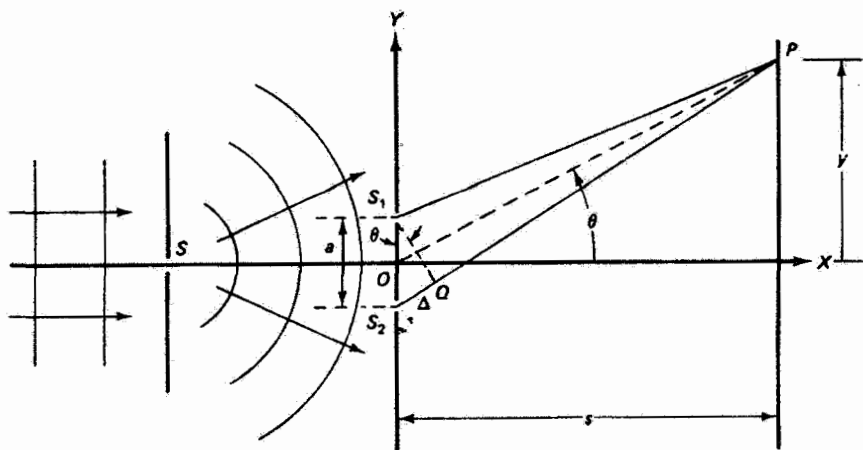
تباين فریز با $(I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ داده می شود. در این مثال،

$$\text{تباين فریز} = \frac{65034 - 11945}{65034 + 11945} = 0.690$$

اگر دامنه های دو موج با هم برابر بودند آنگاه $I_{\max} = 4I_0$ و $I_{\min} = 0$ ، و تباين فریز برابر با ۱ می شد. ▲

۱۰-۲ آزمایش دوشکافی یانگ

طرح آزمایش تعیین کننده ای که توماس یانگ در سال ۱۸۰۲ انجام داد در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده است. نور تکفام ابتدا از یک روزنه کوچک در یک دهانه عبور داده می شود تا تقریبی از یک چشمه نقطه ای S به دست آید. این نور مطابق اصل هویگنس به صورت امواج کروی از این چشمه به اطراف منتشر می شود و به دو روزنه کوچک نزدیک به هم S_1 و S_2 در یک جدار می رسد. بدین ترتیب، این روزنه ها به منزله دو چشمه همدوس نور هستند که تداخل آنها را می توان روی پرده ای دورتر از جدار مشاهده کرد. اگر روزنه ها دارای اندازه مساوی باشند، نور ناشی از آنها دامنه های قابل مقایسه دارند، و تابیدگی در هر نقطه برهم نهش از معادله ۱۰-۱۶ به دست می آید. برای محاسبه تابیدگی برآیند در هر نقطه مشاهده، مانند نقطه P روی پرده، باید اختلاف فاز δ بین دو موج ورودی به این نقطه را تعیین کرد. واضح است که اگر $S_2P - S_1P = m\lambda$ ، موجها همفاز وارد می شوند و تابیدگی ماکسیمم یا روشنی به دست می آید. اگر $S_2P - S_1P = (m + 1/2)\lambda$ ، شرط لازم برای تداخل ویرانگر یا تاریکی برقرار است. در عمل، فاصله a بین روزنه ها بسیار کوچکتر از فاصله s بین پرده و روزنه ها است، به طوری که رابطه ساده ای برای اختلاف راه $S_2P - S_1P$ نتیجه می شود. کمائی به مرکز P و شعاع S_1P خط S_2P را در Q قطع می کند. $S_2P - S_1P$ ، مطابق



شکل ۱۰-۲ طرح آزمایش دوشکافی یانگ. روزنه‌های S_1 و S_2 معمولاً به صورت شکافهایی هستند که بعد طولی آنها عمود بر صفحه شکل است.

شکل، برابر با پاره خط Δ است. در اولین تقریب، کمان S_1Q یک خط راست گرفته می‌شود که یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه S_1S_2Q را تشکیل می‌دهد. اگر زاویه بین جدار و S_1Q باشد آنگاه $\Delta = a \sin \theta$. در دومین تقریب، زاویه θ با زاویه بین محور اپتیکی OX و خطی که از نقطه O در وسط فاصله بین روزنه‌ها به نقطه مشاهده P روی پرده کشیده شده است برابر گرفته می‌شود. توجه کنید که اضلاع متناظر این دو زاویه θ طوری هستند که $OX \perp S_1S_2$ و OP تقریباً عمود بر S_1Q است. بدین ترتیب، شرط تداخل سازنده در نقطه P با تقریب بسیار خوب عبارت است از

$$S_2P - S_1P = \Delta = m\lambda \cong a \sin \theta \quad (17-10)$$

در حالی که برای تداخل ویرانگر داریم

$$\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda = a \sin \theta \quad (18-10)$$

که در آنها m یک عدد درست نامفنی است. تاییدگی روی پرده در نقطه‌ای که با زاویه θ تعیین می‌شود از معادله ۱۰-۱۶ و رابطه زیر بین اختلاف راه Δ و اختلاف فاز δ به دست می‌آید

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \Delta$$

نتیجه عبارت است از

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta}{\lambda} \right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)$$

اگر نقطه P نزدیک محور اپتیکی باشد به طوری که $y \ll s$ ، می‌توانیم تقریب دیگری بگیریم: $\sin \theta \cong \tan \theta \cong y/s$ و در نتیجه

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a y}{\lambda s} \right) \quad (۱۹-۱۰)$$

اگر تابع کسینوس در معادله ۱۹-۱۰ را متناوباً ± 1 و 0 بگیریم، به ترتیب شرایطی را که با معادله‌های ۱۷-۱۰ و ۱۸-۱۰ برای تداخل سازنده و ویرانگر بیان شده‌اند دوباره به دست می‌آوریم.

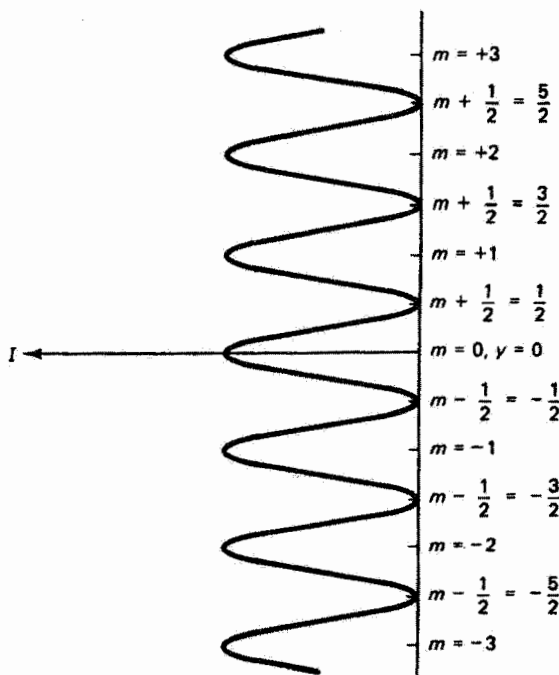
اکنون اگر با استفاده از معادله ۱۷-۱۰ و تقریب بالا مکان فریزهای روشن را به صورت

$$y_m = \frac{m \lambda s}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (۲۰-۱۰)$$

بنویسیم، فاصله ثابتی بین ماکسیممهای تابیدگی، متناظر با مقادیر متوالی m ، به دست می‌آوریم که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\Delta y = \frac{\lambda s}{a} \quad (۲۱-۱۰)$$

و مینیممها در وسط فاصله بین آنها قرار دارند. بنابراین، جدایی فریزها با طول موج و فاصله پرده تناسب مستقیم و با جدایی روزنه‌ها تناسب معکوس دارد. با کاهش جدایی روزنه‌ها نقش فریز مربوط به هر رنگ گسترده‌تر می‌شود. با اندازه‌گیری جدایی فریزها می‌توان طول موج نور را تعیین کرد. اگر از نور لیزر، که هم بسیار تکفام و هم همدوس فضایی است، برای روشن کردن شکاف دوگانه استفاده شود، می‌توان روزنه منفرد را، که برای فراهم کردن حدی از همدوسی فضایی به‌کار رفته است، حذف کرد. در آزمایشی که در بالا شرح دادیم فریزها روی پرده‌ای مشاهده می‌شوند که عمود بر محور اپتیکی است و در فاصله‌ای از روزنه‌ها قرار دارد. مطابق شکل ۱۰-۳، ماکسیممهای فریز به مرتبه‌های درست m مربوط هستند و مینیممهای فریز در نقاط وسط فاصله بین ماکسیممها واقع شده‌اند.



شکل ۱۰-۳ تابیدگی نسبت به فاصله از محور ایتیکی برای نقش فریز دوشکافی. مرتبه نقش تداخل با m نشان داده شده است، و مقادیر درست m مکان ماکسیمهای فریز را تعیین می‌کنند.

مثال

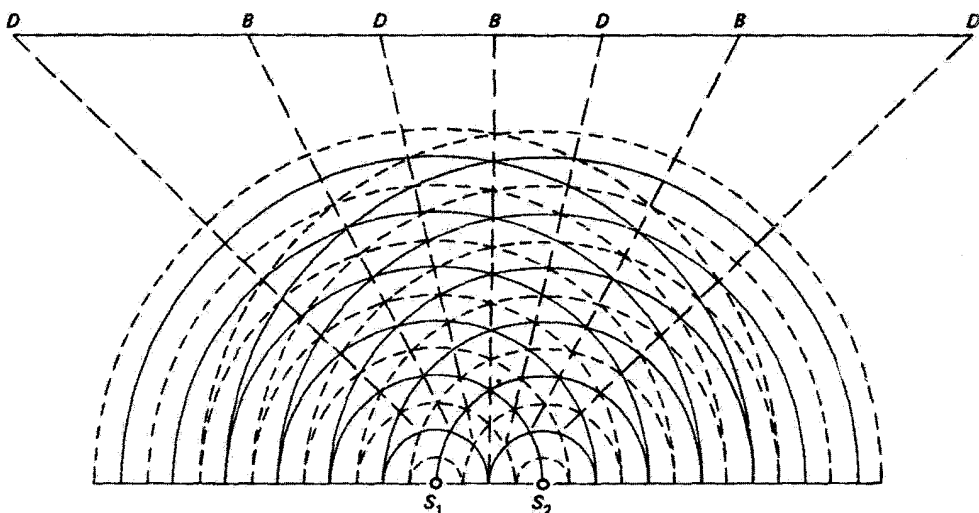
نور ناشی از یک شکاف باریک از دو شکاف موازی یکسان با فاصله 2 mm عبور می‌کند. فریزهای تداخل با جدایی 3.29 mm روی پرده‌ای به فاصله 1 m از دو شکاف دیده می‌شوند. اگر تابیدگی یکی از شکافها به تنهایی I_0 باشد تغییرات تابیدگی روی پرده را تعیین کنید. طول موج نور را نیز به دست آورید.

حل: مطابق با معادله ۱۰-۱۹، داریم $I = 4I_0 \cos^2(\pi ay/\lambda s)$. در این مورد،

$$I = 4I_0 \cos^2[\pi(0.0002)y/(658 \times 10^{-9})(1)] = 4I_0 \cos^2(955y)$$

از معادله ۱۰-۲۱، داریم

$$\lambda = a\Delta y/s = (0.0002)(3.29 \times 10^{-3})/1 = 658 \text{ nm}$$



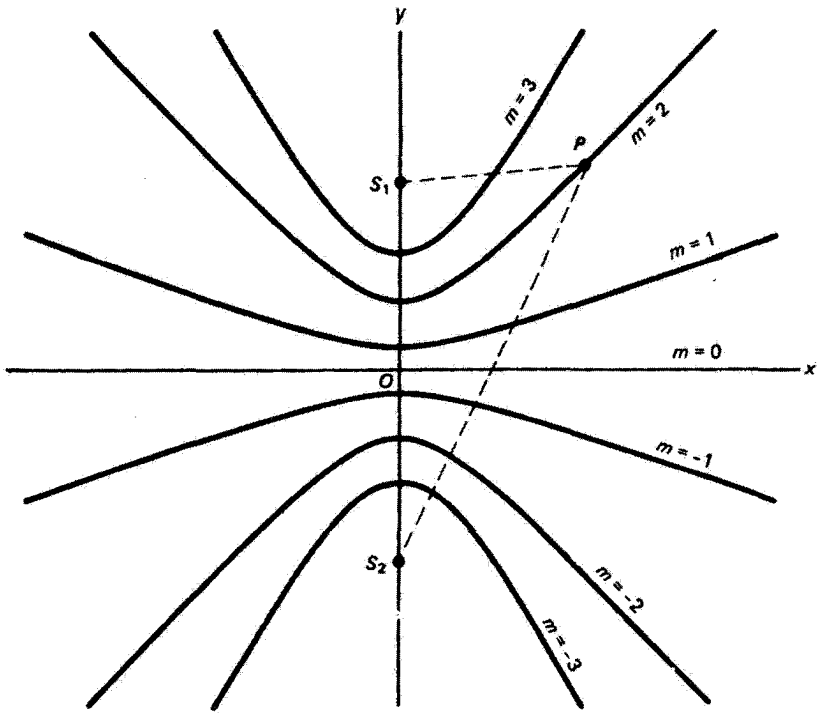
شکل ۱۰-۴ فریزهای تداخل روشن و تاریک متناوب از نور ناشی از دو چشمه همدوس تولید می‌شوند. در امتداد راستاهایی که قله‌های ناشی از S_1 با قله‌های ناشی از S_2 (دایره‌های خط پر) تلاقی می‌کنند روشنی (B) به‌وجود می‌آید. در امتداد راستاهایی که دره‌ها (دایره‌های خط چین) به هم می‌رسند تاریکی (D) ایجاد می‌شود.

راه دیگری برای مشاهده تشکیل نقاط روشن تداخل سازنده و نقاط تاریک تداخل ویرانگر در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده است. قله‌ها و دره‌های امواج ناشی از چشمه‌های S_1 و S_2 به سمت پرده حرکت می‌کنند. در امتداد راستاهایی که با B نشان داده شده‌اند قله‌های موج (یا دره‌های موج) ناشی از دو شکاف بر هم منطبق می‌شوند و تابیدگی ماکسیمم را تولید می‌کنند. در امتداد راستاهایی که با D نشان‌گذاری شده‌اند امواج به اندازه نیم طول‌موج با هم اختلاف راه دارند، و تداخل ویرانگر به‌وجود می‌آید.

واضح است که فریزها باید در تمام فضای اطراف روزنه‌هایی که نور آنها امکان تداخل دارند وجود داشته باشند، اما تابیدگی در سمت پیش‌سواز همه بیشتر است. اگر دو چشمه نقطه‌ای همدوس را در نظر بگیریم که در تمام راستاها نور تابش می‌کنند، آنگاه شرط ۱۰-۱۷ برای فریزهای روشن، یعنی

$$S_2P - S_1P = m\lambda \quad (۱۰-۲۲)$$

خانواده‌ای از سطوح فریز روشن در فضای اطراف روزنه‌ها تعریف می‌کند. برای مجسم کردن این مجموعه سطوح، می‌توانیم از تقارن ذاتی در این آرایه استفاده کنیم. تقاطع چند سطح فریز روشن،



شکل ۵-۱۰ سطوح فریز روشن برای دو چشمه نقطه‌ای همدوس. اختلاف فاصله‌ها از S_1 و S_2 تا هر نقطه فریز P به اندازه تعداد درستی از طول موجها است. این سطوح با چرخاندن نقش حول محور y تولید می‌شوند.

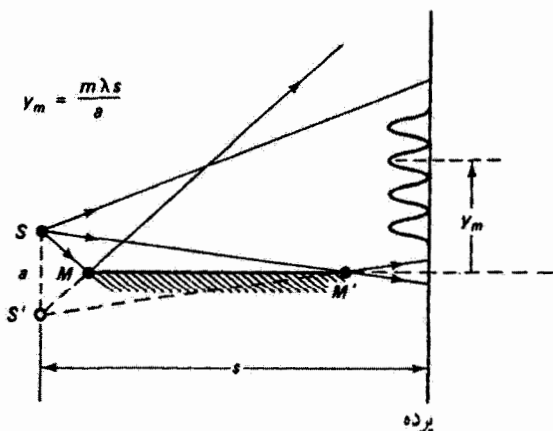
که هر یک متناظر با یک عدد درست مرتبه m هستند، با صفحه‌ای که شامل دو چشمه است در شکل ۵-۱۰ نشان داده شده است. این سطوح هذلولوی هستند، زیرا معادله $۲۲-۱۰$ دقیقاً شرط مربوط به خانواده منحنیهای هذلولوی با پارامتر m است. چون محور y محور تقارن است، سطوح فریز روشن با چرخاندن تمام نقش حول این محور تولید می‌شوند. اکنون باید بتوانیم تقاطع این سطوح را با صفحه پرده مشاهده که هر جایی می‌تواند قرار داده شود در ذهن خود مجسم کنیم. به خصوص، پرده عمود بر محور OX ، مانند شکل ۲-۱۰، این سطوح را در کمانهای هذلولوی قطع می‌کند که در نزدیکی این محور به صورت فریزهای راستخط به نظر می‌رسند، در حالی که روی پرده عمود بر محور OY فریزهای دایره‌ای هم‌مرکز حول این محور دیده می‌شوند. چون این دستگاه فریز در تمام فضای اطراف دو چشمه گسترده است، فریزها را ناجایگزیده می‌نامند.

معمولاً به جای روزنه‌های S_1 و S_2 در شکل ۲-۱۰، شکافهای باریک موازی (که اضلاع بزرگ آنها عمود بر صفحه شکل هستند) قرار دارند، و در نتیجه روشنایی نقش تداخل بیشتر می‌شود.

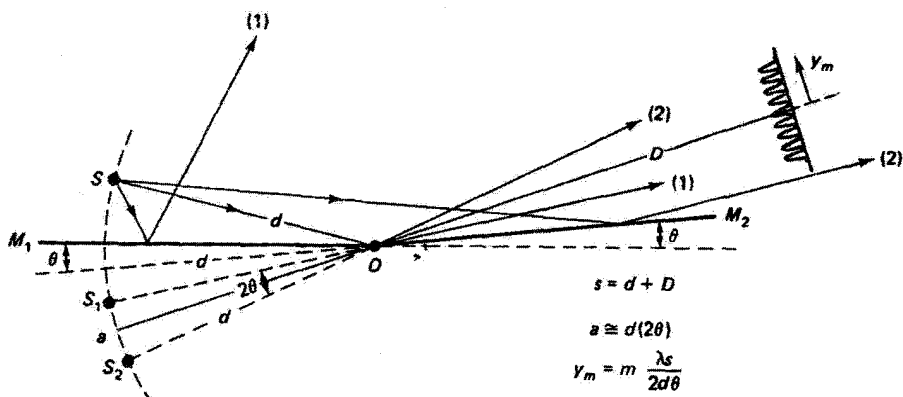
اثر آرایه چشمه‌های نقطه‌ای در امتداد شکافها، در حالی که هر زوج نقطه دستگاه فریز خاص خود را مطابق آنچه در بالا گفته شد تولید می‌کند، صرفاً این است که نقش در امتداد فریزها کشیده می‌شود بدون اینکه روابط هندسی بین آنها تغییر کند. این وضعیت حتی وقتی دو نقطه در یک شکاف با هم هم‌دوس نیستند صادق است.

۱۰-۳ تداخل دوشکافی با چشمه‌های مجازی

فریزهای تداخل را می‌توان گاهی با آرایه‌هایی مشاهده کرد که در آنها تنها یک چشمه نور وجود دارد. از طریق بازتاب یا شکست می‌توان تصاویری مجازی از چشمه حقیقی ایجاد کرد به طوری که این تصاویر با هم یا با چشمه حقیقی مانند دو چشمه هم‌دوس عمل می‌کنند و می‌توانند نقش پراش به وجود آورند. شکل‌های $۱۰-۶$ ، $۱۰-۷$ و $۱۰-۸$ سه مثال از این نوع را نشان می‌دهند. این مثالها نه تنها از لحاظ تاریخی اهمیت دارند بلکه از این جهت نیز مفیداند که تنوع راه‌های به وجود آمدن نقشهای فریز غیرمنتظره را در آزمایشهای اپتیکی نشان می‌دهند، به خصوص وقتی از نور فوق‌العاده هم‌دوس لیزر استفاده می‌شود. در شکل $۱۰-۶$ ، فریزهای تداخل روی پرده از برهم‌نهی نوری به وجود می‌آیند که از چشمه واقعی S و همچنین عملاً از تصویر مجازی آن S' در آینه تخت MM' ناشی می‌شود. فریزها جایی ظاهر می‌شوند که باریکه‌های مستقیم و بازتابیده به پرده می‌رسند. مکان فریزهای روشن با معادله دوشکافی $۱۰-۲$ داده می‌شود که در آن a دو برابر فاصله عمودی چشمه S از آینه است. این آرایه را آینه لوید می‌نامند. اگر پرده در نقطه M' با آینه تماس داشته باشد، یک فریز تاریک در محل تلاقی این دو مشاهده می‌شود. چون در این نقطه



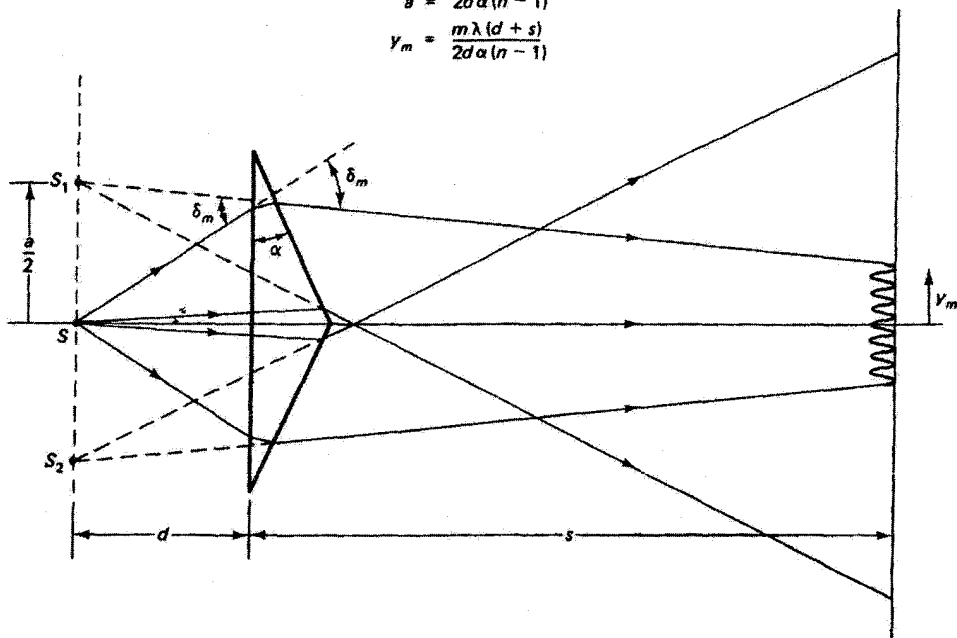
شکل $۱۰-۶$ تداخل با آینه لوید. چشمه‌های هم‌دوس عبارت‌اند از چشمه نقطه‌ای S و تصویر مجازی آن S' .



شکل ۱۰-۷ تداخل با آینه‌های فرنل. چشمه‌های همدوس عبارت‌اند از دو تصویر مجازی از چشمه نقطه‌ای S که در آینه‌های تخت M_1 و M_2 تشکیل شده‌اند. نور مستقیم S نباید به پرده برسد.

$$a = 2d\alpha(n-1)$$

$$y_m = \frac{m\lambda(d+s)}{2d\alpha(n-1)}$$



شکل ۱۰-۸ تداخل با دو منشور فرنل. چشمه‌های همدوس عبارت‌اند از تصویرهای مجازی S_1 و S_2 از چشمه S که با شکست در دو نیمه منشور تشکیل شده‌اند.

اختلاف راه نوری بین دوباریکه تداخل‌کننده صفر است، باید یک فریز روشن دیده شود. نتیجه تجربی متناقض را می‌توان با منظور کردن یک اختلاف فاز π برای بازتاب هوا-آینه توضیح داد.^۱ آرایه دیگر عبارت است از آینه‌های فرنل، که در شکل ۱۰-۷ نشان داده شده است. تداخل بین نور بازتابیده از دو آینه M_1 و M_2 که با هم زاویه کوچک θ می‌سازند صورت می‌گیرد. پرتو بازتابیده از آینه M_1 با (۱) و پرتو بازتابیده از آینه M_2 با (۲) نشان داده شده است. فریزهای تداخل در ناحیه برهم‌نهمش ظاهر می‌شوند. تداخل عملاً بین دو تصویر مجازی همدوس S_1 و S_2 که مانند چشمه عمل می‌کنند روی می‌دهد. با مربوط کردن فاصله a بین تصویرهای مجازی به زاویه انحراف θ و به فاصله d بین چشمه واقعی S' و محل تلاقی آینه‌ها در O ، نقش فریز را می‌توان باز هم با معادله ۱۰-۲۰ توصیف کرد. پرده در فاصله D از نقطه O نشان داده شده است.

شکل ۱۰-۸ دوششور فرنل را نشان می‌دهد که نور ناشی از چشمه کوچک S را طوری می‌شکند که به نظر می‌رسد از دو چشمه مجازی همدوس S_1 و S_2 می‌آید. پرتوهای حدی شکست در نیمه‌های بالایی و پایینی نشان داده شده‌اند. فریزهای تداخل در ناحیه برهم‌نهمش روی پرده دیده می‌شوند. در عمل، زاویه منشور α بسیار کوچک، از مرتبه یک درجه، است. یکی از پرتوها (چنانکه نشان داده شده است) طوری از منشور عبور می‌کند که با دو وجه آن زاویه‌های ورودی و خروجی مساوی می‌سازد و شرط انحراف مینیمم برای آن صادق است. زاویه انحراف δ_m برای این پرتو با $\delta_m = \alpha(n-1)$ داده می‌شود. وضعیت هندسی این پرتو خاص وسیله‌ای برای تعیین تقریبی فاصله a بین چشمه‌های مجازی برحسب ضریب شکست منشور n و زاویه α فراهم می‌سازد:

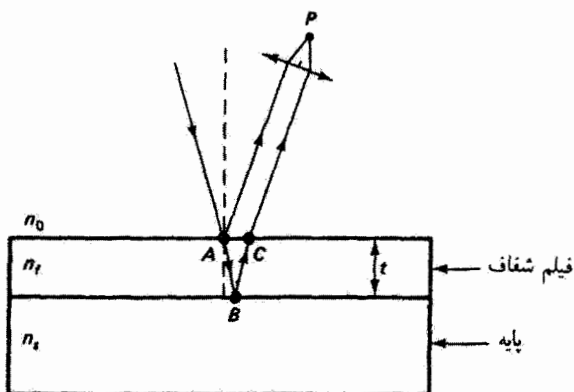
$$a = 2d\delta_m = 2da(n-1) \quad (10-23)$$

بنابراین، فریزهای تداخل طبق معمول با معادله ۱۰-۲۰ توصیف می‌شوند.

۱۰-۴ تداخل در لایه‌های دی‌الکتریک

منظره آشنای رنگها روی سطح آب نفت‌آلوده و لایه‌های آب‌سایون، و رنگین کمان‌واره زیبایی که غالباً در صدفها، پره‌های طاووس، و بال پروانه‌ها دیده می‌شود به تداخل نور در یک یا چند لایه سطحی نازک از مواد شفاف مربوط می‌شود. این نوع تداخل در وضعیتهای مختلفی می‌تواند صورت بگیرد که روی ماهیت نقش تداخل و شرایط مشاهده تداخل تأثیر دارند. متغیرهای مؤثر شامل اندازه و پهنای طیفی چشمه و شکل و بازتابندگی لایه هستند.

۱. توضیح نظری برای تغییرات فاز در بازتاب با تحلیلی بر مبنای معادلات ماکسول نتیجه می‌شود و احتیاج به تعیین حالت قطبش نور دارد. این مبحث را در فصل ۲۰ بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۰-۹ تداخل دوباریکه‌ای از یک لایه. پرتوهای بازتابیده از سطوح تخت بالایی و پایینی لایه با عدسی در نقطه P جمع می‌شوند.

لایه‌ای از ماده شفاف محدود به دو صفحه موازی را در نظر بگیرید، مانند لایه نفت، لایه اکسید فلز، یا پوشش تبخیری روی پایه شیشه‌ای تخت که در شکل ۱۰-۹ نشان داده شده است. باریکه نور فرودی روی سطح لایه در A به دو قسمت بازتابیده و شکسته تقسیم می‌شود. این تقسیم نور اصلی به دو قسمت را که برای ترکیب مجدد و تداخل صورت می‌گیرد، معمولاً تقسیم دامنه می‌نامند، که عکس وضعیت در مثلاً دوشکافی یانگ است که در آن تقسیم نور را تقسیم جبهه موج می‌نامند. باریکه شکسته مجدداً در سطح جدایی لایه-پایه در نقطه B بازتابیده می‌شود و در C ، در راستایی موازی با راستای باریکه‌ای که از A بازتابیده شده است، از لایه خارج می‌شود. قسمتی از این باریکه ممکن است در C به درون بازتابیده شود و داخل لایه بازتاب چندگانه پیدا کند تا وقتی که شدت خود را از دست بدهد. بدین ترتیب، باریکه‌های موازی چندگانه‌ای داریم که از سطح بالایی خارج می‌شوند، اگر چه دامنه آنها به سرعت کاهش می‌یابد. اگر بازتابندگی لایه بزرگ نباشد، یک تقریب خوب برای وضعیت پیچیده‌تر بازتاب چندگانه (بخش ۱۱-۵) این است که تنها دو باریکه خروجی اول را در نظر بگیریم. دوباریکه موازی را که در A و C از لایه خارج می‌شوند می‌توان با یک عدسی همگرا، مثلاً چشم، به هم آورد. این دوباریکه در نقطه تلاقی خود، P ، برهم‌نشین و تداخل می‌کنند. چون دوباریکه از نقطه A به بعد با هم اختلاف راه دارند، یک اختلاف فاز نسبی ایجاد می‌شود که می‌تواند در نقطه P باعث تداخل سازنده یا ویرانگر شود. اختلاف راه نوری Δ ، در مورد فرود عمودی، عبارت است از طول مسیر اضافی ABC که پرتو شکسته پیموده است ضرب در ضریب شکست لایه:

$$\Delta = n(AB + BC) = n(2t)$$

که در آن t ضخامت لایه است. به عنوان مثال، اگر $2nt = \lambda_0$ که در آن λ_0 طول موج نور در خلأ است، دو باریکه تداخل‌کننده باید، بر مبنای تنها اختلاف راه نوری، همفاز باشند و تداخل سازنده ایجاد کنند. اما یک اختلاف فاز اضافی به علت پدیده تغییر فاز در بازتاب باید در نظر گرفته شود. فرض کنید $n_f > n_s$ و $n_f > n_o$. در واقع، غالباً $n_o = n_s$ زیرا محیط‌های احاطه‌کننده لایه یکسان هستند، مثلاً در مورد لایه آب (حباب آب صابون) در هوا. بدین ترتیب، بازتاب در A با رفتن نور از ضریب کمتر n_o به ضریب بیشتر n_f وضعیتی که معمولاً بازتاب خارجی نامیده می‌شود، روی می‌دهد. از طرف دیگر، بازتاب در B برای نوری که از ضریب بیشتر n_f به ضریب کمتر n_s می‌رود روی می‌دهد. این وضعیت بازتاب داخلی نامیده می‌شود. یک انتقال فاز نسبی π بین باریکه‌های بازتابیده خارجی و داخلی صورت می‌گیرد، و در نتیجه هم‌ارز آن یک اختلاف راه اضافی $\lambda/2$ بین دو باریکه به وجود می‌آید. بنابراین، اختلاف راه نوری کل بین باریکه‌ها $\lambda + \lambda/2$ است که آنها را در فاز مقابل هم قرار می‌دهد، و تداخل ویرانگر در P ایجاد می‌شود. اگر بازتابها هردو خارجی ($n_o < n_f < n_s$) یا هردو داخلی ($n_o > n_f > n_s$) باشند، لازم نیست هیچ اختلاف فاز نسبی به علت بازتاب در نظر گرفته شود، و در این دو مورد تداخل سازنده در P روی می‌دهد.

از لایه‌های منفرد در تولید پوششهای پادبازتاب استفاده فراوانی می‌شود. در اکثر موارد، نور از هوا وارد لایه می‌شود، و در نتیجه $n_o = 1$. علاوه بر این، اگر $n_s > n_f$ ، انتقال فاز نسبی بین دو باریکه بازتابیده روی نمی‌دهد، و اختلاف راه نوری به تنهایی نوع تداخلی را که باید ایجاد شود تعیین می‌کند. اگر ضخامت لایه $\lambda_f/4$ باشد که در آن λ_f طول موج نور در لایه است، آنگاه $2t = \lambda_f/2$ و اختلاف راه نوری برابر است با $\lambda_0/2$ ، زیرا $2n_f t = \lambda_0/2$. در این طول موج و تا حدی در طول موجهای مجاور آن تداخل ویرانگر روی می‌دهد، یعنی نور بازتابیده از این لایه طیف فرودی منهای ناحیه طول موج حول λ_0 است. اگر نور فرودی سفید باشد و λ_0 ناحیه مرئی باشد، نور بازتابیده رنگی است. واضح است که هرگاه دامنه‌های دو باریکه بازتابیده با هم برابر باشند خاموشی ناحیه‌ای از طیف با لایه‌های پادبازتاب به ضخامت $\lambda/4$ مؤثرتر است. به طور کلی، تمام آنچه می‌توان گفت این است که برای تداخل سازنده دامنه‌ها با هم جمع می‌شوند (همفاز هستند) و برای تداخل ویرانگر دامنه‌ها از هم کم می‌شوند (در فاز مقابل هستند). برای اینکه تفاضل آنها صفر باشد، یعنی برای اینکه تداخل ویرانگر کامل باشد، دامنه‌ها باید مساوی باشند. بعداً نشان خواهیم داد (فصل ۱۹) که در مورد فرود عمودی، ضریب بازتاب (یا نسبت دامنه‌های میدان الکتریکی بازتابیده به فرودی) با رابطه زیر داده می‌شود

$$r = \frac{1 - n}{1 + n} \quad (25-10)$$

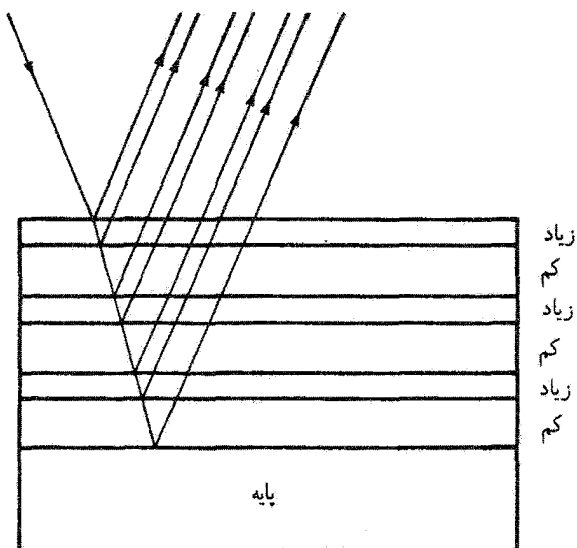
که در آن $n = n_2/n_1$ ضریب شکست نسبی است. بنابراین، دامنه‌های میدان الکتریکی بازتابیده داخلی و خارجی از لایه شکل ۱۰-۹، با فرض لایه غیرجاذب، با هم برابرند اگر برای این موارد ضرایب نسبی معادل باشند، یعنی اگر

$$\frac{n_f}{n_o} = \frac{n_s}{n_f} \quad \text{یا} \quad n_f = \sqrt{n_o n_s} \quad (26-10)$$

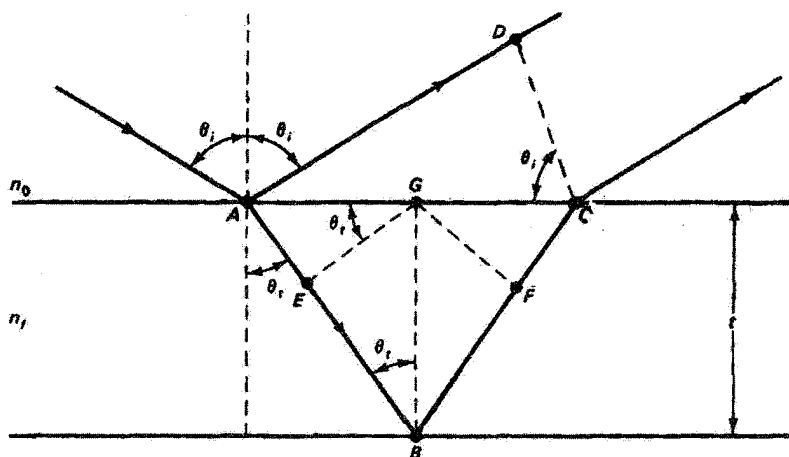
چون معمولاً $n_o = 1$ ، شرط اینکه باریکه‌های بازتابیده دارای دامنه مساوی باشند با انتخاب لایه‌ای که ضریب شکست آن ریشه دوم ضریب شکست پایه باشد برقرار می‌شود. شاید ماده لایه مناسبی برای این کاربرد وجود نداشته باشد، و انتخاب در حد امکانات باید انجام شود. به عنوان مثال، برای کاهش بازتابندگی عدسیها در ابزارهای اپتیکی که با نور سفید کار می‌کنند، ضخامت لایه $\lambda/4$ با استفاده از طول موج مرکز طیف مرئی یا جایی که دستگاه آشکارسازی بیشترین حساسیت را دارد تعیین می‌شود. در مورد چشم، این طول موج نزدیک 550 nm مربوط به قسمت زردسبز است. با فرض $n = 1.5$ برای عدسی شیشه‌ای، در وضعیت ایده‌آل داریم $n_f = \sqrt{1.5} = 1.22$. عملاً ماده لایه‌ای با بهترین انطباق ضریب شکست MgF_2 با $n = 1.38$ است. اتلاف مفید نور بازتابیده در حوالی وسط طیف منجر به غلبه کناره‌های آبی و سرخ طیف می‌شود، و در نتیجه پوشش در نور بازتابیده ارغوانی به نظر می‌رسد.

به عنوان مثال دیگر، پشته چندلایه‌ای از مواد دی‌الکتریک با ضرایب متناوباً کمتر-بیشتر را در نظر بگیرید (شکل ۱۰-۱۰). اگر هر لایه دارای ضخامت اپتیکی $\lambda_f/4$ باشد، با اندکی بررسی می‌توان نشان داد که در این مورد تمام باریکه‌های خروجی همفاز هستند. بازتابهای چندگانه در ناحیه λ شدت بازتابیده کل را افزایش می‌دهد و پشته ربع موجی به عنوان یک آینه مؤثر کار می‌کند. این نوع پشته‌های چندلایه‌ای را می‌توان طوری طراحی کرد تا خاموشی یا تقویت نور بازتابیده در قسمت بزرگتری از طیف نسبت به لایه منفرد صورت گیرد. این پشته‌ها را در فصل ۱۹ با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم.

اکنون به لایه منفرد باز می‌گردیم. می‌خواهیم ابتدا شرایط تداخل سازنده و ویرانگر را با محاسبه اختلاف راه نوری در موردی که پرتوهای فرودی عمودی نیستند تعمیم دهیم. شکل ۱۰-۱۱ پرتوی را که با زاویه θ_i به لایه فرود می‌آید نشان می‌دهد. اختلاف فاز در نقاط C و D بین باریکه‌های خروجی به علت اختلاف راه نوری بین مسیرهای AD و ABC است. باریکه‌های مربوط پس از رسیدن به نقاط C و D با هم موازی و در یک محیط هستند، و در نتیجه اختلاف فاز دیگری روی نمی‌دهد. برای ساده‌تر شدن محاسبه، نقطه G که پای عمود BG در مثلث متساوی‌الساقین ABC و در نتیجه وسط نقاط A و C است در شکل نشان داده شده است. نقاط E و F از



شکل ۱۰-۱۰ آینه دی‌الکتریک چندلایه‌ای با ضرایب متفاوتاً بیشتر و کمتر. ضخامت اپتیکی هر لایه $\lambda_f/4$ است.



شکل ۱۰-۱۱ تداخل تک‌لایه‌ای با نور فرودی تحت زاویهٔ اختیاری θ_i .

ترسیم عمودهای GF و GE به ترتیب بر مسیرهای پرتو AB و BC به دست آمده‌اند. بنابراین، اختلاف راه نوری بین باریکه‌های خروجی عبارت است از

$$\Delta = n_f(AB + BC) - n_o(AD)$$

که در آن n_f و n_o ، مطابق شکل، به ترتیب ضرایب شکست لایه و محیط خارج هستند. بهتر است فاصله‌های AB و BC را با استفاده از نقاط E و F تجزیه کنیم، و در نتیجه

$$\Delta = [n_f(AE + FC) - n_o AD] + n_f(EB + BF) \quad (27-10)$$

اکنون ثابت می‌کنیم کمیت داخل کروشه صفر است. بنابه قانون اسنل داریم

$$n_o \sin \theta_i = n_f \sin \theta_t \quad (28-10)$$

و به علاوه، می‌توان دید

$$AE = AG \sin \theta_t = \left(\frac{AC}{2} \right) \sin \theta_t \quad (29-10)$$

و

$$AD = AC \sin \theta_i \quad (30-10)$$

با توجه به معادله‌های ۲۹-۱۰، ۳۰-۱۰ و ۲۸-۱۰، می‌توان نوشت

$$2AE = AC \sin \theta_t = AD \left(\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} \right) = AD \left(\frac{n_o}{n_f} \right)$$

و در نتیجه

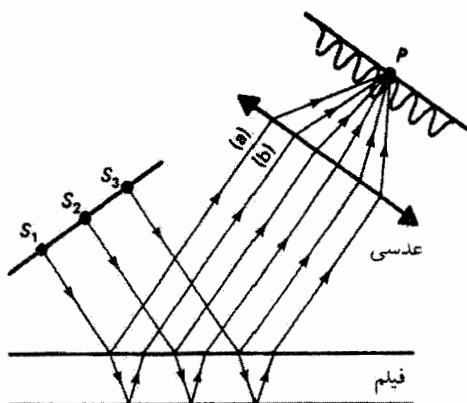
$$n_o AD = 2n_f AE = n_f(AE + FC) \quad (31-10)$$

که می‌خواستیم ثابت کنیم. بنابراین، از معادله ۲۷-۱۰ باقی می‌ماند

$$\Delta = n_f(EB + BF) = 2n_f EB \quad (32-10)$$

رابطه طول EB با ضخامت لایه t به صورت $EB = t \cos \theta_t$ است، به طوری که در پایان داریم

$$\Delta = 2n_f t \cos \theta_t \quad (33-10)$$



شکل ۱۰-۱۲ تداخل لایه‌دی‌الکتریک و چشمه گسترده. فریزهای همشیب توسط عدسی متمرکز می‌شوند.

بیان اختلاف راه نوری Δ برحسب زاویه شکست با معادله $10-33$ برای صرفه‌جویی در نوشتن است، و البته می‌توان آن را با استفاده از قانون اسنل $10-28$ برحسب زاویه فرود نوشت. توجه کنید که برای فرود عمودی، $\theta_i = \theta_t = 0$ ، و چنانکه انتظار داریم $\Delta = 2nft$. اختلاف فاز متناظر عبارت است از $\Delta = (2\pi/\lambda_0)\delta$. اما چنانکه قبلاً گفته شد، در اختلاف فاز کل باید اختلاف فازهای ناشی از بازتاب نیز منظور شوند. بدین ترتیب، اگر اختلاف راه نوری را که با معادله $10-33$ داده می‌شود با Δ_p و اختلاف راه معادل ناشی از تغییر فاز در بازتاب را با Δ_r نشان دهیم، می‌توانیم شرایط زیر را به‌طور کلی بنویسیم

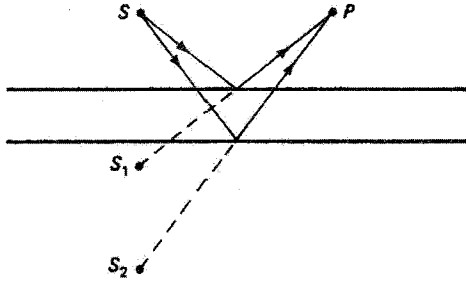
$$\Delta_p + \Delta_r = m\lambda \quad \text{تداخل سازنده} \quad (10-34)$$

و

$$\Delta_p + \Delta_r = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad \text{تداخل ویرانگر} \quad (10-35)$$

که در آنها $m = 0, 1, 2, \dots$.

اگر به‌عنوان مثال تداخل سازنده بین دو قسمت از یک باریکه فرودی تحت زاویه θ_i روی دهد، همین شرط برای تمام باریکه‌های فرودی با همین زاویه برقرار است. این امر در صورتی ممکن است که چشمه، چنانکه در شکل ۱۰-۱۲ نشان داده شده است، یک چشمه گسترده باشد. مطابق شکل، چشمه‌های نقطه‌ای مستقل S_1 و S_2 در شدت نور در P سهمیم هستند. چون این چشمه‌ها ناهمدوس‌اند، تداخل تنها بین زوج پرتوهای بازتابیده که از یک چشمه ناشی شده باشند برقرار می‌ماند.



شکل ۱۰-۱۳ تداخل با لایه دی الکتریک و چشمه نقطه‌ای. فریزهای ناجایگزیده حقیقی مانند نقش چشمه دو نقطه‌ای مربوط به شکل ۵-۱ ظاهر می‌شوند. از شکست صرف نظر شده است.

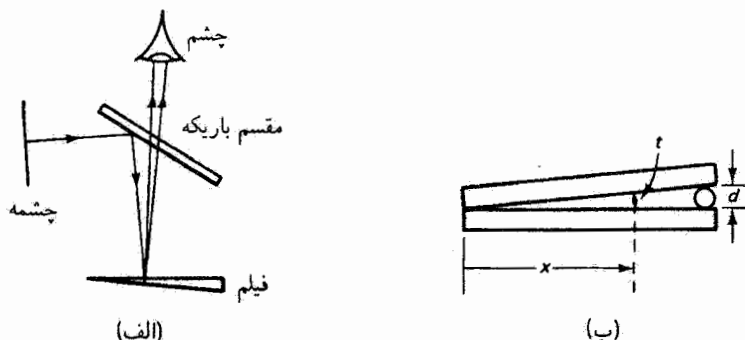
اگر گشودگی عدسی به حدی کوچک شود که تنها دو پرتو از این نوع مانند (a) و (b) از S_1 را عبور دهد، هیچ تداخلی آشکار نمی‌شود. این امر وقتی روی می‌دهد که، به عنوان مثال، ضخامت لایه و در نتیجه فاصله فضایی دوباریکه تداخل‌کننده — مانند (a) و (b) — افزایش یابد، در حالی که اندازه مردمک چشمی که به نور باز تابیده نگاه می‌کند محدود است. این فریزهای مجازی بدون وسیله متمرکزکننده ظاهر نمی‌شوند. این فریزها را فریزهای جایگزیده می‌نامند زیرا می‌توان گفت در بینهایت جایگزیده هستند. یادآوری می‌کنیم که فریزهای ناجایگزیده (شکل ۵-۱۰)، برعکس، در همه جا تشکیل می‌شوند. فریزهایی را که مانند فریزهای شکل ۱۰-۱۲ تشکیل می‌شوند فریزهای هایدینگر یا فریزهای همشیب، نیز می‌نامند زیرا آنها از باریکه‌های فرودی موازی ناشی از چشمه گسترده به وجود آمده‌اند. اگر شیب دیگری انتخاب کنیم، پرتوهای موازی از نقاط مختلف چشمه با زاویه دیگری به لایه فرود می‌آیند و به صورت پرتوهای موازی با زاویه دیگری از این لایه بازتابیده می‌شوند، و همگی در نقطه دیگری متمرکز می‌شوند که در آنجا، مطابق شرایطی که با معادله‌های $۱۰-۳۴$ و $۱۰-۳۵$ بیان شده‌اند، تداخل می‌کنند. اگر چشمه نقطه‌ای یا بسیار کوچک باشد، فریزهای همشیب که در بالا توصیف شدند امکانپذیر نیستند، زیرا در این مورد پرتوهای نور از چشمه با زاویه‌های فرود مختلفی به لایه می‌رسند (شکل ۱۰-۱۳). البته فریزهای نوع دیگری تشکیل می‌شوند. چون پرتوها از دو سطح لایه به هر نقطه مانند P بازتابیده می‌شوند به طوری که انگار از دو چشمه مجازی S_1 و S_2 ناشی شده‌اند، این مورد را می‌توان به عنوان نمونه‌ای از نقش چشمه دو نقطه‌ای که قبلاً در ارتباط با شکل ۵-۱۰ از آن بحث شد در نظر گرفت. فریزهای ناجایگزیده حقیقی در فضای بالای لایه تشکیل می‌شوند. اگر چشمه نور یک لیزر باشد، نقش فریز روی پرده‌ای که هر جا در مجاورت لایه گذاشته می‌شود به وضوح قابل دیدن است. شرط تداخل همان شرط نقش تداخل دو چشمه‌ای است که در آن جدایی شکافها فاصله بین چشمه‌های مجازی S_1 و S_2 است. در شکل ۱۰-۱۳، جای S_1 و S_2 با صرف نظر کردن از شکست در لایه به طور تقریبی تعیین شده است.

۱۰-۵ فریزهای همضخامت

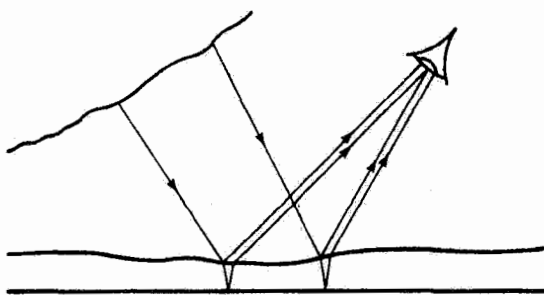
اگر لایه دارای ضخامت متغیر t باشد، اختلاف راه نوری $\Delta = 2nft \cos \theta_i$ حتی بدون تغییر زاویه فرود تغییر می‌کند. بنابراین، اگر راستای فرود نور ثابت باشد، مثلاً در فرود عمودی، به ضخامت خاصی که به ازای آن Δ در شرط تداخل سازنده یا ویرانگر صدق می‌کند به ترتیب یک فریز روشن یا تاریک وابسته است. به این دلیل، فریزهای حاصل از لایه با ضخامت قابل تغییر را فریزهای همضخامت می‌نامند. یک آرایه نوعی برای دیدن این فریزها در شکل ۱۰-۱۴ الف نشان داده شده است. یک چشمه گسترده همراه با یک تقسیمگر باریکه تحت زاویه 45° نسبت به نور فرودی به کار برده می‌شوند. این تقسیمگر باریکه در این موقعیت باعث می‌شود که نور با فرود عمودی به لایه بتابد، و در عین حال اجازه می‌دهد قسمتی از نور بازتابیده به آشکارساز (چشم) منتقل شود. می‌توان دید که این فریزها، که غالباً فریزهای فیزو نامیده می‌شوند، در لایه، که از آن پرتوهای تداخل‌کننده واگرا می‌شوند، جایگزین شده‌اند. در فرود عمودی، $\cos \theta_i = 1$ و $\Delta = 2nft$. بنابراین، شرط فریزهای روشن و تاریک، معادله‌های $34-10$ و $35-10$ ، به صورت زیر در می‌آید

$$2nft + \Delta_r = \begin{cases} m\lambda & \text{روشن} \\ \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda & \text{تاریک} \end{cases} \quad (36-10)$$

که در آن، بسته به اینکه انتقال فاز نسبی π بین پرتوهای بازتابیده از سطوح بالایی و پایینی لایه روی بدهد یا ندهد، Δ_r برابر با $\lambda/2$ یا 0 است. یک راه تشکیل گوه مناسب برای آزمایش استفاده از دو تیغه شیشه‌ای پاک میکروسکوپ است که در یک طرف با هم تماس دارند و در طرف دیگر، چنانکه در شکل ۱۰-۱۴ ب نشان داده شده است، با یک جداکننده باریک مانند تار مواز هم



شکل ۱۰-۱۴ تداخل از لایه گوه‌ای با فریزهای جایگزیده همضخامت. (الف) نمودار مجموعه. (ب) گوه هوا متشکل از دو تیغه میکروسکوپ.

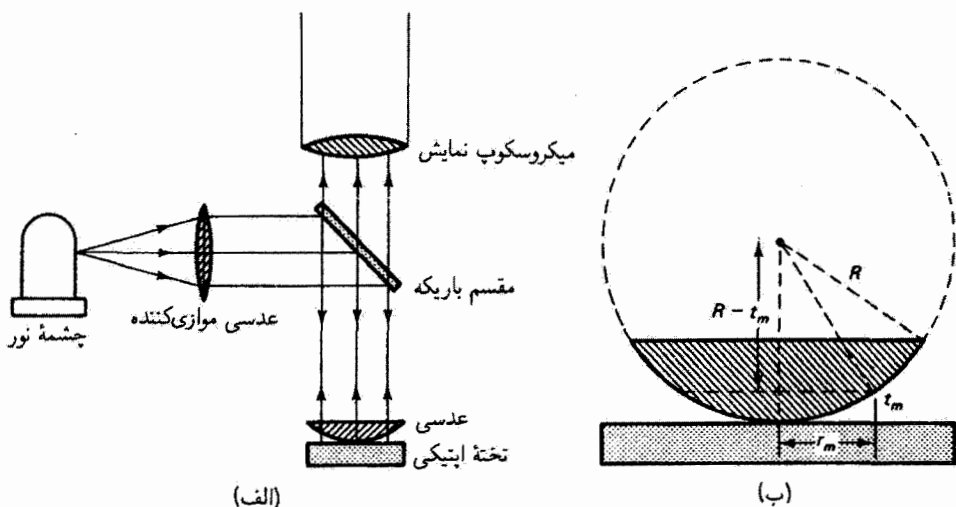


شکل ۱۵-۱۰ تداخل با لایه نامنظم که از یک چشمه گسترده نور به آن می‌تابد. تغییرات ضخامت لایه و همچنین زاویه فرود ناحیه طول موجی را تعیین می‌کنند که با تداخل تقویت می‌شود.

جدا شده‌اند. وقتی به تیغه‌ها نور تکفام تابانده شود، لایه هوایی که بین تیغه‌ها تشکیل شده است فریزهای فیزو به وجود می‌آورد. برای این لایه، بازتابها از شیشه به هوا (بازتاب داخلی) و از هوا به شیشه (بازتاب خارجی) است، و در نتیجه Δr در معادله $10-36$ برابر با $\lambda/2$ است. چون t به طور خطی در امتداد طول تیغه‌ها از 0 تا d افزایش می‌یابد، معادله $10-36$ به ازای مرتبه‌های متوالی m برقرار می‌شود، و یک رشته فریزهای روشن و تاریک متناوب و با فاصله یکسان توسط نور بازتابیده ایجاد می‌شود. این فریزها فریزهای جایگزیده مجازی هستند و نمی‌توان آنها را روی پرده انداخت. اگر چشمه گسترده شکل $10-14$ الف آسمان باشد و نور سفید تحت زاویه‌ای به لایه‌ای با ضخامت متغیر فرود آید، همچون در شکل $10-15$ ، لایه رنگارنگ به نظر می‌رسد، مانند لایه نفت پس از بارندگی. فرض کنید در ناحیه کوچکی از لایه ضخامت طوری است که برای طول موجهای قسمت سرخ طیف تداخل سازنده با مرتبه‌ای مانند m روی می‌دهد. اگر طول موجهایی که در آنها تداخل سازنده از مرتبه‌های $m+1$ و $m-1$ صورت می‌گیرد خارج از طیف مرئی باشند نور بازتابیده سرخ دیده می‌شود. این اثر می‌تواند برای مرتبه‌های کم و در نتیجه برای لایه‌های نازک روی دهد.

۱۰-۶ حلقه‌های نیوتون

چون فریزهای فیزو فریزهای همضخامت هستند، پربندهای آنها هر نوع ناپیکنواختی در ضخامت فیلم را مستقیماً آشکار می‌کنند. شکل $10-16$ الف نشان می‌دهد چگونه از این وضعیت، در آرایه‌ای که در آن فریزهای فیزو را حلقه‌های نیوتون نامیده‌اند، می‌توان عملاً برای تعیین کیفیت سطوح کروی مثلاً یک عدسی استفاده کرد. نور تکفامی، مثلاً از لامپ سدیم یا از لامپ جیوه با یک صافی برای جدا کردن یکی از خطوط طیفی آن، با فرود عمودی به یک گوه هوا که بین سطح کروی و یک تخت اپتیکی تشکیل شده است، تابانده می‌شود. پربندهای همضخامت برای یک سطح کاملاً کروی،



شکل ۱۰-۱۶ (الف) اسباب حلقه‌های نیوتون. فریزهای تداخل همضخامت توسط گوه‌ی هوای بین عدسی و تخته اپتیکی تولید می‌شوند. (ب) اساس هندسی تولید حلقه‌های نیوتون.

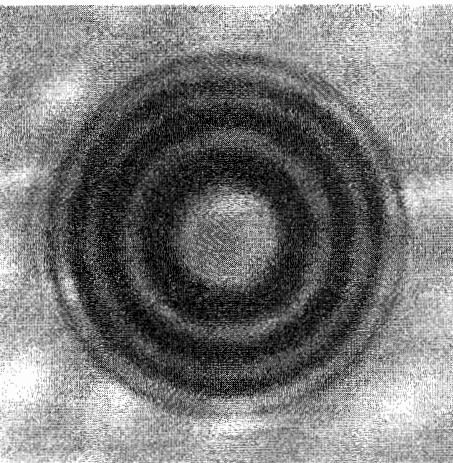
و در نتیجه فریزهایی که دیده می‌شوند، به صورت دایره‌هایی هم‌مرکز حول نقطه تماس با تخته اپتیکی هستند. در نقطه تماس، $t = 0$ و اختلاف راه بین پرتوهای بازتابیده برابر با $\lambda/2$ است که از بازتاب ناشی می‌شود. بنابراین، مرکز نقش فریز را تاریک می‌بینیم، و از معادله $10-36$ برای مرتبه این تداخل ویرانگر مقدار $m = 0$ را به دست می‌آوریم. بی‌نظمی‌های سطح عدسی به صورت واپیچشهایی در نقش حلقه‌های هم‌مرکز ظاهر می‌شوند. این آرایه را همچنین می‌توان به عنوان یک وسیله اپتیکی برای اندازه‌گیری شعاع انحناى سطح عدسی به کار برد. بین شعاع r_m مربوط به فریز تاریک مرتبه m ، متناظر با ضخامت لایه هوای t_m ، و شعاع انحناى R مربوط به لایه هوای یا سطح عدسی یک رابطه هندسی وجود دارد. با توجه به شکل ۱۰-۱۶ ب و با استفاده از قضیه فیثاغورث، داریم

$$R^2 = r_m^2 + (R - t_m)^2$$

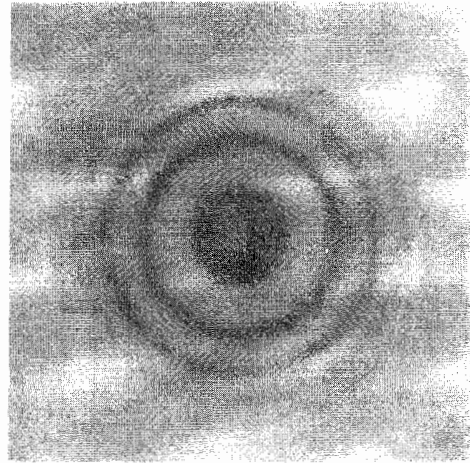
یا

$$R = \frac{r_m^2 + t_m^2}{2t_m} \quad (10-37)$$

شعاع حلقه تاریک m م اندازه‌گیری می‌شود و ضخامت متناظر هوا از شرط تداخل $10-36$ به دست می‌آید، و در نتیجه می‌توان R را محاسبه کرد. با کمی اندیشه به این نتیجه می‌رسیم که نور عبورکرده از تخته اپتیکی نیز فریزهای دایره‌ای می‌سازد. چنانکه در شکل ۱۰-۱۷ دیده



(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۱۷ حلقه‌های نیوتون مربوط به (الف) نور بازتابیده و (ب) نور عبور کرده مکمل یکدیگر هستند.

می‌شود، این نقش از دو جنبه مهم با نقش فریز نور بازتابیده تفاوت دارد. اولاً، فریزها تباین ضعیفی از خود نشان می‌دهند، زیرا دوباریکه عبور کرده با بیشترین دامنه‌ها دارای مقادیر کاملاً متفاوتی هستند که نتیجه آن حذف ناقص است. ثانیاً، مرکز نقش فریز روشن است، و تمام این دستگاه فریز مکمل دستگاه فریز بازتاب است.

مثال

یک عدسی تخت-کوژ ($n = ۱.۵۲۳$) با توان $۱/۸$ دیوپتر، در حالی که سطح کوژ آن پایین است، روی یک سطح تخت اپتیکی قرار دارد. با استفاده از یک میکروسکوپ متحرک و نور سدیم ($\lambda = ۵۸۹.۳ \text{ nm}$)، فریزهای تداخل را مشاهده می‌کنیم. شعاع اولین و دهمین حلقه تاریک را به دست آورید.

حل: در این مورد داریم $\Delta_r = \lambda/2$ ، و از معادله $۱۰-۳۶$ ضخامت لایه هوا را در حلقه تاریک m ام برابر با $t_m = m\lambda/2n_f$ به دست می‌آوریم. چون لایه از هوا است $n_f = ۱$ و در نتیجه $t_m = m\lambda/2$. در معادله $۱۰-۳۷$ ، می‌توان از جمله بسیار کوچک t_m^2 صرف نظر کرد، و بنابراین $r_m^2 = 2Rt_m$. شعاع انحنای سطح کوژ عدسی را از معادله عدسی سازان تعیین می‌کنیم:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

از این معادله به ازای $f = 8 \text{ m}$, $n = 1.523$ و $R_2 \rightarrow \infty$ به دست می‌آوریم $R = 4.184 \text{ m}$. بنابراین،

$$r_m^2 = 2Rt_m = 2R \left(\frac{m\lambda}{2} \right) = mR\lambda$$

$$r_1^2 = (1)(4.184)(589.3 \times 10^{-9}) = 2.466 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

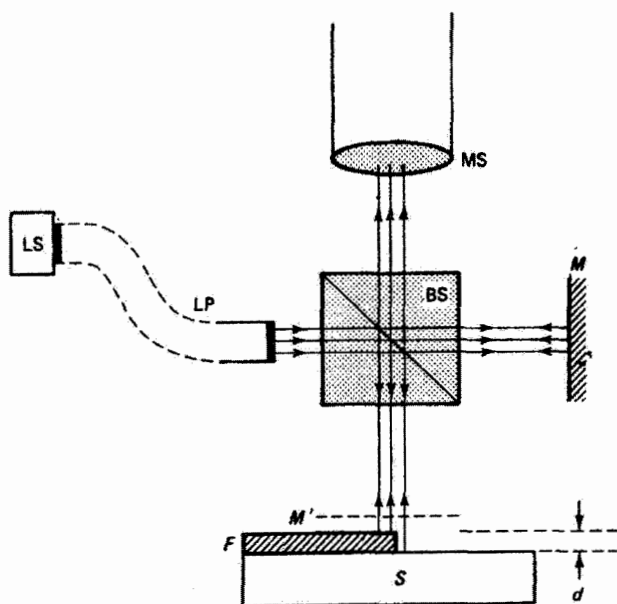
$$r_{10}^2 = (10)(4.184)(589.3 \times 10^{-9}) = 24.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

یا $r_{10} = 4.97 \text{ mm}$ و $r_1 = 1.57 \text{ mm}$

جالب اینجاست که پدیده‌ای که توصیف کرده‌ایم و کاملاً به ماهیت موجی نور مربوط است باید به افتخار شخصی که مدافع نظریه ذره‌ای نور بود حلقه‌های نیوتون نامیده شود. شاید نیوتون اولین کسی بوده است که با استفاده از این فن طول موج نور را اندازه گرفته است. اما او این کمیت را، سازگار با نظریه ذره‌ای خود، به عنوان اندازه‌ای از فاصله بین "شدتهای بازتاب" ذرات نور تعبیر کرد.

۱۰-۷ اندازه‌گیری ضخامت لایه با تداخل

فریزهای همضخامت یک وسیله اپتیکی حساس برای اندازه‌گیری لایه‌های نازک فراهم می‌کنند. نموداری از یک آرایه ممکن در شکل ۱۰-۱۸ نشان داده شده است. فرض کنید لایه مورد اندازه‌گیری F دارای ضخامت d است. این لایه روی پایه S نشانده می‌شود. نور تکفام از چشمه نور LS با لوله نور LP تابانده می‌شود به منشور قائم‌الزاویه تقسیمگر باریکه BS ، که یک باریکه را به آینه تخت M و باریکه دیگری را به سطح لایه می‌فرستد: باریکه‌ها، پس از بازتاب، توسط تقسیمگر باریکه به میکروسکوپ MS وارد می‌شوند و در آنجا تداخل می‌کنند. به طریق معادل، باریکه بازتابیده از آینه M را می‌توان ناشی از تصویر مجازی آن M' دانست. آینه مجازی M' از تصویر کردن M در صفحه بازتابنده تقسیمگر باریکه به دست می‌آید. این ترسیم به وضوح نشان می‌دهد که نقش تداخل از لایه هوا بین صفحه بازتابنده در M' و لایه F ناشی می‌شود. در عمل، آینه M را می‌توان به طرف تقسیمگر باریکه حرکت داد یا از آن دور کرد تا راههای نوری با هم برابر شوند و می‌توان آن را کج کرد تا M' کم و بیش موازی با سطح لایه شود. به علاوه، تقسیمگر باریکه و آینه مجموعاً یک واحد تشکیل می‌دهند که می‌توان آن را به جای عدسی شیئی به میکروسکوپ وصل کرد. وقتی M' و سطح لایه دقیقاً موازی نباشند، همان فریزهای فیزو ناشی از گوه در میکروسکوپ، که قبلاً روی لایه میزان شده است، دیده می‌شوند. می‌توان کاری کرد که باریکه نور فرودی به لایه F بتابد، و در نتیجه دو دستگاه فریز، مربوط به لایه‌های هوا که به اندازه ضخامت لازم در محل



شکل ۱۰-۱۸ اندازه‌گیری ضخامت لایه. فریزهای تداخل ناشی از نور بازتابیده از سطح لایه و پایه تعیین ضخامت لایه d را ممکن می‌سازند.

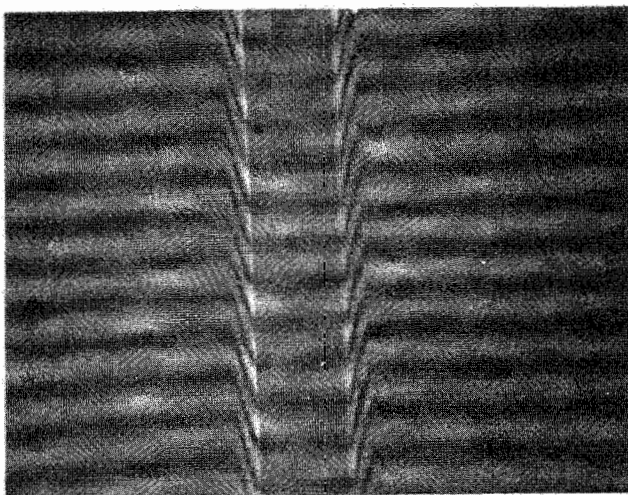
اتصالشان با هم اختلاف دارند، در کنار هم دیده می‌شوند. شکل ۱۰-۱۹ الف یک عکس نمونه از این دستگاههای فریز را که در میکروسکوپ دیده می‌شوند نشان می‌دهد. انتقال یک دستگاه فریز نسبت به دیگری وسیله‌ای برای تعیین d ، به صورتی که در زیر خواهیم گفت، فراهم می‌کند. برای فرود عمودی، فریزهای روشن در شرط ۱۰-۳۴ صدق می‌کنند:

$$\Delta_p + \Delta_r = 2nt + \Delta_r = m\lambda$$

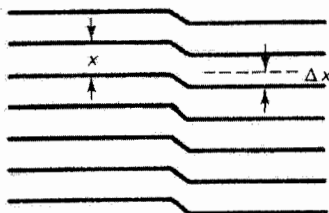
که در آن t ضخامت در نقطه‌ای از لایه هوا است. اگر این ضخامت لایه هوا به اندازه d تغییر کند، مرتبه تداخل m متناظر با آن تغییر می‌کند، و می‌توان نوشت

$$2n \Delta t = 2d = (\Delta m)\lambda$$

که در آن، در قسمت وسط، برای لایه هوا قرار داده‌ایم $n = 1$. افزایش ضخامتی به اندازه $\lambda/2$ مرتبه هر فریز را به اندازه $\Delta m = 1$ تغییر می‌دهد، یعنی نقش فریز به اندازه یک فریز کامل جابه‌جا می‌شود. به‌ازای انتقال فریزها به اندازه Δx (شکل ۱۰-۱۹ ب) تغییر m با $\Delta x/x$ داده $\Delta m = \Delta x/x$



(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۱۹ (الف) عکس فریزهای تداخل که با آرایه شکل ۱۰-۱۸ به وجود آمده‌اند. گودی شیارمانندی که در نقش تداخل دیده می‌شود از تبخیر لایه روی یک سیم مستقیم باریک ایجاد شده است. (ب) نمودار یک طرف شیاری که در عکس دیده می‌شود. نقش فریز به اندازه Δx در لبه لایه منتقل شده است.

می‌شود، و در نتیجه

$$d = (\Delta x/x)(\lambda/2) \quad (38-10)$$

چون هم فاصله فریز x و هم انتقال فریز Δx را می‌توان با یک میکروسکوپ پایدار—یا از روی عکسی مانند شکل ۱۰-۱۹ الف—اندازه گرفت، ضخامت لایه d تعیین می‌شود وقتی از نور تکفام استفاده می‌شود، انتقال کل دستگاههای فریز مبهم است زیرا به‌عنوان مثال انتقال $\Delta x = 0.5x$ دقیقاً مانند انتقال $\Delta x = 1.5x$ به نظر می‌رسد. این ابهام را می‌توان از دو راه رفع کرد. اگر انتقال بیشتر از یک پهنای فریز باشد، این وضعیت وقتی آشکار است که به فریزهای نور سفید، که به

همان ترتیب تشکیل شده‌اند، نگاه می‌کنیم. برهم‌نهمش رنگهایی که نور سفید را تشکیل می‌دهند نقشی به وجود می‌آورد که مرکز آن $m = 0$ یکتا است و به عنوان شاخص واضحی برای مکانیابی فریز به کار می‌رود. در نتیجه، انتقال درست نقشهای فریز به آسانی دیده می‌شود و می‌توان آن را با اندازه‌گیری تکفام Δx که قبلاً گفته شد ترکیب کرد. روش دوم این است که لایه طوری تهیه شود که لبه آن تیز نباشد بلکه به تدریج باریک شود. در این مورد، می‌توان هر فریز از یک مجموعه را در لبه لایه، همچون در شکل $10-19$ ، دنبال کرد تا به فریز متناظر در مجموعه دوم رسید. اگر تهیه لایه‌ای با لبه باریک شونده میسر نباشد، یک لایه نازک از مثلاً قره را روی لایه و پایه تبخیر می‌کنند. پله در لایه فلزی تا اندازه‌ای شیبدار است، اما پله کل به همان ضخامت لایه مورد اندازه‌گیری است. بدین ترتیب، تناظر یک به یک قابل مشاهده‌ای بین فریزهای انفرادی هر مجموعه می‌توان برقرار کرد.

مسائل

۱۰-۱ دوباریکه، دارای میدانهای الکتریکی موازی، با روابط زیر توصیف می‌شوند

$$E_1 = \Psi \sin \left(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \frac{\pi}{\delta} \right)$$

$$E_2 = \Psi \sin \left(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \frac{\pi}{\phi} \right)$$

که در آنها دامنه‌ها برحسب kV/m هستند. این باریکه‌ها در نقطه‌ای که اختلاف فاز ناشی از مسیر برابر با $\pi/3$ است تداخل می‌کنند (باریکه اول مسیر طولانی‌تری دارد). در نقطه برهم‌نهمش،

(الف) تابیدگیهای I_1 و I_2 مربوط به باریکه‌های انفرادی،

(ب) تابیدگی I_{12} ناشی از تداخل آنها،

(ج) تابیدگی کل، و

(د) مرثیت فریز را محاسبه کنید.

۱۰-۲ دو موج نور هماهنگ با دامنه‌های 1.6 و 2.8 در نقطه‌ای از یک پرده تداخل می‌کنند. مرثیت یا تباین فریز را برای وقتی که بردارهای میدان الکتریکی آنها با هم موازی‌اند و برای موردی که برهم عموداند به دست آورید.

۱۰-۳ نسبت دامنه‌های دوباریکه تشکیل‌دهنده نقش فریز تداخل $1/2$ است. تباین فریز را تعیین کنید. چه نسبتی برای دامنه‌ها تباین فریزی برابر با 5 ایجاد می‌کند؟

۱۰-۴ (الف) نشان دهید اگر در یک آرایه تداخل دوباریکه‌ای تابیدگی یکی از باریکه‌ها N برابر

تابیدگی باریکه دیگر باشد، مرئیت فریز با رابطه زیر داده می شود

$$V = \frac{2\sqrt{N}}{N+1}$$

(ب) نسبت تابیدگی باریکه را برای مرئیتهای ۹۶°، ۹°، ۸° و ۵° به دست آورید.

۵-۱۰ چشمه نور جیوه پشت یک صافی شیشه‌ای، که نور سبز ۵۴۶٫۱ nm را عبور می دهد، گذاشته شده است. این نور از یک شکاف باریک افقی که به فاصله ۱ mm در بالای یک آینه تخت قرار دارد عبور می کند. به طور کیفی و کمی توصیف کنید روی پرده‌ای به فاصله ۱ m از شکاف چه دیده می شود.

۶-۱۰ نوری متشکل از دو طول موج به دو شکاف می تابد. می دانیم که یکی از طول موجها ۴۳۶ nm است. روی یک پرده مینیم چهارم این طول موج روی مینیم سوم طول موج دیگر افتاده است. طول موج مجهول را به دست آورید.

۷-۱۰ در یک آزمایش یانگ، دو شکاف باریک با فاصله ۲ mm نور تکفامی را روی پرده‌ای به فاصله ۱٫۵ m پراشیده می کنند. فاصله بین مینیمهای پنجم دو طرف ماکسیم مرتبه صفر ۳۴٫۷۳ mm اندازه گیری شده است. طول موج نور را تعیین کنید.

۸-۱۰ یک باریکه شبه تکفام نور به دستگاه دوشکافی یانگ می تابد و نقش فریزی به وجود می آید که فاصله بین نوارهای تاریک متوالی آن ۵٫۶ mm است. فاصله بین صفحه شکافها و پرده مشاهده ۱۰ m و فاصله بین شکافها ۱ mm است. آرایه آزمایش را ترسیم کنید. چرا یک تک شکاف اولیه لازم است؟ طول موج نور را به دست آورید.

۹-۱۰ در یک آزمایش تداخل از نوع یانگ، فاصله بین شکافها ۵ mm و طول موج نور ۶۰۰ nm است.

(الف) اگر بخواهیم جدایی فریزها ۱ mm باشد فاصله مناسب پرده را تعیین کنید.

(ب) اگر یک تیغه نازک شیشه‌ای ($n = ۱٫۵۰$) به ضخامت ۱۰۰ میکرون روی یکی از شکافها بگذاریم، جابه جایی جانبی فریز را روی پرده به دست آورید.

(ج) چه اختلاف راهی متناظر است با انتقال در نقش فریز از ماکسیم یک قله به نیم ماکسیم (همان) قله؟

۱۰-۱۰ نور سفید (۴۰۰ تا ۷۰۰ nm) را به یک شکاف دوگانه با جدایی ۱٫۲۵ mm می تابانیم.

نقش تداخل روی پرده‌ای به فاصله 1.5 m تشکیل می‌شود. قسمتی از نور از راه روزنه کوچکی در پرده وارد طیف‌نگاری با تفکیک زیاد می‌شود. اگر این روزنه 3 mm از فریز سفید مرکزی فاصله داشته باشد، خطهای تاریک در طیف این چشمه روزنه‌ای کجا ظاهر می‌شوند؟

$10-11$ نور سدیم (589.3 nm) از یک شکاف باریک به یک دومنشور فرنل از شیشه‌ای با ضریب 1.5 می‌تابد. فاصله این دومنشور از پرده‌ای که روی آن فریزها مشاهده می‌شوند دو برابر فاصله دومنشور از شکاف است. فاصله فریزها 3 cm و اندازه‌گیری شده است. زاویه دومنشور را به دست آورید.

$10-12$ دو سطح بازتابنده تخت در کنار هم زاویه کوچکی می‌سازند که مقدار آن از بررسی فریزهای تداخل در یک آزمایش آینه فرنل تعیین می‌شود. یک چشمه شکافی موازی با خط مشترک آینه‌ها و به فاصله 5 cm از آن قرار دارد. پرده در فاصله عمودی 1 m از این خط مشترک واقع است. وقتی نور سدیم (589.3 nm) تابانده می‌شود، فریزهایی با جدایی 5 mm روی پرده دیده می‌شوند. زاویه بین دو آینه را به دست آورید.

$10-13$ زاویه رأس یک منشور بسیار نازک از مشاهده فریزهای تداخل به روشی مانند آزمایش دومنشور فرنل اندازه‌گیری می‌شود. نسبت فاصله شکاف تا منشور به فاصله منشور تا چشم مانند 1 به 4 است. وقتی نور سبز جیوه به کار می‌رود دیده می‌شود که 20° فریز تاریک فاصله 5 cm را می‌پوشانند. اگر ضریب شکست منشور 1.5 باشد زاویه رأس آن را تعیین کنید.

$10-14$ نوری با طول موجهای پیوسته به لایه نازکی از نفت ($n = 1.30$) روی سطح شیشه با فرود عمودی تابانده می‌شود. مشاهده می‌شود که خاموشی نور بازتابیده در طول موجهای 525 و 675 nm (از طیف مرئی) روی می‌دهد. ضخامت لایه روغن و مرتبه‌های تداخل را به دست آورید.

$10-15$ لایه نازکی از MgF_2 ($n = 1.38$) که روی شیشه نشانده شده است در طول موج 580 nm تحت فرود عمودی پادبازتاب است. اگر نور با زاویه 45° فرود آید، بازتاب چه طول موجی از همه کمتر است.

$10-16$ می‌خواهیم یک پوشش تک‌لایه‌ای پادبازتاب را روی یک عدسی با ضریب شکست $n = 1.78$ بنشانیم. ضریب شکست ماده پوشش و ضخامت لازم را برای اینکه در طول موج 550 nm بازتاب صفر داشته باشیم تعیین کنید.

$10-17$ با یادآوری اینکه انرژی باریکه نور متناسب با مجذور دامنه آن است،

(الف) چه درصدی از انرژی نوری با $\lambda = 500 \text{ nm}$ از سطح جدایی ماده‌ای با ضریب 1.40 در هوا بازتابیده می‌شود؟

(ب) ضخامت لایه‌ای از این ماده چه اندازه باشد تا وقتی روی شیشه‌ای با ضریب 1.60 نشانده می‌شود انرژی بازتابیده به علت تداخل ویرانگر کاهش یابد؟

(ج) در این وضعیت، درصد مؤثر بازتاب از این لایه را به دست آورید.

۱۸-۱۰ یک لایه آب‌سایون با استفاده از یک قاب سیمی مستطیلی می‌سازیم و آن را در صفحه قائم نگه می‌داریم. وقتی نور لیزر در 632.8 nm با فرود عمودی به این لایه می‌تابانیم، یک رشته فریزهای تداخل جایگزیده با تعداد ۱۵ فریز در سانتیمتر مشاهده می‌کنیم. تشکیل این فریزها را توضیح دهید.

۱۹-۱۰ باریکه‌ای از نور سفید (طیف پیوسته‌ای از 400 nm تا 700 nm) با زاویه 45° به دو تخته شیشه‌ای موازی که با لایه‌ای از هوا به ضخامت 1 cm و 0.1° از هم جدا شده‌اند فرود می‌آید. نور بازتابیده به منشور یک طیف‌نما تابانده می‌شود. در تمام طیف چند "خط" تاریک دیده می‌شود؟

۲۰-۱۰ با استفاده از دو تیغه میکروسکوپ و یک میله باریک گوه‌ای از هوا تشکیل شده است. اگر نور سدیم (589 nm) با فرود عمودی به این لایه هوا بتابد دقیقاً 40° فریز روشن در طول گوه دیده می‌شوند. قطر میله را به دست آورید.

۲۱-۱۰ دو تیغه شیشه‌ای در یک طرف با هم تماس دارند و در طرف دیگر با سیمی به قطر 5 mm و 0.5° که موازی با خط تماس و به فاصله 2 cm از آن است از هم جدا شده‌اند. با تاباندن نور سبز جیوه تحت فرود عمودی به لایه هوای بین دو تیغه فریزهای تداخل تشکیل می‌شوند. فاصله فریزهای تاریک را محاسبه کنید. چند فریز تاریک بین لبه تماس و سیم دیده می‌شوند؟

۲۲-۱۰ نشان دهید وقتی از یک چشمه نقطه‌ای به لایه‌ای با ضریب n و ضخامت t یکنواخت که در هوا قرار دارد با فرود تقریباً عمودی نور تابانده می‌شود، فاصله بین چشمه‌های مجازی ایجادکننده تداخل $2t/n$ است.

۲۳-۱۰ حلقه‌های نیوتون بین سطح عدسی کروی و تخته اپتیکی تشکیل شده‌اند. اگر برای نور سبز (546.1 nm) قطر دهمین حلقه روشن 7.89 mm باشد، شعاع انحنای سطح عدسی را به دست آورید.

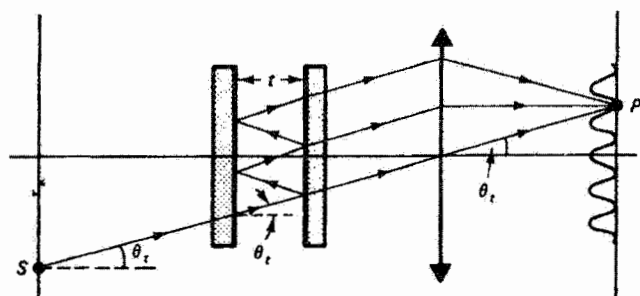
۱۰-۲۴ حلقه‌های نیوتون را یک بار وقتی فضای بین عدسی و تخته اپتیکی پراز هوا است و یک بار وقتی پراز مایعی با ضریب شکست n است مشاهده می‌کنیم. نشان دهید نسبت شعاعهای حلقه‌ای با یک مرتبه معین بسیار نزدیک به جذر n است.

۱۰-۲۵ نوری با دو مؤلفه طول موج به اسباب حلقه‌های نیوتون تابانده می‌شود. یکی از طول موجها 546 nm است. اگر یازدهمین حلقه روشن برای دستگاه فریز این طول موج بر دهمین حلقه روشن مربوط به طول موج دیگر منطبق باشد، طول موج دوم را به دست آورید. شعاع این دو حلقه منطبق و ضخامت متناظر لایه هوا را محاسبه کنید. شعاع سطح کروی عدسی را 1 m بگیرید.

۱۰-۲۶ با استفاده از عدسی شیئی یک میکروسکوپ تداخلی نقش فریزی با فاصله منظم 1 mm به دست آمده است. در یک نقطه معین از این نقش، دیده می‌شود که فریزها به اندازه 3.4 mm انتقال جانبی یافته‌اند. اگر نور تابیده سبز 546.1 nm باشد، اندازه "پله" در لایه را که باعث این انتقال شده است تعیین کنید.

مراجع

- [1] Baumeister, Philip, and Gerald Pincus. "Optical Interference Coatings." *Scientific American* (Dec. 1970): 58.
- [2] Fincham, W. H. A., and M. H. Freeman. *Optics*, 9th ed. London: Butterworths, 1980. Ch. 14.
- [3] Klein, Miles V. *Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1970. Ch. 5.
- [4] Hecht, Eugene, and Alfred Zajac. *Optics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1974. Ch. 9.
- [5] Ghatak, Ajoy K. *An Introduction to Modern Optics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972. Ch. 4.
- [6] Feynman, Richard P., Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures in Physics*, vol. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1975. Ch. 28, 29.
- [7] Longhurst, R. S. *Geometrical and Physical Optics*, 2d ed. New York: John Wiley and Sons, 1967. Ch. 7, 8.



تداخل سنجی اپتیکی

مقدمه

ابزاری را که برای بررسی تداخل نور و نقش فریز ناشی از اختلاف راه نوری به یکی از روشهای مختلف طراحی می شود تداخل سنج اپتیکی می نامند. این توصیف کلی باید تنوع گسترده طراحیها و موارد استفاده تداخل سنجها را نشان دهد. تداخل سنجها برای امواج رادیویی و آکوستیکی نیز به کار می روند، اما در اینجا ما تنها به تداخل سنجی اپتیکی می پردازیم. در این فصل عمدتاً تداخل سنجهای مایکلسون و فابری-پرو را بررسی می کنیم و تنها به تعدادی از کاربردهای زیاد آنها اشاره می کنیم.

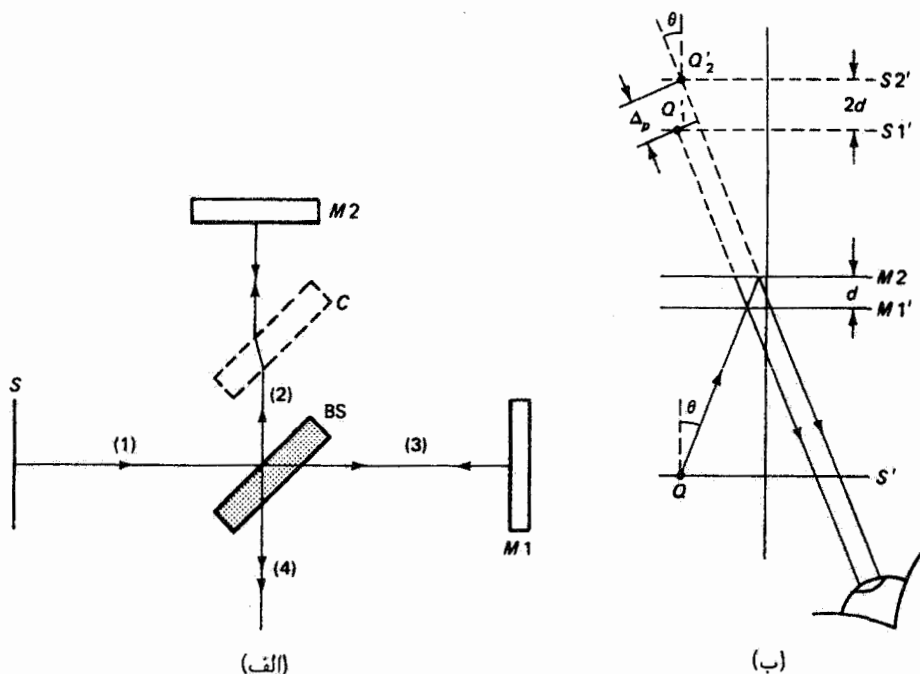
در یک تداخل سنج، برای به دست آوردن تداخل بین دو باریکه همدوس نور، باریکه اولیه ای به دو یا چند قسمت تقسیم می شود که پس از پیمودن راههای نوری مختلفی به هم می پیوندند و یک نقش تداخل به وجود می آورند. یک معیار برای رده بندی گسترده تداخل سنجها تفاوت در نحوه تقسیم شدن باریکه اولیه است. تداخل سنجهای تقسیم جبهه موج قسمتهای یک جبهه موج از باریکه همدوس نور را می گیرند، چنانکه در مورد شکاف دوگانه ینگ، یا شکلهای تحول یافته آن، مانند آینه لوید یا دومنشور فرنل داریم. اما در تداخل سنجهای تقسیم دامنه از نوعی تقسیمگر

باریکه استفاده می‌شود که باریکهٔ اولیه را به دو قسمت تقسیم می‌کند. تداخل سنج مایکلسون از این نوع است. معمولاً تقسیم باریکه با یک لایهٔ نیم بازتابندهٔ فلزی یا دی‌الکتریک صورت می‌گیرد؛ می‌توان این کار را با بازتاب داخلی کلی بازداشته در سطح جدایی دو منشوری که یک مکعب می‌سازند، یا توسط پراش یا شکست دوگانه انجام داد. همچنین تداخل سنجها را بسته به اینکه با دو باریکه کار می‌کنند، مانند تداخل سنج مایکلسون، یا با چندین باریکه، مانند تداخل سنج فابری-پرو، رده‌بندی می‌کنند.

۱۱-۱ تداخل سنج مایکلسون

تداخل سنج مایکلسون، که توسط آلبرت مایکلسون در سال ۱۸۸۱ ارائه شد، تأثیر اساسی در پیشرفت فیزیک جدید داشته است. این ابزار ساده و پرکاربرد به‌عنوان مثال برای اثبات تجربی اعتبار نظریهٔ نسبیت خاص، آشکارسازی و اندازه‌گیری ساختار فوئریز در طیفهای خطی، اندازه‌گیری اثرهای جزر و مدی ماه روی زمین، و تهیهٔ جانشین متر استاندارد برحسب طول موج نور به‌کار رفته است. در بسیاری از این کارها خود مایکلسون پیشقدم بوده است.

نمودار تداخل سنج مایکلسون در شکل ۱۱-۱ الف نشان داده شده است. باریکهٔ نور ۱ ناشی از چشمهٔ گستردهٔ S ، با تقسیمگر باریکهٔ BS — شیشه‌ای که روی سطح جلو آن یک لایهٔ نیم‌شفاف نازک دی‌الکتریک یا فلزی نشانده شده است — تقسیم می‌شود. بنابراین، تداخل سنج مایکلسون از نوع تقسیم دامنه است. باریکهٔ بازتابندهٔ ۲ و باریکهٔ عبور کردهٔ ۳، با دامنه‌های تقریباً مساوی، به‌ترتیب به آینه‌های کاملاً بازتابندهٔ M_2 و M_1 می‌رسند و در آنجا تغییر جهت می‌دهند. پس از بازگشت به تقسیمگر باریکه، اکنون باریکهٔ ۲ عبور می‌کند و باریکهٔ ۳ توسط لایهٔ نیم‌شفاف بازتابنده می‌شود، به طوری که این باریکه‌ها دوباره به هم می‌رسند و به‌صورت باریکهٔ ۴ از تداخل سنج خارج می‌شوند. گشودگی مفید این تداخل سنج دوباریکه‌ای طوری است که تمام پرتوهای فرودی به M_1 و M_2 عمود یا نزدیک به عمود هستند. بدین ترتیب، باریکهٔ ۴ شامل پرتوهایی است که راههای نوری مختلفی طی کرده‌اند و تداخل به‌وجود می‌آورند. دست‌کم یکی از آینه‌ها مجهز به پیچهای تنظیم شیب است و این باعث می‌شود که بتوان سطح M_1 را بر سطح M_2 عمود کرد. همچنین با یک پیچ ریزسنجی دقیق می‌توان یکی از آینه‌ها را در راستای باریکه جابه‌جا کرد. بدین ترتیب، می‌توان اختلاف راههای نوری باریکه‌های ۲ و ۳ را به‌تدریج تغییر داد. توجه کنید که باریکهٔ ۳ سه بار از تقسیمگر باریکه عبور می‌کند در حالی که باریکهٔ ۲ تنها یک بار از آن می‌گذرد. در بعضی کاربردها، که در آنها از نور سفید استفاده می‌شود، لازم است که راههای نوری دو باریکه دقیقاً مساوی شوند. اگر چه این کار را با افزایش مناسب فاصلهٔ بین M_2 و BS می‌توان برای یک طول موج انجام داد اما این تصحیح در سایر طول موجها به علت پاشندگی شیشه کافی نیست. برای



شکل ۱-۱۱ (الف) تداخل سنج مایکلسون. (ب) معادل اپتیکی تداخل سنج مایکلسون.

جبران همزمان در تمام طول موجها، یک تخته C از جنس BS و با همان ابعاد در مسیر باریکه ۲ و موازی با BS قرار داده می شود. هر اختلاف باقی مانده کوچکی در راههای نوری را می توان با چرخاندن جبرانگر C ، و در نتیجه با تغییر راه نوری در آن، حذف کرد.

تداخل سنج واقعی در شکل ۱-۱۱ الف دارای دو محور اپتیکی عمود بر هم است. یک دستگاه اپتیکی معادل اما ساده تر با استفاده از تصاویر مجازی چشمه S و آینه $M1$ از طریق بازتاب در آینه BS به دست می آید. برای تعیین مکانهای این تصاویر از همه ساده ترین است که مجموعه شامل S ، $M1$ و باریکه های ۱ و ۳ در شکل ۱-۱۱ الف را به اندازه 90° در جهت پادساعتگرد حول نقطه تلاقی باریکه ها با آینه BS بچرخانیم. وضعیت هندسی حاصل در شکل ۱-۱۱ ب نشان داده شده است. S' مکان جدید صفحه چشمه و $M1'$ مکان جدید $M1$ است. اکنون نور ناشی از نقطه Q در صفحه چشمه S' عملاً از آینه های $M1'$ و $M2$ ، که موازی هم و دارای اختلاف راه نوری d هستند، بازتابیده می شود. دو باریکه بازتابیده به نظر می رسد از دو تصویر مجازی Q_1' و Q_2' مربوط به نقطه شیء Q می آیند. چون فاصله تصاویر $S1'$ و $S2'$ مربوط به صفحه چشمه S' در آینه های $M2$ و $M1'$ باید دو برابر فاصله این آینه ها باشد، فاصله بین Q_1' و Q_2' برابر با

Δd است، و اختلاف راه نوری بین دو باریکه خروجی از تداخل سنج برابر است با

$$\Delta_p = 2d \cos \theta \quad (1-11)$$

که در آن زاویه θ معرف شیب باریکه‌ها نسبت به محور اپتیکی است. برای یک باریکه عمودی، $\theta = 0$ و $\Delta_p = 2d$. این نتیجه غیرمنتظره نیست، زیرا اگر یک آینه نسبت به دیگری به اندازه d از BS دورتر باشد باریکه‌ای که دارای مسیر طولانی‌تر است یک مسافت اضافی طی می‌کند که شامل دو بار فاصله d یکی قبل از بازتاب و دیگری بعد از بازتاب است. به علاوه، اگر $\Delta = m\lambda$ ، یعنی دو باریکه تداخل سازنده داشته باشند، این تداخل سازنده به‌ازای هر انتقال $\lambda/2$ برای یکی از آینه‌ها تکرار می‌شود.

اما دستگاه اپتیکی شکل ۱-۱۱ ب معادل است با مورد تداخلی که از تاباندن نور چشمه گسترده به یک لایه یکنواخت هوا ناشی می‌شود. با نگاه کردن به تقسیمگر باریکه در امتداد پرتو ۴، در حالی که چشم یا تلسکوپ برای بینهایت میزان شده است، می‌توان فریزهای مجازی هم‌شیب را دید. با فرض اینکه باریکه‌های تداخل‌کننده دارای دامنه‌های مساوی هستند، تابیدگی دستگاه فریز دایره‌های هم‌مرکز با محور اپتیکی، بنابه معادله $16-10$ ، با رابطه زیر داده می‌شود

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (2-11)$$

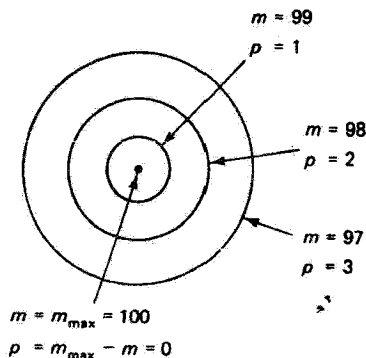
که در آن اختلاف فاز δ برابر است با

$$\delta = k\Delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \Delta \quad (3-11)$$

اختلاف راه نوری کل، طبق معمول، عبارت است از $\Delta = \Delta_p + \Delta_r$. یک انتقال فاز نسبی π بین دو باریکه روی می‌دهد زیرا باریکه ۲ دو بار و باریکه ۳ تنها یک بار متحمل بازتاب خارجی می‌شود.^۱ در نتیجه، برای فریزهای تاریک داریم

$$\Delta_p + \Delta_r = 2d \cos \theta + \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

۱. این نتیجه مربوط به پوشش دی‌الکتریک با ضریبی کمتر از ضریب شیشه است. این فرض اگر چه به بحثی درباره نقش فریز در یک وضعیت خاص (و رایج) منجر می‌شود، تأثیری روی اعتبار نتایجی مانند معادله ۸-۱۱ ندارد زیرا اندازه‌گیریها به حرکت کل نقش فریز بستگی دارند و نه به‌جای دقیق فریزهای تاریک یا روشن.



شکل ۲-۱۱ مرتبه‌بندی‌های معادل برای فریزها.

یا به‌طور ساده‌تر

$$2d \cos \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{فریزهای تاریک} \quad (4-11)$$

اگر مقدار d طوری باشد که پرتوهای عمودی که مرکز دستگاه فریز را تشکیل می‌دهند در معادله ۴-۱۱ صدق کنند، یعنی فریز مرکزی تاریک باشد، مرتبه این فریز که با

$$m_{\max} = \frac{2d}{\lambda} \quad (5-11)$$

داده می‌شود یک عدد بزرگ است. هر چه از مرکز نقش دورتر شویم، مرتبه فریزهای تاریک، با کاهش $\cos \theta$ از مقدار ماکسیمم ۱، کمتر می‌شود. برای سهولت، می‌توان این مرتبه‌بندی فریزها را با نسبت دادن عدد درست دیگری مانند p به هر فریز مرتبه m وارونه کرد به طوری که

$$p = m_{\max} - m = \frac{2d}{\lambda} - m \quad (6-11)$$

m را از معادله ۶-۱۱ در معادله ۴-۱۱ می‌گذاریم و به دست می‌آوریم

$$p\lambda = 2d(1 - \cos \theta), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad \text{فریزهای تاریک} \quad (7-11)$$

که در آن اکنون فریز مرکزی دارای مرتبه صفر است و مرتبه فریزهای مجاور به سمت مخالف مرکز افزایش می‌یابد. شکل ۲-۱۱ رابطه بین مرتبه‌های m و p را برای مورد اختیاری $m_{\max} = 100$ نشان می‌دهد. از معادله ۴-۱۱ یا ۷-۱۱ دیده می‌شود که اگر d تغییر کند یک نقطه به‌خصوص در

نقش فریز ($\theta = \text{const.}$) با مقادیر به تدریج متغیر مرتبه‌های m یا p متناظر خواهد شد. مقادیر درست وقتی روی می‌دهند که این نقطه منطبق بر یک فریز تاریک باشد. به عبارت دیگر، اگر d تغییر کند بسته به اینکه اختلاف راه نوری کاهش یا افزایش یابد فریزهای نقش به سمت مرکز جمع می‌شوند و در آنجا یکی پس از دیگری ناپدید می‌شوند یا در مرکز به وجود می‌آیند و به سمت مخالف مرکز منبسط می‌شوند. وقتی یکی از آینه‌ها بدین ترتیب از نقطه اختلاف راه صفر بگذرد حرکت نقش فریز وارونه می‌شود. از یک دیدگاه دیگر، وقتی جدایی d آینه‌ها کوچکتر شود، فاصله زاویه‌ای $\Delta\theta$ مربوط به بازه فریز کوچک معین Δm باید بنابه معادله ۴-۱۱ افزایش یابد، زیرا

$$|\Delta\theta| = \frac{\lambda\Delta m}{2d \sin\theta}$$

که نشان می‌دهد هر چه اختلاف راه نوری کوچکتر باشد جدایی فریزها بیشتر است. در واقع، اگر $d = \lambda/2$ آنگاه از معادله ۴-۱۱ داریم $m = \cos\theta$ ، و در تمام میدان دید بیشتر از یک فریز جا نمی‌گیرد؛ به‌ارزای انتقال Δd برای آینه تعداد Δm از فریزهایی که از مرکز نقش یا از یک نقطه نزدیک آن می‌گذرند بنابه معادله ۴-۱۱ برابر است با

$$\Delta m = \frac{2\Delta d}{\lambda} \quad (۸-۱۱)$$

از معادله ۸-۱۱ یک روش تجربی برای اندازه‌گیری λ وقتی Δd معلوم است یا برای مدرج‌سازی پیچ انتقال ریزسنج وقتی λ معلوم است استنباط می‌شود.

مثال

فریزهای مربوط به یک نور تکفام را در تداخل‌سنج مایکلسون مشاهده می‌کنیم. وقتی آینه حرکتپذیر به اندازه 0.73 mm منتقل می‌شود 300 فریز جابه‌جا می‌شوند. طول موج نور را به دست آورید. اگر یک تخته شیشه با ضریب 1.51 و ضخامت 0.5 mm در یکی از بازوهای تداخل‌سنج بگذاریم، دستگاه فریز چه اندازه جابه‌جا می‌شود؟ (فرض کنید باریکه نور بر این شیشه عمود است.)

حل: با استفاده از معادله ۸-۱۱ داریم

$$\lambda = \frac{2\Delta d}{\Delta m} = \frac{(2)(0.73)}{300} = 4.87 \times 10^{-4} \text{ mm} = 487 \text{ nm}$$

با گذاشتن شیشه، بازوی مربوط عملاً به اندازه اختلاف راه $\Delta d = n_2 t - n_1 t$ درازتر می‌شود، و

$$\Delta m = \frac{2\Delta d}{\lambda} = \frac{2(n_2 - 1)t}{\lambda} = \frac{2(0.51)(0.005 \times 10^{-2})}{487 \times 10^{-9}}$$

یا $\Delta m = 10.5$ فریز.

۱۱-۲ کاربردهای تداخل سنج مایکلسون

برای اندازه‌گیری لایه‌های نازک، با روشی که اساساً همان است که در فصل قبل توصیف شد، می‌توان به‌آسانی از تداخل سنج مایکلسون استفاده کرد. این تداخل سنج همچنین برای تعیین ضریب شکست گازها کاملاً مناسب است. یک سلول قابل تخلیه با دیواره‌های تخت و موازی، حاوی گازی در فشار و دمای معین که می‌خواهیم ضریب شکست آن را تعیین کنیم، در مسیر باریکه ۳ در شکل ۱۱-۱ الف جاگذاری می‌شود. دستگاه فریزی را که با این شرایط ایجاد شده است وقتی گاز داخل سلول به تدریج بیرون کشیده می‌شود مشاهده می‌کنیم. تعداد کل فریزهای منتقل شده Δm به تغییر راه نوری طی تخلیه کامل سلول بستگی دارد. اگر طول واقعی سلول دقیقاً برابر با مقدار معلوم L باشد، این تغییر راه نوری با رابطه زیر داده می‌شود

$$\Delta d = nL - L = L(n - 1) \quad (9-11)$$

و با استفاده از معادله ۱۱-۸، نتیجه می‌گیریم که ضریب شکست گاز از رابطه زیر به دست می‌آید

$$n - 1 = \left(\frac{\lambda}{2L} \right) \Delta m \quad (10-11)$$

کاربرد مستقیم دیگری از تداخل سنج مایکلسون را در نظر می‌گیریم که عبارت است از تعیین اختلاف طول موج بین دو مؤلفه نزدیک به هم در یک "خط" طیفی. هر طول موج دستگاه فریز دایره‌ای خاص خود را مطابق با معادله ۱۱-۴ تشکیل می‌دهد. فرض کنید به این دستگاه‌های دایره‌ای در نزدیکی مرکز آنها نگاه می‌کنیم، و در نتیجه $\cos \theta \cong 1$. اگر طول موجها را با λ و λ' نشان دهیم، برای اختلاف راه معین d در تداخل سنج حاصلضرب $m\lambda$ ثابت است، یعنی $m\lambda = m'\lambda'$. وقتی فریزهای دو دستگاه بر هم منطبق هستند نقش فریز واضح دیده می‌شود، در حالی که اگر فریزهای یک دستگاه در ناحیه مشاهده بین فریزهای دستگاه دیگر قرار داشته باشند نقش فریز از لحاظ روشنایی تقریباً یکنواخت، یا "رنگ و رو رفته"، به نظر می‌رسد. جابه‌جایی

Δd که بین دو انطباق متوالی برای آینه لازم است به طریق زیر به اختلاف طول موج $\Delta \lambda$ مربوط می‌شود. در یک انطباق، وقتی فریزها "همگام" هستند، مرتبه‌های دستگاه‌های وابسته به λ و λ' باید در رابطه زیر صدق کنند

$$m = m' + N$$

که در آن N یک عدد درست است. اگر اختلاف راه نوری در این وضعیت d_1 باشد، از معادله ۱۱-۴ داریم

$$\frac{2d_1}{\lambda} = \frac{2d_1}{\lambda'} + N \quad (11-11)$$

فرض کنید وقتی انطباق بعدی روی می‌دهد اختلاف راه نوری به d_2 برسد. پس

$$m = m' + (N + 1)$$

یا

$$\frac{2d_2}{\lambda} = \frac{2d_2}{\lambda'} + N + 1 \quad (12-11)$$

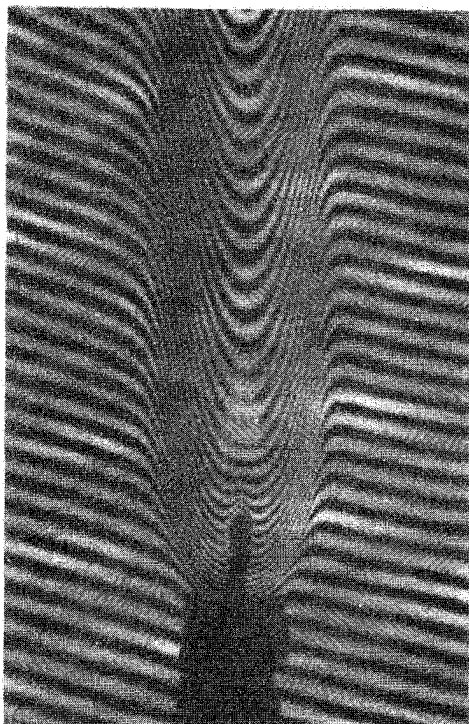
با تفریق معادله ۱۱-۱۱ از معادله ۱۲-۱۱ و با نوشتن انتقال آینه به صورت $\Delta d = d_2 - d_1$ ، به دست می‌آوریم

$$\lambda' - \lambda = \frac{\lambda \lambda'}{2\Delta d} \quad (13-11)$$

اما چون λ و λ' بسیار نزدیک به هم هستند، اختلاف طول موجی دو مؤلفه تفکیک نشده را می‌توان با رابطه زیر تقریب گرفت

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2\Delta d} \quad (14-11)$$

این روش غالباً در آزمایشگاه آموزشی اپتیک برای اندازه‌گیری اختلاف طول موجی 6\AA بین دو مؤلفه "خط" زرد سدیم به کار می‌رود.

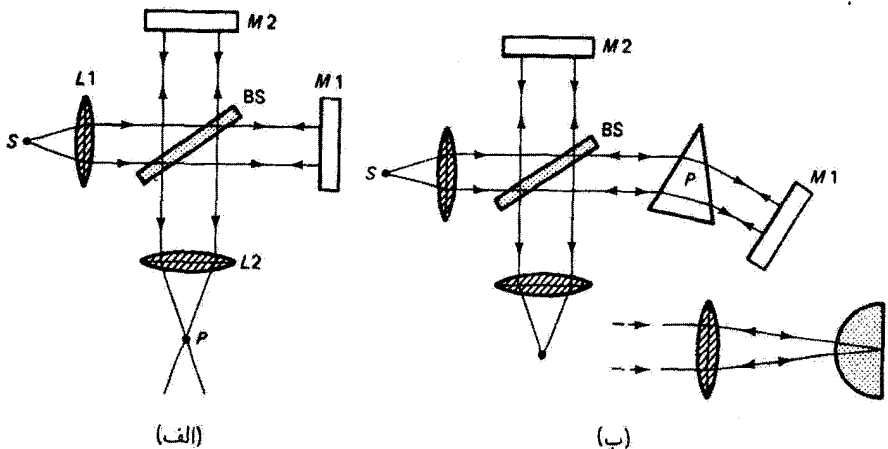


شکل ۱۱-۳ تغییر شکل فریزهای همضخامت در مجاورت شعلة شمع.

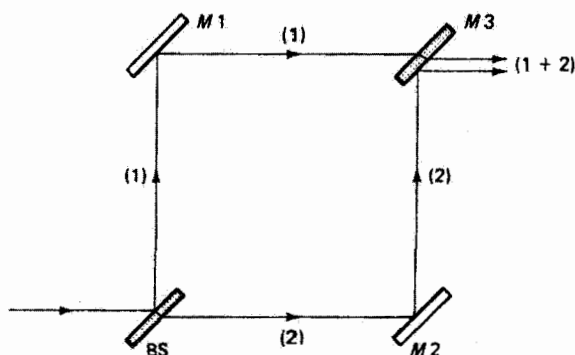
تمام بحث بالا درباره فریزها در تداخل‌سنج مایکلسون به فریزهای مجازی همشیب مربوط می‌شود. فرض کرده‌ایم که آینه‌های $M1$ و $M2$ دقیقاً بر هم عموداند، یا هم‌ارز آن در دستگاه اپتیکی معادل در شکل ۱۱-۱ ب دقیقاً با هم موازی هستند. اگر سمتگیری آینه‌ها طوری باشد که فضای بین $M1'$ و $M2$ در شکل ۱۱-۱ ب یک گوه هوا باشد فریزهای همضخامت را می‌توان جایگزیده در آینه‌ها مشاهده کرد. این فریزها مستقیم و موازی با خطی هستند که محل تلاقی $M1'$ و $M2$ را نشان می‌دهد. اگر گوه دارای زاویه بزرگی باشد، فریزها خمیده خواهند بود و می‌توان نشان داد کمانهای هذلولوی هستند. همچنین، اگر چشمه کوچک باشد آنگاه فریزهای ناجایگزیده حقیقی در نور خروجی از تداخل‌سنج دیده می‌شوند به طوری که انگار از دو تصویر مجازی چشمه در $M1'$ و $M2$ ناشی شده‌اند. اگر از نور همدوس و شدید لیزر استفاده شود این فریزها به آسانی ظاهر می‌شوند. این امکانات در فصل قبل، در بررسی فریزهای تداخل مختلفی که از تاباندن نور به یک لایه تولید می‌شوند، مورد بحث قرار گرفتند. شکل ۱۱-۳ عکسی است که واپیچش فریزهای همضخامت را که از شعلة شمعی واقع در یک بازوی تداخل‌سنج مایکلسون تولید شده‌اند نشان می‌دهد. تغییر دما باعث تغییر طول راه نوری به علت تغییر ضریب شکست هوا می‌شود.

۱۱-۳ دگرگونه‌های تداخل سنج مایکلسون

اگر چه یک باریکه نور را می‌توان به راه‌های زیادی به دو قسمت تقسیم کرد و آنها را پس از عبور از مسی‌های مختلف با هم یکی کرد، در اینجا تنها دو دگرگونه را به اختصار بررسی می‌کنیم که می‌توان آنها را شکل‌های تحول‌یافته تداخل سنج مایکلسون دانست. تغییر کوچکی توسط تویمن و گرین در شکل ۱۱-۴ الف نشان داده شده است. در این تداخل سنج به جای چشمه گسترده از یک چشمه نقطه‌ای همراه با عدسی موازی‌کننده L_1 استفاده می‌شود به طوری که تمام پرتوها موازی با محور اپتیکی وارد تداخل سنج می‌شوند، یا $\cos \theta = 1$. پرتوهای موازی خروجی از تداخل سنج با عدسی L_2 در P ، جایی که چشم قرار دارد، متمرکز می‌شوند. با این تداخل سنج به جای فریزهای دایره‌ای همشیب، فریزهای همضخامت دیده می‌شوند. این فریزها نقایص دستگاه اپتیکی را که باعث تغییر راه نوری می‌شوند آشکار می‌کنند. وقتی هیچ واپیچشی در جبهه‌های موجی که از تداخل سنج می‌گذرند ظاهر نشود روشنایی یکنواختی نزدیک P دیده می‌شود. اگر مؤلفه‌های تداخل سنج دارای کیفیت خوب باشند، از این دستگاه می‌توان برای آزمون کیفیت اپتیکی مؤلفه اپتیکی دیگری مانند یک منشور در وضعیتی که در شکل ۱۱-۴ ب دیده می‌شود استفاده کرد. هر نقص سطحی یا تغییر داخلی در ضریب شکست به صورت واپیچش در نقش فریز ظاهر می‌شود. به همین ترتیب، اگر یک سطح کروی کوژ که می‌تواند پرتوهای شکسته را در امتداد خودشان بازتاب دهد به جای آینه تخت M_1 بگذاریم، چنانکه در ضمیمه شکل ۱۱-۴ ب نشان داده شده است، می‌توانیم ابیراهی عدسیها را آزمون کنیم.



شکل ۱۱-۴ (الف) تداخل سنج تویمن-گرین. (ب) استفاده از تداخل سنج تویمن-گرین برای آزمون یک منشور و یک عدسی (ضمیمه).



شکل ۵-۱۱ تداخل‌سنج ماخ-زندر.

دگرگونه اساسی‌تر دیگری که در شکل ۵-۱۱ ترسیم شده است، تداخل‌سنج ماخ-زندر است. باریکه نور تقریباً موازی فرودی با تقسیمگر باریکه BS به دو باریکه تقسیم می‌شود. این باریکه‌ها توسط آینه‌های $M1$ و $M2$ کاملاً بازتابیده می‌شوند و توسط آینه نیم‌شفاف $M3$ دوباره برهم منطبق می‌شوند. طول راه‌های باریکه‌های ۱ و ۲ پیرامون این دستگاه مستطیلی و در شیشه تقسیمگر باریکه یکی است. از این تداخل‌سنج به عنوان مثال در پژوهش‌های ایرودینامیکی استفاده می‌کنند که در آنها وضعیت هندسی جریان هوا در اطراف جسمی در تونل باد از طریق تغییرات موضعی فشار و ضریب شکست آشکار می‌شود. یک اتاقک آزمون درجه‌دار، که داخل آن الگوی تحت آزمون و لوله هوا قرار داده شده‌اند، در مسیر ۱ گذاشته می‌شود. برای حفظ تساوی راه‌های نوری یک اتاقک معادل در مسیر ۲ می‌گذارند. نقش شارش هوا با نقش فریز آشکار می‌شود. برای کاربردهایی از این نوع، این تداخل‌سنج را باید در مقیاس نسبتاً بزرگی ساخت. یک مزیت تداخل‌سنج ماخ-زندر نسبت به تداخل‌سنج مایکلسون این است که می‌توان با چرخش‌های کوچک مناسبی برای آینه‌ها فریزها را روی جسم تحت آزمون تشکیل داد، و در نتیجه هر دو را با هم دید یا از آنها عکس گرفت. در تداخل‌سنج مایکلسون فریزها جایگزیده روی آینه دیده می‌شوند و از این‌رو در همان حالی که جسم آزمون در یکی از بازوها قرار دارد نمی‌توان آنها را به‌وضوح مشاهده کرد.

تداخل‌سنج‌های مایکلسون، تویمن-گرین، و ماخ-زندر همگی ابزارهای تداخل دو باریکه‌ای هستند و با تقسیم دامنه کار می‌کنند. اکنون به مورد مهمی از ابزار چندباریکه‌ای، یعنی تداخل‌سنج فابری-پرو، می‌پردازیم. اما قبل از بحث درباره خود این ابزار، لازم است پدیده بازتاب‌های چندگانه از تخته شفاف موازی را بررسی کنیم.

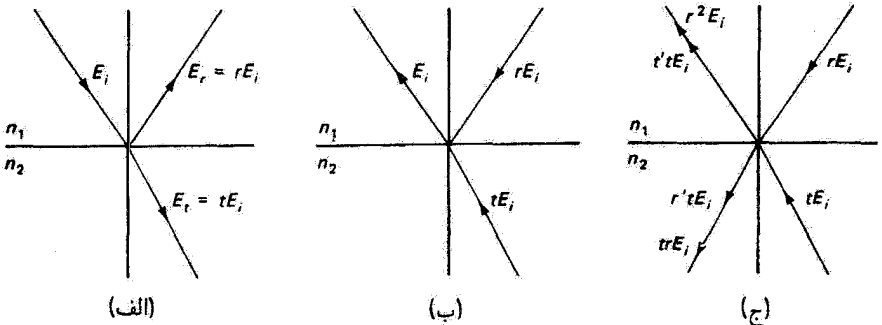
۱۱-۴ روابط استوکس

بررسی را با استدلالی از جورج استوکس شروع می‌کنیم که اطلاعاتی دربارهٔ دامنه‌های قسمتهای بازتابیده و عبور کردهٔ یک جبههٔ موج تخت فرودی به سطح شکست تخت، همچون در شکل ۱۱-۶الف، به دست می‌دهد. فرض کنید E_i دامنهٔ نور فرودی باشد. ضرایب بازتاب و عبور را با روابط زیر تعریف می‌کنیم^۱

$$r = \frac{E_r}{E_i}, \quad t = \frac{E_t}{E_i} \quad (11-15)$$

به طوری که در سطح جدایی، E_i به یک قسمت بازتابیده، $E_r = rE_i$ ، و یک قسمت عبور کرده، $E_t = tE_i$ ، چنانکه در شکل نشان داده شده است، تقسیم می‌شود. برای پرتوی که از محیط دوم فرود می‌آید کمیت‌های مشابهی تعریف می‌کنیم و آنها را با r' و t' نشان می‌دهیم. بنابه اصل برگشت‌پذیری پرتو، وضعیتی که در شکل ۱۱-۶ب نشان داده شده است نیز باید معتبر باشد. اما به طور کلی، دو پرتو فرودی به سطح جدایی، همچون در شکل ۱۱-۶ب، هر یک منجر به یک پرتو بازتابیده و یک پرتو عبور کرده می‌شوند که همهٔ آنها یا دامنه‌های مناسب در شکل ۱۱-۶ج نشان داده شده‌اند. نتیجه می‌گیریم که وضعیتهایی که در شکل ۱۱-۶ب و ۱۱-۶ج نشان داده شده‌اند باید از لحاظ فیزیکی هم‌ارز باشند، به طوری که می‌توانیم بنویسیم

$$E_i = (r^2 + t't)E_i$$



شکل ۱۱-۶ ترسیم‌های مربوط به محاسبهٔ روابط استوکس.

۱. بعداً از کمیت‌های بازتابندگی (R) و تراگسیلدنگی (T) نیز استفاده خواهیم کرد که به صورت نسبت تابیدگیهای مربوط تعریف می‌شوند. در حالی که $R = r^2$ ، $T = t'^2$ (بخش ۴-۲۰).

$$0 = (r't + tr)E_z$$

یا

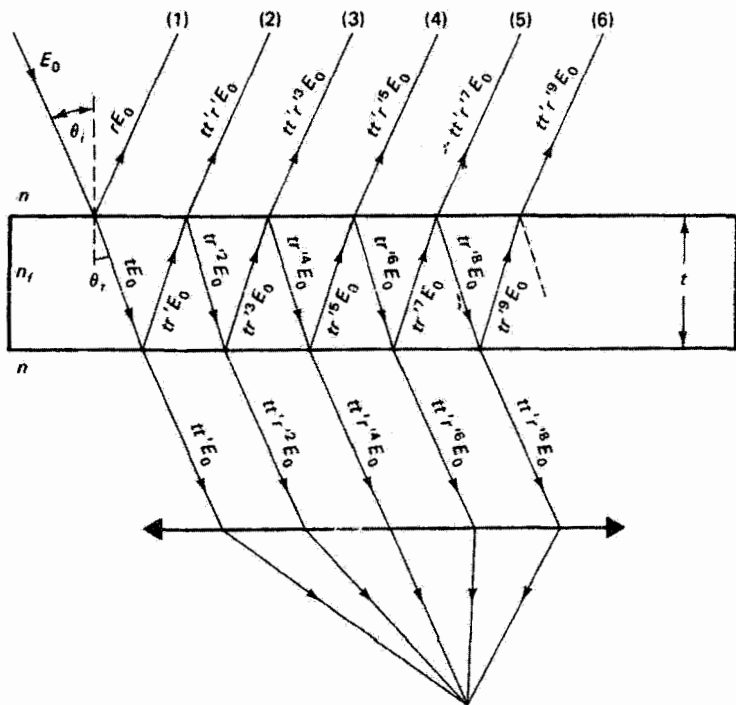
$$tt' = 1 - r^2 \quad (16-11)$$

$$r = -r' \quad (17-11)$$

معادله‌های ۱۶-۱۱ و ۱۷-۱۱ عبارت‌اند از روابط استوکس بین ضرایب دامنه برای زاویه‌های فرودی که از طریق قانون اسنل به هم مربوط می‌شوند. معادله ۱۷-۱۱ نشان می‌دهد دامنه‌های باریکه‌های بازتابیده برای پرتوهای فرودی از دو جهت از لحاظ بزرگی با هم یکسان هستند اما از لحاظ فاز به اندازه π با هم اختلاف دارند. این مطلب روشنتر می‌شود اگر معادله ۱۷-۱۱ را به صورت هم‌ارز $r = e^{i\pi} r'$ بنویسیم. این نتیجه با پیش‌بینیهای معادلات فرنل که کاملتراند و آنها را در فصل ۲^۰ بررسی می‌کنیم توافق دارد. هم نظریه فرنل و هم آزمایش، مثلاً با آینه لوبد، این واقعیت را ثابت می‌کنند که برای پرتوی که به سطح جدایی از طرفی فرود می‌آید که به سرعت بیشتر یا ضریب شکست کمتر مربوط است انتقال فاز روی می‌دهد. مشابه این پدیده موجی در بازتاب امواج از سر ثابت یک ریسمان مشاهده می‌شود. دو رابطه استوکس در بحث زیر به‌کار می‌آیند.

۱۱-۵ تداخل چندباریکه‌ای در تخته موازی

اکنون به مسئله بازتاب از تخته موازی که قبلاً در تقریب دوباریکه‌ای در نظر گرفتیم باز می‌گردیم. بازتاب چندگانه باریکه نور کم‌عرضی با دامنه E_0 و زاویه فرود θ_0 را که در شکل ۷-۱۱ نشان داده شده است در نظر بگیرید. ضرایب دامنه بازتاب و عبور را در بازتاب خارجی با r و t و در بازتاب داخلی با r' و t' نشان می‌دهیم. دامنه هر قسمت را می‌توان با شروع از دامنه موج فرودی E_0 و پیشروی در دنباله بازتابها با ضرب دامنه قبلی در ضریب بازتاب یا عبور آن قسمت تعیین کرد. باریکه‌های چندگانه موازی از سطوح بالایی و پایینی تخته خارج می‌شوند. وقتی هر یک از این مجموعه‌ها را با عدسی همگرا در یک نقطه متمرکز کنیم، چنانکه برای باریکه‌های عبور کرده نشان داده شده است، تداخل چندباریکه‌ای روی می‌دهد. باریکه‌های چندگانه همدوس هستند زیرا از یک تک‌باریکه ناشی می‌شوند. به‌علاوه، اگر باریکه فرودی نزدیک به عمود باشد، باریکه‌های چندگانه در حالی که نوسانهای E ی آنها تقریباً موازی‌اند به هم می‌رسند.



شکل ۷-۱۱ بازتاب و عبور مکرر باریکه‌ها در تخته موازی.

برهم نهش باریکه‌های بازتابیده از سطح بالایی تخته را در نظر می‌گیریم. بنابه معادله ۱۰-۳۳، اختلاف فاز بین دو باریکه بازتابیده متوالی برابر است با

$$\delta = k\Delta \quad \text{و} \quad \Delta = 2n_f t \cos \theta_t \quad (11-18)$$

که در آن n_f ضریب شکست تخته و t ضخامت آن است. اگر پرتو را با $E_0 e^{i\omega t}$ توصیف کنیم می‌توانیم پرتوهای بازتابیده متوالی را با تغییرات مناسبی در دامنه و فاز موج اولیه، با توجه به شکل ۷-۱۱، به صورت زیر بیان کنیم

$$E_1 = (rE_0)e^{i\omega t}$$

$$E_2 = (tt' r' E_0)e^{i(\omega t - \delta)}$$

$$E_3 = (tt' r'^2 E_0)e^{i(\omega t - 2\delta)}$$

$$E_4 = (tt' r'^3 E_0)e^{i(\omega t - 3\delta)}$$

و غیره. با کمی دقت در این معادلات می‌بینیم که N امین موج بازتابیده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_N = (tt' r'^{(2N-2)} E_0) e^{i[\omega t - (N-1)\delta]} \quad (19-11)$$

که برای همه E ها به جز E_1 که از تخته عبور نمی‌کند صادق است. اکنون از برهم‌نهی این امواج می‌توان برآیند E_R را به صورت زیر به دست آورد

$$E_R = \sum_{N=1}^{\infty} E_N = r E_0 e^{i\omega t} + \sum_{N=2}^{\infty} tt' E_0 r'^{(2N-2)} e^{i[\omega t - (N-1)\delta]}$$

پس از دسته‌بندی داریم

$$E_R = E_0 e^{i\omega t} \left[r + tt' r' e^{-i\delta} \sum_{N=2}^{\infty} r'^{(2N-2)} e^{-i(N-2)\delta} \right]$$

اما جمله جمع‌زنی به صورت رشته هندسی زیر است

$$\sum_{N=2}^{\infty} x^{N-2} = 1 + x + x^2 + \dots$$

که در آن

$$x = r'^2 e^{-i\delta}$$

چون $|x| < 1$ ، این رشته به مجموع $S = 1/(1-x)$ می‌گراید. در نتیجه

$$E_R = E_0 e^{i\omega t} \left(r + \frac{tt' r' e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right)$$

اکنون با استفاده از روابط استوکس، معادله‌های ۱۶-۱۱ و ۱۷-۱۱، داریم

$$E_R = E_0 e^{i\omega t} \left[r - \frac{(1-r^2) r e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right]$$

و پس از ساده کردن به دست می آوریم

$$E_R = E_o e^{i\omega t} \left[\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right]$$

تاییدگی I_R ، مربوط به باریکه برابند، متناسب است با مجذور دامنه E_R که مختلط است، و در نتیجه باید کمیت $|E_R|^2 = E_R E_R^*$ را محاسبه کنیم:

$$|E_R|^2 = E_o^2 r^2 \left[\frac{e^{i\omega t}(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right] \left[\frac{e^{-i\omega t}(1 - e^{i\delta})}{1 - r^2 e^{i\delta}} \right]$$

پس از ضرب گروه‌ها در هم و با استفاده از اتحاد

$$2 \cos \delta \equiv (e^{i\delta} + e^{-i\delta})$$

به دست می آوریم

$$|E_R|^2 = E_o^2 r^2 \left(\frac{1 - \cos \delta}{1 + r^2 - 2r^2 \cos \delta} \right) \quad (20-11)$$

یا، بر حسب تاییدگی داریم

$$I_R = \left[\frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{1 + r^2 - 2r^2 \cos \delta} \right] I_i \quad (21-11)$$

که در آن I_i تاییدگی باریکه فرودی است و از تناسب زیر استفاده کرده‌ایم

$$\frac{I_R}{I_i} = \frac{|E_R|^2}{|E_o|^2} \quad (22-11)$$

بررسی مشابهی برای باریکه‌های عبور کرده منجر به تاییدگی برابند زیر می‌شود

$$I_T = \left[\frac{(1 - r^2)^2}{1 + r^2 - 2r^2 \cos \delta} \right] I_i \quad (23-11)$$

معادله ۲۳-۱۱ را می‌توان همچنین از ترکیب معادله ۲۱-۱۱ با رابطه $I_R + I_T = I_i$ ، که مبتنی بر پایستگی انرژی برای لایه غیرجاذب است، به دست آورد.

با توجه به معادله ۲۱-۱۱، وقتی $\cos \delta = 1$ تابیدگی بازتابیده مینیم می‌شود، یا وقتی

$$\delta = 2\pi m \quad \text{و} \quad \Delta = 2n_f t \cos \theta_t = m\lambda \quad (24-11)$$

این شرط الزاماً شرط ماکسیم عبور نیز هست. در این مورد، از معادله ۲۳-۱۱ داریم $I_T = I_i$. بررسی شکل ۷-۱۱ یا معادله‌های توصیف‌کننده باریکه‌های بازتابیده نشان می‌دهد که در مورد مینیم بازتاب، باریکه بازتابیده دوم و تمام باریکه‌های بعدی با یکدیگر همفاز هستند اما با باریکه بازتابیده اول در فاز مقابل قرار دارند. چون تابیدگی بازتابیده کل صفر است، باریکه اول با مجموع تمام باریکه‌های باقی‌مانده کاملاً خنثی می‌شود. بنابراین، اگر دامنه باریکه دوم نزدیک به دامنه باریکه اول باشد، تقریب دوباریکه‌ای به خوبی جواب می‌دهد. معادلات بالا نشان می‌دهند نسبت این دامنه‌ها برابر است با

$$\left| \frac{E_T}{E_i} \right| = \left| \frac{tt'r'E_o}{rE_o} \right| = I - r^2$$

که وقتی r^2 کوچک است به ۱ نزدیک است. برای فرود عمودی به شیشه با ضریب $n = 1.5$ داریم $r^2 = 0.04$. بنابراین، ۹۶٪ از حذف تنها بین دو باریکه بازتابیده اول روی می‌دهد، و بررسی دوباریکه‌ای کاملاً موجه است.

از طرف دیگر، ماکسیمهای بازتاب وقتی روی می‌دهند که $\cos \delta = -1$ یا

$$\delta = \pi, 3\pi, \dots = \left(m + \frac{1}{2}\right) 2\pi$$

و

$$\Delta = 2n_f t \cos \theta_t = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad (25-11)$$

در این مورد، از معادله‌های ۲۱-۱۱ و ۲۳-۱۱ به دست می‌آوریم

$$I_R = \left[\frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \right] I_i \quad (26-11)$$

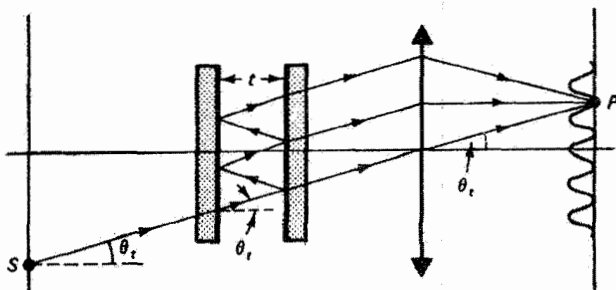
$$I_T = \left[\frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \right] I_i \quad (27-11)$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $I_R + I_T = I_i$. همچنین، از معادله ۱۱-۲۳ دیده می‌شود که شرط مینیم عبور به ازای $\cos \delta = -1$ به دست می‌آید، و در نتیجه معادله ۱۱-۲۶ واقعاً شدت بازتابیدهٔ ماکسیم را به دست می‌دهد.

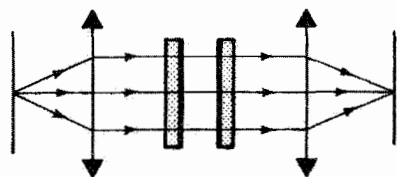
۱۱-۶ تداخل سنج فابری-پرو

از تخته موازی که برای تولید نقش تداخل از باریکه‌های چندگانهٔ نور عبوری بررسی شد در تداخل سنج فابری-پرو استفاده می‌شود. این ابزار که شاید انعطاف‌پذیرتر از همهٔ تداخل سنجها باشد، به‌عنوان مثال برای اندازه‌گیری دقیق طول موج، تحلیل ساختار خط طیفی فوق‌قرمز، تعیین ضریب شکست گازها، و مدرج‌سازی متر استاندارد برحسب طول موج به‌کار می‌رود، و با اینکه ساختار ساده‌ای دارد به‌عنوان ابزاری قوی با تفکیک زیاد برای کاربردهای بسیار متنوعی شناخته شده است.

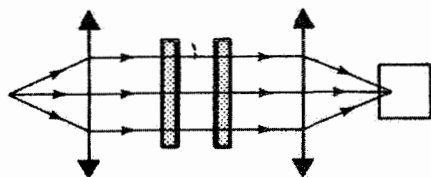
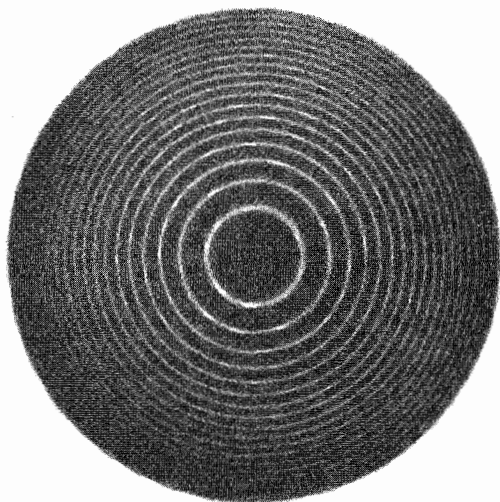
یک آرایهٔ نوعی در شکل ۱۱-۸ نشان داده شده است. از دو تختهٔ شیشه‌ای یا کوآرتزی ضخیم برای تشکیل یک "تخته هوا" موازی که در آن باریکه‌ها بازتاب چندگانه می‌یابند استفاده می‌شود. بنابراین، سطوحی که دارای اهمیت‌اند سطوح مقابل تخته‌های شیشه‌ای هستند. این سطوح را معمولاً تا همواری بهتر از $\lambda/50$ صیقلی می‌کنند و با لایهٔ بسیار بازتابنده‌ای از نقره یا آلومینیم اندود می‌کنند. لایه‌های نقره در ناحیهٔ مرئی طیف از همه مفیدتراند، اما بازتابندگی آنها در حوالی 400 nm سریعاً افت می‌کند، و از این رو برای کاربردهای کمتر از 400 nm معمولاً از آلومینیم استفاده می‌شود. البته این لایه‌ها باید به اندازهٔ کافی نازک باشند تا بتوانند قسمتی از نور را عبور دهند. ضخامت بهینه برای لایهٔ نقره‌ای حدود 50 nm است. سطوح خارجی تخته‌های شیشه‌ای را نسبت به سطوح داخلی مخصوصاً کمی زاویه می‌دهند (چند دقیقهٔ کمانی کافی است) تا نقش فریز کاذبی که از خود تختهٔ شیشه‌ای در صورت موازی بودن ناشی می‌شود حذف شود. ضخامت t مربوط به لایهٔ هوا، چنانکه خواهیم دید، یک عامل کاری مهم برای تداخل سنج است. اگر این ضخامت ثابت باشد ابزار را سنج می‌نامند.



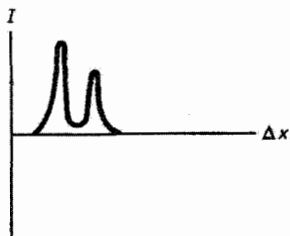
شکل ۱۱-۸ تداخل سنج فابری-پرو.



(الف)



(ب)



شکل ۹-۱۱ (الف) تداخل سنج فابری-پرو، با استفاده از چشمه گسترده و ضخامت ثابت تخته. از نقش فریز دایره‌ای، مانند آنچه نشان داده شده است، می‌توان روی پرده عکس گرفت. (ب) تداخل سنج فابری-پرو، با استفاده از چشمه نقطه‌ای و ضخامت متغیر تخته. یک آشکارساز در نقطه کانونی عدسی دوم به یک ثبات متصل شده است، و نمودار خروجی به دست آمده برای انتقال یک مرتبه از تداخل شبیه به نمودار ترسیم شده است.

باریکه چندفام کم‌عرضی ناشی از نقطه S از یک چشمه گسترده در نظر بگیرید که با محور اپتیکی دستگاه، مطابق شکل ۸-۱۱، زاویه θ_t (در هوا) می‌سازد. از این تک باریکه باریکه‌های همدوس چندگانه‌ای در تداخل سنج به‌وجود می‌آیند، و مجموعه پرتوهای موازی خروجی در نقطه P از صفحه کانونی عدسی همگرای L متمرکز می‌شود. ماهیت برهم‌نهمش در P را اختلاف راه بین باریکه‌های موازی متوالی، یعنی $\Delta = 2n_f t \cos \theta_t$ ، تعیین می‌کند. با استفاده از $n_f = 1$

برای هوا، شرط روشنایی عبارت است از

$$2t \cos \theta_t = m\lambda \quad (28-11)$$

باریکه‌های دیگر از نقاط مختلف چشمه که با نقطه S در یک صفحه واقع‌اند و با محور اپتیکی همان زاویه θ_t می‌سازند در اختلاف راه بالا صدق می‌کنند و آنها نیز به P وارد می‌شوند. با t ثابت، معادله ۲۸-۱۱ به‌ازای مقادیر مشخصی از زاویه θ_t برقرار است و دستگاه فریز همان حلقه‌های هم‌مرکز ناشی از کانونی شدن فریزهای همشیب است. وقتی یک عدسی موازی‌کننده مطابق شکل ۹-۱۱ الف بین چشمه و تداخل‌سنج گذاشته شود، هر مجموعه باریکه‌های موازی ورودی به ستجه باید از یک نقطه چشمه ناشی شود. بدین ترتیب، یک تناظر یک به یک بین نقاط چشمه و پرده وجود دارد. پرده ممکن است شبکه یا فیلم عکاسی باشد. شکل ۹-۱۱ ب آرایه دیگری را نشان می‌دهد که در آن چشمه کوچک است. در این مورد، نور موازی شده با زاویه ثابت θ_t (در شکل $\theta_t = 0$) به تخته‌ها می‌رسد و در یک آشکارساز نوری کانونی می‌شود. وقتی ضخامت t تغییر می‌کند، آشکارساز نقش تداخل را به صورت تابعی از زمان در تداخل‌نگار ثبت می‌کند. اگر نور چشمه به‌عنوان مثال شامل دو مؤلفه طول‌موج باشد، خروجی دو دستگاه یا مجموعه دوگانه‌ای از فریزهای دایره‌ای روی فیلم عکاسی است یا، چنانکه در شکل ۹-۱۱ ب نشان داده شده است، نموداری از تابیدگی برآیند I نسبت به ضخامت تخته یا زمان است.

۷-۱۱ نیمرخ فریز: تابع ایری

تغییر تابیدگی در نقش فریز فابری-پرو به‌صورت تابعی از اختلاف فاز یا اختلاف راه را نیمرخ فریز می‌نامند. البته وضوح فریزها برای توان تفکیک نهایی ابزار اهمیت دارد. تابیدگی حاصل از برآیند باریکه‌های عبور کرده قبلاً در معادله ۲۳-۱۱ به‌دست آمد و آن را دوباره می‌نویسیم:

$$I_T = \left[\frac{(1 - r^2)^2}{1 + r^2 - 2r^2 \cos \delta} \right] I_i$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$\cos \delta \equiv 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

و با کمی عملیات ساده‌سازی، تراگیسلندگی T یا تابع ایری را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$T = \frac{I_T}{I_i} = \frac{1}{1 + [4r^2/(1-r^2)^2] \sin^2(\delta/2)} \quad (29-11)$$

فابری جمله داخل کروهه را که تابعی از ضریب بازتاب است ضریب ریزی نامید:

$$F \equiv \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \quad (30-11)$$

بنابراین، معادله ۲۹-۱۱ را، که فرمول ایری برای تابیدگی عبور کرده نامیده می‌شود، می‌توان به صورت فشرده‌تر زیر نوشت

$$T = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \quad (31-11)$$

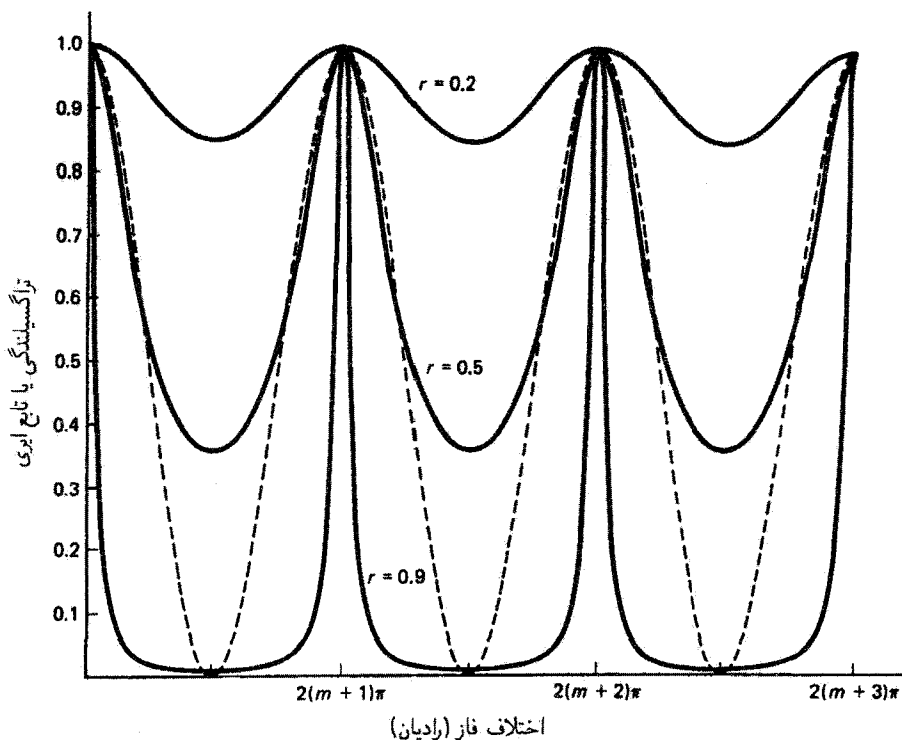
کمیت F تابع حساسی از ضریب بازتاب است، زیرا وقتی r از 0 تا 1 تغییر می‌کند F از 0 تا بینهایت تغییر می‌کند. ثابت می‌کنیم که F همچنین اندازه مشخصی از تباین فریز را که به صورت کسر زیر نوشته می‌شود نشان می‌دهد

$$\frac{(I_T)_{\max} - (I_T)_{\min}}{(I_T)_{\min}} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\min}} \quad (32-11)$$

از فرمول ایری (معادله ۳۱-۱۱) وقتی $\sin \delta/2 = 0$ داریم $T_{\max} = 1$ ، و وقتی $\sin \delta/2 = \pm 1$ داریم $T_{\min} = 1/(1+F)$ ، بنابراین،

$$\frac{1 - 1/(1+F)}{1/(1+F)} = F \quad (33-11)$$

نیمرخ فریز را می‌توان وقتی مقداری برای r انتخاب شد ترسیم کرد. نموداری از این نوع برای چند انتخاب r در شکل ۱۱-۱۰ نشان داده شده است. برای هر منحنی، در $\delta = m(2\pi)$ داریم $T = T_{\max} = 1$ ، و در $\delta = (m + 1/2)2\pi$ داریم $T = T_{\min} = 1/(1+F)$. توجه کنید که r هر چه باشد $T_{\max} = 1$ ، و علاوه براین T_{\min} هیچگاه صفر نیست بلکه وقتی r به 1 میل می‌کند به صفر نزدیک می‌شود. در مقادیر بزرگتر r وقتی اختلاف فاز به مضارب درست 2π نزدیک می‌شود تراگیسلندگی قلّه تیزی پیدا می‌کند، در حالی که در بیشتر ناحیه بین فریزها نزدیک صفر

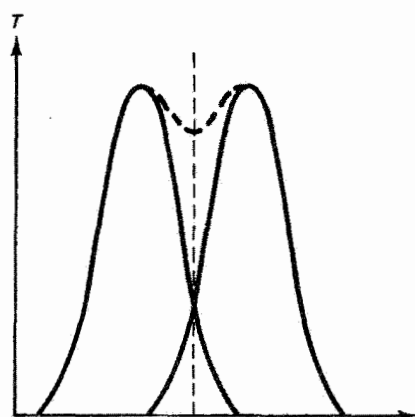


شکل ۱۱-۱۰ نیمرخ فریز فابری-پرو. نموداری از تراکسیلندگی یا تابع ایری نسبت به اختلاف فاز برای مقادیر انتخابی ضریب بازتاب. خط چینها فریزهای قابل مقایسه‌ای از تداخل سنج مایکلسون را نمایش می‌دهند.

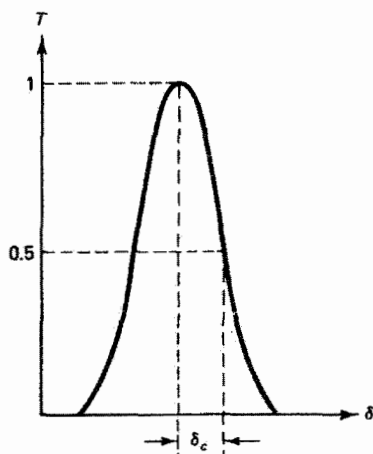
باقی می‌ماند. وقتی τ باز هم افزایش می‌یابد و به‌عنوان مثال به مقدار قابل حصول 0.97° می‌رسد F' به مقدار 10.78° افزایش می‌یابد و پهنای فریز کمتر از یک سوم مقدار آن در نیم‌ماکسیمم به‌ازای $0.9^\circ = \tau$ می‌شود. تیزی این فریزها را باید با فریزهای بهتر تداخل سنج مایکلسون، که بستگی ساده $\cos^2(\delta/2)$ به فاز دارند (معادله ۱۱-۲)، مقایسه کرد. در شکل ۱۱-۱۰ این فریزها، که به مقدار ماکسیمم یکسانی بهنجار شده‌اند، با خط چین نشان داده شده‌اند.

۱۱-۸ توان تفکیک

وقتی نور فرودی شامل دو مؤلفه طول‌موج باشد، تداخل سنج فابری-پرو دو مجموعه از فریزهای دایره‌ای ایجاد می‌کند، به طوری که هر مجموعه متعلق به یک طول‌موج است. آشکارسازی که پهنای دو حلقه نزدیک به هم را در یک مرتبه به‌خصوص m از تداخل طی می‌کند نموداری شبیه به



(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۱۱ (الف) روبش دو مؤلفه طول موج با شدت قابل مقایسه در نقش فریز فابری-پرو. (ب) کاربرد معیار تفکیک. نیم‌پهنای قله در نیم‌ماکسیم با بازه فاز δ_c متناظر است.

نمودار شکل ۱۱-۱۱ ب به دست می‌دهد. نمودار مربوط به دو طول موج با تابیدگی قابل مقایسه در شکل ۱۱-۱۱ الف نشان داده شده است. با اینکه دو قله جدا از هم ترسیم شده‌اند تنها مجموع آنها که بر خط چین بین قله‌ها منطبق است اندازه‌گیری می‌شود. واضح است که اگر طول موجها به هم نزدیک باشند فریزها نیز به هم نزدیک‌اند و نمی‌توان دو قله جدا از هم را در تابیدگی اندازه‌گیری شده از هم تمیز داد. فاصله طول موج مینیم $(\Delta\lambda)_{\min}$ که ابزار می‌تواند تفکیک کند بستگی به قابلیت آشکارسازی دره بین قله‌ها در نقش اندازه‌گیری شده دارد. مطابق یک معیار تفکیک منسوب به ریلی، دره ناشی از دو قله یکسان نمی‌تواند کمتر از 20% تابیدگی ماکسیم باشد. معیار ریلی را، که برای نیمرخ تصاویر پراش با ماکسیمهای ثانوی (فصل ۱۶) به‌کار می‌رود، نمی‌توان در اینجا دقیقاً به‌کار برد. برای منظور ما کافی است تقریبی از این معیار را با تحمیل این شرط به دست آوریم که نقطه تلاقی بالاتر از نصف تابیدگی ماکسیم هر قله نباشد. بازه فاز δ_c (شکل ۱۱-۱۱ ب) برای فریز بین مقادیر ماکسیم و نیم‌ماکسیم T را می‌توان از حل معادله ۱۱-۳۱ برای $\sin \delta_c / 2$ به دست آورد:

$$\sin \frac{\delta_c}{2} = \frac{1}{\sqrt{F}}$$

چون δ_c کوچک است، داریم

$$\delta_c \cong \frac{2}{\sqrt{F}} \quad (34-11)$$

اختلاف فاز بین دو ماکسیمم فریز دو برابر این مقدار است:

$$(\Delta\delta)_{\min} = \frac{4}{\sqrt{F}} \quad (35-11)$$

اختلاف طول موج تفکیک پذیر متناظر را می توان به روش زیر به دست آورد. بنا به معادله ۱۱-۱۸، اختلاف فاز برابر است با

$$\delta = 4\pi t \cos\theta_t \left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

برای بازه های کوچک طول موج، بزرگی $\Delta\delta$ با رابطه زیر داده می شود

$$\Delta\delta = (4\pi t \cos\theta_t) \Delta \left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(\frac{4\pi t \cos\theta_t}{\lambda^2}\right) \Delta\lambda$$

از ترکیب با معادله ۱۱-۳۵ به دست می آوریم

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\lambda^2}{\pi\sqrt{F}t \cos\theta_t}$$

چون در ماکسیممهای فریز داریم

$$2t \cos\theta_t = m\lambda \quad (36-11)$$

می توانیم به صورت ساده تری بنویسیم

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{2\lambda}{m\pi\sqrt{F}} \quad (37-11)$$

در اینجا λ را می توان هر یک از دو طول موج یا متوسط آنها گرفت، زیرا مقادیر آنها به هم نزدیک اند. توان تفکیک \mathcal{R} را به طور کلی به صورت زیر تعریف می کنند

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} \quad (38-11)$$

اگر معادله ۱۱-۳۸ را برای تداخل سنج فابری-پرو به کار ببریم به دست می آوریم

$$\mathcal{R} = \left(\frac{\pi}{2}\right) m\sqrt{F} \quad (۳۹-۱۱)$$

بدیهی است که توان تفکیک هر چه بزرگتر باشد بهتر است. برای تداخل سنج فابری-پرو، می بینیم که توان تفکیک وقتی بزرگ است که مرتبه بزرگ باشد، یعنی نزدیک مرکز نقش فریز، و ضرایب ریزی بزرگ باشند، که به بازتابندگی زیاد مربوط اند. توجه کنید که برای ماکسیمم کردن m در مرکز نقش، معادله ۱۱-۳۶ لازم می کند که ضخامت تیغه t تا حد امکان بزرگ باشد، و در نتیجه

$$m_{\max} = \frac{2t}{\lambda} \quad (۴۰-۱۱)$$

مثال

در یک تداخل سنج فابری-پرو، ضخامت لایه تخت هوا ۱ cm است و ضریب بازتاب $r = 0.95$ برای طول موجی حدود 500 nm ، مرتبه ماکسیمم تداخل، ضریب ریزی، بازه طول موج تفکیک پذیر مینیمم، و توان تفکیک آن را به دست آورید.

حل: با استفاده از معادله ۱۱-۳۰ و معادله های ۱۱-۳۷ تا ۱۱-۴۰ داریم

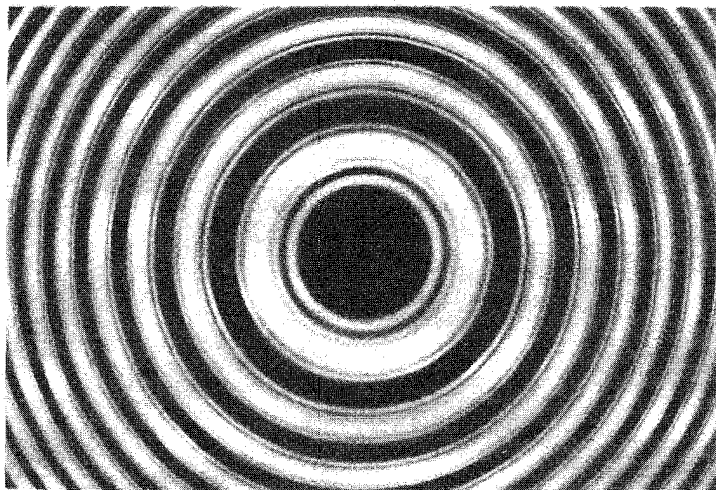
$$m_{\max} = \frac{2t}{\lambda} = \frac{2(1 \times 10^{-2})}{500 \times 10^{-9}} = 40000$$

$$F = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} = \frac{4(0.95)^2}{(1-0.95^2)^2} = 380$$

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{2\lambda}{m\pi\sqrt{F}} = \frac{2(5000 \text{ \AA})}{(40000)\pi(\sqrt{380})} = 0.004 \text{ \AA}$$

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = \frac{5000}{0.004} = 1.2 \times 10^6$$

تداخل سنجهای فابری-پرو خوب باید توان تفکیکی حدود یک میلیون داشته باشند، و با توانهای حدود ۲۰ میلیون نیز ساخته شده اند. این توان تفکیک کارکردی یک تا دو مرتبه بهتر از ابزارهای منشوری و توری قابل مقایسه را نشان می دهد. نتیجه تفکیک زیاد ابزار فابری-پرو در عکسی از نقش حلقه ای خط سبز جیوه با ساختار ریز آن در شکل ۱۱-۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۱-۱۲ حلقه‌های فابری-پرو ناشی از خط سبز جیوه با نمایشی از ساختار ریز.

۱۱-۹ گستره طیفی آزاد

مجموعه‌های مختلف فریزهای دایره‌ای، در حالی که هر مؤلفه طول موج مجموعه خاص خود را تولید می‌کند، در نقش تداخل فابری-پرو همزمان ظاهر می‌شوند. اگر وسیله‌ای برای محدود کردن گستره طول موجهایی که این تداخل سنج تحلیل می‌کند در دست نباشد تعبیر این نقش پیچیده می‌شود. برای مثال، دو طول موج λ_1 و $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ را در نظر بگیرید. به ازای مقادیر کوچک $\Delta\lambda$ ، دو مجموعه فریزهای دایره‌ای در هر مرتبه تداخل نزدیک به هم هستند. اما وقتی $\Delta\lambda$ افزایش می‌یابد فریزها از هم جدا می‌شوند. وقتی این جدایی با فاصله بین مرتبه‌های متوالی مساوی می‌شود مرتبه‌ها مغشوش می‌شوند. فرض کنید اختلاف طول موج $\Delta\lambda$ را طوری بگیریم که مرتبه m ام λ_2 روی مرتبه $(m+1)$ ام λ_1 بیفتد. این اختلاف را گستره طیفی آزاد تداخل سنج می‌نامند. چون با توجه به معادله ۱۱-۳۶ به ازای هر t و θ ی یکسان حاصل ضرب m و λ ثابت است، می‌توان نوشت

$$m\lambda_2 = (m+1)\lambda_1$$

بنابراین، با $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ داریم

$$(\Delta\lambda)_{fsr} = \frac{\lambda_1}{m} \quad (۱۱-۴۱)$$

گستره طیفی آزاد عبارت است از تغییر لازم در λ_1 برای انتقال نقش فریز دایره‌ای آن به اندازه فاصله مرتبه‌های متوالی. با استفاده از معادله ۱۱-۳۶ به ازای $\cos \theta_z = 1$ نزدیک مرکز نقش فریز که در آنجا تفکیک از همه بهتر است، همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$(\Delta\lambda)_{fsr} \cong \frac{\lambda^2}{2t} \quad (42-11)$$

در نتیجه، برای اجتناب از وابسته کردن فریزهای یک مرتبه به مرتبه بعدی، باید داشته باشیم

$$\Delta\lambda < \frac{(\Delta\lambda)_{fsr}}{2}$$

توجه کنید که اگر مرتبه m بزرگ باشد برای گستره طیفی آزاد بزرگ بنا به معادله ۱۱-۴۱ مضر است در حالی که برای تفکیک خوب بنا به معادله ۱۱-۳۷ مفید است. به عنوان مثال، در مثال عددی تفکیک زیاد قبل، گستره طیفی آزاد تنها 125\AA است. باید کمیت زیر را ماکسیم کنیم

$$\frac{(\Delta\lambda)_{fsr}}{(\Delta\lambda)_{\min}} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \quad (43-11)$$

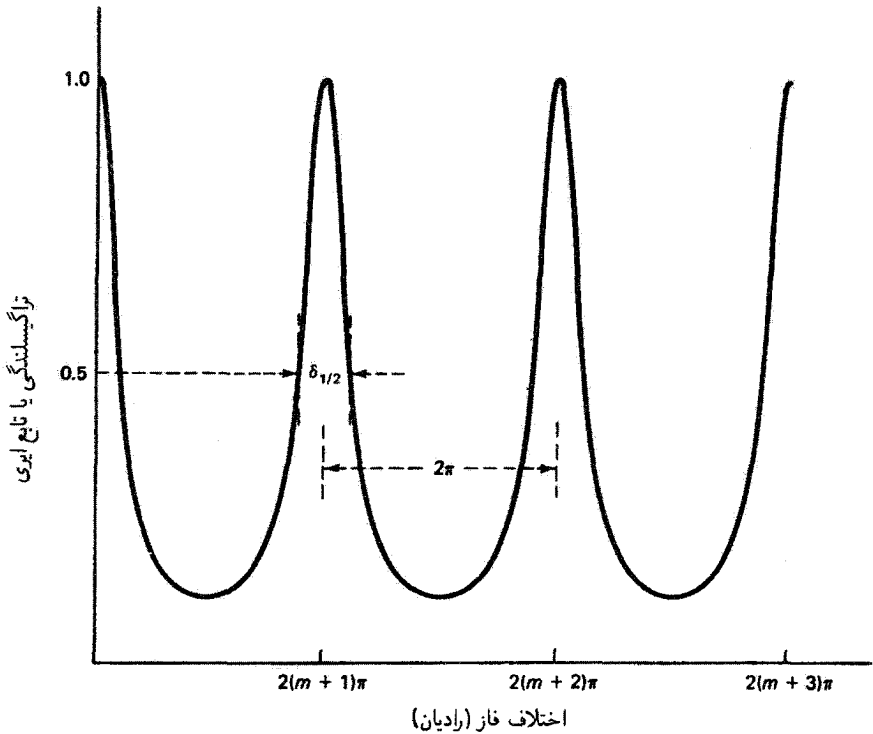
بدین ترتیب، کسر معادله ۱۱-۴۳ بیانگر ارزش تداخل سنج فابری-پرواست و ریزی \mathcal{F} نامیده می‌شود که بستگی به ضریب ریزی F دارد و نباید این دو را با هم اشتباه کرد. ریزی معمولاً به صورت نسبت فاصله ماکسیمهای مجاور به نیم‌پهنای فریزهای انفرادی، چنانکه در شکل ۱۱-۱۳ نشان داده شده است، تعریف می‌شود. اکنون هم‌ارزی این تعریف و تعریف مربوط به معادله ۱۱-۴۳ را نشان می‌دهیم. اختلاف فاز بین فریزها 2π است. پهنای فاز یک فریز در تابیدگی نیم‌ماکسیم آن دو برابر δ_c در معادله ۱۱-۳۴ است:

$$\delta_{1/2} = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

بنابراین،

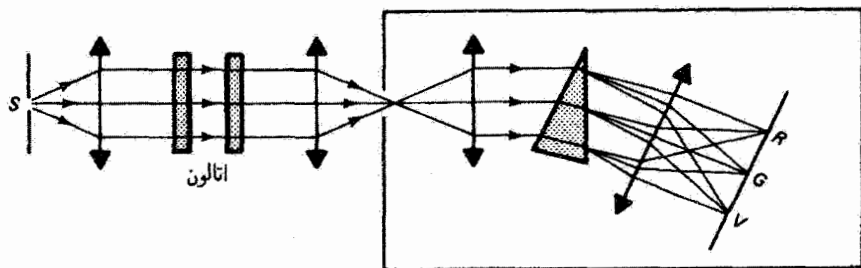
$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{(4/\sqrt{F})} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \quad (44-11)$$

نتیجه می‌گیریم که بزرگترین ریزی تداخل سنج بهترین سازش بین تفکیک و گستره طیفی آزاد مطلوب را نشان می‌دهد.

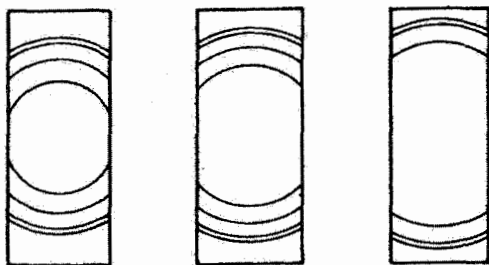


شکل ۱۱-۱۳ ریزی \mathcal{E} عبارت است از نسبت فاصله ماکسیمهای فریزهای مجاور به پهنای تک تک آنها در نیم ماکسیم.

از چندین راه می‌توان محدودیتهای این سازش را رفع کرد. یک راه عبارت است از استفاده همزمان از دو سنجه که یکی دارای تفکیک زیاد و دیگری دارای گستره طیفی آزاد بزرگ باشد. از این راه، معلوم می‌شود که می‌توان این دو توانایی را با هم ترکیب کرد. راه حل دیگر، چنانکه در شکل ۱۱-۱۴ الف نشان داده شده است، گذاشتن یک طیف‌نگار بعد از سنجه است. فرض کنید چشمه نور دارای چندین مؤلفه طیفی کاملاً مجزا است که هر یک از آنها ساختار مفصل خود را دارد. نقشهای فریز دایره‌ای مربوط به سنجه تنها برهم‌نهی اشتباه‌انگیزی از فریزهای ناشی از هر یک از طول‌موجهای مؤلف خواهد بود. اگر شکاف طیف‌نگار، که پهنای آن نسبتاً زیاد است، در برابر نوار عریضی در مرکز نقش فریز دایره‌ای قرار داشته باشد، منشور جداسازی فضایی خاص خود را روی طول‌موجها انجام می‌دهد. بدین ترتیب، هر بازه طول‌موج به صورت تصویر گسترده‌ای از شکاف اما با نقشهای فریز مربوط به هر طول‌موج و مؤلفه‌های ساختار ریز آن، مطابق شکل ۱۱-۱۴ ب، ظاهر می‌شود.



(الف)



سرخ

سبز

بنفش

(ب)

شکل ۱۱-۱۴ (الف) استفاده از سنجۀ فابری-پرو همراه با طیف‌نگار منشوری. (ب) خطوط طیفی فریز شده ناشی از دستگاه قسمت (الف).

مسائل

۱۱-۱ اگر یکی از آینه‌های تداخل‌سنج مایکلسون را به اندازه 114 cm و 0° جابه‌جا کنیم دیده می‌شود که ۵۲۳ فریز از تارهای قائم در تلسکوپ مشاهده می‌گذرند. طول موج نور را محاسبه کنید.

۱۱-۲ وقتی از یک تداخل‌سنج مایکلسون که نور 546 nm نانومتری جیوه به آن می‌تابد نگاه می‌کنیم رشته‌ای از فریزهای راست‌خط به تعداد ۱۲ در سانتیمتر را می‌بینیم. تشکیل این فریزها را توضیح دهید.

۱۱-۳ ورقۀ نازکی از فلئوئوریت با ضریب 1.434 در یک بازوی تداخل‌سنج مایکلسون به‌طور عمودی گذاشته شده است. با استفاده از نوری به طول موج 589 nm ، انتقال ۳۵ فریز در نقش فریز دیده می‌شود. ضخامت ورقه را به دست آورید.

۴-۱۱ از یک تداخل سنج مایکلسون که نگاه می‌کنیم قرص مرکزی تاریکی را می‌بینیم که با حلقه‌های روشن و تاریک هم‌مرکز احاطه شده است. یک بازوی این ابزار 2 cm درازتر از دیگری است، و طول موج نور 500 nm است.

(الف) مرتبه قرص مرکزی و

(ب) مرتبه ششمین حلقه تاریک را تعیین کنید.

۵-۱۱ برای اندازه‌گیری ضریب شکست یک گاز از تداخل سنج مایکلسون استفاده می‌کنیم. گاز را به درون یک سلول شیشه‌ای تخلیه شده به طول L واقع در یک بازوی تداخل سنج می‌فرستیم. طول موج λ است.

(الف) وقتی فشار داخل سلول از خلا به فشار جو می‌رسد N فریز شمارش می‌شود. ضریب شکست n را بر حسب N ، λ و L به دست آورید.

(ب) اگر گاز مورد نظر دی‌اکسید کربن ($n = 1.00045$) باشد، با استفاده از سلولی به طول 10 cm و نور سدیم در 589 nm ، چند فریز شمارش می‌شود؟

۶-۱۱ از یک تداخل سنج مایکلسون که برای اختلاف راه $20\text{ }\mu\text{m}$ تنظیم شده است با نور سرخ به طول موج 632.8 nm استفاده می‌شود.

(الف) شعاع اولین حلقه مشاهده شده (کوچکترین قطر) و

(ب) شعاع دهمین حلقه مشاهده شده را به دست آورید.

۷-۱۱ یک سطح صیقلی شده را با قرار دادن آن به جای یکی از آینه‌های تداخل سنج مایکلسون امتحان می‌کنیم. نقش فریز مشخص‌کننده پربند سطح را با استفاده از نور لیزر He-Ne به طول موج 632.8 nm می‌بینیم. معلوم می‌شود که واپیچش فریز در سطح کمتر از $1/4$ جدایی فریز در هر نقطه است. عمق ماکسیم نقایص صیقلی روی سطح را تعیین کنید.

۸-۱۱ باریکه نور ناشی از یک لیزر 1 میلی‌واتی He-Ne (632.8 nm) با زاویه 45° به یک لایه موازی فرود می‌آید. قطر باریکه را 1 mm و ضریب شکست لایه را 1.414 بگیرید. کمیتهای زیر را تعیین کنید:

(الف) دامنه بردار E ی باریکه فرودی،

(ب) زاویه شکست باریکه لیزری در لایه،

(ج) مقادیر r' و tt' ، با استفاده از روابط استوکس و ضریب بازتاب $r = 0.28$ ،

(د) دامنه‌های مستقل سه باریکه بازتابیده اول، و با مقایسه با باریکه فرودی، درصد چگالی

توان تابشی هر باریکه،

(ه) کمیت‌های قسمت (د) برای دو باریکه عبور کرده اول، و
 (و) ضخامت مینیمم لایه که نتیجه آن عبارت است از حذف کامل باریکه‌های بازتابیده وقتی
 با عدسی در یک نقطه جمع می‌شوند.

۹-۱۱ (الف) با استفاده از معادله $۱۰-۲۵$ نشان دهید دامنه‌های سه باریکه بازتابیده اول و سه
 باریکه عبور کرده اول از یک تخته شیشه‌ای غیرجاذب موازی ($n = ۱.۵۲$)، وقتی باریکه فرودی
 نزدیک به عمود و با دامنه واحد است، عبارت‌اند از

	(۱)	(۲)	(۳)
بازتابیده	۰.۲۰۶	۰.۱۹۸	۰.۰۰۸۴
عبور کرده	۰.۹۵۷	۰.۰۴۱	۰.۰۰۱۷

(ب) با توجه به نتایج بالا نشان دهید دو پرتو بازتابیده اول مرئیت یا تباین فریزی برابر با ۰.۹۹۹ ر
 به وجود می‌آورند اما برای دو پرتو عبور کرده اول تباین فریز تنها ۰.۸۵ است.

۱۰-۱۱ ضریب بازتابندگی r برای تخته‌های یک تداخل‌سنج فابری-پرو ۰.۹۹ است. کمترین مقدار
 (الف) توان تفکیک و

(ب) جدایی تخته‌ها را که باعث تفکیک دو مؤلفه دوتایی H -آلفای طیف هیدروژن، با جدایی
 ۰.۱۳۶۰ \AA در ۰.۶۵۶۳ \AA می‌شوند محاسبه کنید.

۱۱-۱۱ می‌خواهیم از تداخل‌سنج فابری-پرو برای تفکیک ساختار مد یک لیزر He-Ne که در
 ۶۳۲.۸ nm کار می‌کند استفاده کنیم. جدایی بسامد بین مدها ۱۵۰ MHz است. تخته‌ها با لایه‌ای
 از هوا از هم جدا شده‌اند و بازتابندگی (r^2) آنها ۰.۹۹۹ است.

(الف) ضریب ریزی ابزار را به دست آورید.

(ب) تفکیک لازم را تعیین کنید.

(ج) لایه هوا چه ضخامتی باید داشته باشد؟

(د) گستره طیفی آزاد ابزار را تحت این شرایط محاسبه کنید.

(ه) بازه طول موج تفکیک‌پذیر مینیمم را تحت این شرایط به دست آورید.

۱۲-۱۱ یک سنجه فابری-پرو از یک تک تخته از ماده شفاف با ضریب شکست زیاد ($n = ۴.۵$)
 و ضخامت ۲ cm ساخته شده است. بازتابندگی r^2 برای سطوح ناندوده این تخته ۰.۹۰ است.
 اگر از این سنجه در نزدیکی طول موج ۵۴۶ nm استفاده شود،

(الف) بیشترین مرتبه فریز در نقش تداخل،

(ب) نسبت T_{\max}/T_{\min} ، و

(ج) توان تفکیک را به دست آورید.

۱۱-۱۳ جدایی یک دوتایی معین 55 nm و 50 nm در طول موج 490 nm است. از یک تداخل‌سنج فابری-پرو با فاصله قابل تغییر تخته‌ها برای امتحان این دوتایی استفاده می‌کنیم. به‌ازای چه فاصله‌ای مرتبه m ام یکی از مؤلفه‌ها بر مرتبه $(m+1)$ ام مؤلفه دیگر منطبق می‌شود؟

۱۱-۱۴ بازتابندگی r^2 برای یک تداخل‌سنج فابری-پرو 60% است. نسبت تراگسیلندگی این سنجه در ماکسیمم به تراگسیلندگی در نقطه وسط ماکسیممها را به دست آورید.

۱۱-۱۵ نور سفید را از تداخل‌سنج فابری-پرو در آرایه شکل ۱۱-۹ که در آن آشکارساز یک طیف‌نما است عبور می‌دهیم. یک رشته نوارهای روشن ظاهر می‌شوند. اگر نور جیوه را همزمان به شکاف طیف‌نما بتابانیم می‌بینیم 15° نوار روشن بین خطوط بنفش و سبز جیوه، به‌ترتیب در 435.8 nm و 546.1 nm واقع می‌شوند. ضخامت سنجه را تعیین کنید.

۱۱-۱۶ استدلال مربوط به محاسبه ریزی تداخل‌سنج فابری-پرو را برای تداخل‌سنج مایکلسون به‌کار ببرید: با استفاده از تابیدگی فریزهای مایکلسون به‌صورت تابعی از فاز،

(الف) جدایی فریزها،

(ب) پهنای فریز در نیم‌ماکسیمم، و

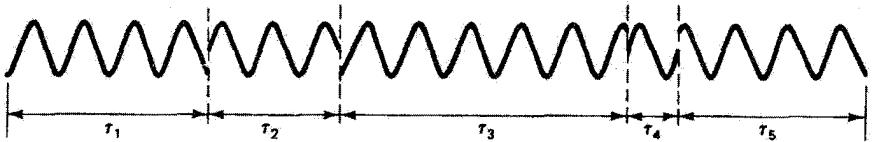
(ج) نسبت آنها، ریزی، را محاسبه کنید.

۱۱-۱۷ فرض کنید در یک تداخل‌سنج ماخ-زندر (شکل ۱۱-۵) تقسیمگر باریکه و آینه M^3 هر یک 80% نور فرودی را عبور و 20% را بازتاب می‌دهند. تباین فریز مربوط به تداخل دو باریکه خروجی (نشان داده شده) را با تباین فریز ناشی از دو باریکه خروجی از M^3 در راستای 90° نسبت به باریکه‌های اول (نشان داده نشده) مقایسه کنید. در مورد دوم، در آینه M^3 باریکه (۱) بازتابیده می‌شود و باریکه (۲) عبور می‌کند.

مراجع

- [1] Hariharan, P. *Optical Interferometry*. Orlando, Fla.: Academic Press, 1985.
- [2] Connes, Pierre. "How Light Is Analyzed." *Scientific American* (Sept. 1968): 72.
- [3] Smith, F. Dow. "How Images Are Formed." *Scientific American* (Sept. 1968): 96.
- [4] Francon, Maurice. *Optical Interferometry*. New York: Academic Press, 1966.
- [5] Tolansky, Samuel. *An Introduction to Interferometry*. New York: John Wiley and Sons, 1973.

- [6] Hernandez, G. *Fabry-Perot Interferometers*. New York: Cambridge University Press, 1986.
- [7] James, J. F., and R. S. Sternberg. *The Design of Optical Spectrometers*. London: Chapman and Hall Ltd., 1969. Ch. 7.
- [8] Robinson, Glen M., David M. Perry, and Richard W. Peterson. "Optical Interferometry of Surfaces." *Scientific American* (July 1991): 66.
- [9] Reynolds, George O., John B. DeVelis, George B. Parrent, Jr., and Brian J. Thompson. *Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics*. Bellingham, Wash.: SPIE Optical Engineering Press, 1989. Ch. 22-24.



۱۲

همدوسی

مقدمه

واژه همدوسی برای توصیف همبستگی بین فازهای تابشهای تکفام به کار برده می شود. باریکه های با روابط فاز کاتوره ای در حالت کلی باریکه های ناهمدوس هستند، در حالی که باریکه های با رابطه فاز ثابت باریکه های همدوس هستند. شرط لازم همدوسی بین باریکه های تداخل کننده نور، برای اینکه نقشهای فریز قابل مشاهده تولید کنند، در فصل ۱۰ در ارتباط با سازوکارهای تداخل بیان شد. همچنین، درباره رابطه بین همدوسی و تابیدگی کل باریکه های تداخل کننده در فصل ۹ بحث کردیم. در آنجا به این نتیجه رسیدیم که در برهم نهش باریکه های همدوس همفاز دامنه های انفرادی با هم جمع می شوند، در حالی که در برهم نهش باریکه های ناهمدوس تک تک تابیدگیها با هم جمع می شوند. در این فصل، خاصیت همدوسی را با تفصیل بیشتری بررسی می کنیم، و بین همدوسی طولی که مربوط به خلوص طیفی چشمه است و همدوسی فضایی یا عرضی که مربوط به اندازه چشمه است تمایز قائل می شویم. همچنین یک اندازه کمی از همدوسی جزئی توصیف می کنیم که اکثر اندازه گیریهای تجربی تداخل مطابق آن صورت می گیرند. بررسی خود را با بحث کوتاهی از آنالیز فوریه که در این فصل به کار می آید شروع می کنیم.

۱-۱۲ آنالیز فوریه

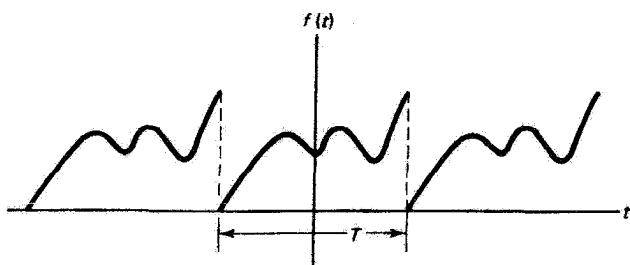
وقتی چندین موج هماهنگ با یک بسامد با هم جمع می‌شوند، حتی اگر دارای دامنه و فازهای مختلف باشند، نتیجه چنانکه در فصل ۹ نشان داده شد باز هم یک موج هماهنگ با همان بسامد است. اگر امواج برهم‌نهاد از لحاظ بسامد با هم متفاوت باشند نتیجه دوره‌ای اما ناهماهنگ است و می‌تواند هر شکلی مانند آنچه در شکل ۱-۱۲ نشان داده شده است داشته باشد. شکلهای متنوع متعددی را می‌توان از این طریق به دست آورد. فرایند وارون یعنی تجزیه یک صورت موج معین به مؤلفه‌های هماهنگ آن را آنالیز فوریه می‌نامند.

تجزیه موفق یک صورت موج به رشته‌ای از امواج هماهنگ را قضیه دیریکله تضمین می‌کند: اگر $f(t)$ تابع کرانداری با دوره T باشد که حداکثر دارای تعداد محدودی ماکسیمم و مینیمم و یا ناپیوستگی در یک دوره است، آنگاه رشته فوریه

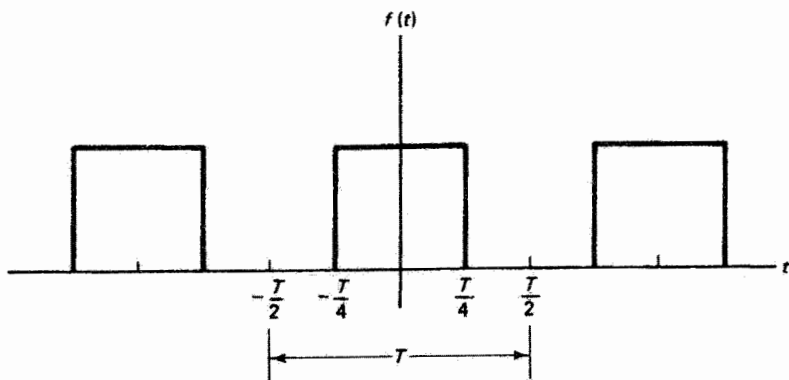
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega t + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\omega t \quad (1-12)$$

در تمام نقاطی که $f(t)$ پیوسته است به $f(t)$ و در هر نقطه‌ای که $f(t)$ ناپیوسته است به میانگین حدهای چپ و راست $f(t)$ در آن نقطه می‌گراید.

در معادله ۱-۱۲، m مقادیر درست می‌گیرد و $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ که در آن T دوره تابع اختیاری $f(t)$ است. جمله‌های سینوس و کسینوس را می‌توان به عنوان امواج هماهنگ با بسامد $m\omega$ و به ترتیب با دامنه‌های a_m و b_m تعبیر کرد. بزرگی این ضرایب یا دامنه‌ها تعیین‌کننده سهم هر یک از امواج هماهنگ در صورت موج ناهماهنگ برآیند است. اگر معادله ۱-۱۲ را در dt ضرب کنیم و روی یک دوره T انتگرال بگیریم، انتگرالهای سینوس و کسینوس صفر می‌شوند و نتیجه



شکل ۱-۱۲ تابع ناهماهنگ زمانی با دوره T .



شکل ۲-۱۲ موج مربعی.

عبارت است از

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (2-12)$$

اما اگر معادله ۱-۱۲ را در $\cos n\omega t dt$ ضرب کنیم که در آن n یک عدد درست است و سپس روی یک دوره انتگرال بگیریم انتگرالهای شامل ضرایب a_0 و b_m صفر می‌شوند، و به دست می‌آوریم

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos m\omega t dt \quad (3-12)$$

به همین ترتیب، از ضرب معادله ۱-۱۲ و با انتگرال‌گیری داریم

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin m\omega t dt \quad (4-12)$$

بنابراین، اگر $f(t)$ معلوم باشد می‌توان هر یک از ضرایب a_0 ، a_m و b_m را محاسبه کرد، و تحلیل کامل می‌شود.

به عنوان مثال، رشته فوریه موج مربعی متقارن شکل ۲-۱۲ را که با تابع زیر توصیف می‌شود

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t < -T/4 \\ 1, & -T/4 < t < T/4 \\ 0, & T/4 < t < T/2 \end{cases}$$

چون این تابع برحسب t زوج است، ضرایب b_m صفر می شوند و تنها جمله های کسینوس (که اینها نیز توابع زوجی از t هستند) باقی می ماند. از معادله های ۲-۱۲ و ۳-۱۲ داریم

$$a_0 = 1$$

$$a_m = \left(\frac{2}{m\pi} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right)$$

و در نتیجه رشته فوریه ای که به موج مربعی شکل ۲-۱۲ می گراید عبارت است از

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{m\pi} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \right] \cos m\omega t$$

چند جمله اول را صریحاً می نویسیم:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

در عمل، هر چه تعداد جمله های بیشتری را در نظر بگیریم نتیجه به $f(t)$ نزدیکتر می شود. توجه کنید که سهم هر جمله نسبت به جمله قبل کاهش می یابد زیرا دامنه آن کم می شود. بدین ترتیب، تعدادی متناهی از جمله ها می توانند تابع را نسبتاً خوب نمایش بدهند. هر چه همگرایی رشته سریعتر باشد به تعداد کمتری جمله برای تطبیق کافی احتیاج داریم. همچنین توجه کنید که بعضی دامنه ها ممکن است منفی باشند، یعنی برای تحقق همگرایی باید بعضی امواج هماهنگ را از جمع کم کنیم. واضح است که برای نمایش ویژگیهای ظریف $f(t)$ ، مانند گوشه های موج مربعی، باید امواجی با بسامد بزرگتر یا مؤلفه هایی با طول موج کوچکتر را دخالت دهیم. بنابراین، اگر پهنای موجهای مربعی را به صفر برسانیم، و در نتیجه هر مربع به میله تبدیل شود، باید سهم بیشتری را از مؤلفه های پربسامد برای ساخت مناسب تابع در نظر داشته باشیم.

با استفاده از معادلهٔ اولر می‌توان رشتهٔ فوریه را، که به‌طور کلی با معادلهٔ ۱-۱۲ داده می‌شود و شامل جمله‌های سینوس و کسینوس است، با نمادنگاری مختلط برحسب توابع نمایی بیان کرد. نتیجه به‌صورت زیر است

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\omega t} \quad (۵-۱۲)$$

که در آن ضرایب بسط عبارت‌اند از

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{in\omega t} dt \quad (۶-۱۲)$$

در مواردی که بخواهیم یک تابع نادره‌ای را نمایش دهیم آن را از لحاظ ریاضی یک تابع دوره‌ای که دورهٔ T آن به بینهایت میل می‌کند تعبیر می‌کنیم و رشتهٔ فوریه را به انتگرال فوریه تغییر می‌دهیم. برای مثال، یک تب منفرد تابعی نادره‌ای است که می‌توان آن را تابعی دوره‌ای با دوره‌ای که از $t = -\infty$ تا $t = +\infty$ گسترده است تعبیر کرد. می‌توان نشان داد که رشتهٔ فوریهٔ گسسته اکنون به‌صورت انتگرال زیر در می‌آید

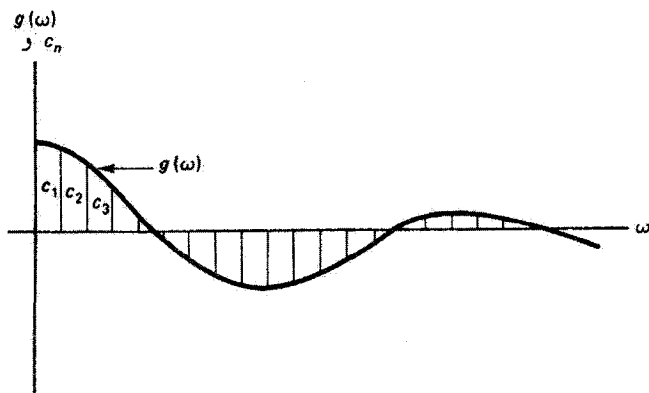
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (۷-۱۲)$$

که در آن ضریب $g(\omega)$ عبارت است از

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (۸-۱۲)$$

انتگرال فوریهٔ ۷-۱۲ و معادلهٔ ۸-۱۲ برای ضریب وابسته به آن دارای نوعی تقارن ریاضی هستند و آنها را یک جفت تبدیل فوریه می‌نامند. به جای طیف گسستهٔ بسامدها که با معادلهٔ ۶-۱۲ مربوط به رشتهٔ فوریه داده می‌شود، در اینجا یک طیف پیوسته داریم که با معادلهٔ ۸-۱۲ تعیین می‌شود. در شکل ۳-۱۲ یک مجموعهٔ گسسته از ضرایبی که ممکن است از معادلهٔ ۶-۱۲ به‌دست آیند همراه با توزیع پیوسته‌ای که تقریبی از این ضرایب است و ممکن است از معادلهٔ ۸-۱۲ به‌دست آید نشان داده شده‌اند.

باید متذکر شویم که اگر تابعی را که می‌خواهیم نمایش دهیم تابعی از مختصهٔ فضایی x با دوره‌ای مانند L باشد و نه از زمان t با دورهٔ T ، باید در معادله‌های ۱-۱۲ تا ۸-۱۲ به جای T



شکل ۳-۱۲ ضرایب فوریه مربوط به یک تابع دوره‌ای مؤلفه‌های هماهنگ گسسته را با دامنه c_n در بسامد ω_n تعیین می‌کنند. اما تبدیل فوریه مربوط به یک تابع نادره‌ای منجر به طیف بسامد پیوسته $g(\omega)$ می‌شود.

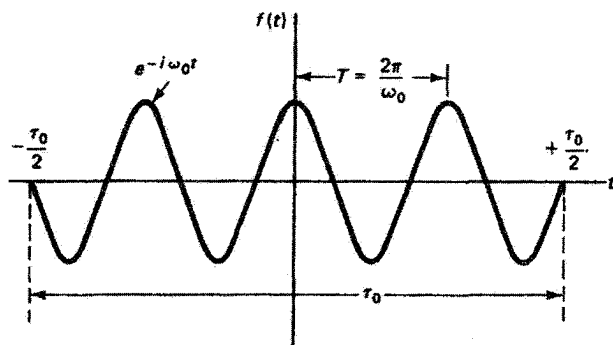
دوره فضایی L و به جای بسامد زمانی $\omega = 2\pi/T$ بسامد فضایی $k = 2\pi/L$ را قرار دهیم. به‌عنوان مثال، تبدیلات فوریه ۷-۱۲ و ۸-۱۲ به‌صورت زیر در می‌آیند

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-ikx} dk \quad (9-12)$$

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (10-12)$$

۲-۱۲ آنالیز فوریه قطار موج هماهنگ منتهای

تجزیه طیفی یک موج سینوسی بینهایت دراز فوق‌العاده ساده است: این تجزیه شامل تنها یک جمله از رشته فوریه است، یعنی جمله مربوط به بسامد واقعی موج. در این مورد، تمام ضرایب دیگر صفر هستند. اما موج سینوسی بدون ابتدا و انتها یک ایده‌آل‌سازی ریاضی است. در عمل، موج در زمانهای منتهای شروع و ختم می‌شود. نتیجه عبارت است از یک قطار موج با طول منتهای، مانند آنچه در شکل ۴-۱۲ نشان داده شده است. قطار موجی از این نوع در آنالیز فوریه به‌عنوان یک تابع نادره‌ای در نظر گرفته می‌شود. واضح است که این قطار موج را نمی‌توان با تنها یک موج سینوسی که هیچ ابتدا یا انتهایی ندارد نمایش داد، بلکه امواج هماهنگ مختلفی که با هم ترکیب می‌شوند تا قطار موج را تولید کنند باید بسیار زیاد باشند و طوری انتخاب شوند که این قطار موج را در بازه زمانی که وجود دارد دقیقاً ایجاد کنند و خارج از این بازه همه جا یکدیگر را کاملاً حذف کنند. بدیهی است که "ایجاد" و "امحاء" موج مؤلفه‌های طیفی بسیار زیاد دیگری را به مؤلفه موقتی خود قطار موج



شکل ۱۲-۴ قطار موج هماهنگ متناهی با طول عمر τ_0 و دوره $2\pi/\omega_0$. گستره فضایی این تپ برابر است با $l_0 = c\tau_0$.

اضافه می‌کند. در واقع، استفاده از انتگرالهای تبدیل فوری به منجر به توزیع پیوسته مؤلفه‌های بسامد می‌شود. آنچه در اینجا برای قطار موج متناهی گفتیم درباره هر تپ منزوی با هر شکلی که دارد صادق است. برای سادگی، تجزیه طیفی تپی را در نظر می‌گیریم که در هر جایی که وجود دارد، یک موج هماهنگ است. این مسئله را طبعاً باید با انتگرالهای تبدیل فوری ۱۲-۷ و ۱۲-۸ بررسی کرد. مبدأ مختصه زمانی را در شکل ۱۲-۴ طوری انتخاب کرده‌ایم که قطار موج نسبت به آن متقارن باشد. این قطار موج دارای طول عمر τ_0 و بسامد ω_0 است. بنابراین، می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد

$$f(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t}, & -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2} \\ 0, & \text{زمانهای دیگر} \end{cases} \quad (11-12)$$

طیف بسامد $g(\omega)$ را از معادله ۱۲-۸ به ازای تابع مشخص ۱۱-۱۲ محاسبه می‌کنیم:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

پس از انتگرال‌گیری داریم

$$g(\omega) = \left[\frac{e^{i(\omega - \omega_0)t}}{2\pi i(\omega - \omega_0)} \right]_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi(\omega - \omega_0)} \left[\frac{e^{i(\omega - \omega_0)\tau_0/2} - e^{-i(\omega - \omega_0)\tau_0/2}}{2i} \right]$$

که با استفاده از اتحاد

$$e^{ix} - e^{-ix} \equiv 2i \sin x$$

به صورت زیر در می آید

$$g(\omega) = \frac{\sin[(\tau_0/2)(\omega - \omega_0)]}{\pi(\omega - \omega_0)} = \frac{\tau_0}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(\tau_0/2)(\omega - \omega_0)]}{[(\tau_0/2)(\omega - \omega_0)]} \right\} \quad (12-12)$$

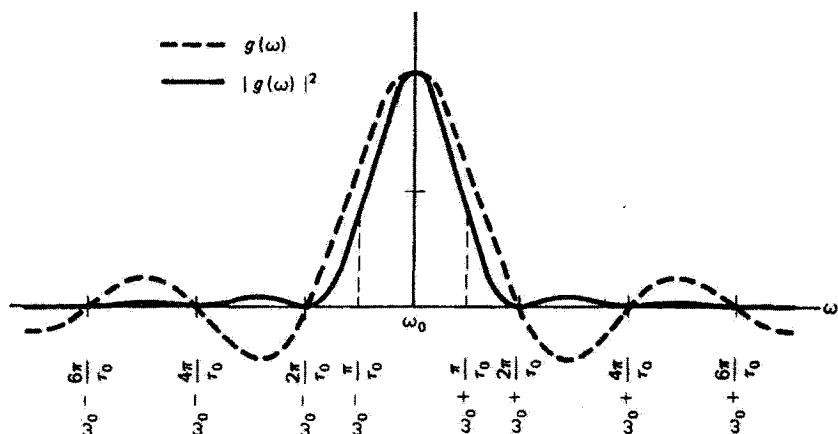
با قرار دادن $u = (\tau_0/2)(\omega - \omega_0)$ ، داریم $g(\omega) = (\tau_0/2\pi)[(\sin u)/u]$ تابع $(\sin u)/u$ ، که غالباً سینک u خوانده می شود، زیاد ظاهر می شود، و این خاصیت را دارد که وقتی u به 0 میل می کند خود تابع به 1 میل می کند. بنابراین، از معادله ۱۲-۱۲ نتیجه می گیریم

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} g(\omega) = \frac{\tau_0}{2\pi} \quad (13-12)$$

علاوه بر این، تابع سینک $(\sin u)/u$ به ازای $\sin u = 0$ صفر است بجز در $u = 0$ ، یعنی موردی که منجر به معادله ۱۲-۱۳ شده است. به استثنای این مورد، به ازای $u = n\pi$ که در آن $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ داریم $\sin u = 0$ ، و در نتیجه

$$g(\omega) = 0, \quad \omega = \omega_0 \pm \frac{2n\pi}{\tau_0} \quad \text{هرگاه} \quad (14-12)$$

بنابراین، وقتی ω از ω_0 زیادتر (یا کمتر) می شود $g(\omega)$ متناوباً از صفر می گذرد. افزایش حاصل در مقدار u ، یا در مخرج معادله ۱۲-۱۲، باعث کاهش تدریجی دامنه تغییراتی می شود که در غیر این وضعیت هماهنگ بود. تمام این نتایج در شکل ۵-۱۲ نشان داده شده اند که در آن مبدأ طیف بسامد در نقطه تقارن $\omega = \omega_0$ اختیار شده است. اگر دامنه $g(\omega)$ را مجذور کنیم طیف توان که با منحنی خط پر در شکل ۵-۱۲ نشان داده شده است به دست می آید. اگر چه بسامدهای دور از ω_0 در طیف توان سهم دارند، بدیهی است که عمده انرژی قطار موج با بسامدهای موجود در ماکسیم مرکزی، با پهنای $4\pi/\tau_0$ ، حمل می شود. توجه کنید که هر چه قطار موج شکل ۱۲-۴ کوتاهتر یعنی طول عمر τ_0 کمتر باشد، ماکسیم مرکزی شکل ۵-۱۲ پهنتر است. بدین ترتیب، امواج هماهنگی که سهم مهمی در قطار موج واقعی دارند بازه بسامد بزرگتری را در بر می گیرند. نیم پهنای ماکسیم مرکزی، یعنی $2\pi/\tau_0$ ، را به عنوان تقریبی از گستره بسامدهای غالبی که لازم اند در نظر می گیریم. این معیار دست کم



شکل ۱۲-۵ تبدیل فوریۀ قطار موج هماهنگ منتهای شکل ۱۲-۴. خط چین دامنه طیف بسامد و خط پر مجذور آن یعنی طیف توان را نمایش می دهد. این منحنیها به دامنه ماکسیمم یکسانی بهنجار شده اند.

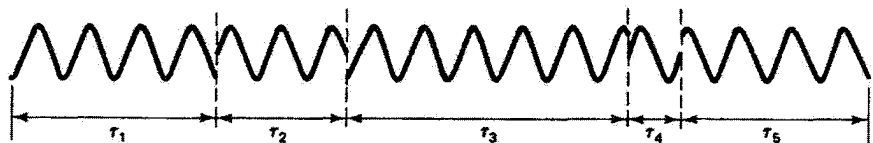
رابطه معکوس با τ_0 را که حائز اهمیت است حفظ می کند. بنابراین، به عنوان اندازه ای از نوار بسامد حول ω_0 که برای نمایش قطار موج هماهنگ با بسامد ω_0 و طول عمر τ_0 لازم است، می نویسیم

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} \quad \text{یا} \quad \Delta f = \frac{1}{\tau_0} \quad (12-15)$$

معادله ۱۲-۱۵ نشان می دهد اگر $\tau_0 \rightarrow \infty$ ، که به قطار موجی با طول نامتناهی مربوط است، آنگاه $\Delta\omega \rightarrow 0$ ، و یک بسامد ω_0 یا طول موج λ_0 برای نمایش این قطار موج کافی است. در این مورد ایده آل، یک باریکه کاملاً تکفام داریم که قبلاً بررسی کردیم. از طرف دیگر، وقتی $\tau_0 \rightarrow 0$ ، که تقریبی از یک "میله" هماهنگ است، آنگاه $\Delta\omega \rightarrow \infty$ ، بدین ترتیب، هر چه تب باریکتر یا تیزتر باشد، تعداد بسامدهای لازم برای نمایش آن بیشتر است و در نتیجه پهنای خط $\Delta\lambda$ مربوط به بسته موج هماهنگ بزرگتر است.

۱۲-۳ همدوسی زمانی و پهنای خط طبیعی

واضح است که هیچ چشمه کاملاً تکفامی وجود ندارد. چشمه هایی که آنها را "تکفام" می نامیم نوری گسیل می کنند که می توان آن را به صورت دنباله ای از قطارهای موج هماهنگ با طول منتهای، مطابق با شکل ۱۲-۶، که هر یک از آنها با تغییر ناپیوسته فاز از دیگری جدا شده است نمایش داد. این تغییرات فاز معرف فرایند نامنظمی هستند که طی آن اتمهای برانگیخته چشمه نور گذارهایی بین ترازهای انرژی انجام می دهند، و قطارهای موج کاتوره ای و کوتاه تولید می کنند. یک چشمه معین



شکل ۱۲-۶ دنباله قطار موجهای هماهنگ با طولها یا طول عمرهای متناهی مختلف T . قطار موج را می‌توان با یک طول عمر متوسط، زمان همدوسی τ_0 ، مشخص کرد.

را می‌توان با یک طول عمر قطار موج متوسط τ_0 ، که زمان همدوسی آن نامیده می‌شود، مشخص کرد. بدین ترتیب، می‌توانیم مضامین فیزیکی معادله ۱۲-۱۵ را به صورت زیر خلاصه کنیم: پهنای طبیعی خط طیفی تناسب معکوس با زمان همدوسی چشمه دارد. هر چه زمان همدوسی بزرگتر باشد، چشمه تکفام‌تر است. طول همدوسی l_t قطار موج عبارت است از طول تب همدوس آن، یا

$$l_t = c\tau_0 \quad (۱۲-۱۶)$$

از ترکیب معادله‌های ۱۲-۱۵ و ۱۲-۱۶، برای طول همدوسی داریم

$$l_t = \frac{c}{\Delta f}$$

بنابراین، اگر Δf را با مقدار دیفرانسیل f ، که از رابطه $f = c/\lambda$ به دست می‌آید، تقریب بگیریم می‌توانیم همچنین بنویسیم

$$l_t \cong \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \quad (۱۲-۱۷)$$

بدین ترتیب، پهنای خط طیفی عبارت است از

$$\Delta \lambda \cong \frac{\lambda^2}{l_t} \quad (۱۲-۱۸)$$

به عنوان گریزی مختصر، جالب است گفته شود که معادله ۱۲-۱۸ بیانی از اصل عدم قطعیت مکانیک کوانتومی است که در آن ذره‌ای مانند الکترون با یک تب موج نمایش داده می‌شود. اگر طول همدوسی l_t به عنوان بازه Δx که ذره در آن یافت می‌شود — یعنی عدم قطعیت مکان ذره — تعبیر شود و عدم قطعیت تکانه Δp با دیفرانسیل طول موج دوبروی در

معادله $p = h/\lambda$ بیان شود، نتیجه عبارت است از $\Delta x \Delta p = h$. نامساوی مربوط به رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ ناشی از نامساوی ذاتی در معادله ۱۲-۱۵ است.

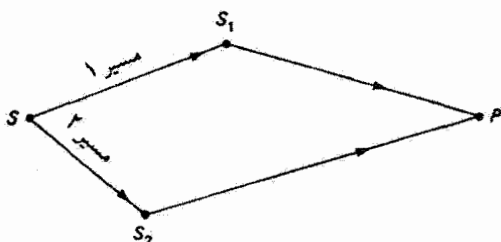
چون پهنای خط چشمه‌های طیفی را می‌توان اندازه‌گیری کرد، زمان همدوسی متوسط و طول همدوسی را می‌شود تخمین زد. برای مثال، نور سفید دارای "پهنای خط" حدوداً 300 nm است که از تقریباً 400 nm تا 700 nm گسترده است. اگر طول موج متوسط را در 550 nm بگیریم، از معادله ۱۲-۱۷ داریم

$$l_t = \frac{550^2}{300} \cong 1000 \text{ nm} \cong 2\lambda_{av}$$

که در واقع طول همدوسی بسیار کوچکی حدود یک میلیون سانتیمتر یا دو "طول موج" نور سفید است. واضح است که تولید فریزهای تداخل برای نور سفید مشکل است زیرا اختلاف راه باریکه‌های تداخل‌کننده نباید بیشتر از طول همدوسی نور باشد. چشمه‌های لامپ تخلیه‌گاز سدیم یا جیوه بسیار تکفامتر و همدوستر هستند. برای مثال، خط سبز جیوه در 546 nm می‌تواند پهنای خطی حدود 25 nm داشته باشد که منجر به طول همدوسی 1.2 cm می‌شود. یکی از تکفامترین چشمه‌های تخلیه‌گاز مربوط به ایزوتوپ ^{86}Kr است که خط گسیل نارنجی آن در 606 nm دارای پهنای خطی به اندازه تنها 47 nm است. طول همدوسی این تابش، بنابه معادله ۱۲-۱۷، 78 cm است! تابش لیزری حتی از همدوسی این چشمه تخلیه‌گاز نیز بسیار فراتر می‌رود. پایداری کوتاه‌مدت لیزرهای تجاری CO_2 ، به‌عنوان مثال، طوری است که پهنای خطی حدود $10^{-5} \times 1 \text{ nm}$ برای طول موج گسیل فرسوخ در $10.6 \mu\text{m}$ قابل حصول است. از این داده‌ها طول همدوسی حدوداً 11 km به‌دست می‌آید! تحت شرایط دقیقاً مهارشده، لیزرهای He-Ne می‌توانند این عدد را تا یک مرتبه بزرگی دیگر افزایش دهند. اما متأسفانه، لیزرهای هلیوم-نون متداولی که در آزمایشگاه‌های آموزشی از آنها استفاده می‌شود نمی‌توانند، به علت افت‌وخیزهای کاتوره‌ای دما و ارتعاشات آینه، طول همدوسی بیشتری از طول کاواک خود داشته باشند. این اثرات مزاحم طول کاواک را تغییر می‌دهند و باعث نوسانهای چندمدی می‌شوند، و تأثیر مضر روی طول همدوسی لیزر دارند. در نتیجه، استفاده از این لیزرها، به‌عنوان مثال در آزمایشهای هولوگرافی، باز هم احتیاج به دقت در مساوی کردن راههای نوری دارد.

۱۲-۴ همدوسی جزئی

چنانکه قبلاً گفته شد، وقتی اختلاف فاز بین دو موج ثابت باشد این موجها متقابلاً همدوس هستند. در عمل، این وضعیت تنها به‌طور تقریبی تحقق می‌یابد، و در نتیجه همدوسی جزئی داریم. این



شکل ۷-۱۲ تداخل در P حاصل از دو موج ناشی از S که مسیره‌های مختلفی طی می‌کنند. این امواج در S_1 و S_2 به علت‌های مختلفی، از جمله بازتاب و شکست و پراش، تغییر مسیر می‌دهند.

مفهوم را در زیر دقیقتر تعریف می‌کنیم. وضعیتی کلی در نظر بگیرید که در آن، مانند شکل ۷-۱۲، تداخل در P بین دوباریکه ناشی از چشمه همدوس S پس از پیمودن مسیره‌های مختلف ایجاد می‌شود. این دوباریکه را در حالت کلی با معادله‌های زیر توصیف می‌کنیم

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{o_1} e^{i(k_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \epsilon)} \quad (۱۹-۱۲)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{o_2} e^{i(k_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \epsilon)} \quad (۲۰-۱۲)$$

در نقطه P ، هر میدان تنها با زمان تغییر می‌کند، و اگر مسیر پایینی درازتر باشد، که مستلزم بازه زمانی اضافی τ است، می‌توانیم در P بنویسیم

$$\mathbf{E}_p(t) = \mathbf{E}_1(t) + \mathbf{E}_2(t + \tau) = \mathbf{E}_{o_1} e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_{o_2} e^{-i\omega(t+\tau)}$$

که در آن برای سادگی قرار داده‌ایم $\epsilon = 0$ و $\tau = 0$. تابیدگی در P با تقریب یک ضریب ثابت با رابطه زیر داده می‌شود

$$I_p = \langle \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_p^* \rangle = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) \rangle$$

که در آن گروه‌های شکسته نمایشگر متوسط زمانی هستند. از بسط رابطه بالا داریم

$$I_p = \langle |E_1|^2 + |E_2|^2 + (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1^*) \rangle$$

کمیت داخل پرانتز در واقع مجموع یک عدد مختلط و همیوگ مختلط آن است، که همیشه دو برابر قسمت حقیقی عدد مختلط است. بنابراین،

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* \rangle \quad (۲۱-۱۲)$$

که در آن I_1 و I_2 تابیدگی باریکه‌های انفرادی و جمله سوم مربوط به تداخل بین آنها هستند. در معادله ۱۲-۲۱ همچنین فرض کرده‌ایم که باریکه‌ها قطبش یکسانی دارند و از این رو علامت ضرب زده‌ای را حذف کرده‌ایم. جمله تداخلی بسته به اینکه همبستگی بین فازهای دو میدان در P چه باشد، ممکن است به مجموع دو تابیدگی باریکه‌ها اضافه شود یا از آنها کم شود. بنابراین، یک تابع همبستگی تعریف می‌کنیم که عبارت است از

$$\Gamma_{12}(\tau) \equiv \langle E_1(t)E_2^*(t+\tau) \rangle \quad (22-12)$$

و از تقسیم آن بر دامنه‌های میدانها، تابع همبستگی بهنجار را با تعریف زیر به دست می‌آوریم

$$\gamma_{12}(\tau) \equiv \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (23-12)$$

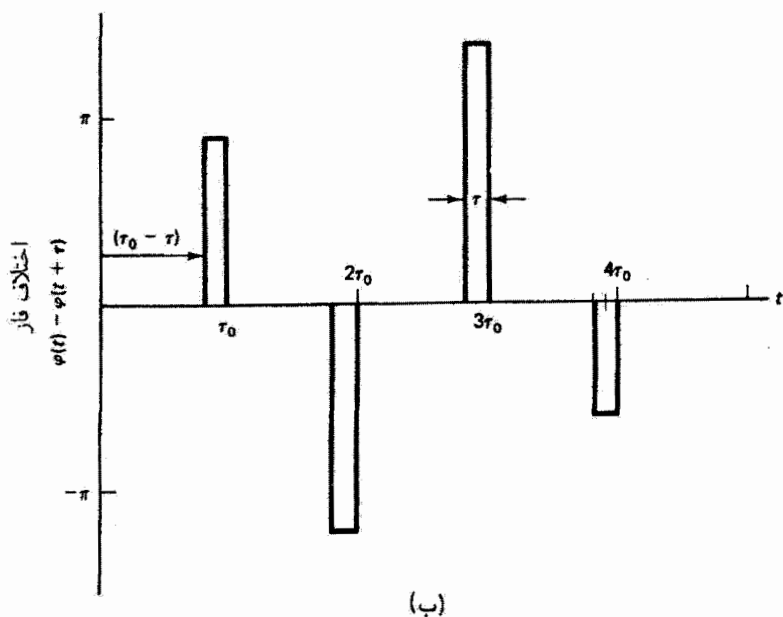
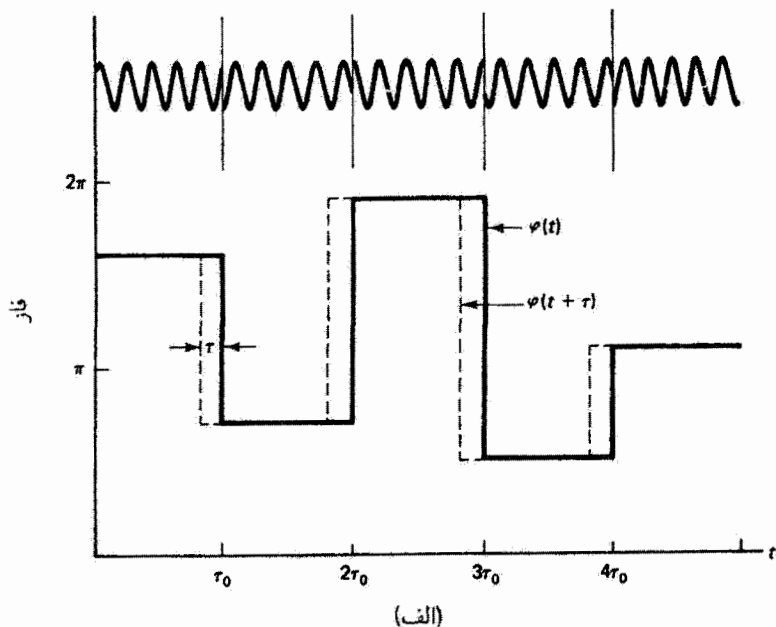
بدین ترتیب، تابیدگی در P را می‌توان با رابطه زیر بیان کرد

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)] \quad (24-12)$$

تابع $\gamma_{12}(\tau)$ که اکنون قسمت اصلی جمله تداخلی را تشکیل می‌دهد تابعی از τ و در نتیجه از مکان نقطه P است. می‌دانیم که اختلاف زمانی بین مسیرها، نسبت به زمان همدوسی متوسط چشمه، تعیین‌کننده درجه همدوسی حاصل است. انتظار داریم به ازای $\tau > \tau_0$ جزئی از همدوسی باریکه‌ها از بین برود. اکنون با این فرض که τ_0 نمایشگر یک زمان همدوسی ثابت و نه متوسط است بستگی $\gamma_{12}(\tau)$ به τ_0 را به دست می‌آوریم. یک نمونه از این قطار موج در قسمت بالای شکل ۱۲-۸ الف، با ناپیوستگی‌های منظمی در فاز به فاصله بازه زمانی τ_0 از یکدیگر، نشان داده شده است. فاز $\varphi(t)$ مربوط به موج هماهنگ به نحو اختیاری تغییر می‌کند و با خط پر در پایین ترسیم شده است. اکنون می‌توانیم موج دارای بسامد هماهنگ ω را با رابطه زیر توصیف کنیم

$$E = E_0 e^{-i[\omega t - \varphi(t)]} \quad (25-12)$$

تغییرات فاز $\varphi(t+\tau)$ مربوط به موج دوم را که τ ثانیه قبل وارد می‌شود نیز به صورت همان تابع که به اندازه زمان τ جابه‌جا شده است (خط چین) نشان داده‌ایم. تابع همبستگی بهنجار که غالباً آن را درجه همدوسی بین دو موج با دامنه یکسان E_0 و با فاصله زمانی τ می‌نامند، بنا به



شکل ۸-۱۲ (الف) افتوخیزهای کاتوره‌ای فاز $\varphi(t)$ در هر τ_0 مربوط به یک موج (خط پر) و همان افتوخیزهای فاز $\varphi(t + \tau)$ مربوط به موج در τ ثانیه قبل (خط چین). (ب) اختلاف فاز بین دو موج قسمت (الف).

معادله ۱۲-۲۳ عبارت است از

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{I} = \frac{\langle E(t)E^*(t+\tau) \rangle}{|E_0|^2}$$

حاصلضرب میدانها را برحسب معادله ۱۲-۲۵ می نویسیم:

$$E(t)E^*(t+\tau) = E_0 e^{-i\omega t} e^{i\varphi(t)} E_0^* e^{i\omega(t+\tau)} e^{-i\varphi(t+\tau)}$$

یا

$$E(t)E^*(t+\tau) = E_0^2 e^{i\omega\tau} e^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]}$$

و در نتیجه

$$\gamma_{12}(\tau) = e^{i\omega\tau} \langle e^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]} \rangle$$

متوسط زمانی در این معادله از رابطه زیر محاسبه می شود

$$\langle e^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]} dt \quad (12-26)$$

که در آن T یک زمان به اندازه کافی طولانی است. تابع $\varphi(t) - \varphi(t+\tau)$ در نما در شکل ۱۲-۸ ترسیم شده است و دیده می شود که یک رشته از تپهای مستطیلی با فاصله منظم و مقادیر کاتوره ای بین $-\pi$ و $+\pi$ است. اولین بازه زمان همدوسی τ_0 را در نظر بگیرید که در آن تابع تپ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\varphi(t) - \varphi(t+\tau) = \begin{cases} 0, & 0 < t < (\tau_0 - \tau) \\ H, & (\tau_0 - \tau) < t < \tau_0 \end{cases}$$

در بازه های بعدی همین رابطه را اما با مقادیر مختلفی برای H داریم. اکنون می توانیم تابع همدوسی بهنجار γ_{12} را برای تعداد زیاد N بازه به صورت زیر بنویسیم

$$\gamma_{12} = e^{i\omega\tau} \frac{1}{N\tau_0} \left[\underbrace{\int_0^{\tau_0-\tau} e^{i(0)} dt + \int_{\tau_0-\tau}^{\tau_0} e^{iH_1} dt + \dots}_{\text{بازه شماره ۱}} \right] \begin{matrix} \text{جمله های مشابهی} \\ \text{برای } (N-1) \text{ بازه بعدی} \end{matrix}$$

با انتگرال‌گیری روی N جمله داریم

$$\gamma_{12} = \left(\frac{e^{i\omega\tau}}{N\tau_0} \right) [(\tau_0 - \tau + \tau e^{iH_1}) + (\tau_0 - \tau + \tau e^{iH_2}) + \dots]$$

از ترکیب کردن جمله‌های اول هر بازه و جمع زدن بقیه به دست می‌آوریم

$$\gamma_{12} = \left(\frac{e^{i\omega\tau}}{N\tau_0} \right) \left[N(\tau_0 - \tau) + \tau \sum_{j=1}^N e^{iH_j} \right]$$

به علت سرشت کاتوره‌ای H_j ، جمله جمع‌زنی به‌ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ N به‌طور متوسط صفر می‌شود. بنابراین، تنها آن زمانهایی که طی آنها امواج برهم منطبق‌اند — وقتی $\varphi(t) = \varphi(t + \tau)$ در انتگرال سهم دارند، و در نتیجه به دست می‌آوریم

$$\gamma_{12}(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) e^{i\omega\tau} \quad (27-12)$$

قسمت حقیقی γ_{12} ، که در معادله ۱۲-۲۴ لازم است، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\text{Re} [\gamma_{12}(\tau)] = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) \cos \omega\tau \quad (28-12)$$

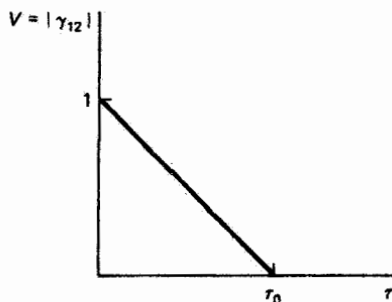
که به‌ازای $\tau = 0$ (طول راه‌های یکسان) مقدار ماکسیمم ۱، به‌ازای $\tau = \tau_0$ (اختلاف راه مساوی با طول همدوسی) مقدار ۰، و هر مقداری بین این دو می‌گیرد. دامنه جمله کسینوس در معادله ۱۲-۲۸ همان مقدار درجه همدوسی γ_{12} است، یعنی

$$|\gamma_{12}(\tau)| = 1 - \frac{\tau}{\tau_0} \quad (29-12)$$

این کمیت حدود تغییرات در جمله تداخلی و در نتیجه تباین یا مرئیت فریزها را به‌صورت تابعی از τ تعیین می‌کند. این دامنه $|\gamma_{12}(\tau)|$ در شکل ۱۲-۹ ترسیم شده است. از ترکیب سه معادله آخر به دست می‌آوریم

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}| e^{i\omega\tau} \quad (30-12)$$

$$\text{Re} \gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}| \cos \omega\tau \quad (31-12)$$



شکل ۹-۱۲ مرئیت فریز یا درجه همدوسی به صورت تابعی از اختلاف زمانهای ورود دو موج با زمان همدوسی τ_0 .

با یادآوری رابطه تجربی برای مرئیت یا تباین فریز، که قبلاً معرفی شد، یعنی

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (۳۲-۱۲)$$

اکنون می‌توانیم موارد خاص زیر را مشخص کنیم:

۱. ناهمدوسی کامل: $\tau \rightarrow \tau_0$ و $|\gamma_{12}| = 0$

$$I_p = I_1 + I_2$$

$$I_p = 2I_0, \quad \text{برای باریکه‌های یکسان}$$

$$V = \frac{2I_0 - 2I_0}{4I_0} = 0$$

۲. همدوسی کامل: $\tau = 0$ و $|\gamma_{12}| = 1$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \omega \tau$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 4I_0, \quad \text{برای باریکه‌های یکسان}$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = 0, \quad \text{برای باریکه‌های یکسان}$$

$$V = \frac{4I_0}{4I_0} = 1$$

۳. همدوسی جزئی: $0 < \tau < \tau_0$ و $0 < |\gamma_{12}| < 1$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}(\gamma_{12})$$

$I_p = 2I_0 [1 + \operatorname{Re}(\gamma_{12})]$, برای باریکه‌های یکسان

$I_{\max} = 2I_0 (1 + |\gamma_{12}|)$ و $I_{\min} = 2I_0 (1 - |\gamma_{12}|)$

$$V = \frac{2I_0 |\gamma_{12}|}{4I_0} = |\gamma_{12}|$$

بنابراین، در تمام مواردی که باریکه‌ها یکسان هستند مرتبت فریز V برابر با بزرگی تابع همبستگی $|\gamma_{12}|$ است، و هر یک از اینها اندازه‌ای از درجه همدوسی است. فریزهای مربوط به موردهای ۲ و ۳ به ترتیب در شکل ۱۰-۱ الف و ب، در بحث اولیه تداخل، نشان داده شده‌اند.

مثال

در یک آزمایش تداخل، باریکه نوری به دو قسمت هم‌دامنه تقسیم می‌شود. این دو قسمت پس از پیمودن مسیرهای مختلف دوباره روی هم می‌افتند. نور دارای طول موج 541 nm با پهنای خط 1 \AA است، و اختلاف راه 1.5 mm است. مرتبت فریزهای تداخل را تعیین کنید. اگر اختلاف راه دو برابر شود مرتبت چه تغییری می‌کند؟

حل: مرتبت با رابطه زیر داده می‌شود

$$V = 1 - \frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{\Delta}{\ell_t}$$

که در آن به جای نسبت تأخیر زمانی به زمان همدوسی نسبت متناظر اختلاف راه به طول همدوسی را قرار داده‌ایم. در این مورد، $\ell_t = \lambda^2 / \Delta\lambda = (5410 \text{ \AA})^2 / (1 \text{ \AA}) = 2993 \text{ mm}$ بدین ترتیب،

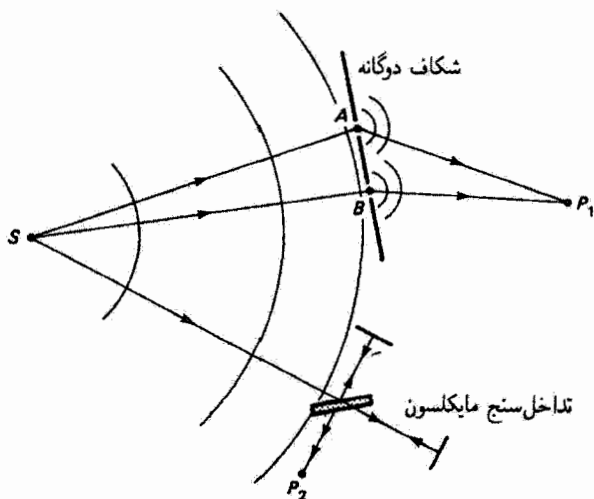
$$V = 1 - \frac{1.5}{2993} = 0.49$$

اگر اختلاف راه دو برابر شود، $\ell_t > \Delta$ و $\tau > \tau_0$ ، و در نتیجه باریکه‌ها ناهمدوس‌اند و $V = 0$.

۵-۱۲ همدوسی فضایی

در بحث از همدوسی زمانی، همبستگی فاز بین نقاط متمایز زمانی در میدان تابش چشمه در امتداد خط انتشار را در نظر گرفته‌ایم. به این دلیل، همدوسی زمانی را همدوسی طولی می‌نامند. درجه همدوسی را می‌توان با بررسی تباین فریز تداخل در یک ابزار تقسیم دامنه، مانند تداخل‌سنج مایکلسون، مشاهده کرد. چنانکه دیده‌ایم، همدوسی زمانی اندازه‌ای از طول متوسط موجهای هماهنگ مؤلف است که بستگی به خواص تابشی چشمه دارد. اما اکنون به آنچه همدوسی فضایی یا عرضی نامیده می‌شود، و عبارت است از همبستگی فاز بین نقاط متمایز فضایی در میدان تابش، می‌پردازیم. این نوع همدوسی در استفاده از یک تداخل‌سنج تقسیم جبهه موج، مانند دوشکافی، اهمیت دارد. کیفیت نقش تداخل در آزمایش دوشکافی به درجه همدوسی بین ناحیه‌های متمایز میدان موج در دوشکاف بستگی دارد.

برای ادراک بهتر همدوسی میدان موج ناشی از یک چشمه وضعیتی را که شکل ۱۲-۱۰ نشان می‌دهد در نظر می‌گیریم. نور ناشی از چشمه S از یک شکاف دوگانه می‌گذرد و وارد یک تداخل‌سنج مایکلسون که در آن نزدیکی قرار دارد می‌شود. همدوسی فضایی بین نقاط جبهه موج A و B در شکافها در صورتی برقرار است که چشمه S واقعاً یک چشمه نقطه‌ای باشد. در این مورد، تمام پرتوهای ناشی از S به یک مجموعه منفرد از امواج کروی که روی هر جبهه موج معین دارای فاز یکسانی هستند وابسته‌اند. برای اینکه فریزهای کاملاً قابل تشخیص روی



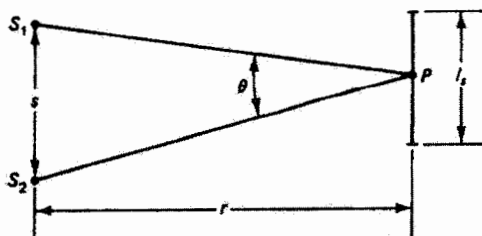
شکل ۱۲-۱۰ تقسیم جبهه موج و دامنه تابش ناشی از چشمه S ، نمایشگر شرایط عملی همدوسی فضایی و زمانی.

برده‌ای نزدیک نقطه P_1 تشکیل شوند، باید نور ناشی از S که دو مسیر متمایز SAP_1 و SBP_1 را طی می‌کند علاوه بر همدوسی فضایی همدوسی زمانی نیز داشته باشد. در همدوسی زمانی مقایسه بین اختلاف راه $\Delta = SAP_1 - SBP_1$ و طول همدوسی تابش لازم می‌آید. این مقایسه معادل است با مقایسه همدوسی در هر راستای شعاعی انتشار نور از چشمه در دو جبهه موجی که با همین اختلاف راه از هم فاصله دارند. این خاصیت همدوسی زمانی است که با تداخل سنج مایکلسون اندازه‌گیری می‌شود. اگر اختلاف راه Δ بسیار کمتر از طول همدوسی باشد ($\Delta \ll l_s$)، فریزهای تداخل واضح در P_1 تشکیل می‌شوند؛ اگر اختلاف راه برابر یا بزرگتر از طول همدوسی باشد ($\Delta \geq l_s$) فریزهای تداخل چندان معین نیستند یا اصلاً تشکیل نمی‌شوند. البته در عمل، S همیشه یک چشمه گسترده است، و در نتیجه پرتوها از چندین نقطه چشمه به A و B می‌رسند. در چشمه‌های معمولی (نالیزری)، نور ناشی از نقاط مختلف چشمه، در فاصله‌ای که به یک طول موج می‌رسد، از لحاظ فاز همبسته نیست و در نتیجه همدوسی ندارد. بدین ترتیب، همبستگی فضایی نور در شکافها بستگی به این دارد که چشمه تا چه اندازه، از لحاظ گستردگی یا خواص همدوسی واقعی آن، به یک چشمه نقطه‌ای نور شباهت دارد.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم اگر دو چشمه نقطه‌ای S_1 و S_2 ، مانند شکل ۱۲-۱۱، به اندازه s از هم فاصله داشته باشند و اگر نور ناشی از این چشمه‌ها به طول موج λ در فاصله r از آنها مشاهده شود، ناحیه‌ای با اندازه l_s با همدوسی زیاد وجود دارد به طوری که

$$l_s < \frac{\lambda}{\theta} \quad (12-33)$$

که در آن θ زاویه‌ای است که چشمه‌های نقطه‌ای در نقطه مشاهده P می‌سازند. فعلاً این رابطه را می‌پذیریم و از ترکیب آن با طول همدوسی زمانی یا طولی l_s نتیجه می‌گیریم که در هر نقطه از میدان تابش یک چشمه واقعی نور ناحیه‌ای وجود دارد که در آن نور همدوس است. این ناحیه دارای اندازه عرضی l_s و اندازه طولی l_s نسبت به چشمه است و از این رو حجمی تقریباً برابر با



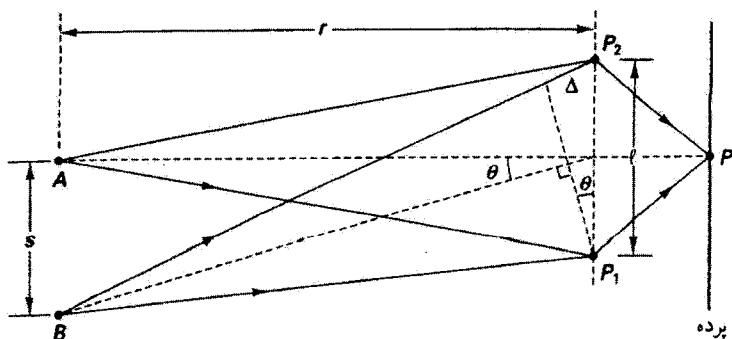
شکل ۱۱-۱۲ ناحیه عرضی همدوسی l_s ناشی از دو چشمه نقطه‌ای مستقل.

$l_1^2 l_2^2$ را حول نقطه P اشغال می‌کند. تنها از این حجم است که تداخل سنجها باید تابش دریافت کنند تا بتوانند فریزهای تداخل قابل مشاهده به وجود آورند.

۱۲-۶ پهنای همدوسی فضایی

اکنون همدوسی فضایی را در نقاط P_1 و P_2 در میدان تابش یک چشمه گسترده شبه تکفام، که به طور ساده با دو نقطه گسیلنده ناهمدوس A و B در لبه‌های چشمه نمایش داده می‌شود (شکل ۱۲-۱۲)، در نظر می‌گیریم. می‌توانیم P_1 و P_2 را دوشکاف بگیریم که نور را به پرده‌ای می‌تابانند که در آنجا می‌خواهیم فریزها را مشاهده کنیم. بنابراین، هر چشمه نقطه‌ای به تنهایی مجموعه‌ای از فریزهای تداخل دوشکافی را روی پرده تولید می‌کند. اما وقتی دو چشمه با هم عمل می‌کنند دستگاههای فریز روی هم می‌افتند. اگر ماکسیمهای دو دستگاه فریز و همچنین مینیمهای آنها روی هم واقع شوند، نقش فریز حاصل کاملاً قابل دیدن است و تابش دو چشمه ناهمدوس را بسیار همدوس در نظر می‌گیریم! اما وقتی دستگاههای فریز نسبت به هم جابه‌جا شده باشند طوری که ماکسیمهای یکی روی مینیمهای دیگری واقع شوند نقش مرکب قابل دیدن نیست و تابش را ناهمدوس می‌گیریم. فرض کنید چشمه B در مکان چشمه A است، یا به عبارت دیگر فاصله s در شکل ۱۲-۱۲ صفر است. آنگاه دستگاههای فریز در پرده برهم منطبق می‌شوند و به فریزهای یک چشمه نقطه‌ای منفرد تبدیل می‌شوند. اگر P روی عمود منصف دوشکاف واقع باشد یک ماکسیم نقش تداخل در P روی می‌دهد. در این وضعیت داریم

$$BP_2 - BP_1 = AP_2 - AP_1 = 0$$



شکل ۱۲-۱۲ نور ناشی از هر یک از دو چشمه نقطه‌ای A و B به نقاط P_1 و P_2 در میدان تابش می‌رسد و روی پرده تداخل به وجود می‌آید. در عمل، $s \ll \ell$ و زاویه‌های θ تقریباً با هم برابراند.

اگر چشمه B را به سمت پایین از A دور کنیم دستگاههای فریز از هم جدا می‌شوند تا اینکه در یک فاصله معین s که در آن

$$BP_2 - BP_1 = \Delta = \frac{\lambda}{2}$$

ماکسیم در P مربوط به دستگاه فریز چشمه B با یک مینیمم عوض می‌شود، و نقش فریز مرکب از بین می‌رود.

اگر زاویه θ معرف فاصله زاویه‌ای چشمه‌ها از صفحه شکافها باشد، آنگاه از روی شکل داریم $\Delta \cong \ell\theta$ که در آن ℓ فاصله بین دوشکاف است، و $\theta \cong s/r$ که در آن r فاصله تا چشمه‌ها است. نتیجه می‌گیریم

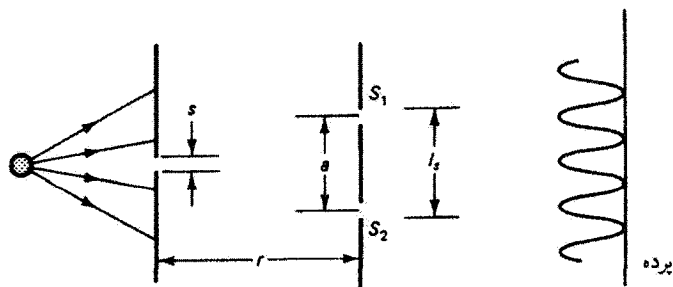
$$\Delta = \frac{\lambda}{2} = \frac{s\ell}{r} \quad \text{یا} \quad s = \frac{r\lambda}{2\ell} \quad (34-12)$$

اکنون اگر فاصله AB را آرایه پیوسته‌ای از چشمه‌های نقطه‌ای بگیریم، دستگاههای فریز انفرادی یکدیگر را کاملاً از بین نمی‌برند مگر اینکه گستره فضایی چشمه AB دو برابر مقدار s در معادله ۳۴-۱۲ باشد. اگر نقطه‌های کناری به اندازه $s < r\lambda/\ell$ از هم فاصله داشته باشند آنگاه فریزها کاملاً معین هستند. اکنون اگر این نتیجه را به‌عنوان تعریف ماکسیم جدایی شکاف ℓ به‌ازای گستره چشمه معین s بگیریم، برای پهنای همدوسی فضایی ℓ_s داریم

$$\ell_s < \frac{r\lambda}{s} \cong \frac{\lambda}{\theta} \quad (35-12)$$

به‌ازای مقادیر کوچکتر ℓ_s ، تباین فریز بهتر می‌شود.

بنابه این استدلال، اگر چشمه B باز هم دورتر برده شود دستگاههای فریز دوباره برهم منطبق می‌شوند، و در نتیجه درجه همدوسی $|\gamma_{12}|$ بین P_2 و P_1 یک تابع دوره‌ای است. در یک استدلال ریاضی کاملتر، چشمه گسترده نه با دو چشمه نقطه‌ای بلکه با آرایه پیوسته‌ای از ناحیه‌های عنصری گسیلنده نمایش داده می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که خارج از پهنای همدوسی در معادله ۳۵-۱۲، مرئیت فریز در حالی که نوسانی است قابل چشمپوشی است. بنابه یک قضیه عمومی، که قضیه وان‌سیتر-تسرنیکه نامیده می‌شود [۱]، نمودار درجه همدوسی برحسب فاصله فضایی ℓ بین نقاط P_2 و P_1 با نمودار نقش پراش ناشی از روزه‌ای با بزرگی و شکل چشمه گسترده یکسان است. این گونه نقشها را برای چشمه‌های مستطیلی و دایره‌ای در فصل ۱۶ بررسی می‌کنیم



شکل ۱۲-۱۳ آرایهٔ دوشکافی یانگ. شکافهای S_1 و S_2 باید در محدودهٔ پهنای همدوسی عرضی l_s ناشی از چشمهٔ تک‌شکافی واقع باشند.

معنی معادلهٔ ۱۲-۳۵ در مورد آزمایش دوشکافی یانگ واضح است و در این آزمایش یک چشمهٔ گسترده با یک تک‌شکاف به‌کار برده می‌شوند تا، مانند شکل ۱۲-۱۳، نور فرودی به شکاف دوگانه به‌طور قابل قبولی همدوس شود. اکنون می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۱۲-۳۵ تعیین کنیم تک‌شکاف چه اندازه باید کوچک باشد تا همدوسی و تولید فریز در برده تضمین شود. دوشکاف S_1 و S_2 باید در محدودهٔ پهنای همدوسی l_s ناشی از پهنای شکاف اولیهٔ s قرار داشته باشند.

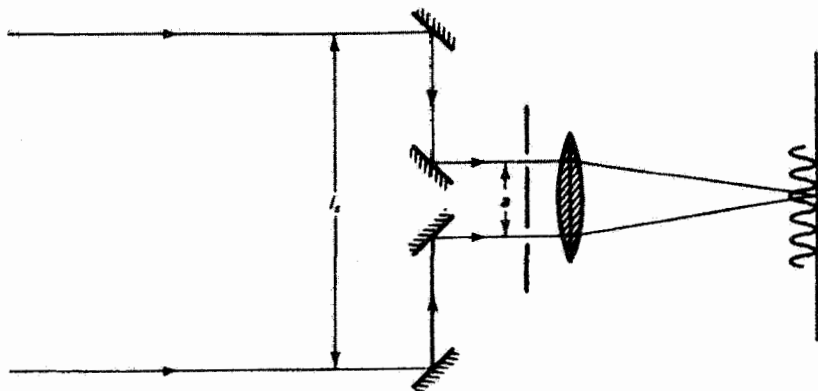
مثال

فاصلهٔ چشمه تا شکافها را 20 cm ، فاصلهٔ شکافها از هم را 1 mm و طول موج را 546 nm بگیرد. پهنای ماکسیم تک‌شکاف اولیه را تعیین کنید.

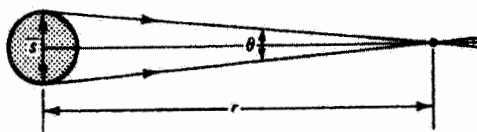
حل: با استفاده از معادلهٔ ۱۲-۳۵ داریم

$$\blacktriangle \quad s < \frac{r\lambda}{l_s} = \frac{(0.2)(546 \times 10^{-9})}{1 \times 10^{-2}} = 1.1\text{ mm}$$

اکنون فرض کنید پهنای شکاف چشمه در مثال بالا دقیقاً 1.1 mm و فاصلهٔ بین شکافهای S_1 و S_2 قابل تنظیم باشد. وقتی این شکافها بسیار نزدیک به هم هستند ($a \ll l_s$) در ناحیهٔ همدوسی زیاد واقع می‌شوند و فریزهای نقش تداخل به خوبی معین خواهند بود. به تدریج که شکافها را از هم دور کنیم، درجهٔ همدوسی $|\gamma_{12}|$ کاهش می‌یابد و تباین فریز شروع به کم شدن می‌کند. وقتی جدایی شکافهای a به مقدار 1 mm می‌رسد، $|\gamma_{12}| = 0$ و فریزها ناپدید می‌شوند. بدیهی است که از تعیین تجربی جدایی شکافها می‌توان برای به دست آوردن اندازهٔ s مربوط به چشمهٔ گسترده استفاده کرد. مایکلسون این روش را برای اندازه‌گیری قطر زاویه‌ای ستاره‌ها به‌کار برد. ستاره‌ها چنان دوراند که فنون تصویرسازی



(الف)



(ب)

شکل ۱۲-۱۴ (الف) تداخل سنج نجومی مایکلسون، (ب) تعیین قطر ستاره با این تداخل سنج.

برای تفکیک قطر آنها کارایی ندارند. اگر ستاره را یک چشمه ناهمدوس گسترده در نظر بگیریم که نور آن از آرایه بیوسته‌ای از نقاط که در قطر s مربوط به این ستاره گسترده شده‌اند صادر می‌شود (شکل ۱۲-۱۴ ب را ببینید) آنگاه پهنای همدوسی فضایی l_s در معادله ۱۲-۳۵ به صورت زیر درمی‌آید

$$l_s < \frac{1.22\lambda}{\theta} \quad (۱۲-۳۶)$$

در اینجا ضریب ۱.۲۲، مانند مورد پراش فرانوفر روزنه دایره‌ای، از شکل دایره‌ای چشمه ناشی می‌شود. چون قطر زاویه‌ای θ ستاره فوق‌العاده کوچک است l_s به همان نسبت بزرگ است. بنابراین، با استفاده از آینه‌هایی که قسمتهای جبهه موج تابش را که فاصله زیادی از هم دارند به درون تلسکوپ دوشکافی هدایت می‌کنند، شکافهای حرکتپذیر مانند آنچه در شکل ۱۲-۱۴ الف نشان داده شده است تنظیم می‌شوند. فاصله فریزهای تداخل بستگی به جدایی شکاف دوگانه a دارد، در حالی که مرئیت بستگی به فاصله l_s دارد. به تدریج که l_s افزایش می‌یابد، وقتی تساوی در معادله ۱۲-۳۶ برقرار شود فریزها ناپدید می‌شوند.

مثال

وقتی مایکلسون این روش را برای ستارهٔ یدالجوزا در صورت فلکی جبار به کار برد اولین مینیم فریز را در $l_s = 3.8 \text{ cm}$ به دست آورد. با استفاده از طول موج متوسط 570 nm ، قطر زاویه‌ای این ستاره را تعیین کنید.

حل: با در نظر گرفتن معادلهٔ ۱۲-۳۶ به صورت یک تساوی، داریم

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{l_s} = \frac{1.22(570 \times 10^{-9})}{3.8} = 2.26 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

چون فاصلهٔ جبار، r ، حدود $1.6 \times 10^{15} \text{ km}$ است، قطر ستاره، s ، با توجه به رابطهٔ $s = r\theta$ برابر است با $3.62 \times 10^8 \text{ km}$ ، یعنی حدود 26° برابر قطر خورشید. ▲

مسائل

۱-۱۲ رشتهٔ فوریهٔ موج مربعی زیر را، با دورهٔ فضایی L ، به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \frac{-L}{2} < x < 0 \\ +1, & 0 < x < \frac{+L}{2} \end{cases}$$

۲-۱۲ یکسوساز نیم‌موجی نیم‌دوره‌های منفی صورت موج سینوسی $E = E_0 \cos \omega t$ را حذف می‌کند. رشتهٔ فوریهٔ موج حاصل را به دست آورید.

۳-۱۲ تبدیل فوریهٔ تابع گاوسی زیر را به دست آورید

$$f(t) = h e^{-t^2/2\sigma^2}$$

که در آن h ارتفاع و σ "پهنای" است. [راهنمایی: در محاسبات خود به کامل کردن مجذور و همچنین به انتگرال معین

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

احتیاج دارید.] آیا تبدیل به دست آمده، به عنوان طیف بسامد، رابطهٔ مناسب با پهنای "تپ" اصلی از خود نشان می‌دهد؟

۴-۱۲ با استفاده از تبدیل فوریه، طیف توان یک تپ مربعی منفرد با دامنه A و مدت τ_0 را به دست آورید. این طیف توان را با تعیین جای صفرهای آن ترسیم کنید و نشان دهید پهنای نوار بسامد برای تپ با مدت آن تناسب معکوس دارد.

۵-۱۲ از دو صافی نور برای عبور نور زرد حول طول موج 590 nm استفاده می‌شود. یکی از صافیه‌ها پهنای عبور "گسترده" ای به اندازه 100 nm دارد در حالی که نوار گذر دیگری "باریک" و 10 nm است. کدام صافی برای استفاده در آزمایش تداخل بهتر است؟ طولهای همدوسی نور صافیه‌ها را با هم مقایسه کنید.

۶-۱۲ یک باریکه لیزری پیوسته He-Ne (632.8 nm) را با استفاده از یک روزنه چرخان به تپهای 10^6 نانوثانیه‌ای "برش" می‌دهیم. پهنای خط $\Delta\lambda$ ، پهنای نوار Δf ، و طول همدوسی حاصل را به دست آورید.

۷-۱۲ قطر زاویه‌ای خورشید از زمین تقریباً 5° درجه است. با چشمپوشی از تغییرات روشنایی در سطح، طول همدوسی فضایی را برای همدوسی "خوب" به دست آورید. بنابه یک تعریف نسبتاً اختیاری، همدوسی "خوب" در مساحتی که 10% مساحت ماکسیمم برای همدوسی است وجود دارد.

۸-۱۲ مایکلسون به این نتیجه رسید که خط سرخ کادمیم (643.8 nm) یکی از مناسبترین چشمه‌های تکفام موجود است که تشخیص فریزهایی تا اختلاف راهی برابر با 3 cm را در آزمایش تداخل تقسیم باریکه، مثلاً با تداخل سنج مایکلسون، ممکن می‌سازد.

(الف) پخشیدگی طول موج خط، و

(ب) زمان همدوسی چشمه را به دست آورید.

۹-۱۲ یک صافی با نوار گذر باریک طول موجهایی در گستره $5000 \pm 50 \text{ \AA}$ را عبور می‌دهد. اگر این صافی را جلو چشمه نور سفید بگذاریم طول همدوسی نور عبور کرده چه اندازه است؟

۱۰-۱۲ باریکه موازی شده‌ای از نور سفید به یک وجه یک منشور فرود می‌آید و نور خارج شده از وجه دوم با عدسی روی یک پرده متمرکز می‌شود. فرض کنید پاشیدگی خطی در پرده 20 \AA/mm باشد. با ایجاد یک "شکاف خروجی" باریک در پرده نوعی تکفامگر می‌سازیم که باریکه نور تقریباً تکفامی به دست می‌دهد. آرایه را ترسیم کنید. برای شکاف خروجی 2° سانتیمتری، زمان همدوسی و طول همدوسی نوری با طول موج متوسط 5000 \AA را تعیین کنید.

۱۱-۱۲ روزنه مدوری به قطر 5 mm در جلو یک لامپ سدیم (5890 \AA) به عنوان چشمه در

آزمایش تداخل یانگ به کار برده می شود. فاصله این روزنه تا شکافها ۱ m است. فاصله ماکسیم شکافها از هم چه اندازه باشد تا فریزهای تداخلی در آستانه دیده شدن باشند؟

۱۲-۱۲ پهنای خط را برای نور لیزری که طول همدوسی آن ۱۰ km است برحسب آنگستروم و هرتز به دست آورید. طول موج متوسط 6328\AA است.

۱۳-۱۲ (الف) یک تکفامگر برای تهیه نور شبه تکفامی از لامپ تنگستن به کار برده می شود. پاشیدگی خطی این ابزار $20\text{\AA}/\text{mm}$ است و از یک شکاف خروجی 200 میکرومتری استفاده می شود. اگر این تکفامگر برای ایجاد نوری با طول موج متوسط 500 nm تنظیم شده باشد، زمان و طول همدوسی این نور را به دست آورید.

(ب) این نور برای تشکیل فریز در یک آزمایش تداخل به کار برده می شود که در آن نور ابتدا با تقسیم دامنه به دو قسمت مساوی تجزیه می شود و سپس مجدداً یکی می شود. اگر اختلاف راه نوری بین دو مسیر 400 mm باشد، بزرگی تابع همبستگی بهنجار و مرئیت فریزهای حاصل را محاسبه کنید. (ج) اگر تابیدگی ماکسیم ایجاد شده توسط فریزها با یک مقیاس اختیاری 100 باشد، اختلاف بین تابیدگی ماکسیم و تابیدگی زمینه را در این مقیاس به دست آورید.

۱۴-۱۲ طول و سطح قاعده استوانه‌ای را تعیین کنید که در آن نور رسیده از خورشید همدوس است. برای این منظور، فرض کنید همدوسی فضایی "خوب" در محدوده‌ای روی می دهد که طول آن 25% مقدار ماکسیم حاصل از معادله $12-36$ است. خورشید زاویه 5° در سطح زمین می سازد. مقدار میانگین طیف مرئی را می توانید در 550 nm بگیرید. حجم همدوسی را همچنین برحسب تعداد طول موجها در طول و قطر استوانه بیان کنید.

۱۵-۱۲ (الف) نشان دهید مرئیت فریز را می توان با رابطه زیر بیان کرد

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|}{(I_1 + I_2)}$$

(ب) نسبت تابیدگی برای باریکه‌های تداخل کننده چه اندازه باشد تا مرئیت فریز به اندازه 10% مرئیت مربوط به باریکه‌های هم دامنه کاهش یابد؟

۱۶-۱۲ نشان دهید مرئیت فریزهای دوشکافی در مرتبه m با رابطه زیر داده می شود

$$V = 1 - \left(m \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

که در آن λ طول موج متوسط نور و $\Delta\lambda$ پهنای خط آن است.

۱۲-۱۷ یک لامپ جیوه صافی دار نور سبز را در 546.1 nm با پهنای خط 0.5 nm تولید می‌کند. این نور به یک شکاف دوگانه با فاصله 1 mm تابانده می‌شود. مرتبیت فریزها را روی پرده‌ای به فاصله 1 m در مجاورت فریز مرتبه $m = 20$ به دست آورید. (مسئله ۱۲-۱۶ را ببینید.) اگر این لامپ تخلیه را با یک چشمه نور سفید و یک صافی با پهنای خط 10 nm در 546 nm عوض کنیم، مرتبیت چگونه تغییر می‌کند؟

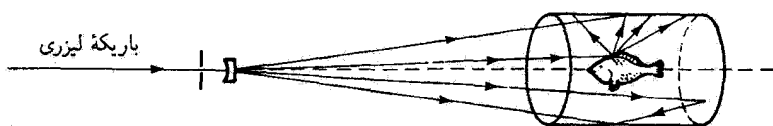
۱۲-۱۸ فریزهای نور سرخ کادمیم با طول موج 643.847 nm و پهنای خط 0.13 nm را با یک تداخل سنج مایکلسون تشکیل داده‌ایم. اگر یکی از آینه‌ها را از موقعیت اختلاف راه صفر بین بازوها به اندازه 1 cm حرکت دهیم، مرتبیت فریزها را تعیین کنید. اگر این فاصله 5 cm باشد مرتبیت چه اندازه تغییر می‌کند؟ در چه فاصله‌ای مرتبیت به صفر می‌رسد؟

۱۲-۱۹ (الف) مسئله ۱۲-۱۸ را برای خط سبز جیوه 546.1 nm با پهنای خط 0.25 nm حل کنید.

(ب) آینه‌ها را چه اندازه از اختلاف راه صفر می‌توان منتقل کرد تا مرتبیت فریز دست کم 85° باشد؟

مراجع

- [1] Born, M., and E. Wolf. *Principles of Optics*. New York: Pergamon Press, 1959.
- [2] Fowles, Grant R. *Introduction to Modern Optics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- [3] Parrent, Mark J., and George B. Parrent, Jr. *Theory of Partial Coherence*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.
- [4] Feynman, Richard P., Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures in Physics*, vol. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1975. Ch. 50.
- [5] Reynolds, George O., John B. DeVelis, George B. Parrent, Jr., and Brian J. Thompson. *Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics*. Bellingham, Wash.: SPIE Optical Engineering Press, 1989. Ch. 11, 17, 18.
- [6] Perina, Jan. *Coherence of Light*. New York: Van Nostrand Reinhold Co., 1971.



۱۳

هولوگرافی

مقدمه

هولوگرافی یکی از حوزه‌های بالنده‌ای است که موفقیت خود را مدیون لیزر است. اگر چه این فن در سال ۱۹۴۸ توسط دانشمند انگلیسی دنیس گابور قبل از پیدایش نور همدوس لیزر ابداع شد اما لیزر موفقیت آن را تضمین کرد. امت لیت و جوریس اوپاتنیکس در سال ۱۹۶۲ در دانشگاه میشیگان برای اولین بار نور لیزر را در هولوگرافی به‌کار بردند و همچنین روش برون‌محوری مهمی برای روشنایی دادن ابداع کردند که آن را در اینجا توضیح می‌دهیم.

بیشرفت قابل توجه در هولوگرافی سه‌بعدی که توسط هولوگرام امکانپذیر شد باعث جلب توجه بیش از حد محافل غیر علمی نیز شده است، به‌طوری که هولوگرافی در هنر و تبلیغات نیز کاربردهای روزافزونی یافته است.

۱-۱۳ عکاسی معمولی و هولوگرافیک

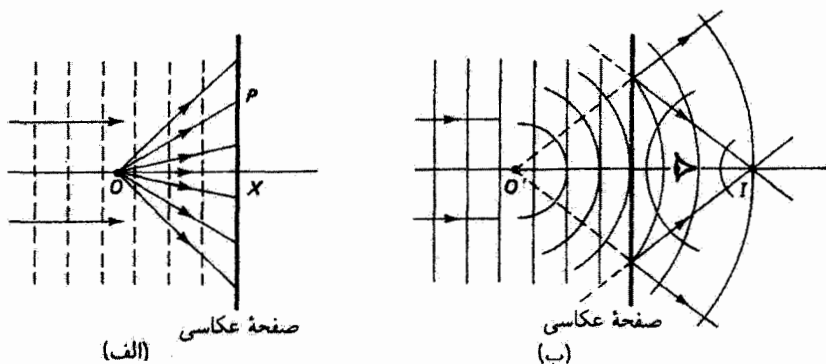
عکس معمولی چنانکه می‌دانیم یک روایت دوبعدی از یک صحنه سه‌بعدی است که در آن هر قسمت از صحنه که در محدوده عمق میدان عدسی واقع است کانونی می‌شود. در نتیجه، این عکس فاقد احساس عمق یا پارالاکسی است که با آن یک صحنه زنده را می‌بینیم. اما در مقابل،

هولوگرام صحنه را طوری ثبت می‌کند که در آن این کیفیتها حفظ می‌شوند. هولوگرام به‌خوبی توانسته است موج بریده نوری را که حامل تمام اطلاعات دیداری صحنه است برای مشاهده بعدی "منجمد" و نگهداری کند. با تماشای هولوگرام، این جبهه موج بازسازی یا نمایان می‌شود، و ما چیزی را می‌بینیم که اگر در صحنه اصلی حاضر بودیم از طریق "پنجره" ای که هولوگرام تعیین می‌کند می‌دیدیم. جبهه موج بازسازی شده احساس عمق و پارالاکس ایجاد می‌کند زیرا به ما امکان می‌دهد از لبه‌های شیء به فضای پشت آن نگاه کنیم. مثلاً با یک عدسی می‌توان روی جبهه موج بازسازی شده مانند جبهه موج اصلی کار کرد. بدین ترتیب، "هولوگرام"، چنانکه اسم آن نشان می‌دهد، "تمام پیام" را در بر دارد.

کیفیت‌های زنده تصویری که هولوگرام فراهم می‌کند از حفظ اطلاعات مربوط به فاز جبهه موج علاوه بر دامنه یا تابیدگی آن ناشی می‌شوند. وسایل ثبتی مانند فیلم عکاسی معمولی و فوتونفرونرگ تنها به انرژی تابشی دریافتی حساس هستند. در ظهور فیلم عکاسی، به‌عنوان مثال، چگالی اپتیکی اندوده در هر نقطه تابعی است از انرژی اپتیکی دریافتی در آنجا به علت واکنش شیمیایی حساس به نوری که نقره را به‌صورت فلزی آن احیا می‌کند. وقتی تنها انرژی ثبت شود، روابط فازی موجهای ورودی از راستاها و فواصل مختلف و در نتیجه زنده‌وارگی دیداری صحنه از بین می‌روند. برای ثبت این روابط فازی، لازم است اطلاعات فاز به اطلاعات دامنه تبدیل شود. تداخل امواج نور وسیله لازم را فراهم می‌کند. یادآوری می‌کنیم وقتی امواج با هم تداخل می‌کنند برای اینکه دامنه بزرگی تولید کنند باید هم‌فاز باشند، و وقتی دامنه مینیمم است آنها در فاز مقابل هستند به طوری که سهمهای مختلف یکدیگر را عملاً حذف می‌کنند. پس اگر جبهه موج نور ناشی از صحنه را با یک جبهه موج مرجع همدوس تداخل دهیم، نقش تداخل حاصل حاوی اطلاعات مربوط به روابط فازی هر قسمت از جبهه موج صحنه با موج مرجع و در نتیجه با قسمتهای دیگر است. این وضعیت را گاهی با نامیدن موج مرجع با عنوان موج حامل که توسط موج علامت ناشی از صحنه مدوله می‌شود توصیف می‌کنند. این زبان مقایسه سودمندی با فنون ارتباطات موج رادیویی فراهم می‌کند. در عکس معمولی از یک عدسی برای میزان کردن صحنه بر روی فیلم استفاده می‌شود. تمام نوری که از یک نقطه صحنه سرچشمه می‌گیرد و توسط عدسی جمع‌آوری می‌شود در یک نقطه همیوغ در تصویر کانونی می‌شود. می‌توانیم بگوییم یک رابطه یک به یک بین نقاط شیء و تصویر وجود دارد. اما هولوگرام، چنانکه خواهیم دید، بدون استفاده از عدسی یا هر وسیله کانونی‌کننده دیگری تولید می‌شود. هولوگرام یک نقش تداخل پیچیده از فریزهایی با فاصله میکروسکوپی است و نه تصویری از صحنه. هر نقطه هولوگرام از تمام نقاط صحنه نور دریافت می‌کند یا، به تعبیر دیگر، هر نقطه شیء به تمام هولوگرام نور می‌تاباند. تناظر یک به یک بین نقاط شیء و نقاط جبهه موج قبل از اینکه بازسازی روی دهد وجود ندارد. هولوگرام ثبت این جبهه موج است.

۱۳-۲ هولوگرام چشمه نقطه‌ای

برای اینکه ببینیم فرایند ساختن هولوگرام و استفاده از هولوگرام در بازسازی صحنه اصلی چگونه در عمل صورت می‌گیرد، از یک مثال ابتدایی یعنی هولوگرام چشمه نقطه‌ای شروع می‌کنیم. در شکل ۱۳-الف، جبهه‌های موج تخت مربوط به تابش تکفام همدوس به فیلم عکاسی می‌تابند. علاوه بر این، جبهه‌های موج کروی حاصل از پراکندگی از نقطه شیء O نیز به این فیلم می‌رسند. در نتیجه، این فیلم عکاسی پس از ظهور یک رشته فریزهای تداخل هم‌مرکز حول مرکز X نشان می‌دهد. نقطه‌ای مانند P ، به‌عنوان مثال، به شرطی روی یکی از این حلقه‌ها واقع می‌شود که اختلاف راه $OP - OX$ مضرب درستی از طول موج باشد، که این نشان می‌دهد باریکه مرجع مربوط به جبهه موج تخت نور با باریکه موضوع مربوط به نور پراکنده همگام به P می‌رسد. فیلم عکاسی ظاهر شده که تخته منطقه گابور یا عدسی منطقه می‌شود دارای منطقه‌های عبوری دایره‌ای است که تراگیسلندگی آنها به‌کندی با شعاع تغییر می‌کند. تخته منطقه گابور را توری دایره‌ای "سینوسی" می‌نامند زیرا چگالی اپتیکی و در نتیجه تراگیسلندگی این توری به صورت $\cos^2 r^2$ در امتداد شعاع نقش منطقه تغییر می‌کند. این تخته سینوسی در واقع هولوگرام نقطه O است. خود هولوگرام یک رشته فریزهای تداخل دایره‌ای است که شباهتی به شیء ندارند اما می‌توان شیء O را، همچون در شکل ۱۳-ب، با قرار دادن هولوگرام در باریکه مرجع بدون حضور خود شیء بازسازی کرد. درست همان‌طور که نوری که در اصل از O ناشی می‌شود با باریکه مرجع تداخل می‌کند و حلقه‌های منطقه تولید می‌شوند، همین باریکه مرجع اکنون در پراش از



شکل ۱۳-۱ هولوگرام چشمه نقطه‌ای O در (الف) ساخته می‌شود و در (ب) برای بازسازی جبهه موج به‌کار می‌رود. دو تصویر در بازسازی تشکیل می‌شوند.

۱. به صورت دقیقتر، تراگیسلندگی را می‌توان با $A + B \cos^2(ar^2)$ بیان کرد که در آن A ، B و a ثابت‌اند. مسئله ۱۳-۱۲ را ببینید.

حلقه‌ها در راستاهایی که از نقطه معادل O' ناشی می‌شوند تقویت می‌شود. بنابراین، نقطه O' مکان تصویر مجازی نقطه شیء اصلی O است که با نگاه به هولوگرام در بازسازی دیده می‌شود. شرط تقویت همچنین باید توسط نقطه دومی در طرف خروجی هولوگرام، یعنی نقطه I که متقارن O' نسبت به فیلم عکاسی است، برقرار شود. واضح است که مجموعه فاصله‌های از I تا منطقه‌های متوالی در همان روابط هندسی مربوط به فاصله‌های متناظر از O' تا این منطقه‌ها صدق می‌کنند. بنابراین، نور پراشیده نیز به نقطه I ، که تصویر حقیقی نقطه شیء اصلی O است که می‌توان آن را روی پرده میزان کرد، می‌گراید. اگر در ساختن این هولوگرام، نقطه شیء O را دورتر بیریم شعاع هر منطقه افزایش می‌یابد. برای شیء برون‌محوری در بینهایت، منطقه‌ها فریزهای تداخل موازی و راست هستند. هولوگرام در این مورد یک هولوگرام توری است که از تقاطع دو جبهه موج تخت مربوط به نور رسیده به فیلم عکاسی از راستاهای مختلف تشکیل شده است. هولوگرام توری را در فصل ۱۷ بیشتر بررسی می‌کنیم. همچنانکه در آنجا توضیح می‌دهیم، هر چه زاویه بین این جبهه‌های موج زیادتر باشد فاصله بین فریزهای تداخل ریزتر است. می‌توان دید که خانواده فریزهای موازی راست و دایره‌ای که از آنها بحث کردیم موارد خاصی از تداخل دو چشمه نقطه‌ای هستند که به ترتیب در صفحه‌های عمود بر و موازی با خط واصل این نقاط مشاهده می‌شوند. (بحث مربوط به شکل ۵-۱۰ را ببینید.) وقتی نقطه شیء O را با یک شیء گسترده یا صحنه سه‌بعدی عوض کنیم، هر نقطه از صحنه نقش منطقه گابور خاص خود را روی فیلم تولید می‌کند. هولوگرام اکنون مونتاژ پیچیده‌ای از منطقه‌ها است که در آن تمام اطلاعات جبهه موج ناشی از صحنه نهفته است. در بازسازی، هر مجموعه منطقه‌ها تصویرهای مجازی و حقیقی خاص خود را تولید می‌کند، و صحنه اصلی دوباره ایجاد می‌شود. ما معمولاً تصویر مجازی را با نگاه به هولوگرام می‌بینیم. شکل ۱۳-۱ نشان می‌دهد که وقتی از این طریق تصویر مجازی را می‌بینیم، جلو نور غیرلازمی که تصویر حقیقی را تشکیل می‌دهد نیز گرفته می‌شود. لیت و اوپاتنیکس یک فن برون‌محوری ابداع کردند که در آن از یک یا چند آینه برای آوردن باریکه مرجع از زاویه دیگری استفاده می‌شود، و در نتیجه راستاهای جبهه‌های موج مجازی و حقیقی بازسازی شده از هم جدا می‌شوند.

دو نوع ساده هولوگرام که در بالا از آنها بحث کردیم تخته منطقه گابور و توری هولوگرافیک هستند که به ترتیب به اشیاء نقطه‌ای در فاصله متناهی و در فاصله بینهایت از فیلم مربوط می‌شوند. اگر تخته منطقه یا توری یک نوع تراگسیلدگی موج مربعی با ماکسیمها و مینیمهای متناوب فراهم کند آنگاه تصاویر پراشیده چندگانه امکانپذیر خواهند بود. می‌دانیم که توری پراش معمولی از این نوع مرتبه‌های پراشی با $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ایجاد می‌کند که با زاویه پراش ماکسیم محدود می‌شوند. تخته منطقه با این خواص تراگسیلدگی تخته منطقه فرنل است که نقاط کانون چندگانه‌ای در امتداد محور خود به وجود می‌آورد که از نقاط مربوط به تخته منطقه گابور فراتر می‌روند. اما

می‌توان نشان داد وقتی نیمرخ تراگسیلندگی شیارها یا منطقه‌ها تیز نیستند بلکه به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند، این نکات کلی دربارهٔ مرتبه‌ها را باید تغییر داد. به‌خصوص، وقتی توری یا منطقه‌های دایره‌ای دارای سرشت "سینوسی" هستند، یعنی نیمرخ تراگسیلندگی آنها از تابیدگی $\cos^2 x$ (توری) یا $\cos^2 r^2$ (تخته منطقه دایره‌ای) تبعیت می‌کند، تنها تصاویر مرتبه اول علاوه بر مرتبه صفرم در بازسازی ظاهر می‌شوند. برای منطقه‌های دایره‌ای، دو تصویر مرتبه اول عبارت‌اند از تصویرهای مجازی و حقیقی که از آنها بحث کردیم.

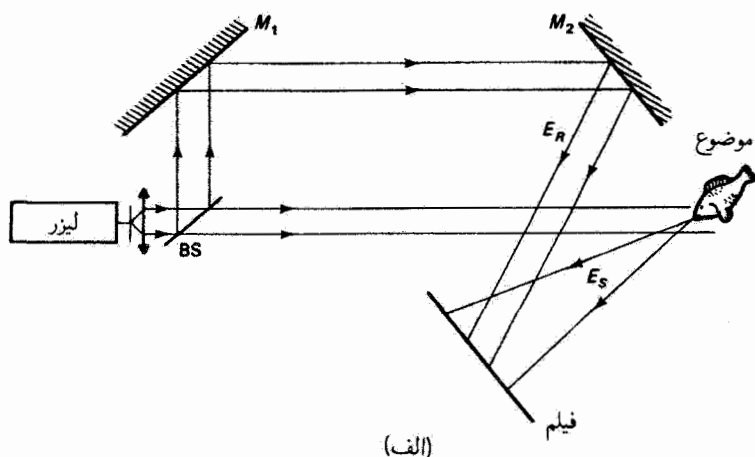
در تشکیل هولوگرامها چنانکه در شکل ۱۳-۱ الف نشان داده شده است، اگر باریکه‌های علامت و مرجع از لحاظ دامنه برابر باشند تابیدگی سینوسی در فیلم می‌تواند در نقاط تداخل ویرانگر به صفر برسد. اما اندوده توانایی پاسخ خطی به تمام تابیدگیها که از صفر تا ماکسیمم تغییر می‌کنند ندارد، و در نتیجه فیلم ظاهر شده یک تراگسیلندگی وابیچیده نسبت به $\cos^2 r^2$ نشان می‌دهد، و پراشهای مرتبه‌های بالاتر تضعیف نمی‌شوند. با قویتر کردن باریکه مرجع نسبت به باریکه علامت، می‌توان تابیدگی مینیمم در اندوده را تا تراز مشخصات پاسخ خطی آن بالا برد. تغییری در گسیلندگی از نوع زیر به‌وجود می‌آید

$$T = T_0 + T_m \cos^2 r^2$$

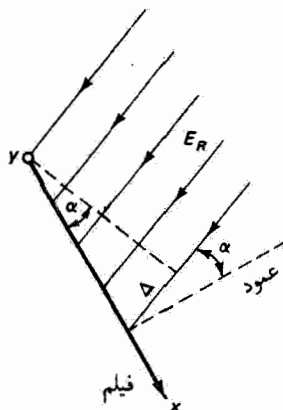
و تصاویر مرتبه بالاتر حذف می‌شوند. این وضعیت میانه عبارت است از اینکه تراگسیلندگی $\cos^2 r^2$ اکنون روی تراگسیلندگی مینیمم مخالف صفر T_0 می‌افتد و تباین فریز تا اندازه‌ای کم می‌شود. همچنانکه در بالا گفتیم، دامنه باریکه مرجع را تا اندازه‌ای بیشتر از دامنه متوسط باریکه علامت یا شیء می‌کنند، و در نتیجه موج مرجع توسط علامت مدوله می‌شود. حتی وقتی علامت صفر است، باریکه مرجع دارای شدت کافی برای تحریک اندوده در ناحیه پاسخ خطی آن به انرژی تابشی است. در نتیجه اثر تغییر در شدت علامت ایجاد تغییر در تباین فریزهای تداخل است، در حالی‌که تغییر در فاز (یا راستا) برای امواج علامت باعث تغییر در جدایی فریزها می‌شود. بدین ترتیب، هر تغییری در دامنه و فاز امواج شیء در تغییر موضعی متناظری مربوط به فاصله و تباین فریز در هولوگرام نهفته می‌شود. برای ثبت صادقانه این اطلاعات از فیلمی با تفکیک زیاد استفاده می‌کنند.

۱۳-۳ هولوگرام شیء گسترده

یکی از چند فن هولوگرافیک برای ایجاد باریکه مرجع برون‌محوری همراه با باریکه نور بازتابیده پخشیده از صحنه سه‌بعدی در شکل ۱۳-۲ الف نشان داده شده است. برای باز کردن باریکه ناشی از لیزر، از ترکیب روزنه مدور و عدسی استفاده می‌شود. آنگاه این باریکه گسترده با یک تخته



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۲ (الف) دستگاه هولوگرافی برون محوری. (ب) سمتگیری فیلم نسبت به باریکه مرجع در (الف).

نیم بازتابنده BS تقسیم می شود تا دو باریکه همدوس تولید شوند. یک باریکه، که باریکه مرجع E_R است، با دو آینه تخت M_1 و M_2 به فیلم عکاسی، چنانکه نشان داده شده است، تابانده می شود. باریکه دیگر E_S از موضوع بازتاب پخشیده پیدا می کند و قسمتی از آن، که باریکه موضوع نامیده می شود، نیز به فیلم می رسد و در آنجا با باریکه مرجع تداخل می کند و هولوگرام را به وجود می آورد. اکنون توضیح کیفی قبلی را تا اندازه ای کمی می کنیم. فرض کنید باریکه مرجع در صفحه فیلم با میدان زیر نمایش داده شود

$$E_R = r e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (۱-۱۳)$$

دامنه $r = r(x, y)$ را می‌توان روی جبهه موج که اساساً تخت است ثابت گرفت. زاویه فاز φ از زاویه α بین صفحه فیلم و جبهه موج باریکه مرجع، که در شکل ۱۳-۲ ب نشان داده شده است، ناشی می‌شود. اگر لبه بالایی باریکه در $x = 0$ به فیلم بخورد، φ تابعی خطی از فاصله x در امتداد صفحه فیلم است زیرا

$$\varphi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \Delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) x \sin \alpha \quad (2-13)$$

بدین ترتیب، زاویه فاز φ تنها به زاویه صفحه فیلم نسبت به باریکه مرجع مربوط می‌شود و در معادله ۱۳-۱ به صورت یک عامل نمایی ظاهر می‌شود:

$$E_R = r e^{i\omega t} e^{i\varphi} \quad (3-13)$$

اگر باریکه مرجع نبود تنها باریکه موضوع که با رابطه زیر توصیف می‌شود به فیلم می‌تابید

$$E_S = s e^{i(\omega t + \theta)} \quad (4-13)$$

که در آن $s(x, y)$ دامنه نور بازتابیده در نقاط مختلف فیلم است و $\theta = \theta(x, y)$ تابع پیچیده‌ای ناشی از تغییر در فاز نوری است که از قسمت‌های مختلف موضوع به فیلم می‌رسد. اگر تنها باریکه موضوع به فیلم بتابد، فیلم باید متناسب با تابیدگی باریکه موضوع سیاه شود. با حذف عوامل ثابت بین تابیدگی و مجذور دامنه برای سادگی، می‌نویسیم

$$I_S = |E_S|^2 = E_S^* E_S = [s(x, y)]^2 \quad (5-13)$$

بنابراین، تابع تابیدگی حاوی اطلاعاتی درباره فاز باریکه موضوع نیست. اما وقتی باریکه مرجع نیز وجود داشته باشد دامنه برآیند E_F در هر نقطه از فیلم بر اساس تقریب نرده‌ای— با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_F = E_R + E_S$$

و در نتیجه

$$I_F = |E_F|^2 = (E_R + E_S)(E_R^* + E_S^*)$$

با ضرب کردن دو جمله‌ایها در هم، به دست می‌آوریم

$$I_F = E_R E_R^* + E_S E_S^* + E_R E_S^* + E_S E_R^* \quad (۶-۱۳)$$

$$I_F = r^2 + s^2 + E_R E_S^* + E_S E_R^*$$

طرف راست معادله ۶-۱۳ تابعی از x و y است و از این رو از یک نقطه به نقطه دیگر روی صفحه فیلم تغییر می‌کند. دو جمله آخر حاوی تابع مهم $\theta(x, y)$ هستند. به طور صریح داریم

$$I_F = r^2 + s^2 + r s e^{i(\omega t + \theta)} e^{-i(\omega t + \varphi)} + r s e^{i(\omega t + \varphi)} e^{-i(\omega t + \theta)} \quad (۷-۱۳)$$

$$I_F = r^2 + s^2 + r s e^{i(\theta - \varphi)} + r s e^{-i(\theta - \varphi)}$$

این تابع تأییدگی توصیف‌کننده هولوگرام است. وقتی فیلم ظاهر شود، تراگسیلندگی آن با I_F تعیین می‌شود.

برای بازسازی تصویر صحنه، هولوگرام دوباره، همچون در تشکیل آن، در باریکه مرجع گذاشته می‌شود (شکل ۱۳-۲ب). البته موضوع اکنون وجود ندارد. وقتی باریکه مرجع به هولوگرام تابانده شود، هولوگرام، به علت تابع تراگسیلندگی خود، هم دامنه و هم فاز را مدوله می‌کند. مانند سابق داریم

$$E_R = r e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (۸-۱۳)$$

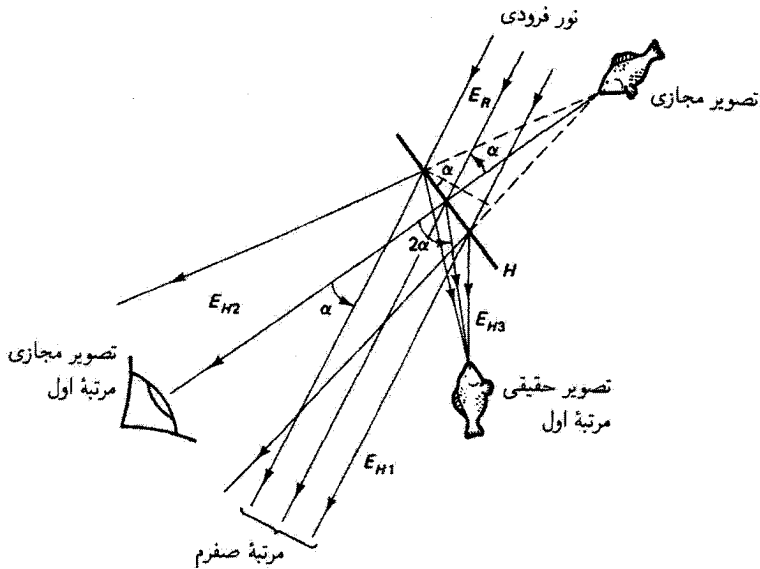
آنگاه باریکه حاصل را می‌توان، با حذف ثابتها، برحسب میدان E_H به صورت زیر بیان کرد

$$E_H \propto I_F E_R = (r^2 + s^2) E_R + r^2 s e^{i(\omega t + \theta)} + r^2 e^{i(2\varphi)} s e^{i(\omega t - \theta)} \quad (۹-۱۳)$$

که در آن معادله‌های ۷-۱۳ و ۸-۱۳ را در هم ضرب کرده‌ایم. اکنون سه جمله معادله ۹-۱۳ را به عنوان بازسازی سه باریکه متمایزی که از هولوگرام ناشی می‌شوند تعبیر می‌کنیم. این سه باریکه در شکل ۱۳-۳ نشان داده شده‌اند. جمله اول یعنی

$$E_{H1} = (r^2 + s^2) E_R = (r^2 + s^2) r e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (۱۰-۱۳)$$

نمایشگر باریکه مرجعی است که تنها از لحاظ دامنه (و نه فاز) مدوله شده است. در نتیجه، این باریکه مانند باریکه فرودی به نظر می‌رسد و از هولوگرام بدون انحراف عبور می‌کند. مشابه با توری



شکل ۱۳-۳ بازسازی هولوگرام تشکیل شده در شکل ۱۳-۲ الف.

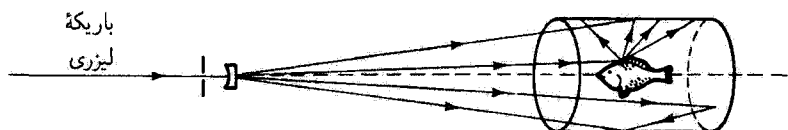
هولوگرافیک، این باریکه به پراش مرتبه صفرم مربوط می‌شود. جمله دوم عبارت است از

$$E_{H2} = r^2 se^{i(\omega t + \theta)} \quad (11-13)$$

که باریکه موضوع را توصیف می‌کند که با عامل r^2 مدوله دامنه شده است. بدین ترتیب، این باریکه جبهه موج بازسازی شده ناشی از موضوع را نمایش می‌دهد و با باریکه مرجع زاویه α می‌سازد. چون این باریکه اساساً باریکه موضوع است، به نظر می‌رسد که از موضوع ناشی می‌شود؛ و بنابراین، در خروج از هولوگرام واگرا می‌شود، چنانکه انگار از تصویر مجازی در پشت هولوگرام آمده است. این تصویر مجازی چیزی است که معمولاً می‌بینیم. جمله سوم با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_{H3} = r^2 e^{i(2\varphi)} se^{i(\omega t - \theta)} \quad (12-13)$$

و نمایشگر باریکه موضوع است که از لحاظ دامنه و فاز مدوله شده است. این باریکه باریکه موضوع در معادله ۱۳-۴ را با وارونگی فاز بازسازی می‌کند. هر تأخیر فازی در E_S اکنون به صورت تقدم فاز نمایان می‌شود. تصویر پشت و رو شده است. به علت وارونگی فاز، پرتوها که



شکل ۱۳-۴ فیلم استوانه‌ای حول موضوع یک هولوگرام 36° درجه‌ای ثبت می‌کند.

ابتدا واگرا بودند همگرا می‌شوند و به صورت تصویر حقیقی در طرفی که به هولوگرام نگاه می‌کنیم متمرکز می‌شوند. عامل $e^{i(2\varphi)}$ ، در مقایسه با جمله فاز در معادله $13-3$ ، نمایشگر جابه‌جایی زاویه‌ای راستای تصویر به اندازه 2α نسبت به عمود بر صفحه فیلم است. توجه کنید که دستگاه برون‌محوری در شکل $13-2$ الف هولوگرامی تولید می‌کند که در آن دو باریکه مرتبه اول از لحاظ راستا از یکدیگر و باریکه مرتبه صفرم جدا شده‌اند. تصویر مجازی را می‌توان بدون دخالت سایر باریکه‌ها به وضوح مشاهده کرد.

هولوگرام حاصل از شیء گسترده همان ویژگیهای اساسی هولوگرام شیء نقطه‌ای را از خود نشان می‌دهد. عکاسی با هولوگرافی یک فرایند دو مرحله‌ای است. به یاد داشته باشید که در ساختن هولوگرام از عدسی استفاده نمی‌شود و وجود باریکه مرجع ضروری است. نور باید همدوسی زمانی کافی داشته باشد به طوری که اختلاف راه بین دو باریکه از طول همدوسی نور بیشتر نباشد، و همچنین باید دارای همدوسی فضایی کافی باشد به طوری که باریکه در آن قسمتی از جبهه موج که برای در بر گرفتن صحنه لازم است همدوس باشد. البته دستگاه هولوگرافیک باید در طی نورگیری در حد کسری از طول موج بدون ارتعاش باشد، و این شرطی است که به آسانی برقرار می‌شود اگر، برای انجماد حرکت ناخواسته، از تپهای لیزری پر توانی با مدت بسیار کوتاه استفاده شود.

دید سه بعدی از تمام جوانب برای شیء وقتی به دست می‌آید که فیلم هولوگرافیک را به صورت استوانه، مانند آنچه در شکل $13-4$ نشان داده شده است، دور شیء بپیچیم. نور هم به طور مستقیم و هم با استفاده از آینه‌ای در انتهای استوانه (باریکه مرجع) و با پراکندگی از شیء به فیلم می‌رسد. وقتی تحت این شرایط نگاه کنیم، هولوگرام 36° درجه‌ای منظره‌ای از ماهی از تمام جوانب ایجاد می‌کند.

۱۳-۴ ویژگیهای هولوگرام

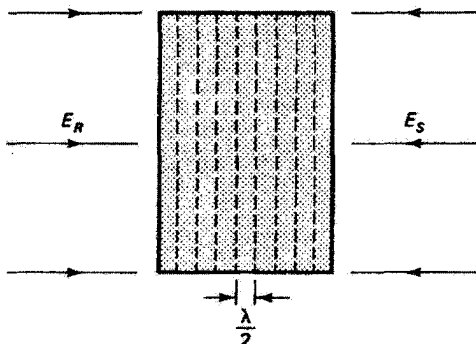
چنانکه قبلاً گفته شد، تمام هولوگرام نور را از هر نقطه شیء در صحنه دریافت می‌کند. در نتیجه، هر قسمت از هولوگرام حاوی اطلاعات از تمام صحنه است. اگر هولوگرام را به صورت مربعهای کوچک ببریم، هر مربع هولوگرام تمام صحنه است اما کم شدن گشودگی باعث کاهش کیفیت تفکیک تصویر می‌شود. وضعیت بسیار شبیه به وقتی است که از یک روزنه مربعی کوچک واقع در

جلو یک پنجره نگاه کنیم. اگر جای روزنه را تغییر دهیم همان صحنه را می بینیم اما با چشم اندازی که اندکی تغییر کرده است. هر دیدی، با نمایش دادن عمق و پارالاکس، کامل است. یک خاصیت جالب توجه دیگر هولوگرام این است که چاپ معمولی هولوگرام، که ناحیه های شفاف و چگال اپتیکی را با هم عوض می کند، در عمل همان ویژگیها را دارد. "نگاتیو" هولوگرام نه تباین فریزها را تغییر می دهد نه فاصله آنها را، و در نتیجه اطلاعات ذخیره شده را تغییر نمی دهد. علاوه بر اینها، هولوگرام می تواند شامل چندین نورگیری جداگانه باشد که هر یک با زاویه متفاوتی بین فیلم و باریکه مرجع و با طول موج متفاوتی انجام شده است. در بازسازی، هر صحنه وقتی در راستای صحنه اصلی به آن نگاه کنیم با نور خاص خودش، بدون تداخل متقابل، دیده می شود.

۱۳-۵ هولوگرام نور سفید

اگر به هولوگرام شکل ۱۳-۳ در باریکه مرجعی نگاه کنیم که رنگ آن با رنگ باریکه مرجعی که برای ساختن هولوگرام به کار رفته است متفاوت باشد، می توان نشان داد که تصویر ماهی در زاویه دیگری دیده خواهد شد. هولوگرام مانند توری هولوگرافیک همچون یک عنصر پراشده عمل می کند. بنابراین، اگر باریکه مرجع نور سفید باشد، تصاویری که از ناحیه های طیفی مختلف ناشی می شوند به طور پیوسته نسبت به هم جابه جا شده اند و یک پخشیدگی رنگی به وجود می آورند. با تولید هولوگرامی که دیدهای زاویه ای ممکن از موضوع را به دیدی از راه یک شکاف افقی محدود می کند، مغشوش بودن تصاویر کاهش می یابد. این هولوگرام در بازسازی تصویر اصلاح شده ای در نور سفید ایجاد می کند. اما تصویر مجازی را رنگی می بینیم. رنگ به خصوصی که دیده می شود بستگی به راستایی دارد که در آن، وقتی سر را در امتداد خط قائم حرکت می دهیم، به هولوگرام نگاه می کنیم. این نوع هولوگرام را هولوگرام رنگین کمانی می نامند. چون دید ما اکنون محدود به چیزی شده است که با نگاه به موضوع از شکاف افقی واقع در جلو آن می بینیم، هولوگرام رنگین کمانی پارالاکس افقی را دوباره ایجاد می کند اما نمی تواند پارالاکس قائم را بازسازی کند. با پوشاندن انتهای این هولوگرام با لایه نازکی از آلومینیم، که به منزله آینه ای برای بازگرداندن نور به درون هولوگرام عمل می کند، می توان اکنون هولوگرام را در نور بازتابیده دید.

اگر ضخامت اندوده نسبت به جدایی فریزها زیاد باشد، هولوگرام را می توان سه بعدی یا هولوگرام حجمی در نظر گرفت. در این مورد، فریزهای تداخل عبارت اند از سطوح تداخل در اندوده که مانند صفحه های بلورین آنها در پراشیدن نور، یعنی مانند یک توری سه بعدی، عمل می کند. برخلاف هولوگرامهای دوبعدی، هولوگرامهای سه بعدی وقتی نور سفید به آنها تابانده می شود می توانند تصاویر را به رنگ اصلی آنها دوباره ایجاد کنند. برای اینکه ببینیم چگونه این امر روی می دهد، تشکیل سطوح تداخل نزدیک به هم را در یک اندوده ضخیم با به کار بردن باریکه های مرجع و موضوع

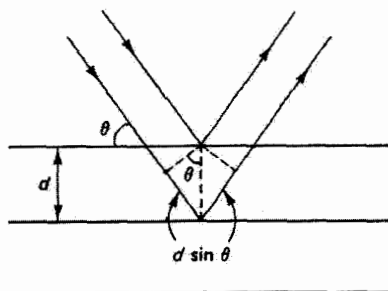


شکل ۵-۱۳ تشکیل صفحه‌های فریز موج ساکن در هولوگرام حجمی با دو موج تخت متقابل.

همدوس با بیشترین فاصله زاویه‌ای ممکن یعنی ۱۸۰° ، مطابق شکل ۵-۱۳، در نظر می‌گیریم. اگر دو باریکه تکفام، به عنوان مثال، دارای جهت موجهای تخت ناوابیچیده باشند، نقش موج ساکن صفحه‌های پادگرهی عمود بر راستاهای باریکه‌ها و به فاصله $\lambda/2$ از یکدیگر، مطابق شکل، به وجود می‌آورد. تابیدگی ماکسیمم در این صفحه‌ها، پس از ظهور فیلم، صفحه‌هایی ایجاد می‌کنند که دارای نقره آزاد اضافی هستند و به صورت صفحه‌های بازتابنده جزئی عمل می‌کنند. البته خود اندوده باید توانایی تفکیک زیاد برای ثبت دقیق جزئیات داشته باشد. به هولوگرام ظاهر شده وقتی از راستای باریکه مرجع، به عنوان مثال نور سفید تابانده شود این نور از هر لایه نقره بازتاب جزئی پیدا می‌کند، اما تنها طول موج نوری که در ساختن هولوگرام به کار برده شده است با این بازتابهای چندگانه تقویت می‌شود. البته فیزیک این فرایند با فیزیک پراش پرتو ایکس از صفحه‌های بلور که از معادله براگ

$$m\lambda = 2d \sin \theta$$

تبعیت می‌کند، و در شکل ۶-۱۳ نشان داده شده است، یکسان است. بدین ترتیب، اگر نور تحت زاویه معین θ به هولوگرام حجمی تابانده شود تنها یک طول موج که در معادله براگ به طور موضعی، به ازای فاصله صفحه d ، صدق می‌کند تقویت می‌شود و به صورت یک باریکه بازتابنده روشن دیده می‌شود. هر چه اندوده ضخیمتر و تعداد صفحه‌های بازتابنده بیشتر باشد، هولوگرام در تقویت طول موج صحیح گزینمندتر است. اگر هولوگرام حجمی با نورگیری چندگانه ساخته شود در هر یک از سه رنگ اصلی ساخته شود، فرایند بازسازی با روشنایی نور سفید می‌تواند تصویری سه بعدی با رنگ کامل به وجود آورد.



شکل ۱۳-۶ تداخل سازندهٔ امواج بازتابیده از صفحه‌هایی که فاصلهٔ آنها d است از معادلهٔ براگ تبعیت می‌کند: $m\lambda = 2d \sin \theta$.

۱۳-۶ کاربردهای دیگر هولوگرافی

هولوگرافی کاربردهای جذاب بسیار متنوعی دارد که چندتایی از آنها را به اختصار بیان می‌کنیم. هولوگرام، که خودش حاصل تداخل نور است، به‌عنوان یک فن جانشین در تداخل‌سنجی، که علم استفاده از طول‌موج نور و تداخل برای اندازه‌گیری دقیق راههای نوری بسیار کوچک است، به‌کار می‌رود. فرض کنید هولوگرام ماهی شکل ۱۳-۳ و خود ماهی دقیقاً به مکانهای اصلی خود باز گشته‌اند، و فرض کنید همان باریکهٔ مرجع صحنه را روشن می‌کنند. در نگاه به هولوگرام، اکنون تصویر مجازی را می‌بینیم که روی خود شیء افتاده است. هر دو با نور همدوس یکسانی دیده می‌شوند. اگر از موقع ثبت هولوگرام هیچ تغییری روی نداده باشد، این صحنه طوری به نظر می‌رسد که انگار موضوع یا هولوگرام به تنهایی در جای خود قرار دارد. اما فرض کنید الگوی ماهی تغییرات کوچکی از لحاظ شکل، مثلاً به علت انبساط گرمایی، پیدا کرده باشد. اکنون تصویر مستقیم شیء و تصویر هولوگرافیک اندکی با هم تفاوت دارند، و نور تشکیل‌دهندهٔ دو تصویر تداخل می‌کند و فریزهایی تولید می‌کند که معرف اندازهٔ تغییر در موقعیتهای خاص، همچون در مورد حلقه‌های نیوتون، هستند. این فن غالباً برای تعیین نقاط تنش ماکسیمم روی موضوع تحت فشار، مثلاً در مورد لاستیک خودرو، به‌کار برده می‌شود. حساسیت این فن در ثبت هولوگرافیک جریان همرفت اطراف رشتهٔ داغ، امواج تراکمی اطراف گلولهٔ سریع، و بالهای در حال حرکت مگس‌میوه، به‌نحو چشمگیری نشان داده شده است. تغییراتی را که در یک دورهٔ زمانی روی می‌دهند می‌توان با بازگرداندن الگو به دستگاه هولوگرافیک به همان صورت مشاهده کرد.

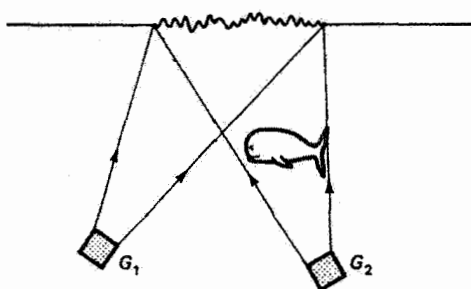
کاربرد مفید دیگر هولوگرافی در میکروسکوپی است. وقتی نمونه‌های سلولها یا ذرات بسیار کوچک را به روشهای معمول با بزرگنمایی زیاد می‌بینیم، عمق میدان را به همان نسبت کم می‌کنیم. عکسی که حرکت قطعهٔ نمونه را منجمد می‌کند عمق میدان بسیار محدودی از قطعهٔ نمونه را در

یک تصویر کانونی شده در بر می‌گیرد. عیبهای این محدودیت را می‌توان رفع کرد اگر این عکس یک هولوگرام باشد که در یک عکسبرداری لحظه‌ای منفرد تمام عکسهای معمولی را که می‌شد با کانونی کردن‌های متوالی در تمام عمق نمونه زنده تهیه کرد بالقوه در بر دارد. تصویری را که با هولوگرام تهیه می‌شود می‌توان با کانونی کردن در فرصت کافی روی هر عمقی از میدان نامتغیر مشاهده کرد. در ساختن هولوگرام با میکروسکوپ، به قطعه نمونه نور لیزر تابانده می‌شود که قبلاً خارج از میکروسکوپ تقسیم شده است و قسمتی از آن مستقلاً به فیلم عکاسی می‌رسد، که در آنجا به باریکه موضوع که با اپتیک میکروسکوپ پردازش شده است می‌پیوندد. علاوه بر این، می‌توان نشان داد اگر طول موج نور بازسازنده λ_r بزرگتر از طول موج λ_s که در "هولوگرام برداری" از موضوع به‌کار رفته است باشد، بزرگنمایی زیر به دست می‌آید

$$M = \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s}\right) \quad (13-13)$$

که در آن p فاصله شیء (موضوع تا فیلم) و q فاصله تصویر متناظر (تصویر تا هولوگرام) است. فاصله‌های شیء و تصویر به شرطی با هم برابرند که جبهه‌های موج مرجع و بازسازنده امواج تخت باشند. از معادله ۱۳-۱۳ معلوم می‌شود که اگر هولوگرام، برای مثال، با لیزر پرتو ایکس ساخته می‌شد و با نور مرئی دیده می‌شد، بزرگنمایی تا 10^6 بدون خراب شدن تفکیک به دست می‌آمدند. این پیش‌بینی در اندیشه ساختن لیزرهای پرتو ایکس مؤثر بوده است. هولوگرامهای پرتو ایکس اگر ساخته شوند می‌توانند تصاویر سه‌بعدی کاملاً مفصلی از اشیاء میکروسکوپی که کوچکی و پیوسته‌ها و مولکول DNA به وجود آورند. اینکه می‌توان هولوگرام را با تابشی دید که طول موج آن متفاوت از طول موج تابشی است که در ساختن آن به‌کار برده شده است، امکانات قابل توجه دیگری فراهم می‌آورد، که می‌توانیم برای مثال استفاده از هولوگرام موج فراصوتی برای جانشینی پرتوهای ایکس پزشکی یا خواندن هولوگرام راداری با طول‌موجهای مرئی را نام ببریم. در واقع، گایور در کار اصلی خود بازسازی هولوگرام موج الکترونی را با امواج اپتیکی برای بهتر کردن تفکیک میکروسکوپیهای الکترونی مطرح کرد.

اشاره به هولوگرام فراصوتی در بالا نشان می‌دهد که امواج تولیدکننده هولوگرام لازم نیست ماهیت الکترومغناطیسی داشته باشند. در واقع، اصول هولوگرافی بستگی به سرشت عرضی تابش ندارند. به علت توانایی نفوذ امواج فراصوتی در اشیائی که برای نور مرئی کدر هستند، هولوگرامهایی که با این امواج ساخته می‌شوند می‌توانند بسیار مفید باشند. اجسام کدری که می‌توان از این طریق برای آنها هولوگرام تهیه کرد از چشم انسان تا گورهای باستانی را شامل می‌شوند. ساختارها و محفظه‌های درونی را می‌توان در تصاویر سه‌بعدی که با هولوگرافی فراصوتی تشکیل شده‌اند آشکار



شکل ۷-۱۳ تغییر شکل در سطح آب ناشی از دو موج فراصوتی همدوس.

کرد. شکل ۷-۱۳ کاربرد دیگری از هولوگرافی فراصوتی را برای آشکار کردن اشیاء زیر سطح اقیانوسها نشان می‌دهد. G_1 و G_2 دو مولد جفت شده فازی هستند که امواج فراصوتی همدوس تابش می‌کنند. جبهه موج ناشی از G_2 توسط شیء زیر آبی تغییر شکل می‌یابد و با باریکه مرجع تغییر شکل نیافته ناشی از G_1 تداخل می‌کند. تغییر شکلهای سطح آب نمایشگر هولوگرام صوتی هستند. اگر این ناحیه با نور تکفام روشن شود، از نور پراشیده از این تغییر شکلهای می‌توان عکسبرداری کرد و آن را به تصویر دیداری شیء زیر آب تبدیل کرد. امکان آشکارسازی زیردریاها یک کاربرد نظامی بدیهی است.

ذخیره‌سازی هولوگرافیک داده‌ها نیز امکانات عظیمی را پیش می‌آورد. چون داده‌ها را می‌توان با فن هولوگرافیک به ابعادی از مرتبه طول موج نور تقلیل داد، می‌توان از هولوگرامهای حجمی برای ثبت مقادیر زیادی اطلاعات استفاده کرد. وقتی هولوگرام چرخانده شود، نوردهی جدیدی را می‌توان انجام داد. بلورهای حساس به نور، مانند بلور برومیدپتاسیم با مراکز رنگی یا بلور نیوبات لیتیم، به جای لایه‌های ضخیم اندوده‌های نوری قابل استفاده‌اند. چون اطلاعات را می‌توان به این ابعاد ریز تقلیل داد و بلور را می‌توان پس از چرخشهای کوچکی که جای ورق زدن صفحه‌ها را می‌گیرند مکرراً نوردهی کرد، گفته شده است که تمام اطلاعات یک کتابخانه بزرگ را می‌شود از لحاظ نظری در بلوری به اندازه یک حبه قند ثبت کرد؛ البته می‌توان اطلاعات را به صورت رقمی ثبت کرد و با رایانه خواند، و در نتیجه ذخیره‌سازی هولوگرافیک وسیله‌ای برای تهیه حافظه رایانه فراهم می‌آورد. در ارتباط با انتقال نوری اطلاعات رایانه‌ای از طریق تارهای نوری، می‌توان ساماندهی اطلاعات، ذخیره‌سازی و بازیافت آنها را تماماً با استفاده از نور انجام داد. یک جنبه جذاب ذخیره‌سازی هولوگرافیک داده‌ها قابل اعتماد بودن آن است. چون هر واحد اطلاعات در تمام حجم هولوگرام و با روش هولوگرافیک یکتایی ثبت می‌شود، صدمه دیدن قسمتی از هولوگرام، در حالی که روی تراز علامت به نوبه تصویر بازسازی شده اثر می‌گذارد، تأثیری بر اعتمادپذیری آن ندارد. اطلاعات از دست نمی‌رود، برخلاف سایر اسبابهای حافظه‌دار که در آنها هر بیت اطلاعات مختصات ذخیره یکتایی دارد.

از طرف دیگر، رایانه‌ها با ممکن ساختن هولوگرام ترکیبی، که اشیاء سه‌بعدی را صادقانه نمایش می‌دهد، به نفع علم هولوگرافی کار می‌کنند. شیء ابتدا از لحاظ ریاضی با مشخص کردن مختصات و شدت تمام نقاطش تعریف می‌شود. رایانه دامنهٔ مختلط را که مجموع تابش ناشی از شیء و موج مرجع است محاسبه می‌کند و سپس ترسیم هولوگرام را نشان می‌دهد که می‌توان از آن عکسبرداری کرد و آن را به فاصله‌های مناسب فریز که لازم است تقلیل داد. برای مثال، یک جبههٔ موج ایده‌آل ناکروی را می‌توان به‌طور ترکیبی ایجاد کرد تا به‌عنوان الگویی به‌کار رود که مقابل آن به‌آینه‌ای، با استفاده از تداخل بین دو سطح به‌منزلهٔ راهنمای انجام تصحیحات لازم، می‌توان شکل داد.

حوزهٔ دیگری که هولوگرامها در آن می‌توانند بسیار مفید باشند تشخیص نقش است. به‌طور خلاصه، روند کار به‌صورت زیر است. به‌عنوان مثال، متنی برای یافتن یک حرف یا واژهٔ به‌خصوص رویش می‌شود. نور ناشی از متن مورد پژوهش از هولوگرام این حرف یا واژه که باید در دستگاه اپتیکی مناسبی تعیین هویت شود عبور داده می‌شود. وجود حرف با تشکیل لکهٔ روشن در موقعیتی که معرف مکان حرف در متن است نشان داده می‌شود. هولوگرام مانند یک صافی مناسب عمل می‌کند و تنها طیف فضایی مشابه با آنچه روی آن ثبت شده است را تشخیص و عبور می‌دهد. از این فن می‌توان مثلاً برای خواندن هولوگرافیک میکروفیلما استفاده کرد. کاربردهای نظامی هولوگرافی عبارت‌اند از استفاده از مخزن حافظه‌ای هولوگرامهای اشیاء یا هدفهایی که از عکسهای هوایی تهیه شده‌اند. آنگاه، جنگ‌افزارها می‌توانند هدفهای مناسب را با تشخیص نقش انتخاب کنند. همچنین اظهار شده است که روباتها می‌توانند با همین روش اشیاء لازم را تعیین هویت کنند و به سمت آنها نشانه‌گیری کنند. در فصل ۲۵ از تشخیص نقش بیشتر بحث می‌کنیم.

از هولوگرامهایی که تنها راستای نور را تغییر می‌دهند می‌توان به‌عنوان عنصرهای اپتیکی ارزان به جای عدسیها و آینه‌ها استفاده کرد. به‌عنوان نمونه‌ای از یک کاربرد عمومی، در فروشگاهها برای خواندن رمز کالاها با لیزر از یک قرص چرخان مجهز به تعدادی عدسی هولوگرافیک استفاده می‌شود. با ایجاد پیوستهٔ زاویه‌های متعدد روبش لیزری، رمز کالا را می‌توان تعیین کرد.

مسائل

۱-۱۳ با استفاده از معادلهٔ ۱۰-۱۳ برای برهم‌نهمش دو باریکهٔ نامساوی، نشان دهید نقش تابیدگی تختهٔ منطقهٔ گابور (هولوگرام چشمهٔ نقطه‌ای) تقریباً با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$I = A + B \cos^2(ar^2)$$

که در آن $A = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ و $B = 2\sqrt{I_1 I_2}$ و $a = \pi/2s\lambda$ در اینجا I_1 و I_2 به‌ترتیب تابیدگیهای مربوط به باریکه‌های مرجع و علامت هستند، s فاصلهٔ نقطهٔ شیء از فیلم،

و λ طول موج نور است. در این تقریب فرض کنید اختلاف راه بین دو باریکه بسیار کوچکتر از s است، و در نتیجه به منطقه‌های داخلی هولوگرام نگاه می‌کنیم.

۱۳-۲ (الف) نشان دهید اگر نسبت موضعی تابیدگیهای باریکه مرجع به باریکه موضوع در ناحیه‌ای از هولوگرام برابر با N باشد آنگاه مرئیت فریزهای حاصل $2\sqrt{N}/(N+1)$ است.
 (ب) مرئیت فریز را در ناحیه‌ای به دست آورید که در آن تابیدگی باریکه مرجع سه برابر تابیدگی باریکه موضوع است.

۱۳-۳ نشان دهید جدایی فریز d در تشکیل توری هولوگرافیک، مانند شکل ۱۳-۵، با $\lambda/2 \sin \theta$ داده می‌شود که در آن 2θ زاویه بین باریکه‌های همدوس در فیلم و λ طول موج باریکه‌ها در فیلم است. فرض کنید باریکه‌ها به طور متقارن به سطح فیلم فرود می‌آیند. اگر باریکه‌ها باریکه‌های لیزری آرگون با طول موج 488 nm باشند و زاویه بین آنها 120° باشد، چند شیار در میلیمتر در اندوده تخت عمود بر فریزها تشکیل می‌شود؟ فرض کنید $n = 1$.

۱۳-۴ زاویه بین باریکه‌های علامت و مرجع در ساختن یک هولوگرام 20° است. اگر نور از لیزر He-Ne در 633 nm باشد، جدایی فریز را به دست آورید. ضریب شکست اندوده را 1 بگیرید. (مسئله ۱۳-۳ را ببینید.)

۱۳-۵ فرض کنید می‌خواهیم هولوگرام شیء متحرکی را با استفاده از تپ لیزری 1 نانوثانیه‌ای در طول موج 633 nm بسازیم. سرعت مجاز حرکت چه اندازه باید باشد تا شیء طی نورگیری بیشتر از $\lambda/10$ حرکت نکند؟

۱۳-۶ در ساختن یک هولوگرام، تقسیمگر باریکه‌ای انتخاب شده است که باعث می‌شود دامنه باریکه مرجع هشت برابر دامنه باریکه علامت در اندوده باشد. نسبت ماکسیم را برای تابیدگیهای باریکه‌ها در آنجا به دست آورید.

۱۳-۷ فرض کنید می‌توانیم به عنوان یک حد نظری یک بیت اطلاعات را در هر λ^3 از حجم هولوگرام ذخیره کنیم. ظرفیت ذخیره 1 mm^3 از حجم هولوگرام را در طول موج 492 nm و ضریب شکست 1.30 تعیین کنید.

۱۳-۸ یک هولوگرام حجمی با استفاده از دو باریکه لیزری موازی شده همدوس تکفام متقابل [با زاویه 180°] در 500 nm ، مانند شکل ۱۳-۵، ساخته شده است.
 (الف) فاصله صفحه‌های نقره ظاهر شده را در اندوده به دست آورید.

(ب) اگر نور سفید به طور عمود بر هولوگرام فرود آید چه طول موجی در نور بازتابیده تقویت می شود؟
 (ج) قسمت (ب) را وقتی زاویه فرود (نسبت به عمود) 30° است حل کنید. ضریب شکست فیلم را ۱ بگیرد.

۹-۱۳ دو باریکه نور همدوس با جبهه موج تخت و طول موج 633 nm ، که راستاهای آنها با هم زاویه 120° می سازند، به یک اندوده عکاسی می خورند.

(الف) آرایه را، با نشان دادن سمگگیری صفحه های تداخل سازنده در اندوده، ترسیم کنید.

(ب) فاصله صفحه های هولوگرام حجمی ظاهر شده را به دست آورید.

(ج) در چه زاویه فرودی نسبت به صفحه های نقره، طول موج 450 nm تقویت می شود؟ فرض کنید در اندوده $n = 1$.

۱۰-۱۳ فرض کنید با استفاده از نوری با طول موج 430 nm ، مؤلفه آبی یک هولوگرام نور سفید، مانند شکل ۵-۱۳، تشکیل شده باشد. اگر انقباض اندوده در این فرایند ۱۵٪ باشد، چه طول موجی توسط فریزهای نور آبی در بازسازی تقویت می شود؟ این نتیجه چه تأثیری روی تصویر هولوگرافیک تحت دید نور سفید دارد؟

۱۱-۱۳ هولوگرامی با نور لیزر فرابنفش 337 nm ساخته می شود و در نور لیزر سرخ 633 nm دیده می شود.

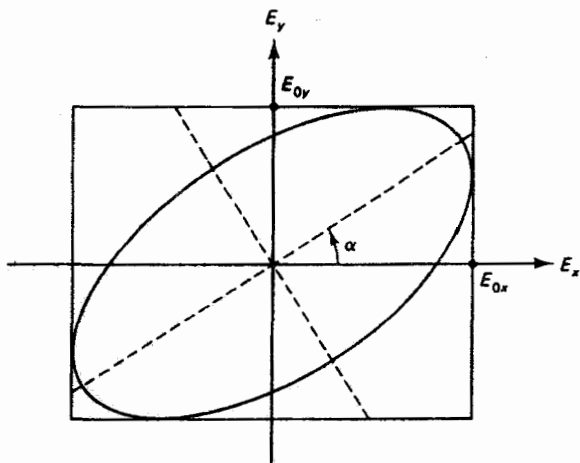
(الف) اگر باریکه مرجع اصلی و باریکه بازسازی هر دو موازی شده باشند، بزرگنمایی تصویر هولوگرافیک را در مقایسه با موضوع اصلی به دست آورید.

(ب) اگر پرتو ایکس همدوس با طول موج 1 \AA در ساختن هولوگرام به کار برده می شد، بزرگنمایی چه اندازه بود؟

۱۲-۱۳ (الف) تحقیق کنید که جبهه موج بازسازی شده از هولوگرام چشمه نقطه ای تصاویر حقیقی و مجازی شکل ۱۳-۱ ب را به وجود می آورد. ابتدا، تابیدگی در فیلم ناشی از برهم نهش امواج تخت و کروی را به دست آورید. سپس، دامنه نور عبوری از فیلم ظاهر شده را وقتی باریکه مرجع به آن تابانده می شود تعیین کنید. جمله های نتیجه را، مانند بحث مربوط به هولوگرام موضوع سه بعدی، تعبیر کنید.

(ب) نشان دهید تأخیر فاز باریکه موضوع و اگر، در نقطه ای روی فیلم و به فاصله y از محور با $\pi y^2 / \lambda d$ داده می شود که در آن d فاصله چشمه نقطه ای از فیلم است. این نتیجه به ازای $y \ll d$ به دست می آید. همچنین نشان دهید وارونگی زاویه فاز باعث ایجاد جبهه موج کروی همگرا وابسته به تصویر حقیقی در بازسازی می شود.

- [1] Smith, Howard Michael. *Principles of Holography*. New York: John Wiley and Sons, 1975.
- [2] Francon, M. *Holography*. New York: Academic Press, 1974.
- [3] Stroke, George W. *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, 2d ed. New York: Academic Press, 1969.
- [4] Vest, C. M. *Holographic Interferometry*. New York: John Wiley and Sons, 1979.
- [5] Caulfield, H. John, ed. *Handbook of Optical Holography*. New York: Academic Press, 1979.
- [6] Caulfield, H. John. "The Wonder of Holography." *National Geographic* 165 (March 1984): 364.
- [7] Leith, Emmett N., and Juris Upatnieks. "Photography by Laser." *Scientific American* (June 1965): 24.
- [8] Pennington, Keith S. "Advances in Holography." *Scientific American* (Feb. 1968): 40.
- [9] Metherell, Alexander F. "Acoustical Holography." *Scientific American* (Oct. 1969): 36.
- [10] Leith, Emmett N. "White-Light Holograms." *Scientific American* (Oct. 1976): 80.
- [11] Reynolds, George O., John B. DeVelis, George B. Parrent, Jr., and Brian J. Thompson. *Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics*. Bellingham, Wash.: SPIE Optical Engineering Press, 1989. Ch. 25-27.



۱۴

بررسی ماتریسی قطبش

مقدمه

نمایش موج تخت تابش الکترومغناطیسی با ترسیمی مانند شکل ۸-۷ برای نور معمولی کارایی ندارد. در موج تخت، بردار میدان الکتریکی همیشه موازی با راستای ثابتی در فضا نوسان می‌کند. نوری با این سرشت را قطبیده خطی می‌نامند. همین را می‌توان درباره بردار میدان مغناطیسی گفت، که همیشه عمود بر بردار میدان الکتریکی است به طوری که راستای $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ همه جا راستای انتشار موج است. این نوع موج می‌تواند با یک تک نوسانگر دوقطبی دور یا با مجموعه‌ای از این نوسانگرهای دوقطبی که همزمان تابش می‌کنند تولید شود. اما نور معمولی با تعدادی چشمه اتمی مستقل که تابش آنها همزمان نیست تولید می‌شود. باریکه‌ای از نور معمولی را، مانند آنچه یک رشته داغ ایجاد می‌کند، در نظر بگیرید. بردار میدان \mathbf{E} حاصل، که از مجموعه اتمهای تابنده به وجود می‌آید، نه راستای نوسان ثابتی را حفظ می‌کند و نه از لحاظ فضایی به طور منظمی تغییر می‌کند تا نور قطبیده بیضوی یا قطبیده دایره‌ای تولید شود. این نوع نور معمولی را ناقطبیده می‌نامند. البته باریکه نور می‌تواند شامل آمیخته‌ای از نور قطبیده و ناقطبیده باشد، که در این مورد آن را قطبیده جزئی می‌نامند.

امکان قطبی شدن نور اساساً به سرشت عرضی آن مربوط می‌شود. نور اگر موج طولی بود، تولید نور قطبیده به روشهایی که توضیح خواهیم داد اصلاً امکان نداشت. بنابراین، قطبش نور اثبات تجربی سرشت عرضی آن را در بر دارد.

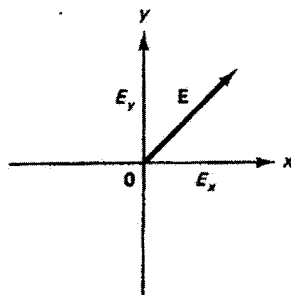
در توصیف ریاضی خود از قطبش نور، از یک فن ماتریسی استفاده می‌کنیم که توسط رابرت کلارک جونز ابداع شده است [۱]. ابتدا بردارها یا ماتریسهای ستونی دو عنصری را برای نمایش نور در مدهای مختلف قطبش می‌سازیم. سپس عناصر فیزیکی تولیدکننده نور قطبیده را بررسی می‌کنیم و ماتریسهای 2×2 مربوط را که به صورت عملگرهای ریاضی روی بردارهای جونز عمل می‌کنند به دست می‌آوریم. در فصل بعد، فرایندهای فیزیکی باعث تولید نور قطبیده را با تفصیل بیشتری بررسی خواهیم کرد.

۱-۱۴ نمایش ریاضی نور قطبیده: بردارهای جونز

پرتو نوری را در نظر بگیرید که در مبدأ دستگاه مختصات شکل ۱-۱۴ به طور عمودی از صفحه کتاب خارج می‌شود. میدان \mathbf{E} ی نور با یک بردار، مطابق شکل نمایش داده شده است. چون میدان \mathbf{E} از لحاظ بزرگی به طور پیوسته تغییر می‌کند و در هر نیم دوره تغییر جهت می‌دهد، این شکل بزرگی و جهت \mathbf{E} را در یک لحظه خاص نشان می‌دهد. مؤلفه‌های \mathbf{E} در امتداد محورهای x و y را به ترتیب E_x و E_y می‌گیریم. آنگاه، برحسب بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} داریم

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y \quad (1-14)$$

اکنون وابستگی فضایی و زمانی امواج مؤلف E_x و E_y را که به ترتیب با دامنه‌های E_{o_x} و E_{o_y}



شکل ۱-۱۴ نمایش بردار \mathbf{E} ی لحظه‌ای مربوط به پرتو نوری که در جهت $+z$ حرکت می‌کند. نوسان بردار \mathbf{E} معادل نوسان دو مؤلفه متعامد E_x و E_y است.

و با فازهای φ_x و φ_y در جهت z + حرکت می‌کنند به صورت زیر می‌نویسیم

$$E_x = E_{o_x} e^{i(kz - \omega t + \varphi_x)} \quad (2-14)$$

و

$$E_y = E_{o_y} e^{i(kz - \omega t + \varphi_y)} \quad (3-14)$$

از ترکیب با معادله ۱-۱۴ داریم

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_{o_x} e^{i(kz - \omega t + \varphi_x)} + \mathbf{j}E_{o_y} e^{i(kz - \omega t + \varphi_y)}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر در آورد

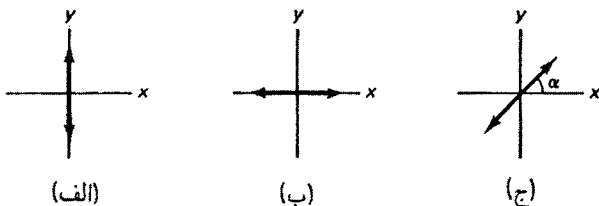
$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_{o_x} e^{i\varphi_x} + \mathbf{j}E_{o_y} e^{i\varphi_y}] e^{i(kz - \omega t)} = \bar{\mathbf{E}}_o e^{i(kz - \omega t)} \quad (4-14)$$

که در آن کمیت داخل کروشه، که ترکیبی از دو مؤلفه جداگانه است، به صورت دامنه مختلط $\bar{\mathbf{E}}_o$ برای موج قطبیده نشان داده شده است. چون حالت قطبش نور کاملاً با دامنه‌ها و فازهای نسبی این مؤلفه‌ها تعیین می‌شود، تنها لازم است دامنه مختلط را در نظر بگیریم، که به صورت یک ماتریس ستونی دو عنصری، یا بردار جونز، نوشته می‌شود:

$$\bar{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} \bar{E}_{o_x} \\ \bar{E}_{o_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{o_x} e^{i\varphi_x} \\ E_{o_y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

اکنون صورتهای خاص بردار جونز را برای قطبش خطی، دایره‌ای و بیضوی به دست می‌آوریم. در شکل ۱۴-۲ الف، نور قطبیده قائمی که نوسانهای \mathbf{E} ی آن در امتداد محور y است در جهت z + حرکت می‌کند. چون \mathbf{E} طی پیشروی خود در واقع دارای بزرگی متغیر سینوسی است، تنها دامنه آن را در جهت‌های مثبت و منفی y نشان داده‌ایم. در این مورد، می‌توانیم برای مثال بنویسیم $E_{o_x} = 0$ و $E_{o_y} = A$. در غیاب مؤلفه E_x ، فاز φ_y را می‌توان برای سادگی برابر با صفر قرار داد. در نتیجه، بنابر معادله ۵-۱۴، بردار جونز مربوط عبارت است از

$$E_o = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



شکل ۱۴-۲ نمایش بردار E نور قطبیده خطی با چند سمتگیری خاص. راستای انتشار نور محور z است.

علاوه بر این، اگر تنها به مد قطبش توجه داشته باشیم می‌توانیم دامنه A را برابر با یک بگیریم. بدین ترتیب، بردار جونز برای نور قطبیده خطی قائم صرفاً $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است. این ماتریس ساده را صورت بهنجار بردار می‌نامند. به‌طور کلی، بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ وقتی بهنجار است که

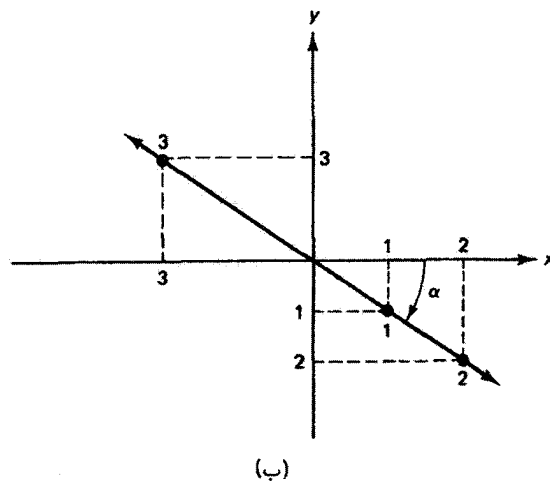
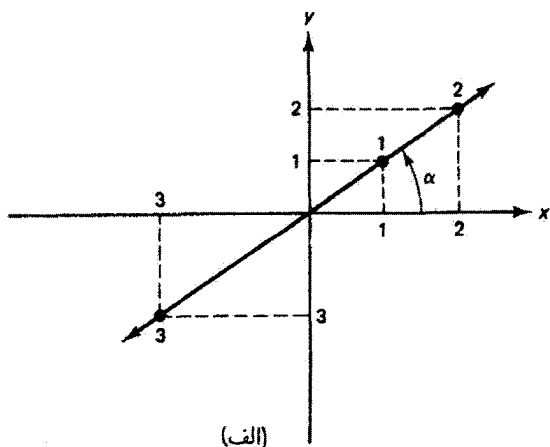
$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

به همین ترتیب، شکل ۱۴-۲ ب نور قطبیده خطی افقی را نشان می‌دهد که برای آن با قرار دادن $E_{o_y} = 0$ ، $\varphi_x = 0$ و $E_{o_x} = A$ داریم

$$E_o = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اما شکل ۱۴-۲ ج نور قطبیده خطی‌ای را نشان می‌دهد که نوسان آن در امتداد خطی است که با محور x زاویه α می‌سازد. مؤلفه‌های E_x و E_y با هم وجود دارند. بدیهی است که این یک مورد کلی است که به‌ازای $\alpha = 90^\circ$ به مد قطبیده قائم و به‌ازای $\alpha = 0^\circ$ به مد قطبیده افقی تبدیل می‌شود. توجه کنید که برای تولید این مورد کلی، دو ارتعاش متعامد باید هم‌فاز باشند یعنی باید با هم از مبدأ بگذرند، در امتداد محورهای مثبت خود با هم افزایش یابند، با هم به مقدار ماکسیمم خود برسند، و سپس برای ادامه چرخه با هم برگردند. شکل ۱۴-۳ الف این ترتیب را به‌وضوح نشان می‌دهد. بنابراین، چون تنها به یک فاز نسبی صفر احتیاج داریم، می‌نویسیم $\varphi_x = \varphi_y = 0$. برای برابندی با دامنه A ، دامنه‌های مؤلفه‌های متعامد عبارت‌اند از $E_{o_x} = A \cos \alpha$ و $E_{o_y} = A \sin \alpha$ بردار جونز به‌صورت زیر در می‌آید

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} E_{o_x} e^{i\varphi_x} \\ E_{o_y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cos \alpha \\ A \sin \alpha \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (۶-۱۴)$$



شکل ۳-۱۴ (الف) ارتفاعهای متعامد همفاز که نور قطبیده خطی با بردار E واقع در ربعهای اول و سوم تولید می‌کنند. (ب) ارتفاعهای متعامد با فاز متقابل (180°) که نور قطبیده خطی با بردار E واقع در ربعهای دوم و چهارم به وجود می‌آورند.

برای صورت بهنجار این بردار باید قرار دهیم $A = 1$ ، زیرا $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. توجه کنید که این صورت کلی واقعاً به بردارهای جونز که برای موارد $\alpha = 90^\circ$ و $\alpha = 0^\circ$ به دست آوردیم تبدیل می‌شود. برای سمتگیرهای دیگر، مثلاً $\alpha = 60^\circ$ داریم

$$E_0 = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر، اگر بردار $\left[\frac{b}{a} \right]$ که در آن a و b اعداد حقیقی هستند معلوم باشد، زاویه شیب نور قطبیده خطی متناظر برابر است با

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{E_{o_y}}{E_{o_x}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (7-14)$$

به عنوان یک تعمیم جزئی، فرض کنید زاویه α منفی است (شکل ۱۴-۳ب). در این مورد، عنصر E_{o_y} یک عدد منفی است زیرا سینوس تابع فرد است، در حالی که عنصر E_{o_x} مثبت می ماند. علامت منفی نشان می دهد دو ارتعاش 180° اختلاف فاز دارند که برای تولید نور قطبیده خطی با بردار \mathbf{E} واقع در ربعهای دوم و چهارم لازم است. با توجه به شکل ۱۴-۳ب، این نتیجه به معنای این است که اگر ارتعاش مربوط به x از مبدأ در جهت مثبت افزایش یابد ارتعاش مربوط به y باید از مبدأ در جهت منفی افزایش یابد. ارتعاش برآیند در امتداد خطی با شیب منفی روی می دهد.

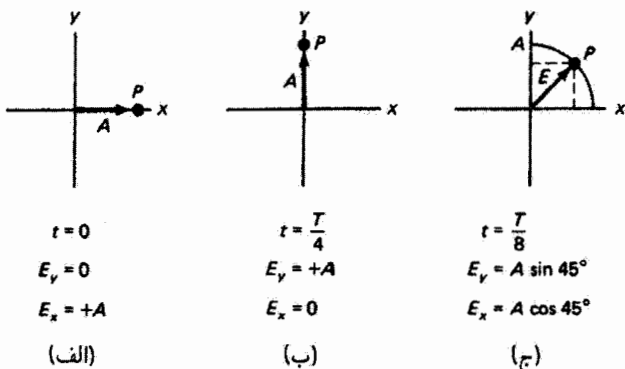
به طور خلاصه، بردار جونز $\left[\frac{b}{a} \right]$ با اعداد حقیقی a و b ، که با هم صفر نیستند، نور قطبیده خطی با زاویه شیب $\alpha = \tan^{-1}(b/a)$ را نمایش می دهد.

تا کنون شاید روشن شده باشد که با تعیین ارتعاش برآیند ناشی از دو مؤلفه متعامد، در واقع شکل لیسازو مربوط را تعیین می کنیم. اگر اختلاف فاز بین ارتعاشها مخالف 0° و 180° باشد، بردار \mathbf{E} برآیند به جای خط راست یک بیضی ترسیم می کند. البته خط راست (و همچنین دایره) را می توان مورد خاصی از بیضی در نظر گرفت. شکل ۱۴-۴ دنباله ای از شکلهای لیسازو را به عنوان تابعی از فاز نسبی $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ برای مورد کلی $E_{o_x} \neq E_{o_y}$ خلاصه می کند. به جهت چرخش نوک بردار \mathbf{E} روی بیضیهایی که در شکل ۱۴-۴ نشان داده شده اند توجه کنید که مورد $\Delta\varphi = 45^\circ$ را به عنوان مثال از مورد $\Delta\varphi = 315^\circ$ متفاوت می کند. وقتی $E_{o_x} = E_{o_y}$ ، بیضیهای مربوط به $\Delta\varphi = 270^\circ$ و $\Delta\varphi = 90^\circ$ به دایره تبدیل می شوند.

اکنون فرض کنید $E_{o_x} = E_{o_y} = A$ ، E_x به اندازه 90° از E_y تقدم دارد. بنابراین، وقتی E_x به عنوان مثال به جابه جایی ماکسیمم خود یعنی $+A$ می رسد E_y صفر است. یک چهارم دوره بعد، E_x صفر است و $E_y = +A$ ، و غیره. شکل ۱۴-۵ چند نمونه را در فرآیند تشکیل ارتعاش برآیند نشان می دهد. برای این موارد، که در آنها ارتعاش مربوط به x از ارتعاش مربوط به y تقدم دارد، لازم است $\varphi_y > \varphi_x$ شود. این تناقض ظاهری از انتخاب فاز در فرمولبندی میدان \mathbf{E} در معادله های ۱۴-۲ و ۱۴-۳ ناشی می شود که در آن جمله وابسته به زمان در نما منفی است. برای اثبات، موج را در $z = 0$ در نظر می گیریم و قرار می دهیم $\varphi_x = 0$ و $\varphi_y = \varepsilon$ ، و در نتیجه

$\Delta\phi = 0^\circ$	$\Delta\phi = 45^\circ$	$\Delta\phi = 90^\circ$	$\Delta\phi = 135^\circ$	$\Delta\phi = 180^\circ$
$\Delta\phi = 360^\circ$	$\Delta\phi = \begin{cases} -45^\circ \\ 315^\circ \end{cases}$	$\Delta\phi = \begin{cases} -90^\circ \\ 270^\circ \end{cases}$	$\Delta\phi = \begin{cases} -135^\circ \\ 225^\circ \end{cases}$	$\Delta\phi = \pm 180^\circ$

شکل ۴-۱۴ شکلهای لیسازو به صورت تابعی از فاز نسبی ارتعاشهای متعامد با دامنه‌های نامساوی. تقدم زاویه بیشتر از 18° را همچنین می‌توان با تأخر زاویه کمتر از 18° نمایش داد. برای تمام شکلهای قرارداد تأخر فاز $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$ را پذیرفته‌ایم.



شکل ۵-۱۴ ارتعاش E_y بریند ناشی از ارتعاشهای مؤلف متعامد با بزرگی مساوی و اختلاف فاز 90° که در سه زمان مختلف نشان داده شده است. نقاط P مکان بریند را نشان می‌دهند. در (ج) مسیر دایره‌ای که E طی می‌کند نیز نشان داده شده است. توجه کنید که در این مورد بردار E در جهت پادساعتگرد می‌چرخد.

بنابراین، $\phi_y > \phi_x$. معادله‌های ۲-۱۴ و ۳-۱۴ به صورت زیر در می‌آیند

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= E_{0x} e^{-i\omega t} \\ \tilde{E}_y &= E_{0y} e^{-i(\omega t - \epsilon)} \end{aligned}$$

علامت منفی جلو ε تأخیری به اندازه ε را در ارتعاش مربوط به y نسبت به ارتعاش مربوط به x نشان می‌دهد. برای اینکه ببینیم این معادلات دنباله شکل ۵-۱۴ را نمایش می‌دهند، قسمتهای حقیقی آنها را می‌گیریم و قرار می‌دهیم $E_{o_x} = E_{o_y} = A$ و $\varepsilon = \pi/2$ ، و در نتیجه

$$E_x = A \cos \omega t$$

$$E_y = A \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = A \sin \omega t$$

با یادآوری اینکه $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ ، هر مورد در شکل ۵-۱۴ را می‌توان به آسانی تحقیق کرد. همچنین، چون

$$E^r = E_x^r + E_y^r = A^r (\cos^r \omega t + \sin^r \omega t) = A^r$$

نوک بردار برابری دایره‌ای به شعاع A می‌پیماید.

اکنون برای این مورد که در آن E_x از E_y تقدم دارد با انتخاب $E_{o_x} = E_{o_y} = A$ و $\varphi_x = 0$ و $\varphi_y = \pi/2$ بردار جونز را به دست می‌آوریم. داریم

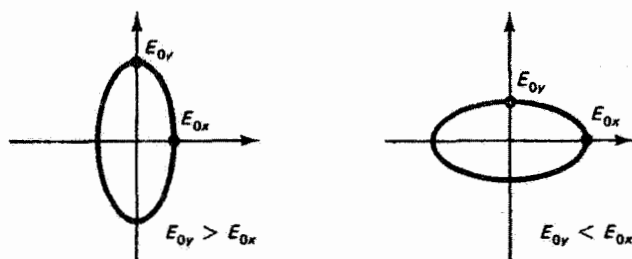
$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} E_{o_x} e^{i\varphi_x} \\ E_{o_y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (۵-۱۴)$$

برای تعیین صورت بهنجار این بردار، توجه کنید که $1^2 + |i|^2 = 1 + 1 = 2$ ، و در نتیجه هر عنصر را باید بر $\sqrt{2}$ تقسیم کرد تا ۱ به دست آید. بدین ترتیب، بردار جونز $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ نمایشگر نور قطبیده دایره‌ای است وقتی \mathbf{E} از دید روبه‌رو در جهت پادساعتگرد می‌چرخد. این مد را نور قطبیده دایره‌ای چپ می‌نامند.

به همین ترتیب، اگر E_y به اندازه $\pi/2$ از E_x تقدم داشته باشد، نتیجه باز هم نور قطبیده دایره‌ای اما با چرخش ساعتگرد یا نور قطبیده دایره‌ای راست است. با گذاشتن $-\pi/2$ به جای $\pi/2$ در معادله ۵-۱۴، بردار جونز بهنجار را برای این مورد به دست می‌آوریم:

$$E_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

توجه کنید که یکی از عنصرهای بردار جونز برای نور قطبیده دایره‌ای انگاری محض است اما بزرگیهای عنصرها یکی هستند. سرشت واقعی نور ممکن است همیشه از صورت بردار جونز



شکل ۶-۱۴ نور قطبیده بیضوی برای مورد $\Delta\varphi = 90^\circ$.

بلافاصله آشکار نباشد. به عنوان مثال، بردار جونز $\begin{bmatrix} 2i \\ 2 \end{bmatrix}$ نمایشگر نور قطبیده دایره‌ای راست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = 2i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

ضریب جلو بردار جونز می‌تواند روی دامنه و در نتیجه روی تابیدگی نور تأثیر داشته باشد اما روی مد قطبش اثری ندارد. بنابراین، از ضرایبی مانند ۲ و $2i$ می‌توان صرف نظر کرد مگر اینکه اطلاعات مربوط به انرژی لازم باشد.

اکنون فرض کنید اختلاف فاز بین ارتعاشهای متعام مؤلف باز هم 90° است اما دامنه‌های آنها نامساوی اند. اگر مثلاً $E_{0x} = A$ و $E_{0y} = B$ ، معادله ۸-۱۴ به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix} \text{ چرخش پادساعتگرد، و } \begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix} \text{ چرخش ساعتگرد}$$

این نمونه‌های قطبش بیضوی در شکل ۴-۱۴ به ازای $\Delta\varphi = 90^\circ$ و $\Delta\varphi = 270^\circ$ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که تأخری به اندازه 90° معادل تقدیمی به اندازه 270° است. محور بزرگ بیضی، بسته به بزرگیهای نسبی E_{0y} و E_{0x} ، مانند شکل ۶-۱۴ در امتداد محور x یا محور y قرار می‌گیرد. علاوه بر این، هر یک از این دو مورد می‌تواند چرخش ساعتگرد E حول بیضی (وقتی E_y از E_x تقدم دارد) یا چرخش پادساعتگرد (وقتی E_x از E_y تقدم دارد) ایجاد کند. بر اساس این ملاحظات، نتیجه می‌گیریم که بردار جونز با عناصری با بزرگیهای نامساوی، که یکی از آنها انگاری محض است، نمایشگر نور قطبیده بیضوی با سمتگیری در امتداد محورهای x یا y است. صورت بهنجار بردار جونز اکنون باید شامل ضریب $1/\sqrt{A^2 + B^2}$ باشد.

همچنین می‌توان، چنانکه در شکل ۴-۱۴ دیده می‌شود، نور قطبیده بیضوی با محورهای اصلی متمایل نسبت به محورهای x و y تولید کرد. این وضعیت وقتی روی می‌دهد که اختلاف

فاز بین ارتعاشهای مؤلف زاویه‌ای غیر از $m\pi$ (قطبش خطی) یا $(m + 1/2)\pi$ (قطبش دایره‌ای یا بیضوی متقارن نسبت به محورهای x و y) باشد. در اینجا $m = 0, 1, 2, \dots$. به‌عنوان مثال، موردی را در نظر بگیرید که در آن E_x از E_y به اندازه زاویه ε تقدم دارد، یعنی $\varphi_y - \varphi_x = \varepsilon$. با قرار دادن $\varphi_x = 0$ ، $\varphi_y = \varepsilon$ ، $E_{o_x} = A$ و $E_{o_y} = b$ بردار جونز عبارت است از

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} E_{o_x} e^{i\varphi_x} \\ E_{o_y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ b e^{i\varepsilon} \end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیهٔ اویلر می‌نویسیم

$$b e^{i\varepsilon} = b(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon) = B + iC$$

بنابراین، برای این مورد کلی بردار جونز به صورت زیر در می‌آید

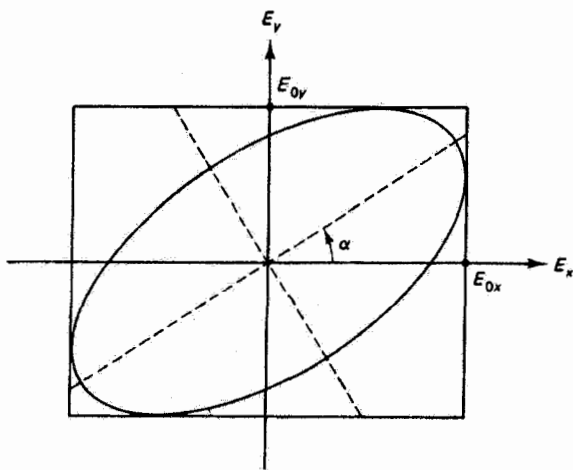
$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix} \quad (9-14)$$

که در آن اکنون یکی از عنصرها یک عدد مختلط است که هم قسمت حقیقی و هم قسمت انگاری دارد. صورت بهنجار از تقسیم بر $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ به دست می‌آید. صورت بردار جونز 9-14 از همه کلی‌تر است، و تمام صورتهایی را که قبلاً گفته شد به‌عنوان موارد خاص در بر می‌گیرد. با استفاده از هندسهٔ تحلیلی می‌توان نشان داد بیضی مربوط به بردار جونزی که با معادلهٔ 9-14 داده می‌شود، همچنانکه در شکل 14-7 نشان داده شده است، با زاویه α نسبت به محور x مایل است. زاویهٔ شیب از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\tan \alpha = \frac{2E_{o_x} E_{o_y} \cos \varepsilon}{E_{o_x}^2 - E_{o_y}^2} \quad (10-14)$$

این بیضی در مستطیلی با اضلاع $2E_{o_x}$ و $2E_{o_y}$ محاط شده است. محاسبهٔ معادلهٔ 9-14 نشان می‌دهد که برحسب پارامترهای A ، B و C داریم

$$E_{o_x} = A, \quad E_{o_y} = \sqrt{B^2 + C^2}, \quad \text{و} \quad \varepsilon = \tan^{-1} \left(\frac{C}{B} \right) \quad (11-14)$$



شکل ۷-۱۴ نور قطبیده بیضوی با سمتگیری در زاویه α نسبت به محور x .

مثال

با تحلیل بردار جونز

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 + i \end{bmatrix}$$

نشان دهید که این بردار نمایشگر نور قطبیده بیضوی است.

حل: فاز نسبی ارتعاشهای مؤلف برابر است با $\varepsilon = \tan^{-1}(1/2) = 26.6^\circ$. چون $E_{0x} = 3$ و $E_{0y} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ، زاویه شیب محور برابر است با

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{(2)(3)(\sqrt{5}) \cos(26.6^\circ)}{9 - 5} = 35.8^\circ$$

با این داده‌ها می‌توان بیضی را مانند شکل ۷-۱۴ ترسیم کرد. به‌طور دقیقتر، معادله بیضی عبارت است از

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right) \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right) \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon \quad (12-14)$$

در این مثال، این معادله به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{E_x^2}{9} + \frac{E_y^2}{5} - 0.267 E_x E_y = 0.2$$

اگر E_x نسبت به E_y تأخر داشته باشد، زاویه فاز ε منفی است و منجر به بردار جونزی می‌شود که نمایشگر چرخش ساعتگرد است:

$$E_o = \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix}$$

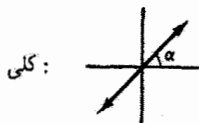
جدول ۱-۱۴ خلاصه مناسبی از متداولترین بردارهای جونز در صورتهای بهنجار آنها است. باید تأکید کنیم که صورتهای داده شده در جدول ۱-۱۴ یکتا نیستند. اولاً، هر بردار جونز را می‌توان در یک عدد ثابت حقیقی ضرب کرد که در نتیجه دامنه آن تغییر می‌کند اما مد قطبش آن تغییر نمی‌کند. تمام بردارهای جدول ۱-۱۴ اگر لازم بوده است، در ضریبهایی ضرب شده‌اند تا به صورت بهنجار در آیند. بنابراین، به عنوان مثال، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و در نتیجه نمایشگر نور قطبیده خطی با دامنه $2\sqrt{2}$ است که زاویه 45° با محور x می‌سازد. ثانیاً، هر بردار در جدول ۱-۱۴ را می‌توان در عامل $e^{i\varphi}$ ضرب کرد که کار آن عبارت است از اضافه کردن φ به فاز هر عنصر، یعنی $\varphi_x \rightarrow \varphi_x + \varphi$ و $\varphi_y \rightarrow \varphi_y + \varphi$. چون در این فرایند اختلاف فاز تغییر نمی‌کند، بردار جدید نمایشگر همان مد قطبش است. توجه کنید که بردارهای جدول ۱-۱۴ با انتخاب $\varphi_x = 0$ ، که تا اندازه‌ای اختیاری است، نوشته شده‌اند. بنابراین، به عنوان مثال، با ضرب بردار نمایشگر نور قطبیده دایره‌ای چپ در $e^{i\pi/2} = i$ داریم

$$i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$$

که صورت دیگری از آن بردار است. واضح است که اگر صورت دوم داده شده باشد، می‌توان با خارج کردن ضریب i صورت متعارفی را که در جدول ۱-۱۴ داده شده است به دست آورد. مفید بودن این بردارهای جونز را پس از به دست آوردن ماتریسهای جونزی که نمایشگر عناصر قطبی‌کننده هستند نشان خواهیم داد. اما در اینجا از هم اکنون می‌توان نتیجه برهم‌نهش دو یا چند مد قطبیده را با جمع کردن بردارهای جونز آنها محاسبه کرد. به عنوان مثال، از جمع نور قطبیده دایره‌ای چپ و راست به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ i-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

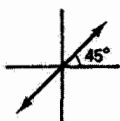
۱. قطبش خطی ($\Delta\phi = m\pi$)



قائم: $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



At $+45^\circ$: $E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

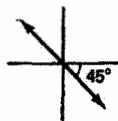


$E_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$

افقی: $E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



At -45° : $E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



۲. قطبش دایره‌ای ($\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$)

چپ:



$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

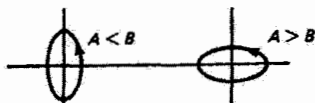
راست:



$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

۳. قطبش بیضوی

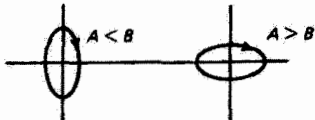
چپ:



($\Delta\phi = (m + \frac{1}{2})\pi$)

$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix}$

راست:



$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix}$

چپ:



($\Delta\phi \neq \begin{cases} m\pi \\ (m + \frac{1}{2})\pi \end{cases}$)

$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$

راست:



$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix}$

که نور قطبیده خطی با دامنه دو برابر است. نتیجه می‌گیریم که نور قطبیده خطی را می‌توان متشکل از نور قطبیده دایره‌ای چپ و راست با نسبت مساوی در نظر گرفت. به‌عنوان یک مثال دیگر، از برهم‌نهی نور قطبیده خطی قائم و افقی هم‌فاز داریم

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نتیجه نور قطبیده خطی با شیب 45° است. توجه کنید که جمع مؤلفه‌های متعامد نور قطبیده خطی نور ناقطبیده نیست، اگر چه غالباً نور ناقطبیده را با این مؤلفه‌ها نمایش می‌دهند. هیچ بردار جونزی برای نمایش نور ناقطبیده یا قطبیده جزئی وجود ندارد.^۱

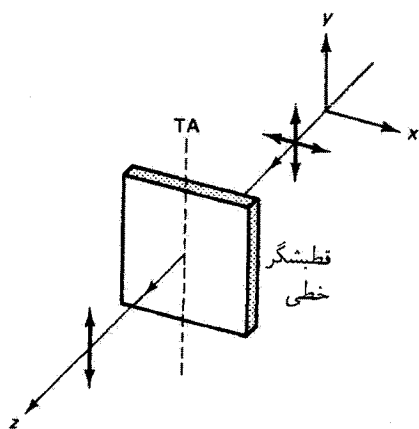
۱۴-۲ نمایش ریاضی قطبشگرها: ماتریسهای جونز

اسبابهای مختلفی به‌عنوان عناصر اپتیکی وجود دارند که می‌توانند با عبور دادن نور حالت قطبش آن را تغییر دهند. سازوکار فیزیکی زیربنای عمل این اسبابها را در فصل بعد بررسی می‌کنیم. در اینجا کافی است این قطبشگرها را برحسب اثرهایشان، که تعداد آنها اساساً سه تا است، رده‌بندی کنیم.

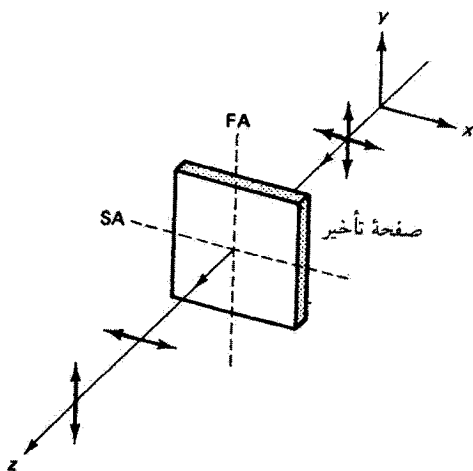
قطبشگر خطی. قطبشگر خطی تمام یا بیشتر ارتعاشهای E را در یک راستای معین به‌طور گزینشی حذف می‌کند در حالی‌که ارتعاشهای راستای عمود را عبور می‌دهد. در اکثر موارد، این گزینش 100% مؤثر نیست، و در نتیجه نور عبور کرده قطبیده جزئی است. شکل ۱۴-۸ این عمل را به‌طور نموداری نشان می‌دهد. نور ناقطبیده که در جهت z حرکت می‌کند از یک قطبشگر تخت می‌گذرد که راستای متمایز عبور یا محور عبور آن (TA) قائم است. نور ناقطبیده با دو ارتعاش متعامد (x و y) نمایش داده شده است زیرا هر راستای ارتعاش موجود را می‌توان به مؤلفه‌هایی در امتداد این راستا تجزیه کرد. نور عبور کرده شامل مؤلفه‌هایی در راستای TA است و از این رو در راستای قائم یا y قطبیده خطی است. مؤلفه‌های افقی نور اصلی از طریق جذب حذف شده‌اند. در این شکل، فرایند 100% مؤثر فرض شده است.

تأخیرگر فاز. تأخیرگر فاز هیچ‌یک از نوسانهای E ی متعامد مؤلف را حذف نمی‌کند اما بین آنها اختلاف فاز ایجاد می‌کند. اگر نور مربوط به هر ارتعاش با سرعت متفاوتی از این نوع تخت تأخیردهنده عبور کند، یک اختلاف فاز جمعی $\Delta\varphi$ بین دو موج وقتی خارج می‌شوند وجود خواهد داشت.

۱. رهیافت ماتریسی برای بررسی نور قطبیده جزئی، با استفاده از بردارهای استوکس 4×1 و ماتریسهای مولر 4×4 ، را می‌توانید در [۲] و [۳] ببینید.



شکل ۸-۱۴ عمل قطبشگر خطی.



شکل ۹-۱۴ عمل تأخیرگر فاز.

از لحاظ نموداری، شکل ۹-۱۴ اثر تخته تأخیر را روی نور ناقطبیده در موردی نشان می‌دهد که مؤلفه قائم سریعتر از مؤلفه افقی از این تخته می‌گذرد. این وضعیت با جداسازی دو مؤلفه روی محور اپتیکی در نمودار نشان داده شده است، گرچه البته هر دو موج در هر نقطه از این محور همزمان وجود دارند. راستاهای محور تند (FA) و محور کند (SA) مربوط به تخته نیز نشان داده شده‌اند. وقتی اختلاف فاز کل $\Delta\varphi$ برابر با 90° است، تخته تأخیر را تخته ربع‌موج می‌نامند؛ و وقتی $\Delta\varphi = 180^\circ$ ، آن را تخته نیم‌موج می‌نامند.

چرخشگر. چرخشگر دارای اثر چرخاندن راستای نور قطبیده خطی فرودی بر آن به اندازه یک زاویه معین است. در شکل ۱۰-۱۴ نور قطبیده خطی قائم که بر یک چرخشگر فرود می‌آید نشان داده شده است. اثر این عنصر چرخش دهنده عبارت است از انتقال نور قطبیده خطی در حالی که راستای ارتعاش آن، در این مورد به اندازه زاویه θ در جهت پادساعتگرد، چرخیده است.

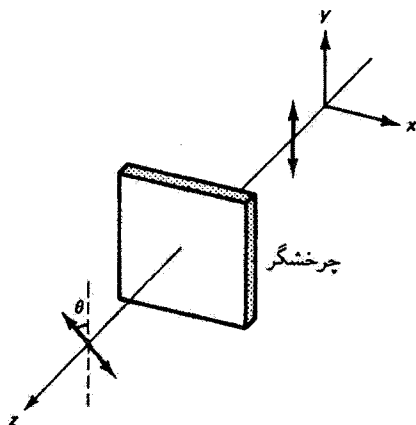
اکنون می‌خواهیم مجموعه ماتریسهای متناظر با این سه نوع قطبشگر را بسازیم به طوری که هر ماتریس وقتی روی بردار جونز عمل می‌کند درست همان نتیجه‌ای را از لحاظ ریاضی به وجود آورد که عنصر اپتیکی متناظر روی مد قطبش باریکه نور واقعی ایجاد می‌کند. برای تعیین عناصر ماتریسی مناسب از یک روش عملی استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، یک قطبشگر خطی را که محور عبور آن، مانند شکل ۸-۱۴، در امتداد قائم است در نظر بگیرید. فرض کنید این قطبشگر روی نور قطبیده خطی قائم عمل می‌کند. نور عبور کرده یا نور حاصل در این مورد باز هم قطبیده خطی قائم است. اگر عناصر ماتریس نمایش دهنده این قطبشگر را، که یک ماتریس 2×2 است، با حروف a, b, c, d و نشان دهیم، باید

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

این معادله ماتریسی هم‌ارز معادله‌های جبری زیر است

$$a(0) + b(1) = 0$$

$$c(0) + d(1) = 1$$



شکل ۱۰-۱۴ عمل چرخشگر.

که از آنها به دست می‌آوریم $b = 0$ و $d = 1$. برای تعیین عناصر a و c ، فرض می‌کنیم همین قطبشگر روی نور قطبیده افقی عمل می‌کند. در این مورد هیچ نوری عبور نمی‌کند، یا

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله‌های جبری مربوط اکنون عبارت‌اند از

$$a(1) + b(0) = 0$$

$$c(1) + d(0) = 0$$

که از آنها داریم $a = 0$ و $c = 0$. بنابراین، ماتریس نمایشگر قطبشگر خطی با محور عبور قائم باید به صورت زیر باشد

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{قطبشگر خطی با محور عبور قائم} \quad (13-14)$$

ماتریس مربوط به قطبشگر خطی با محور عبور افقی را که می‌توان به روش مشابهی تعیین کرد در جدول ۱۴-۲ آورده شده است. اکنون فرض کنید قطبشگر خطی دارای محور عبوری با زاویه 45° نسبت به محور x است. برای اینکه محاسبه تا حد امکان ساده شود، نور قطبیده خطی را که از این قطبشگر عبور می‌کند به نوبت در راستای محور عبور عمود بر آن می‌گیریم. بنابه رهیافت بالا، داریم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا هم‌ارز آنها،

$$a + b = 1$$

$$c + d = 1$$

$$a - b = 0$$

$$c - d = 0$$

جدول ۲-۱۴ خلاصه ماتریسهای جونز

۱. قطبشگرهای خطی		
$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	TA قائم در 45° نسبت به افق	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ TA افقی
۲. تأخیرگرهای فاز		
عمومی $\begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}$		
$e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$	SA افقی, QWP	$e^{-i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ SA قائم, QWP
$e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	SA افقی, HWP	$e^{-i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ SA قائم, HWP
۳. چرخشگر		
$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$ چرخشگر $(\theta \rightarrow \theta + \beta)$		

و در نتیجه $a = b = c = d = 1/\sqrt{2}$. بنابراین، ماتریس صحیح عبارت است از

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{قطبشگر خطی با محور عبور در } 45^\circ \quad (14-14)$$

به همین ترتیب، ماتریس عمومی نمایشگر قطبشگر خطی با محور عبور در زاویه θ را می‌توان تعیین کرد (که به‌عنوان تمرین به عهده دانشجو می‌گذاریم). نتیجه به‌صورت زیر است

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (15-14)$$

که معادله‌های ۱۴-۱۳ و ۱۴-۱۴ را به‌عنوان موارد خاص، به‌ترتیب با $\theta = 90^\circ$ و $\theta = 45^\circ$ ، در بر می‌گیرد.

اکنون به تأخیرگر فاز می‌پردازیم و ماتریسی را به‌دست می‌آوریم که عناصر

$$E_{o_x} e^{i(\varphi_x + \varepsilon_x)} \quad \text{را به} \quad E_{o_x} e^{i\varphi_x}$$

$$E_{o_y} e^{i(\varphi_y + \varepsilon_y)} \quad \text{را به} \quad E_{o_y} e^{i\varphi_y}$$

تبدیل می‌کند. می‌توان نشان داد که این عمل با رابطهٔ ماتریسی زیر انجام می‌شود

$$\begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{o_x} e^{i\varphi_x} \\ E_{o_y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{o_x} e^{i(\varphi_x + \varepsilon_x)} \\ E_{o_y} e^{i(\varphi_y + \varepsilon_y)} \end{bmatrix}$$

بنابراین، صورت کلی ماتریس نمایشگر تأخیرگر فاز عبارت است از

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} \quad \text{تأخیرگر فاز} \quad (16-14)$$

که در آن ε_x و ε_y افزایش در فاز مؤلفه‌های E_x و E_y مربوط به نور فرودی هستند. البته، ε_y و ε_x می‌توانند کمیت‌های منفی باشند. به‌عنوان یک مورد خاص، تختهٔ ربع موج (QWP) را در نظر بگیرید که برای آن $|\Delta\varepsilon| = \pi/2$. موردی را که برای آن $\varepsilon_y - \varepsilon_x = \pi/2$ (محور کند قائم SA) از موردی که برای آن $\varepsilon_x - \varepsilon_y = \pi/2$ (محور کند افقی SA) متمایز می‌کنیم. اکنون در مورد اول فرض می‌کنیم $\varepsilon_x = -\pi/4$ و $\varepsilon_y = +\pi/4$. واضح است که انتخاب‌های دیگری به تعداد بینهایت—امکان دارند، و در نتیجه ماتریسهای جونز، مانند بردارهای جونز، یکتا نیستند. اما این انتخاب خاص به‌صورت متداول ماتریس، به خاطر تقارن آن، منجر می‌شود:

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{تخته ربع موج} \\ \text{با محور کند قائم} \end{array} \quad (17-14)$$

به همین ترتیب، وقتی $\varepsilon_x > \varepsilon_y$ داریم

$$M = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{تخته ربع موج} \\ \text{با محور کند افقی} \end{array} \quad (18-14)$$

ماتریسهای مربوط به تخته‌های نیم‌موج (HWP)، که در آنها $|\Delta\varepsilon| = \pi$ عبارت‌اند از

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = e^{-i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{تخته نیم‌موج} \\ \text{با محورکند قائم} \end{array} \quad (19-14)$$

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} = e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{تخته نیم‌موج} \\ \text{با محورکند افقی} \end{array} \quad (20-14)$$

عناصر متناظر این ماتریسها یکسان هستند زیرا تقدم فاز π از لحاظ فیزیکی با تأخر فاز π هم‌ارز است. تنها اختلافی که وجود دارد در ضریبهایی است که فازهای تمام عناصر بردار چونز را به‌طور یکسان تغییر می‌دهند و از این رو اثری بر تعبیر نتایج ندارند.

لازمه چرخشگر مربوط به زاویه β این است که بردار \mathbf{E} نوسان‌کننده خطی در زاویه θ به برداری که در زاویه $(\theta + \beta)$ نوسان خطی دارد تبدیل شود. بنابراین، عناصر ماتریسی باید در رابطه زیر صدق کنند

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \beta) \\ \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix}$$

یا

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \cos(\theta + \beta)$$

$$c \cos \theta + d \sin \theta = \sin(\theta + \beta)$$

با توجه به اتحادهای مثلثاتی زیر برای کسینوس و سینوس مجموع دو زاویه

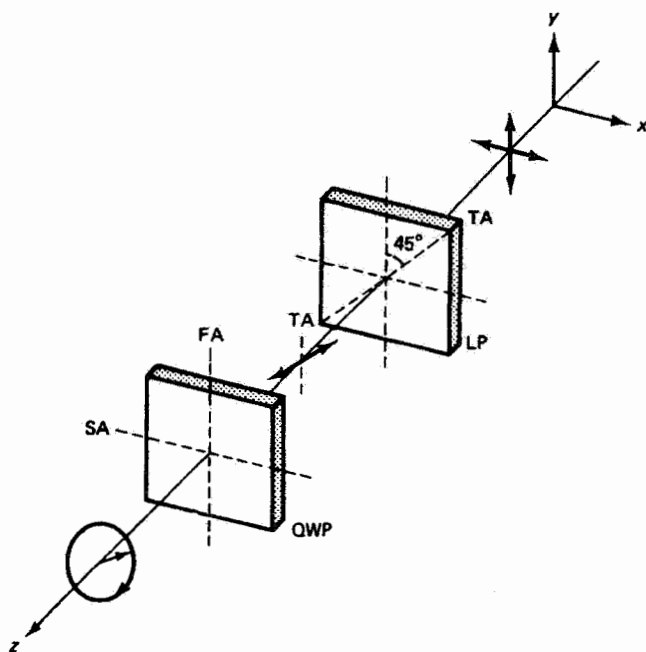
$$\cos(\theta + \beta) = \cos \theta \cos \beta - \sin \theta \sin \beta$$

$$\sin(\theta + \beta) = \sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta$$

به‌دست می‌آوریم

$$a = \cos \beta \quad c = \sin \beta$$

$$b = -\sin \beta \quad d = \cos \beta$$



شکل ۱۴-۱۱ تولید نور قطبیده دایره‌ای.

و در نتیجه ماتریس مورد نظر عبارت است از

$$M = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad \text{چرخشگر مربوط به } \beta \quad (21-14)$$

ماتریسهای جونزی که در این فصل به دست آورده‌ایم در جدول ۱۴-۲ خلاصه شده‌اند. به‌عنوان یک مثال مهم، تولید نور قطبیده دایره‌ای را از ترکیب قطبشگر خطی با تخته ربع‌موج در نظر بگیرید. فرض کنید، همچنانکه شکل ۱۴-۱۱ نشان می‌دهد، قطبشگر خطی (LP) نوری با ارتعاش در زاویه 45° تولید می‌کند که سپس از تخته ربع‌موج (QWP) می‌گذرد. در این آرایه نور فرودی به تخته ربع‌موج به‌طور مساوی بین محور تند (FA) و محور کند (SA) تقسیم می‌شود. در خروج، اختلاف فاز 90° منجر به نور قطبیده دایره‌ای می‌شود. در حساب جونز، این فرایند معادل است با اعمال ماتریس تخته ربع‌موج روی بردار جونز مربوط به نور قطبیده خطی:

$$e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

که نتیجه آن، چنانکه دیده می‌شود، نور قطبیده دایره‌ای راست با دامنه $1/\sqrt{2}$ ضربدر دامنه نور قطبیده خطی اصلی است. اگر محورهای تند و کند تخته ربع‌موج را با هم عوض کنیم، محاسبه مشابهی نشان می‌دهد نتیجه نور قطبیده دایره‌ای چپ است.

مثال

نتیجه عبور دادن نور قطبیده دایره‌ای چپ را از تخته یک‌هشتم موج تعیین کنید.

حل: ابتدا ماتریس نمایشگر تخته یک‌هشتم موج، یعنی تأخیرگر فازی که فاز نسبی $2\pi/8 = \pi/4$ یا 45° تولید می‌کند، را به دست می‌آوریم. با قرار دادن $\varepsilon_x = 0$ داریم

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

آنگاه این ماتریس را بر بردار جونز نمایشگر نور قطبیده دایره‌ای چپ اعمال می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ ie^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i3\pi/4} \end{bmatrix}$$

بردار جونز حاصل نمایشگر نور قطبیده بیضوی است که در آن مؤلفه‌ها 135° با هم اختلاف فاز دارند. با استفاده از معادلهٔ اوایلر برای بسط $e^{i3\pi/4}$ ، یعنی

$$e^{i3\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

و استفاده از نمادنگاری متعارف خود برای این مورد، داریم

$$M = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}, \quad A = 1, B = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ و } C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

از مقایسهٔ این ماتریس با صورت کلی در معادلهٔ ۱۴-۵، به دست می‌آوریم $E_{0y} = 1$ و $E_{0x} = 1$ همچنین، با استفاده از معادلهٔ ۱۴-۱۰ نتیجه می‌گیریم $\alpha = -45^\circ$.

البته، با حساب جونز می‌توان موردی را بررسی کرد که در آن نور قطبیده از یک رشته عناصر قطبیده عبور داده می‌شود، زیرا حاصلضرب ماتریسهای عناصر می‌تواند ماتریس دستگاه کل را

نمایش دهد. اگر نوری که با بردار جونز \mathcal{V} نمایش داده می‌شود پی در پی از رشته قطبشگرهایی که با $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \dots, \mathcal{M}_m$ نمایش داده می‌شوند عبور کند، یعنی

$$(\mathcal{M}_m \dots \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1) \mathcal{V} = \mathcal{M}_s \mathcal{V}$$

آنگاه ماتریس دستگاه \mathcal{M}_s عبارت است از $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_m \dots \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1$.

مسائل

۱۴-۱ ماتریس جونز ۱۴-۱۵ را که نماینده قطبشگر خطی با محور عبور در زاویه اختیاری θ نسبت به افق است به دست آورید.

۱۴-۲ بردارهای جونز بهنجار را برای هر یک از موجهای زیر بنویسید، و حالت قطبش هر موج را به طور کامل توصیف کنید

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \cos(kz - \omega t) - \mathbf{j}E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \sin 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - ft \right) + \mathbf{j}E_0 \sin 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - ft \right) \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \sin(kz - \omega t) + \mathbf{j}E_0 \sin \left(kz - \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \cos(kz - \omega t) + \mathbf{j}E_0 \cos \left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{د})$$

۱۴-۳ حالت قطبش امواج زیر را، با تعیین دامنه و جهت آنها، تا حد امکان به طور کامل توصیف کنید.

$$\mathbf{E} = 2E_0 \mathbf{i}e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{E} = E_0 (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{E} = 5E_0 (\mathbf{i} - i\mathbf{j})e^{i(kz + \omega t)} \quad (\text{ج})$$

۱۴-۴ دو باریکه قطبیده خطی با معادله‌های زیر داده شده‌اند

$$\mathbf{E}_1 = E_{01}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cos(kz - \omega t) \quad \text{و} \quad \mathbf{E}_2 = E_{02}(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cos(kz - \omega t)$$

زاویه بین صفحه‌های قطبش آنها را با

- (الف) تشکیل بردارهای جونز آنها و یافتن راستای ارتعاش هر یک و
(ب) تشکیل حاصلضرب نرده‌ای دامنه‌های بردار آنها به‌دست آورید.

۱۴-۵ نور قطبیده خطی قائم از آرایه عناصر اپتیکی

(الف) تخته نیم‌موج با محور کند در 45° ،

(ب) قطبشگر خطی با محور عبور در 45° ، و

- (ج) تخته ربع‌موج با محور کند افقی می‌گذرد. با رهیافت ماتریسی و تحلیل بردار جونز نهایی، سرشت قطبش نور حاصل را تعیین کنید. [راهنمایی: ابتدا اثر تخته نیم‌موج را به تنهایی روی نور فرودی به‌دست آورید.]

۱۴-۶ معادله‌های مربوط به میدانهای الکتریکی موجهای زیر را به‌صورت نمایی بنویسید:

- (الف) موج قطبیده خطی متحرک در راستای x . بردار E زاویه 30° با محور y می‌سازد.
(ب) موج قطبیده بیضوی راست متحرک در راستای y . محور بزرگ بیضی در راستای z و دو برابر محور کوچک است.
(ج) موج قطبیده خطی متحرک در صفحه xy در راستایی که با محور x زاویه 45° می‌سازد. راستای قطبش راستای z است.

۱۴-۷ مقادیر A ، B و C مربوط به بردار جونز نمایشگر نور قطبیده (معادله ۱۴-۹) چه باید باشند تا موارد خاص زیر به‌دست آیند؟
(الف) نور قطبیده خطی؛

(ب) نور قطبیده بیضوی با محور بزرگ در امتداد محور مختصات؛

(ج) نور قطبیده دایره‌ای. در هر مورد، با توجه به معنی A ، B و C مقادیر ممکن اختلاف فاز بین ارتعاشهای مؤلف را تعیین کنید.

۱۴-۸ یک برنامه رایانه‌ای بنویسید که با ثابتهای ورودی A ، B و C و پارامتر ورودی متغیر E_x مربوط به نور قطبیده بیضوی، مقادیر E_y را از معادله بیضی ۱۴-۱۲ تعیین کند. بیضی را برای مثال داده شده در این فصل، با

$$E_o = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 + i \end{bmatrix}$$

۹-۱۴ مد قطبش را برای هر یک از بردارهای جونز زیر مشخص کنید.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 3i \\ i \end{bmatrix} & \text{(الف)} & \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} & \text{(ب)} & \begin{bmatrix} 4i \\ 5 \end{bmatrix} & \text{(ج)} & \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{(د)} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2i \end{bmatrix} & \text{(ه)} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \text{(و)} & \begin{bmatrix} 2 \\ 6 + 8i \end{bmatrix} & \text{(ز)} \end{matrix}$$

۱۰-۱۴ نور قطبیده خطی که E ی آن زاویه $+30^\circ$ با محور x می‌سازد از تخته ربع‌موج با محور کند افقی عبور می‌کند. مد قطبش نور حاصل را توصیف کنید.

۱۱-۱۴ با استفاده از حساب جونز، نشان دهید اثر تخته نیم‌موج روی نور قطبیده خطی با زاویه شیب α چرخاندن صفحه قطبش به اندازه زاویه 2α است. بدین ترتیب، تخته نیم‌موج را می‌توان به عنوان "چرخشگر خط لیزری" به کار برد که باعث می‌شود بدون چرخاندن لیزر صفحه قطبش باریکه لیزری بچرخد.

۱۲-۱۴ یک کاربرد مهم تخته ربع‌موج استفاده از آن در "منزویگر" است. به عنوان مثال، برای جلوگیری پس‌خور از تداخل سنج به لیزر از طریق بازتاب به عقب از سطح جلو، باریکه را ابتدا از ترکیبی از قطبشگر خطی و تخته ربع‌موج، در حالی که محور اپتیک تخته ربع‌موج در 45° نسبت به محور عبور قطبشگر است، عبور می‌دهند. بررسی کنید برای این نور پس از بازتاب از یک سطح تخت و عبور به عقب از این وسیله اپتیکی چه روی داده است؟

۱۳-۱۴ نور خروجی از قطبشگر خطی با محور عبور افقی از یک قطبشگر خطی دیگر با محور عبور در 45° و سپس از تخته ربع‌موج با محور کند افقی می‌گذرد. با استفاده از فن ماتریس جونز، نور حاصل را تعیین و توصیف کنید.

۱۴-۱۴ باریکه نوری به طور متوالی از (۱) قطبشگر خطی با محور عبور 45° در جهت ساعتگرد از قائم، (۲) تخته ربع‌موج با محور کند قائم، (۳) قطبشگر خطی با محور عبور افقی، (۴) تخته نیم‌موج با محور تند افقی، (۵) قطبشگر خطی با محور عبور قائم می‌گذرد. سرشت نور حاصل را تعیین کنید.

۱۵-۱۴ نور ناقطبیده از قطبشگر خطی با محور عبور در 60° از قائم، سپس از تخته ربع‌موج با

محور کند افقی، و سرانجام از قطبشگر خطی با محور عبور قائم می‌گذرد. با استفاده از ماتریسهای جونز، سرشت نور را پس از عبور از
(الف) تخته ربع موج و
(ب) قطبشگر خطی نهایی تعیین کنید.

۱۶-۱۴ حالت قطبش نور قطبیده دایره‌ای را پس از عبور عمودی از
(الف) تخته ربع موج؛

(ب) تخته یک‌هشتم موج تعیین کنید. برای تأیید جواب خود از روش ماتریسی استفاده کنید.

۱۷-۱۴ نشان دهید ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ یک قطبشگر دایره‌ای راست را نمایش می‌دهد که هر نور قطبیده فرودی را به نور قطبیده دایره‌ای راست تبدیل می‌کند. ماتریس مناسب برای نمایش قطبشگر دایره‌ای چپ را بنویسید.

۱۸-۱۴ نشان دهید قطبش بیضوی را می‌توان به صورت ترکیبی از قطبشهای دایره‌ای و خطی در نظر گرفت.

۱۹-۱۴ معادله بیضی ۱۲-۱۴ برای نور قطبیده را به دست آورید. [راهنمایی: معادله‌های E_x و E_y برای مورد عمومی قطبش بیضوی را با حذف وابستگی فضایی و زمانی بین آنها با هم ترکیب کنید].

۲۰-۱۴ (الف) حالت قطبش مربوط به بردار جونز

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3e^{i\pi/3} \end{bmatrix}$$

را مشخص کنید و آن را به صورت بهنجار متعارف جدول ۱۴-۱ بنویسید.

(ب) فرض کنید این نور از عنصری که نور قطبیده خطی را به اندازه $30^\circ +$ می‌چرخاند عبور کند. صورت بهنجار جدید را به دست آورید و نتیجه را توصیف کنید.

۲۱-۱۴ ماهیت قطبشی را که از معادله ۱۲-۱۴ نتیجه می‌شود تعیین کنید وقتی

(الف) $\epsilon = \pi/2$ ؛

(ب) $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ ؛

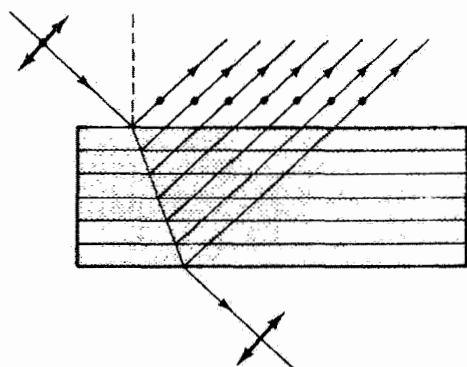
(ج) هم (الف) و هم (ب)؛

(د) $\epsilon = 0$.

۲۲-۱۴ یک تخته ربع موج را بین دو قطبشگر متعامد قرار می‌دهیم به طوری که زاویه بین محور عبور قطبشگر اول و محور تند تخته ربع موج θ است. تغییرات نور خروجی از قطبشگر دوم را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

مراجع

- [1] Jones, R. Clark. "A New Calculus for the Treatment of Optical Systems." *Journal of the Optical Society* 31 (1941): 488.
- [2] Walker, M. J. "Matrix Calculus and the Stokes Parameters of Polarized Radiation." *American Journal of Physics* 22 (1954): 170.
- [3] Shurcliff, W. A. *Polarized Light: Production and Use*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1962.
- [4] Gerrard, A., and J. M. Burch. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1975.



۱۵

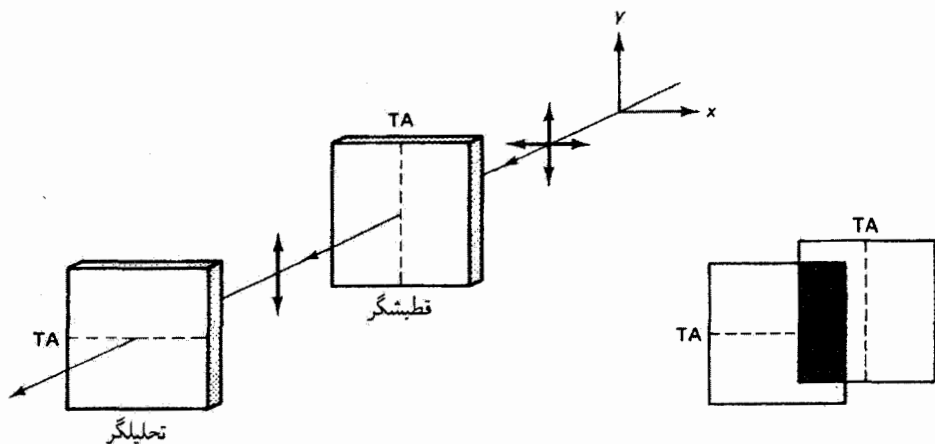
تولید نور قطبیده

مقدمه

هر برهم‌کنش نور با ماده‌ای که خواص اپتیکی آن در راستاهای عمود بر بردار انتشار نامتقارن هستند وسیله‌ای برای قطبیده کردن نور فراهم می‌کند. در واقع، اگر نور به جای عرضی بودن سرشت طولی داشت بی‌تقارنیهای عرضی ماده نمی‌توانست جهت نوسان بردار \mathbf{E} را تغییر دهد، و سازوکار فیزیکی‌ای که در اینجا توصیف خواهیم کرد آثارگزینشی فضایی یا قطبیده‌کننده روی باریکه‌های نور نمی‌داشت. بدین ترتیب، این واقعیت تجربی که نور می‌تواند قطبیده شود دلیل واضحی برای سرشت عرضی آن است. مهمترین فرایندهای تولید نور قطبیده را در این فصل تحت عناوین کلی زیر مورد بحث قرار می‌دهیم: (۱) دوفامی، (۲) بازتاب، (۳) پراکندگی، و (۴) شکست دوگانه. فعالیت نوری را به‌عنوان سازوکاری توصیف می‌کنیم که نور قطبیده را تغییر می‌دهد. در پایان، نورکشسانی را به‌عنوان کاربردی مفید به اختصار بررسی خواهیم کرد.

۱-۱۵ دوفامی: قطبش از راه جذب گزینشی

قطبشگر دوفام نور را با ارتعاشات \mathbf{E} در امتداد راستای یکتایی که مشخصه ماده دوفام است به‌طور گزینشی جذب می‌کند. این قطبشگر به آسانی نور با ارتعاشات \mathbf{E} در یک راستای عرضی عمود



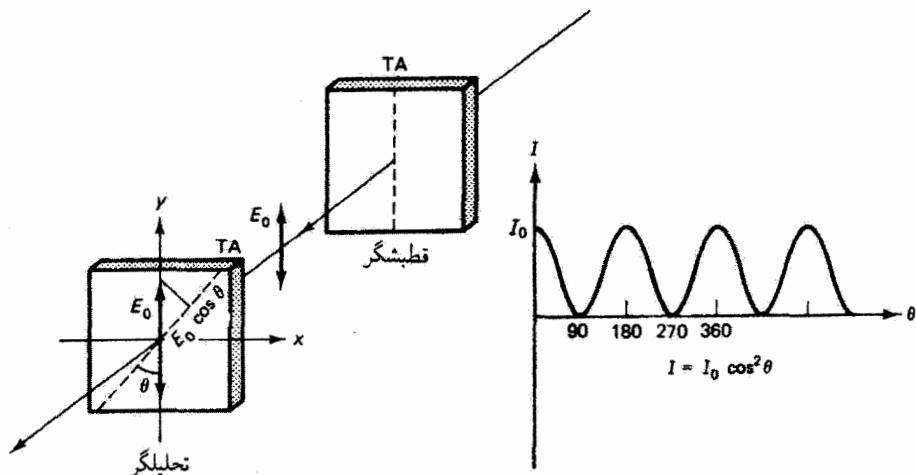
شکل ۱۵-۱ قطبشگرهای دوفام متعامد که به صورت یک جفت قطبشگر-تحلیلگر عمل می‌کنند. هیچ نوری از تحلیلگر عبور نمی‌کند.

بر راستای جذب را عبور می‌دهد. این راستای ممتاز را محور عبور قطبشگر (TA) می‌نامند. در قطبشگر ایده‌آل، نور عبور کرده قطبیده خطی در راستای محور عبور است. حالت قطبش این نور را می‌توان از همه آسانتر با یک قطبشگر دوفام دیگر، که اکنون به عنوان تحلیلگر عمل می‌کند، مطابق با شکل ۱۵-۱ آزمود. وقتی محور عبور تحلیلگر در موقعیت 90° نسبت به محور عبور قطبشگر باشد، نور عملاً خاموش می‌شود. اگر تحلیلگر را بچرخانیم، نوری که از این جفت می‌گذرد افزایش می‌یابد و وقتی محورهای عبور آنها موازی شدند به ماکسیمم می‌رسد. اگر I_0 شدت عبور کرده ماکسیمم باشد، تابیدگی به ازای هر زاویه نسبتی θ بین محورهای عبور با قانون مالوس داده می‌شود:

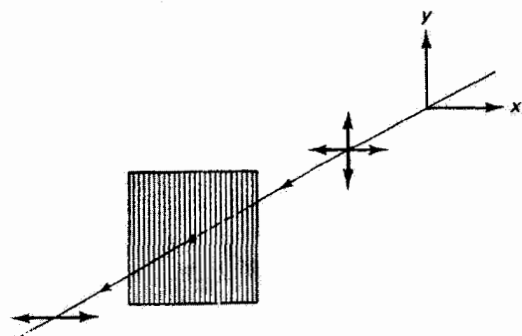
$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (1-15)$$

با توجه به شکل ۱۵-۲، قانون مالوس به آسانی قابل درک است: دامنه نور خروجی از تحلیلگر $E_0 \cos \theta$ است؛ بنابراین، تابیدگی I (برحسب W/m^2) متناسب با مجذور این دامنه است.

قابلیت جالب توجه مواد دوفام برای جذب شدید نور با \mathbf{E} در امتداد یک راستا و عبور آسان نور با \mathbf{E} در امتداد راستای عمود شاید بهتر از همه با آزمایش متعارفی با میکروموجها، که در شکل ۱۵-۳ نمایش داده شده است، قابل درک باشد. گستره طول موج میکروموجها تقریباً از ۱ mm تا ۱ m است. معلوم شده است که وقتی یک شبکه سیمی قائم سر راه میکروموجهایی با قطبش خطی قائم قرار داده شود، اگر فاصله سیمهای شبکه بسیار کوچکتر از طول موج باشد



شکل ۱۵-۲ توضیح قانون مالوس.

شکل ۱۵-۳ کنش شبکه سیمی قائم روی میکروموجها. جذب مؤثر مؤلفه قائم تابش وقتی روی می‌دهد که λ بسیار بزرگتر از فاصله شبکه‌ای باشد.

تقریباً هیچ تابشی عبور نمی‌کند. برعکس، وقتی شبکه امواج قطبیده در راستای عمود بر سیمها را قطع کند این امواج با درصد بسیار زیادی عبور می‌کنند. این پدیده را می‌توان با در نظر گرفتن برهم‌کنش تابش الکترومغناطیسی با سیمهای فلزی که همچون قطبشگر دوام عمل می‌کنند توضیح داد. در داخل سیمهای فلزی، الکترونهاي آزاد تحریکپذیر مطابق نوسانهای میدان الکتریکی تابش به حرکت نوسانی در می‌آیند. می‌دانیم که هر الکترون نوسان‌کننده‌ای یک چشمهٔ دوقطبی است که انرژی الکترومغناطیسی را در تمام راستاها به‌جز راستای خود نوسان تابش می‌کند. بدیهی است که برهم‌نیش موج الکترومغناطیسی فرودی دارای ارتعاشات E قائم و تابش این نوسانگرهای الکترونی منجر به حذف آنها در جهت جلو می‌شود. در واقع، معلوم می‌شود که موج الکترومغناطیسی

ناشی از الکترونیهای نوسان‌کننده و تابش فرودی 180° با هم اختلاف فاز دارند،^۱ و در نتیجه هیچ موجی نمی‌تواند در جهت جلو منتشر شود. علاوه بر این، نوسان الکترونیهای آزاد کاملاً آزاد نیست. برای مثال، اصطکاک مؤثر ناشی از برهم‌کنش با ناکاملیهای شبکه باعث مقداری اتلاف انرژی و در نتیجه تضعیف موج فرودی می‌شود. اما دلیل عمده نابودی موج جلو تداخل ویرانگر بین موج فرودی و موج تولید شده است. برای نور قطبیده خطی افقی که به شبکه سیمی قائم فرود می‌آید نیز همین وضعیت را داریم به‌جز اینکه الکترونها نمی‌توانند در عرض میله حرکت نوسانی محسوسی داشته باشند. در نتیجه، موج الکترومغناطیسی تولید شده از لحاظ شدت کاهش می‌یابد و حذف مؤثر نمی‌تواند روی دهد. اگر شبکه را 90° بچرخانیم، ارتعاشات قائم E عبور می‌کنند و ارتعاشات افقی E حذف می‌شوند. شبکه سیمی میکروموجها را قطبی می‌کند همان‌طور که جذب‌کننده دوفام تابش اپتیکی را قطبی می‌کند.

برای طول‌موجهای اپتیکی، مسیره‌های رسانش که مشابه با سیمهای شبکه هستند باید به هم بسیار نزدیکتر باشند. متداولترین جذب‌کننده دوفام عبارت است از ورقه H پولاروید که در سال ۱۹۳۸ توسط ادوین هربرت لند اختراع شد. وقتی یک ورقه الکل پلی‌وینیل پاک را گرم کنیم و بکشیم مولکولهای هیدروکربن طویل آن کم و بیش در امتداد راستای کشیدگی قرار می‌گیرند. آنگاه به ماده کشیده ید اضافه می‌کنیم که به مولکولهای خطی متصل می‌شوند و الکترونیهای "رسانش" را فراهم می‌کنند تا شباهت با شبکه سیمی کامل شود. بعضی از مواد طبیعی، مانند تورمالین معدنی، نیز تا اندازه‌ای خواص دوفامی دارند. تنها چیزی که لازم است این است که الکترونها برای پاسخ دادن به موج الکترومغناطیسی فرودی در یک راستا بسیار آزادتر باشند تا در راستای عمود بر آن. در مواد غیرفلزی، الکترونیهایی که مانند نوسانگرهای دوقطبی عمل می‌کنند آزاد نیستند. در این مورد، موجی که آنها تولید می‌کنند نسبت به موج فرودی اختلاف فاز ندارد، و حذف کامل موج پیش‌رونده روی نمی‌دهد. اما انرژی موج محرک طی پیشروی این موج در جذب‌کننده به تدریج تلف می‌شود، و در نتیجه کارایی جذب‌کننده دوفام تابعی از ضخامت است. جذب از رابطه معمولی تضعیف پیروی می‌کند:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

که در آن I_0 تابیدگی فرودی و I تابیدگی در عمق x جذب‌کننده است. ثابت α را، که مشخصه جذب‌کننده است، ضریب جذب می‌نامند. در یک جذب‌کننده دوفام واقعی خوب، α نسبتاً مستقل از طول‌موج است، یعنی ماده شفاف به نظر می‌رسد و در همین حال برای تمام طول‌موجهای اپتیکی همانند قطبشگر خطی عمل می‌کند. این وضعیت ایده‌آل در ورقه H پولاروید، که در انتهای آبی

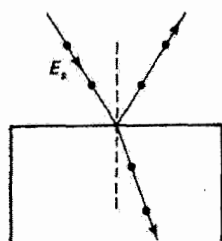
۱. اساس نظری این تعبیر در پایان بخش ۲۷-۱ در ارتباط با الکترونیهای آزاد فلز ارائه می‌شود.

طیف کمتر مؤثر است، کاملاً تحقق نمی‌یابد. در نتیجه، وقتی یک ورقه H پولا‌روید عمود بر ورقه دیگری که به منزله تحلیلگر عمل می‌کند قرار داده شود، از این ترکیب یک تهرنگ آبی در نور عبور کرده باقی می‌ماند.

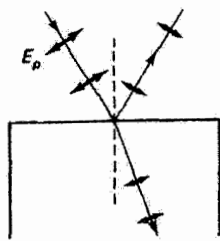
۱۵-۲ قطبش از راه بازتاب از سطح دی‌الکتریک

نوری که از سطوح دی‌الکتریک بازتاب آینه‌ای پیدا می‌کند دست‌کم قطبیده جزئی است. این اثر را می‌توانیم با نگاه کردن به یک قطعه صافی قطبی‌کننده در حالی که آن را حول راستای نور بازتابیده می‌چرخانیم به آسانی ببینیم. وقتی راستای ممتاز E ی نور بازتابیده عمود بر محور عبور صافی باشد، روشنایی ناحیه‌هایی که نور از آنها بازتاب آینه‌ای به چشم پیدا می‌کند به نظر می‌رسد کاهش یافته است. این دقیقاً اصول کار عینکهای آفتابی پولا‌روید است. چون معلوم شده است که ارتعاش ممتاز E در نور بازتابیده از سطح زمین به چشم افقی است، محور عبور پولا‌رویدهای عینک آفتابی در راستای قائم ثابت است.

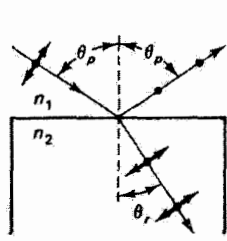
برای درک بهتر مبانی فیزیکی این پدیده، شکل ۱۵-۴ را در نظر بگیرید که باریکه کم عرضی از نور را نشان می‌دهد که در زاویه اختیاری به سطح دی‌الکتریک تخت هموار فرود می‌آید. در این شکل پرتو فرودی و عمود در نقطه فرود ترسیم شده‌اند. بهتر است باریکه فرودی ناقطبیده را با دو ارتعاش متعامد E یکی عمود بر صفحه فرود یعنی صفحه کتاب (شکل ۱۵-۴ الف) و دیگری موازی با آن (شکل ۱۵-۴ ب) نمایش دهیم. در نمادنگاری متعارف، این مؤلفه‌ها با E_s (مؤلفه عمودی) و E_p (مؤلفه موازی) نشان داده می‌شوند. همچنین، مد E_s را مد الکتریکی عرضی (TE) می‌نامند، و مد E_p را مد مغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند زیرا وقتی مؤلفه E ی موج موازی با سطح فرود است مؤلفه متناظر B بر آن عمود است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۵-۴ بازتاب آینه‌ای نور در سطح دی‌الکتریک. (الف) مد TE. (ب) مد TM. (ج) قطبش در زاویه پروسر.

ابتدا مؤلفه E_s یا TE را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵-۴ الف). کنش E_s روی الکترونها در سطح دی‌الکتریک ایجاد نوسان در امتداد E_s ، یعنی عمود بر صفحه کتاب، است. تابشهای ناشی از تمام این نوسانگرهای دوقطبی الکترونی با هم جمع می‌شوند و تنها در دو راستا باریکه نور به وجود می‌آورند: باریکه بازتابیده و باریکه شکسته که هر دو قطبیده خطی عمود بر صفحه فرود هستند.

اکنون کنش مؤلفه E_p یا TM را بررسی می‌کنیم (شکل ۱۵-۴ ب). از راستای باریکه شکسته (که می‌توان آن را از قانون اسنل به دست آورد) نتیجه می‌گیریم که میدان E در ماده دی‌الکتریک همسانگرد، و از این رو محور نوسانهای دوقطبی، چنانکه نشان داده شده است، عمود بر راستای باریکه است. توجه کنید که نوسانهای دوقطبی شامل مؤلفه‌ای در راستای باریکه بازتابیده هستند. با توجه به اینکه نوسانگر دوقطبی در راستاهایی که زاویه کوچکی با محور دوقطبی می‌سازند تنها تابش ضعیفی دارد ($I \propto \sin^2 \theta$) نتیجه می‌گیریم که تنها کسری از مؤلفه E_p از نور اصلی (در مقایسه با مؤلفه E_s) در باریکه بازتابیده ظاهر می‌شود. اگر مدهای TE و TM را با هم در نظر بگیریم معلوم می‌شود نور بازتابیده قطبیده جزئی است که در آن مد E_s غلبه دارد. چون انرژی نور فرودی به‌طور مساوی بین مؤلفه‌های E_s و E_p تقسیم می‌شود، همچنین نتیجه می‌گیریم باریکه شکسته قطبیده جزئی است که در آن مؤلفه E_p تفوق دارد.

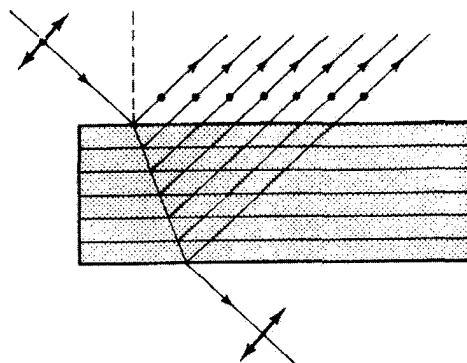
این تحلیل باید روشن کرده باشد که وقتی محورهای دوقطبی با پرتو بازتابیده در یک راستا هستند، مؤلفه E_p کاملاً از باریکه بازتابیده حذف می‌شود، و پرتو بازتابیده در مد E_s قطبیده خطی است. در واقع، اگر دوقطبیها در امتداد پرتو بازتابیده تابش می‌کردند، موج الکترومغناطیسی تنها می‌توانست یک موج طولی باشد! این وضعیت منحصر به فرد وقتی پیش می‌آید که پرتوهای بازتابیده و شکسته بر هم عمود باشند (شکل ۱۵-۴ ج). زاویه فرود θ_p را که در آن باریکه قطبیده خطی از راه بازتاب ایجاد می‌شود زاویه قطبنده یا زاویه بروستر می‌نامند. از ترکیب قانون اسنل

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_r$$

با رابطه $\theta_r = \pi/2 - \theta_p$ ، به قانون بروستر می‌رسیم:

$$\theta_p = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (2-15)$$

این اثر هم برای بازتاب خارجی ($n_2 > n_1$) و هم برای بازتاب داخلی ($n_2 < n_1$) روی می‌دهد و واضح است که زاویه‌های قطبنده برای این دو مورد با هم برابر نیستند. در بازتابی که برای آن نور از هوا به شیشه، به‌عنوان مثال با $n = 1.5$ فرود می‌آید داریم $\theta_p = 56.3^\circ$. در



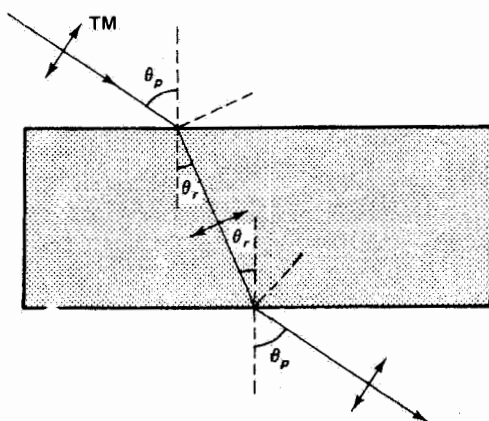
شکل ۵-۱۵ قطبشگر چندلایه‌ای.

بازتابی که نور مسیر معکوس را طی می‌کند، $\theta_p = 33.7^\circ$ دیده می‌شود که این زاویه‌ها، همان‌طور که هندسه و تعریف زاویه بروستر ایجاب می‌کنند، دقیقاً مکمل هستند.

اگر چه از بازتاب از سطح دی‌الکتریک در زاویه قطبیده می‌توان برای ایجاد نور قطبیده خطی استفاده کرد اما این روش فایده چندانی ندارد. در بازتاب از هوا به شیشه، که در مثال بالا گفته شد، تنها ۱۵٪ از مؤلفه E_s در باریکه بازتابیده یافت می‌شود. (معادلات فرنل را که محاسباتی از این نوع با آنها امکانپذیراند در فصل ۲۰ بررسی می‌کنیم.) این نقص را می‌توان با تقویت چند مرحله‌ای باریکه بازتابیده مانند تقویت در قطبشگر چندلایه‌ای (شکل ۵-۱۵) تا اندازه‌ای رفع کرد. بازتابهای مکرر از لایه‌های متوالی دی‌الکتریک در زاویه بروستر هم باعث افزایش شدت مؤلفه E_s در باریکه بازتابیده کل می‌شوند و هم، در نتیجه، باریکه عبور کرده را از این مؤلفه تصفیه می‌کنند. اگر تعداد لایه‌ها به اندازه کافی زیاد باشد باریکه عبور کرده به وضعیت قطبیده خطی نزدیک می‌شود. قطبشگرهای چندلایه‌ای مخصوصاً در آن ناحیه‌هایی از طیف فرورسرخ و فرابنفش مفید هستند که قطبشگرهای ورقه دوفام و منشورهای کلسیت کارایی ندارند. پوششهای لایه نازک چندگانه که جذب اندکی در ناحیه طیف مورد نظر دارند به روش مشابهی عمل می‌کنند و می‌توان از آنها به‌عنوان بازتابنده‌ها و گسیلنده‌های حساس به قطبش استفاده کرد.

کاربرد جالب دیگر قطبش از راه بازتاب در بچه بروستر است. این عنصر اپتیکی (شکل ۱۵-۶) مانند یکی از لایه‌های تحلیلگر چندلایه‌ای عمل می‌کند. نور قطبیده خطی TM که تحت زاویه بروستر فرود می‌آید در سطح اول کاملاً عبور داده می‌شود. زاویه فرود θ_p در سطح دوم نیز در قانون بروستر برای بازتاب داخلی صدق می‌کند، و در نتیجه این نور باز هم به‌طور کامل عبور داده می‌شود. این تخته همچون یک در بچه کامل برای نور قطبیده TM عمل می‌کند.

محیط فعال لیزرگازی غالباً با دو در بچه بروستر که در دو سر لوله پلاسمای گاز قرار دارند محدود



شکل ۱۵-۶ درجهٔ بروستر. قانون بروستر برای مد TM در هردو سطح صادق است.

می‌شود. در کاواک، نور در راه خود به سمت آینه‌های کاواک که در دو انتهای لوله قرار دارند و در برگشت از آنها مکرراً از این درجه‌ها می‌گذرد. در هر نوبت، مد TM کاملاً عبور داده می‌شود در حالی که مد TE بازتاب جزئی پیدا می‌کند (برگشت داده می‌شود). باریکه، پس از چندین رفت و برگشت در کاواک لیزر، اساساً بدون ارتعاشات TE است و باریکهٔ لیزری خروجی در مد TM قطبیده است.

۱۵-۳ قطبش از راه پراکندگی

قبل از بررسی قطبش حاصل از پراکندگی نور مختصری دربارهٔ پراکندگی از یک دیدگاه کلی بحث می‌کنیم و بعضی از پیامدهای آشنای آن را که به خودی خود جالب توجه‌اند یادآوری می‌کنیم. منظور از پراکندگی نور حذف انرژی از موج فرودی توسط محیط پراکننده و گسیل مجدد قسمتی از آن انرژی در راستاهای متعدد است. نوسانگر بنیادی یا واحد پراکننده را می‌توان به صورت بار الکترونی مقید به هسته (نوسانگر دوقطبی) تصور کرد. الکترون توسط میدان الکتریکی متناوب نور فرودی به نوسان واداشته با بسامد یکسان در آورده می‌شود. پاسخ الکترون به این نیروی محرک بستگی به رابطهٔ بین بسامد محرک ω و بسامد طبیعی یا تشدید نوسانگر ω_0 دارد. در بیشتر مواد، بسامدهای تشدید عمده‌تاً در ناحیه‌های فرابنفش (به علت نوسانهای الکترونی) و فرسرخ (به علت ارتعاشهای مولکولی) قرار دارند نه در ناحیهٔ مرئی. چون جرم اتمی بسیار بیشتر از جرم الکترون است، دامنهٔ ارتعاش مولکولی نسبت به ارتعاش الکترونی کوچک است و از این رو در این بحث می‌توان از آن صرف نظر کرد. بدین ترتیب، برای نور فرودی به بیشتر مواد داریم $\omega \ll \omega_0$. محاسبه نشان می‌دهد^۱ که در این مورد، نوسانهای دوقطبی القایی دامنه‌ای دارند که تقریباً مستقل

۱. چنین محاسباتی که به بررسی این مفاهیم صورت گتی می‌دهند در بخش ۲۷-۱ آورده شده‌اند.

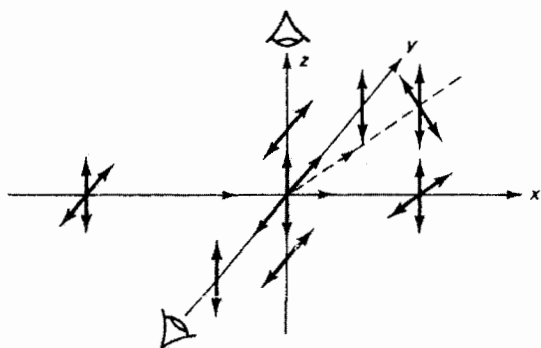
از بسامد نور است. دوقطبیهای نوسان‌کننده، شامل الکترونهايي که به علت حرکت هماهنگشان شتاب دارند، تابشگرهای کوچکی، یا آنتنهایی، هستند که انرژی را در تمام راستاها به جز امتداد محور خود دوقطبی مجدداً تابش یا پراکنده می‌کنند.

این پراکندگی وقتی مؤثرتر است که مراکز پراکننده ذراتی هستند که اندازه آنها نسبت به طول موج تابش کوچک باشد، که در این مورد آن را پراکندگی ریلی می‌نامند. به‌عنوان مثال، پراکندگی آفتاب از مولکولهای اکسیژن و نیتروژن در جو پراکندگی ریلی است، در حالی که پراکندگی نور از مراکز پراکنده چگال — مانند قطره‌های آب در ابرها و مه — از این نوع نیست. در پراکندگی ریلی، مراکز پراکنده کاملاً فاصله‌دار به‌طور مستقل (ناهمدوس) عمل می‌کنند، و از این رو بنابه نتایج بخش ۹-۳ تابیدگی کل آنها مجموع تابیدگیهای انفرادی آنها است. اما می‌توان نشان داد توان تابیده با توان چهارم طول موج فرودی نسبت معکوس دارد. به جای محاسبه دقیق این قانون پراکندگی ریلی، می‌توانیم از استدلال نسبتاً کیفی زیر استفاده کنیم: میدان الکتریکی دوقطبی با بار e که در امتداد یک خط راست حرکت رفت و برگشت شتابدار دارد متناسب با شتاب است. اگر $r = r_0 e^{i\omega t}$ ، برای شتاب داریم $d^2r/dt^2 = -\omega^2 r_0 e^{i\omega t}$ که متناسب با مجذور بسامد است. چون توان تابش شده P به نوبه خود متناسب با مجذور دامنه الکتریکی است، P متناسب با توان چهارم بسامد می‌شود. این نتیجه قانون پراکندگی ریلی است که با رابطه زیر بیان می‌شود [۹]

$$P = \frac{e^2 \omega^4 r_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

بدین ترتیب، دوقطبی نوسان‌کننده در ناحیه طول‌موجهای کوچکتر طیف مرئی بیشتر انرژی تابش می‌کند تا در ناحیه طول‌موجهای بزرگتر. توان تابیده برای نور بنفش با طول‌موج 400 nm تقریباً 10° برابر توان برای نور سرخ با طول‌موج 700 nm است. پراکندگی ریلی توضیح می‌دهد که چرا هوای پاک به رنگ آبی دیده می‌شود: در نور خورشید رنگ آبی که بسامد بزرگتری دارد توسط جو به طرف زمین بیشتر پراکنده می‌شود تا رنگ سرخ که بسامد کوچکتری دارد. از طرف دیگر، وقتی به خورشید موقع طلوع یا غروب "از روبه‌رو" نگاه می‌کنیم، آن را که نورش مسافتی طولانی در جو طی کرده است به رنگ مایل به سرخ یا مایل به زرد می‌بینیم، یعنی نور سفیدی که رنگ آبی آن عمدتاً از طریق پراکندگی حذف شده است.

پراکندگی ناشی از ذرات بزرگتر، مانند ذراتی که در ابرها، مه، و گرد موادی مانند شکر یافت می‌شوند، برخلاف پراکندگی ریلی، به‌صورت نور سفید دیده می‌شود. در اینجا منظور از "ذرات" نظریه عمومی‌تر پراکندگی، شامل مراکز پراکندگی بزرگتر، به افتخار واضح آن پراکندگی می‌نامیده می‌شود. پراکندگی می‌اندازه، شکل، ضریب شکست، و ضریب جذب ذرات پراکنده را به حساب می‌آورد و پراکندگی ریلی را به‌عنوان مورد خاص در بر دارد [۴].



شکل ۱۵-۷ قطبش ناشی از پراکندگی. نور ناقطبیده فرودی از چپ توسط ذره‌ای واقع در مبدأ پراکنده شده است.

بزرگتر" اندازه ذره پراکننده نسبت به طول موج نور است. در این مورد، مراکز پراکننده (ذرات) به نحوی —کم و بیش— مرتب شده‌اند به طوری که نوسانگرهایی که از یک طول موج نور فرودی به هم نزدیکتراند پراکننده‌های همدوس می‌شوند. به عبارت دیگر، پراکندگی ناشی از این ذرات بزرگتر را می‌توان برحسب قوانین معمولی بازتاب و شکست توضیح داد. اما انحرافهای معمولی از آرایه اتمی کاملاً مرتب به مقداری پراکندگی در راستاهای دیگر نیز منجر می‌شوند. اکنون دامنه کل تابش پراکنده همدوس برابر است با مجموع دامنه‌های انفرادی، یا به ازای N نوسانگر همدوس توان تابیده متناسب با N^2 است. اگر چه تأثیر این پراکندگی به ازای هر نوسانگر بسیار کمتر از پراکندگی ریلی است اما چگالی نوسانگرها در این مورد پراکندگی قابل ملاحظه‌ای را به وجود می‌آورد. می‌توان نشان داد مقدار N مربوط به این نوسانگرهای همدوس که توان بازتابیده را ایجاد می‌کنند متناسب با λ^2 است، و در نتیجه توان تابیده متناسب با λ^4 است که این باعث حذف وابستگی $1/\lambda^4$ مربوط به تک تک نوسانگرها می‌شود. بدین ترتیب، تابش پراکنده اساساً مستقل از طول موج است، و مه و ابرها توسط نور پراکنده سفید دیده می‌شوند.

اما آنچه در ارتباط با این فصل مخصوصاً جالب توجه است این واقعیت است که تابش پراکنده همچنین می‌تواند قطبی باشد. این پدیده را می‌توان نسبتاً به آسانی توضیح داد، زیرا نور موج عرضی است نه طولی. به عنوان یک مثال، ظرف آبی را در نظر بگیرید که در آن چند قطره شیر می‌ریزیم. مولکولهای شیر سریعاً در تمام آب پخش می‌شوند و همچون مراکز پراکندگی برای باریکه نوری که از این محیط می‌گذرد عمل می‌کنند. در آب خالص، نور به اطراف پراکنده نمی‌شود و تنها در جهت پیش انتشار می‌باید. نوری که از مولکولهای شیر در راستاهای مختلف پراکنده می‌شود وقتی با یک صافی قطبیده امتحان شود، همچنانکه در شکل ۱۵-۷ نشان داده شده است، معلوم خواهد شد که قطبیده است. مؤلفه‌های عمودی E ی نور ناقطبیده‌ای که از سمت چپ فرود می‌آید نوسانگرهای

الکترونی مراکز پراکندگی را به ارتعاشهای واداشته مشابهی در می آورند و باعث گسیل مجدد تابش در تمام راستاها می شوند. نور پراکنده در هر راستایی می تواند تنها شامل آن ارتعاشهای یکسان E باشد که توسط آن نوسانگرها صورت گرفته است، یعنی در راستاهای y و z . اگر به نور پراکنده از جهت y - نگاه کنیم معلوم می شود که شامل ارتعاشهای E در راستای z است اما ارتعاشهای در راستای y وجود ندارند زیرا اینها معرف ارتعاشهای طولی E در موج الکترومغناطیسی خواهند بود. به همین ترتیب، اگر در راستای z نگاه کنیم ارتعاشهای در راستای z را غایب می بینیم، و نور در راستای y قطبیده خطی است. اگر در راستاهایی غیر از این محورها نگاه کنیم نور را قطبیده جزئی می یابیم. باریکه پیش سو نیز همان قطبش نور فرودی را نشان می دهد.

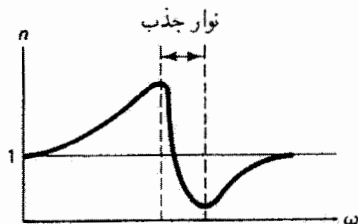
به همین طریق، وقتی خورشید مستقیماً بالای سر نیست و در نتیجه نور آن به طور مایل از جو بالای سرمان عبور می کند، نور پراکنده به طرف پایین را قطبیده جزئی می یابیم. این اثر با نگاه به آسمان روشن از یک صافی قطبنده در حالی که آن را می چرخانیم به آسانی قابل مشاهده است. قطبش کامل نیست، هم به این دلیل که ما نور چندبار پراکنده را که به چشم وارد می شود می بینیم و هم به این دلیل که تمام نوسانگرهای الکترونی در مولکولها آزاد نیستند تا دقیقاً در همان راستایی نوسان کنند که بردار E ی نور فرودی نوسان می کند.

قطبش معمولی از راه پراکندگی به طور کلی ضعیف و ناقص است و از این رو به عنوان وسیله عملی تولید مصنوعی نور قطبیده به کار نمی رود. اما در حوزه اپتیک غیرخطی پراکندگی مهار شده نور از محیطهای فعال، مثلاً پراکندگی القایی رامان، ریلی، و بریلوئن، موضوع پژوهشهای بسیار اساسی است. در این موارد، نور پراکنده با بسامدهای تشدید می محیط تغییر می کند. درآمدی بر این گونه کاربردهای غیرخطی در فصل ۲۶ ارائه شده است.

۱۵-۴ دوشکستی: قطبش با دو ضریب شکست

مواد دوشکست را به این دلیل این طور می نامند که می توانند باعث شکست دوگانه شوند، یعنی دو باریکه شکسته ناشی از دو ضریب شکست برای یک ماده ایجاد می شوند.

قبلاً دیدیم که ناهمسانگردی در نیروهای بستگی مؤثر بر الکترونهاي ماده می تواند به ناهمسانگردی در دامنه نوسانهای آنها در پاسخ به موج الکترومغناطیسی تحریک کننده و در نتیجه به ناهمسانگردی جذب منجر شود. این نوع ماده از خود دو فامی نشان می دهد. اما برای اینکه این امر صورت گیرد بسامدهای اپتیکی تحریک کننده باید در محدوده نوار جذب ماده واقع باشند. با توجه به شکل ۱۵-۸، می بینیم که در یک بازه بسامد معین پاشیدگی dn/dw کمتر از صفر - یا "غیرعادی" - است. این نوع بازه ها با یافت شدن نوارهای جذب در یک ماده معین توافق دارند. نوار جذب نوعاً در فراینش، بالاتر از بسامدهای اپتیکی، واقع می شود و در نتیجه این ماده برای نور مرئی شفاف است. در این



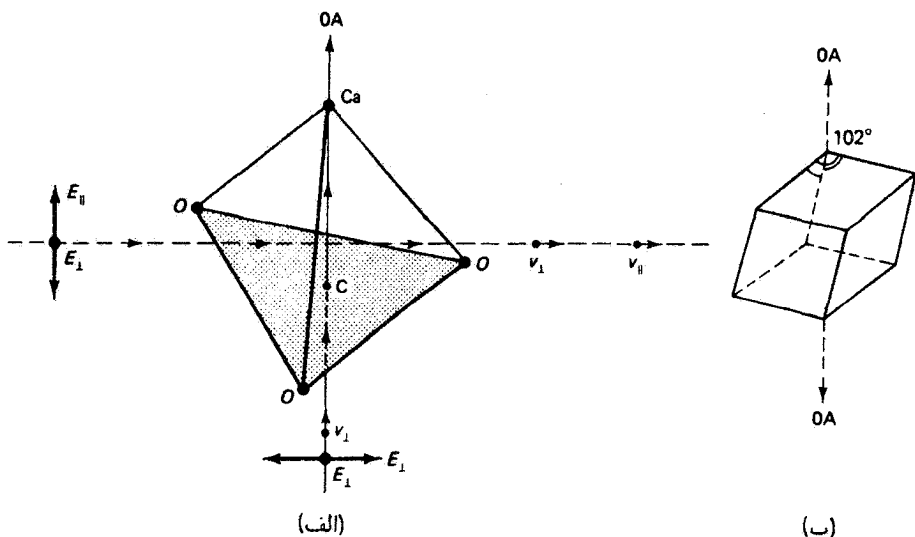
شکل ۱۵-۸ پاسخ ضریب شکست به صورت تابعی از بسامد نزدیک نوار جذب. این نوار که در آن $dn/d\omega < 0$ ناحیه پاشیدگی غیرعادی نامیده می‌شود.

مورد، حتی با وجود ناهمسانگردی نیروهای بستگی الکترونی، جذب اپتیکی کم‌وبیش همسانگرد است و ماده دوقام به نظر نمی‌رسد. با این‌همه، وجود نیروهای بستگی ناهمسانگرد در راستاهای x و y به منحنیهای پاشیدگی مختلف (مانند منحنی شکل ۱۵-۸) برای ضریب شکست n_x مربوط به ارتعاشهای E_x و n_y مربوط به ارتعاشهای E_y منجر می‌شود. وجود دو ضریب n_x و n_y برای یک بسامد اپتیکی معین دور از انتظار نیست، زیرا نیروهای بستگی مختلف در این راستاها برهم‌کنشهای مختلفی با موج الکترومغناطیسی به وجود می‌آورند، و بدین ترتیب سرعتهای مختلف v_x و v_y برای انتشار در بلور ایجاد می‌شوند. نتیجه این است که این نوع بلور با اینکه به طور محسوسی دوقام نیست از خود خاصیت دوشکستی نشان می‌دهد. خواص فیزیکی مهم در اینجا ضریب شکست n و ضریب خاموشی k (متناسب با ضریب جذب) برای یک بسامد معین نور هستند. این دو ضریب قسمتهای ضریب شکست مختلط را تشکیل می‌دهند:

$$\bar{n} = n + ik$$

بنابراین، به طور خلاصه، برای ماده دوقام ایده‌آل داریم $n_x = n_y$ و $k_x \neq k_y$ ، در حالی‌که برای ماده دوشکست ایده‌آل داریم $k_x = k_y$ و $n_x \neq n_y$. هر دو وضعیت مستلزم ساختارهای بلوری ناهمسانگرداند، و وابسته به بسامد هستند. به عنوان مثال، کلسیت در طیف مرئی دوشکست است و در بعضی از قسمتهای طیف فروسرخ به شدت دوقام است. مواد متداول دیگری که در ناحیه مرئی دوشکست هستند عبارت‌اند از کوارتز، یخ، میکا، و حتی سلوفان.

رابطه بی‌تقارنی بلوری با ضریب شکست و سرعت نور در محیط را می‌توان با بررسی مورد کلسیت با وضوح بیشتری درک کرد. واحد مولکولی پایه کلسیت CaCO_3 است که ساختار چهاروجهی یا هرمی در بلور دارد. شکل ۱۵-۹ الف یکی از این مولکولها را نشان می‌دهد که فرض می‌شود با ساختارهای یکسانی که سمتگیری مشابهی دارند احاطه شده است. اتمهای اکسیژن قاعده هرم را که یک مثلث مساوی‌الاضلاع است تشکیل می‌دهند در حالی‌که اتم کربن در مرکز



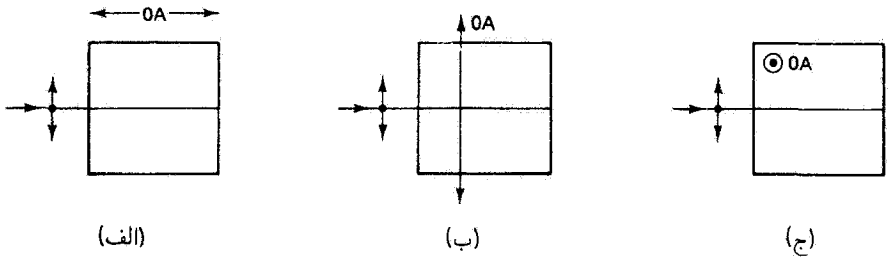
شکل ۹-۱۵ الف) پیشروی نور در بلور کلسیت. سه اتم اکسیژن قاعده یک چهاروجهی را تشکیل می‌دهند. محور اپتیک OA موازی با خط واصل اتمهای C و Ca است. (ب) لوزی وجهی کلسیت، نمایشگر محور اپتیک که به طور متقارن از گوشهٔ پهنی که در آنجا سه زاویهٔ وجهی برابر با ۱۰۲° هستند می‌گذرد.

این قاعده قرار دارد. اتم کلسیم در رأس هرم، درست بالای اتم کربن، واقع است. این شکل نور ناقطبیده را که از بلور در دو راستای مختلف عبور می‌کند نشان می‌دهد. ابتدا نوری را در نظر می‌گیریم که از پایین در امتداد خط واصل اتمهای کربن و کلسیم وارد می‌شود. تمام نوسانهای میدان E با دو بردار متعامد نمایش داده شده‌اند. چون مولکول، و در نتیجه بلور، نسبت به این راستا متقارن است هر دو ارتعاش E موقع عبور از کلسیت به یک صورت با الکترونها برهم‌کنش دارند. این راستای تقارن در بلور را محور اپتیک بلور (OA) می‌نامند. برای نوری که از پایین وارد می‌شود، هر دو مؤلفهٔ E عمود بر OA هستند. اکنون نوری را که از چپ وارد بلور می‌شود در نظر می‌گیریم. در این راستا ارتعاشهای نمایشگر E اثرهای نامشابهی روی الکترونها در صفحهٔ قاعده دارند. مؤلفهٔ E_{\parallel} که موازی با محور اپتیک بلور است باعث می‌شود الکترونها در صفحهٔ قاعده در راستای عمود بر این صفحه نوسان کنند، در حالی که مؤلفهٔ عمودی E_{\perp} در این صفحه نوسان ایجاد می‌کند. نوسانهای درون این صفحه که در آن الکترونها به علت پیوند شیمیایی مقید هستند نسبت به نوسانهای عمود بر صفحه آسانتر، یعنی با نیروی بستگی کمتری، صورت می‌گیرند. چون نوسانهای E در صفحهٔ اکسیژنها ($E \perp OA$) برهم‌کنش قویتری با الکترونها دارند، سرعت این امواج مؤلف از همه بیشتر کاهش می‌یابد، یعنی $v_{\parallel} < v_{\perp}$. هیچ برهم‌کنشی نمی‌تواند باعث شود که $v = c$. چون $n = c/v$ ، نتیجه می‌گیریم که $n_{\perp} > n_{\parallel}$. مقادیر اندازه‌گیری شده برای کلسیت به‌ازای

جدول ۱۵-۱ ضرایب شکست چند ماده در طول موج سدیم ۵۸۹٫۳ nm

۱٫۵۴۴			کلرید سدیم	همسانگرد
۲٫۴۱۷			الماس	(مکعبی)
۱٫۳۹۲			فلوئوریت	
n_{\perp}	n_{\parallel}		مثبت:	تک محوری
۱٫۳۰۹	۱٫۳۱۳		یخ	(سه گوشه‌ای)
۱٫۵۴۴۳	۱٫۵۵۳۴		کوارتز (SiO _۲)	چهار گوشه‌ای
۱٫۹۲۳	۱٫۹۶۸		زرگون (ZrSiO _۴)	شش گوشه‌ای
۲٫۶۱۶	۲٫۹۰۳		روتیل (TiO _۲)	
			منفی:	
۱٫۶۵۸۴	۱٫۴۸۶۴		کلسیت (CaCO _۳)	
۱٫۶۶۹	۱٫۶۳۸		تورمالین	
۱٫۵۸۵۴	۱٫۳۳۶۹		نیزات سدیم	
۱٫۵۹۸	۱٫۵۹۰		بریل (Be _۳ Al _۲ (SiO _۴) _۶)	
n_z	n_y	n_x		دو محوری
۱٫۵۳۰	۱٫۵۲۳	۱٫۵۲۰	سنگ گچ ((CaSO _۴ (۲H _۲ O))	(سه میل)
۱٫۵۳۰	۱٫۵۲۶	۱٫۵۲۲	فلدسپار	تک میل
۱٫۵۸۸	۱٫۵۸۲	۱٫۵۵۲	میکا	(راستگوشه)
۱٫۶۲۷	۱٫۶۲۰	۱٫۶۱۹	زبرجد	

۵۸۹٫۳ nm $\lambda =$ عبارت‌اند از $n_{\perp} = ۱٫۶۵۸$ و $n_{\parallel} = ۱٫۴۸۶$. همچنانکه جدول ۱۵-۱ نشان می‌دهد، این نابرابری ممکن است در مواد دیگر برعکس باشد. در موادی که به صورت دستگاههای سه گوشه‌ای (مانند کلسیت)، چهار گوشه‌ای یا شش گوشه‌ای بلوری می‌شوند، یک راستای یکتا در بلور وجود دارد که آنها نسبت به آن به طور متقارن مرتب شده‌اند. به عنوان مثال، مولکول کلسیت شکل ۱۵-۹ الف دارای تقارن چرخشی سه تایی حول محور اپتیک است. این ساختارها تنها یک محور اپتیک دارند و آنها را دوشکست تک محوری می‌نامند. علاوه بر این، وقتی $n_{\parallel} - n_{\perp} > 0$ ، بلور را مثبت تک محوری و وقتی این کمیت منفی است بلور را منفی تک محوری می‌نامند. سایر دستگاههای بلوری، یعنی سه میل، تک میل و راستگوشه، دارای دو راستای تقارن یا محور اپتیک هستند و آنها را بلور دومحوری می‌نامند.^۱ میکا که به صورت تک میل بلوری می‌شود مثال مناسبی است. در نتیجه این نوع مواد دارای سه ضریب شکست متمایز هستند. البته بلورهای مکعبی مانند ۱. برای توصیفی از این نوع دستگاههای بلوری، مراجعه کنید به مثلاً "آشنایی با فیزیک حالت جامد" چارلز کیتل.



شکل ۱۵-۱۰ نور به تخته‌های دوشکست با سمتگیرهای مختلف محور اپتیک وارد می‌شود. (الف) انتشار نور در راستای محور اپتیک. (ب) انتشار نور عمود بر محور اپتیک. (ج) انتشار نور عمود بر محور اپتیک.

نمک (NaCl) یا الماس (C) نیز وجود دارند که همسانگرد اپتیکی هستند و یک ضریب شکست دارند. این مورد همچنین به موادی، مانند شیشه یا مایعات، مربوط می‌شود که ساختار بلوری مقیاس بزرگ ندارند و از این رو این مواد نیز همسانگرد اپتیکی با یک ضریب شکست هستند.

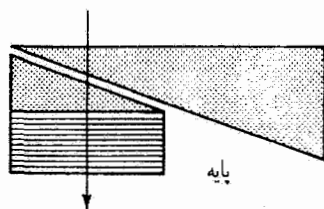
بلورهای کلسیتی که در طبیعت به وجود می‌آیند چون به صورت ساختارهای شبکه‌ی مثلثی بلوری می‌شوند رَخِذیر به لوزی‌وجهی هستند. این لوزی‌وجهی (شکل ۱۵-۹ب) دارای تنها دو گوشه است که در آنها هر سه زاویه‌ی وجهی منفرجه (102°) هستند. این گوشه‌ها به صورت گوشه‌های پهن بلور ظاهر می‌شوند. محور اپتیک کلسیت از یک گوشه‌ی پهن طوری عبور می‌کند که با سه وجه مجاور آن زاویه‌های مساوی می‌سازد.

بلور دوشکست را می‌توان برش و صیقلی داد تا عناصر قطبنده‌ای به دست آیند که در آنها محور اپتیک دارای هر راستای مطلوبی نسبت به نور فرودی است. موردهایی را که در شکل ۱۵-۱۰ نشان داده شده‌اند در نظر بگیرید. در (الف)، هردو راستای نمایشگر نور ناقطبیده فرودی از چپ بر محور اپتیک بلور عمود هستند. هردو مؤلفه با یک سرعت در بلور با ضریب شکست n_{\perp} منتشر می‌شوند. اما در (ب) و (ج)، محور اپتیک با یکی از مؤلفه‌ها موازی و بر دیگری عمود است. در این مورد، هر مؤلفه با ضریب شکست و سرعت متفاوتی در بلور منتشر می‌شود. در خروج، اختلاف فاز نسبی کل را می‌توان برحسب اختلاف راه نوری بین دو مؤلفه توصیف کرد. اگر ضخامت بلور d باشد، اختلاف راه نوری برابر است با

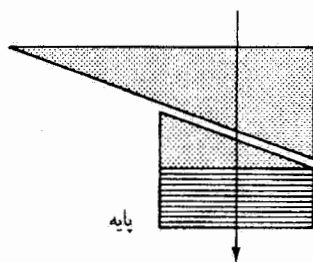
$$\Delta = |n_{\perp} - n_{\parallel}|d$$

و اختلاف فاز متناظر عبارت است از

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{\Delta}{\lambda_0} \right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right) |n_{\perp} - n_{\parallel}|d \quad (3-15)$$



(الف)



(ب)

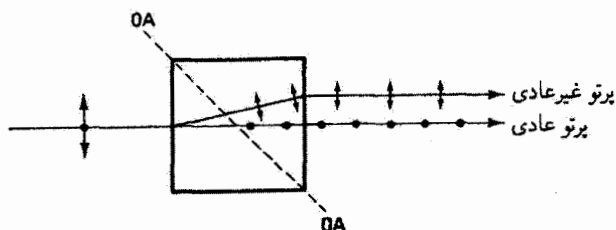
شکل ۱۱-۱۵ جبرانگر سولی-باینه. محورهای اپتیک بلور با نقاط و خطوط نمایش داده شده‌اند. پیکان جهت عبور نور در جبرانگر را نشان می‌دهد. (الف) تأخیر صفر. (ب) تأخیر ماکسیمم.

که در آن λ طول موج در خلأ است. اگر ضخامت تخته طوری باشد که $\Delta\varphi = \pi/2$ ، یک تخته ربع موج (QWP) داریم؛ اگر $\Delta\varphi = \pi$ ، تخته نیم موج (HWP) داریم، و غیره. اینها را تخته‌های مرتبه صفر (یا گاهی مرتبه اول) می‌نامند. چون این تخته‌ها فوق‌العاده نازک هستند، ساختن تخته ربع موج ضخیمتر با مرتبه بالاتر، با استفاده از $\Delta\varphi = 2\pi m + \pi/2$ که در آن $m = 1, 2, 3, \dots$ عملی تر است. همچنین می‌توان از اتصال دو تخته ترکیب ضخیمتری به دست آورد که در آن یک تخته تأخر تمام $\Delta\varphi$ ‌های تخته دیگر به‌جز یک $\Delta\varphi$ ی مورد نظر را جبران می‌کند. از این طریق می‌توانیم عناصر اپتیکی که همچون تأخیرگرهای فاز عمل می‌کنند تولید کنیم. عموماً از میکا و کوارتز، به‌صورت قرصهای تخت نازک، به‌عنوان تخته‌های تأخیری استفاده می‌شود که برای افزایش شدت بین دو تیغه شیشه‌ای قرار داده می‌شوند. چون تأخیر فاز کل $\Delta\varphi$ متناسب با ضخامت d است، هر اسبابی که بتوان ضخامت آن را به‌طور پیوسته تغییر داد یک تخته تأخیر تنظیم‌پذیر پیوسته به‌دست می‌دهد. این نوع اسباب را جبرانگر می‌نامند. شکل ۱۱-۱۵ اصول کار جبرانگر سولی-باینه را نشان می‌دهد. از کوارتز بلوری به‌عنوان یک پایه ثابت استفاده می‌شود که در واقع گوه‌ای است که با یک تخته کوارتز تماس اپتیکی دارد. در بالا گوه کوارتز دیگری است که می‌تواند در امتداد وجه شیبدار حرکت کند. به آرایش محورهای اپتیک در این مجموعه توجه کنید. در (الف)، موقعیت گوه بالایی طوری است که نور از ضخامتهای یکسان کوارتزها در حالی که محورهای اپتیک عمود برهم‌اند عبور می‌کند. بنابراین، هر تأخیری ناشی از یک ضخامت توسط دیگری جبران می‌شود و تأخیر کل صفر به‌دست می‌آید. با لغزاندن گوه بالایی به سمت چپ، ضخامت سمتگیری محور اپتیک اول نسبت به دومی افزایش می‌یابد و تأخیر متغیر پیوسته‌ای به‌دست می‌آید که به مقدار ماکسیمم خود، در موقعیت (ب)، می‌رسد که شاید دو طول موج، یا 2λ ، باشد. تنظیم با پیچ ریزسنج تغییرات کوچک در $\Delta\varphi$ را ممکن می‌سازد.

۱۵-۵ شکست دوگانه

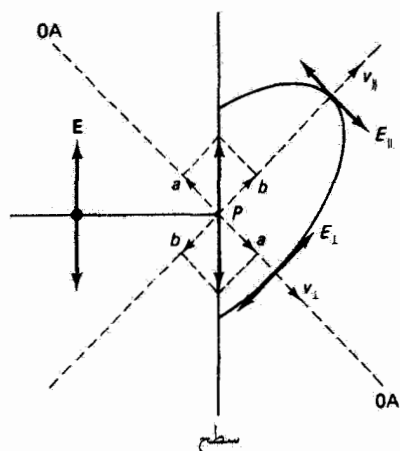
در مواردی که در شکل ۱۵-۱۰ ب و ج نشان داده شده‌اند، انتشار نور در بلور می‌تواند یک اختلاف فاز کل بین مؤلفه‌های E_y عمود بر و موازی با محور اپتیک بلور (OA) ایجاد کند ولی باریکه نور یک باریکه منفرد باقی می‌ماند. اما اگر OA در وضعیتی باشد که با راستای باریکه زاویه اختیاری بسازد (شکل ۱۵-۱۲) نور متحمل شکست دوگانه می‌شود،^۱ یعنی دو باریکه شکسته خارج می‌شوند که آنها را پرتوهای عادی و غیرعادی می‌نامند. پرتو غیرعادی را به این دلیل این‌طور می‌نامیم که در شکست در سطوح بلور از قانون عادی اسنل پیروی نمی‌کند. مثلاً اگر بلور کلسیت را روی لکه سیاهی در یک کاغذ سفید، یا روی روزنه روشنی، بگذاریم وقتی از سطح بالایی بلور نگاه می‌کنیم دو تصویر می‌بینیم. اگر بلور را حول راستای پرتو فرودی بچرخانیم، تصویر عادی در جای خود ثابت می‌ماند در حالی که تصویر غیرعادی حول آن می‌چرخد. علاوه بر این، دو باریکه به صورت قطبیده خطی در راستاهای متعامد، چنانکه نشان داده شده است، از بلور خارج می‌شوند. توجه کنید که پرتو عادی عمود بر محور اپتیک قطبیده است و از این رو با ضریب شکست عادی قطبیده است خارج می‌شود. پرتو غیرعادی در حالی که در راستای عمود بر قطبش پرتو عادی قطبیده است خارج می‌شود. در داخل بلور، پرتو غیرعادی را می‌توان برحسب مؤلفه‌های قطبیده در راستاهای عمود بر و موازی با محور اپتیک توصیف کرد. (این موضوع در زیر بررسی می‌شود.) مؤلفه عمودی با سرعت $v_{\perp} = c/n_{\perp}$ ، مانند پرتو عادی، منتشر می‌شود. اما مؤلفه دیگر با ضریب شکست $n_{\parallel} = n_o = c/v_{\parallel}$ منتشر می‌شود. اثر برابند کنش هر دو مؤلفه عبارت است از ایجاد خمیدگی غیرعادی پرتو غیرعادی که در شکل ۱۵-۱۲ نشان داده شده است.

این وضعیت را می‌توان با استفاده از شکل ۱۵-۱۳ الف تا اندازه‌ای روشنتر کرد. در این شکل

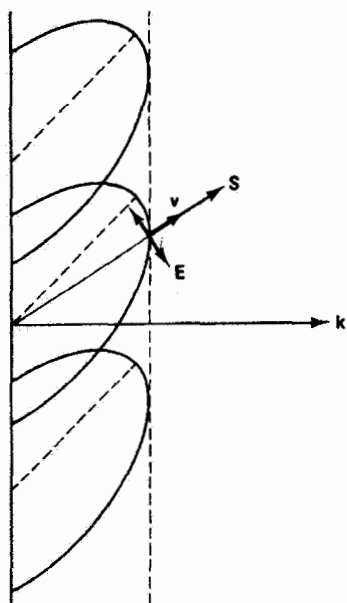


شکل ۱۵-۱۲ شکست دوگانه.

۱. شکست دوگانه اصطلاحی است که برای توصیف صورتی از دوشکستی در مواد به‌کار برده می‌شود، اگر چه از لحاظ لغوی دارای همان معنی است. دوشکستی معرف وجود دو ضریب شکست است، در حالی که شکست دوگانه به تقسیم پرتو نور به قسمتهای عادی و غیرعادی مربوط می‌شود.



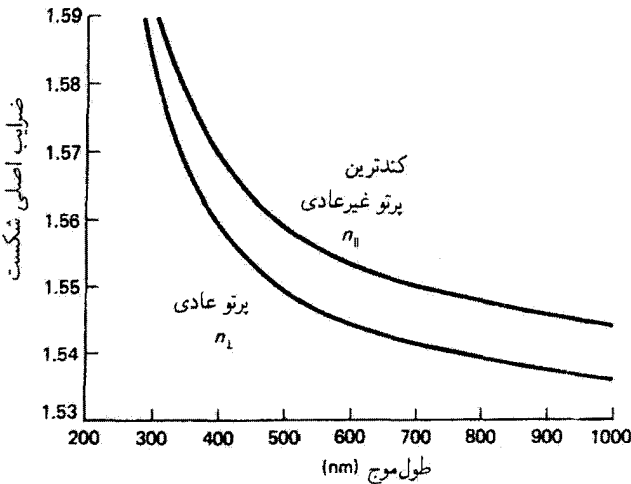
(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۱۳ (الف) ایجاد موجک هویگنس بیضوی با پرتو غیرعادی. ماده در این مورد منفی تک‌محوری، مانند کلسیت، است. (ب) ناهمخطی راستای پرتو S و بردار انتشار k برای پرتو غیرعادی در مادهٔ دوشکست.

یک موجک هویگنس نشان داده شده است که از برخورد پرتو غیرعادی با سطح بلور در P به وجود آمده است. ارتعاش E فرودی چنانکه دیده می‌شود به مؤلفه‌های (aa) موازی با OA و (bb) عمود بر OA تجزیه شده است. مؤلفه موازی در راستای $v_{||}$ که باید عمود بر aa باشد منتشر می‌شود، و مؤلفه عمودی در راستای v_{\perp} که باید عمود بر bb باشد منتشر می‌شود. چون هر مؤلفه با سرعتی که از ضریب شکست مربوط به آن، $n_{||}$ یا n_{\perp} تعیین می‌شود حرکت می‌کند، این سرعتها نامساوی‌اند. به عنوان مثال، برای کلسیت داریم $n_{\perp} > n_{||}$ و در نتیجه $v_{\perp} < v_{||}$. همچنانکه نشان داده شده است بیضوی است به طوری که محور بزرگ آن متناسب با $v_{||}$ و محور کوچک آن متناسب با v_{\perp} است. شکل ۱۵-۱۳ ب چند موجک بیضوی هویگنس و جبههٔ موج مماس بر این موجکها را نشان می‌دهد. این جبههٔ موج تخت، که سطح جدید فاز ثابت را تشکیل می‌دهد، عمود بر بردار انتشار k برای این موج است. E ی جبههٔ موج بیضوی بین $E_{||}$ و E_{\perp} قرار دارد. توجه کنید که در این مورد مربوط به پرتو غیرعادی در محیط ناهمسانگرد، E عمود بر k نیست. چون انرژی در جهت بردار پوینتینگ $S = \epsilon_0 c^2 E \times B$ منتشر می‌شود، و چون

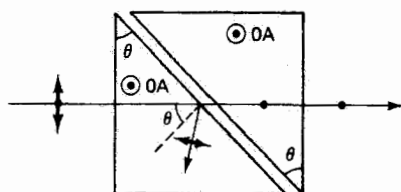


شکل ۱۴-۱۵ ضرایب شکست کوارتز بلوری برحسب طول موج در 18°C . در یک طول موج معین، ضریب شکست برای پرتو غیرعادی ممکن است هر جا بین دو منحنی قرار گیرد، در حالی که ضریب شکست برای پرتو عادی ثابت است.

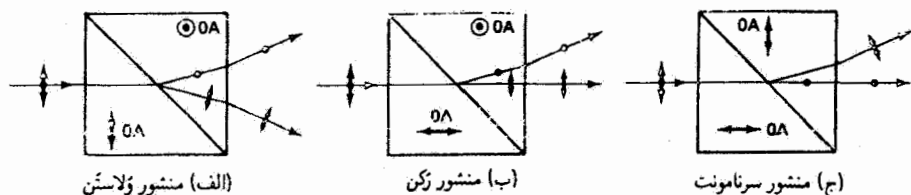
راستای پرتو با جهت شارش انرژی یکسان است، پرتو غیرعادی با سرعت v که بین v_{\perp} و v_{\parallel} قرار دارد شکست غیرعادی شکل ۱۲-۱۵ را از خود نشان می‌دهد. پرتو غیرعادی بر جبهه موج عمود نیست، بلکه راستای پرتو از مبدأ موجک به نقطه تماس موجک بیضوی با جبهه موج است. از طرف دیگر، برای پرتو عادی، که از مؤلفه دیگر E عمود بر OA ناشی می‌شود، همه چیز عادی است: موجکهای هویگنس کره هستند، $k \perp E$ ، $k \parallel S$ ، و پرتو بر جبهه موج خود عمود است.

از شکل ۱۳-۱۵ الف و بحث بالا باید روشن شده باشد که مقدار میانه دقیق v مربوط به پرتو غیرعادی به سهمهای نسبی v_{\perp} و v_{\parallel} ، یعنی به سمتگیری نسبی باریکه فرودی و محور اپتیک بلور، بستگی دارد. بنابراین، هم سرعت و هم ضریب شکست پرتو غیرعادی توابع پیوسته‌ای از راستا هستند. از طرف دیگر، ضریب شکست پرتو عادی مقداری ثابت و مستقل از راستا دارد. شکل ۱۴-۱۵ نمودار ضریب شکست برحسب طول موج را برای کوارتز بلوری نشان می‌دهد. در هر طول موجی، ضریب شکست برای پرتو عادی ثابت است و با منحنی پایینی داده می‌شود، در حالی که ضریب شکست برای پرتو غیرعادی جایی بین منحنیهای پایینی و بالایی، بسته به راستای پرتو فرودی نسبت به محور بلور، قرار دارد.

اگر دو پرتو شکسته را، که قطبیده خطی و عمود بر یکدیگراند، بتوان از لحاظ فیزیکی تفکیک کرد آنگاه می‌توان از شکست دوگانه برای تولید باریکه نور قطبیده خطی استفاده کرد. ابزارهای



شکل ۱۵-۱۵ منشور گلن-هوا.



(الف) منشور ولاستن

(ب) منشور زکن

(ج) منشور سرنامونت

شکل ۱۵-۱۶ منشورهای قطبنده. (الف) منشور ولاستن. (ب) منشور زکن. (ج) منشور سرنامونت.

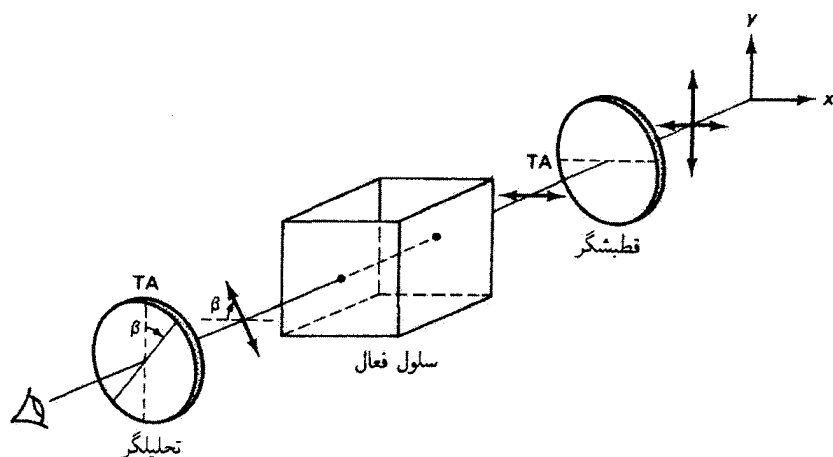
مختلفی برای انجام این کار وجود دارند، و یکی از متداولترین آنها منشور گلن-هوا است که در شکل ۱۵-۱۵ نشان داده شده است. دو منشور کلسیت با زاویه رأس θ از طرف وجه بزرگ آنها، مطابق شکل، کنار هم قرار داده شده‌اند به طوری که فاصله بین این دو وجه را لایه هوا پر کرده است. سمتگیری محورهای اپتیک منشورهای کلسیت که با هم موازی‌اند در شکل نشان داده شده است. در نقطه شکست خروجی در منشور اول، زاویه فرود برابر با زاویه رأس θ است. زاویه بحرانی برای شکست به درون هوا مطابق معمول با $\sin \theta_c = 1/n$ داده می‌شود و از این رو بستگی به سمتگیری ارتعاش E نسبت به OA دارد. برای $E \parallel OA$ داریم $n = 1.4864$ و $\theta_c = 42.3^\circ$ ، در حالی که برای $E \perp OA$ داریم $n = 1.6584$ و $\theta_c = 37.1^\circ$. بنابراین، با استفاده از منشورهایی با زاویه رأسی بین این دو مقدار، مؤلفه عمودی بازتاب داخلی کلی پیدا می‌کند در حالی که مؤلفه موازی عبور می‌کند. منشور دوم برای این به کار می‌رود که پرتو عبور کرده مجدداً در راستای باریکه اصلی قرار گیرد. تمام این اسباب یک قطبشگر خطی تشکیل می‌دهد. اگر فضای بین دو منشور از ماده شفاف دیگری مانند گلیسرین پر شود زاویه رأس را باید تغییر داد. چند طرح دیگر برای منشورهای قطبنده متشکل از ماده تک‌محور مثبت (کوآرتز) در شکل ۱۵-۱۶ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که در این موارد، پرتوهای عادی و غیرعادی بدون عامل بازتاب داخلی کلی تفکیک شده‌اند. در هر مورد، محورهای اپتیک دو منشور برهم عموداند، و در نتیجه مؤلفه E_{\perp} در منشور اول، به‌عنوان مثال، می‌تواند به مؤلفه

$E_{||}$ در منشور دوم، با تغییر متناظر در ضریب شکست، تبدیل شود. ضرایب نسبی مختلف برای دو مؤلفه به زاویه‌های مختلف شکست و تفکیک به دو باریکه قطبیده منجر می‌شوند. چنانکه دیده می‌شود، مواد دوشکست در تولید اسپاهیایی که مانند قطبشگرهای خطی عمل می‌کنند و همچنین در تولید تأخیرگرهای فاز مانند QWP که قبلاً در این فصل بررسی شد به‌کار می‌روند.

۱۵-۶ فعالیت نوری

بعضی از مواد دارای خاصیتی هستند که فعالیت نوری نامیده می‌شود. وقتی نور قطبیده خطی به یک ماده فعال نوری فرود می‌آید به‌صورت نور قطبیده خطی که راستای ارتعاش آن نسبت به راستای اصلی چرخیده است خارج می‌شود. از روبرو که نگاه کنیم، بعضی از این مواد چرخش ساعتگرد (راستگردان) برای میدان E ایجاد می‌کنند، در حالی که بعضی دیگر چرخش پادساعتگرد (چپگردان) به‌وجود می‌آورند. مواد فعال نوری هم به‌صورت جامد (مانند کوارتز و شکر) و هم به‌صورت مایع (مانند تربانتین و محلول شکر) دیده می‌شوند. بعضی از این مواد مانند کوارتز بلوری هر یک از دو چرخش را ایجاد می‌کنند که نشانه وجود دو نوع ساختار بلوری است که تصاویر آینه‌ای (پاد ریخته‌ای) یکدیگر هستند. مواد فعال نوری حالت قطبش باریکه نور قطبیده را تغییر می‌دهند و از لحاظ ریاضی می‌توان آنها را با ماتریس چرخشگر جونز که در جدول ۱۴-۲ داده شده است نمایش داد. توجه کنید که سازوکار چرخشگری که در چرخاندن راستای ارتعاش نور قطبیده خطی دخالت دارد با کنش تأخیرگرهای فاز، مانند تخته‌های نیم‌موج که در بخشهای ۱۴-۲ و ۱۵-۴ گفته شدند و همین نتیجه را می‌توانند ایجاد کنند، فرق دارد.

فعالیت نوری را با استفاده از دو قطبشگر خطی که ابتدا در وضعیت خاموشی قرار داده می‌شوند، یعنی با محورهای عبور متعامد، می‌توان به آسانی اندازه‌گیری کرد (شکل ۱۵-۱۷). وقتی قطعه‌ای با ضخامت معین از ماده فعال نوری را بین قطبشگر و تحلیلگر بگذاریم وضعیت خاموشی به هم می‌خورد زیرا بردار E ی نور توسط محیط فعال نوری چرخیده است. زاویه دقیق چرخش را می‌توان با چرخاندن تحلیلگر تا رسیدن به خاموشی مجدد، چنانکه نشان داده شده است، اندازه‌گیری کرد. مقدار چرخش اندازه‌گیری شده هم به طول موج نور و هم به ضخامت محیط بستگی دارد. چرخشی را که (برحسب درجه) یک تخته ۱ میلیمتری از ماده جامد فعال نوری به‌وجود می‌آورد چرخش ویژه آن می‌نامند. جدول ۱۵-۲ چرخش ویژه ρ مربوط به کوارتز را برای گستره‌ای از طول موجهای اپتیکی نشان می‌دهد. مقدار چرخش حاصل از مایعات فعال نوری در مقایسه بسیار کمتر است. برای مایعات، چرخش ویژه بنا به تعریف چرخش ناشی از ضخامت 10 cm محلول فعال به غلظت 1 g در 1 cm^3 است. بدین ترتیب، زاویه کل چرخش β مربوط به راه نوری L در



شکل ۱۵-۱۷ اندازه‌گیری فعالیت نوری. وقتی ماده فعال در جای خود است، فعالیت نوری با زاویه β لازم برای برقراری مجدد خاموشی اندازه گرفته می‌شود.

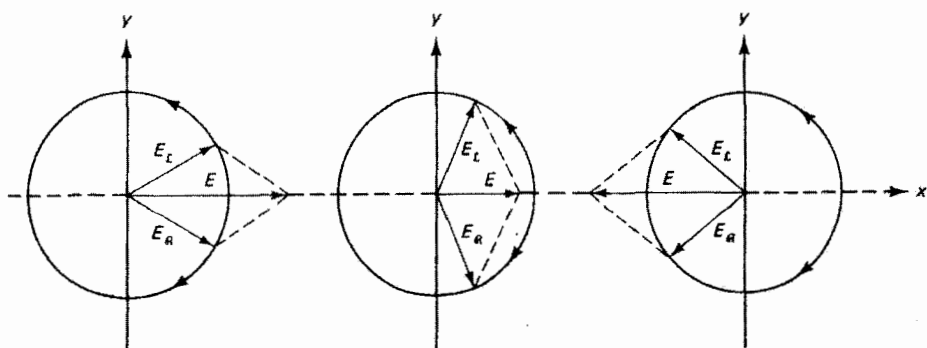
جدول ۱۵-۲ چرخش ویژه کوآرتز

ρ (درجه/mm)	λ (nm)
۲۰,۱۹	۲۲۶,۵۰۳
۴۸,۹۴۵	۴۰۴,۶۵۶
۴۱,۵۴۸	۴۳۵,۸۳۴
۲۵,۵۳۵	۵۴۶,۰۷۲
۲۱,۷۲۴	۵۸۹,۲۹۰
۱۶,۵۳۵	۶۷۰,۷۸۶

محلولی با d گرم ماده فعال در هر سانتیمتر مکعب عبارت است از

$$\beta = \rho Ld \quad (۴-۱۵)$$

که در آن L برحسب دسیمتر و d غلظت برحسب گرم بر سانتیمتر مکعب است. به‌عنوان مثال، ۱ dm از تربانتین نور سدیم را به اندازه -۳۷° می‌چرخاند. علامت منفی نشان می‌دهد تربانتین در فعالیت نوری خود چپگردان است. از اندازه‌گیری چرخش نوری محلولهای شکر غالباً برای



شکل ۱۵-۱۸ برهم‌نهی نور قطبیده دایره‌ای چپ و راست در لحظه‌های مختلف. فرض شده است که نور از صفحه شکل خارج می‌شود.

تعیین غلظت آنها از طریق معادله ۱۵-۴ استفاده می‌کنند.^۱ بستگی چرخش ویژه به طول موج به معنی این است که اگر از آرایه‌ای مانند آنچه در شکل ۱۵-۱۷ نشان داده شده است به نور سفید نگاه کنیم می‌بینیم که هر طول موج با زاویه متفاوتی چرخیده است. این تفکیک رنگها را پاشیدگی چرخشی می‌نامند.

بدون ارائه توضیح فیزیکی فعالیت نوری، می‌توانیم، به پیروی از فرنل، با یک توصیف پدیده‌شناختی مفید چرخش ویژه یک ماده فعال را به بعضی پارامترهای فیزیکی مربوط کنیم. این توصیف اولاً مبتنی بر این واقعیت است (فصل قبل) که می‌توان فرض کرد نور قطبیده خطی از مقادیر مساوی نور قطبیده دایره‌ای چپ و راست تشکیل شده است. ثانیاً، در این توصیف فرض می‌شود مؤلفه‌های قطبیده دایره‌ای چپ و راست در ماده فعال نوری به ترتیب با سرعت‌های متفاوت $v_{\mathcal{L}}$ و $v_{\mathcal{R}}$ حرکت می‌کنند. چون $v = c/n$ ، ضرایب شکست متفاوت $n_{\mathcal{L}}$ و $n_{\mathcal{R}}$ را می‌توان برای نور قطبیده دایره‌ای تعریف کرد.

ابتدا محیط غیرفعال را که برای آن $v_{\mathcal{L}} = v_{\mathcal{R}}$ ، یا معادل آن $n_{\mathcal{L}} = n_{\mathcal{R}}$ و $k_{\mathcal{L}} = k_{\mathcal{R}}$ در نظر می‌گیریم. در اینجا k بردار انتشار است که بزرگی آن به سرعت موج با $k = \omega/v$ مربوط می‌شود. اگر نور فرودی، مانند شکل ۱۵-۱۷، قطبیده خطی در راستای x باشد می‌توان آن را به نور قطبیده دایره‌ای چپ و راست تجزیه کرد. شکل ۱۵-۱۸ این مورد را با جمع برداری در سه زمان مختلف در یک نوسان نشان می‌دهد. در حالی که بردارهای $E_{\mathcal{L}}$ و $E_{\mathcal{R}}$ با آهنگهای مساوی به ترتیب چرخش ساعتگرد و پادساعتگرد انجام می‌دهند، براین \mathbf{E} در امتداد محور x نوسان می‌کند.

اکنون پیامدهای فرض $n_{\mathcal{L}} \neq n_{\mathcal{R}}$ را بررسی می‌کنیم. در این مورد، فازهای مؤلفه‌های \mathcal{L}

۱. در آزمایشگاه اپتیک معمولاً از شربت ذرت برای نمایش فعالیت نوری استفاده می‌شود.

و \mathcal{R} با هم برابر نیستند. به طور کلی، میدانهای الکتریکی آنها را می توان با روابط زیر بیان کرد

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}} = \tilde{\mathbf{E}}_{o_{\mathcal{L}}} e^{i(k_{\mathcal{L}} z - \omega t)} \quad (5-15)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} = \tilde{\mathbf{E}}_{o_{\mathcal{R}}} e^{i(k_{\mathcal{R}} z - \omega t)} \quad (6-15)$$

که در آنها $k_{\mathcal{L}} = (\omega/c)n_{\mathcal{L}}$ و $k_{\mathcal{R}} = (\omega/c)n_{\mathcal{R}}$. دامنه های مختلط با صورتهای برداری زیر داده می شوند

$$\tilde{\mathbf{E}}_{o_{\mathcal{L}}} = \left(\frac{E_o}{\gamma}\right) (1, i) \quad \text{و} \quad \tilde{\mathbf{E}}_{o_{\mathcal{R}}} = \left(\frac{E_o}{\gamma}\right) (1, -i) \quad (7-15)$$

که متناظر با بردارهای جونز برای مدهای قطبیده دایره ای چپ و راست هستند، و فازهای دو مؤلفه عبارتند از

$$\theta_{\mathcal{L}} = k_{\mathcal{L}} z - \omega t \quad (8-15)$$

$$\theta_{\mathcal{R}} = k_{\mathcal{R}} z - \omega t$$

فرض کنید این محیط فعال محیطی است که برای آن $k_{\mathcal{L}} > k_{\mathcal{R}}$ ، که معادل است با $n_{\mathcal{L}} > n_{\mathcal{R}}$ و $v_{\mathcal{L}} < v_{\mathcal{R}}$. بنابراین، در یک فاصله z در این محیط به ازای تمام t ها داریم $\theta_{\mathcal{L}} > \theta_{\mathcal{R}}$. نمودار این وضعیت در یک لحظه اختیاری در شکل ۱۵-۱۹ الف نشان داده شده است. مجموع برداری $\mathbf{E}_{\mathcal{L}}$ و $\mathbf{E}_{\mathcal{R}}$ باز هم نور قطبیده خطی اما با زاویه شیب $+\beta$ نسبت به محور x است. بنابراین، محیطی که برای آن $n_{\mathcal{L}} > n_{\mathcal{R}}$ چپگردان است. مورد مخالف، که برای آن β یک زاویه منفی است و فعالیت نوری راستگردان است، در شکل ۱۵-۱۹ ب نشان داده شده است. مقدار β را می توان با توجه به اینکه برآیند \mathbf{E} ، که با محور x زاویه β می سازد، همیشه قطر یک لوزی است تعیین کرد، به طوری که

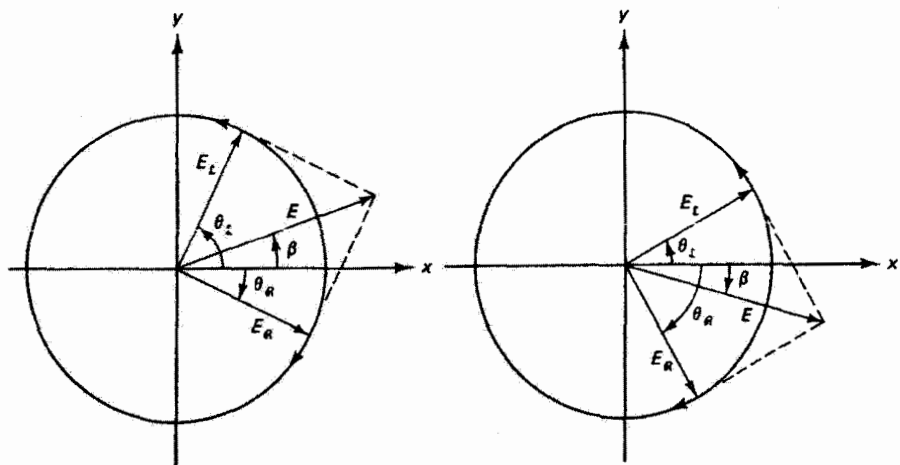
$$\theta_{\mathcal{L}} - \beta = \theta_{\mathcal{R}} + \beta$$

یا

$$\beta = \frac{1}{\gamma}(\theta_{\mathcal{L}} - \theta_{\mathcal{R}}) \quad (9-15)$$

با استفاده از معادله ۸-۱۵، به دست می آوریم

$$\beta = \frac{1}{\gamma}(k_{\mathcal{L}} - k_{\mathcal{R}})z$$



(الف) چپ چرخان: $n_z > n_R$

(ب) راست چرخان: $n_R > n_z$

شکل ۱۵-۱۹ چرخش اپتیکی حاصل از نور قطبیده دایره‌ای چپ و راست دارای سرعت‌های مختلف در یک محیط فعال. (الف) چپگردان: $n_{\mathcal{L}} > n_{\mathcal{R}}$. (ب) راستگردان: $n_{\mathcal{R}} > n_{\mathcal{L}}$.

و سرانجام، با توجه به روابط $k_{\mathcal{L}} = k_0 n_{\mathcal{L}}$ ، $k_{\mathcal{R}} = k_0 n_{\mathcal{R}}$ و $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ که در آن λ_0 طول موج در خلأ است، داریم

$$\beta = \frac{\pi z}{\lambda_0} (n_{\mathcal{L}} - n_{\mathcal{R}}) \quad (10-15)$$

توجه کنید که نور قطبیده خطی به اندازه زاویه‌ای چرخیده است که متناسب با ضخامت z از محیط فعال است، و این نتیجه از لحاظ تجربی تأیید شده است. عمل مدهای \mathcal{L} و \mathcal{R} در تولید نور برآیند را می‌توان به طریق زیر در ذهن مجسم کرد. نور قطبیده خطی در فرود بلافاصله به مدهای دایره‌ای \mathcal{L} و \mathcal{R} تجزیه می‌شود که در $z = 0$ و $t = 0$ با $\theta_{\mathcal{L}} = \theta_{\mathcal{R}} = 0$ هم شروع می‌شوند. اگر $v_{\mathcal{R}} > v_{\mathcal{L}}$ ، مد \mathcal{R} به نقطه‌ای در مسیر خود قبل از مد \mathcal{L} می‌رسد. تا وقتی مد \mathcal{L} وارد شود، \mathbf{E} در این نقطه مطابق با قطبش دایره‌ای مد \mathcal{R} که به تنهایی عمل می‌کند می‌چرخد. اما همینکه مد \mathcal{L} وارد شد، دو مد برهم‌نهی می‌کنند و راستای ارتعاش تحت زاویه β در یک مد خطی تثبیت می‌شود. فاز نسبی بین دو مد در این لحظه زاویه β را، همچنانکه با معادله ۱۵-۹ بیان شده است، تعیین می‌کند. چون بسامدهای دو مد با هم برابر هستند، زاویه β از این پس ثابت می‌ماند.

باید تأکید کنیم که ضرایب شکستی که در فعالیت نوری دخالت دارند به جای دوشکستی معمولی دوشکستی دایره‌ای را مشخص می‌کنند. ضرایب $n_{\mathcal{L}}$ و $n_{\mathcal{R}}$ ، چنانکه در مورد کوآرتز می‌توان دید (جدول ۱۵-۳)، بسیار به هم نزدیک‌تراند تا n_{\parallel} و n_{\perp} .

جدول ۳-۱۵ ضرایب شکست برای کوارتز

n_o	n_e	n_{\perp}	n_{\parallel}	$\lambda(\text{nm})$
۱٫۵۵۸۲۱	۱٫۵۵۸۱۰	۱٫۵۵۸۱۵	۱٫۵۶۷۷۱	۳۹۶٫۸
۱٫۵۳۹۲۰	۱٫۵۳۹۱۴	۱٫۵۳۹۱۷	۱٫۵۴۸۱۱	۷۶۲٫۰

مثال

چرخش ویژه حاصل از یک تخته کوارتز به ضخامت ۱ mm را در طول موج ۳۹۶٫۸ nm به دست آورید.

حل: از جدول ۳-۱۵، در $\lambda = ۳۹۶٫۸ \text{ nm}$ ، داریم

$$n_o - n_e = ۰٫۰۰۰۱۱$$

با استفاده از معادله ۱۵-۱۰ به دست می‌آوریم

$$\beta = \frac{\pi(10^{-2})}{396.8 \times 10^{-9}} (0.00011) = 0.8709 \text{ rad} = 49.9^\circ$$

▲ که توافق خوبی با جدول ۲-۱۵ برای طول موج نزدیک ۴۰۴٫۶ nm دارد.

توصیف بالا توضیح نمی‌دهد چرا سرعت‌های مدهای قطبیده دایره‌ای \mathcal{L} و \mathcal{R} باید متفاوت باشند. با هدفی که در این بحث داریم، به تذکر این مطلب بسنده می‌کنیم که مواد فعال نوری مولکولها یا ساختارهای بلوری مارپیچی به صورت چپگرد و راستگرد دارند. نور قطبیده خطی که از مجموعه‌ای از این مولکولها عبور می‌کند باعث ارتعاشهای واداشته الکترونها می‌شود که، در پاسخ، نه تنها در امتداد مارپیچ بلکه الزاماً حول آن حرکت می‌کنند. بدین ترتیب، باید انتظار داشت که اثر نور قطبیده دایره‌ای \mathcal{L} روی یک مارپیچ چپگرد با اثر آن روی مارپیچ راستگرد متفاوت باشد و به سرعت‌های مختلفی در محیط منجر شود. حتی اگر مولکولهای مارپیچی منفرد با سمتگیرهای کاتوره‌ای، همچون در مایعات، سر راه نور واقع شوند، یک اثر جمعی خواهیم داشت که اگر تمام یا بیشتر مولکولها چپگرد (یا راستگرد) باشند حذف نمی‌شود.

۷-۱۵ نورکشسانی

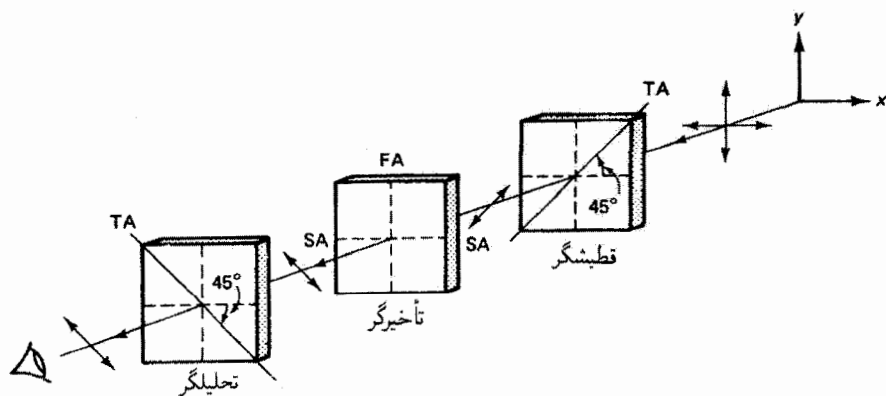
آزمایش زیر را در نظر بگیرید. دو صافی قطبیده را که همچون قطبشگر و تحلیلگر عمل می‌کنند با یک چشمه نور سفید که در پشت این دو می‌گذاریم ردیف می‌کنیم. اگر محورهای عبور دو صافی بر هم عمود باشند هیچ نوری از این جفت عبور نمی‌کند. اگر یک ماده دوشکست را بین دو صافی بگذاریم به‌طور کلی نور با رنگهای زیبا از دستگاه عبور می‌کند. برای درک بهتر این اثر شکل ۱۵-۲۰ را در نظر می‌گیریم که در آن محورهای عبور قطبشگر و تحلیلگر به ترتیب زاویه‌های 45° و -45° با محور x می‌سازند. فرض کنید ماده دوشکست بر سر راه باریکه نور یک تخته نیم‌موج است که محور تند آن (FA) در راستای قائم قرار دارد. کنش این تخته روی نور قطبیده خطی فرودی عبارت است از تبدیل آن به نور قطبیده خطی که بر راستای اصلی عمود است، یا با محور x زاویه -45° می‌سازد. این نتیجه را می‌توان با تجزیه نور فرودی به مؤلفه‌های متعامد مساوی در امتداد FA و SA (محور کند) و با اختلاف فاز 180° توضیح داد. مانند همیشه، اثر تخته نیم‌موج روی نور قطبیده خطی چرخاندن آن به اندازه 2α است، که در این مورد $2\alpha = 90^\circ$. همین نتیجه را با استفاده از حساب جونز به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

تخته نیم‌موج
محور تند قائم

قطبیده خطی
در 45°

قطبیده خطی
در -45°



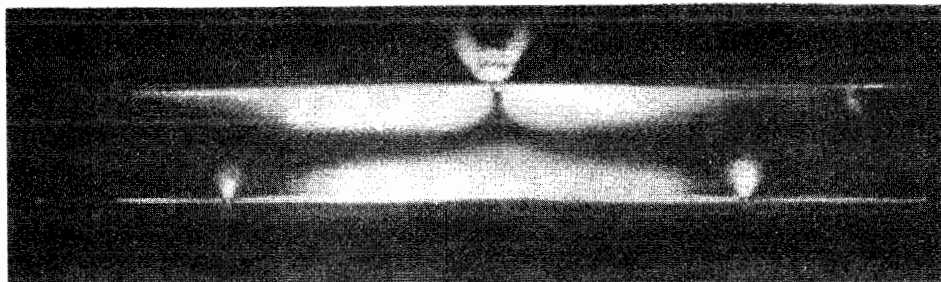
شکل ۱۵-۲۰ نور عبوری از قطبشگرهای متعامد در حالی که ماده دوشکست که به صورت تخته نیم‌موج عمل می‌کند بین آنها قرار دارد.

نور ناشی از تخته نیم موج اکنون در راستایی قطبیده است که به طور کامل از تحلیلگر عبور می‌کند. اگر تخته تأخیر اختلاف فازی غیر از 180° ایجاد کند، نور قطبیده بیضوی به دست می‌آید، و قسمتی از آن باز هم از تحلیلگر عبور می‌کند. تنها اگر اختلاف فاز برابر با 360° یا مضربی از آن باشد، یعنی اگر تخته تأخیر همچون تخته تمام موج عمل کند، این تخته تغییری در سرشت نور فرودی نمی‌دهد و وضعیت خاموشی ادامه می‌یابد.

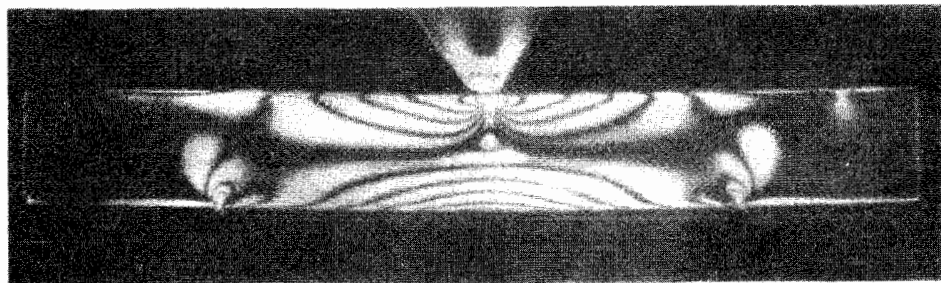
اما یادآوری می‌کنیم که اختلاف فاز $\Delta\varphi$ که تخته تأخیر ایجاد می‌کند به طول موج بستگی دارد، به طوری که

$$\lambda_0 \Delta\varphi = 2\pi d(n_{\perp} - n_{\parallel}) \quad (11-15)$$

که در آن d ضخامت تخته است. برای یک تخته معین، اگر در معادله ۱۵-۱۱ از تغییر کوچک $(n_{\perp} - n_{\parallel})$ صرف نظر کنیم طرف راست این معادله در تمام ناحیه اپتیکی طیف ثابت است. نتیجه می‌گیریم که تأخیر با تقریب بسیار خوبی با طول موج نسبت عکس دارد. بدین ترتیب، اگر تخته تأخیر در آرایه شکل ۵-۲۰ همچون تخته نیم موج برای نور سرخ عمل کند، نور سرخ به طور کامل عبور می‌کند، در حالی که طول موجهای مرئی کوچکتر تنها به طور جزئی عبور می‌کنند، و در نتیجه نور عبور کرده رنگی متمایل به سرخ دارد. اکنون اگر محور عبور تحلیلگر را به اندازه 90° بچرخانیم، تمام مؤلفه‌هایی که ابتدا حذف شده بودند عبور می‌کنند. چون مجموع نور عبور کرده در دو وضعیت باید نور فرودی یعنی نور سفید باشد، نتیجه می‌گیریم که رنگهای مشاهده شده در دو وضعیت مکمل یکدیگر هستند. از قطعات کوارتز یا کلسیت و ورقه‌های نازک میکا می‌توان برای نمایش تولید رنگ از طریق قطبش استفاده کرد. بسیاری از مواد معمولی نیز، تحت شرایط عادی یا تحت فشار، همچون در شکل ۱۵-۲۱، از خود دوشکستی نشان می‌دهند. یک قطعه سلوفان مجاله که بین دو قطبشگر متعام گذاشته شده است رنگهای متنوع جالبی به وجود می‌آورد که تقویت شده‌اند زیرا نور باید در بعضی نقاط از دو یا چند ضخامت عبور کند، و در نتیجه $\Delta\varphi$ از یک نقطه به نقطه دیگر به علت تغییر در ضخامت d تغییر می‌کند. همین اثر را با پیچاندن نوار سلوفان شفاف حول تیغه میکروسکوپ طوری که قسمتهایی از آن روی هم بیفتند می‌توان مشاهده کرد. به عنوان آخرین مطلب، $\Delta\varphi$ می‌تواند از یک نقطه به نقطه دیگر به علت تغییرات موضعی در کمیت $n_{\perp} - n_{\parallel}$ نیز تغییر کند. اشیاء پلاستیکی، مانند گونیا یا عینک ایمنی، غالباً چنین تغییراتی را، که از ناحیه‌های دوشکست موضعی مربوط به فشار ناشی می‌شوند، از خود نشان می‌دهند. یک عینک ایمنی پلاستیکی بین دو قطبشگر متعام در ناحیه‌هایی که تحت فشار بیشتری است تغییرات رنگ با چگالی بیشتری ایجاد می‌کند، زیرا تفاضل ضرایب شکست در این ناحیه‌ها سریعتر تغییر می‌کند. دوشکستی حاصل از تنش مکانیکی اعمال شده بر موادی که در حالت عادی همسانگرد هستند، مانند پلاستیک یا



(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۲۱ نقشه‌های تنش نورکشسان برای تیر سوار بر دو پایه و (الف) با بار کم در مرکز، (ب) با بار زیاد در مرکز.

شیشه، اساس روشی برای تحلیل تنش است که نورکشسانی نامیده می‌شود. معلوم شده است که در این‌گونه مواد یک محور اپتیک در راستای تنش، هم در انبساط و هم در تراکم، القا می‌شود. چون درجهٔ دوشکستی القا شده متناسب با فشار است، نمونه‌هایی از قسمتهای مکانیکی را می‌توان از پلاستیک ساخت و برای تحلیل تحت تنش قرار داد. نقاط فشار ماکسیمم توسط نور عبور کرده از قطبشگرهای متعامدی که بین آنها نمونهٔ تنش‌یافته قرار دارد قابل رؤیت می‌شوند. این نوع نقش نور قطبیده برای یک تیر تحت تنشهای کم و زیاد در شکل ۱۵-۲۱ نشان داده شده است.

مسائل

۱۵-۱ نوری که ابتدا ناقطبیده است از سه قطبشگر خطی متوالی که محورهای عبور آنها با افق به ترتیب زاویه‌های 0° ، 30° و 60° می‌سازند می‌گذرد. تابیدگی نور حاصل را به صورت درصد تابیدگی نور ناقطبیده به دست آورید.

۱۵-۲ نوری که از سطح جدایی هوا-الماس بازتاب داخلی و خارجی یافته است در چه زاویه‌هایی کاملاً قطبیدهٔ خطی است؟ برای الماس داریم $n = ۲.۴۲$.

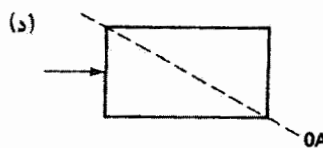
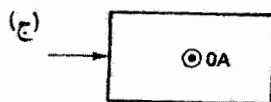
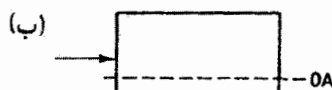
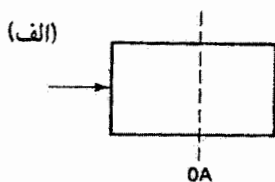
۳-۱۵ چون ورقه پلاروید یک قطبشگر ایده آل نیست، تمام انرژی ارتعاشهای E موازی با TA عبور نمی کند و تمام ارتعاشهای E عمود بر TA جذب نمی شود. فرض کنید کسر انرژی α در مورد اول و کسر β در مورد دوم عبور می کند.

(الف) با محاسبه تابیدگی عبور کرده از یک جفت از این قطبشگرها که محورهای عبور آنها با هم زاویه θ می سازند، قانون مالوس را تعمیم دهید. تابیدگی نور ناقطبیده اولیه را I_0 بگیرید. نشان دهید در وضعیت ایده آل قانون مالوس به دست می آید.

(ب) فرض کنید برای یک ورقه پلاروید معین $\alpha = 0.95$ و $\beta = 0.05$. اگر نور ناقطبیده از دو ورقه از این نوع عبور کند، تابیدگی را با تابیدگی مربوط به قطبشگر ایده آل در مواردی به دست آورید که محورهای عبور با هم زاویه های 0° ، 30° ، 45° و 90° می سازند.

۴-۱۵ یک تخته نیم موج از میکا چه ضخامتی باید داشته باشد تا بتوان آن را برای نور لیزری با 632.8 nm به کار برد؟ ضرایب شکست مربوط برای میکا 1.599 و 1.594 هستند.

۵-۱۵ توضیح دهید برای نور ناقطبیده فرودی به یک ماده دوشکست که سمتگیریهایی محور اپتیک آن (OA) در شکلهای زیر نشان داده شده اند چه روی می دهد؟ در توضیح خود ملاحظات زیر را منظور کنید: آیا پرتوها شکست دوگانه یا یگانه پیدا می کنند؟ تأخیر فاز وجود دارد؟ پرتوهای شکسته چه قطبشی دارند؟



(ه) برای ساختن تخته ربع موج باید از کدام سمتگیری (ها) استفاده کنیم؟

۶-۱۵ جبرانگر سولی-باینه را که در شکل ۱۱-۱۵ نشان داده شده است در نظر بگیرید. فرض کنید این جبرانگر از کوارتز ساخته شده است و تأخیر فاز ماکسیممی معادل دو طول موج کامل نور سبز جیوه (546.1 nm) ایجاد می کند. ضرایب شکست کوارتز در این طول موج عبارتند از $n(\text{موازی}) = 1.555$ و $n(\text{عمودی}) = 1.546$.

(الف) ضخامت کل گوه در مقایسه با ضخامت تخته در موقعیت تأخیر ماکسیمم چه اندازه است؟

(ب) اگر نور خروجی قطبیده دایره‌ای باشد این دو ضخامت را با هم مقایسه کنید.

۱۵-۷ تعدادی قطبشگر دوفام در اختیار داریم که می‌توان آنها را کامل فرض کرد، یعنی هر یک از آنها ۵۰٪ از نور ناقطبیده فرودی را عبور می‌دهد. تابیدگی نور فرودی به اولین قطبشگر را I_0 می‌گیریم. (الف) نموداری ترسیم کنید و نشان دهید اگر محورهای عبور یک جفت از این قطبشگرها با هم زاویه θ بسازند، نور عبور کرده از این جفت با رابطه زیر داده می‌شود

$$I = \left(\frac{I_0}{2} \right) \cos^2 \theta$$

(ب) اگر محورهای عبور این جفت به ترتیب روی 0° و 90° گذاشته شوند، چند درصد از انرژی نور فرودی عبور می‌کند؟

(ج) پنج قطبشگر دیگر از این نوع را بین دو قطبشگری که در بالا توصیف شدند می‌گذاریم طوری که محورهای عبور آنها به ترتیب در 15° ، 30° ، 45° ، 60° و 75° قرار دارند و قطبشگر ۱۵ درجه‌ای در مجاورت قطبشگر 0° درجه‌ای است. اکنون چند درصد از انرژی نور فرودی عبور می‌کند؟

۱۵-۸ اگر بخواهیم یک قطعه کوارتز به صورت تخته ربع‌موج برای طول موج 5893 \AA در خلأ عمل کند چه ضخامت مینیمم باید داشته باشد؟

۱۵-۹ زاویه انحراف بین دو باریکه خروجی منشور ولاستن را که از کلسیت ساخته شده است و زاویه گوه 45° دارد تعیین کنید. نور سدیم را در نظر بگیرید.

۱۵-۱۰ باریکه نور قطبیده خطی با عبور از ورقه بلوری با ضخامت 3 cm و 0° به نور قطبیده دایره‌ای تبدیل می‌شود. اگر در این اثر ضخامت ورقه برای طول موج 600 nm مینیمم باشد، اختلاف ضرایب شکست دو پرتو در بلور را به دست آورید. آرایه را ترسیم کنید و در آن محور اپتیک بلور را نشان دهید و علت را توضیح دهید.

۱۵-۱۱ باریکه نوری به سطح آب در زاویه‌ای فرود می‌آید که نور بازتابیده کاملاً قطبیده خطی است. (الف) این زاویه فرود را به دست آورید.

(ب) نور شکسته در آب به سطح بالایی یک قطعه تخت شیشه با ضریب شکست 1.5 می‌خورد. نور بازتابیده از شیشه کاملاً قطبیده خطی است. زاویه بین سطوح آب و شیشه را تعیین کنید. آرایه را ترسیم کنید و قطبش نور را در هر مرحله نشان دهید.

۱۵-۱۲ در هر یک از موارد زیر، سرشت نور را که با تحلیل داده شده سازگار است تعیین کنید. کارایی قطبشگر را 100% بگیریید.

(الف) وقتی قطبشگری در مسیر نور چرخانده می‌شود تغییر شدت وجود ندارد. با یک تخته ربع‌موج در جلو (قبل از) قطبشگر چرخنده، تغییری در شدت دیده می‌شود اما قطبشگر در هیچ موقعیت زاویه‌ای شدت صفر نمی‌دهد.

(ب) وقتی قطبشگری در مسیر نور چرخانده می‌شود شدت تغییر می‌کند اما قطبشگر در هیچ موقعیتی شدت صفر نمی‌دهد. قطبشگر برای شدت ماکسیمم تنظیم شده است. یک تخته ربع‌موج قبل از قطبشگر سر راه نور قرار داده می‌شود طوری که محور اپتیک آن موازی با محور عبور قطبشگر است. اکنون با چرخاندن قطبشگر می‌توان شدت صفر به دست آورد.

۱۵-۱۳ نور ناشی از چشمه‌ای که در روغنی با ضریب شکست 1.62 فرو برده شده است به وجه تخت الماسی ($n = 2.42$) که در همان روغن قرار دارد فرود می‌آید.

(الف) زاویه فرودی که در آن قطبش ماکسیمم روی می‌دهد و

(ب) زاویه شکست به درون الماس را تعیین کنید.

۱۵-۱۴ معلوم شده است که چرخش نور قطبیده در یک محیط فعال نوری تقریباً متناسب با عکس مجذور طول‌موج است.

(الف) چرخش ویژه گلوکز 20.5° است. اگر محلولی از گلوکز در لوله‌ای به طول 12 cm نور قطبیده خطی را 1.23° بچرخاند غلظت آن را به دست آورید.

(ب) نور سرخ با عبور از تخته کوارتزی به ضخامت 1 mm حدود 15° می‌چرخد. چرخش مربوط به نور بنفش را تعیین کنید.

۱۵-۱۵ (الف) چه ضخامتی از کوارتز لازم است تا چرخش اپتیکی 10° برای نور 396.8 nm به وجود آورد؟

(ب) چرخش ویژه کوارتز را برای این طول‌موج به دست آورید. ضرایب شکست کوارتز در این طول‌موج، برای نور قطبیده دایره‌ای چپ و راست، به ترتیب عبارت‌اند از $n_L = 1.55821$ و $n_R = 1.55810$.

۱۵-۱۶ (الف) تخته نازکی از کلسیت طوری برش داده شده است که محور اپتیک آن موازی با صفحه تخته است. ضخامت مینیمم این تخته را برای ایجاد اختلاف راه ربع‌موج نور سدیم 589 nm تعیین کنید.

(ب) اگر یک تخته زرگون به ضخامت 182 mm 0° با سمتگیری 45° بین دو قطبشگر متعام گذاشته شود چه رنگی عبور می‌کند؟

۱۷-۱۵ (الف) نشان دهید زاویه‌های قطبیده برای بازتاب داخلی و خارجی مربوط به یک محیط مکمل هم هستند.

(ب) نشان دهید اگر باریکه نور TM تحت زاویه بروستر وارد یک تخته موازی (دریچه بروستر) شود با همین زاویه از طرف دیگر خارج می‌شود.

۱۸-۱۵ ضرایب شکست برای محورهای تند و کند کوآرتز با نور 546 nm به ترتیب 1.5462 و 1.5553 هستند.

(الف) به ازای هر طول موج حرکت در کوآرتز، پرتو غیرعادی (e) نسبت به پرتو عادی (o) چه کسری از طول موج تأخیر پیدا می‌کند؟

(ب) ضخامت تخته ربع موج مرتبه صفر را به دست آورید.

(ج) اگر یک تخته کوآرتز چندمرته‌ای به ضخامت 0.735 mm همچون تخته ربع موج عمل کند مرتبه آن را محاسبه کنید.

(د) دو تخته کوآرتز طوری با هم تماس اپتیکی دارند که تأخیرهای مخالف به وجود می‌آورند. سمتگیری محورهای اپتیک دو تخته را ترسیم کنید. تفاضل ضخامت دو تخته چه اندازه باید باشد تا دو تخته با هم مانند یک تخته ربع موج مرتبه صفر عمل کنند؟

۱۹-۱۵ وقتی یک گونیای پلاستیکی بین دو قطبشگر متعام گذاشته می‌شود یک رشته نوارهای عبور و خاموشی با نور تکفام 500 nm مشاهده می‌شود. اگر ضخامت گونیا $1/16 \text{ in}$ باشد، $(n_{\perp} - n_{\parallel})$ بین نوارهای عبور چه اندازه تغییر می‌کند تا وضعیتهای متوالی برای تأخیر تخته نیم موجی ایجاد شود؟

۲۰-۱۵ یک تخته بریل طوری برش داده شده است که محور اپتیک آن در صفحه تخته قرار دارد. نور قطبیده تختی که ارتفاعهای میدان TE آن با این محور اپتیک زاویه 45° می‌سازند به تخته فرود می‌آید. کمترین ضخامت تخته را برای اینکه نور خروجی

(الف) قطبیده تخت و

(ب) قطبیده دایره‌ای باشد تعیین کنید.

۲۱-۱۵ یک تخته نیم موج را در چه زاویه‌ای باید قرار دهیم تا چرخش حاصل از یک تخته کوآرتز چپگردان به ضخامت 1.15 mm برای نوری با طول موج 546 nm جبران شود؟

۲۲-۱۵ در فصل ۲۰ با استفاده از معادلات فرنل نشان می‌دهیم که تابیدگی درصد R بازتابیده از سطح تخت دی‌الکتریک برای مد قطبش TE با معادله $20-23$ داده می‌شود:

$$R = \left(\frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^2$$

که در آن θ زاویه فرود و n نسبت n_2/n_1 است.

(الف) بازتابندگی درصد را برای مد TE وقتی نور از هوا به شیشه با $n = 1.5$ تحت زاویه قطبیده فرود می‌آید محاسبه کنید.

(ب) بازتابندگی محاسبه شده در بالا برای بازتاب داخلی وقتی نور از شیشه به هوا وارد می‌شود نیز معتبر است. با این فرض، درصد کل مد TE عبور کرده از پشته‌ای از 10° تخته از این نوع را نسبت به تابیدگی فرودی I_0 به دست آورید. فرض کنید تخته‌ها نور جذب نمی‌کنند و بازتابهای چنگانه در تخته‌ها روی نمی‌دهند.

(ج) درجه قطبش P مربوط به باریکه عبور کرده را که با رابطه زیر داده می‌شود محاسبه کنید

$$P = \frac{I_{TM} - I_{TE}}{I_{TM} + I_{TE}}$$

که در آن I نمایشگر تابیدگی هر یک از مدهای قطبش است.

۱۵-۲۳ یک تخته نیم‌موج بین یک جفت قطبشگر و تحلیلگر متعام قرار داده شده است به طوری که زاویه بین محور عبور قطبشگر و محور تند تخته نیم‌موج برابر با θ است. تغییرات نور خروجی را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

۱۵-۲۴ (الف) چرخش حاصل از فعالیت نوری یک تخته کوآرتز ۳ میلیمتری را روی باریکه نور قطبیده خطی در طول موج ۷۶۲ nm تعیین کنید.

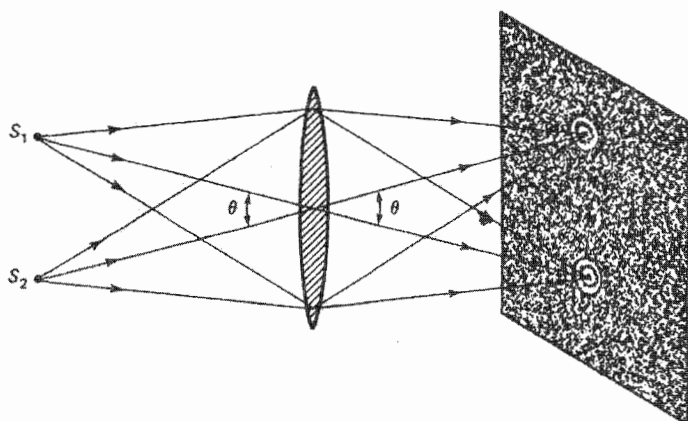
(ب) چرخش ناشی از فعالیت نوری یک تخته نیم‌موج کوآرتزی را برای همین باریکه نور به دست آورید.

مراجع

- [1] Shurcliff, W. A. *Polarized Light: Production and Use*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1962.
- [2] Shurcliff, W. A., and S. S. Ballard. *Polarized Light*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Company, 1964.
- [3] Bennett, Jean M., and Harold E. Bennett. "Polarization." In *Handbook of Optics*, edited by Walter G. Driscoll and William Vaughan. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978.
- [4] Meyer Arendt, Jurgen R. *Introduction to Classical and Modern Optics*, 3d ed. Engle-

wood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989. Ch. 4.2.

- [5] Kliger, David S. *Polarized Light in Optics and Spectroscopy*. Boston: Academic Press, 1990.
- [6] Azzam, R. M. A., and N. M. Bashara. *Ellipsometry and Polarized Light*. New York: North-Holland Publishing Company, 1977.
- [7] Waterman, Talbot H. "Polarized Light and Animal Navigation." *Scientific American* (July 1955): 88.
- [8] Wehner, Rudinger. "Polarized Light Navigation by Insects." *Scientific American* (July 1976): 106.
- [9] Feynman, Richard P., Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1963. Ch. 32, 33.
- [10] Weisskopf, Richard F. "How Light Interacts with Matter." In *Lasers and Light*. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1969.



۱۶

پراش فرانهورفر

مقدمه

از سرشت موجی نور برای توضیح چند پدیده، که در فصلهای قبل تحت عنوان "اثر تداخل" رده‌بندی شدند، استفاده می‌کنیم. در هر مورد، دو یا چند باریکه همدوس نور، که از یک چشمه ناشی شده‌اند و با تقسیم دامنه یا جبهه موج تفکیک شده‌اند، دوباره برای تداخل به هم می‌رسند. اساساً، همین اثر در پراش نور دخالت دارد. پراش در ساده‌ترین توصیف خود عبارت است از هر انحرافی از اپتیک هندسی که از مسدود کردن جبهه موج نور ناشی می‌شود. به‌عنوان مثال، یک پرده کدر با روزنهٔ مدور نمایشگر چنین مسدودیتی است. روی یک پردهٔ مشاهده در پشت روزنه، ممکن است دایرهٔ نور اثرات لبهٔ پیچیده‌ای از خود نشان دهد. این نوع مسدودیت نوعاً در بسیاری از ابزارهای اپتیکی وجود دارد که در آنها تنها از قسمتی از جبههٔ موج که از یک عدسی دایره‌ای می‌گذرد استفاده می‌شود. اما هر مسدودیتی ساختار مفصلی در سایهٔ خود به‌وجود می‌آورد که از دیدگاه اپتیک هندسی کاملاً غیرمنتظره است.

اثر پراش پیامدی از سرشت موجی نور است. مانع حتی اگر کدر نباشد اما تغییرات موضعی در دامنه یا فاز جبههٔ موج نور عبور کرده ایجاد کند این نوع اثر مشاهده می‌شود. به‌عنوان مثال،

حبابهای کوچک یا ناخالصی در یک عدسی شیشه‌ای نقشهای پراش ناخواسته‌ای برای نور لیزر عبوری به‌وجود می‌آورند. چون لبه‌های تصاویر اپتیکی به علت پراش پخشیده هستند، این پدیده به محدودیتی اساسی در تفکیک دستگاه منجر می‌شود. البته وضوح تصاویر اپتیکی اکثراً به علت ابیراهیهای اپتیکی ناشی از خود عناصر تصویرساز به‌طور جدیتری خراب می‌شود.

شکاف دوگانه که قبلاً مطالعه شد مسدودیتی برای جبهه موج ایجاد می‌کند که در آن همه جا به‌جز در دو گشودگی جلو نور گرفته می‌شود. یادآوری می‌کنیم که نقش فریز حاصل با در نظر گرفتن دو روزنه به‌صورت چشمه‌های نقطه‌ای، یا شکافهای درازی که پهنای آنها به‌صورت نقطه در نظر گرفته شد، محاسبه شد. در یک تحلیل کاملتر باید اندازه متناهی شکافها به حساب آورده شود. با انجام این کار، مسئله به‌عنوان یک مسئله پراش بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهند نقش تداخل که قبلاً به‌دست آمد به طریقی تغییر می‌کند که جزئیات واقعی فریزهای مشاهده شده را توضیح می‌دهد.

توافق مناسب با مشاهدات تجربی از راه کاربرد اصل هویگنس-فرنل امکانپذیر است. بنابه نظر هویگنس، هر نقطه از یک جبهه موج معین نور را می‌توان چشمه موجکهای کروی ثانویه گرفت. فرنل به این نظر این فرض را اضافه کرد که میدان واقعی در هر نقطه در ورای جبهه موج برهم‌نهی از تمام این موجکها است که در آن هم دامنه‌ها و هم فازهای آنها به حساب آورده می‌شوند. بدین ترتیب، در محاسبه نقش پراش شکاف دوگانه در یک نقطه از پرده، هر نقطه از جبهه موج خروجی از هر شکاف را به‌صورت چشمه موجکهایی در نظر می‌گیریم که برهم‌نهی آنها میدان حاصل را به‌وجود می‌آورد. بنابراین، در این روش، برخلاف محاسبه تداخل که در آن شکافها دو چشمه نقطه‌ای منزوی در نظر گرفته می‌شوند، آرایه پیوسته‌ای از چشمه‌ها در هر دو شکاف به حساب آورده می‌شود. غالباً پراش را از تداخل بر این اساس متمایز می‌کنند: در پدیده‌های پراش، باریکه‌های تداخل‌کننده از توزیع پیوسته‌ای از چشمه‌ها ناشی می‌شوند؛ در پدیده‌های تداخل، باریکه‌های تداخل‌کننده از تعدادی چشمه گسسته ناشی می‌شوند. البته این یک تمایز فیزیکی اساسی نیست.

رده‌بندی اثرهای پراش بر اساس تقریبهای ریاضی ممکن در محاسبه میدانهای حاصل صورت می‌گیرد. اگر هم چشمه نور و هم پرده مشاهده عملاً به اندازه کافی دور از گشودگی پراش باشند به‌طوری که بتوانیم جبهه‌های موج ورودی به گشودگی و پرده مشاهده را تخت در نظر بگیریم، پراش فرانهِوفِر یا پراش میدان دور داریم، که در این فصل بررسی می‌کنیم؛ وقتی این وضعیت برقرار نباشد و انحنا جبهه موج را به حساب آوریم، پراش فرنل یا میدان نزدیک داریم، که در فصل ۱۸ بررسی خواهیم کرد. در تقریب میدان دور، تنها وقتی پرده مشاهده را نسبت به گشودگی حرکت دهیم نقش پراش از لحاظ اندازه به‌طور یکنواخت تغییر می‌کند. در تقریب میدان نزدیک، وضعیت

پیچیده‌تر است: هم شکل و هم اندازه نقش پراش بستگی به فاصله بین گشودگی و پرده دارند. وقتی پرده را از گشودگی دور می‌کنیم، تصویر گشودگی به ترتیب صورتهایی پیدا می‌کند که از اپتیک هندسی، پراش میدان نزدیک، و پراش میدان دور پیش‌بینی می‌شوند.

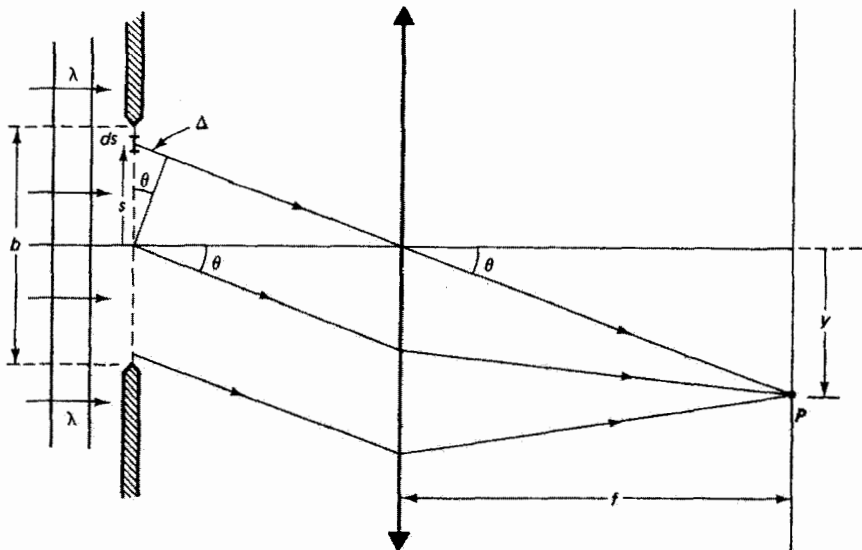
از همین آغاز باید گفته شود که اصل هویگنس-فرنل که آن را برای محاسبه نقشهای پراش به‌کار خواهیم برد خودش یک تقریب است. عبور نکردن نور از یک پرده کدر به این معنی است که برهم‌کنش تابش فرودی با نوسانگرهای الکترونی، که درون پرده به حرکت در آورده می‌شوند، طوری است که میدان کل صفر در ورای پرده تولید می‌شود. این توازن در لبه گشودگی در پرده، که در آن توزیع قطع می‌شود، برقرار نیست. اما این نوع اثرهای لبه تنها وقتی اهمیت دارند که نقطه مشاهده بسیار نزدیک به خود گشودگی باشد.

۱-۱۶ پراش از تک‌شکاف

ابتدا نقش پراش فرانوفر از یک تک‌شکاف را، که گشودگی مستطیلی با مشخصه طول بسیار بزرگتر از عرض است، محاسبه می‌کنیم. برای پراش فرانوفر، چشمه باید به اندازه کافی دور باشد تا جبهه‌های موجی که به شکاف می‌رسند اساساً تخت باشند. البته در عمل این وضعیت با گذاشتن چشمه در صفحه کانونی یک عدسی مثبت تحقق می‌یابد. به همین ترتیب، با استفاده از یک عدسی دیگر در طرف دیگر شکاف، چنانکه در شکل ۱-۱۶ نشان داده شده است، پرده مشاهده را عملاً در بینهایت می‌گیریم. بنابراین، نوری که به نقطه‌ای مانند P روی پرده می‌رسد ناشی از پرتوهای موازی نوری است که از قسمتهای مختلف جبهه موج در شکاف (خط‌چین) می‌آید. بنا به اصل هویگنس-فرنل، موجکهای کروی صادر از هر نقطه از جبهه موج را وقتی به صفحه شکاف می‌رسد در نظر می‌گیریم و از جمع کردن این امواج مطابق با اصل برهم‌نهی میدان حاصل را در P محاسبه می‌کنیم. چنانکه در شکل ۱-۱۶ دیده می‌شود، این امواج در یک فاز به P نمی‌رسند. به‌عنوان مثال، راه نوری پرتوی که از مرکز شکاف می‌آید به اندازه Δ کمتر از راه نوری پرتوی است که از نقطه‌ای به فاصله قائم s در بالای محور اپتیکی می‌آید.

قسمت تخت جبهه موج در دهانه شکاف نمایشگر آرایه پیوسته‌ای از چشمه‌های موجک هویگنس است. هر بازه با اندازه ds را یک چشمه می‌گیریم و برآیند تمام این نوع چشمه‌ها را با انتگرال گرفتن روی تمام پهنای شکاف b محاسبه می‌کنیم. هر بازه ds موجکهایی کروی در P به‌صورت زیر به‌وجود می‌آورد

$$dE_p = \left(\frac{dE_o}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)} \quad (1-16)$$



شکل ۱۶-۱ ترسیم برای تعیین تابیدگی روی پرده ناشی از پراش فرانهورفر از یک تک شکاف.

که در آن r راه نوری از بازه ds تا نقطه P است. دامنه dE_0 بر r تقسیم شده است زیرا موجهای کروی از لحاظ تابیدگی، مطابق با قانون عکس مجذور، با فاصله کاهش می یابند، یعنی $E \propto 1/r$ و $E^2 \propto 1/r^2$. بنابراین، دامنه در فاصله واحد از نقطه چشمه برابر با dE_0 است. اگر برای موج ناشی از بازه ds در $s = 0$ قرار دهیم $r = r_0$ ، آنگاه برای هر موج دیگری ناشی از بازه ds در ارتفاع s ، با احتساب اختلاف فاز، میدان جزئی در P عبارت است از

$$dE_p = \left(\frac{dE_0}{r} \right) e^{i[k(r_0 + \Delta) - \omega t]} \quad (2-16)$$

در دامنه، یعنی $dE_0 / (r_0 + \Delta)$ ، اختلاف راه Δ اهمیت ندارد زیرا $\Delta \ll r_0$ ، و از این روی می توان از Δ در اینجا صرف نظر کرد. از طرف دیگر، فاز نسبت به تغییرات کوچک بسیار حساس است. برای بازه های ds در زیر محور، s منفی است و اختلاف راه برابر با $(r_0 - \Delta)$ ، متناظر با راههای نوری کوچکتر به P ، است. واضح است که دامنه تابش ناشی از هر بازه به اندازه ds بستگی دارد، و در نتیجه وقتی تمام سهمها با انتگرال گیری با هم جمع شوند اثر کل را در P به دست می آوریم. بنابراین، می نویسیم

$$dE_0 = E_L ds \quad (3-16)$$

که در آن E_L دامنه به‌ازای پهنای واحد شکاف در فاصله واحد است. چنانکه از شکل دیده می‌شود، برای نقطه P در زاویه θ زیر محور، نسبت به مرکز عدسی، داریم $\Delta = s \sin \theta$. با این ملاحظات، میدان جزئی در P ناشی از بازه اختیاری ds عبارت است از

$$dE_P = \left(\frac{E_L ds}{r_o} \right) e^{i(kr_o + ks \sin \theta - \omega t)}$$

با انتگرال‌گیری روی پهنای شکاف، داریم

$$E_P = \left(\frac{E_L}{r_o} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iks \sin \theta} ds \right) e^{i(kr_o - \omega t)} \quad (4-16)$$

چون در نهایت هدف ما تاییدگی است، یعنی مجذور دامنه که آن را با E_R نشان می‌دهیم، تنها قسمت داخل پراتز را نگه می‌داریم و انتگرال می‌گیریم:

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \left(\frac{e^{iks \sin \theta}}{ik \sin \theta} \right)_{-b/2}^{b/2} \quad (5-16)$$

با وارد کردن حدود انتگرال‌گیری در معادله ۵-۱۶، به‌دست می‌آوریم

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{1}{ik \sin \theta} [e^{(ikb \sin \theta)/2} - e^{-(ikb \sin \theta)/2}] \quad (6-16)$$

با توجه به فازهای جمله‌های نمایی، از جاگذاری مناسب زیر استفاده می‌کنیم

$$\beta \equiv \frac{1}{2} kb \sin \theta \quad (7-16)$$

و در نتیجه

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta) \quad (8-16)$$

که در آن از معادلهٔ اویلر برای جمله‌های نمایی استفاده کرده‌ایم. پس از ساده‌کردن به‌دست می‌آوریم

$$E_R = \frac{E_L b}{r_o} \frac{\sin \beta}{\beta} \quad (9-16)$$

دامنه میدان برآیند در P ، که با معادله ۹-۱۶ داده می‌شود، شامل تابع سینک $(\sin \beta)/\beta$ است که در آن β با θ و از این رو با نقطه مشاهده P روی پرده تغییر می‌کند. می‌توانیم با تعبیر β به صورت اختلاف فاز به آن معنی فیزیکی بدهیم. چون به طور کلی اختلاف فاز با $k\Delta$ داده می‌شود، معادله ۷-۱۶ نشاندهنده اختلاف راهی وابسته به β به اندازه $\Delta = (b/2) \sin \theta$ است که در شکل ۱-۱۶ مشخص شده است. بدین ترتیب، β نمایشگر اختلاف فاز بین امواج ناشی از مرکز و هر یک از لبه‌های شکاف، با $s = b/2$ ، است.

تابیدگی در P متناسب با مجذور دامنه برآیند در این نقطه است، یعنی

$$I = \left(\frac{\varepsilon_0 c}{2}\right) E_R^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left(\frac{E_L b}{r_0}\right)^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

یا

$$I = I_0 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}\right) \equiv I_0 \text{sinc}^2(\beta) \quad (10-16)$$

که در آن I_0 حاوی عوامل ثابت است. با استفاده از معادله‌های ۹-۱۶ و ۱۰-۱۶ می‌توانیم تغییر تابیدگی در پرده را با فاصله قائم از محور ترسیم کنیم. تابع سینک دارای این خاصیت است که وقتی شناسه آن به 0° میل می‌کند خود تابع به ۱ میل می‌کند:

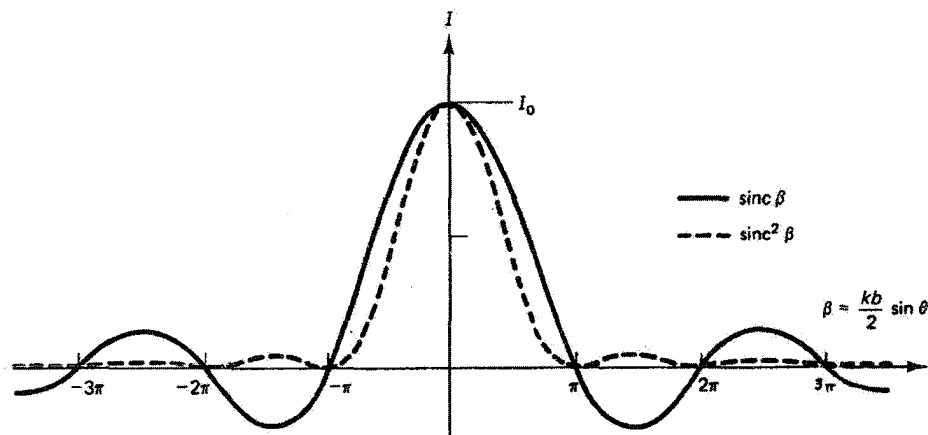
$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \text{sinc}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right) = 1 \quad (11-16)$$

غیر از این مورد، این تابع به ازای $\sin \beta = 0$ صفر می‌شود، یعنی وقتی

$$\beta = \frac{1}{2}(kb \sin \theta) = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

معادله ۱۱-۱۶ نشان می‌دهد چرا $m = 0$ از این شرط حذف شده است. تابیدگی به صورت تابع β در شکل ۲-۱۶ ترسیم شده است. با قرار دادن $k = 2\pi/\lambda$ ، شرط مربوط به صفرهای تابع سینک (و در نتیجه صفرهای تابیدگی) به صورت زیر در می‌آید

$$m\lambda = b \sin \theta \quad (12-16)$$



شکل ۲-۱۶ نمودار تابع سینک (خط‌پر) به صورت تابع β . تابع تابیدگی (خط‌چین) برای پراش فرانیهوفر تک‌شکاف درست مجذور β است که در مرکز نقش به I_0 به‌نچار شده است.

بنابراین، روی پرده، تابیدگی در $\theta = 0^\circ$ یا $y = 0$ ماکسیمم است و به‌ازای مقادیر y که در رابطه زیر صدق می‌کنند صفر می‌شود

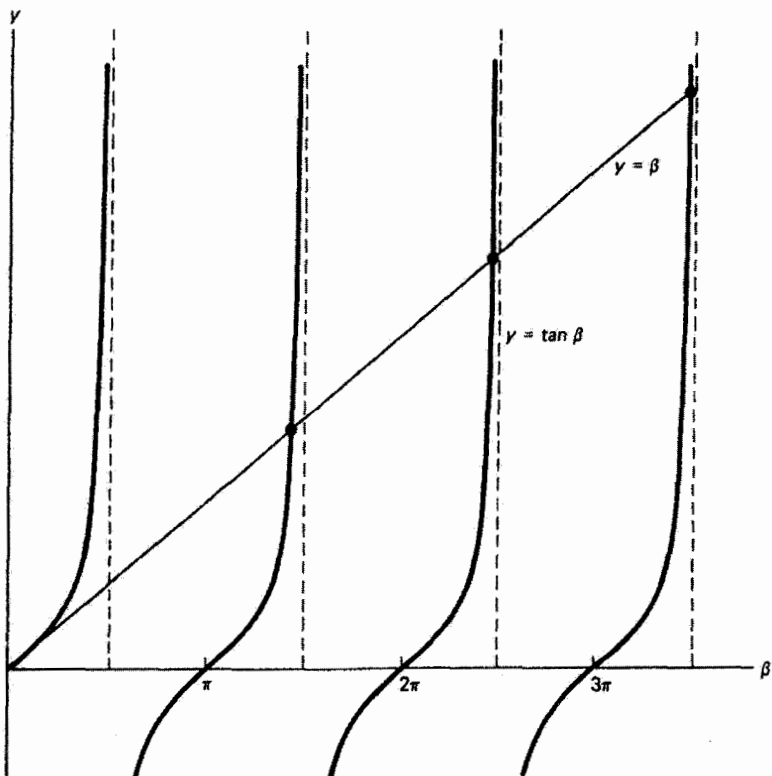
$$y \cong \frac{m\lambda f}{b} \quad (۱۳-۱۶)$$

علامت تقریب در معادله ۱۳-۱۶ ناشی از قرار دادن $\sin \theta \cong y/f$ است، که معمولاً موجه است زیرا θ زاویه کوچکی است. نقش تابیدگی نسبت به $y = 0$ متقارن است.

ماکسیممهای ثانویه نقش پراش تک‌شکاف درست در نقاط بین صفرها واقع نمی‌شوند، اما وقتی β افزایش می‌یابد به این نقاط نزدیکتر می‌شوند. این ماکسیممها بر ماکسیممهای تابع سینک، که مکانهای آنها در رابطه زیر صدق می‌کنند، واقع می‌شوند

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) = \frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta^2} = 0$$

یا $\beta = \tan \beta$. همان‌طور که در شکل ۳-۱۶ نشان داده شده است، زاویه با تازانت آن در نقاط تقاطع منحنیهای $y = \tan \beta$ و $y = \beta$ برابر است. این نقاط، به استثنای $\beta = 0$ ، در 1.5π ، 2.46π ، (و نه 2.5π)، 3.47π ، (و نه 3.5π)، و غیره واقع شده‌اند، که می‌توان با یک ماشین حساب تحقیق کرد. نمودار به‌وضوح نشان می‌دهد وقتی β افزایش می‌یابد نقاط تقاطع به خطوط قائم که نقاط وسط را تعیین می‌کنند نزدیکتر می‌شوند. بدین ترتیب، در نمودار تابیدگی در شکل ۲-۱۶،



شکل ۳-۱۶ نقاط تقاطع منحنیهای $y = \beta$ و $y = \tan \beta$ زاویه‌های β را که در آنها تابع سینک ماکسیمم است تعیین می‌کنند.

ماکسیممهای ثانویه از نقاط وسط اندکی به طرف قله مرکزی منحرف شده‌اند. بیشتر انرژی نقش پراش زیر ماکسیمم مرکزی، که بسیار بزرگتر از ماکسیممهای مجاور در دو طرف است، قرار می‌گیرد.

مثال

نسبت تابیدگی در ماکسیمم قله مرکزی به تابیدگی در اولین ماکسیمم ثانویه را به دست آورید.

حل: این نسبت عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{I_{\beta=0}}{I_{\beta=1,43\pi}} &= \frac{(\sin^2 \beta / \beta^2)_{\beta=0}}{(\sin^2 \beta / \beta^2)_{\beta=1,43\pi}} = \frac{1}{(\sin^2 \beta / \beta^2)_{\beta=1,43\pi}} \\ &= \left(\frac{\beta^2}{\sin^2 \beta} \right)_{1,43\pi} = \frac{20,18}{0,952} = 21,2 \end{aligned}$$

بدین ترتیب، تابیدگی ماکسیمم مربوط به نزدیکترین قلهٔ ثانویه تنها ۴٫۷ درصد تابیدگی قلهٔ مرکزی است.

ماکسیمم مرکزی اساساً نمایشگر تصویر شکاف روی یک پردهٔ دور است. مشاهده می‌کنیم که لبه‌های این تصویر تیز نیستند بلکه به صورت یک رشته ماکسیمم و مینیمم که در سایهٔ اطراف تصویر به تدریج محو می‌شوند ظاهر می‌شوند. این اثر نوعاً در پخشیدگی تصویر ناشی از پراش، از جمله در موارد دیگر پراش که بررسی خواهیم کرد، دیده می‌شود. پهنای زاویه‌ای ماکسیمم مرکزی به صورت زاویهٔ $\Delta\theta$ بین مینیممهای اول در دو طرف تعریف می‌شود. با استفاده از معادلهٔ ۱۶-۱۲ به ازای $m = \pm 1$ و تقریب θ به جای $\sin \theta$ ، به دست می‌آوریم

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b} \quad (14-16)$$

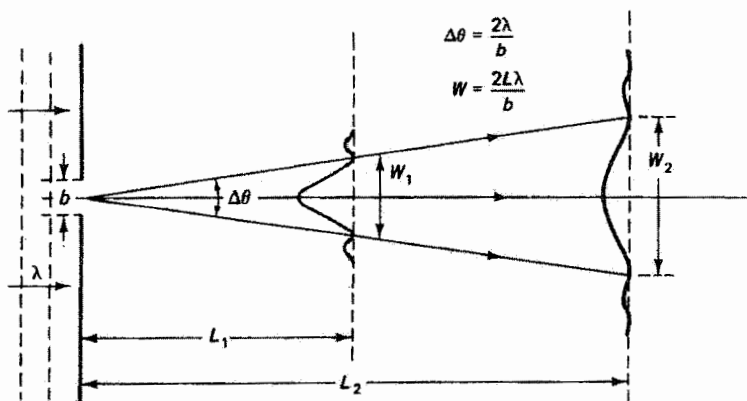
از معادلهٔ ۱۶-۱۴ نتیجه می‌گیریم که وقتی پهنای شکاف کم می‌شود ماکسیمم مرکزی پهن می‌شود. چون طول شکاف در مقایسه با پهنای آن بسیار زیاد است، نقش پراش ناشی از نقاط جبههٔ موج در امتداد طول شکاف پهنای زاویه‌ای بسیار کمی دارد و روی پرده قابل ملاحظه نیست. البته اندازه‌های نقش پراش، چنانکه از معادلهٔ ۱۶-۱۴ دیده می‌شود، به طول موج هم بستگی دارند.

۱۶-۲ پهن‌شدگی باریکه

بنابراین معادلهٔ ۱۶-۱۴، پهنای زاویه‌ای ماکسیمم مرکزی در میدان دور مستقل از فاصلهٔ بین گشودگی و پرده است. بدین ترتیب، اندازه‌های خطی نقش پراش، چنانکه در شکل ۱۶-۴ نشان داده شده است، با فاصلهٔ L افزایش می‌یابد، به طوری که پهنای W مربوط به ماکسیمم مرکزی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$W = L\Delta\theta = \frac{2L\lambda}{b} \quad (15-16)$$

معادلهٔ ۱۶-۱۵ را می‌توانیم به عنوان پهن‌شدگی خطی باریکهٔ نور، که ابتدا به پهنای b محدود بوده است، توصیف کنیم. در واقع، وسیله‌ای که با آن باریکه در ابتدا باریک شده است به ماهیت نقش پراشی که ایجاد می‌شود ربطی ندارد. اگر شکاف شکل ۱۶-۴ را کنار بگذاریم و صرفاً یک باریکهٔ اولیه به عرض b در نظر بگیریم، تمام نتایج بالا به همین روش دوباره به دست می‌آیند. یک باریکهٔ "موازی شده" نور درست مانند اینکه از یک تک‌روزنه خارج شده باشد پهن می‌شود.



شکل ۱۶-۴ پهن‌شدگی ماکسیمم مرکزی در نقش پراش میدان دور برای تک‌شکاف.

مثال

باریکه موازی نوری به عرض $b = 0.5 \text{ mm}$ و با طول موج 546 nm مسافت 10 m را در آزمایشگاه طی می‌کند. پهنای نهایی باریکه را به علت پهن‌شدگی ناشی از پراش به دست آورید.

حل: با استفاده از معادله ۱۶-۱۵ داریم

$$\blacktriangle \quad W = \frac{2L\lambda}{b} = \frac{2(10)(546 \times 10^{-9})}{0.5 \times 10^{-3}} = 21.8 \text{ mm}$$

بدین ترتیب، حتی باریکه‌های لیزری بسیار موازی موقع انتشار متحمل پهن‌شدگی ناشی از پراش می‌شوند. یک پیامد بنیادی ماهیت موجی نور این است که باریکه‌های کاملاً موازی نور نمی‌توانند وجود داشته باشند.

پهن‌شدگی باریکه‌ای که معادله ۱۶-۱۴ توصیف می‌کند برای گشودگیهای مستطیلی معتبر است. برای گشودگیهای دایره‌ای، در بخش بعد نشان می‌دهیم که باید یک ضریب 1.22 در کنار طول موج وارد کنیم. علاوه بر این، باید به خاطر داشته باشیم که بررسی بالا مربوط به جبهه موج تخت با تابیدگی یکنواخت است.^۱ پهن‌شدگی توصیف شده با معادله ۱۶-۱۵ بر اساس پراش فرانهورفر یا میدان دور به دست آمده است که در اینجا به معنی این است که L باید به طور معقولی بزرگ بماند. اگر به عنوان مثال L را به اندازه کافی کوچک بگیریم، معادله پهنای باریکه را کمتر از

۱. باریکه لیزری معمولاً در مقطع عرضی خود دارای تابیدگی ثابت نیست. نیرخ در مد پایه خود یک تابع گاوسی است. فرمول پهن‌شدگی آن اساساً همان معادله ۱۶-۱۴ است که در آن قطر باریکه جای b را می‌گیرد و به جای ثابت 2 ضریب 1.22 می‌نشیند. پهن‌شدگی باریکه لیزری را در فصل ۲۱ بررسی می‌کنیم.

b پیش‌بینی می‌کند که مخالف با فرض است. بدیهی است که L باید بزرگتر از یک مقدار مینیمم L_{\min} باشد که برای پهنای باریکه مقدار $W = b$ را می‌دهد، یعنی

$$L_{\min} = \frac{b^2}{2\lambda}$$

می‌توانیم نتیجه بگیریم که وقتی در وضعیت میدان دور هستیم که

$$L \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

با یک رهیافت کلیتر به معیار متداول برای پراش میدان دور می‌رسیم که به صورت زیر است

$$L \gg \frac{\text{مساحت گشودگی}}{\lambda} \quad (16-16)$$

۱۶-۳ گشودگیهای مستطیلی و دایره‌ای

تا کنون پراش از شکافی را توصیف کرده‌ایم که پهنای آن، چنانکه در شکل ۱۶-۵ الف نشان داده شده است، بسیار کوچکتر از طول آن است. اگر پهنای طول شکاف، همچون در شکل ۱۶-۵ ب، با هم قابل مقایسه و کوچک باشند هر یک از آنها پهن‌شدگی قابل ملاحظه‌ای ایجاد می‌کنند. به‌ازای اندازه گشودگی a ، برای تابیدگی، مشابه با معادله ۱۶-۱۰، می‌نویسیم

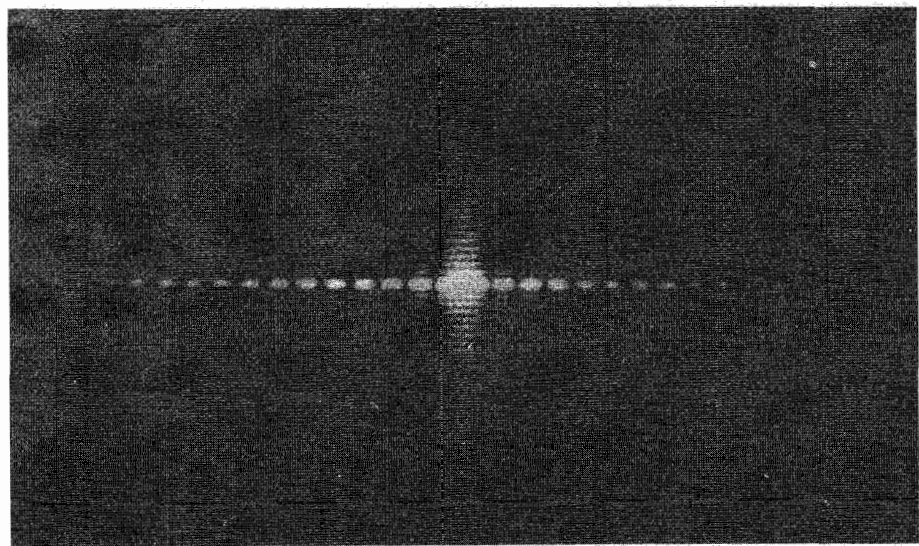
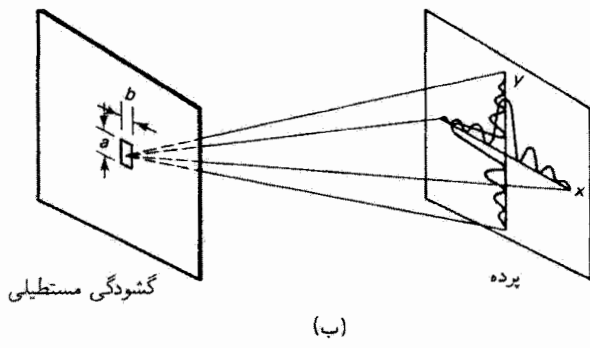
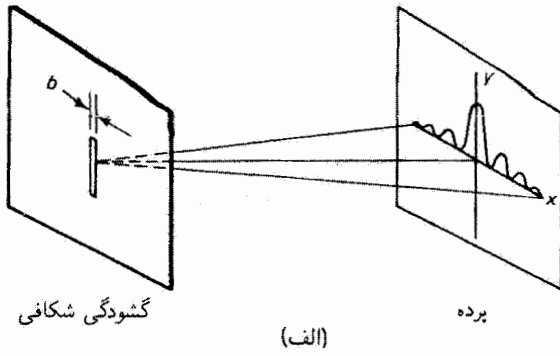
$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha \equiv \left(\frac{k}{r} \right) a \sin \theta \quad (17-16)$$

اکنون نقش دوبعدی به‌ازای نقاط x یا y که در روابط زیر صدق می‌کنند تابیدگی صفر را به‌دست می‌دهد

$$y = \frac{m\lambda f}{b} \quad \text{یا} \quad x = \frac{n\lambda f}{a}$$

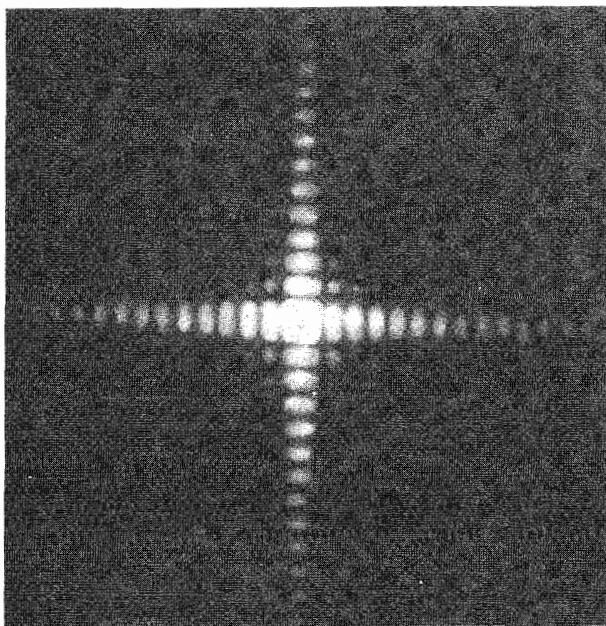
که در آنها m و n مقادیر درست مخالف صفر هستند. معلوم می‌شود که تابیدگی در پرده درست حاصلضرب توابع تابیدگی در هر یک از دو بعد است، یعنی

$$I = I_0 (\text{sinc}^2 \beta) (\text{sinc}^2 \alpha) \quad (18-16)$$



(ج)

شکل ۵-۱۶ (الف) پراش تک شکاف. تنها پهنای کوچک b مربوط به شکاف باریک باعث پهن شدن نور در راستای x روی پرده می شود. (ب) پراش تک شکاف. هر دو اندازه گشودگی مستطیلی کوچک اند و یک نقش پراش دوبعدی روی پرده قابل مشاهده است. (ج) تصویر پراش تک شکاف مربوط به قسمت (الف). (د) تصویر پراش تک شکاف مربوط به قسمت (ب).



(د)

شکل ۵-۱۶ (ادامه)

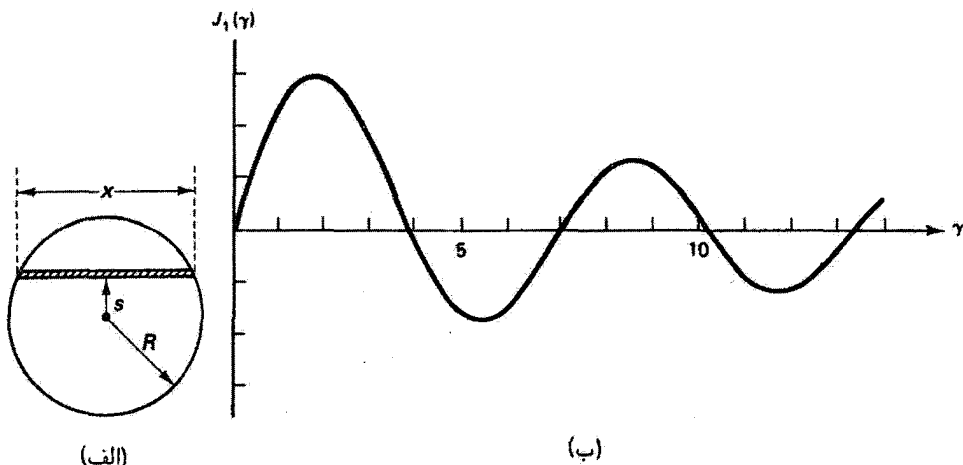
در محاسبه این نتیجه، به جای انتگرال‌گیری ساده روی یک بعد شکاف انتگرال‌گیری دوگانه روی هر دو بعد گشودگی صورت گرفته است. عکسهای نقش پراش تک‌گشودگی برای گشودگیهای مستطیلی و مربعی در شکل ۵-۱۶ ج و د نشان داده شده‌اند.

وقتی گشودگی به صورت دایره است، انتگرال‌گیری روی تمام سطح گشودگی انجام می‌شود زیرا اندازه‌های افقی و قائم گشودگی با هم قابل مقایسه‌اند. بدین ترتیب، به جای معادله ۳-۱۶ اکنون تعریف می‌کنیم $dE_0 \equiv E_A dA$ که در آن E_A نمایشگر دامنه در واحد مساحت است. بنابراین، دامنه در P (همچون در شکل ۱-۱۶) با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_p = \frac{E_A}{r_0} \iint_{\text{مساحت}} e^{isk \sin \theta} dA$$

عنصر سطح را به صورت یک نوار مستطیلی به مساحت $dA = x ds$ می‌گیریم که در شکل ۱۶-الف نشان داده شده است. با استفاده از معادله دایره، طول x در ارتفاع s عبارت است از

$$x = 2\sqrt{R^2 - s^2}$$



شکل ۶-۱۶ (الف) هندسه مربوط به انتگرال‌گیری روی گشودگی دایره‌ای. (ب) تابع بسل $J_1(\gamma)$. اولین صفر این تابع در $\gamma = 3.832$ است.

که در آن شعاع گشودگی است. در نتیجه انتگرال بالا تبدیل می‌شود به

$$E_P = \frac{\gamma E_A}{r_o} \int_{-R}^R e^{isk \sin \theta} \sqrt{R^2 - s^2} ds$$

این انتگرال با جاگذاری $v = s/R$ و $\gamma = kR \sin \theta$ به صورت یک انتگرال معین متعارف در می‌آید:

$$E_P = \frac{\gamma E_A R^2}{r_o} \int_{-1}^{+1} e^{i\gamma v} \sqrt{1 - v^2} dv$$

مقدار این انتگرال عبارت است از

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\gamma v} \sqrt{1 - v^2} dv = \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma}$$

که در آن $J_1(\gamma)$ تابع بسل نوع اول مرتبه اول است که به صورت رشته نامتناهی زیر است

$$J_1(\gamma) = \frac{\gamma}{2} - \frac{(\gamma/2)^3}{1^2 \times 2} + \frac{(\gamma/2)^5}{1^2 \times 2^2 \times 3} - \dots$$

چنانکه از این بسط رشته‌ای دیده می‌شود، نسبت $J_1(\gamma)/\gamma$ به‌ازای $\gamma \rightarrow 0$ دارای حد $1/2$ است. بدین‌ترتیب، گشودگی دایره‌ای، به‌جای تابع سینوسی برای تک‌شکاف، تابع بسط J_1 را ایجاد می‌کند که، چنانکه در نمودار شکل ۱۶-۶ نشان داده شده است، تا اندازه‌ای مانند تابع سینوسی نوسان می‌کند. یک اختلاف این است که دامنهٔ نوسان تابع بسط با زیاد شدن شناسهٔ آن کاهش می‌یابد. اکنون می‌توان تابیدگی برای گشودگی دایره‌ای به قطر D را به‌صورت زیر نوشت

$$I = I_0 \left(\frac{2J_1(\gamma)}{\gamma} \right)^2, \quad \gamma \equiv \frac{1}{2} k D \sin \theta \quad (19-16)$$

که در آن I_0 تابیدگی به‌ازای $\gamma \rightarrow 0$ یا در $\theta = 0$ است.

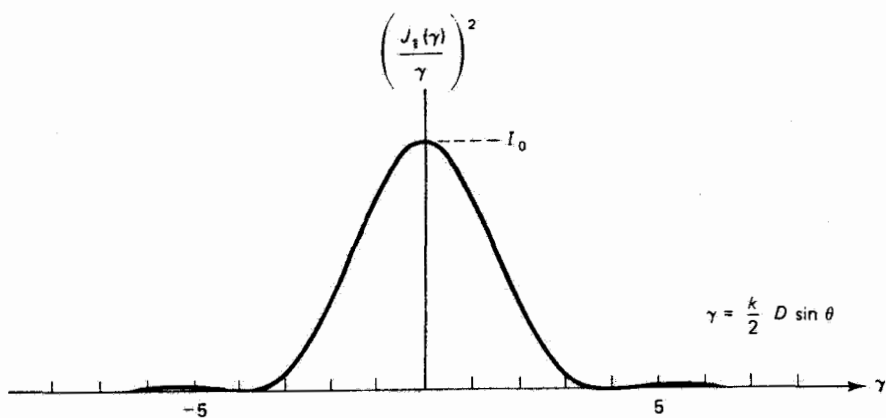
برای درک بهتر شباهت کار تابع بسط با تابع سینوسی، معادلهٔ ۱۹-۱۶ را با معادلهٔ ۱۷-۱۶ مقایسه می‌کنیم. مانند $(\sin x)/x$ ، تابع $J_1(x)/x$ وقتی x به صفر میل می‌کند به یک ماکسیمم میل می‌کند، و در نتیجه تابیدگی در مرکز نقش ($\theta = 0$) بیشترین مقدار را دارد. نقش پراش نسبت به محور اپتیکی که از مرکز گشودگی دایره‌ای می‌گذرد متقارن است و اولین صفر آن، چنانکه در شکل ۱۶-۶ نشان داده شده است، وقتی است که $\gamma = 3.832$. بدین‌ترتیب، ماکسیمم مرکزی تابیدگی وقتی به صفر می‌رسد که

$$\gamma = \left(\frac{k}{2} \right) D \sin \theta = 3.832$$

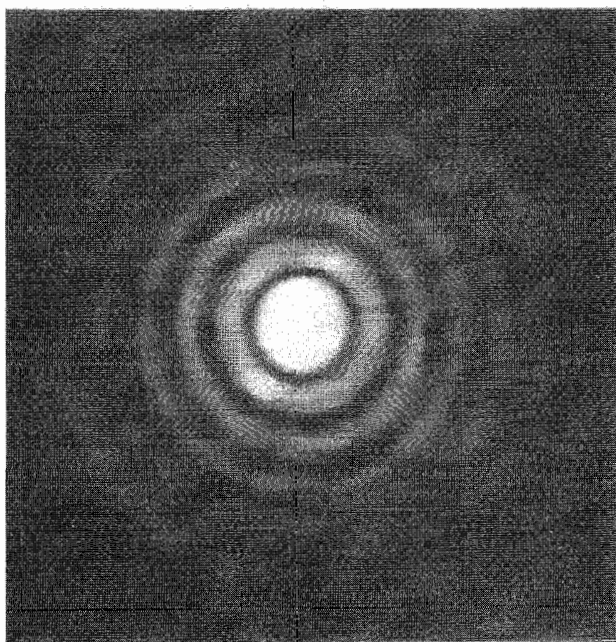
یا، با استفاده از $k = 2\pi/\lambda$

$$D \sin \theta = 1.22\lambda \quad (20-16)$$

معادلهٔ ۱۶-۲۰ را باید با معادلهٔ مشابه آن برای شکاف مستطیلی باریک یعنی $b \sin \theta = m\lambda$ (معادلهٔ ۱۲-۱۶) مقایسه کرد. می‌بینیم که به‌جای مقدار $m = 1$ برای اولین مینیمم در نقش شکاف، در مورد مربوط به گشودگی دایره‌ای عدد 1.22 نشسته است. مینیممهای بعدی به طریق مشابهی از صفراهای دیگر تابع بسط J_1 تعیین می‌شوند. نقش تابیدگی معادلهٔ ۱۹-۱۶ در شکل ۱۶-۷ الف ترسیم شده است. این نقش با نقش شکل ۱۶-۲ برای تک‌شکاف مشابه است به‌جز اینکه نقش مربوط به گشودگیهای دایره‌ای نسبت به محور اپتیکی تقارن چرخشی دارد. عکسی از این نقش در شکل ۱۶-۷ ب نشان داده شده است. بنابراین، ماکسیمم مرکزی، که تصویر "پراشیده" گشودگی دایره‌ای است، یک دایرهٔ نور است و قرص آیری نامیده می‌شود. توجه کنید که شعاع



(الف)



(ب)

شکل ۷-۱۶ (الف) نقش تابیدگی گشودگی دایره‌ای. بیشترین مقدار انرژی نور به اندازه بسیار زیادی به ماکسیم مرکزی پراشیده می‌شود. (ب) تصویر پراش گشودگی دایره‌ای. دایره نور در مرکز مربوط به مرتبه صفرم پراش است و قرص ایری نامیده می‌شود.

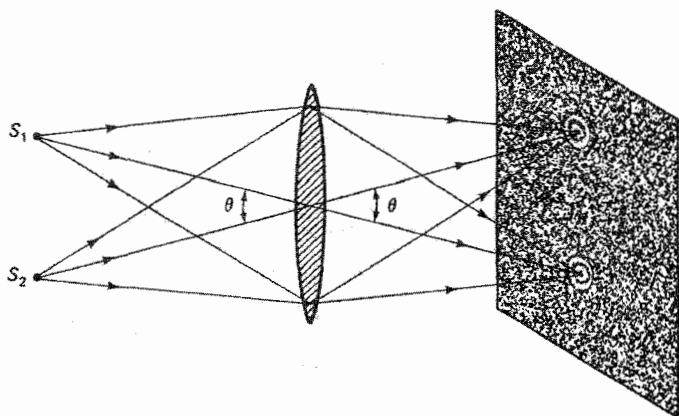
زاویه‌ای میدان دور مربوط به قرص ایری، بنابه معادلهٔ ۱۶-۲۰، با تقریب بسیار خوب برابر است با

$$\Delta\theta = \frac{1,22\lambda}{D} \quad (21-16)$$

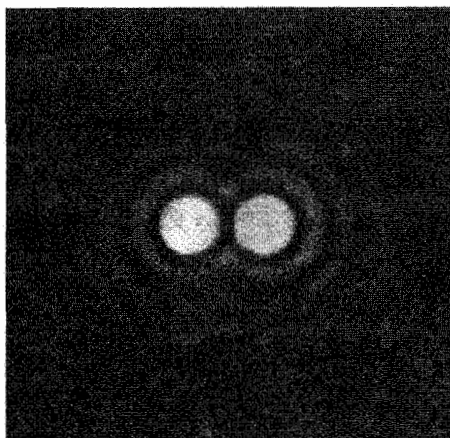
۱۶-۴ تفکیک

باید متذکر شویم که در تشکیل نقش پراش فرانهورفر برای تک‌شکاف (شکل ۱۶-۱)، فاصلهٔ بین شکاف و عدسی در جزئیات این نقش اهمیت فوق‌العاده ندارد. وقتی این فاصله کوچک است، عدسی صرفاً زاویهٔ فضایی بزرگتری از نور را قطع می‌کند. اگر این فاصله را صفر کنیم، گشودگی و عدسی برهم منطبق می‌شوند. این وضعیت برای شیئی تلسکوپ روی می‌دهد. بدین ترتیب، تصویری که تلسکوپ تشکیل می‌دهد تحت اثر پراشی است که با معادلهٔ ۱۶-۱۹ برای گشودگی دایره‌ای توصیف می‌شود. بنابراین، وضوح تصویر یک شی نقطه‌ای دور — مثلاً یک ستاره — به علت پراش محدود می‌شود. این تصویر اساساً ناحیهٔ قرص ایری را اشغال می‌کند. یک چشمی که برای دیدن تصویر اولیه به‌کار می‌رود و بزرگنمایی بیشتری فراهم می‌کند صرفاً جزئیات نقش پراش ناشی از عدسی را بزرگ می‌کند. حد تفکیک قبلاً در تصویر اولیه تعیین شده است. پخشیدگی چاره‌ناپذیری که پراش در تصویر به‌وجود می‌آورد تفکیک دستگاه را محدود می‌کند، یعنی توانایی آن را در ایجاد تصاویر متمایز برای نقاط متمایز شیء، چه از لحاظ فیزیکی به هم نزدیک باشند (مثلاً در میکروسکوپ) چه به اندازهٔ زاویهٔ کوچکی در عدسی از هم فاصله داشته باشند (مثلاً در تلسکوپ)، کاهش می‌دهد. شکل ۱۶-۸ الف پراش دو شیء نقطه‌ای را که با یک عدسی تشکیل شده است نشان می‌دهد. هم این دو شیء نقطه‌ای و هم مراکز قرصهای ایری آنها به اندازهٔ زاویهٔ θ از هم فاصله دارند. اگر این زاویه به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، دو تصویر متمایز، مانند آنچه عکس شکل ۱۶-۱۸ ب نشان می‌دهد، به‌وضوح دیده خواهند شد. اکنون فرض کنید اشیاء S_1 و S_2 را به هم نزدیکتر کنیم. وقتی همپوشی نقشهای تصویر به‌طور محسوس شروع می‌شود، تشخیص نقشها به‌صورت متمایز یعنی تفکیک آنها به‌نحوی که بتوان آنها را متعلق به نقاط متمایز شیء دانست مشکلتر می‌شود. عکسی از دو تصویر در حد تفکیک در شکل ۱۶-۸ ج نشان داده شده است. بنابه معیار ریلی برای تصاویر در آستانهٔ تفکیک‌پذیری — یک معیار نسبتاً اختیاری اما مفید — مراکز نقشهای تصویر نباید از شعاع قرص ایری به هم نزدیکتر باشند (شکل ۱۶-۹). در این وضعیت، ماکسیمیم یک نقش مستقیماً روی اولین مینیمم نقش دیگر می‌افتد. بدین ترتیب، برای حد تفکیک، همچون در معادلهٔ ۱۶-۲۱، داریم

$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{1,22\lambda}{D} \quad (22-16)$$



(الف)



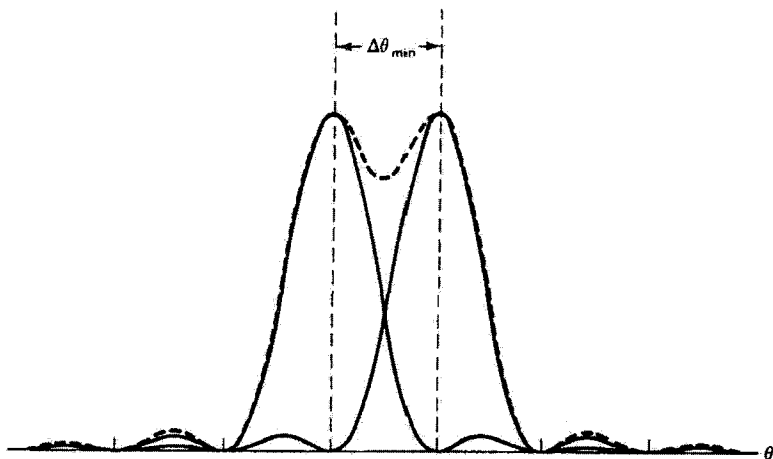
(ب)



(ج)

شکل ۸-۱۶ (الف) تصاویر محدود شده به علت پراش که از دو شیء نقطه‌ای با یک عدسی تشکیل شده‌اند. تا وقتی قرصهای ایری کاملاً از هم فاصله داشته باشند تصاویر کاملاً از هم جدا هستند. (ب) تصاویر فاصله‌دار دو چشمه نقطه‌ای ناهمدوس. در این نقش پراش، دو تصویر کاملاً از هم جدا هستند. (ج) تصویر یک جفت چشمه نقطه‌ای ناهمدوس در حد تفکیک.

که در آن D اکنون قطر عدسی است. با توجه به این نتیجه، فاصله زاویه‌ای تفکیک‌پذیر مینیمم مربوط به دو نقطه شیء را می‌توان با زیاد کردن قطر عدسی و یا کم کردن طول موج کاهش داد (تفکیک را بهتر کرد). بررسی چند کاربرد معادله ۲۶-۲۲ را با مثال زیر شروع می‌کنیم.



شکل ۱۶-۹ معیار ریلی برای نقشهای پراش در آستانه تفکیک پذیری. منحنی خط چین مجموع مشاهده شده قله‌های پراش مستقل است.

مثال

فرض کنید هر یک از عدسیهای یک دوربین دوچشمی دارای قطر ۳۵ mm است. دو ستاره از هم چه فاصله‌ای باید داشته باشند تا از لحاظ نظری توسط هر یک از عدسیهای این دوربین تفکیک پذیر باشند؟

حل: از معادله ۱۶-۲۲ با به کار بردن طول موج متوسط نور مرئی داریم

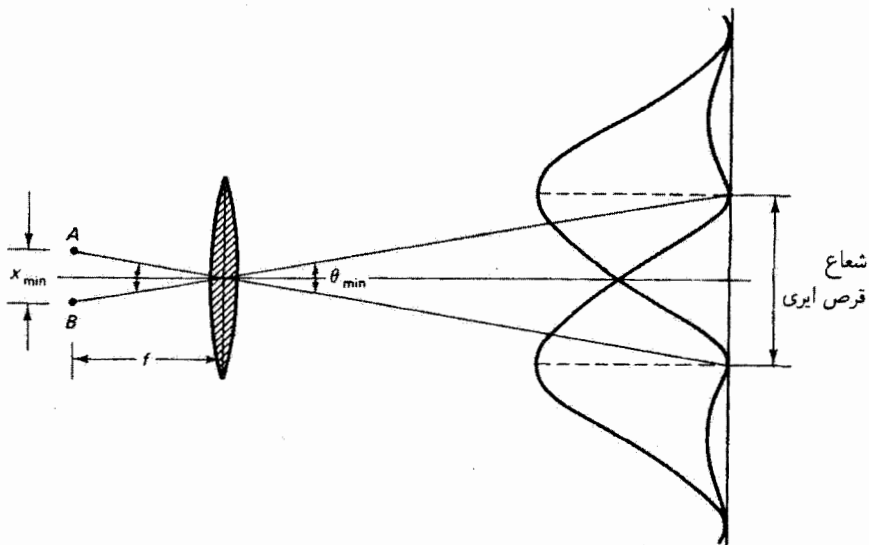
$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{1.22(550 \times 10^{-9})}{35 \times 10^{-3}} = 1.92 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

یا حدود ۴ ثانیه کمان. اگر این ستاره‌ها نزدیک به مرکز کهکشان باشند، یعنی در فاصله d حدود ۳۰۰۰۰ سال نوری از ما، فاصله واقعی آنها از هم تقریباً برابر است با

$$s = d\Delta\theta_{\min} = (300000)(1.92 \times 10^{-5}) = 0.58 \text{ سال نوری}$$

برای به دست آوردن تصویری از این فاصله، توجه کنید که سیاره پلوتو در مرز منظومه شمسی تنها ۵۵ ساعت نوری از ما فاصله دارد. اگر ستاره‌ها با امواج رادیویی بلند آنها آشکارسازی شوند — با استفاده از آنتنهای بشقابی به جای عدسی — تفکیک بنابه معادله ۱۶-۲۲ بسیار کمتر

می‌شود.



شکل ۱۶-۱۰ تفکیک زاویه‌ای مینیم میکروسکوپ.

اگر عدسی، چنانکه در شکل ۱۶-۱۰ نشان داده شده است، شیئی میکروسکوپ باشد، مسئله تفکیک کردن اشیاء نزدیک در اساس همین است. در یک تخمین تقریبی، برای استفاده از معادلات پراش میدان دور، از واقعیت ناتخت بودن جبهه‌های موجی که از نقاط شیء نزدیک A و B به عدسی می‌خورند چشم می‌پوشیم. بنابراین، فاصله مینیم x_{\min} مربوط به دو شیء در آستانه تفکیک نزدیک صفحه کانونی عدسی با رابطه زیر داده می‌شود

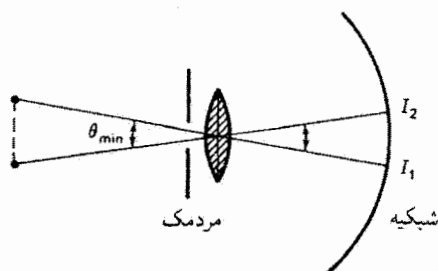
$$x_{\min} = f\theta_{\min} = f \left(\frac{1.22\lambda}{D} \right)$$

نسبت D/f را گشودگی عددی می‌نامند که مقدار آن برای یک شیئی غوطه‌ور در روغن نوعاً ۱٫۲ است. بدین ترتیب، داریم

$$x_{\min} \cong \lambda$$

تفکیک میکروسکوپ تقریباً برابر است با طول موج نور به‌کاررفته، و این واقعیت مزیت میکروسکوپیهای فرابنفش، پرتو ایکس، و الکترونی را در کاربردهای با تفکیک زیاد توضیح می‌دهد.

حدود تفکیک ناشی از پراش روی چشم انسان، که می‌توان آن را همچون در شکل ۱۶-۱۱



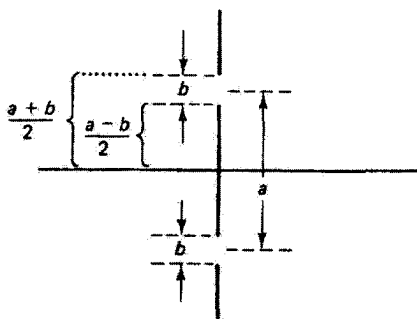
شکل ۱۶-۱۱ پراش ناشی از چشم با گشودگی مردمک تفکیک اشیائی را که زاویه θ_{min} می‌سازند محدود می‌کند.

با یک گشودگی دایره‌ای (مردمک)، یک عدسی، و یک پرده (شبکیه) تقریب گرفت، نیز تأثیر می‌کند. دید شب، که با مردمکهای توافق‌یافته بزرگ حدود ۸ mm صورت می‌گیرد، توانایی تفکیک بیشتری نسبت به دید روز دارد. اما متأسفانه برای استفاده از این وضعیت نور به اندازه کافی زیاد نیست! در روز روشن، قطر مردمک می‌تواند ۲ mm باشد. با این شرایط، از معادله ۱۶-۲۲ مقدار $(\Delta\theta)_{min} = 33.6 \times 10^{-5} \text{ rad}$ را به‌ازای طول‌موج متوسط ۵۵۰ nm به‌دست می‌آوریم. از لحاظ تجربی، معلوم شده است که جدایی ۱ mm در فاصله حدود ۲ m در آستانه تفکیک‌پذیری با $(\Delta\theta)_{min} = 5 \times 10^{-5}$ است، که حدود ۱٫۵ برابر حد نظری است. با نگاه کردن به دو خط با جدایی ۱ mm از فواصل مختلفی که افزایش داده می‌شوند تا جایی که دیگر به‌صورت متمایز دیده نشوند می‌توان تفکیک شخصی انسان (تیزی) را آزمون کرد. قابل تذکر است که تفکیک نظری که در بالا برای مردمکی با قطر ۲ mm به‌دست آوردیم با مقدار ۱ دقیقه کمان ($2.9 \times 10^{-5} \text{ rad}$) که اسنلن برای مشخص کردن تیزی عادی به‌کار برد سازگار است (به فصل ۷ مراجعه کنید).

۵-۱۶ پراش شکاف دوگانه

نقش پراش جبهه موج تختی که همه جا به‌جز در دو شکاف باریک مسدود شده است به همان روش مربوط به تک‌شکاف محاسبه می‌شود، اما از لحاظ ریاضی حدود انتگرال‌گیری در معادله ۱۶-۴ به حدودی که در شکل ۱۶-۱۲ نشان داده شده‌اند تبدیل می‌شوند. در این مورد نیز تنها دامنه را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \int_{-(1/2)(a+b)}^{-(1/2)(a-b)} e^{isk \sin \theta} ds + \frac{E_L}{r_o} \int_{(1/2)(a-b)}^{(1/2)(a+b)} e^{isk \sin \theta} ds \quad (23-16)$$



شکل ۱۶-۱۲ مشخص‌سازی پهنا و فاصله شکافها برای پراش شکاف دوگانه.

با انتگرال‌گیری و جاگذاری حدود به‌دست می‌آوریم

$$E_R = \frac{E_L}{r_0} \frac{1}{ik \sin \theta} [e^{(1/2)ik(-a+b) \sin \theta} - e^{(1/2)ik(-a-b) \sin \theta} + e^{(1/2)ik(a+b) \sin \theta} - e^{(1/2)ik(a-b) \sin \theta}]$$

با معرفی مجدد جاگذاری ۱۶-۷، شامل پهناهای شکاف b ,

$$\beta \equiv \frac{1}{2} kb \sin \theta \quad (24-16)$$

و جاگذاری مشابهی شامل جدایی شکافهای a ، یعنی

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} ka \sin \theta \quad (25-16)$$

معادله به‌صورت فشرده‌تر زیر در می‌آید

$$E_R = \frac{E_L}{r_0} \frac{b}{2i\beta} [e^{i\alpha}(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{-i\alpha}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})]$$

با استفاده از معادلهٔ اویلر داریم

$$E_R = \frac{E_L}{r_0} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta)(2 \cos \alpha)$$

$$E_R = \frac{2E_L b \sin \beta}{r_o \beta} \cos \alpha \quad (26-16)$$

تابیدگی اکنون برابر است با

$$I = \left(\frac{\epsilon_o c}{2}\right) E_R^2 = \left(\frac{\epsilon_o c}{2}\right) \left(\frac{2E_L b}{r_o}\right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2 \cos^2 \alpha$$

یا

$$I = 4I_o \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2 \cos^2 \alpha \quad (27-16)$$

که در آن

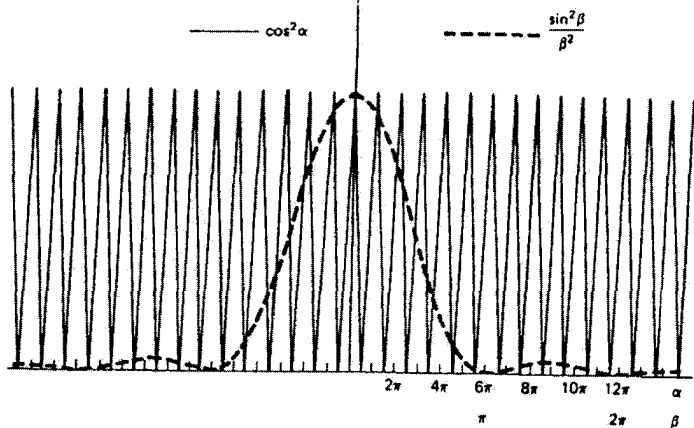
$$I_o = \left(\frac{\epsilon_o c}{2}\right) \left(\frac{E_L b}{r_o}\right)^2$$

که در معادله ۱۶-۱۰ برای تک‌شکاف تعریف شد. چون مقدار ماکسیمم معادله ۱۶-۲۷ برابر با $4I_o$ است، می‌بینیم تابیدگی ماکسیمم در مرکز نقش مربوط به شکاف دوگانه در مقایسه با تک‌شکاف چهار بار بیشتر است. این نتیجه دقیقاً باید همین باشد زیرا در اینجا باریکه‌ها همفازند و دامنه‌ها با هم جمع می‌شوند.

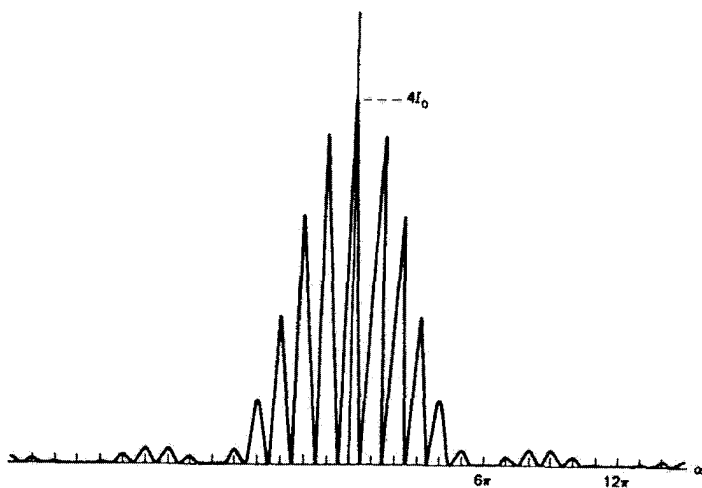
با بررسی دقیقتر معادله ۱۶-۲۷ می‌بینیم که این تابیدگی درست حاصلضرب تابیدگیهای مربوط به تداخل شکاف دوگانه و پراش تک‌شکاف است. عامل $[(\sin \beta)/\beta]^2$ در معادله ۱۶-۱۰ برای پراش تک‌شکاف دیده می‌شود. عامل $\cos^2 \alpha$ با جاگذاری α از معادله ۱۶-۲۵، عبارت است از

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \left[\frac{ka(\sin \theta)}{2} \right] = \cos^2 \left[\frac{\pi a(\sin \theta)}{\lambda} \right]$$

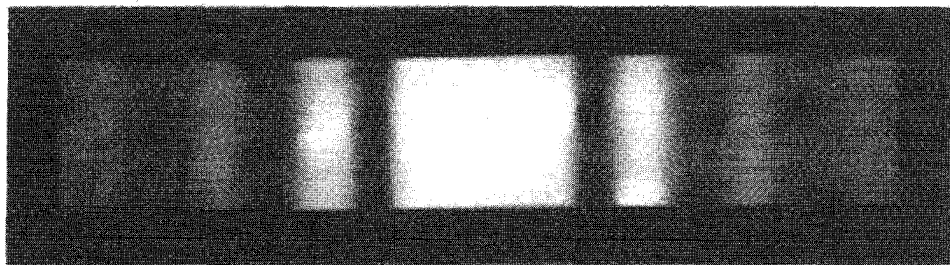
که معادل عاملی است که در معادله ۱۰-۱۹ برای شکاف دوگانه یانگ وجود دارد. عوامل سینوس و کسینوس در معادله ۱۶-۲۷ در شکل ۱۶-۱۳ الف برای مورد $a = 6b$ یا $\alpha = 6\beta$ ترسیم شده‌اند. چون $a > b$ ، عامل $\cos^2 \alpha$ سریعتر از عامل $(\sin^2 \beta)/\beta^2$ تغییر می‌کند. حاصلضرب



(الف)

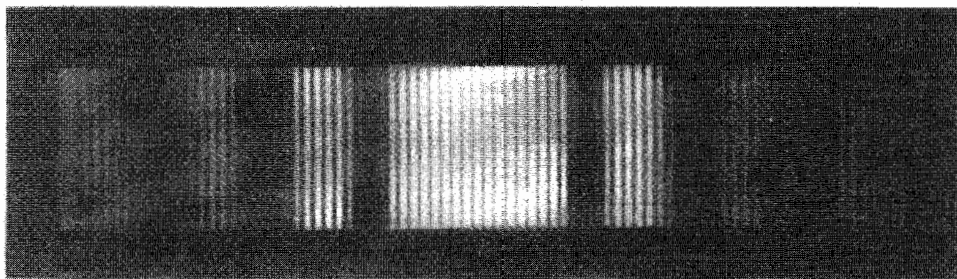


(ب)



(ج)

شکل ۱۶-۱۳ (الف) نمودار توابع متداخل (خط‌پر) و پراش (خط‌چین) برای پراش فرانیهوفر شکاف دوگانه وقتی جدایی شکافها شش برابر پهنای شکاف است ($a = 6b$). (ب) تابیدگی برای شکاف دوگانه (الف). (ج) نقش پراش ناشی از تک‌شکاف. (د) نقش پراش ناشی از گشودگی دو شکافی، که در آن هر شکاف مانند شکافی است که (ج) را ایجاد کرده است.



(د)

شکل ۱۶-۱۳ (ادامه)

عوامل سینوس و کسینوس را می‌توان مدولاسیون نقش فریز تداخل توسط پوش پراش تک شکاف، که در شکل ۱۶-۱۳ ب نشان داده شده است، در نظر گرفت. چنانکه دیده می‌شود، وقتی $\beta = m\pi$ با $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ پوش پراش دارای مینیمم است. برحسب زاویه فضایی θ ، این شرط عبارت است از

$$m\lambda = b \sin \theta \quad \text{مینیمهای پراش:} \quad (28-16)$$

که مانند معادله ۱۶-۱۲ است. وقتی این مینیمها اتفاقاً بر ماکسیمهای فریز تداخل منطبق شوند، فریز از نقش حذف می‌شود. ماکسیمهای تداخل به ازای $\alpha = p\pi$ با $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ روی می‌دهند، یعنی وقتی

$$p\lambda = a \sin \theta \quad \text{ماکسیمهای تداخل:} \quad (29-16)$$

اگر شرایط بیان شده با معادله‌های ۱۶-۲۸ و ۱۶-۲۹ در یک نقطه از نقش (یک θ) برقرار باشند، از تقسیم یک معادله بر دیگری شرط مرتبه‌های حذف شده به دست می‌آید:

$$a = \left(\frac{p}{m}\right) b \quad \text{شرط مرتبه‌های حذف شده:} \quad (30-16)$$

یا

$$\alpha = \left(\frac{p}{m}\right) \beta$$

بدین ترتیب، وقتی جدایی شکافها مضرب درستی از پهنای شکاف باشد، شرط حذف فریز دقیقاً تحقق می‌یابد. به‌عنوان مثال، اگر $a = 2b$ آنگاه $a = 2m = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ که مرتبه‌های حذف شده تداخل در این مورد هستند. برای موردی که در شکل ۱۶-۱۳ الف وب ترسیم شده است، داریم $a = 6b$ ، و مرتبه‌های حذف شده مرتبه‌هایی هستند که برای آنها $p = \pm 6, \pm 12, \dots$ شکل ۱۶-۱۳ ج و د عکسهای نقش تک‌شکاف و نقش شکاف دوگانه با پهنای شکاف یکسان را نشان می‌دهد. (نسبت a/b را در این مورد تعیین کنید.) بدیهی است که اگر $a = Nb$ و N بزرگ باشد اولین مرتبه حذف شده در $p = \pm N$ از مرکز نقش دور است. بنابراین، برای ایجاد نقش تداخل یانگ ساده برای دو شکاف باید $a \gg b$ و در نتیجه باید N بزرگ باشد. بدین ترتیب، تعداد زیادی فریز در ماکسیم مرکزی پوش پراش واقع می‌شوند. به‌عنوان یک مورد ساده اما جالب توجه، از معادله ۱۶-۳۰ به‌ازای $a = b$ نتیجه می‌گیریم تمام مرتبه‌ها (به‌جز $p = 0$) حذف می‌شوند. اما اگر $a = b$ ، دو شکاف به‌صورت یک شکاف در می‌آیند و نمی‌توانند فریزهای تداخل به‌وجود آورند. البته نقش پراش در این مورد یک نقش پراش تک‌شکاف است.

۱۶-۶ پراش از چند شکاف

برای گشودگی متشکل از شکاف چندگانه (توری)، انتگرالهای معادله ۱۶-۲۳ را همراه با شکل ۱۶-۱۲ به N شکاف تعمیم می‌دهیم. در رابطه زیر برای دامنه برابری، شکافهای انفرادی با شاخص z مشخص شده‌اند

$$E_R = \frac{E_L}{r_0} \sum_{j=1}^{N/2} \left\{ \int_{[-(2j-1)a-b]/2}^{[-(2j-1)a+b]/2} e^{isk \sin \theta} ds + \int_{[(2j-1)a-b]/2}^{[(2j-1)a+b]/2} e^{isk \sin \theta} ds \right\} \quad (31-16)$$

به‌ازای هر z ، یک جفت شکاف که به‌طور متقارن بالای مبدأ (انتگرال اول) و زیر مبدأ (انتگرال دوم) قرار دارند در انتگرال‌گیری وارد می‌شوند. به‌عنوان مثال، وقتی $z = 1$ معادله ۱۶-۳۱ به معادله ۱۶-۲۳ برای مورد شکاف دوگانه تبدیل می‌شود. وقتی $z = 2$ ، دو شکاف بعدی که لبه‌های آنها در $(-3a-b)/2$ و $(-3a+b)/2$ زیر مبدأ و $(3a-b)/2$ و $(3a+b)/2$ بالای مبدأ واقع‌اند منظور می‌شوند.^۱ وقتی $z = N/2$ ، تمام شکافها به حساب آورده می‌شوند.

ابتدا به عبارت داخل آکولاد که آن را با I نشان می‌دهیم می‌پردازیم. پس از انتگرال‌گیری و

۱. این رابطه برای N ‌های زوج مناسب است. اگر N بزرگ باشد زوج بودن آن اهمیتی ندارد. اما برای N ‌های کوچک، می‌توانیم مبدأ را در مرکز شکاف مرکزی بگیریم. این رهیافت را در مسائل گنجانده‌ایم.

جاگذاری حدود، به دست می آوریم

$$I = \frac{1}{ik \sin \theta} \{ e^{-ik \sin \theta [(2j-1)a-b]/2} - e^{-ik \sin \theta [(2j-1)a+b]/2} \} \\ + \frac{1}{ik \sin \theta} \{ e^{ik \sin \theta [(2j-1)a+b]/2} - e^{ik \sin \theta [(2j-1)a-b]/2} \}$$

با استفاده از معادله های ۲۴-۱۶ و ۲۵-۱۶ برای α و β ، داریم

$$I = \frac{b}{2i\beta} [e^{-i(2j-1)\alpha}(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{i(2j-1)\alpha}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})]$$

که با توجه به معادله اولر به صورت زیر در می آید

$$I = \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta) \{ 2 \cos[(2j-1)\alpha] \}$$

یا

$$I = 2b \frac{\sin \beta}{\beta} \operatorname{Re} [e^{i(2j-1)\alpha}]$$

که در آن کسینوس را به صورت قسمت حقیقی نمایی مربوط نوشته ایم. با توجه به معادله ۳۱-۱۶، اکنون باید مجموع زیر را محاسبه کنیم

$$S = 2b \frac{\sin \beta}{\beta} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N/2} e^{i(2j-1)\alpha}$$

که آن را به صورت گسترده می نویسیم:

$$S = 2b \frac{\sin \beta}{\beta} \operatorname{Re} [e^{i\alpha} + e^{i3\alpha} + e^{i5\alpha} + \dots + e^{i(N-1)\alpha}]$$

رشته داخل کروشه یک تصاعد هندسی با جمله اول $a \equiv e^{i\alpha}$ و قدرنسبت $r \equiv e^{i\alpha}$ و تعداد جمله های $n \equiv N/2$ است، و مجموع آن برابر است با

$$a \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) = e^{i\alpha} \left[\frac{(e^{i\alpha})^{N/2} - 1}{e^{i\alpha} - 1} \right] = \frac{e^{iN\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}$$

این نتیجه با استفاده از معادلهٔ اوپلر به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{(\cos N\alpha - 1) + i \sin N\alpha}{2i \sin \alpha} = \frac{i(\cos N\alpha - 1) - \sin N\alpha}{-2 \sin \alpha}$$

که قسمت حقیقی آن $(\sin N\alpha)/(2 \sin \alpha)$ است. بنابراین،

$$S = b \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}$$

و برای معادلهٔ ۱۶-۳۱ داریم

$$E_R = \frac{E_L b}{r_0} \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}$$

از مجذور این دامنهٔ برآیند تابیدگی به دست می‌آید:

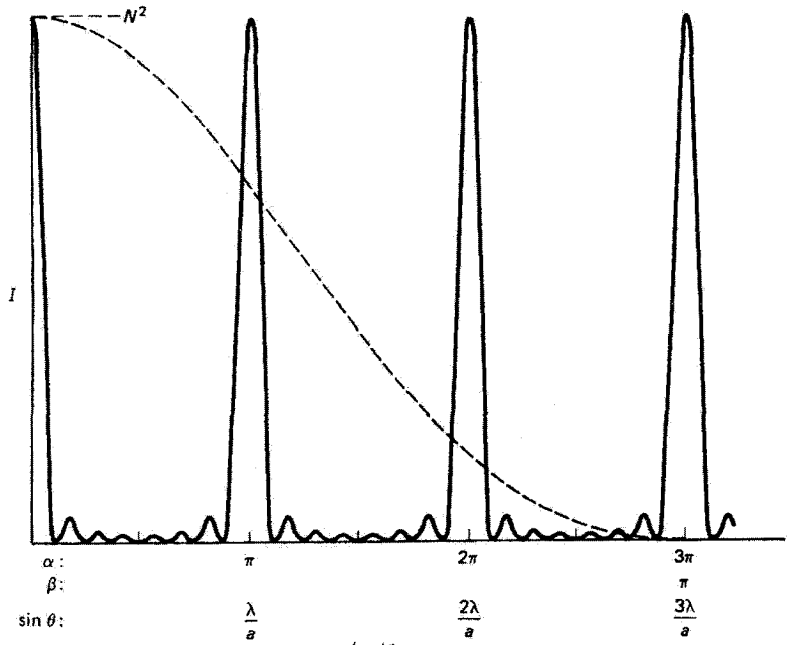
$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (۱۶-۳۲)$$

که در آن I_0 حاوی تمام ثابتها است.

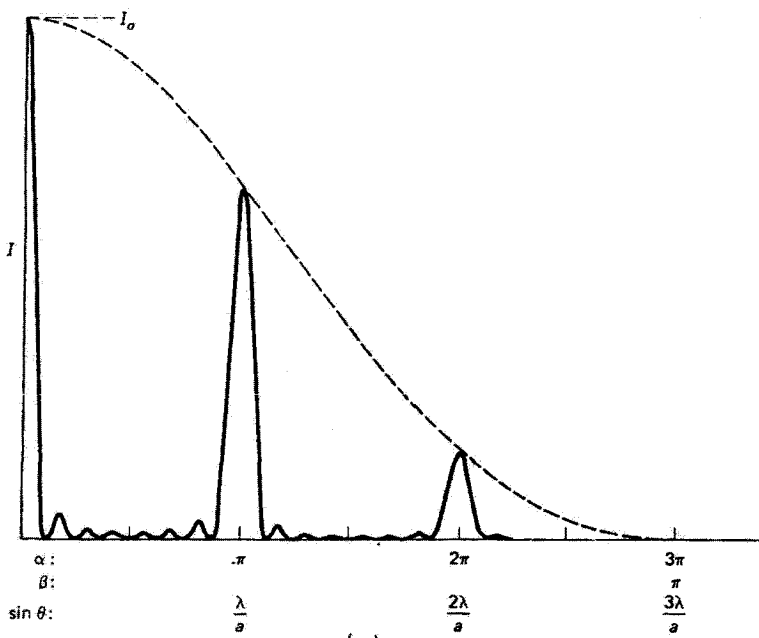
معادلهٔ ۱۶-۳۲ که در بالا برای تعداد زوج N شکاف محاسبه شد برای N های فرد نیز معتبر است (مسئلهٔ ۱۶-۱۹ را ببینید). وقتی $N = 1$ و $N = 2$ ، معادلهٔ ۱۶-۳۲ به نتایجی تبدیل می‌شود که قبلاً به ترتیب برای پراش تک شکاف و پراش شکاف دوگانه به دست آوردیم. قبلاً دیدیم که عامل برحسب β نمایشگر پوش پراش تابیدگی برآیند است. اکنون عامل $(\sin N\alpha / \sin \alpha)^2$ را که باید توصیف‌کنندهٔ تداخل بین شکافها باشد بررسی می‌کنیم. وقتی α مساوی صفر یا مضربی از π است، این عامل به صورت مبهم در می‌آید. می‌توان نشان داد که این عامل به ازای این مقادیر یک ماکسیمم است. در واقع، با استفاده از قاعدهٔ لوبیتال برای رفع ابهام، به ازای $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ داریم

$$\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{N \cos N\alpha}{\cos \alpha} = \pm N$$

و در نتیجه ماکسیممهای اصلی نقش تداخل متناسب با N^2 هستند. تابع تداخل برای $N = 8$ و α مثبت همراه با پوش پراش در شکل ۱۶-۱۴ الف و تابیدگی مربوط در شکل ۱۶-۱۴ ب ترسیم شده است. توجه کنید که ماکسیممهای اصلی با $N - 2$ ماکسیمم فرعی کوچک از هم جدا شده‌اند. وقتی α زیاد می‌شود، $N\alpha$ بیشتر از α مساوی مضرب درستی از π می‌شود، و در نتیجه



(الف)



(ب)

شکل ۱۴-۱۶ (الف) نمودار توابع تداخل (خط‌پرا) و پراش (خط‌چین) برای پراش فرانهوفر شکاف چندگانه وقتی $N = 8$ و $a = 3b$. (ب) تابع تابیدگی برای شکاف چندگانه (الف). تابیدگی با پوش پراش (خط‌چین) محدود می‌شود.

صورت عامل تداخل در مواردی که مخرج آن صفر نیست صفر می‌شود. این موارد به $N - 1$ مینیمم بین ماکسیممهای اصلی منجر می‌شوند. این وضعیت دقیقاً به صورت زیر توصیف می‌شود

$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ که در آنها } a \sin \theta = \frac{p\lambda}{N} \text{ یا } \alpha = \frac{p\pi}{N}$$

$$\text{ماکسیممهای اصلی به ازای } p = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \text{ روی می‌دهند} \quad (33-16)$$

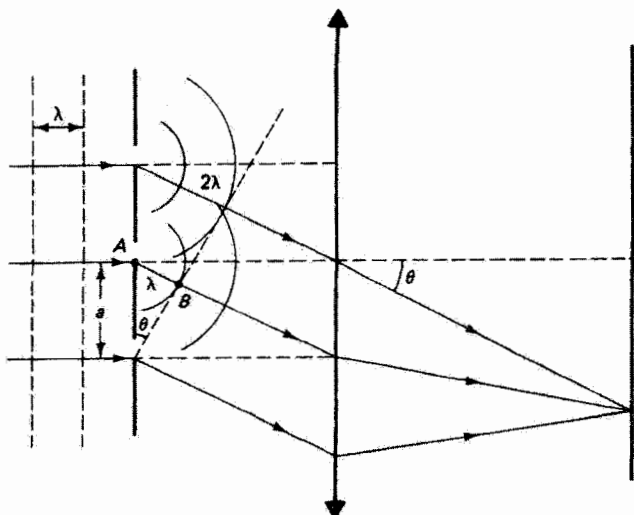
مینیممها به ازای تمام مقادیر دیگر p روی می‌دهند

اسبابی که در آن از پراش شکاف چندگانه استفاده می‌کنیم توری پراش نامیده می‌شود. اگر N بزرگ باشد، ماکسیممهای اصلی روشن، متمایز و فاصله‌دار هستند. بنابه معادله ۳۳-۱۶ با $p/N = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ برای این ماکسیممها، معادله توری پراش عبارت است از

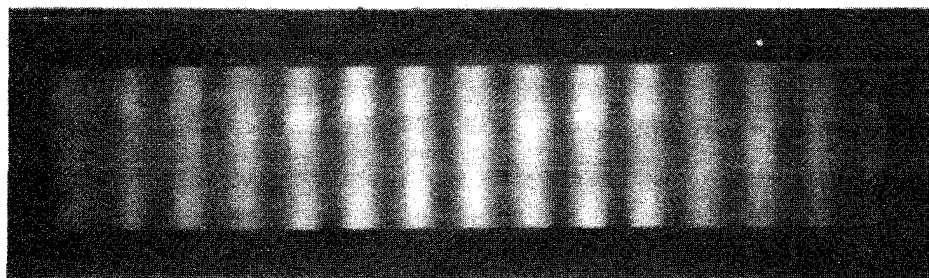
$$m\lambda = a \sin \theta \quad (34-16)$$

که در آن m را مرتبه پراش می‌نامند.

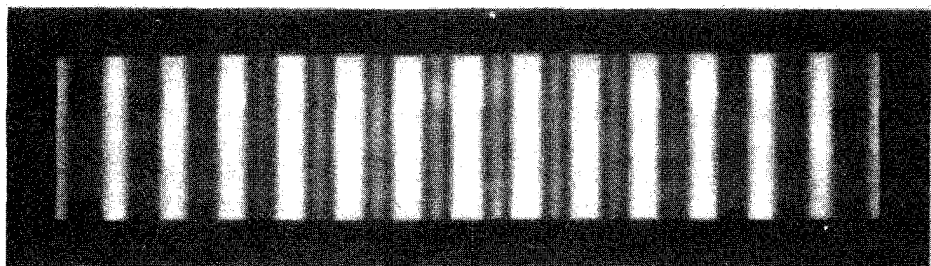
با بررسی شکل ۱۵-۱۶ می‌توان معادله ۳۴-۱۶ را بهتر درک کرد. در این شکل سه شکاف



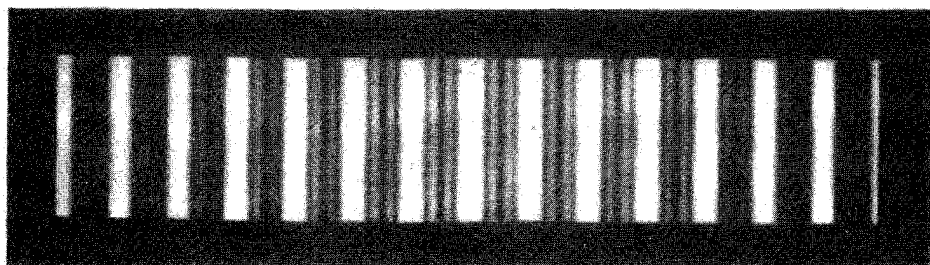
شکل ۱۵-۱۶ شکافهای نمونه یک توری که به آن نور تکفام موازی شده تابیده است. تشکیل ماکسیمم پراش مرتبه اول نشان داده شده است.



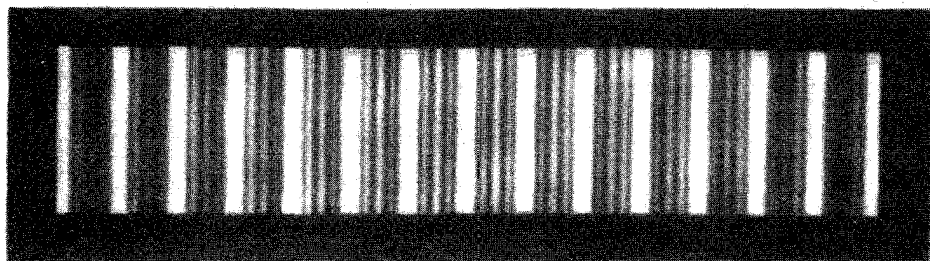
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱۶-۱۶ فریزهای پراش به ترتیب ناشی از دو، سه، چهار و پنج شکاف.

از یک توری به عنوان نمونه نشان داده شده‌اند که به آنها جبهه‌های موج تخت نور تکفام تابانده شده است. موجکهای خروجی از هر شکاف با انحراف زاویه‌ای θ نسبت به محور به شرطی همفاز به پرده می‌رسند که هر اختلاف راهی مانند $AB (= a \sin \theta)$ مساوی با تعداد درست m طول موج باشد. اگر $AB = m\lambda$ ، معادله توری ۱۶-۳۴ بلافاصله به دست می‌آید. وقتی تمام موجها همفاز وارد می‌شوند، نمودار فازور برآیند از جمع N فازور که همه در یک "راستا" هستند شکل می‌گیرد و یک برآیند ماکسیمم به دست می‌آید. در این نقاط ماکسیممهای اصلی شکل ۱۶-۱۴ الف ایجاد می‌شوند. ماکسیممهای فرعی به این علت به وجود می‌آیند که اختلاف فاز یکنواختی بین موجهای ناشی از شکافهای مجاور باعث می‌شود نمودار فازور با برآیند کوچکتری تاب بردارد. در هر یک از مینیممها، نمودار فازور یک شکل بسته تشکیل می‌دهد و در نتیجه خنثی‌سازی کامل می‌شود. اختلاف فاز بین موجهای ناشی از شکافهای مجاور و در راستای θ را می‌توان از شکل ۱۶-۱۴ الف، با توجه به اینکه زاویه α نمایشگر نصف اختلاف فاز بین شکافهای متوالی است، به دست آورد. بدین ترتیب، اولین ماکسیمم اصلی از مرکز، در $\alpha = \pi$ ، وقتی روی می‌دهد که اختلاف فاز بین موجهای متوالی دقیقاً 2π باشد.

عکسهای فریزهای پراش ناشی از ۲، ۳، ۴، ۵ و شکاف در شکل ۱۶-۱۶ نشان داده شده‌اند. بررسی این چهار عکس نشان می‌دهد که وقتی تعداد شکافها زیادتر می‌شود ماکسیممهای اصلی باریکتر می‌شوند و ماکسیممهای فرعی شروع به ظاهر شدن می‌کنند. به عنوان مثال، برای مورد ۵: $N = 5$ به $N - 2 = 3$ ماکسیمم فرعی بین ماکسیممهای اصلی توجه کنید. توری پراش با N های بسیار بزرگ را دوباره با تفصیل بیشتری در فصل بعد بررسی می‌کنیم.

مسائل

۱-۱۶ یک باریکه موازی شده نور سبز جیوه در 546.1 nm به طور عمودی به شکافی با پهنای 1.5 cm فرود می‌آید. یک عدسی با فاصله کانونی 60 cm پشت شکاف گذاشته شده است. نقش پراش روی پرده‌ای واقع در صفحه کانونی عدسی تشکیل می‌شود. فاصله بین
(الف) ماکسیمم مرکزی و اولین مینیمم و
(ب) مینیممهای اول و دوم را به دست آورید.

۲-۱۶ تابیدگی در مرکز ماکسیمم مرکزی پراش فرانهور ناشی از تک‌شکاف را با I_0 و تابیدگی در نقطه دیگری از این نقش را با I نشان می‌دهیم. نسبت I/I_0 را برای نقطه‌ای روی پرده که از یک لبه شکاف به اندازه $3/4$ طول موج دورتر از لبه دیگر است تعیین کنید.

۳-۱۶ می‌خواهیم پهنای یک شکاف مستطیلی را از روی نقش پراش آن که در فاصله ۲ m از شکاف تشکیل می‌شود به دست آوریم. یک باریکه لیزری موازی (۶۳۲٫۸ nm) را به طور عمودی به شکاف می‌تابانیم و فاصله بین مینیممهای سوم در دو طرف ماکسیم مرکزی را چند بار اندازه‌گیری می‌کنیم. میانگین نتایج ۵٫۶۲۵ cm است.

(الف) با فرض پراش فرانوفر، پهنای شکاف را تعیین کنید.

(ب) آیا فرض پراش میدان دور در این مورد موجه است؟ نسبت L/L_{\min} را به دست آورید.

۴-۱۶ در نگاه به نقش پراش میدان دور ناشی از تک‌شکافی که با استفاده از صافیهای جذب از یک چشمه طیف گسسته به آن نور تابانده شده است، معلوم می‌شود که مینیم چهارم نقش ناشی از طول موج ۶۲۰ nm دقیقاً بر مینیم پنجم یک مؤلفه طول موج دیگر منطبق است. این طول موج را تعیین کنید.

۵-۱۶ پهنای شکافهای مستطیلی را که در نقش پراش میدان دور آنها ماکسیم مرکزی به ترتیب دارای پهنای زاویه‌ای 30° ، 45° ، 90° و 180° است محاسبه کنید. طول موج را 55° بگیرید.

۶-۱۶ نقش پراش میدان دور تک‌شکافی با پهنای $2.125 \mu\text{m}$ را در نظر بگیرید که به آن باریکه نور موازی شده 55° به طور عمودی تابانده شده است.

(الف) شعاع زاویه‌ای قله مرکزی آن را و

(ب) نسبت I/I_0 را در نقاطی که با محور زاویه‌های $\theta = 5^\circ$ ، 10° ، 15° و 22.5° می‌سازند، به دست آورید.

۷-۱۶ رصد خانه لیک دارای یکی از بزرگترین تلسکوپها با قطر دهانه ۳۶ in و فاصله کانونی ۵۶ ft است. شعاعهای حلقه‌های روشن اول و دوم حول قرص ابری را در نقش پراش ستاره‌ای که روی صفحه کانونی شیشی تشکیل شده است به دست آورید. دو ماکسیم فرعی اول تابع $[J_1(\gamma)/\gamma]^2$ در $\gamma = 5.14$ و $\gamma = 8.42$ روی می‌دهند.

۸-۱۶ شیشی یک تلسکوپ دارای قطر ۱۲ cm و فاصله کانونی ۱۵ cm است. نوری با طول موج متوسط ۵۵۰ nm از یک ستاره دور به صورت باریکه تقریباً موازی وارد تلسکوپ می‌شود. شعاع قرص مرکزی نور تشکیل‌دهنده تصویر ستاره روی صفحه کانونی عدسی را محاسبه کنید.

۹-۱۶ فرض کنید یک لیزر گاز CO_2 باریکه محدود از پراشی در طول موج $10.6 \mu\text{m}$ با توان ۲ kW و قطر ۱ mm گسیل می‌کند به طوری که این باریکه لیزری، با چندمدی‌سازی، تابیدگی

اساساً یکنواختی در مقطع عرضی خود دارد. قطر تقریبی لکه‌ای را که روی سطح ماه، به فاصله 376000 km از این لیزر، ایجاد می‌شود با صرف نظر کردن از پراکندگی ناشی از جو زمین به دست آورید. تابیدگی در سطح ماه را حساب کنید.

۱۶-۱۰ فرض کنید یک باریکه لیزری (632.8 nm) به قطر 2 mm محدود از پراش است و در مقطع عرضی خود تابیدگی ثابتی دارد. بر اساس پهن شدگی ناشی از تنها پراش، باریکه چه مسافتی را باید طی کند تا قطر آن دو برابر شود؟

۱۶-۱۱ دو چراغ یک خودرو به فاصله 45 in از یکدیگر قرار دارند. برای انسانی که قطر مردمک شبانه او درست 5 mm است، این چراغها در چه فاصله‌ای در آستانه تفکیک پذیری دیده می‌شوند؟ طول موجی با میانگین 550 nm را در نظر بگیرید.

۱۶-۱۲ فرض کنید گستره تغییر مردمک در طی توافق برای چشم عادی از 2 تا 7 mm است. گستره فواصل متناظری را تعیین کنید که چشم عادی می‌تواند در آن جدایی اشیائی به فاصله 1 in از هم را تشخیص دهد.

۱۶-۱۳ یک نقش پراش شکاف دوگانه با استفاده از نور سبز جیوه (546.1 nm) تشکیل شده است. پهنای هر شکاف 100 mm است. ماکسیمهای تداخل مرتبه چهارم در این نقش حذف شده‌اند.

(الف) فاصله شکافها را تعیین کنید.

(ب) تابیدگی سه مرتبه اول فریزهای تداخل را نسبت به ماکسیم مرتبه صفرم به دست آورید.

۱۶-۱۴ (الف) نشان دهید تعداد فریزهای روشنی که در قله پراش مرکزی در نقش شکاف دوگانه فرانوفر دیده می‌شوند از $1 - 2(a/b)$ به دست می‌آید که در آن a/b نسبت جدایی شکاف به پهنای شکاف است.

(ب) اگر وقتی پهنای شکاف 30 mm است 13 فریز روشن در قله مرکزی پراش دیده شود، جدایی شکاف را تعیین کنید.

۱۶-۱۵ (الف) نشان دهید در نقش پراش فرانوفر شکاف دوگانه نسبت پهنای قله پراش مرکزی به پهنای فریز تداخل مرکزی $2a/b$ است که در آن a/b نسبت جدایی شکاف به پهنای شکاف است. توجه کنید که این نتیجه مستقل از طول موج است.

(ب) این نسبت قله به فریز را مخصوصاً وقتی $a = 10b$ به دست آورید.

۱۶-۱۶ تابیدگی نقش پراش حاصل از یک گشودگی سه شکافی را که در آن جدایی شکاف a سه برابر پهنای شکاف b است با انتگرالگیری محاسبه کنید. نمودار دقیقی از I برحسب $\sin \theta$ ترسیم کنید و ویژگیهای نقش را توضیح دهید. همچنین نشان دهید نتیجه‌ای که به دست آورده‌اید با نتیجه کلی برای N شکاف (معادله ۱۶-۳۲) سازگار است.

۱۶-۱۷ نموداری کیفی برای نقش تابیدگی از هفت شکاف هم فاصله که نسبت جدایی به پهنای آنها ۴ است ترسیم کنید. محور x را با مقادیر متناظر α و β مقیاس بندی کنید.

۱۶-۱۸ از یک گشودگی 1° شکافی که در آن جدایی شکاف a پنج برابر پهنای شکاف $b = 10^{-4}$ cm است برای تولید نقش پراش فرانهوفر با نور 435.8 nm استفاده شده است. تابیدگی ماکسیمهای تداخل اصلی از مرتبه اول، دوم، سوم، چهارم و پنجم را نسبت به فریز مرکزی مرتبه صفرم به دست آورید.

۱۶-۱۹ نشان دهید در آرایه‌ای از N شکاف که در آن N فرد است با گرفتن مبدأ مختصات در وسط شکاف مرکزی می‌توانیم به معادله ۱۶-۳۲ برسیم.

۱۶-۲۰ نور همدوسی با طول موج 546 nm را به یک گشودگی مستطیلی به عرض 100 mm در راستای محور x و طول 200 mm در راستای محور y می‌تابانیم. یک عدسی با فاصله کانونی 1 m نور پراشیده از گشودگی را قطع می‌کند و نقش پراش را روی پرده‌ای در صفحه کانونی خود می‌اندازد.

(الف) توزیع تابیدگی روی پرده را نزدیک مرکز نقش به صورت تابعی از x و y (برحسب mm) و I_0 (تابیدگی در مرکز نقش) به دست آورید.

(ب) اولین مینیمها در راستاهای x و y در چه فاصله‌ای از مرکز نقش قرار دارند؟

(ج) تابیدگی در فاصله 1 mm از مرکز نقش در راستاهای x و y را برحسب تابیدگی I_0 محاسبه کنید.

(د) تابیدگی را در نقطه $(x = 2, y = 3)$ mm تعیین کنید.

۱۶-۲۱ نیم پهنای زاویه‌ای (از ماکسیم مرکزی تا اولین مینیم) را برای باریکه پراشیده از شکافی با پهنای

(الف) λ

(ب) 5λ و

(ج) 10λ به دست آورید.

۱۶-۲۲ تابع بسل $J_1(x)$ به ازای x های بزرگ صورت بسته ای دارد که عبارت است از

$$J_1(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sqrt{\pi x}}$$

جدایی زاویه ای مینیممهای پراش را در نقاط دور از محور یک گشودگی دایره ای تعیین کنید.

۱۶-۲۳ دیدیم که ماکسیممهای فرعی در نقش پراش تک شکاف در نقاط وسط مینیممها واقع نمی شوند بلکه نزدیک به این نقاط هستند. با فرض اینکه آنها در وسط قرار دارند، (الف) نشان دهید قله فرعی m ام با رابطه تقریبی زیر داده می شود

$$I_m \cong I_0 \frac{1}{\left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2}$$

(ب) درصد خطای وارد در این تقریب را برای اولین سه ماکسیمم فرعی محاسبه کنید.

۱۶-۲۴ سه آنتن فرستنده با طول موج 1 km و در یک فاز کار می کنند. فاصله آنتنها از یکدیگر $2/3 \text{ km}$ است و هر آنتن در تمام راستاهای افقی به طور یکسان تابش می کند. به علت تداخل، "باریکه" فرستاده با مینیممهای تداخل محدود شده است. چند باریکه کاملاً معین فرستاده می شوند؟ نیم پهنای زاویه ای این باریکه ها را به دست آورید.

۱۶-۲۵ یک باریکه نور موازی شده به طور عمودی به سه شکاف یکسان بسیار باریک فرود می آید. تابیدگی را در مرکز نقشی که روی پرده می افتد با I_{\max} نشان می دهیم.

(الف) اگر تابیدگی I_P در نقطه ای مانند P روی پرده صفر باشد، اختلاف فاز بین نور وارد به P از شکافهای مجاور را تعیین کنید.

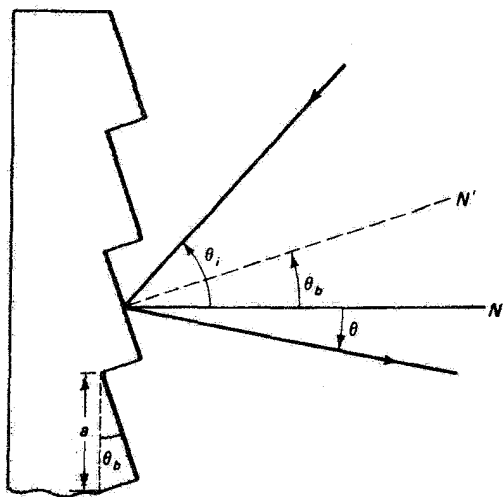
(ب) اگر اختلاف فاز بین امواج نور وارد به P از شکافهای مجاور π باشد، نسبت I_P/I_{\max} را به دست آورید.

(ج) I_P/I_{\max} را در اولین ماکسیمم اصلی محاسبه کنید.

(د) اگر تابیدگی متوسط در تمام پرده I_{av} باشد، نسبت I_P/I_{av} را در ماکسیمم مرکزی به دست آورید.

۱۶-۲۶ نمودارهای فازور نمایشگر ماکسیممهای اصلی و نقاط تابیدگی صفر را برای یک گشودگی چهارشکافی ترسیم کنید.

- [1] Ball, C. J. *An Introduction to the Theory of Diffraction*. New York: Pergamon Press 1971.
- [2] Born, Max, and Emil Wolf. *Principles of Optics*, 5th ed. New York: Pergamon Press 1975. Ch. 8.
- [3] Longhurst, R. S. *Geometrical and Physical Optics*, 2d ed. New York: John Wiley and Sons, 1967. Ch. 10, 11.
- [4] Goodman, Joseph W. *Introduction to Fourier Optics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968. Ch. 3.



۱۷

توری پراش

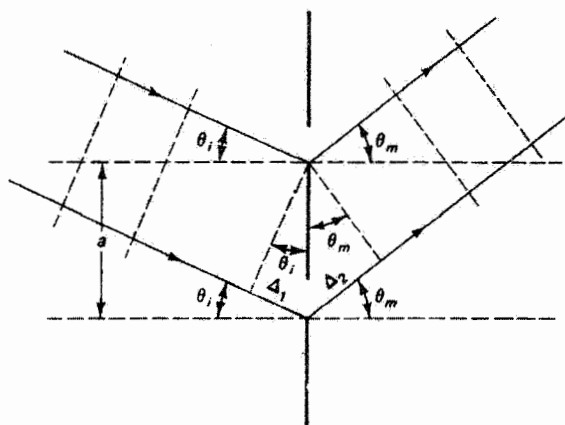
مقدمه

بحث فصل قبل را در اینجا به روشی صوری درباره پراش ناشی از تعداد زیادی شکاف یا گشودگی ادامه می‌دهیم. ابتدا معادله توری پراش را برای بررسی باریکه‌های نور فرودی به توری در زاویه اختیاری تعمیم می‌دهیم. سپس در بحثهای مربوط به گستره طیفی، پاشندگی، تفکیک، و فرور توری پارامترهایی را که از لحاظ عملی اهمیت دارند تعیین می‌کنیم. در پایان، به بحث مختصری درباره توریهای تداخلی و انواع رسمی طیفنگارهای توری می‌پردازیم.

۱۷-۱ معادله توری

اسباهای چندشکافی دوره‌ای را که برای استفاده از حساسیت نقش پراش آنها به طول موج فرودی طراحی می‌شوند توری پراش می‌نامند. معادله توری را که در فصل ۱۶ به دست آوردیم می‌توان به موردی تعمیم داد که جبهه‌های موج تخت نور فرودی با صفحه توری، همچون در شکل ۱۷-۱، زاویه اختیاری می‌سازند. در این مورد، اختلاف راه کل برای امواج ناشی از شکافهای متوالی برابر است با

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = a \sin \theta_i + a \sin \theta_m \quad (1-17)$$

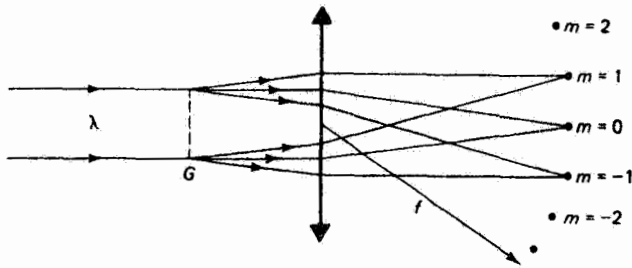


شکل ۱۷-۱ دو شکاف مجاور در یک توری که به آن نور فرودی در زاویه θ_i نسبت به عمود بر توری تابانده شده است. برای نور پراشیده در راستای θ_m ، اختلاف راه کل ناشی از دو شکاف $\Delta_1 + \Delta_2$ است.

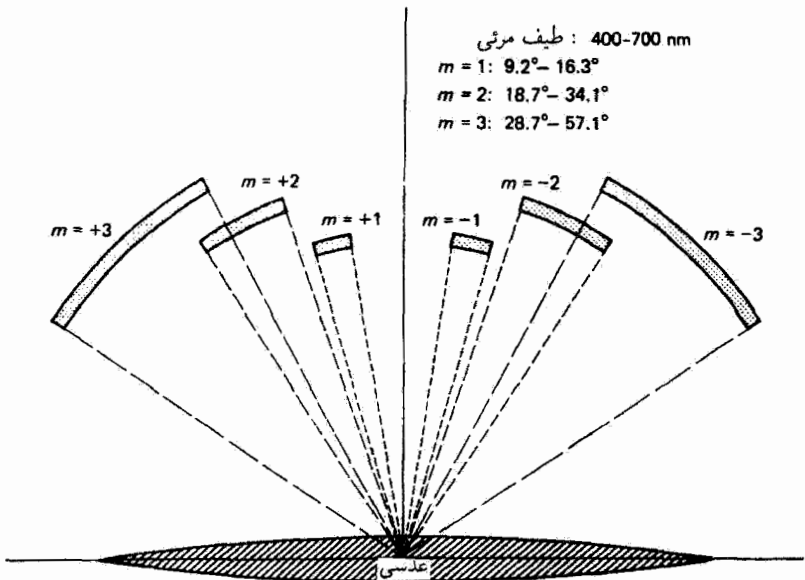
که در آن a جدایی شکاف است، و θ_i و θ_m به ترتیب زاویه‌هایی هستند که پرتوهای فرودی و پراشیده با عمود بر صفحه توری می‌سازند. دو جمله سینوسی در اختلاف راه ۱۷-۱ بسته به راستای نور پراشیده θ_m ممکن است با هم جمع یا از هم کم شوند. برای اینکه معادله ۱۷-۱ برای تمام زاویه‌های پراش درست باشد، باید یک قرارداد علامت برای زاویه وضع کنیم. وقتی پرتوهای فرودی و پراشیده در یک سمت عمود واقع‌اند، همچون در شکل ۱۷-۱، θ_m را مثبت می‌گیریم. پرتوهای پراشیده اگر نسبت به عمود در سمت مقابل پرتوهای فرودی قرار داشته باشند، θ_m را منفی می‌گیریم. در مورد اخیر، چنانکه از تغییر مناسبی در شکل ۱۷-۱ معلوم می‌شود، اختلاف راه کل برای امواج ناشی از شکافهای متوالی تقاضای $\Delta_1 - \Delta_2$ است. در هر دو مورد، وقتی $\Delta = m\lambda$ ، تمام امواج پراشیده همفاز هستند و معادله توری عبارت است از

$$a(\sin \theta_i + \sin \theta_m) = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-17)$$

وقتی متمایز کردن زاویه‌ها ضرورت ندارد، شاخص پایین زاویه پراش θ_m را غالباً حذف می‌کنیم. به ازای هر مقدار m ، تابش تکفام با طول موج λ به علت خواص پراش زای توری تقویت می‌شود. بنابه معادله ۱۷-۲، مرتبه صفرم تداخل، $m = 0$ ، برای تمام λ ها در $\theta_i = -\theta_m$ روی می‌دهد. بدین ترتیب، تمام طول موجها در قله مرکزی یا مرتبه صفرم نقش پراش مشاهده می‌شوند. مرتبه‌های بالاتر — هم مثبت و هم منفی — خطهای طیفی واقع در دو طرف مرتبه صفرم ایجاد می‌کنند. برای یک راستای ثابت فرود θ_i ، راستای θ_m مربوط به هر یک از ماکسیمهای اصلی با طول موج تغییر می‌کند. بنابراین، برای مرتبه‌های $m \neq 0$ ، توری طول موجهای مختلف موجود در باریکه نور فرودی را از هم جدا می‌کند. این



(الف)



(ب)

شکل ۱۷-۲ (الف) تشکیل مرتبه‌های ماکسیممهای اصلی برای نور تکفام با فرود عمودی به توری G . توری می‌تواند جانشین منشور در طیف‌نما شود. تصاویر میزان شده همان شکل شکاف موازی‌کننده را (که نشان داده نشده است) دارند. (ب) پهنای زاویه‌ای سه مرتبه اول طیف مرئی برای توری پراشی با 40° شیار در میلیمتر. مرتبه‌ها برای وضوح در فواصل مختلف از عدسی نشان داده شده‌اند. در هر مرتبه، کناره سرخ طیف مرئی بیشترین انحراف را پیدا می‌کند. این شکل مربوط به فرود عمودی است.

ویژگی علت استفاده از توری را در تجزیه طیفی و اندازه‌گیری طول موج توضیح می‌دهد. توری به عنوان یک ابزار پراشنده به چند دلیل نسبت به منشور برتری دارد. شکل ۱۷-۲ الف تشکیل مرتبه‌های طیفی پراش را برای نور تکفام نشان می‌دهد. در شکل ۱۷-۲ ب پهنای زاویه‌ای طیف پیوسته نور مرئی برای یک

توری معین نشان داده شده است. توجه کنید که مرتبه‌های دوم و سوم در این مورد همپوشی جزئی دارند. برای تعیین طول موج خطوط طیفی در ناحیه مشترک، باید ابتدا مرتبه واقعی این خطوط را معلوم کنیم تا بتوانیم مقدار مناسب m را در معادله ۱۷-۲ به کار ببریم. برخلاف منشور، توری انحراف بیشتری از نقطه مرتبه صفرم برای طول موجهای بزرگتر ایجاد می‌کند. بنابراین، وقتی طیف به صورت ساده نیست، ابهام مربوط به همپوشی را غالباً از طریق آزمایش با استفاده از یک صافی برای حذف مثلاً طول موجهای کوچکتر در نور فرودی رفع می‌کنند. از این راه گستره طیفی نور فرودی را با صاف کردن آنقدر محدود می‌کنند تا همپوشی از بین برود و بتوان مرتبه خطوط را به طور صحیح تعیین کرد. گاهی نیز بهتر است گستره طول موجهایی که توری دریافت می‌کند ابتدا با اسبابی که پاشندگی کمتری دارد محدود شود.

۱۷-۲ گستره طیفی آزاد توری

گستره طول موجهای ناهمپوش در یک مرتبه خاص را گستره طیفی آزاد F می‌نامند. همپوشی به این علت روی می‌دهد که در معادله توری حاصلضرب $a \sin \theta$ می‌تواند مساوی با چند ترکیب ممکن $m\lambda$ برای نوری باشد که به دستگاه اپتیکی فرود می‌آید و توسط آن پردازش می‌شود. به عنوان مثال، در مکان مربوط به λ در مرتبه اول ممکن است خط طیفی مربوط به $\lambda/2$ در مرتبه دوم، خط طیفی مربوط به $\lambda/3$ در مرتبه سوم، و غیره واقع شوند. گستره طیفی آزاد در مرتبه m را می‌توان با استدلال زیر تعیین کرد. اگر λ_1 کوچکترین طول موج قابل آشکارسازی در نور فرودی باشد، بزرگترین طول موج ناهمپوش λ_2 در مرتبه m بر ابتدای طیف مربوط به مرتبه بعدی برای λ_1 منطبق است، یا

$$m\lambda_2 = (m + 1)\lambda_1$$

بنابراین، گستره طیفی آزاد برای مرتبه m با رابطه زیر داده می‌شود

$$F = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{m} \quad (3-17)$$

توجه کنید که این ناحیه طیفی ناهمپوش برای مرتبه‌های بالاتر کوچکتر است.

مثال

اگر کوچکترین طول موج موجود در نور یک چشمه معین 400 nm باشد، گستره طیفی آزاد را در سه مرتبه اول پراش توری به دست آورید.

حل: با توجه به معادله ۱۷-۳ داریم

$$F_m = \frac{\lambda_1}{m}$$

بنابراین،

$$F_1 = \frac{400}{1} = 400 \text{ nm} \quad (\text{از } 400 \text{ nm تا } 800 \text{ nm در مرتبه اول})$$

$$F_2 = \frac{400}{2} = 200 \text{ nm} \quad (\text{از } 400 \text{ nm تا } 600 \text{ nm در مرتبه دوم})$$

$$\blacktriangle F_3 = \frac{400}{3} = 133 \text{ nm} \quad (\text{از } 400 \text{ nm تا } 533 \text{ nm در مرتبه سوم})$$

۱۷-۳ پاشیدگی توری

چنانکه در شکل ۱۶-۱۴ دیده می‌شود، مرتبه‌های بالاتر پراش هر چه در قسمتهای کوتاه‌تر پوش محدودکننده پراش واقع شوند شدتشان کمتر می‌شود. از طرف دیگر، شکل ۱۷-۲ ب به‌وضوح نشان می‌دهد هر چه مرتبه پراش زیادتر شود طول موجها بهتر از هم جدا می‌شوند. این ویژگی به‌طور دقیق با پاشیدگی زاویه‌ای \mathcal{D} که تعریف آن به‌صورت زیر است توصیف می‌شود

$$\mathcal{D} \equiv \frac{d\theta_m}{d\lambda} \quad (4-17)$$

که جدایی زاویه‌ای درگستره واحد طول موج را به‌دست می‌دهد. تغییر θ_m با λ را معادله توری ۱۷-۲ بیان می‌کند، که از آن به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{D} = \frac{m}{a \cos \theta_m} \quad (5-17)$$

اگر برای ثبت طیف از یک فیلم عکاسی در صفحه کانونی عدسی استفاده شود، بهتر است پهن‌شدگی طول موجها روی این فیلم را برحسب پاشیدگی خطی $dy/d\lambda$ توصیف کنیم که در آن y در راستای فیلم است. چون $dy = f d\theta$ ، پاشیدگی خطی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\text{پاشیدگی خطی} \equiv \frac{dy}{d\lambda} = f \frac{d\theta_m}{d\lambda} = f \mathcal{D} \quad (6-17)$$

معکوس پاشیدگی خطی را ضریب فیلم می‌نامند.

نوری با طول موج 500 nm به طور عمودی به یک توری با 5000 شیار در سانتیمتر فرود می آید. اگر فاصله کانونی عدسی به کار رفته 5 m باشد، پاشیدگی زاویه ای و خطی را در مرتبه اول به دست آورید.

حل: ثابت توری یا جدایی شیار a برابر است با

$$a = \frac{1}{5000 \text{ cm}^{-1}} = 2 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

واضح است که برای مرتبه صفرم پاشیدگی نداریم. برای مرتبه اول، باید در معادله $5-17$ زاویه یراش θ_1 را که از معادله توری $2-17$ به ازای $m = 1$ به دست می آید قرار دهیم:

$$\sin \theta_1 = \frac{(1)\lambda}{a} = \frac{500 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-4}} = 0.25$$

بنابراین، $\theta_1 = 14.5^\circ$ و $\cos \theta_1 = 0.968$.

اکنون می توانیم پاشیدگی زاویه ای را در ناحیه طول موج حدود 500 nm محاسبه کنیم:

$$\mathcal{D} = \frac{m}{a \cos \theta_m} = \frac{1}{(2 \times 10^{-4} \text{ cm})(0.968)} = 5164 \text{ rad/cm}$$

یا

$$\mathcal{D} = 5164 \times 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{nm}} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 0.296^\circ/\text{nm}$$

پاشیدگی خطی از رابطه زیر به دست می آید

$$f\mathcal{D} = (500 \text{ mm})(5164 \times 10^{-2} \text{ rad/nm}) = 0.258 \text{ mm/nm}$$

و ضریب فیلم برابر است با $3.87 \text{ nm/mm} = 1/0.258$. یک میلیمتر از فیلم تقریباً گستره 4 nm یا 40 \AA را در خود جای می دهد.

در فرود عمودی، می توان معادله توری را با رابطه پاشیدگی زاویه ای ترکیب کرد و در نتیجه

$$\mathcal{D} = \frac{m}{a \cos \theta} = \left(\frac{a \sin \theta}{\lambda} \right) \left(\frac{1}{a \cos \theta} \right)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\tan \theta}{\lambda} \quad (۷-۱۷)$$

بدین ترتیب، پاشیدگی واقعاً مستقل از ثابت توری در یک زاویه معین پراش است و با θ سریعاً افزایش می‌یابد. در یک زاویه معین پراش، اثر افزایش ثابت توری، چنانکه معادله ۵-۱۷ به وضوح نشان می‌دهد، زیاد شدن مرتبه پراش در آن زاویه است.

۴-۱۷ تفکیک توری

پاشیدگی افزایش‌یافته یا پهن‌شدگی طول‌موجها به‌خودی خود نمی‌تواند طول‌موجهای مجاور را متمایزتر نشان دهد مگر اینکه خود قله‌ها به اندازه کافی تیز باشند. این خاصیت را تفکیک طیف ثبت شده می‌نامند. منظور از تفکیک توری توانایی آن در تولید قله‌های متمایز برای طول‌موجهای نزدیک به هم در یک مرتبه خاص است. یادآوری می‌کنیم توان تفکیک \mathcal{R} به‌طور کلی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} \quad (۸-۱۷)$$

که در آن $(\Delta\lambda)_{\min}$ بازه طول‌موج مینیمم برای دو مؤلفه طیفی است که بنابه معیار ریلی در آستانه تفکیک‌پذیری قرار دارند (شکل ۹-۱۶). برای نور با فرود عمودی و با طول‌موج $\lambda + d\lambda$ ، و ماکسیمم اصلی مرتبه m ، از معادله توری ۲-۱۷ داریم

$$a \sin \theta = m(\lambda + d\lambda) \quad (۹-۱۷)$$

اگر بخواهیم معیار ریلی برآورده شود، این قله باید (در یک θ) با اولین مینیمم مربوط به قله طول‌موج مجاور در همین مرتبه منطبق باشد، یا چنانکه می‌توان هم از شکل ۹-۱۶ الف و هم از معادله ۳۳-۱۶ نتیجه گرفت باید

$$a \sin \theta = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda \quad (۱۰-۱۷)$$

با مساوی قرار دادن طرفهای راست معادله‌های ۹-۱۷ و ۱۰-۱۷، به دست می‌آوریم $\lambda/d\lambda = mN$. چون $d\lambda$ در اینجا کمترین اختلاف طول‌موج تفکیک‌پذیر است، توان تفکیک توری بنابه معادله ۸-۱۷

$$\mathcal{R} = mN \quad (۱۱-۱۷)$$

برای توری N شیاری، توان تفکیک صرفاً متناسب با مرتبه پراش است. در یک مرتبه معین پراش، این توان تفکیک با تعداد کل شیارها افزایش می‌یابد. باید توجه کرد که اگر بخواهیم N را در عرض معینی برای توری مانند W زیادتر کنیم، شیارها به همان نسبت به هم نزدیکتر می‌شوند. برای به دست آوردن بیشترین تفکیک، باید نور تمام عرض شیاردار توری را در بر بگیرد. اگر عرض توری مثال قبل، با 5000 شیار در سانتیمتر، 8 cm باشد آنگاه $N = 40000$ و توان تفکیک در مرتبه اول 40000 است. در نتیجه، بنابه معادله ۱۷-۸، در ناحیه $\lambda = 500$ nm، مؤلفه‌های طیفی با نزدیکی 125 nm $^\circ$ را می‌توان تفکیک کرد. برای مرتبه دوم، این رقم به مقدار بهتر 63 nm $^\circ$ می‌رسد، و غیره. بهترین مقادیر برای توان تفکیک توری در گستره 10^5 تا 10^6 هستند. (در بررسی تفکیک نظری، باید توجه داشت که معیار ریلی تا اندازه‌ای اختیاری است و پهنای خط طیفی نیز در تفکیک واقعی وارد می‌شود.) یک توری با 10000 شیار در سانتیمتر و به عرض 2 cm، توان تفکیک 1 میلیون را در مرتبه پنجم فراهم می‌کند. اما برای نور با فرود عمودی، معادله توری تحت این شرایط طول موج ماکسیمم را (در $\theta = 90^\circ$) به 200 nm محدود می‌کند. اگر نور فرودی در راستای عمود نباشد، طول موج ماکسیمم پراشپذیر می‌تواند افزایش یابد، به طوری که در $\theta_i = 90^\circ$ دو برابر مقدار قبل یعنی 400 nm است. کار در مرتبه‌های بالاتر باعث می‌شود نور قابل دسترسی به علت قید پوش پراش به طور جدی محدود شود، مگر اینکه وسایلی برای تغییر راستای قله پراش مرکزی به مرتبه مورد نظر به کار برده شوند. این منظور از طریق فروزش، که از آن بحث خواهیم کرد، تحقق می‌یابد. توجه کنید که توان تفکیک، مانند پاشیدگی، مستقل از جدایی شیار برای یک زاویه معین پراش است. اگر بنویسیم $N = W/a$ ، که در آن W عرض شیاردار توری است، و از معادله توری برای فرود عمودی استفاده کنیم، معادله ۱۷-۱۱ به صورت زیر در می‌آید

$$\mathcal{R} = mN = \left(\frac{a \sin \theta_m}{\lambda} \right) \frac{W}{a}$$

یا

$$\mathcal{R} = \frac{W \sin \theta_m}{\lambda} \quad (۱۲-۱۷)$$

با توجه به معادله ۱۷-۱۲، تفکیک توری در زاویه پراش θ_m بستگی به عرض توری دارد و از تعداد شیارها مستقل است. اما برای یک نسبت ثابت $(\sin \theta_m)/\lambda$ ، نسبت m/a نیز بنابه معادله توری

ثابت است. بدین ترتیب، استفاده از یک توری با شیارهای کمتر و ثابت توری بزرگتر ایجاب می‌کند در یک مرتبه بالاتر m کارکنیم که در آن پیچیدگی ناشی از همپوشی مرتبه‌ها بیشتر است. اغتشاش در مرتبه‌های بالاتر را گاهی با استفاده از یک ابزار پراشده دوم که طیف اول را در راستای عمود بر راستای اول مجدداً پخش می‌کند کاهش می‌دهند. یکی از این نوع ابزارها را بعداً در این فصل توصیف می‌کنیم.

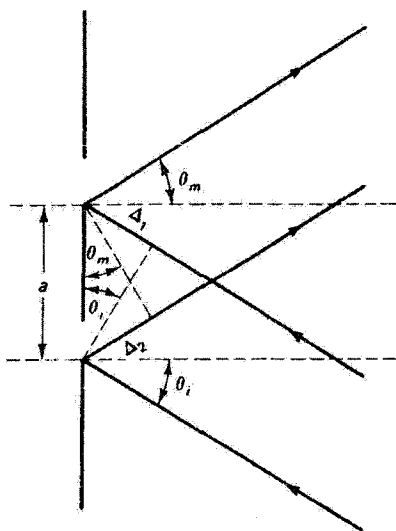
۵-۱۷ انواع توریها

تا اینجا توری پراش را جدار کدری در نظر گرفته‌ایم که در آن شکافهایی با فاصله کم ایجاد شده‌اند. واقعیت این است که توریهای اصلی فرانهوفر عبارت بودند از سیمهای باریکی که بین گامهای کم فاصله دو پیچ موازی پیچیده شده بودند یا خطهای موازی که روی شیشه دودآلوده کشیده شده بودند. بعداً استرانگ از پوششهای فلزی روی پایه شیشه‌ای که شیاردار شده بودند استفاده کرد. امروزه معمولاً توری اصل را با شیار انداختن با نوک الماس روی پایه شیشه‌ای کم‌انبساط یا روی لایه‌ای از آلومینیم یا طلا که با تبخیر در خلأ روی پایه شیشه‌ای نشانداده شده است می‌سازند. خود پایه، یا حامل، باید ابتدا تا کمتر از $\lambda/10$ برای نور سبز صیقلی شود. ساختن ماشینهای شیاری که می‌توانند تا 360° شیار در هر میلیمتر در گستره‌ای به عرض 10 in یا بیشتر با عمق، شکل و فاصله یکنواخت حک کنند دستاورد تکنولوژی کارآمد و پیشرفته است. در جدیدترین ماشینهای شیاری از فوننی شامل کنترل خودکار الکترونیکی و تداخل سنجی برای افزایش دقت آنها استفاده می‌شود. ساخت توریهای اصل با کیفیت عالی که در پهنه‌هایی به بزرگی 46 cm یا بیشتر شیاردار شده‌اند میسر شده است.

توریها از لحاظ نوع کار به دو صورت توری عبوری و توری بازتابی ساخته می‌شوند. در توری عبوری، نور از قسمتهای صاف پایه شیشه‌ای که روی آن شیارهای ایجاد شده همچون مراکز پراکندگی عمل می‌کنند عبور می‌کند، یا نور از تمام ناحیه شیار شده عبور می‌کند اما به علت تغییر ضخامت اپتیکی شیارها تأخیر فاز دوره‌ای پیدا می‌کند. در مورد اول، توری را توری عبوری دامنه‌ای می‌نامند که مانند یک جدار کدر شکافدار عمل می‌کند؛ در مورد دوم، توری را توری عبوری فازی می‌نامند. در توری بازتابی، سطوح شیارها را کاملاً بازتابنده می‌کنند، و بازتاب دوره‌ای نور فرودی مانند عبور دوره‌ای امواج از توری عبوری عمل می‌کند. توریهای پژوهشی معمولاً از نوع بازتابی هستند. قسمتی از یک توری بازتابی تخت در شکل ۱۷-۳ نشان داده شده است. اختلاف راه بین پرتوهای بازتابیده معادل از شیارهای بازتابنده متوالی برابر است با

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = a \sin \theta_i - a \sin \theta_m$$

که در آن فرض شده است هر دو پرتو پس از پراش دارای راستایی هستند که با زاویه θ_m مشخص



شکل ۱۷-۳ شیارهای مجاور در توری بازتابی که نور فرودی در زاویه θ_i نسبت به عمود بر توری به آن تابانده می‌شود. برای نور پراکنده در راستای θ_m اختلاف راه کل دو موج $\Delta_1 - \Delta_2$ است.

می‌شود. وقتی $\Delta = m\lambda$ ، یک ماکسیم اصلی تداخل ایجاد می‌شود، و در نتیجه معادله توری بازتابی همان معادله توری عبوری است:

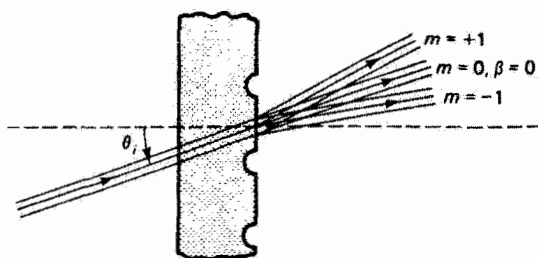
$$m\lambda = a(\sin \theta_i + \sin \theta_m)$$

برای زاویه‌های θ_m و θ_i نیز همان قرارداد علامت سابق به‌کار می‌رود: وقتی θ_m ، همچون در شکل ۱۷-۳، نسبت به عمود در طرف مقابل θ_i است آن را منفی می‌گیریم. مرتبه صفرم تداخل وقتی روی می‌دهد که $m = 0$ یا $\theta_m = -\theta_i$ ، یعنی در راستای بازتاب آینه‌ای از توری که همچون آینه برای تمام طول موجها عمل می‌کند واقع می‌شود. پوشش فلزی توری بازتابی باید تا حد امکان بازتابنده باشد. در گستره فرابنفش 110° تا 160° nm به‌طور کلی از پوششهای فلزات فلزات منیزیم یا فلزات لیتیم روی آلومینیم برای تقویت بازتابندگی استفاده می‌شود، و پایینتر از 100° nm غالباً از طلا و پلاتین استفاده می‌شود. در ناحیه‌های فرورسرخ، پوششهای نقره و طلا هر دو مناسب‌اند. نور پراکنده از توری تخت را باید با عدسی یا آینه مقعر متمرکز کرد. وقتی جذب تابش توسط عناصر متمرکزکننده زیاد باشد، همچون در فرابنفش خلأ (حدود 1° تا 200° nm)، تمرکز و پراش را می‌توان با هم با استفاده از توری کاو، یعنی آینه مقعری که سطح بازتابنده آن را شیاردار کرده‌اند، انجام داد.

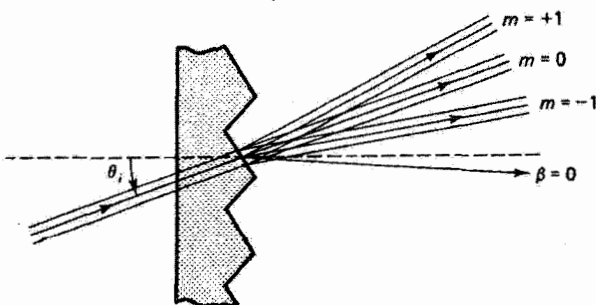
۱۷-۶ توری فروزیده

نسبت انرژی نور پراکنده به انرژی نور فرودی را برای یک ناحیه یکسان طول موج و یک مرتبه معین بازده مطلق توری در این ناحیه و مرتبه می نامند. افزایش تعداد شیارهای توری باعث افزایش انرژی نور خروجی می شود. ماکسیم اصلی پراش مرتبه صفرم، که برای آن پاشیدگی وجود ندارد، نمایشگر اتلاف انرژی نور است و بازده توری را کاهش می دهد. یادآوری می کنیم که مرتبه صفرم شدیدترین ماکسیم تداخل را در بر دارد زیرا بر ماکسیم پوش پراش تک شکاف منطبق است. فن شکل دهی به شیارهای انفرادی به طوری که ماکسیم پوش پراش به مرتبه دیگری منتقل شود فروزش توری نامیده می شود.

برای درک اثر فروزش، شکل ۱۷-۴ مربوط به توری عبوری و شکل ۱۷-۵ مربوط به توری بازتابی را در نظر بگیرید. برای سادگی، نور عبور کرده یا بازتابیده از یک شیار تنها نشان داده شده است، اگر چه چندین شیار به طور جمعی در پراش دخالت دارند. در هر یک از این شکلها، در (الف) وضعیت برای توری نافروزیده نشان داده شده است، و (ب) نتیجه شکل دادن به شیارها را برای جدایی ماکسیم پوش پراش ($\beta = 0$) از مرتبه صفرم تداخل ($m = 0$) یا ماکسیم اصلی

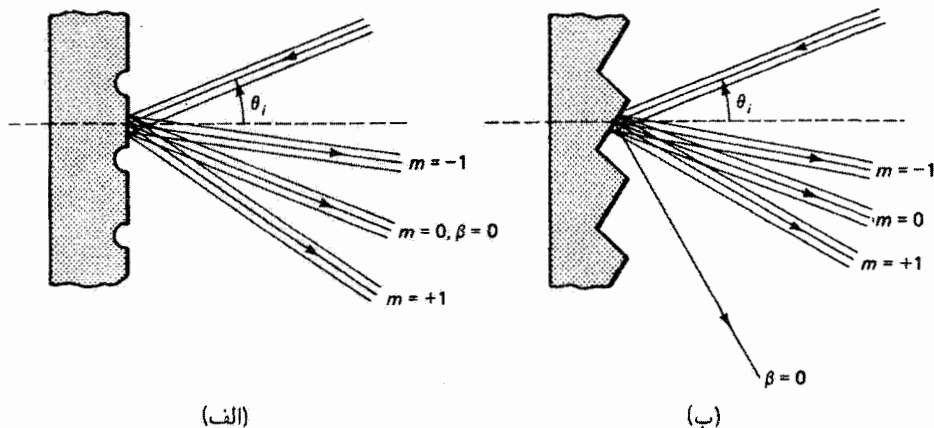


(الف)



(ب)

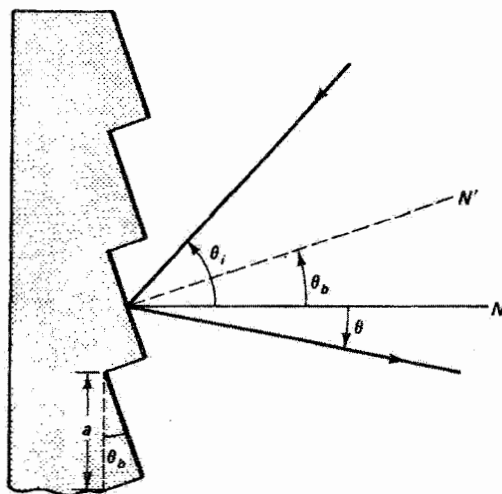
شکل ۱۷-۴ (الف) در توری عبوری نافروزیده، ماکسیم پوش پراش در $\beta = 0$ منطبق بر تداخل مرتبه صفرم در $m = 0$ است. (ب) در توری فروزیده، این دو از هم جدا شده اند.



شکل ۵-۱۷ (الف) در توری بازتابی نافروزیده، ماکسیمم پوش پراش در $\beta = 0^\circ$ بر تداخل مرتبه صفرم در $m = 0$ منطبق است. (ب) در توری فروزیده، این دو از هم جدا شده‌اند.

نشان می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که ماکسیمم پوش پراش جایی روی می‌دهد که $\beta = 0^\circ$ ، یعنی جایی که اختلاف راه میدان دور برای پرتوهای ناشی از مرکز و لبه هر شیار صفر است. اختلاف راه صفر برای این پرتوها وضعیت اپتیک هندسی را ایجاد می‌کند: برای نور عبور کرده (شکل ۴-۱۷) قله پراش در راستای باریکه بازتابیده آینه‌ای است. با ایجاد شیارهای منشورگونه (شکل ۴-۱۷) یا نصب سطوح آینه‌ای شیبدار (شکل ۵-۱۷) اختلاف راه صفر به ترتیب به راستاهای باریکه شکسته و باریکه بازتابیده جدید، که اکنون متناظر با مورد $\beta = 0^\circ$ هستند، منتقل می‌شود. در حالی که پوش پراش بدین ترتیب به علت شکل‌دهی شیارهای انفرادی منتقل می‌شود، ماکسیممهای تداخل در جای خود ثابت می‌مانند. مکان این ماکسیممها با معادله توری تعیین می‌شود که در آن زاویه‌ها نسبت به صفحه توری سنجیده می‌شود. در هر یک از شکل‌های ۴-۱۷ و ۵-۱۷، با رفتن از (الف) به (ب) نه صفحه توری تغییر می‌کند و نه جدایی شیار. نتیجه این است که ماکسیمم پراش اکنون به مکان یک ماکسیمم اصلی با مرتبه بالاتر ($|m| > 0$) منتقل شده است، و توری عمده انرژی نور را در راستایی می‌فرستد که از همه مفیدتر است.

در پایان، باید زاویه فروز مناسب را برای توری تعیین کنیم. توری بازتابی شکل ۶-۱۷ را در نظر بگیرید که در آن باریکه به وجه یک شیار در زاویه θ_i فرود می‌آید و در زاویه فعلی نامعین θ پراشیده می‌شود. هر دو زاویه نسبت به عمود N بر صفحه توری اندازه‌گیری می‌شوند. عمود N' بر وجه شیار با N زاویه θ_b می‌سازد. این زاویه زاویه فروز توری است. اکنون می‌خواهیم باریکه پراشیده هم در شرط بازتاب آینه‌ای از وجه شیار و هم در شرط مربوط به ماکسیمم اصلی در



شکل ۱۷-۶ رابطه زاویه فروز θ_b با باریکه‌های فرودی و پراشیده.

ام m ($\theta = \theta_m$) صدق کند. شرط اول از مساوی قرار دادن زاویه فروز با زاویه بازتاب نسبت به N' برقرار می‌شود: $\theta_i - \theta_b = \theta_m + \theta_b$ یا

$$\theta_b = \frac{\theta_i - \theta_m}{2} \quad (13-17)$$

شرط دوم این است که زاویه θ_m در معادله توری زیر صدق کند

$$m\lambda = a(\sin \theta_i + \sin \theta_m) \quad (14-17)$$

معادله ۱۳-۱۷ نشان می‌دهد زاویه فروز بستگی به زاویه فروز دارد، و در نتیجه زاویه‌های فروز مختلفی ناشی از هندسه‌های مختلفی امکانپذیر هستند. در مورد کلی، معادله‌ای که زاویه فروز باید در آن صدق کند از ترکیب معادله‌های ۱۳-۱۷ و ۱۴-۱۷ به دست می‌آید. با منظور کردن قرارداد علامت مربوط، معادله توری به صورت زیر در می‌آید

$$m\lambda = a[\sin \theta_i + \sin(2\theta_b - \theta_i)] \quad (15-17)$$

دو مورد خاص از معادله ۱۵-۱۷ را در نظر می‌گیریم. در وضعیت لیترو، نور در راستای عمود یا نزدیک به عمود N' بروجه شیار تابانده می‌شود، و در نتیجه، چنانکه از شکل ۱۷-۶ و معادله ۱۳-۱۷

واضح است، داریم $\theta_i = \theta_b$ و $\theta_m = -\theta_i$. برای این مورد خاص، معادله ۱۷-۱۵ به صورت زیر در می آید

$$m\lambda = 2a \sin \theta_b \quad \text{یا} \quad \theta_b = \sin^{-1} \left(\frac{m\lambda}{2a} \right) \quad \text{وضعیت لیترو:} \quad (۱۶-۱۷)$$

چون مقدار $a \sin \theta_b$ مربوط به ارتفاع پله شیار است (شکل ۱۷-۶)، می بینیم توری که برای طول موج λ و مرتبه m در وضعیت لیترو به طور صحیح فروزیده شده باشد باید ارتفاع پله شیارش برابر با عدد درست m ضربدر نصف طول موج باشد. توریهای تجاری معمولاً با زاویه فروز آنها و طول موجهای لیترو مرتبه اول متناظر مشخص می شوند.

در یک وضعیت دیگر، نور در راستای عمود N بر صفحه توری تابانده می شود. در این مورد، داریم $\theta_i = 0$ و $\theta_b = -\theta_m/2$. معادله ۱۷-۱۵ اکنون به صورت زیر در می آید

$$\theta_b = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{m\lambda}{a} \right) \quad \text{فرود عمودی:} \quad (۱۷-۱۷)$$

مثال

(الف) یک توری با 1200 شیار بر میلی متر را در نظر بگیرید که باید برای طول موج 600 nm در مرتبه اول فروزیده شود. زاویه فروز مناسب را به دست آورید.

(ب) توری پلکانی یک توری درشت ساخت است که برای رسیدن به تفکیک زیاد در مرتبه های بالا طراحی می شود. یک توری پلکانی تجاری رایج برای کار در مرتبه $m = 30$ را در نظر بگیرید که 79 شیار بر میلی متر در مساحت $610 \times 406 \text{ mm}$ دارد و در زاویه $63^\circ 26'$ فروزیده شده است. تفکیک این توری را وقتی در وضعیت لیترو به کار می رود تعیین کنید.

حل: (الف) در وضعیت لیترو، با توجه به معادله ۱۷-۱۶، زاویه فروز باید برابر باشد با

$$\theta_b = \sin^{-1} \left[\frac{(1)(600 \times 10^{-6})(1200)}{2} \right] = 21^\circ 06'$$

از طرف دیگر، اگر توری را در وضعیتی به کار ببریم که نور عمود بر توری فرود می آید، از معادله ۱۷-۱۷ داریم

$$\theta_b = \frac{1}{2} \sin^{-1} [(1)(600 \times 10^{-6})(1200)] = 23^\circ 02'$$

(ب) در وضعیت لیترو، توری نور را با طول موج زیر در راستای فرود برمی‌گرداند

$$\lambda = \frac{2a \sin \theta_b}{m} = \frac{2(1/79) \sin(63.43^\circ)}{30} = 755 \text{ nm}$$

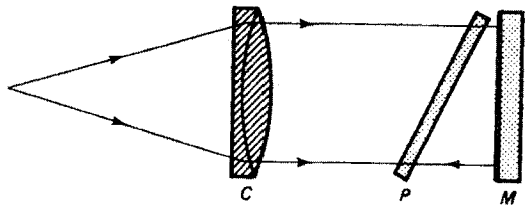
تعداد کل خطوط توری برابر است با $N = 79 \times 610 = 48190$ و در نتیجه برای توان تفکیک داریم $\mathcal{R} = mN = 30 \times 48190 = 1445700$. بنابراین، بازه طول موج تفکیک‌پذیر مینیمم در ناحیه طول موج فرور 755 nm برابر است با 0.0005 nm . $\Delta\lambda_{\min} = \lambda/\mathcal{R}$ تفکیک واقعی ممکن است به علت نقایص توری تا اندازه‌ای کمتر از مقدار نظری باشد. این تفکیک بزرگ به قیمت انقباض گستره طیفی به تنها 25 nm $\lambda/m = 755/30 = 25 \text{ nm}$ به دست آمده است. ▲

۱۷-۷ بدلهای توری

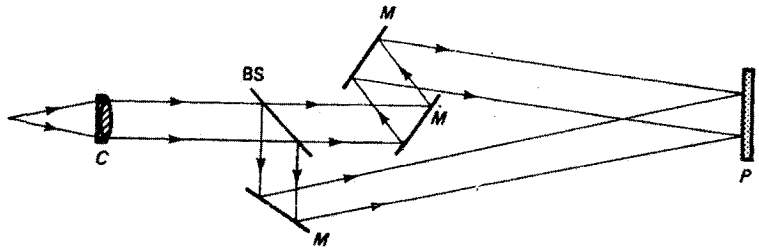
هزینه و سختی ساختن توریها مانع استفاده روزمره از توریهای اصل در ابزارهای طیف‌نمایی می‌شود. تا وقتی فن تولید بدل — نمونه نسبتاً ارزان اصل — ابداع نشده بود، پژوهشگران اندکی صاحب یک توری خوب بودند. برای ساختن توری بدل، ابتدا توری اصل را با لایه‌ای از یک ماده نازک‌پسینده، که می‌توان آن را در مرحله بعدی از اصل جدا کرد، می‌پوشانند. سپس روی این ماده را به روش تبخیر در خلأ با آلومینیم پوشش می‌دهند. آنگاه لایه‌ای از رزین روی این ترکیب می‌کشند و پایه بدل آینده را روی آن قرار می‌دهند. پس از اینکه رزین سخت شد، می‌توان توری بدل را از اصل جدا کرد. معمولاً از این بدل اول، اگر خوب باشد به عنوان اصل برای تولید انبوه بدلهای دیگر استفاده می‌شود. بدلهای نازک ساخته شده از روی این بدل اول را روی پایه سیلیکای گذاخته یا شیشه نصب می‌کنند و پوشش آلومینیمی با بازتابندگی زیاد را به آن اضافه می‌کنند. آنچه گفته شد روش متداول برای ساختن توریهای تجاری موجود است. توریهای بدل ممکن است از لحاظ کارکرد و عمر مفید به خوبی توریهای اصل یا بهتر از آنها باشند. کارایی بدلهای با شیار عمیق می‌تواند بهتر از کارایی توری اصل باشد زیرا فرایند بدل‌سازی قسمتهای هموار وجوه شیار را از پایین به بالا منتقل می‌کند و باعث اصلاح کار توری می‌شود.

۱۷-۸ توری تداخلی

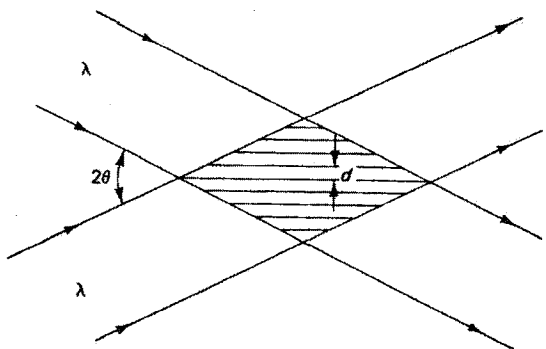
دسترسی به باریکه‌های شدید و فوق‌العاده همدوس نور تولید توری را بدون شیارزنی‌های حاصل از ماشینهای توری‌ساز امکان‌پذیر کرده است. در سال ۱۹۲۷، مایکلسون امکان عکسبرداری از فریزهای مستقیم تداخل را با استفاده از دستگاه اپتیکی مانند دستگاهی که در شکل ۱۷-۱۷ الف نشان داده شده است مطرح کرد. دو باریکه تکفام همدوس با هم تداخل می‌کنند و امواج ساکنی



(الف)



(ب)



(ج)

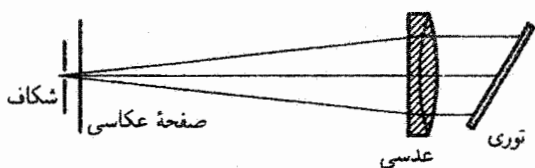
شکل ۱۷-۷ (الف) دستگاه مایکلسون برای تولید توریهای تداخلی شامل موازی‌کننده C ، آینه M و فیلم عکاسی P . (ب) دستگاه هولوگرافیک برای تولید فریزهای تداخل شامل موازی‌کننده C ، تقسیمگر باریکه BS ، آینه‌های M ، و فیلم حساس به نور P . (ج) تولید فریزهای تداخل در ناحیه برهم‌نهم دو باریکه هم‌دوس و موازی شده که با زاویه 2θ یکدیگر را قطع می‌کنند.

در ناحیه بین عدسی موازی‌کننده و یک آینه تخت تولید می‌کنند. ماکسیمهای تداخل راست‌خط حاصل توسط یک فیلم شیب‌دار و حساس به نور قطع می‌شوند. فریزهای راست‌خط را پس از ظهور فیلم می‌توان دید.

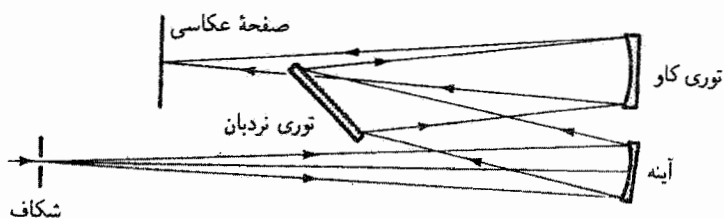
توریهای تداخلی را که با این نوع فنون اپتیکی تولید می‌شوند توریهای هولوگرافیک نیز می‌نامند، زیرا یک توری با شیارهای موازی و هم‌فاصله را می‌توان مانند یک هولوگرام چشمه نقطه‌ای در بینهایت در نظر گرفت. دستگاههای تداخل‌سنجی دیگر، مانند آنچه در شکل ۱۷-۷ ب نشان داده شده است، اساساً دستگاههایی هستند که برای تولید هولوگرام به‌کار برده می‌شوند. امروزه جبهه‌های موج تداخل‌کننده روی فیلم بیدانه‌ای از جنس مقاوم به نور عکسبرداری می‌شوند که انحلالپذیری آن به ماده حکاکی متناسب با تابیدگی نوردهی است. با چرخاندن سریع پایه شیشه‌ای، فیلم مقاوم به نور به‌طور یکنواخت روی سطح پایه تا ضخامت $1\mu\text{m}$ یا کمتر پخش می‌شود. پس از حکاکی، نقش تداخل به‌صورت شیارهای توری عبوری‌ای حفظ می‌شود که تراگسیلندگی آن در عرض شیار با نیمرخ مجذور سینوسی تدریجاً تغییر می‌کند. معمولاً یک پوشش فلزی بازتابنده به روش تبخیر در خلأ به توری اضافه می‌کنند. جدایی فریز d ، که در شکل ۱۷-۷ ج نشان داده شده است، از طول موج نور و از زاویه 2θ بین دو باریکه تداخل‌کننده، مطابق با رابطه $d = \lambda / (2 \sin \theta)$ تعیین می‌شود. علاوه بر رهایی از فرایند پر هزینه و پر زحمت شیازرنی با ماشین، مزیت عمده توری تداخلی نبود خطاهای دوره‌ای و کاتوره‌ای در مکانهای شیار است که به‌ترتیب تولید شیخ و چمن می‌کنند. بدین ترتیب، توریهای تداخلی دارای خلوص طیفی زیادی هستند و بهره‌علامت به نوبه زیادی فراهم می‌کنند. از طرف دیگر، نیمرخ شیار، که روی فروزش و در نتیجه بازدهی توری اثر می‌گذارد، به آسانی قابل تنظیم نیست. نیمرخ شیار برای توریهای تداخلی عادی، به جای اینکه مانند مورد توریهای فروزیده معمول دنداناره‌ای باشد، به‌صورت مجذور سینوسی است و در نتیجه متقارن است. در فرود عمودی، نیمرخ متقارن شیار باعث توزیع مساوی نور در مرتبه‌های مثبت و منفی پراش می‌شود. اما وقتی توری در فرود غیر عمودی به‌کار برده می‌شود ممکن است نور را تنها در یک مرتبه پراش (غیر از مرتبه صفرم) بپراشد، و نشان داده شده است که در این مورد توزیع نور تا حد زیادی بستگی به نیمرخ شیار ندارد. بازده در این شرایط می‌تواند قابل مقایسه با بازده توریهای فروزیده باشد. با وجود این، با تاباندن دو طول موج تابش، که نیمرخ ترکیب فوریه آنها بیشتر دنداناره‌ای است، به لایه مقاوم به نور، یا با تغییر بعدی شیارهای متقارن با حکاکی آرگون-نیون یا به روشهای دیگر، کوششهای زیادی به عمل می‌آید تا شیارهایی که از لحاظ نیمرخ بیشتر مانند شیارهای توریهای فروزیده معمول هستند تولید شوند. فنون تداخل در تولید توریهای پلکانی درشت‌ساخت قابل اجرا نیستند.

۱۷-۹ ابزارهای توری

ابزاری را که در آن از توری به‌عنوان عنصر پاشنده طیفی استفاده می‌شود بر اساس نوع توری برگزیده برای یک کاربرد خاص طراحی می‌کنند. یک توری عبوری ارزان را می‌توان به جای مشهور در طیف‌نما قرار داد که در آن با دوربینی که برای بینهایت میزان شده است می‌توان

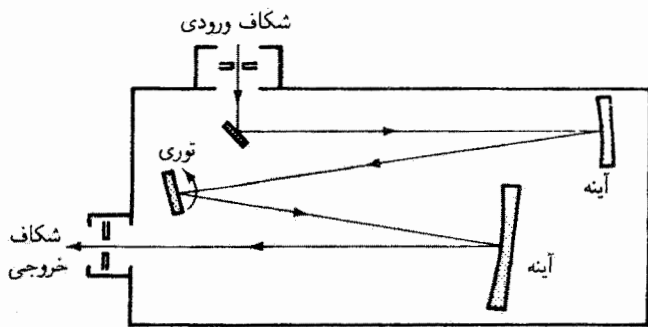


شکل ۸-۱۷ توری تخت در وضعیت لیترو. فیلم عکاسی و شکاف ورودی در راستای عمود بر صفحه شکل از هم فاصله دارند.



شکل ۹-۱۷ نمای جانبی طیف‌نگار پلکانی. توری پلکانی درست بالای مسیر شکاف به آینه قرار دارد، اما فیلم عکاسی در راستای افقی خارج از صفحه شکل است.

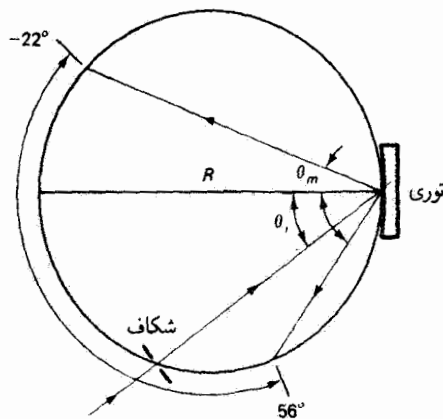
طیف را مشاهده کرد. نور فرودی به توری قبلاً با یک شکاف و عدسی موازی شده است. اما در ابزارهای توری پژوهشی از توریهای بازتابی استفاده می‌شود. این ابزارها ممکن است طیف‌نگار باشند، که قسمتی از طیف را روی فیلم عکاسی، آرایه فوتودیود، یا هر آشکارساز تصویر دیگری ثبت می‌کند، یا طیف‌سنج باشند، که در آن قسمت باریکی از طیف با عبور از شکاف خروجی به یک فوتونفزونگر یا هر آشکارساز شار نور دیگری می‌رسد. در مورد دوم، طیف را می‌توان با چرخاندن توری روبش کرد. طرحهای متعددی امکانپذیر هستند، که متداولترین آنها را به اختصار توصیف می‌کنیم. شکل ۸-۱۷ وضعیت لیترو ساده را نشان می‌دهد که در آن از یک تک عنصر میزان‌کننده هم برای موازی کردن نور فرودی به توری تخت و هم، در برگشت، برای میزان کردن نور روی فیلم عکاسی واقع در نزدیکی شکاف استفاده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که در وضعیت لیترو نور در راستای عمود بر وجوه شیار فرود می‌آید. در طیف‌نگار پلکانی (شکل ۹-۱۷) که برای استفاده از پاشیدگی و تفکیک زیاد قابل حصول با زاویه‌های بزرگ فرود به توری تخت فرورزیده طراحی می‌شود نیز از وضعیت لیترو استفاده می‌کنند. چنانکه قبلاً گفته شد، مرتبه مفید پراش بزرگ و گستره آزاد طیفی کوچک است، و از این رو یک توری دوم که کاو است برای پاشیدن مرتبه‌های همبوس به راستای عمود بر پاشندگی توری پلکانی به‌کار برده می‌شود. در شکل ۹-۱۷، آینه مقعر نور فرودی به پلکانی را، که نزدیک شکاف قرار دارد و شیارهای آن در



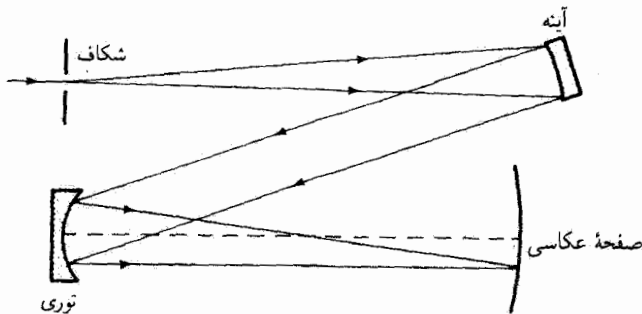
شکل ۱۷-۱۰ طیف‌سنج چرنی-ترنر.

راستای افقی هستند، موازی می‌کند. نور پراشیده از پلکانی دوباره توسط توری کاو، که شیپهای آن در راستای قائم قرار دارند، پاشیده می‌شود. توری دوم همچنین طیف دوبعدی را روی فیلم عکاسی میزان می‌کند. شکل ۱۷-۱۰ دستگاه چرنی-ترنر را در یک طیف‌سنج توری نشان می‌دهد. نور ناشی از شکاف ورودی با یک آینه تخت به آینه کاو اول، که نور فرودی به توری را موازی می‌کند، فرستاده می‌شود. نور پراشیده از توری به آینه کاو دوم، که طیف را در شکاف خروجی میزان می‌کند، فرود می‌آید. وقتی توری چرخانده می‌شود، طیف پاشیده در عرض شکاف حرکت می‌کند. اگر این ابزار مخصوصاً برای انتخاب طول‌موجهای انفرادی ناشی از چشمه طیفی گسسته یا برای عبور دادن گستره طول‌موج باریکی از شکاف خروجی به‌کار برده شود آن را تکفامگر می‌نامند.

در ابزارهای دیگر به جای عدسی یا آینه میزان‌کننده دوم از توری کاو هم برای میزان کردن و هم برای پاشیدن نور استفاده می‌شود. شیپهای توری کاو نسبت به تصویر تخت سطح کاو، و نه نسبت به خود سطح کاو، همفاصله‌اند. بدین طریق، ابزاری کروی و کوما حذف می‌شوند. ابزارهای کاو توری برای طول‌موجهای ناحیه‌های پرتو ایکس نرم (۱ تا ۲۵ nm) و فرابنفش که به ناحیه مرئی گسترش می‌یابد به‌کار می‌روند. در طرح پاشن-رونکه (شکل ۱۷-۱۱) از دایره رولاند استفاده می‌شود. اگر سطح توری در مرکزش مماس با دایره‌ای باشد که قطرش برابر با شعاع انحنای توری کاو است، می‌توان نشان داد اگر شکاف چشمه در هر نقطه از این دایره قرار گیرد خطوط طیفی کاملاً میزان شده‌ای روی این دایره ایجاد می‌کند. اگر چشمه نور و شکاف، توری، و فیلم عکاسی در سه مکانی که از دایره رولاند و معادله توری تعیین می‌شوند در اتاق تاریک گذاشته شوند، شرایط اساسی طیف‌نگار پاشن-رونکه تحقق می‌یابند. چون شعاع انحنای توری نوعاً حدود ۶ m است، فضایی که این طیف‌نگار اشغال می‌کند کاملاً بزرگ است. استفاده از سه مرتبه اول پراش از همه



شکل ۱۱-۱۷ آرایه پاشن-رونکه برای توری کاو. تصاویر پراشیده شکاف روی دایره رولاند تشکیل می‌شوند. اگر توری ۱۲۰۰ شیار بر میلی‌متر داشته باشد و $\theta_i = 30^\circ$ ، طیف مرتبه اول برای طول موجهای بین 200° و 1200° nm به ترتیب بین زاویه‌های -22° و 56° می‌افتد.



شکل ۱۲-۱۷ آرایه وادزوروت برای توری کاو.

متداولتر است. معمولاً زاویه‌های فرود در گستره بین 30° تا 45° و زاویه‌های پراش نسبت به عمود بر توری بین 25° در طرف مقابل شکاف تا 85° در طرف شکاف تغییر می‌کنند. بدین ترتیب، بیشتر دایره رولاند برای ثبت قسمتهای مختلف طیف قابل استفاده است. در شکل ۱۱-۱۷، طیف مرتبه اول (200° تا 1200° nm) روی دایره رولاند برای $\theta_i = 38^\circ$ و توری ۱۲۰۰ شکاف بر میلیمتری نشان داده شده است. خطوط طیفی که از این راه تشکیل شده‌اند ممکن است به شدت متحمل آستیگماتیسم باشند. در طیف‌نگار وادزوروت (شکل ۱۲-۱۷) با اضافه کردن یک آینه اولیه برای موازی کردن نور فرودی به توری آستیگماتیسم حذف شده است. با این کار، دیگر نمی‌توان از دایره رولاند برای این طیف‌نگار استفاده کرد. طیفها روی گستره‌ای که زاویه‌های کوچکی با عمود بر

توری، شاید 10° در هر طرف، می‌سازد مشاهده می‌شوند. برای ثبت قسمتهای مختلف طیف، می‌توان توری را چرخاند و می‌توان از مرتبه‌های بالاتر استفاده کرد. این نوع طیف‌نگار توری قابلیت ساخت فشرده‌تری از پاشن-روننگه دارد.

مسائل

۱۷-۱ فاصله زاویه‌ای بین طول‌موجهای 400 nm و 600 nm را در مرتبه دوم پراش از توری 5000 شیار بر سانتیمتری به دست آورید.

۱۷-۲ (الف) پاشیدگی در ناحیه طول‌موج سرخ حول 650 nm را (هم برحسب $^\circ/\text{nm}$ و هم nm/mm) برای توری عبوری با پهنای 6 m و 3500 شیار بر سانتیمتر، وقتی در طیف مرتبه سوم با یک عدسی با فاصله کانونی 15 cm روی پرده میزان می‌شود، توصیف کنید.
(ب) توان تفکیک توری را تحت این شرایط به دست آورید.

۱۷-۳ (الف) فاصله زاویه‌ای بین ماکسیم اصلی مرتبه دوم و مینیم مجاور در هر طرف را برای نقش فرانوفر ناشی از یک توری 24 شیاری با جدایی شیار 10^{-2} cm که نور 600 nm به آن تابانده شده است به دست آورید.

(ب) چه طول‌موج کمی بزرگتر (یا کمی کوچکتر) دارای ماکسیم مرتبه دوم بالای مینیم مجاور ماکسیم مرتبه دوم نور 600 nm است؟

(ج) با استفاده از نتایجی که برای قسمتهای (الف) و (ب) به دست آورده‌اید، توان تفکیک در مرتبه دوم را محاسبه کنید. جواب را با مقداری که از فرمول نظری توان تفکیک $17-11$ به دست می‌آید مقایسه کنید.

۱۷-۴ چند خط باید روی یک توری عبوری ایجاد کنیم تا دوتایی سدیم (589.592 nm و 588.995 nm) در طیفهای مرتبه اول و دوم برای این توری در آستانه تفکیک باشند؟

۱۷-۵ (الف) می‌خواهیم از یک طیف‌نگار توری در مرتبه اول استفاده کنیم. اگر از عدسی شیشه کرّون برای تاباندن نور به شکاف ورودی استفاده کنیم، اولین طول‌موج را در طیف حاوی خطوط مرتبه دوم به دست آورید. اگر عدسی کوارتز باشد، این طول‌موج چه اندازه تغییر می‌کند؟ قطع جذب را برای شیشه کرّون 350 nm و برای کوارتز 180 nm بگیرید.

(ب) در هر مورد، برای توری 1200 شیار بر میلیمتری، ابتدای همپوشی در چه زاویه پراشی روی می‌دهد؟

(ج) گستره طیفی آزاد را برای مرتبه‌های اول و دوم در هر مورد به دست آورید.

۱۷-۶ اگر یک توری عبوری که دارای ۱۶۰۰۰ خط بر اینچ و پهنای ۲.۵ in است در سبز حدود ۵۵۰ nm کار کند، توان تفکیک در مرتبه سوم را تعیین کنید. اختلاف طول موج تفکیک پذیر مینیمم را در مرتبه دوم محاسبه کنید.

۱۷-۷ دو خط D ی سدیم در ۵۸۹۳\AA از هم ۶\AA فاصله دارند. اگر یک توری با تنها ۴۰۰ شمار در اختیار داشته باشیم،

(الف) کمترین مرتبه ممکن را که در آن خطوط D تفکیک می‌شوند و

(ب) پهنایی را که توری باید داشته باشد به دست آورید.

۱۷-۸ سه مورد زیر را برای گشودگی چندشکافی که در آنها N تعداد شکافها است در نظر بگیرید:
 (۱) $N = ۲$ ، (۲) $N = ۱۰$ ، و (۳) $N = ۱۵۰۰۰$. گشودگی را مستقیماً جلوی عدسی با فاصله کانونی ۲ m می‌گذاریم. جدایی شکاف ۰.۵ mm و پهنای شکاف ۰.۱ mm است. نور فرودی، با جبهه موج تخت، دارای طول موج ۵۴۶ nm است. برای هر مورد،

(الف) فاصله بین ماکسیمهای مرتبه اول و دوم را روی پرده،

(ب) تعداد فریزهای روشن (ماکسیمهای اصلی) را که زیر پوش پراش مرکزی واقع می‌شوند، و

(ج) پهنای فریز تداخل مرکزی را روی پرده به دست آورید.

۱۷-۹ به یک توری بازتابی احتیاج داریم که بتواند در مرتبه دوم طول موجهایی به نزدیکی ۲\AA روی در ناحیه طیفی حول ۳۵۰ nm تفکیک کند. این توری باید در اسبابی نصب شود که نور از شکاف ورودی به طور عمودی به توری فرود می‌آید. اگر سازنده شیارهایی در پهنه ۱۰ cm روی توری ایجاد کند،

(الف) کمترین تعداد شیار لازم در هر سانتیمتر،

(ب) زاویه فروز بهینه برای کار در این ناحیه،

(ج) زاویه پراشی که در آن تابیدگی ماکسیم است، و

(د) پاشیدگی برحسب نانومتر بر درجه را تعیین کنید. زاویه فروز و زاویه پراش را در یک نمودار

نشان دهید.

۱۷-۱۰ یک توری عبوری می‌خواهیم که تفکیک مرتبه اول نهایی به اندازه دست کم ۱\AA در هر جا از طیف مرئی (۴۰۰ تا ۷۰۰ nm) ایجاد کند. پهنه شیار شده توری باید ۲ cm باشد.

(الف) کمترین تعداد شیارهای لازم را تعیین کنید.

(ب) اگر نقش پراش با عدسی ۵۰ سانتیمتری میزان شود، جدایی خطی بازه ۱ آنگسترومی

در همسایگی ۵۰۰ nm را به دست آورید.

۱۷-۱۱ یک توری بازتابی کاو به شعاع 2 m با 1000 شیار بر میلیمتر شیارزنی شده است. نور با زاویه 30° نسبت به عمود مرکزی توری فرود می‌آید. برای کار در مرتبه اول، موارد زیر را تعیین کنید.

(الف) پهن‌شدگی زاویه‌ای حول عمود توری برای گستره طول‌موجهای مرئی (400 nm تا 700 nm)؛

(ب) توان تفکیک نظری اگر پهنة شیار شده توری 1 cm باشد؛

(ج) ضریب فیلم در مجاورت 550 nm ؛

(د) شعاع دایره رولاتند در آرایه پاشن-روننگه توری.

۱۷-۱۲ برای اینکه یک توری کاو به شعاع 2 m ضریب فیلمی حدود 2 nm/mm در مرتبه اول داشته باشد باید دارای چند شیار در هر سانتیمتر باشد؟

۱۷-۱۳ یک توری بازتابی تخت با 300 شیار بر میلیمتر در زاویه 10° فروزیده شده است.

(الف) اگر نور عمود بر وجوه شیارها فرود آید، توری ماکسیمم انرزی را در چه طول‌موجی در

مرتبه اول می‌فرستد؟

(ب) اگر از توری در آرایه چرنی-ترنر با آینه‌هایی به شعاع انحنای 3.4 m استفاده شود، ضریب

فیلم را در مرتبه اول به دست آورید.

۱۷-۱۴ یک توری بازتابی با پهنة شیار شده 15 سانتیمتری باید برای استفاده در فرابنفش خلأ در 2000 \AA فروزیده شود. اگر بخواهیم توان تفکیک نظری توری در مرتبه اول 3000000 باشد، زاویه

فروز مناسب را برای استفاده

(الف) در وضعیت لیترو و

(ب) با فرود عمودی تعیین کنید.

۱۷-۱۵ نشان دهید فاصله d بین فریزها در تشکیل توری هولوگرافیک، همچون در شکل ۱۷-۷،

با $\lambda/(2 \sin \theta)$ داده می‌شود که در آن 2θ زاویه بین باریکه‌های همدوس است. اگر این باریکه‌ها ناشی از لیزر آرگون با طول‌موج 488 nm باشند و زاویه بین آنها 120° باشد، چند شیار بر میلیمتر

در اندوده تخت ($n = 1$) واقع در راستای عمود بر فریزها تشکیل می‌شود؟ تأثیر اندوده‌ای با ضریب شکست زیاد روی ثابت توری چیست؟

۱۷-۱۶ به یک توری برای کار در مرتبه اول احتیاج داریم که بتواند دوتایی سرخ ناشی از تخلیه الکتریکی در مخلوطی از هیدروژن و دوتریم، یعنی 1.88 \AA در 6563 \AA ، را تفکیک کند. این توری را می‌توان با یک فروز متعارف در 6300 \AA برای استفاده در وضعیت لیترو تولید کرد.

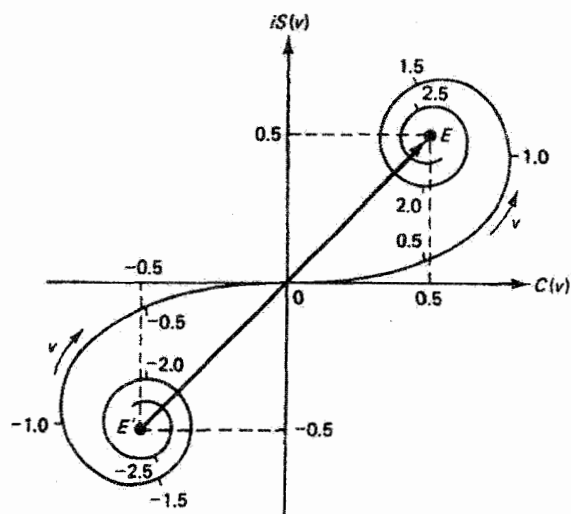
(الف) تعداد کل شیارهای لازم،

(ب) تعداد شیارها بر میلیمتر روی توری با زاویه فروز $۲۲^{\circ}۱۲'$ و
(ج) کمترین پهنة توری را تعیین کنید.

۱۷-۱۷ یک توری پلکانی در پهنة ۱۲ cm با ۸ شیار بر میلیمتر خطکشی و در ۶۳° فروزیده شده است. برای یک وضعیت لیترو، کمیت‌های زیر را تعیین کنید
(الف) گستره مرتبه‌هایی که در آنها طیف مرئی (۴۰۰ nm تا ۷۰۰ nm) ظاهر می‌شود،
(ب) تعداد کل شیارها،
(ج) توان تفکیک و بازه طول موج تفکیک‌پذیر مینیمم در ۵۵° ،
(د) پاشیدگی در ۵۵° ، و
(ه) گستره طیفی آزاد، با فرض اینکه کوچکترین طول موج موجود ۳۵۰ nm است.

مراجع

- [1] Davis, Sumner P. *Diffraction Grating Spectrographs*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [2] Hutley, M. C. *Diffraction Gratings*. New York: Academic Press, 1982.
- [3] James, J. F., and R. S. Sternberg. *The Design of Optical Spectrometers*. London: Chapman and Hall Ltd., 1969. Ch. 5, 6.
- [4] Ingalls, Albert G. "Ruling Engines." *Scientific American* (June 1952): 45.
- [5] Feynman, Richard P., Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures in Physics*, vol. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1975. Ch. 30.



پراش فرنل

مقدمه

در دو فصل قبل با پراش فرانوفر سروکار داشتیم، یعنی وضعیتهایی را بررسی کردیم که در آنها جبهه موج در گشودگی پراشده را می‌توان بدون خطای محسوسی تخت گرفت. اکنون به مواردی می‌پردازیم که در آنها این فرض به تقریب بدی منجر می‌شود، یعنی مواردی که در آنها چشمه و یا پرده مشاهده به اندازه‌ای به گشودگی نزدیک‌اند که باید انحنای جبهه موج را به حساب آورد. بنابراین، برای مشاهده نقش پراش فرنل یا میدان نزدیک نیازی به عدسی موازی‌کننده نیست، و به این معنای تجربی مطالعه آن ساده‌تر است. اما بررسی ریاضی پیچیده‌تر است و چنانکه خواهیم دید تقریباً همیشه با استفاده از فنون تقریب‌گیری انجام می‌شود.

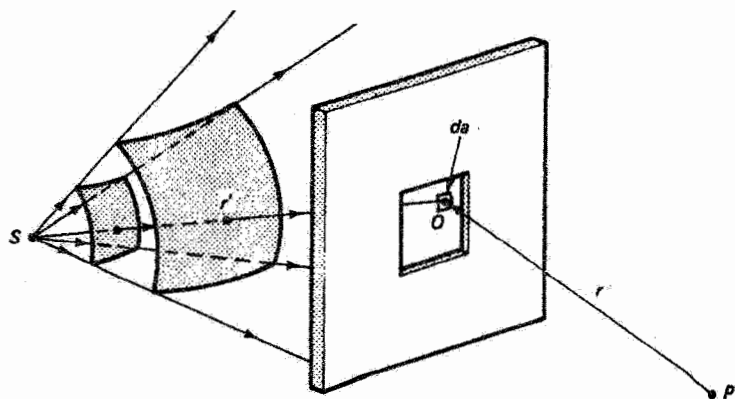
نقشهای پراش فرنل اتصالی بین نقشهای مشخص‌کننده اپتیک هندسی از یک طرف و پراش فرانوفر از طرف دیگر ایجاد می‌کنند. در اپتیک هندسی، که در آن امواج نور را می‌توان پرتوهایی در نظر گرفت که در راستای خطوط راست منتشر می‌شوند، انتظار داریم تصویر واضحی از گشودگی ببینیم. در عمل، این نوع تصویر وقتی تشکیل می‌شود که پرده مشاهده کاملاً نزدیک به گشودگی باشد. در مشاهدات پراش فرانوفر، که در آنها پرده واقعاً یا با استفاده از عدسی عملاً دور از گشودگی

است، نقش پراش تصویر فریزداری است که کمتر شباهتی به گشودگی دارد. به عنوان مثال، نقش دوشکافی فرانهور را یادآوری می‌کنیم. در وضعیت میانی پراش فرنل، تصویر اساساً تصویر گشودگی است اما لبه‌های آن فریزدار هستند.

۱-۱۸ انتگرال پراش فرنل-کیرشهوف

در شکل ۱-۱۸ یک آرایه نوعی نشان داده شده است. جبهه‌های موج کروی از چشمه نقطه‌ای صادر می‌شوند و به گشودگی فرود می‌آیند. در گشودگی، جبهه موج هنوز هم اساساً کروی است زیرا گشودگی از چشمه دور نیست. بنابراین، اثرات پراش در میدان نزدیک در طرف دیگر گشودگی از نوع فرنل هستند. فاصله از چشمه S تا نقطه نمونه O روی جبهه موج در گشودگی برابر با r و فاصله از نقطه O تا نقطه نمونه P در میدان برابر با r' است. در مقایسه با پراش فرانهور، این مورد از چند نظر مستلزم بررسی خاص است. چون امواج نزدیک‌شونده تخت نیستند، فاصله r' در محاسبات وارد می‌شود. به علاوه، فاصله‌های r و r' دیگر چندان بزرگتر از اندازه گشودگی نیستند که پراش فرانهور به کار رود. در نتیجه، تغییرات r و r' ، هم با نقاط مختلف O در گشودگی و هم با نقاط مختلف P در میدان، باید به حساب آورده شوند. و سرانجام، چون راستا از نقاط گشودگی مختلف O تا یک نقطه میدان معین P را دیگر نمی‌توان تقریباً ثابت فرض کرد، وابستگی دامنه به راستا برای موجکهای هویگنس که در گشودگی به وجود می‌آیند باید در نظر گرفته شود. این تصحیح با ضریب تمایل که بعداً بیان می‌کنیم به عمل می‌آید.

اکنون می‌خواهیم با استفاده از اصل هویگنس-فرنل، همچون در مورد پراش فرانهور، دامنه برابند میدان الکتریکی را در P حاصل از برهم‌نهی تمام موجکهای هویگنس ناشی از جبهه



شکل ۱-۱۸ نمودار تعریف‌کننده پارامترهای مربوط به پراش فرنل.

موج در گشودگی، که هر کدام از "نقطه" ای صادر می‌شوند که در واقع یک عنصر سطح da روی جبهه موج است، به دست آوریم. سهم ناشی از این عنصر سطح در میدان برآیند در P را با موج کروی زیر نشان می‌دهیم

$$dE_P = \left(\frac{dE_0}{r} \right) e^{ikr} \quad (1-18)$$

دامنه موج dE_0 در گشودگی متناسب با این عنصر سطح است، و از این رو می‌توانیم بنویسیم

$$dE_0 \propto E_L da \quad (2-18)$$

دامنه E_L در نقطه O دامنه موج کروی ناشی از چشمه است، یا

$$E_L = \left(\frac{E_s}{r'} \right) e^{ikr'} \quad (3-18)$$

بنابراین، از ترکیب این معادله‌ها، با تقریب یک ضریب تناسب داریم

$$dE_P = \left(\frac{E_s}{rr'} \right) e^{ik(r+r')} da \quad (4-18)$$

میدان در P ناشی از موجکهای ثانوی از تمام گشودگی برابر با انتگرال سطحی زیر است

$$E_P = E_s \iint_{AP} \left(\frac{1}{rr'} \right) e^{ik(r+r')} da \quad (5-18)$$

معادله ۵-۱۸ به دو علت کامل نیست. اولاً، ضریب تمایل که امواج پراشیده را برحسب راستای آنها تضعیف می‌کند در آن به حساب نیامده است. فعلاً این ضریب را با $F(\theta)$ نشان می‌دهیم که تابعی است از زاویه θ بین راستای تابش فرودی و راستای تابش پراشیده در نقطه گشودگی O . ثانیاً، یک شرط خاص که عبارت است از تغییر فاز 90° درجه‌ای امواج پراشیده نسبت به امواج فرودی اولیه در این انتگرال منظور نشده است. در بحث زیر به این دو موضوع باز خواهیم گشت. انتگرال صحیح فرمول پراش فرنل-کیرشهوف است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_P = \frac{-ikE_s}{2\pi} \iint F(\theta) \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} da \quad (6-18)$$

که در آن $-i = e^{-i\pi/2}$ نمایشگر انتقال فاز لازم است، و

$$F(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

که دامنه E_S را محدود می‌کند. این فرمول انتگرالی را فرنل به دست آورد و کیرشهوف آن را بر پایه نظری دقیقتری قرار داد. در واقع، کیرشهوف نشان داد که فرضهای مورد نیاز فرنل را می‌توان با استدلال از قضیه انتگرال گرین که به جای توابع آن جوابهای نردهای معادله موج الکترومغناطیسی گذاشته می‌شوند به دست آورد.^۱ اما نتیجه‌ای که با معادله ۶-۱۸ بیان شده است هنوز هم شامل تقریبهایی است مبتنی بر اینکه فاصله‌های چشمه و پرده نسبت به اندازه‌های گشودگی بزرگ هستند و اینکه اندازه‌های گشودگی به نوبه خود نسبت به طول موج آشفتگی نوری بزرگ هستند. انتگرال معادله ۶-۱۸ روی سطح بسته‌ای شامل گشودگی گرفته می‌شود اما فرض شده است که تنها خود گشودگی در آن سهم دارد. برای رسیدن به این نتیجه، کیرشهوف به عنوان شرایط مرزی فرض کرد که تابع موج و گرادیان آن درست پشت قسمتهای کدر گشودگی صفراند و داخل خود گشودگی آنها همان مقداری دارند که در غیاب گشودگی باید داشته باشند. این فرضها محاسبه معادله ۶-۱۸ را ممکن می‌سازند اما کاملاً موجه نیستند. به علاوه، در نظریه‌ای که در اینجا توصیف می‌شود، تابع موج میدان E تابعی نردهای است که مجذور قدرمطلق آن تابندگی را می‌دهد. می‌دانیم که در نقاط بسیار نزدیک به گشودگی باید از روشهایی استفاده شود که در آنها خواص برداری میدان الکترومغناطیسی، از جمله اثرات قطبش، در نظر گرفته می‌شوند. با این همه، نظریه کیرشهوف برای به دست آوردن نتایج دقیق در اکثر موارد عملی مربوط به پراش کفایت می‌کند.

در مورد حدی پراش فرانهورف، معادله ۶-۱۸ با این فرضها ساده می‌شود که (۱) ضریب تمایل در گشودگی به علت پخش شدگی کوچک در نور پراشیده تقریباً ثابت می‌ماند و (۲) تغییر فاصله‌های r و r' نسبت به تغییر تابع نمایی کوچک می‌ماند. با خارج کردن تمام جمله‌های ثابت (یا تقریباً ثابت) از انتگرال و گنجاندن آنها در یک ثابت کلی C ، معادله ۶-۱۸ به صورت ساده‌تر زیر در می‌آید

$$E_P = C \iint e^{ikr} da$$

که بیانی از اصل هویگنس-فرنل است و با انتگرالی که در فصل ۱۶ برای محاسبه نقش پراش فرانهورف به کار بردیم مطابقت دارد.

۱. این محاسبه در بسیاری از کتابها، مثلاً [۱] و [۲]، یافت می‌شود اما مستلزم ریاضیاتی است که فراتر از سطح این کتاب درسی است.

برای وضعیتهایی که در آنها فرضهای پراش فرانهورفر معتبر نیستند با معادله ۱۸-۶ سروکار داریم. محاسبه این انتگرال برای یک گشودگی معین به طور کلی آسان نیست. فرنل روشهای رضایت بخشی برای ساده کردن این محاسبه، یا حذف کامل آن، پیشنهاد کرد. این روشها را در موارد ساده تری که در زیر بررسی می کنیم به کار خواهیم برد.

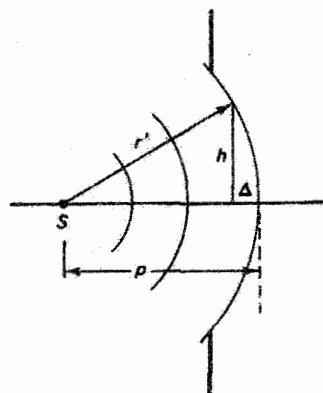
۱۸-۲ معیار پراش فرنل

پیش از اینکه این موارد را بررسی کنیم می خواهیم معیاری عملی به دست آوریم که تعیین می کند چه وقت باید از فنون فرنل به جای روش ساده تر فرانهورفر که قبلاً گفته شد استفاده کرد. کافی است مورد ساده ای را در نظر بگیریم که در آن هم S و هم P ، همچون در شکل ۱۸-۲، روی محور مرکزی گشودگی قرار دارند. توجه کنید که فاصله ای که با Δ نشان داده شده است برای جبهه موج تخت صفر است. اما تا وقتی Δ کوچک است، یعنی کمتر از طول موج نور است، روش پراش فرانهورفر کفایت می کند. با توجه به شکل ۱۸-۲ الف، می توان این کمیت را به صورت زیر نوشت

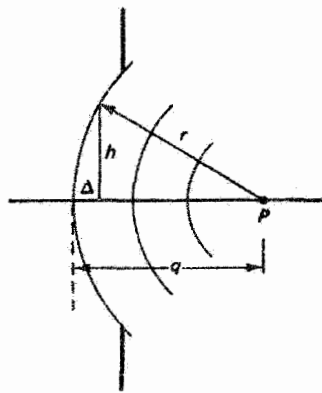
$$\Delta = p - \sqrt{r'^2 - h^2} \quad (۷-۱۸)$$

یا معادل آن

$$\Delta = p - r' \left(1 - \frac{h^2}{r'^2} \right)^{1/2} \cong p - r' \left(1 - \frac{h^2}{2r'^2} \right) \quad (۸-۱۸)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۸-۲ مقطع جانبی شکل ۱۸-۱. وقتی Δ کوچک است انحنای جبهه موج (الف) فرودی و (ب) پراشیده کوچک است.

که در آن پراوتر عبارت میانی را با دو جمله اول بسط $(1-x)^{1/2} = 1 - x/2 + \dots$ تقریب گرفته‌ایم. چون $p \cong r'$ ، شرط انحنای قابل ملاحظه (مورد میدان نزدیک) عبارت است از

$$\Delta = \frac{h^2}{2p} > \lambda \quad (9-18)$$

و به همین ترتیب برای انحنای موج پراشیده در شکل ۱۸-۲ داریم

$$\Delta = \frac{h^2}{2q} > \lambda \quad (10-18)$$

از ترکیب معادله‌های ۹-۱۸ و ۱۰-۱۸، فرمول پراش فرنل یا میدان نزدیک به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) h^2 > \lambda \quad \text{میدان نزدیک:} \quad (11-18)$$

البته این شرط برای بعد دیگر گشودگی (عمود بر h) که در شکل ۱۸-۲ نشان داده نشده است نیز کاربرد دارد. وقتی h را بزرگترین بعد گشودگی یا شعاع گشودگی دایره‌ای بگیریم، می‌توانیم معادله ۹-۱۸ یا معادله ۱۰-۱۸ را با شرط تقریبی زیر نیز بیان کنیم

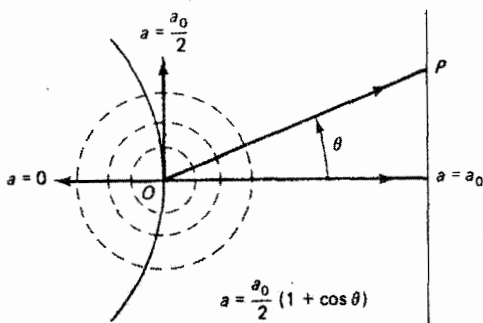
$$d < \frac{A}{\lambda} \quad \text{میدان نزدیک:} \quad (12-18)$$

که در آن d نمایشگر p یا q و A مساحت گشودگی است.

۱۸-۳ ضریب تمایل

اثر ضریب تمایل روی موجکهای ثانوی ناشی از نقاط جبهه موج را فرنل معرفی کرد. یادآوری می‌کنیم که مطابق نظر هویگنس، چمسه نقطه‌ای موجکهای ثانوی می‌تواند در تمام راستاها با تأثیر یکسان تابش کند. این خصوصیت باید باعث تولید جبهه‌های موج جدید در جهت‌های پیش‌سو و پس‌سوی انتشار جبهه موج شود، اگر چه موج معکوس وجود ندارد. اگر نقطه O در شکل ۱۸-۳ مبدأ موجکهای ثانوی باشد که به نقطه اختیاری P در میدان وارد می‌شوند، تغییر صحیح دامنه به صورت تابعی از زاویه θ با رابطه زیر داده می‌شود

$$a = \left(\frac{a_0}{2} \right) (1 + \cos \theta) \quad (13-18)$$



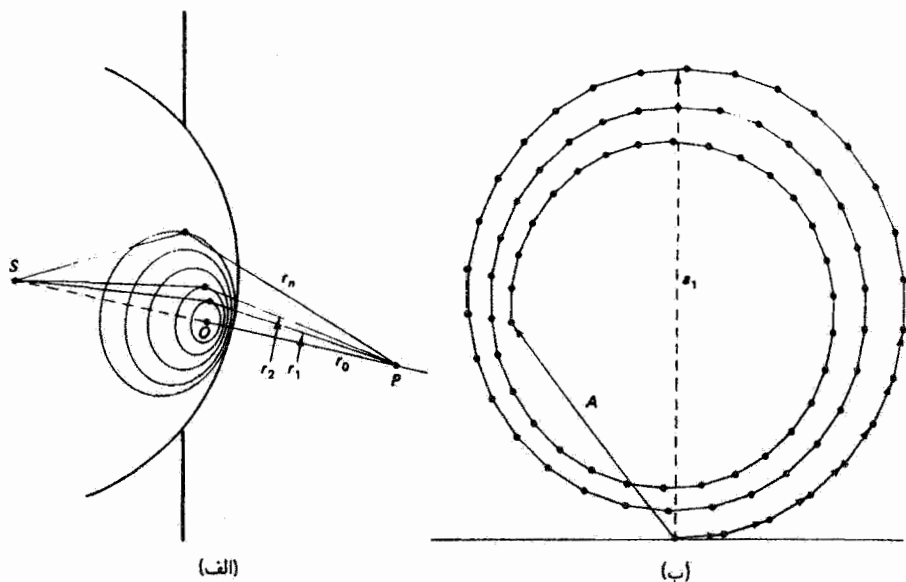
شکل ۳-۱۸ نمایش ضریب تمایل.

که در آن a_0 دامنه در جهت پیش سو ($\theta = 0$) است. توجه کنید که در جهت معکوس $a = 0$.
توجه نظری برای این رابطه را نیز می‌توان در محاسبه کیرشهوف یافت.

۴-۱۸ پراش فرنل از گشودگی دایره‌ای

فرض کنید گشودگی در شکل ۱-۱۸ یک دایره است. فرنل روش هوشمندانه‌ای برای تحلیل این مورد خاص بدون محاسبه صریح انتگرال معادله ۶-۱۸ ابداع کرد. در این روش او برای بررسی سهم ناشی از قسمت‌های مختلف جبهه موج، گشودگی را به منطقه‌هایی با تقارن دایره‌ای حول محور SOP تقسیم کرد. وضعیت برای یک جبهه موج کروی به مرکز S که از گشودگی خارج می‌شود در شکل ۴-۱۸ الف نشان داده شده است. منطقه‌ها با دایره‌هایی با فاصله‌های خاص روی جبهه موج طوری تعیین می‌شوند که هر منطقه به‌طور متوسط نسبت به منطقه قبل به اندازه $\lambda/2$ دورتر از نقطه میدان P است. بنابراین، در شکل ۴-۱۸ الف داریم $r_1 = r_0 + \lambda/2$ ، $r_2 = r_0 + \lambda$ ، $r_3 = r_0 + 3\lambda/2$ ، $r_4 = r_0 + 2\lambda$ ، $r_5 = r_0 + 5\lambda/2$ ، $r_6 = r_0 + 3\lambda$ ، $r_7 = r_0 + 7\lambda/2$ ، $r_8 = r_0 + 4\lambda$ ، $r_9 = r_0 + 9\lambda/2$ ، $r_{10} = r_0 + 5\lambda$ ، $r_{11} = r_0 + 11\lambda/2$ ، $r_{12} = r_0 + 6\lambda$ ، $r_{13} = r_0 + 13\lambda/2$ ، $r_{14} = r_0 + 7\lambda$ ، $r_{15} = r_0 + 15\lambda/2$ ، $r_{16} = r_0 + 8\lambda$ ، $r_{17} = r_0 + 17\lambda/2$ ، $r_{18} = r_0 + 9\lambda$ ، $r_{19} = r_0 + 19\lambda/2$ ، $r_{20} = r_0 + 10\lambda$ ، $r_{21} = r_0 + 21\lambda/2$ ، $r_{22} = r_0 + 11\lambda$ ، $r_{23} = r_0 + 23\lambda/2$ ، $r_{24} = r_0 + 12\lambda$ ، $r_{25} = r_0 + 25\lambda/2$ ، $r_{26} = r_0 + 13\lambda$ ، $r_{27} = r_0 + 27\lambda/2$ ، $r_{28} = r_0 + 14\lambda$ ، $r_{29} = r_0 + 29\lambda/2$ ، $r_{30} = r_0 + 15\lambda$ ، $r_{31} = r_0 + 31\lambda/2$ ، $r_{32} = r_0 + 16\lambda$ ، $r_{33} = r_0 + 33\lambda/2$ ، $r_{34} = r_0 + 17\lambda$ ، $r_{35} = r_0 + 35\lambda/2$ ، $r_{36} = r_0 + 18\lambda$ ، $r_{37} = r_0 + 37\lambda/2$ ، $r_{38} = r_0 + 19\lambda$ ، $r_{39} = r_0 + 39\lambda/2$ ، $r_{40} = r_0 + 20\lambda$ ، $r_{41} = r_0 + 41\lambda/2$ ، $r_{42} = r_0 + 21\lambda$ ، $r_{43} = r_0 + 43\lambda/2$ ، $r_{44} = r_0 + 22\lambda$ ، $r_{45} = r_0 + 45\lambda/2$ ، $r_{46} = r_0 + 23\lambda$ ، $r_{47} = r_0 + 47\lambda/2$ ، $r_{48} = r_0 + 24\lambda$ ، $r_{49} = r_0 + 49\lambda/2$ ، $r_{50} = r_0 + 25\lambda$ ، $r_{51} = r_0 + 51\lambda/2$ ، $r_{52} = r_0 + 26\lambda$ ، $r_{53} = r_0 + 53\lambda/2$ ، $r_{54} = r_0 + 27\lambda$ ، $r_{55} = r_0 + 55\lambda/2$ ، $r_{56} = r_0 + 28\lambda$ ، $r_{57} = r_0 + 57\lambda/2$ ، $r_{58} = r_0 + 29\lambda$ ، $r_{59} = r_0 + 59\lambda/2$ ، $r_{60} = r_0 + 30\lambda$ ، $r_{61} = r_0 + 61\lambda/2$ ، $r_{62} = r_0 + 31\lambda$ ، $r_{63} = r_0 + 63\lambda/2$ ، $r_{64} = r_0 + 32\lambda$ ، $r_{65} = r_0 + 65\lambda/2$ ، $r_{66} = r_0 + 33\lambda$ ، $r_{67} = r_0 + 67\lambda/2$ ، $r_{68} = r_0 + 34\lambda$ ، $r_{69} = r_0 + 69\lambda/2$ ، $r_{70} = r_0 + 35\lambda$ ، $r_{71} = r_0 + 71\lambda/2$ ، $r_{72} = r_0 + 36\lambda$ ، $r_{73} = r_0 + 73\lambda/2$ ، $r_{74} = r_0 + 37\lambda$ ، $r_{75} = r_0 + 75\lambda/2$ ، $r_{76} = r_0 + 38\lambda$ ، $r_{77} = r_0 + 77\lambda/2$ ، $r_{78} = r_0 + 39\lambda$ ، $r_{79} = r_0 + 79\lambda/2$ ، $r_{80} = r_0 + 40\lambda$ ، $r_{81} = r_0 + 81\lambda/2$ ، $r_{82} = r_0 + 41\lambda$ ، $r_{83} = r_0 + 83\lambda/2$ ، $r_{84} = r_0 + 42\lambda$ ، $r_{85} = r_0 + 85\lambda/2$ ، $r_{86} = r_0 + 43\lambda$ ، $r_{87} = r_0 + 87\lambda/2$ ، $r_{88} = r_0 + 44\lambda$ ، $r_{89} = r_0 + 89\lambda/2$ ، $r_{90} = r_0 + 45\lambda$ ، $r_{91} = r_0 + 91\lambda/2$ ، $r_{92} = r_0 + 46\lambda$ ، $r_{93} = r_0 + 93\lambda/2$ ، $r_{94} = r_0 + 47\lambda$ ، $r_{95} = r_0 + 95\lambda/2$ ، $r_{96} = r_0 + 48\lambda$ ، $r_{97} = r_0 + 97\lambda/2$ ، $r_{98} = r_0 + 49\lambda$ ، $r_{99} = r_0 + 99\lambda/2$ ، $r_{100} = r_0 + 50\lambda$.

است. البته می‌توان هر یک از این منطقه‌های فرنل یا نیم‌دوره را به قسمت‌های کوچکتر تقسیم کرد به طوری که برای هر یک از منطقه‌ها فاز از ابتدا تا انتها به اندازه π تغییر کند. می‌توانیم نشان دهیم که سهم کل ناشی از این زیرمنطقه‌ها دارای فاز مؤثری بین فازهای ابتدا و انتهای منطقه است به طوری که اختلاف فاز مؤثر مربوط به منطقه‌های نیم‌دوره متوالی برابر با π می‌شود. این وضعیت از شکل ۴-۱۸ ب نیز واضح است که در آن نمودار فاز برای موردی نشان داده شده است که هر منطقه نیم‌دوره به ۱۵ زیرمنطقه تقسیم شده است. هر فازور کوچک سهم ناشی از یک زیرمنطقه را نمایش می‌دهد. وقتی جهت یکی از این فازورها مخالف جهت اولین فازور بشود اولین منطقه نیم‌دوره کامل می‌شود. دامنه a_1 (خط چین) نمایشگر برآیند زیرمنطقه‌های اولین منطقه نیم‌دوره



شکل ۱۸-۴ (الف) منطقه‌های نیم‌دوره دایره‌ای فرنل روی جبهه موج کروی خارج شونده از گشودگی. (ب) نمودار فازور برای منطقه‌های دایره‌ای فرنل. هر منطقه نیم‌دوره به ۱۵ زیرمنطقه تقسیم شده است. فازورهای انفرادی زاویه فاز متوسط زیرمنطقه‌ها را نشان می‌دهند و برای نمایش تأثیر ضریب فاز متوالیاً ۰.۵ کوتاه‌تر شده‌اند. دامنه a_1 نمایشگر اولین منطقه نیم‌دوره است، و A تمام منطقه‌های نشان داده شده، یعنی حدود $5\frac{1}{4}$ نیم‌دوره، را نمایش می‌دهد.

است. توجه کنید که این دامنه با راستای مرجع زاویه 90° می‌سازد، و در نتیجه فازور مؤثر مربوط به اولین منطقه دارای فاز $\pi/2$ است. برای تعداد زیادی زیرمنطقه، نمودار فازور به صورت دایره می‌شود و بزرگی a_1 قطر دایره است. در شکل ۱۸-۴ ب با اندکی کوچکتر کردن هر فازور نسبت به فازور قبل ضریب تمایل منظور شده است. بنابراین، دایره‌ها بسته نمی‌شوند بلکه به طرف داخل می‌پیچند. جمع امواج در P ناشی از منطقه نیم‌دوره را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A = a_1 + a_2 e^{i\pi} + a_3 e^{i2\pi} + a_4 e^{i3\pi} + \dots$$

یا

$$A = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad (14-18)$$

دامنه‌های منطقه‌ای متوالی سه تغییر مختلف را متحمل می‌شوند: (۱) افزایش تدریجی با N به علت افزایش اندک مساحت‌های منطقه‌ای، (۲) کاهش تدریجی با N به علت اثر قانون عکس مجذور به‌ازای افزایش فاصله از P ، و (۳) کاهش تدریجی با N به علت ضریب تمایل. در ارتباط با اولین مورد، می‌توان نشان داد که مساحت N امین منطقه فرنل S_N با رابطه زیر داده می‌شود

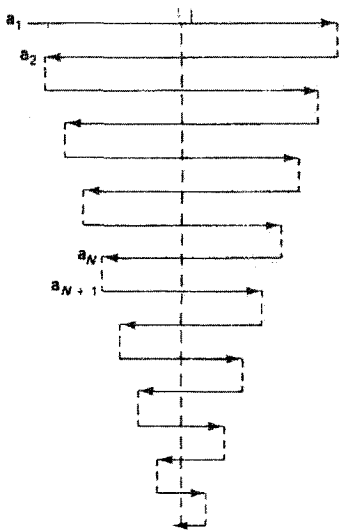
$$S_N = \frac{\pi r'_0 r_0^2}{r_0 + r'_0} \left[\frac{\lambda}{r_0} + (2N - 1) \left(\frac{\lambda}{2r_0} \right)^2 \right] \quad (15-18)$$

کمیت λ/r_0 در بیشتر موارد بسیار کوچک است. بنابراین، اگر از جمله دوم گروه در برابر جمله اول صرف‌نظر کنیم، معادله ۱۵-۱۸ تبدیل به معادله زیر می‌شود که مساحت مساوی (مستقل از N) برای منطقه‌ها به‌دست می‌دهد

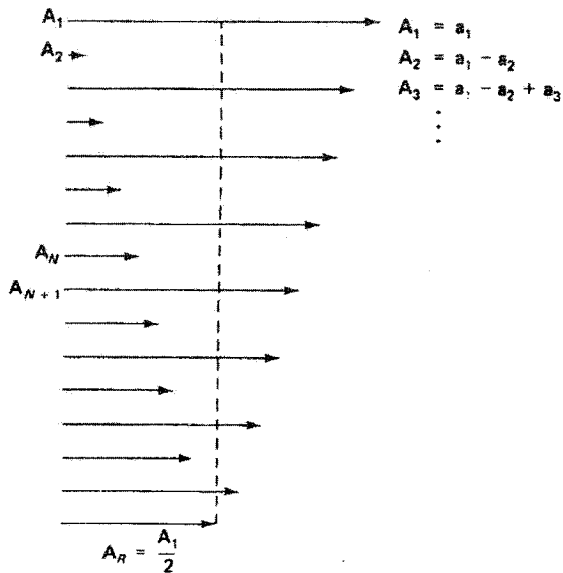
$$S_N \cong \left[\frac{\pi r'_0}{(r_0 + r'_0)} \right] r_0 \lambda \quad (16-18)$$

وجود جمله دوم، هر چند هم کوچک باشد، به معنی افزایش مساحت‌های منطقه‌ای با N و کاهش کوچک متناظر در جمله‌های متوالی معادله ۱۴-۱۸ است. اما می‌توان نشان داد که این افزایش با کاهش ناشی از مورد دوم یعنی اثر قانون عکس مجذور خنثی می‌شود. بنابراین، تنها ضریب تمایل باقی می‌ماند که علت کاهش منظم دامنه‌ها با افزایش N است.

نمودار فازور برای جمله‌های دامنه در معادله ۱۴-۱۸ در شکل ۱۸-۵ الف نشان داده شده است. فازورهای برآیند متناظر، با افزودن متوالی سهم هر منطقه، در شکل ۱۸-۵ ب نشان داده شده‌اند. فازورهای انفرادی در شکل ۱۸-۵ الف برای واضح بودن در امتداد قائم از هم جدا شده‌اند. هر فازور با ماقبل خود به اندازه 180° اختلاف فاز دارد و همچنین، به علت ضریب تمایل، از آن کوچکتر است. هر فازور برآیند در شکل ۱۸-۵ ب از ابتدای فازور a_1 شروع می‌شود و به انتهای فازور a_N برای N منطقه سهم ختم می‌شود. به تغییر زیاد در فازور برآیند A_N به‌ازای N های کوچک وقتی سهم مربوط به منطقه جدید افزوده می‌شود توجه کنید. به‌ازای N های بزرگ، نمودار به‌وضوح نشان می‌دهد که دامنه برآیند A_N به مقدار $A_R = a_1/2$ یعنی نصف دامنه مربوط به اولین منطقه سهم میل می‌کند. دیده می‌شود که دامنه برآیند، بسته به اینکه تعداد منطقه‌های سهم در آن زوج یا فرد باشد، بین مقادیر کوچکتر و بزرگتر از مقدار حدی $a_1/2$ نوسان می‌کند. بررسی دقیق شکل ۱۸-۵ نشان می‌دهد که دامنه برآیند برای N منطقه را می‌توان وقتی N زوج است با



(الف)



(ب)

شکل ۵-۱۸ نمودار فازور برای منطقه‌های نیم‌دوره فرنل. فازورهای انفرادی در (الف) و فازورهای برآیند در هر مرحله در (ب) نشان داده شده‌اند.

رابطه تقریبی زیر بیان کرد

$$A_N \cong \frac{a_1}{2} - \frac{a_N}{2} \quad \text{زوج } N \quad (۱۷-۱۸)$$

وقتی N فرد است با

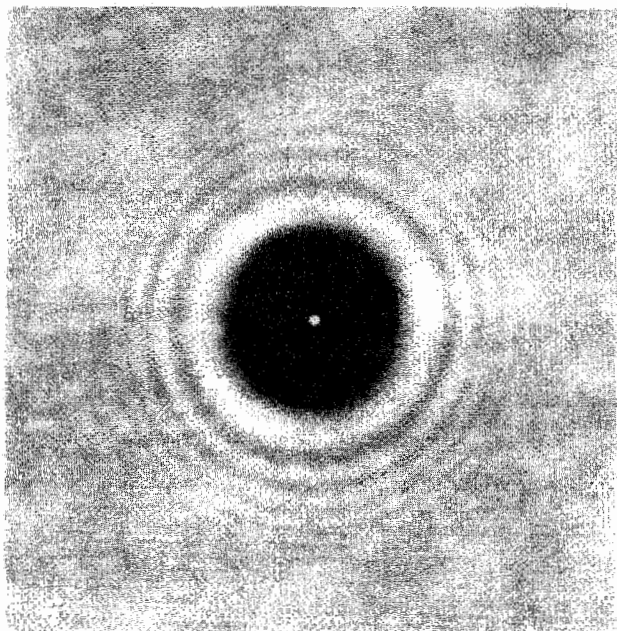
$$A_N \cong \frac{a_1}{2} + \frac{a_N}{2} \quad \text{فرد } N \quad (۱۸-۱۸)$$

با استفاده از شکل ۵-۱۸ یا معادله‌های ۱۷-۱۸ و ۱۸-۱۸، می‌توانیم به نتایج زیر برسیم:

۱. اگر N کوچک باشد به طوری که $a_1 \cong a_N$ ، دامنه برآیند به‌ازای N های فرد اساساً a_1 یعنی دامنه مربوط به اولین منطقه به‌تنهایی است، و به‌ازای N های زوج تقریباً صفر است.
۲. اگر N بزرگ باشد، همچون در مورد گشودگی نامحدود، a_N به صفر میل می‌کند و به‌ازای N های زوج یا فرد، دامنه برآیند نصف دامنه اولین منطقه سهم یعنی $a_1/2$ است.

این نتایج باعث اثرات عجیبی می‌شوند که می‌توان آنها را با آزمایش تحقیق کرد. به‌عنوان مثال، فرض کنید وقتی گشودگی دایره‌ای بر اولین منطقه فرنل منطبق است دامنه‌ای به اندازه a_1 در A_P

از اندازه‌گیری به دست می‌آید. آنگاه اگر گشودگی را وسیعتر کنیم تا دومین منطقه را نیز در بر بگیرد، نور اضافی باعث دامنه تقریباً صفر در P می‌شود! اکنون جدار کدر را کلاً برمی‌داریم و در نتیجه تمام منطقه‌های جبهه موج نامسدود دخالت می‌کنند. دامنه در P نصف دامنه مربوط به گشودگی کوچک منطبق بر منطقه اول به تنهایی یعنی $a_1/2$ می‌شود. چون تابیدگی متناسب با مجذور دامنه است، تابیدگی نامسدود در P تنها $1/4$ تابیدگی ناشی از گشودگی منطقه اول به تنهایی است. این گونه نتایج از این لحاظ عجیب‌اند که در تجربه معمولی آشکار نیستند؛ اما با درک شکل ۱۸-۵ الزاماً به دست می‌آیند. نتیجه دیگری که از لحاظ تاریخی نیز جالب است از بررسی اثر در P وقتی گشودگی با مانع گرد یا قرصی تعویض شود که تنها منطقه اول را می‌پوشاند به دست می‌آید. نوری که به P می‌رسد اکنون ناشی از تمام منطقه‌ها به استثنای منطقه اول است. بنابراین، اولین منطقه سهم منطقه دوم است، و با همان استدلالی که در بالا به کار بردیم نتیجه می‌گیریم که در P نور با دامنه $a_2/2$ دیده می‌شود. بدین ترتیب، تابیدگی در مرکز سایه مانع باید تقریباً همان باشد که در غیاب مانع روی می‌دهد! وقتی مقاله فرنل درباره پراش به آکادمی فرانسه ارائه شد، پواسون استدلال کرد که این پیش‌بینی علناً نامعقول است و در نتیجه اساس نظری آن را بی‌اعتبار کرد. اما فرنل و آراگو با آزمایش نشان دادند که این لکه، که بعداً کمی با طعنه لکه پواسون نامیده شد، مطابق پیش‌بینی واقعاً روی می‌دهد. نقش پراش یک قرص دایره‌ای کدر، شامل لکه پواسون، در شکل ۱۸-۶ نشان



شکل ۱۸-۶ نقش پراش ناشی از یک قرص دایره‌ای کدر که لکه پواسون را در مرکز نشان می‌دهد.

داده شده است. چنانکه غالباً در این گونه موارد اتفاق می افتد، مدرک تجربی قاطع قبلاً در دست بود و نزدیک به یک قرن پیش از این استدلال مشاهده شده بود. آنچه گفته شد مثالی است از احتیاج به گنجاندن نتایج تجربی در یک چارچوب مفهومی موفقیت آمیز اگر بخواهیم این نتایج تأثیری در قلمرو علم داشته باشند.

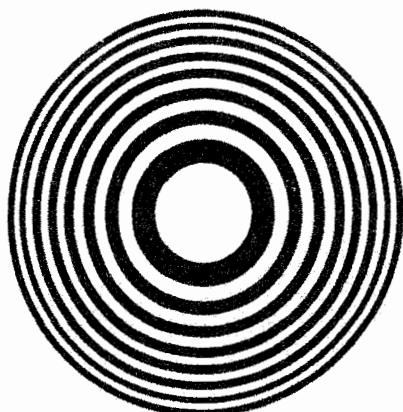
۱۸-۵ انتقال فاز نور پراشیده

در شکل ۱۸-۵ اولین فازور اختیاراً در راستای افق ترسیم شده است و سپس فازورهای دیگر به آن مربوط شده اند. اما چنانکه دیدیم، اولین فازور، که از اولین منطقه فرنل ناشی می شود، دارای فاز مؤثر $\pi/2$ عقبتر از فاز نوری است که در امتداد محور به P می رسد. بنابراین، می توانستیم نوری را که مستقیماً منتشر می شود با فازوری در راستای قائم نمایش دهیم، که در نتیجه زاویه $\pi/2$ با a_1 می ساخت. اما فازور برابند مربوط به N منطقه نیز در راستای a_1 است. از این ملاحظات الزاماً نتیجه می گیریم که فاز نور در P ، بنابه نمودار منطقه فرنل، نسبت به فاز نوری که مستقیماً در امتداد محور به P می رسد 90° اختلاف دارد. برای رفع این تناقض و سازگار کردن نتایج با فاز موج بدون پراش، فرنل ناچار شد فرض کند موجکهای ثانوی به علت پراش با دریافت فاز $\pi/2$ نسبت به نور فرودی جبهه موج را ترک می کنند. ضریب i که برای این منظور در معادله ۱۸-۶ وارد شده است در محاسبه کیرشهوف به طور بدیهی در همین معادله ظاهر می شود.

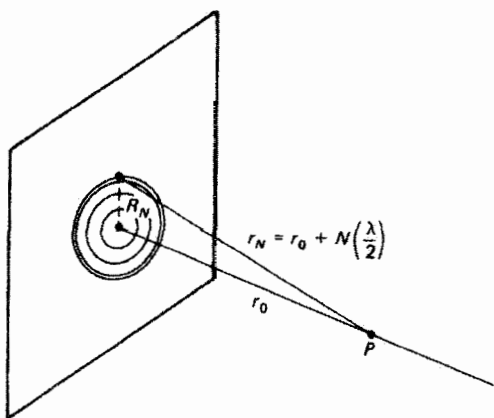
۱۸-۶ تخته منطقه فرنل

از بررسی معادله ۱۸-۱۴ دیده می شود که اگر جمله های منفی یا جمله های مثبت از این رابطه حذف شوند دامنه و تابیدگی برابند کاملاً بزرگ خواهند شد. در عمل، این کار به معنی این است که منطقه های فرنل در جبهه موج یک در میان بسته شوند. شکل ۱۸-۷ نموداری از ۱۶ منطقه فرنل را نشان می دهد که در آن منطقه های فرنل یک در میان سیاه شده اند. اگر عکس کوچک شده ای از این نمودار روی ماده شفاف تهیه شود تخته منطقه فرنل به دست می آید. اکنون شعاعهایی را محاسبه می کنیم که باید این منطقه ها داشته باشند تا نسبت به نقطه میدان معین P منطقه های نیم دوره شوند. با توجه به شکل ۱۸-۸، شعاع R_N مربوط به N امین منطقه باید در رابطه زیر صدق کند

$$R_N^2 = \left(r_0 + \frac{N\lambda}{2} \right)^2 - r^2 \quad (18-19)$$



شکل ۱۸-۷ تخته منطقه فرنل.



شکل ۱۸-۸ ترسیم برای محاسبه شعاعهای تخته منطقه فرنل.

یا

$$R_N^2 = r_0^2 \left[N \left(\frac{\lambda}{r_0} \right) + \frac{N^2}{4} \left(\frac{\lambda}{r_0} \right)^2 \right]$$

چون تنها درباره مواردی بحث می‌کنیم که در آنجا $\lambda/r_0 \ll 1$ ، جمله دوم درکروشه نسبت به جمله اول قابل چشمپوشی است. به‌عنوان مثال، به‌ازای $\lambda = 600 \text{ nm}$ و $r_0 = 3 \text{ cm}$ داریم $\lambda/r_0 = 2 \times 10^{-6}$. بنابراین، شعاعهای تخته منطقه تقریباً برابرند با

$$R_N = \sqrt{N r_0 \lambda} \quad (20-18)$$

واضح است که شعاعهای منطقه‌های متوالی در شکل ۷-۱۸ متناسب با \sqrt{N} زیاد می‌شوند. شعاع منطقه اول ($N = 1$) تعیین‌کننده r_0 یا نقطه P روی محور است که برای آن این هیئت به‌عنوان تخته منطقه کار می‌کند. اگر منطقه اول دارای شعاع R_1 باشد، شعاعهای منطقه‌های بعدی به ترتیب عبارت‌اند از $R_1, 1.41R_1, 1.73R_1, 2R_1$ ، و غیره.

مثال

اگر نور با طول موج 632.8 nm به یک تخته منطقه تابانده شود، شعاع منطقه اول را نسبت به نقطه‌ای به فاصله 30 cm از تخته منطقه روی محور مرکزی به دست آورید. چند منطقه نیم‌دوره در یک گشودگی با شعاعی 100 بار بزرگتر وجود دارد؟

حل: با استفاده از معادله ۷-۱۸ داریم

$$R_1 = \sqrt{(1)(30)(632.8 \times 10^{-7})} = 0.436 \text{ cm}$$

چون $R \propto \sqrt{N}$ ، وقتی R به اندازه 10^2 برابر بزرگتر شود N به اندازه 10^4 برابر بزرگتر می‌شود. بنابراین، شعاع 43.6 cm در برگیرنده 10000 منطقه فرنل است. ▲

اگر منطقه‌های اول، سوم، پنجم، ... عبوردهنده باشند، همچون در شکل ۷-۱۸، آنگاه معادله ۷-۱۸ به صورت زیر در می‌آید

$$A_{16} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15}$$

که در آن ۸ منطقه سهمیم هستند. وقتی این چند منطقه در یک مقیاس کوچکتر مجدداً تولید شوند ضریب تمایل چندان مهم نیست و می‌توانیم با تقریب بنویسیم $A_{16} = 8a_1$. برای مقایسه، این دامنه در P به اندازه ۱۶ بار بزرگتر از دامنه $a_1/2$ مربوط به تمام جبهه موج نامسدود است. بنابراین، در P تابیدگی 16^2 یا 256 بار بزرگتر است، حتی برای یک گشودگی که تنها ۱۶ منطقه را در بر می‌گیرد. اگر نقطه P ، مانند مثال بالا، در فاصله 30 سانتیمتری باشد، شعاع این گشودگی برای نور 632.8 nm بنا به معادله ۷-۱۸ 20 تا 1.74 mm است. این تمرکز نور در یک نقطه محوری نشان می‌دهد که تخته منطقه مانند یک عدسی کار می‌کند که برای آن P یک نقطه کانونی است. این نقطه به‌ازای $N = 1$ را نقطه کانونی اول و r_0 را فاصله کانونی f_1 می‌نامیم، به طوری که بنا به معادله ۷-۱۸ داریم

$$f_1 = \frac{R_1^2}{\lambda} \quad (21-18)$$

نقاط کانونی دیگری هم وجود دارند. وقتی نقطهٔ میدان P روی محور به تختهٔ منطقه نزدیک می‌شود، مساحت منطقه‌ای یکسانی با شعاع R_1 منطقه‌های نیم‌دورهٔ بیشتری را در بر می‌گیرد. در معادلهٔ ۱۸-۲۰، اگر R_N ثابت باشد وقتی r_0 کاهش می‌یابد N زیاد می‌شود. بدین ترتیب، اگر P به سمت تخته جابه‌جا شود، به‌ازای شعاع منطقه‌ای یکسان R_1 وقتی $r_0 = f_1/2$ داریم $N = 2$. در این نقطه هر منطقهٔ اصلی دو منطقهٔ نیم‌دوره را می‌پوشاند و تمام منطقه‌ها حذف می‌شوند. وقتی $r_0 = f_1/3$ داریم $N = 3$ ، و منطقهٔ اصلی به شعاع R_1 سه منطقه را شامل می‌شود. از این سه منطقه دو تا حذف می‌شوند اما یکی باقی ماند که در برابند سهم است. سه منطقهٔ بعدی کدر هستند، و غیره. بنابراین، می‌توان نوشت

$$A = \underbrace{a_1 - a_2 + a_3}_{a_1} - \underbrace{a_4 + a_5 - a_6}_{\text{حذف شده}} + \underbrace{a_7 - a_8 + a_9}_{a_7} - \dots \quad (22-18)$$

از شش منطقهٔ اصلی اول، به جای سه منطقه تنها یکی سهم دارد، و در نتیجه تابیدگی در $r_0/3$ تقریباً $1/9$ تابیدگی در r_0 است. البته این بحث را می‌توان به $r_0/5$ گسترش داد که در این مورد منطقهٔ اصلی به شعاع R_1 پنج منطقه را در بر می‌گیرد، و تابیدگی $1/25$ تابیدگی در r_0 است، و غیره. بدین ترتیب، سایر نقاط شدت ماکسیمم در راستای محور را باید از رابطهٔ زیر به‌دست آورد

$$f_N = \frac{R_1^2}{N\lambda} \quad \text{فرد، } N \quad (23-18)$$

مثال

فاصله‌های کانونی را برای تختهٔ منطقه‌ای که در مثال قبل توصیف شد به‌دست آورید.

حل: با استفاده از معادله‌های ۱۸-۲۳ و ۱۸-۲۰، داریم

$$f_N = \frac{R_1^2}{N\lambda} = \frac{r_0 \lambda}{N\lambda} = \frac{r_0}{N}$$

و در نتیجه، $f_1 = 30/1 = 30$ cm، $f_2 = 30/3 = 10$ cm، $f_3 = 30/5 = 6$ cm، و

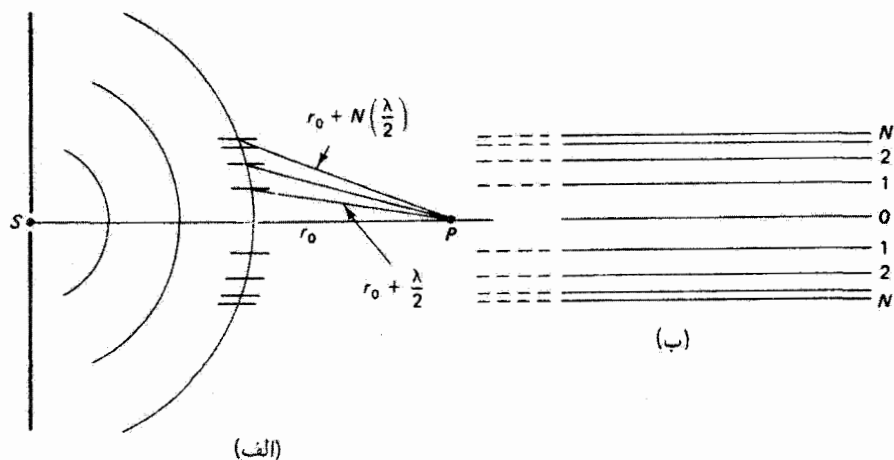
غیره.



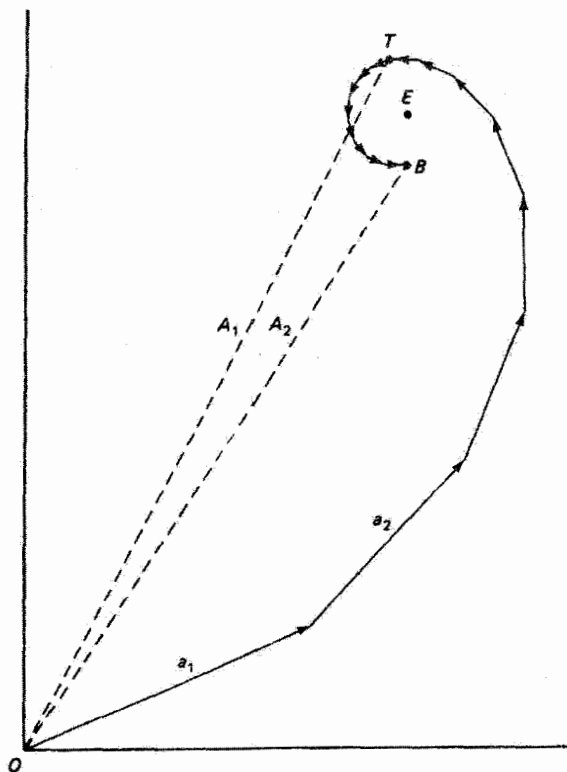
۷-۱۸ پراش فرنل از گشودگیهایی با تقارن مستطیلی

پراش از لبه‌های راست، گشودگیهای مستطیلی، و سیمها همگی به‌سادگی با تقریب دیگری بر فرمول پراش فرنل-کیرشهوف (معادله ۱۸-۶) بررسی می‌شوند. برای این هندسه، چشمه S در شکلهای ۱۸-۱ و ۱۸-۲ را به‌صورت شکاف می‌گیریم، و در نتیجه جبهه‌های موجی که از S خارج می‌شوند استوانه‌ای هستند. یادآوری می‌کنیم که امواج استوانه‌ای از لحاظ ریاضی شبیه به امواج کروی بیان می‌شوند به‌جز اینکه دامنه به‌صورت $1/\sqrt{r}$ و در نتیجه تابیدگی به‌صورت $1/r$ کاهش می‌یابد.

قبل از بررسی کتی این نوع موارد به روش فرنل، می‌خواهیم با استفاده از مفهوم منطقه‌های نیم‌دوره فرنل نتیجه را به‌طور کیفی پیش‌بینی کنیم. در اینجا این منطقه‌ها نوارهای مستطیلی در امتداد جبهه موج، همچون در شکل ۱۸-۹، هستند. نشان می‌دهیم که مجموع تمام فازورها اکنون نقاط انتهایی یک منحنی را که چنبره کورنو نامیده می‌شود به‌دست می‌دهد. مانند سابق، فاز متوسط در P برای نور از هر منطقه به اندازه نیم‌دوره یعنی π نسبت به منطقه قبل پیش می‌افتد. در شکل ۱۸-۹ ب منطقه‌های نواری مستطیلی در بالا و پایین محور SP نشان داده شده‌اند. برخلاف منطقه‌های دایره‌ای فرنل، مساحت‌های منطقه‌های مستطیلی با N سریعاً افت می‌کنند و در نتیجه دامنه‌های فازور متوالی مربوط به سهم‌های منطقه‌ای به‌طور بارزی کوچکتر می‌شوند. نمودار فازور برای دامنه‌های مختلط مربوط به منطقه‌های بالای محور می‌تواند مانند آنچه شکل ۱۸-۱۰ نشان می‌دهد باشد. اگر منطقه اول را به قسمت‌های کوچکتری با افزایش فازهای مساوی تقسیم کنیم می‌توانیم فازورهای متناظر را، چنانکه نشان داده شده است، با a_1, a_2, \dots نمایش دهیم. وقتی



شکل ۱۸-۹ نمای منطقه‌های مستطیلی نیم‌دوره فرنل روی جبهه موج استوانه‌ای (الف) از پهلو و (ب) از



شکل ۱۸-۱۰ نمودار فازور برای دو نوار اول از منطقه‌های نیم‌دوره فرنل که هر یک به منطقه‌های کوچکتری با نمو فاز مساوی تقسیم شده‌اند.

اولین منطقه نیم‌دوره کامل می‌شود، آخرین فازور به اندازه π نسبت به اولین فازور پیش افتاده است و انتهای آن در نقطه T است. در نتیجه، مجموع تمام این سهمها فازور A_1 است. در مورد منطقه‌های دایره‌ای در شکل ۱۸-۴، فازور برآیند دارای زاویه فاز $\pi/2$ است و نقطه T روی محور قائم می‌افتد. به علت کاهش سریع بزرگیهای فازورها در این مورد، زاویه فاز کمتر از $\pi/2$ است. پس از اضافه کردن تمام زیرمنطقه‌های دومین منطقه نیم‌دوره، فاز به اندازه 180° درجه دیگر تغییر می‌کند و آخرین فازور به نقطه B ختم می‌شود. فازور برآیند، که دو منطقه نیم‌دوره کامل را در بر می‌گیرد، A_2 است. با ادامه این فرایند، می‌بینیم که فازورها به یک منحنی هموار میل می‌کنند که به سمت نقطه حدی E ، مرکز چنبره، می‌پیچد. در نتیجه، فازور A_R از O به E نمایشگر سهمهای نصف جبهه موج کامل است که بالای محور SP ، در شکل ۱۸-۹ الف قرار دارد. با استدلال مشابهی برای منطقه‌های زیر این محور، یک چنبره قرینه واقع در ربع سوم به دست می‌آید که در مبدأ O به چنبره قبل متصل می‌شود. اگر مختصات تمام نقاط این چنبره کورنو معلوم

باشند، دامنه‌های ناشی از سهمهای مربوط به هر تعداد منطقه را می‌توان از این نوع ترسیم تعیین کرد و تابیدگیهای نسبی را مقایسه کرد. بررسی کمی که این نوع محاسبات را امکانپذیر می‌کند در بخش بعد آمده است.

۱۸-۸ چنبره کورنو

اگر از اثر ضریب تمایل و تغییر حاصلضرب rr' در مخرج معادله ۱۸-۶ صرف نظر کنیم، انتگرال فرنل-کیرشهوف با تقریب به صورت زیر در می‌آید

$$E_P = C \iint_{A_P} e^{ik(r+r')} da \quad (24-18)$$

که در آن تمام ثابتها در C ادغام شده‌اند. فرض می‌کنیم انتگرال سطحی روی یک سطح بسته شامل گشودگی همه جا صفر است مگر روی خود گشودگی، و در نتیجه تنها باید روی گشودگی در صفحه yz در شکل ۱۸-۱۱ الف انتگرال بگیریم. نمای جانبی که انحناى جبهه موج استوانه‌ای را نشان می‌دهد در شکل ۱۸-۱۱ ب نشان داده شده است. فاصله $r + r'$ را می‌توان از این شکل با تقریب تعیین کرد. به ازای $h \ll p$ و $h \ll q$ داریم

$$r' = (p^2 + h^2)^{1/2} = p \left(1 + \frac{h^2}{p^2} \right)^{1/2} \cong p \left(1 + \frac{h^2}{2p^2} \right)$$

بنابراین،

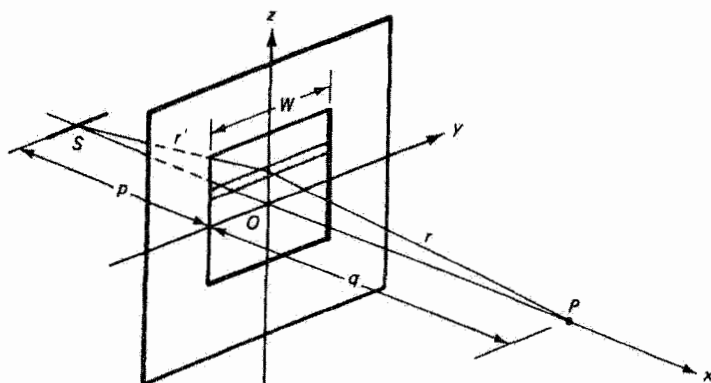
$$r' \cong p + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{p} \right)$$

و به همین ترتیب،

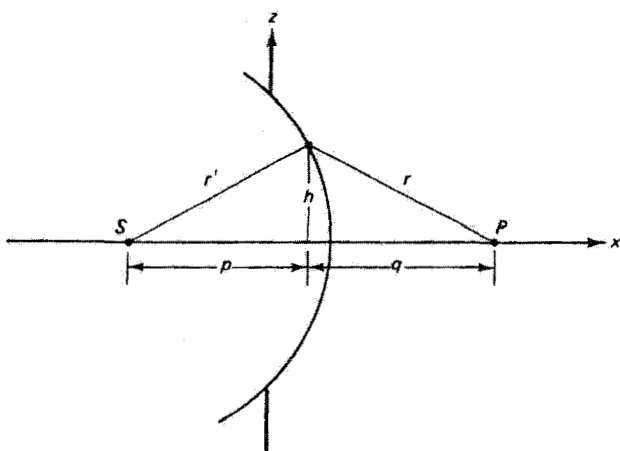
$$r \cong q + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{q} \right)$$

در نتیجه،

$$r + r' \cong (p + q) + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \frac{h^2}{2}$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۸-۱۱ (الف) جبهه‌های موج استوانه‌ای از شکاف چشمه S توسط گشودگی مستطیلی پراشیده می‌شوند. (ب) نمای جانبی (الف).

با استفاده از نمادهای اختصاری

$$D \equiv p + q \quad \text{و} \quad \frac{1}{L} \equiv \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (۲۵-۱۸)$$

داریم

$$r + r' \cong D + \frac{h^2}{2L} \quad (۲۶-۱۸)$$

بنابراین، معادله ۲۴-۱۸ به صورت زیر در می آید

$$E_P = C \iint e^{ik(D+h^r/\sqrt{L})} da$$

اگر عنصر سطح da را نوار خاکستری در شکل ۱۸-۱۱ الف بگیریم آنگاه $h = z$, $da = W dz$ و

$$E_P = CW e^{ikD} \int e^{ikz^r/\sqrt{L}} dz \quad (27-18)$$

با استفاده از $k = 2\pi/\lambda$ و تعویض متغیر

$$z = \sqrt{\frac{\lambda L}{2}} v \quad \text{یا} \quad v = \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} z \quad (28-18)$$

برای بزرگی E_P داریم

$$|E_P| = CW \left| \int e^{i\pi v^r/2} \sqrt{\frac{L\lambda}{2}} dv \right|$$

با به کار بردن قضیه اویلر برای تابع زیر انتگرال و ترکیب مجدد ثابتها، می توانیم بنویسیم

$$|E_P| = E_u \left| \int \cos\left(\frac{\pi v^r}{2}\right) dv + i \int \sin\left(\frac{\pi v^r}{2}\right) dv \right| \quad (29-18)$$

دو انتگرال در معادله بالا را انتگرالهای فرنل می نامند که آنها را با نمادهای زیر نشان می دهیم

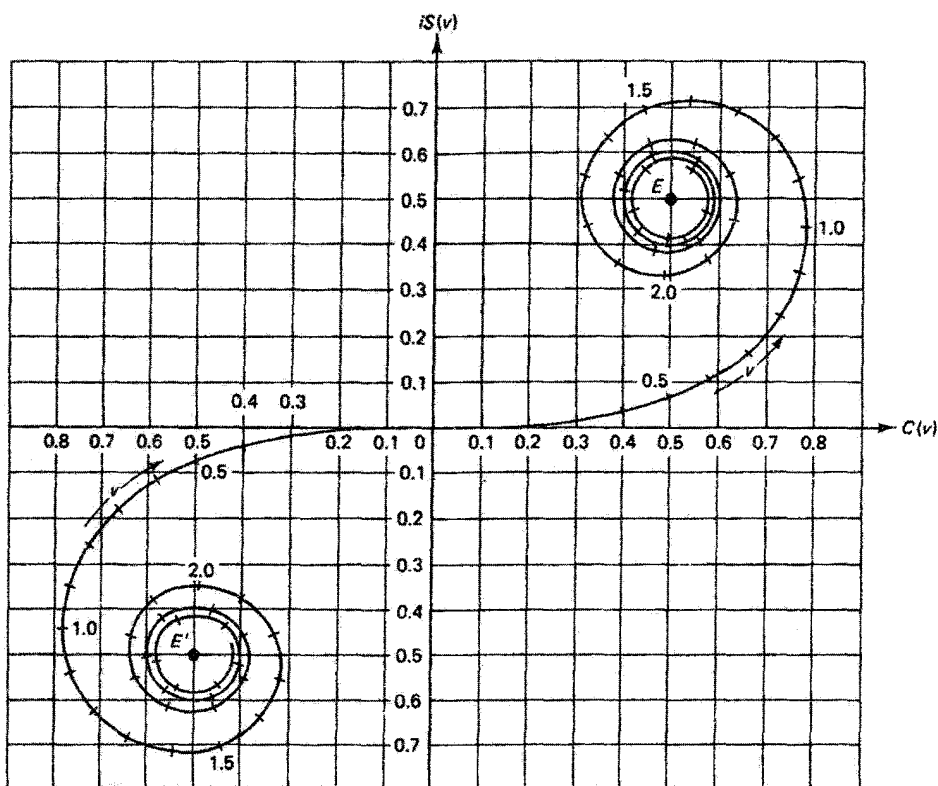
$$C(v) \equiv \int_0^v \cos\left(\frac{\pi v^r}{2}\right) dv \quad (30-18)$$

$$S(v) \equiv \int_0^v \sin\left(\frac{\pi v^r}{2}\right) dv \quad (31-18)$$

جدول ۱-۱۸ مقادیر عددی این انتگرالهای معین را به ازای مقادیر مختلف v به دست می دهد. چنانکه در کاربردهای متعدد خواهیم دید، مقدار حد بالایی v در انتگرالهای فرنل از روی اندازه ارتفاع z در گشودگی پراش تعیین می شود.

جدول ۱۸-۱ انتگرالهای فرنل

v	$C(v)$	$S(v)$	v	$C(v)$	$S(v)$
0.00	0.0000	0.0000	4.50	0.5261	0.4342
0.10	0.1000	0.0005	4.60	0.5673	0.5162
0.20	0.1999	0.0042	4.70	0.4914	0.5672
0.30	0.2994	0.0141	4.80	0.4338	0.4968
0.40	0.3975	0.0334	4.90	0.5002	0.4350
0.50	0.4923	0.0647	5.00	0.5637	0.4992
0.60	0.5811	0.1105	5.05	0.5450	0.5442
0.70	0.6597	0.1721	5.10	0.4998	0.5624
0.80	0.7230	0.2493	5.15	0.4553	0.5427
0.90	0.7648	0.3398	5.20	0.4389	0.4969
1.00	0.7799	0.4383	5.25	0.4610	0.4536
1.10	0.7638	0.5365	5.30	0.5078	0.4405
1.20	0.7154	0.6234	5.35	0.5490	0.4662
1.30	0.6386	0.6863	5.40	0.5573	0.5140
1.40	0.5431	0.7135	5.45	0.5269	0.5519
1.50	0.4453	0.6975	5.50	0.4784	0.5537
1.60	0.3655	0.6389	5.55	0.4456	0.5181
1.70	0.3238	0.5492	5.60	0.4517	0.4700
1.80	0.3336	0.4508	5.65	0.4926	0.4441
1.90	0.3944	0.3734	5.70	0.5385	0.4595
2.00	0.4882	0.3434	5.75	0.5551	0.5049
2.10	0.5815	0.3743	5.80	0.5298	0.5461
2.20	0.6363	0.4557	5.85	0.4819	0.5513
2.30	0.6266	0.5531	5.90	0.4486	0.5163
2.40	0.5550	0.6197	5.95	0.4566	0.4688
2.50	0.4574	0.6192	6.00	0.4995	0.4470
2.60	0.3890	0.5500	6.05	0.5424	0.4689
2.70	0.3925	0.4529	6.10	0.5495	0.5165
2.80	0.4675	0.3915	6.15	0.5146	0.5496
2.90	0.5624	0.4101	6.20	0.4676	0.5398
3.00	0.6058	0.4963	6.25	0.4493	0.4954
3.10	0.5616	0.5818	6.30	0.4760	0.4555
3.20	0.4664	0.5933	6.35	0.5240	0.4560
3.30	0.4058	0.5192	6.40	0.5496	0.4965
3.40	0.4385	0.4296	6.45	0.5292	0.5398
3.50	0.5326	0.4152	6.50	0.4816	0.5454
3.60	0.5880	0.4923	6.55	0.4520	0.5078
3.70	0.5420	0.5750	6.60	0.4690	0.4631
3.80	0.4481	0.5656	6.65	0.5161	0.4549
3.90	0.4223	0.4752	6.70	0.5467	0.4915
4.00	0.4984	0.4204	6.75	0.5302	0.5362
4.10	0.5738	0.4758	6.80	0.4831	0.5436
4.20	0.5418	0.5633	6.85	0.4539	0.5060
4.30	0.4494	0.5540	6.90	0.4732	0.4624
4.40	0.4383	0.4622	6.95	0.5207	0.4591



شکل ۱۸-۱۲ چنبره کورنو. بازه‌های روی چنبره معرف مقادیر متغیر v هستند.

تابدگی در P ، با توجه به اینکه $I_p \propto |E_p|^2$ ، با رابطه زیر داده می‌شود

$$I_p = I_0 (C + iS)(C - iS) = I_0 (C^2 + S^2) \quad (۳۲-۱۸)$$

اگر مقادیر انتگرالهای فرنل برحسب متغیر v را به عنوان مختصه‌های حقیقی و انگاری روی صفحه مختلط ترسیم کنیم نمودار حاصل چنبره کورنو خواهد بود (شکل ۱۸-۱۲). بنابه معادله ۳۲-۱۸، خط راستی که بین دو نقطه این منحنی کشیده شود متناسب با دامنه میدان الکتریکی در P است، زیرا بنابه رابطه فیثاغورث داریم

$$E_p^2 \propto C^2 + S^2$$

که در آن C و S فاصله‌های روی محورهای دستگاه مختصات قائم هستند. مبدأ $v = 0$ با

$z = 0$ و در نتیجه با محور y که از گشودگی شکل ۱۸-۱۱ الف می‌گذرد متناظر است. قسمت بالایی چنبره ($z > 0$ و $v > 0$) نمایشگر سهمهای مربوط به نوارهای گشودگی در بالای محور y است، و چنبرهٔ قرینه در پایین ($z < 0$ و $v < 0$) نمایشگر سهمهای مشابهی در زیر محور y است. نقاط حدی یا مراکز چنبره در E و E' به منطبقه‌های خطی در $z = \pm\infty$ مربوط می‌شوند. به علاوه، می‌توان نشان داد که متغیر v معرف طول روی خود چنبرهٔ کورنو است. عنصر طول dl روی یک منحنی در صفحهٔ xy به‌طور کلی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

در اینجا x و y به ترتیب انتگرالهای فرنل C و S هستند، و در نتیجه

$$dl^2 = \left[\cos^2 \left(\frac{\pi v^2}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi v^2}{2} \right) \right] dv^2$$

که به صورت سادهٔ زیر در می‌آید

$$dl = dv \quad (33-18)$$

۱۸-۹ کاربردهای چنبرهٔ کورنو

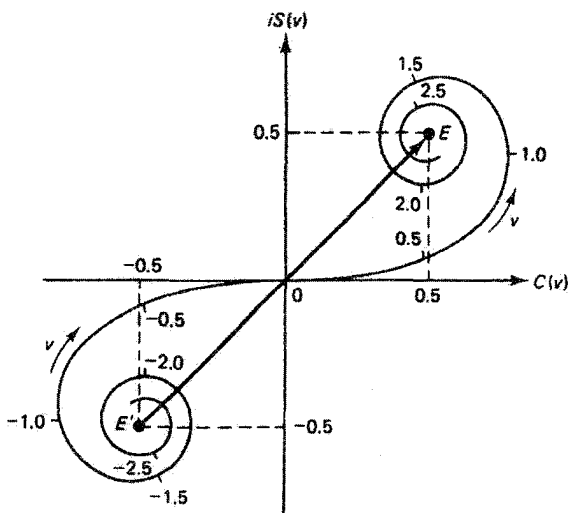
محاسبهٔ تقریبی انتگرال کیرشهوف-فرنل با استفاده از چنبرهٔ کورنو ممکن می‌شود. چند مورد خاص را در زیر بررسی می‌کنیم.

جبههٔ موج نامسدود. گسترهٔ قائم گشودگی از $-\infty$ تا $+\infty$ است. دامنهٔ برابند E_P روی چنبرهٔ کورنو در این مورد فازوری است که، چنانکه در شکل ۱۸-۱۳ نشان داده شده است، از E' به E کشیده می‌شود. این نقاط دارای مختصات $(-0.5, -0.5)$ و $(0.5, 0.5)$ هستند زیرا با توجه به فرمول انتگرال معین $\int_0^\infty \cos x^2 dx = (1/\sqrt{2})\sqrt{\pi/2}$ به‌سادگی دیده می‌شود که

$$\int_0^\infty \cos \left(\frac{\pi v^2}{2} \right) dv = \int_0^\infty \sin \left(\frac{\pi v^2}{2} \right) dv = 0.5$$

بنابراین، مؤلفه‌های x و y مربوط به E_P برابر با یک هستند و $E_P = \sqrt{2}$ ، یا با استفاده از معادلهٔ ۱۸-۳۲،

$$I_P = 2I_0 = I_u \quad (34-18)$$



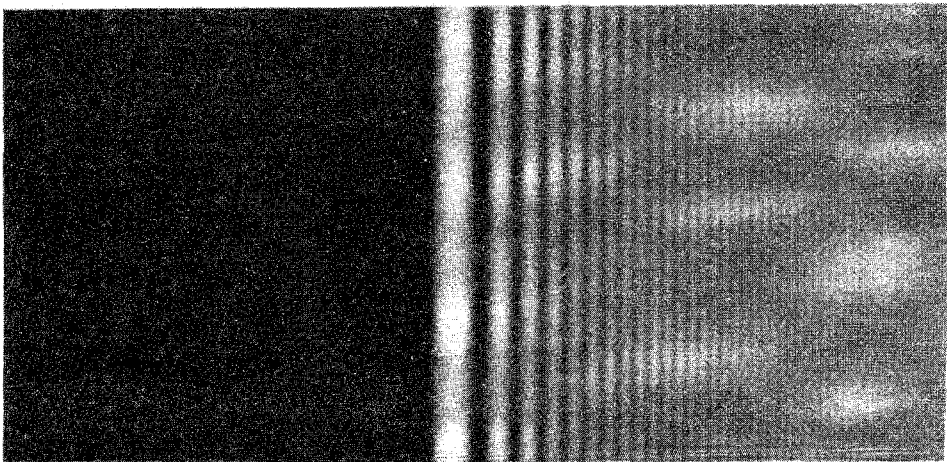
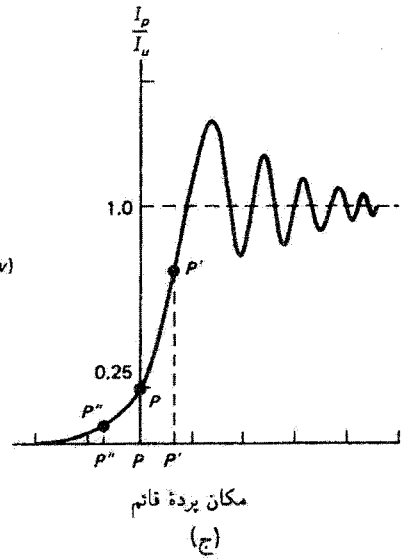
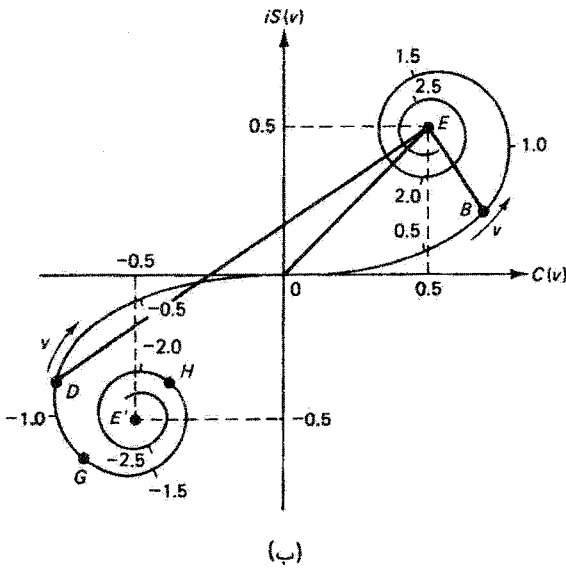
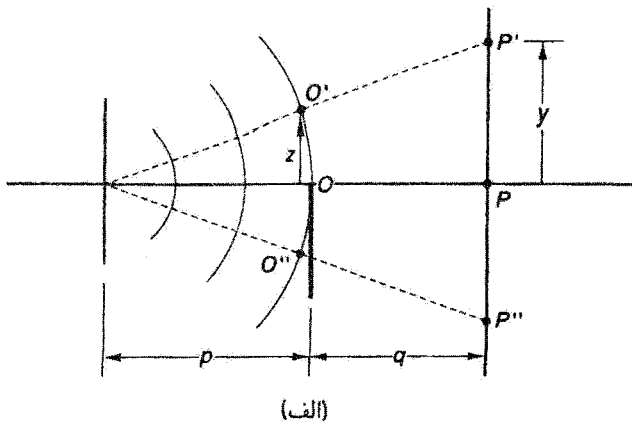
شکل ۱۸-۱۳ فازور نمایشگر جبهه موج نامسدود دارای بزرگی $\sqrt{2}$ روی چنبره کورنو است.

سایر تاییدگیا را می‌توان به آسانی با این مقدار $I_u = 2I_o$ برای جبهه موج نامسدود مقایسه کرد.

لبه راست. پراش فرنل از یک لبه راست در شکل ۱۸-۱۴ الف نشان داده شده است. در نقطه میدان P روی محور، یعنی لبه سایه هندسی که برای آن $z = v = 0$ ، نیمه بالایی منطقه‌ها و چنبره کورنو مؤثر هستند. دامنه برابند، که با OE در شکل ۱۸-۱۴ ب نشان داده شده است، دارای بزرگی $1/\sqrt{2}$ است و در نتیجه

$$I_P = \frac{1}{4} I_o = \frac{1}{4} I_u \quad (35-18)$$

تاییدگی در نقطه P در شکل ۱۸-۱۴ ج ترسیم شده است. برای نقطه پایتتر P'' روی پرده، اکنون منطقه‌ها را نسبت به محور $O''P''$ ، که از P'' به جبهه موج درگشودگی کشیده شده است، در نظر می‌گیریم. برای P'' نقطه O'' مرکز جبهه موج را نشان می‌دهد، همچنانکه نقطه O مرکز جبهه موج نسبت به نقطه P را مشخص می‌کند. بدین ترتیب، بالای محور $O''P''$ ، یعنی "نیمه بالایی جبهه موج" جدید، بعضی از منطقه‌های اول در تاییدگی در نقطه P'' روی پرده به علت مسدودیت سهمیم نیستند. البته تمام نیمه پایینی جبهه موج به‌طور مشابهی حذف شده‌اند. منطقه‌های سهمیم که از یک مقدار مثبت متناهی z شروع می‌شوند و تا ∞ ادامه می‌یابند با دامنه BE روی چنبره کورنو نشان داده شده‌اند. وقتی نقطه مشاهده P'' از P به نقاط پایتتر روی پرده جابه‌جا می‌شود،



شکل ۱۸-۱۴ (الف) پراش لبه راست. (ب) استفاده از چنبره کورنو در تحلیل پراش لبه راست. (ج) نقش تابیدگی ناشی از پراش فرنل لبه راست. (د) فریزهای پراش ناشی از یک خط راست.

نقطه B مربوط به فازور متناظر روی چنبره کورنو از O حرکت می‌کند در حالی که سر دیگر آن در E ثابت است. می‌بینیم که دامنه و در نتیجه تابیدگی، چنانکه در شکل ۱۸-۱۴ ج نشان داده شده است، باید به طور یکنوا کاهش یابد. به وضوح دیده می‌شود که لبه سایه تیز نیست. از طرف دیگر، برای نقطه P' بالای P ، نتیجه می‌گیریم که نسبت به محور آن $O'P'$ تمام منطقه‌های بالایی به علاوه چند منطقه پایینی اول سهم هستند. دامنه متناظر در شکل ۱۸-۱۴ ب مانند DE است. وقتی P' به سمت بالایی پرده حرکت می‌کند، D روی چنبره به سمت پایین حرکت می‌کند. در این مورد، همچنانکه D روی حلقه‌های چنبره دور می‌زند، طول DE با نقاط ماکسیم و مینیم مختلف، چنانکه در شکل ۱۸-۱۴ ج نشان داده شده است، نوسان می‌کند.

مثال

تابیدگی در اولین ماکسیم بالای لبه سایه را محاسبه کنید.

حل: در نقطه ماکسیم اول، ابتدای فازور در دورترین نقطه (G در شکل ۱۸-۱۴ ب) نسبت به E قرار دارد. از روی منحنی شکل ۱۸-۱۲، مقدار $v = ۱٫۲$ را در این نقطه می‌خوانیم. آنگاه از جدول ۱۸-۱ داریم

$$C(۱٫۲) = -۰٫۷۱۵۴ \quad \text{و} \quad S(۱٫۲) = -۰٫۶۲۳۴$$

در حالی که در E داریم $S(\infty) = C(\infty) = ۰٫۵$. بنابراین، بزرگی فازور GE برابر است با

$$E_P = [(-۰٫۷۱۵۴ - ۰٫۵)^2 + (-۰٫۶۲۳۴ - ۰٫۵)^2]^{1/2} = ۱٫۶۵۵$$

و

$$I_P = (۱٫۶۵۵)^2 I_0 = ۲٫۷۴ I_0 = ۱٫۳۷ I_u$$

▲ تابیدگی در اولین ماکسیم $۱٫۳۷$ برابر تابیدگی نامسدود است.

به همین ترتیب، با محاسبه بزرگی اولین دامنه مینیم (HE در شکل ۱۸-۱۴ ب) به دست می‌آوریم $I_P = ۰٫۷۸ I_u$ ، و غیره. منحنی تابیدگی به مقدار I_u مربوط به جبهه موج نامسدود میل می‌کند. عکسی از نقش پراش در شکل ۱۸-۱۴ د نشان داده شده است.

با توجه به شکل ۱۸-۱۴ الف، می‌توان نقاط در ارتفاع v روی پرده را به نقاط متناظر در ارتفاع z روی جبهه موج با معادله زیر مربوط کرد

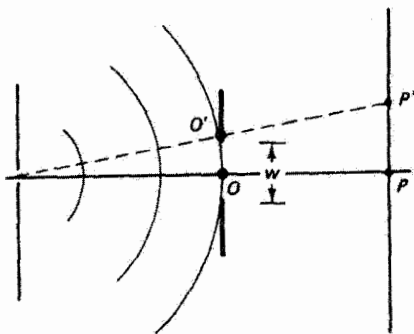
$$y = \left(\frac{p+q}{p} \right) z$$

مقدار z طول v روی چنبره کورنو را تعیین می‌کند و محاسبه کمی تاییدگی روی پرده را ممکن می‌سازد.

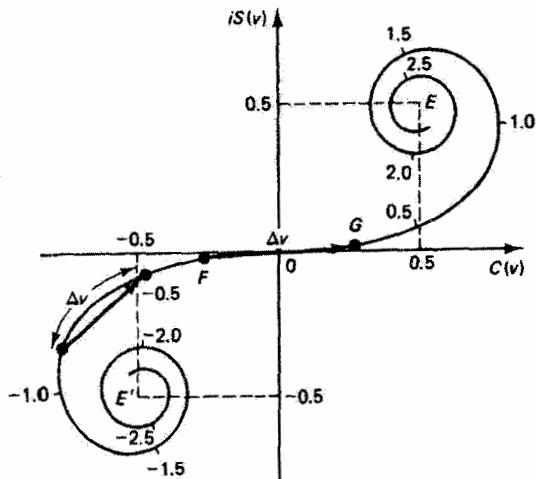
تک شکاف. اگر گشودگی پراشده یک تک شکاف با پهنای w ، همچون در شکل ۱۸-۱۵ الف، باشد آنگاه $w = z$ ، و از معادله ۱۸-۲۸ داریم

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} \Delta z = \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} w \quad (18-36)$$

همینکه L از معادله ۱۸-۲۵ محاسبه شد، بازه سهم Δv روی چنبره کورنو را می‌توان تعیین کرد. توجه کنید که v به منزله یک متغیر بدون بعد جهانی است که باعث می‌شود بتوانیم چنبره کورنو را برای ترکیبهای مختلف p ، q و λ به کار ببریم. به عنوان مثال، اگر $p = q = 20 \text{ cm}$ و $\lambda = 500 \text{ nm}$



(الف)



(ب)

شکل ۱۸-۱۵ (الف) پراض فرنل از یک تک شکاف، و (ب) نمایش دامنه آن روی چنبره کورنو.

برای شکافی با پهنای 1 cm و $0^\circ 1$ داریم $\Delta v = 0^\circ 32$. برای محاسبه تابیدگی در P ، طولی به اندازه $\Delta v = 0^\circ 32$ روی چنبره کورنو که، چنانکه می بینیم، نسبت به مبدأ به طور متقارن قرار گرفته است، دامنه E_p را تعیین می کند. برای نقطه ای مانند P' بالای P ، منطقه های سهم یک گروه در نیمه پایینی جبهه نامسدود تشکیل می دهند. نقطه مرکز آنها z' زیر محور $O'P'$ مرکز v' مربوط به طول Δv روی چنبره را بنابه معادله $18-28$ تعیین می کند. وقتی P' بالای محور دور می شود طول Δv روی چنبره، چنانکه نشان داده شده است، به سمت مرکز پایینی چنبره حرکت می کند. اگر چه Δv از لحاظ طول ثابت است اما جای آن روی قسمت های مختلف چنبره تعیین کننده طول وترهای مختلف و E_p های مختلف است. وقتی P' زیر محور است Δv روی چنبره بالایی قرار می گیرد. بدین طریق، تابیدگی تمام نقش را می توان محاسبه کرد. از این رهیافت می توانیم استدلال کنیم که نقش پراش شکاف نسبت به مرکز آن متقارن است و همچنین تابیدگی در حالی که نوسان می کند هرگز صفر نیست.

مثال

پهنای شکاف در شکل $18-15$ الف را 1 mm و طول موج نور را 500 nm بگیرد. فاصله بین شکاف چشمه که نور از آن خارج می شود و شکاف پراشده 20 cm است. نقش پراش روی پرده ای به فاصله 30 cm از شکاف مشاهده می شود. تابیدگی را در ارتفاع 1 mm بالای محور روی پرده به دست آورید.

حل: برای پارامتر L داریم $L = pq/(p+q) = 20 \times 30/(20+30) = 12 \text{ cm}$ می خواهیم تابیدگی را در نقطه ای مانند P' در شکل $18-15$ الف به دست آوریم. منطقه های سهم مانند منطقه هایی هستند که در وتر FG در شکل $18-15$ ب واقع شده اند اما برای آنها طول کمان FG اندکی به پایین منتقل شده است. تعداد منطقه هایی که از نیمه بالایی جبهه موج نسبت به P' سهم می گیرند از آنهایی که نسبت به P سهم می گیرند کمتر است. روی پرده، نقطه P' متناظر است با $y = 1 \text{ mm}$. نقطه متناظر روی جبهه موج عبارت است از

$$z = \left(\frac{p}{p+q} \right) y = \frac{20}{50} (1) = 0.4 \text{ mm}$$

بنابراین، نقطه متناظر روی چنبره کورنو (مانند G) با طول کمان زیر تعیین می شود

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} z = \sqrt{\frac{2}{(0.12)(500 \times 10^{-9})}} (0.4 \times 10^{-3}) = 2.3094$$

برای تعیین نقطه پایینی v_2 (مانند F)، توجه کنید که طول Δv مستقل از نقطه مشاهده است و می‌توان آن را از رابطه زیر به دست آورد

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} \Delta z = \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} w$$

که در آن برای پهنای شکاف w داریم $w = 1 \text{ mm}$. بنابراین، $\Delta v = 5,7735$ و

$$v_2 = v_1 - \Delta v = 2,3094 - 5,7735 = -3,4641$$

وتر از v_1 تا v_2 روی چنبره کورنو دامنه سهمی است. مختصات این نقاط با درونیابی از جدول ۱۸-۱ به دست می‌آیند:

$$\text{برای } v_1: S(2,3094) = 0,5594 \quad \text{و} \quad C(2,3094) = 0,6199$$

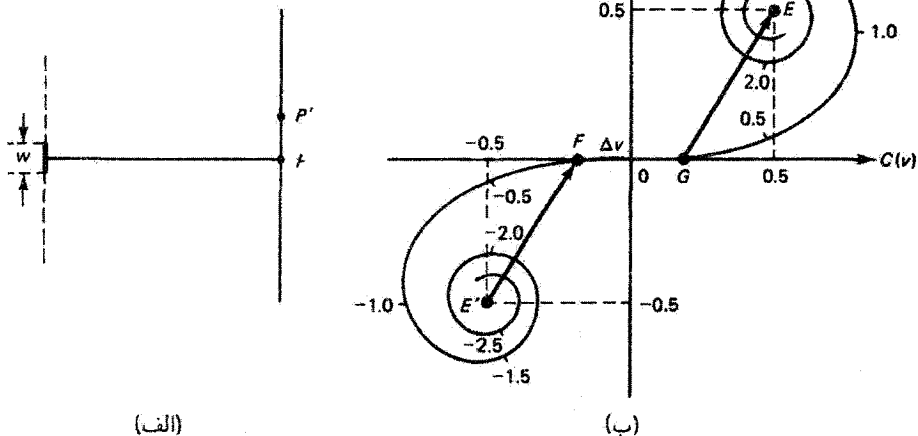
$$\text{برای } v_2: S(-3,4641) = -0,4204 \quad \text{و} \quad C(-3,4641) = -0,4988$$

اکنون می‌توانیم دامنه را از رابطه زیر محاسبه کنیم

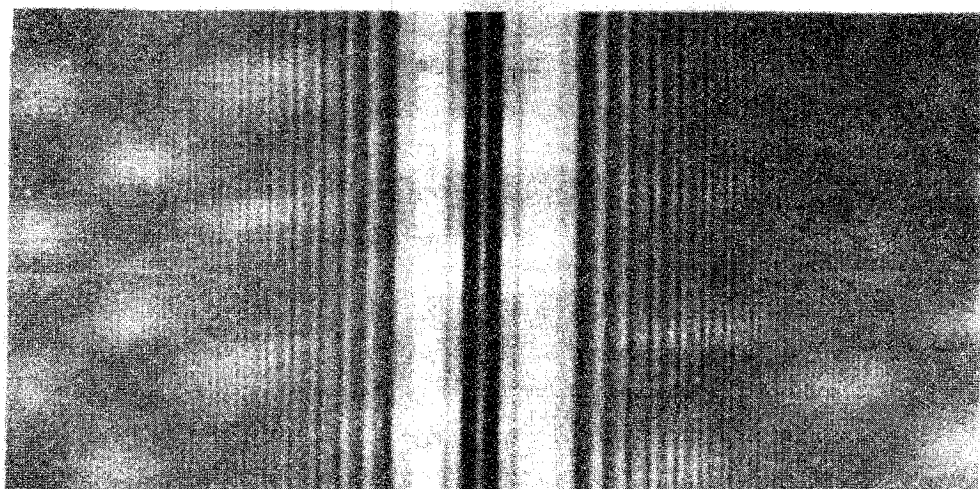
$$E_P^2 = [0,6199 - (-0,4988)]^2 + [0,5594 - (-0,4204)]^2 = 2,211$$

بنابراین، تابیدگی در نقطه مزبور برابر است با $1,11I_0 = 2,211I_0$. یعنی تابیدگی روی پرده، 1 mm بالای محور، $1,11$ برابر تابیدگی مربوط به جبهه نامسدود در این نقطه است. ▲

سیم. فرض کنید شکاف باریک شکل ۱۸-۱۵ الف را با یک مانع کدر دراز و باریک مانند یک سیم تعویض کرده‌ایم (شکل ۱۸-۱۶). اگر پهنای شکاف و قطر سیم با هم برابر باشند، یک جابه‌جایی دقیق بین منطقه‌های عبوردهنده و سدکننده جبهه موج روی می‌دهد. اکنون در محاسبه دامنه برآیند E_P باید از تمام قسمتهای چنبره کورنو به استثنای قسمتی که در شکل ۱۸-۱۶ با Δv نشان داده شده است استفاده کنیم. واضح است که از این وضعیت، چنانکه نشان داده شده است، دو دامنه به دست می‌آیند که باید آنها را با هم جمع کرد. وقتی نقاط مختلف میدان مانند P' را در نظر می‌گیریم، بازه حذف شده Δv روی چنبره مانند سابق حرکت می‌کند. نقش مرکب در یک عکس واقعی در شکل ۱۸-۱۷ نشان داده شده است. همچنین، مثالی از یک نقش فرنل پیچیده‌تر از آنهایی که در بالا بررسی کردیم در شکل ۱۸-۱۸ نشان داده شده است.



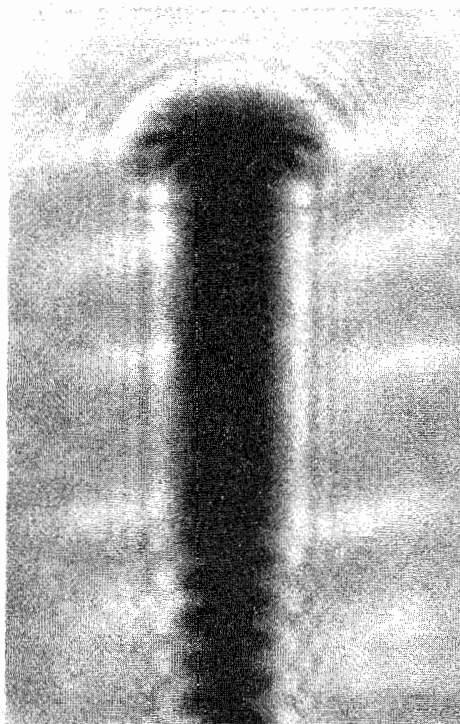
شکل ۱۶-۱۸ (الف) پراش فرنل از سیم، و (ب) نمایش دامنه آن روی چنبره کورنو.



شکل ۱۷-۱۸ نقش پراش فرنل برای سیم باریک.

۱۸-۱۰ اصل بایینه

گشودگیهایی مانند گشودگیهای شکل‌های ۱۵-۱۸ و ۱۶-۱۸، که در آن‌ها ناحیه‌های شفاف و کدر دقیقاً تعویض شده‌اند، گشودگیهای مکمل نامیده می‌شوند. اگر A و B دو گشودگی مکمل باشند



شکل ۱۸-۱۸ سایه فرنل برای یک پیچ.

و آنها را به نوبت در جای خود قرار دهیم و دامنه را برای هر یک از آنها در نقطه‌ای از پرده تعیین کنیم، مجموع این دامنه‌ها باید با دامنه نامسدود در این نقطه برابر باشد. این محتوای اصل باینه است که آن را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$E_A + E_B = E_u \quad (۳۷-۱۸)$$

که در آن A و B نمایشگر دو گشودگی مکمل اختیاری هستند. به عنوان مثال، برای گشودگیهای شکاف و سیم که قبلاً بررسی کردیم، می‌توانیم در شکل ۱۸-۱۶ ب جمع فازورها در P روی پرده را با رابطه زیر بیان کنیم

$$E'F + FG + GE = E'E$$

که در آن $E'F + GE$ دامنه ناشی از سیم، FG دامنه ناشی از شکاف، و $E'E$ دامنه نامسدود است. یک مورد خاص جالب توجه از اصل باینه نقطه‌ای است که در آن $E_u = 0$. بنابراین، در این نقطه از معادله ۳۷-۱۸ داریم $E_A = -E_B$ ، و $I_A = I_B$. در عمل، پراش فرنل دامنه‌های

$E_u = 0$ را بدون گشودگی ایجاد نمی‌کند، اما پراش فرانوفر، همچون در مورد نقش تشکیل شده توسط چشمه نقطه‌ای و عدسی، به وجود می‌آورد. برای ناحیه خارج از قرص کوچک ابری، اساساً $E_u = 0$. بنابراین، اگر گشودگیهای مکملی در این نوع دستگاهها وارد کنیم نقشهای پراش یکسانی خارج از تصویر مرکزی به وجود می‌آورند. مثلاً، عکسهای شفاف مثبت و منفی از یک نقش باعث نقش پراش یکسانی می‌شوند. این موضوع به‌ویژه یادآور این واقعیت است که هولوگرامهای مثبت و منفی تصویر هولوگرافیک یکسانی ایجاد می‌کنند.

مسائل

۱۸-۱ به روزنه‌ای به قطر ۱ mm امواج تخت نور ۵۴۶ nm تابانده می‌شود. مطابق با معیار متداول، چه روشی (میدان نزدیک یا میدان دور) را می‌توان برای مسئله پراش به‌کار برد وقتی آشکارساز در فاصله ۵۰ cm، ۱ m، و ۵ m از گشودگی باشد؟

۱۸-۲ به یک روزنه دایره‌ای به قطر ۳ mm در یک جدار کدر امواج تخت با طول موج ۵۵۰ nm به‌طور عمودی تابانده می‌شود. یک فوتوسلول کوچک که روی محور مرکزی حرکت می‌کند چگالی توان باریکه پراشیده را ثبت می‌کند. در حالی که فوتوسلول به پرده نزدیک می‌شود، موقعیتهای سه ماکسیمم و مینیمم اول را تعیین کنید.

۱۸-۳ یک چشمه دور نور سدیم (۵۸۹.۳ nm) به روزنه‌ای دایره‌ای نور می‌تاباند. وقتی قطر روزنه را افزایش می‌دهیم، تابیدگی در یک نقطه محوری به فاصله ۱.۵ m از روزنه متناوباً ماکسیمم و مینیمم می‌شود. به‌ازای چه قطرهایی برای روزنه

(الف) دو ماکسیمم اول و

(ب) دو مینیمم اول به‌وجود می‌آیند.

۱۸-۴ امواج تخت نور تکفام (۶۰۰ nm) به یک گشودگی فرود می‌آیند. یک آشکارساز روی محور به فاصله ۲۰ cm از صفحه گشودگی قرار دارد.

(الف) مقدار R_1 ، شعاع اولین منطقه نیم‌دوره فرنل، را نسبت به آشکارساز به‌دست آورید.

(ب) اگر گشودگی یک دایره به شعاع ۱ cm و به مرکز محور باشد، چند منطقه نیم‌دوره را در

بر می‌گیرد؟

(ج) اگر گشودگی یک تخته منطقه باشد که منطقه‌های آن یک در میان سیاه شده‌اند و شعاع

اولین منطقه R_1 باشد که در قسمت (الف) به‌دست آمد، سه فاصله کانونی اول را برای این تخته منطقه تعیین کنید.

۱۸-۵ شعاعهای تخته منطقه در معادله ۱۸-۲ برای مورد امواج تخت فرودی به گشودگی به دست آمدند. اگر امواج کروی از یک چشمه نقطه‌ای محوری به فاصله p از گشودگی را در نظر بگیریم، نشان دهید تغییر لازم منجر می‌شود به

$$R_N = \sqrt{NL\lambda}$$

L با رابطه $1/L = 1/p + 1/q$ تعریف می‌شود که در آن q فاصله از گشودگی تا نقطه محوری آشکارسازی است.

۱۸-۶ قسمتهای (الف) و (ب) در مسئله ۱۸-۴ را برای مورد چشمه نقطه‌ای به فاصله 10 cm از گشودگی حل کنید. از نتایج مسئله ۱۸-۵ استفاده کنید.

۱۸-۷ یک چشمه نقطه‌ای نور تکفام (500 nm) به فاصله 50 cm از صفحه گشودگی قرار دارد. نقطه آشکارسازی در طرف دیگر صفحه گشودگی و به فاصله 50 cm از آن است.

(الف) قسمت عبوردهنده در صفحه گشودگی یک نوار دایره‌ای به شعاع داخلی 500 mm و شعاع خارجی 935 mm است. تابیدگی را در آشکارساز نسبت به تابیدگی در آنجا برای جهت موج نامسدود به دست آورید. از نتایج مسئله ۱۸-۵ استفاده کنید.

(ب) به همین سؤال در موردی جواب دهید که شعاع خارجی 100 mm است.

(ج) چند منطقه نیم‌دوره در نوار دایره‌ای در هر مورد گنجداند؟

۱۸-۸ مساحت بیست و پنجمین منطقه نیم‌دوره فرنل از مساحت اولین منطقه، برای موردی که چشمه و آشکارساز 50 cm از گشودگی فاصله دارند و چشمه نور 500 nm تولید می‌کند، چند درصد اختلاف دارد؟

۱۸-۹ می‌خواهیم یک تخته منطقه بسازیم که دارای فاصله کانونی 2 m برای نور لیزر He-Ne با طول موج 6328 nm باشد. نموداری از 20° منطقه که یک درمیان سیاه شده‌اند می‌کشیم و از آن عکس شفاف کوچک شده‌ای تهیه می‌کنیم.

(الف) اگر شعاع اولین منطقه در ترسیم 11.25 cm باشد، ضریب کاهش لازم را تعیین کنید.

(ب) شعاع آخرین منطقه در ترسیم چه اندازه است؟

۱۸-۱۰ یک تخته منطقه در مرکز خود دارای منطقه نیم‌دوره کدر است. قطره‌های سه منطقه شفاف اول را طوری تعیین کنید که تخته منطقه نور موازی با طول موج 550 nm را در فاصله 25 cm از خود متمرکز کند.

۱۸-۱۱ نشان دهید که برای جبهه موج تخت فرودی مساحت‌های منطقه‌های نیم‌دوره فرنل نسبت به نقطه مشاهده در فاصله x از جبهه موج تقریباً ثابت و برابر با $\pi \lambda x$ هستند. فرض کنید $\lambda/x \ll 1$.

۱۸-۱۲ نور با طول موج 485 nm به‌طور عمودی به روزنه‌ای دایره‌ای در یک جدار کدر فرود می‌آید. اگر این روزنه چهار منطقه فرنل را به نقطه‌ای به فاصله 2 m عبور دهد قطر آن را به دست آورید. تابیدگی در این نقطه را با تقریب تعیین کنید.

۱۸-۱۳ به تک‌شکافی با پهنای 5 mm باریکه نور موازی شده‌ای با طول موج 540 nm تابانده می‌شود. برای چه نقطه مشاهده‌ای روی محور داریم $\Delta v = ?$

۱۸-۱۴ به یک شکاف چشمه واقع در یک سر میز اپتیکی نور تکفام جیوه با طول موج 435.8 nm تابانده می‌شود. باریکه‌ای که از این شکاف خارج می‌شود به یک شکاف دیگر با پهنای 5 mm و به فاصله 30 cm فرود می‌آید. نور پراشیده روی پرده‌ای که در امتداد میز اپتیکی 15 cm دورتر است مشاهده می‌شود. تابیدگی (برحسب تابیدگی نامسدود) را در پرده

(الف) روی محور و

(ب) در یک لبه سایه هندسی شکاف پراشنده به دست آورید.

۱۸-۱۵ شکافی که به آن نور سدیم فرود می‌آید در فاصله 60 cm از یک لبه راست قرار دارد و نقش پراش با سلول فوتوالکتریک در فاصله 120 cm از لبه راست مشاهده می‌شود. تابیدگی را (الف) در نقطه‌ای داخل سایه هندسی و به فاصله 2 mm از لبه آن و

(ب) در نقطه‌ای خارج از سایه هندسی و به فاصله 1 mm از لبه آن به دست آورید.

۱۸-۱۶ نور سبز صافی شده جیوه (546.1 nm) از شکافی خارج می‌شود که در فاصله 30 cm از میله‌ای به ضخامت 1.5 mm قرار دارد. نقش پراش ناشی از میله روی صفحه‌ای به فاصله 60 cm از میله مشاهده می‌شود. تابیدگی این نقش را در

(الف) مرکز سایه هندسی میله و

(ب) لبه سایه هندسی تعیین کنید.

۱۸-۱۷ با استفاده از چنبره کورنو و جدول مقادیر انتگرالهای فرنل، تابیدگی ماکسیمم و مینیمم دوم را برای نقش پراش میدان نزدیک ناشی از لبه راست محاسبه کنید.

۱۸-۱۸ پراش فرنل در پشت سیمی به ضخامت 37 mm که در فاصله 2 m از چشمه نور و 3 m از پرده قرار دارد مشاهده می‌شود. اگر طول موج نور 630 nm باشد، تابیدگی نقش پراش را

با استفاده از چنبره کورنو روی محور در پرده محاسبه کنید. جواب را به صورت یک عدد ضربدر تائیدگی نامسدود در همین نقطه بنویسید.

۱۸-۱۹ تائیدگی نسبی (در مقایسه با تائیدگی نامسدود) را روی محور اپتیکی مربوط به گشودگی شکاف دوگانه که هردو شکاف آن به فاصله 10 cm از چشمه نقطه‌ای نور تکفام (546 nm) و 10 cm از پرده مشاهده قرار دارند محاسبه کنید. پهنای شکافها 4 mm و 4 mm و جدایی مراکز آنها 25 mm است.

۱۸-۲۰ پراش تک‌شکافی با استفاده از چشمه نور تکفام (435.8 nm) که در فاصله 25 cm از شکاف قرار دارد تولید شده است. پهنای شکاف 25 mm است و آشکارساز روی محور به فاصله 25 cm از شکاف قرار دارد.

(الف) نشان دهید که پراش میدان دور در این مورد نامعتبر است.

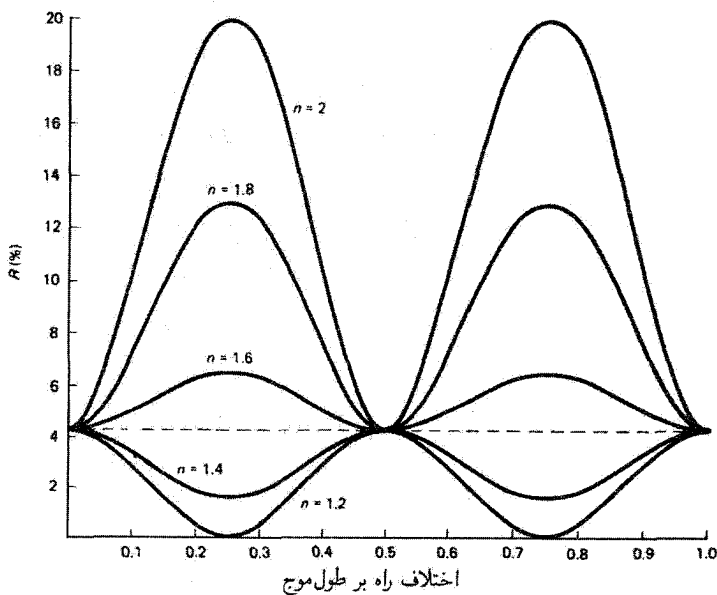
(ب) با اینهمه، نقطه‌ای را بالای محور تعیین کنید که در آن پراش فرانوفر تک‌شکاف اولین صفر در تائیدگی را پیش‌بینی می‌کند.

(ج) اکنون تائیدگی در همین نقطه را با استفاده از پراش فرنل و چنبره کورنو به دست آورید. نتیجه را برحسب تائیدگی نامسدود بیان کنید.

۱۸-۲۱ روی یک تخته شیشه‌ای ذرات کدر یکنواختی می‌پاشیم. وقتی از این تخته به یک چشمه نقطه‌ای نور در دوردست نگاه می‌کنیم، یک حفره پهن می‌بینیم که پهنای زاویه‌ای آن حدود 2° است. اندازه ذره‌ها را تخمین بزنید. [راهنمایی: از اصل باینه استفاده کنید.]

مراجع

- [1] Born, Max, and Emil Wolf. *Principles of Optics*, 5th ed. New York: Pergamon Press, 1975. Ch. 8.
- [2] Guenther, Robert. *Modern Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1990. Ch. 9.
- [3] Reynolds, George O., John B. DeVelis, George B. Parrent, Jr., and Brian J. Thompson. *Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics*. Bellingham, Wash.: SPIE Optical Engineering Press, 1989. Ch. 9.
- [4] Longhurst, R. S. *Geometrical and Physical Optics*, 2d ed. New York: John Wiley and Sons, 1967. Ch. 13.



۱۹

نظریه لایه‌های چندگانه

مقدمه

اصول فیزیک تداخل برای تک‌لایه‌های دی‌الکتریک را در فصل ۱۰ بررسی کردیم. اما در بسیاری از کاربردهای مفید و جالب توجه از لایه‌های نازک در پشته‌های چندلایه‌ای استفاده می‌شود. می‌توان لایه‌های چندتایی را با کنترل روی ضریب شکست (انتخاب ماده) و ضخامت هر لایه تبخیر کرد. این نوع فنون انعطاف زیادی در طراحی پوششهای تداخل با تقریباً هر مشخصه از قبل تعیین شده‌ای برای بازتابندگی یا تراگسیلندگی وابسته به بسامد فراهم می‌کنند. از جمله کاربردهای مفید این نوع پوششها عبارت‌اند از چندلایه‌ایهای پادبازتاب برای استفاده روی عدسیهای ابزارهای اپتیکی و صفحه‌های نمایش با صافیهای چندمنظوره که با نوارهای عبور وسیع و باریک، از طول موجهای فرابنفش تا فروسرخ نزدیک، عرضه می‌شوند؛ بازتابگرهای گرمایی و آینه‌های سرد که طول موجهای فروسرخ را به ترتیب بازتاب و عبور می‌دهند، و در نورافکنها به‌کار برده می‌شوند؛ آینه‌های دوپام متشکل از صافیهای نوار عبور که روی سطوح تقسیم‌گرهای باریکه منشوری، برای تقسیم نور به مجراهای سرخ، سبز، و آبی در دوربینهای تلویزیون رنگی، نشانده می‌شوند؛ و آینه‌های دی‌الکتریک بس‌بازتابنده برای استفاده از لیزرهای گازی و تداخل سنجهای فابری-پرو.

فنون رایانه‌ای محاسبات نسبتاً مفصلی را که در تحلیل کارکرد لایه چندگانه وارد می‌شوند به صورت یک امر عادی در آورده‌اند. اما طرح پشته چندلایه‌ای که با مشخصه‌های تعیین شده اختیاری مطابقت داشته باشد کاری دشوار باقی می‌ماند. در این فصل یک ماتریس تبدیل برای نمایش دادن لایه و مشخص کردن کارکرد آن می‌سازیم. این رهیافت با آنچه در فصل ۱۱ برای بررسی بازتابهای چندگانه از لایه نازک به کار برده شد تفاوت دارد. در آنجا دامنه‌های تمام باریکه‌های بازتابیده یا عبور کرده را برای به دست آوردن بازتابندگی یا تراگسیلندگی با هم جمع کردیم. در بررسی کلی زیر، مفید خواهد بود که فرض کنیم تمام باریکه‌های بازتابیده و عبور کرده قبلاً در میدانهای الکتریکی منتظری جمع زده شده‌اند که در شرایط مرزی عمومی لازم برای معادلات ماکسول صدق می‌کنند.

روابطی را که از نظریه الکترومغناطیسی لازم داریم (فصل ۸) در اینجا خلاصه می‌کنیم. انرژی یک موج الکترومغناطیسی تخت در راستای بردار پویستینگ انتشار می‌یابد و با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (۱-۱۹)$$

رابطه بین بزرگیهای میدان الکتریکی و مغناطیسی در این موج عبارت است از

$$E = vB \quad (۲-۱۹)$$

که در آن سرعت موج v را می‌توان بر حسب ضریب شکست بیان کرد:

$$n = \frac{c}{v} \quad (۳-۱۹)$$

سرعت موج در خلأ ثابت و برابر است با

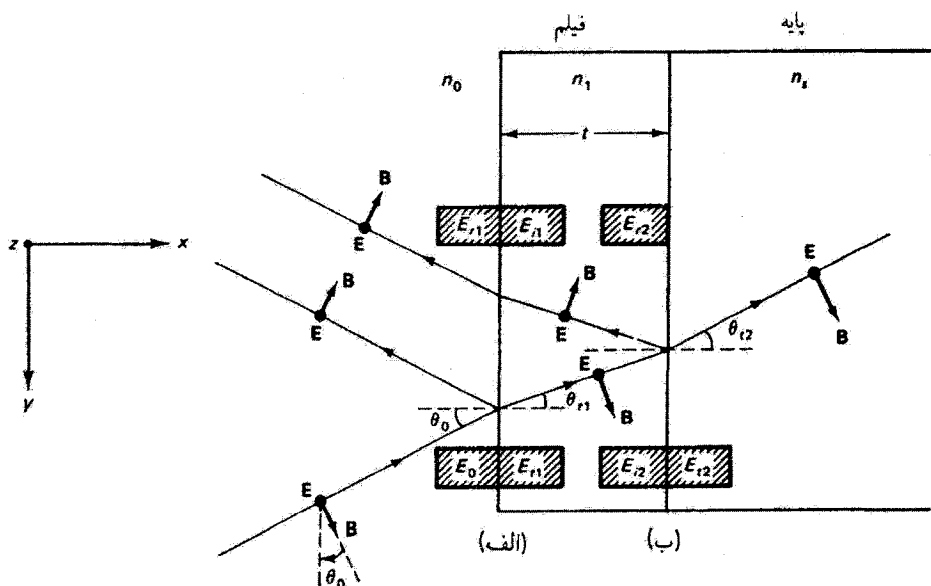
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (۴-۱۹)$$

که در آن ϵ_0 و μ_0 به ترتیب گذردهی و تراوایی فضای آزاد هستند. از ترکیب معادله‌های ۱۹-۲، ۱۹-۳ و ۱۹-۴، رابطه بین بزرگیهای میدانهای مغناطیسی و الکتریکی را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد

$$B = \frac{E}{v} = \left(\frac{n}{c}\right) E = n\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E \quad (۵-۱۹)$$

۱-۱۹ ماتریس تبدیل

تحلیل خود را برحسب کمیت‌هایی که در شکل ۱-۱۹ تعریف شده‌اند انجام می‌دهیم. یک باریکه فرودی نشان داده شده است که E ی آن فعلاً در راستای عمود بر صفحه فرود است. (اما به یاد داشته باشید که برای فرود عمودی E_{\perp} و E_{\parallel} هم‌ارزاند زیرا نمی‌توان یک صفحه یکتای فرود را مشخص کرد.) این باریکه در صفحه فرود (a) که محیط خارجی با ضریب n_0 از لایه نامغناطیسی ($\mu = \mu_0$) با ضریب n_1 جدا می‌کند متحمل بازتاب خارجی می‌شود. قسمت عبور کرده باریکه در صفحه جدایی (b) که لایه را از پایه با ضریب n_2 جدا می‌کند بازتاب داخلی و عبور می‌یابد. روی هر باریکه میدان E با علامت متداول نقطه به سمت خارج صفحه (جهت $-z$) نشان داده شده است، و میدان B در جهت سازگار با معادله ۱-۱۹ نشان داده شده است. توجه کنید که مؤلفه y میدان B باید در بازتاب وارونه شود. ضمیمه‌ها برای تعریف نامگذاری بزرگیهای میدانهای الکتریکی در مرزهای (a) و (b) اضافه شده‌اند. به‌عنوان مثال، E_{r1} نمایشگر مجموع تمام باریکه‌های بازتابیده چندگانه در سطح جدایی (a) در فرایند خروج از لایه است، E_{i2} مجموع تمام باریکه‌های چندگانه در سطح جدایی (b) و به سمت پایه را نمایش می‌دهد، و غیره. بدین طریق، باریکه‌های چندگانه را در تداخل منظور می‌کنیم.



شکل ۱-۱۹ بازتاب باریکه از تک‌لایه. این نمودار کمیت‌هایی را تعریف می‌کند که از آنها برای به‌کار بردن شرایط مرزی در نوشتن معادله‌های ۱-۱۹ تا ۱-۶ استفاده شده است. توجه کنید که نقطه‌های سیاه نمایشگر راستای عمود بر صفحه فرود هستند.

لایه را همگن و همسانگرد می‌گیریم. به علاوه، فرض می‌کنیم ضخامت لایه از مرتبه طول موج نوار است، و در نتیجه اختلاف راه بین باریکه‌های چند بار بازتابیده و عبور کرده در مقایسه با طول همدوسی نور تکفام کوچک باقی می‌ماند. این نتیجه تضمین می‌کند که باریکه‌ها اساساً همدوس هستند. و در آخر، فرض می‌کنیم پهنای باریکه در مقایسه با جابه‌جایی جانبی آن، به علت بازتابهای متعددی که سهم مهمی در باریکه‌های بازتابیده و عبور کرده برآیند دارند، بزرگ است.

شرایط مرزی برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مربوط به امواج تخت فرودی به سطوح جدایی (a) و (b) را صرفاً بیان می‌کنیم: مؤلفه‌های مماسی میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} برآیند در عرض سطح جدایی پیوسته هستند، یعنی بزرگیهای آنها در دو طرف با هم برابرند. برای موردی که در شکل ۱۹-۱ نشان داده شده است، \mathbf{E} همه جا مماس بر صفحه‌های (a) و (b) است، در حالی که \mathbf{B} شامل مؤلفه مماسی (راستای y) و مؤلفه عمودی (راستای x) است. بنابراین، شرایط مرزی برای میدان الکتریکی در دو سطح جدایی عبارت‌اند از

$$E_a = E_o + E_{r1} = E_{t1} + E_{i1} \quad (۶-۱۹)$$

$$E_b = E_{i2} + E_{r2} = E_{t2} \quad (۷-۱۹)$$

معادله‌های متناظر برای میدان مغناطیسی به صورت زیر هستند

$$B_a = B_o \cos \theta_o - B_{r1} \cos \theta_o = B_{t1} \cos \theta_{t1} - B_{i1} \cos \theta_{i1} \quad (۸-۱۹)$$

$$B_b = B_{i2} \cos \theta_{i2} - B_{r2} \cos \theta_{i2} = B_{t2} \cos \theta_{t2} \quad (۹-۱۹)$$

معادله‌های ۸-۱۹ و ۹-۱۹ را با استفاده از معادله ۵-۱۹ بر حسب میدانهای الکتریکی می‌نویسیم:

$$B_a = \gamma_o (E_o - E_{r1}) = \gamma_1 (E_{t1} - E_{i1}) \quad (۱۰-۱۹)$$

$$B_b = \gamma_1 (E_{i2} - E_{r2}) = \gamma_o E_{t2} \quad (۱۱-۱۹)$$

که در آنها

$$\gamma_o \equiv n_o \sqrt{\epsilon_o \mu_o} \cos \theta_o \quad (۱۲-۱۹)$$

$$\gamma_1 \equiv n_1 \sqrt{\epsilon_o \mu_o} \cos \theta_{t1} \quad (۱۳-۱۹)$$

$$\gamma_s \equiv n_s \sqrt{\epsilon_o \mu_o} \cos \theta_{t2} \quad (۱۴-۱۹)$$

اما تفاوت E_{i2} با E_{t1} تنها به علت اختلاف فاز δ است که با یک بار عبور از لایه ایجاد می‌شود. با استفاده از نصف اختلاف فازی که در معادله ۱۰-۳۳ برای دو بار عبور از لایه محاسبه شده است، داریم

$$\delta = k_o \Delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda_o} \right) n_1 t \cos \theta_{t1} \quad (15-19)$$

بنابراین،

$$E_{i2} = E_{t1} e^{-i\delta} \quad (16-19)$$

به همین ترتیب، داریم

$$E_{i1} = E_{r2} e^{-i\delta} \quad (17-19)$$

با استفاده از معادله‌های ۱۶-۱۹ و ۱۷-۱۹ می‌توانیم میدانهای E_{i2} و E_{r2} را در شرایط مرزی در (b)، که با معادله‌های ۷-۱۹ و ۱۱-۱۹ بیان شده‌اند، حذف کنیم، و در نتیجه

$$E_b = E_{t1} e^{-i\delta} + E_{i1} e^{i\delta} = E_{t2} \quad (18-19)$$

$$B_b = \gamma_1 (E_{t1} e^{-i\delta} - E_{i1} e^{i\delta}) = \gamma_o E_{t2} \quad (19-19)$$

با کنار گذاشتن موقت قسمت‌های سمت راست، از حل همزمان معادله‌های بالا E_{t1} و E_{i1} را برحسب E_b و B_b به دست می‌آوریم:

$$E_{t1} = \left(\frac{\gamma_1 E_b + B_b}{2\gamma_1} \right) e^{i\delta} \quad (20-19)$$

$$E_{i1} = \left(\frac{\gamma_1 E_b - B_b}{2\gamma_1} \right) e^{-i\delta} \quad (21-19)$$

و سرانجام، با جاگذاری از معادله‌های ۱۹-۲۰ و ۱۹-۲۱ در معادله‌های ۱۹-۶ و ۱۹-۱۰ برای مرز (a)، نتیجه می‌گیریم که

$$E_a = E_b \cos \delta + B_b \left(\frac{i \sin \delta}{\gamma_1} \right) \quad (22-19)$$

$$B_a = E_b (i\gamma_1 \sin \delta) + B_b \cos \delta \quad (23-19)$$

که در آنها از اتحادهای زیر استفاده کرده‌ایم

$$2 \cos \delta \equiv e^{i\delta} + e^{-i\delta} \quad \text{و} \quad 2i \sin \delta \equiv e^{i\delta} - e^{-i\delta}$$

معادله‌های ۱۹-۲۲ و ۱۹-۲۳ میدانهای کل در یک مرز را به میدانهای کل در مرز دیگر مربوط می‌کنند. این معادله‌ها را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} E_a \\ B_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \frac{i \sin \delta}{\gamma_i} \\ i\gamma_i \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_b \\ B_b \end{bmatrix} \quad (24-19)$$

ماتریس 2×2 در رابطه بالا را ماتریس تبدیل لایه می‌نامند. به طور کلی، ماتریس تبدیل را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (25-19)$$

اگر مرز (b) سطح جدایی با یک لایه دیگر، به جای پایه، باشد باز هم معادله ۱۹-۲۴ معتبر است. آنگاه میدانهای E_b و B_b به میدانهای E_c و B_c در پشت مرز لایه دوم توسط یک ماتریس تبدیل دوم مربوط می‌شوند. بدین ترتیب، با تعمیم به تعداد اختیاری N لایه، برای لایه چندگانه داریم

$$\begin{bmatrix} E_a \\ B_a \end{bmatrix} = \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_3 \cdots \mathcal{M}_N \begin{bmatrix} E_N \\ B_N \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل کل \mathcal{M}_T ، نمایشگر تمام پشته چندلایه‌ای، عبارت است از حاصلضرب ماتریسهای تبدیل انفرادی به ترتیبی که نور با آنها مواجه می‌شود:

$$\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_3 \cdots \mathcal{M}_N \quad (26-19)$$

اکنون به معادله‌های ۱۹-۶، ۱۹-۷، ۱۹-۱۰ و ۱۹-۱۱ باز می‌گردیم تا از آن قسمتهایی که قبلاً در تعیین اول ماتریس تبدیل کنار گذاشته بودیم استفاده کنیم. این معادله‌های باقی‌مانده

عبارت‌اند از

$$E_a = E_o + E_{r1} \quad (27-19)$$

$$E_b = E_{t2} \quad (28-19)$$

$$B_a = \gamma_o (E_o - E_{r1}) \quad (29-19)$$

$$B_b = \gamma_s E_{t2} \quad (30-19)$$

با استفاده از معادله‌های ۱۹-۲۴ و ۱۹-۲۵، می‌توان برای میدانهایی که با معادله‌های ۱۹-۲۷ تا ۱۹-۳۰ نمایش داده شده‌اند معادله ماتریسی زیر را نوشت

$$\begin{bmatrix} E_o + E_{r1} \\ \gamma_o (E_o - E_{r1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{t2} \\ \gamma_s E_{t2} \end{bmatrix} \quad (31-19)$$

معادله ۱۹-۳۱ هم‌ارز دو معادله زیر است

$$1 + r = m_{11}t + m_{12}\gamma_s t \quad (32-19)$$

$$\gamma_o (1 - r) = m_{21}t + m_{22}\gamma_s t \quad (33-19)$$

که در آنها از ضرایب بازتاب و عبور که با روابط زیر تعریف می‌شوند استفاده کرده‌ایم

$$r \equiv \frac{E_{r1}}{E_o} \quad \text{و} \quad t \equiv \frac{E_{t2}}{E_o} \quad (34-19)$$

از حل معادله‌های ۱۹-۳۲ و ۱۹-۳۳ برای ضرایب عبور و بازتاب برحسب عناصر ماتریس تبدیل به‌دست می‌آوریم

$$t = \frac{2\gamma_o}{\gamma_o m_{11} + \gamma_o \gamma_s m_{12} + m_{21} + \gamma_s m_{22}} \quad (35-19)$$

$$r = \frac{\gamma_o m_{11} + \gamma_o \gamma_s m_{12} - m_{21} - \gamma_s m_{22}}{\gamma_o m_{11} + \gamma_o \gamma_s m_{12} + m_{21} + \gamma_s m_{22}} \quad (36-19)$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از معادله‌های ۱۹-۳۵ و ۱۹-۳۶، همراه با عناصر ماتریس تبدیل که در معادله ۱۹-۲۴ داده شده‌اند، خواص بازتابی و عبوری لایه یگانه یا چندگانه را که با ماتریس تبدیل نمایش داده شده است محاسبه کنیم.

قبل از اینکه بحث را با کاربردهای این معادلات ادامه دهیم باید ببینیم اگر میدان الکتریکی فرودی در شکل ۱۹-۱ دارای قطبش دیگر یعنی در صفحه فرود باشد چه تغییری لازم است در نظریه داده شود. فرض کنید \mathbf{E} را در جهت اصلی \mathbf{B} انتخاب کنیم و در نتیجه \mathbf{B} را بجز خانیم تا جهت فعلی موج حفظ شود. اگر معادلات را به طرز بالا بنویسیم معلوم می‌شود که تنها یک تغییر جزئی در ماتریس تبدیل ضرورت پیدا می‌کند: معادله ۱۹-۱۳ برای γ_1 اکنون تبدیل به یک کسر می‌شود که عامل کسینوس در مخرج آن است. به طور خلاصه،

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= n_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cos \theta_{t1} && \mathbf{E} \perp \text{ صفحه فرود:} \\ \gamma_1 &= n_1 \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\cos \theta_{t1}} && \mathbf{E} \parallel \text{ صفحه فرود:} \end{aligned} \quad (۳۷-۱۹)$$

توجه کنید که برای فرود عمودی، که در آن \mathbf{E}_\perp و \mathbf{E}_\parallel از هم متمایز نیستند، داریم $\cos \theta_{t1} = 1$ ، و روابط با هم معادل‌اند. اما برای فرود مایل، نتایج را باید برای هر قطبش محاسبه کرد. برای نور ناقطبه می‌توان میانگین گرفت. به عنوان مثال، بازتابندگی به صورت زیر در می‌آید

$$R = \frac{1}{2} (R_\parallel + R_\perp) \quad (۳۸-۱۹)$$

۱۹-۲ بازتابندگی در فرود عمودی

اکنون نظریه را برای مورد نور با فرود عمودی، که در عمل از همه بیشتر پیش می‌آید، به کار می‌بریم. نتایج برای مورد فرود نزدیک به عمود نیز کاملاً معتبر هستند. باریکه در تمام سطوح جدایی عمودی باقی می‌ماند، و در نتیجه تمام زاویه‌ها صفراند. در معادله‌های ۱۹-۱۲ تا ۱۹-۱۴، عامل کسینوس در جمله‌های γ برابر با یک است. عناصر ماتریس تبدیل در معادله ۱۹-۲۴ با تغییرات مناسب به صورت زیر در می‌آیند

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \delta & m_{12} &= \frac{i \sin \delta}{n_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \\ m_{21} &= i n_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sin \delta & m_{22} &= \cos \delta \end{aligned} \quad (۳۹-۱۹)$$

اینها را در معادله ۱۹-۳۶ جاگذاری می‌کنیم و پس از حذف ثابت $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ و ساده کردن، به دست می‌آوریم

$$r = \frac{n_1(n_o - n_s) \cos \delta + i(n_o n_s - n_1^2) \sin \delta}{n_1(n_o + n_s) \cos \delta + i(n_o n_s + n_1^2) \sin \delta} \quad (۴۰-۱۹)$$

بازتابندگی R ، که اندازه خروجی بازتابیده است، با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$R = |r|^2 \quad (41-19)$$

برای محاسبه R ، ابتدا توجه کنید که ضریب بازتاب r مختلط است و صورت کلی آن عبارت است از

$$r = \frac{A + iB}{C + iD}$$

و در نتیجه

$$|r|^2 = r r^* = \frac{A + iB}{C + iD} \frac{A - iB}{C - iD} = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}$$

بنابراین، با توجه به رابطه بالا و معادله ۱۹-۴۰، می‌توانیم بنویسیم

$$R = \frac{n_o^2 (n_o - n_s)^2 \cos^2 \delta + (n_o n_s - n_o^2)^2 \sin^2 \delta}{n_o^2 (n_o + n_s)^2 \cos^2 \delta + (n_o n_s + n_o^2)^2 \sin^2 \delta} \quad \text{فرود عمودی: (42-19)}$$

مثال

لایه‌ای از ZrO_2 ($n = 2.10$) با ضخامت 400 \AA روی شیشه ($n = 1.50$) کشیده می‌شود. بازتابندگی عمودی را برای نور سدیم به دست آورید.

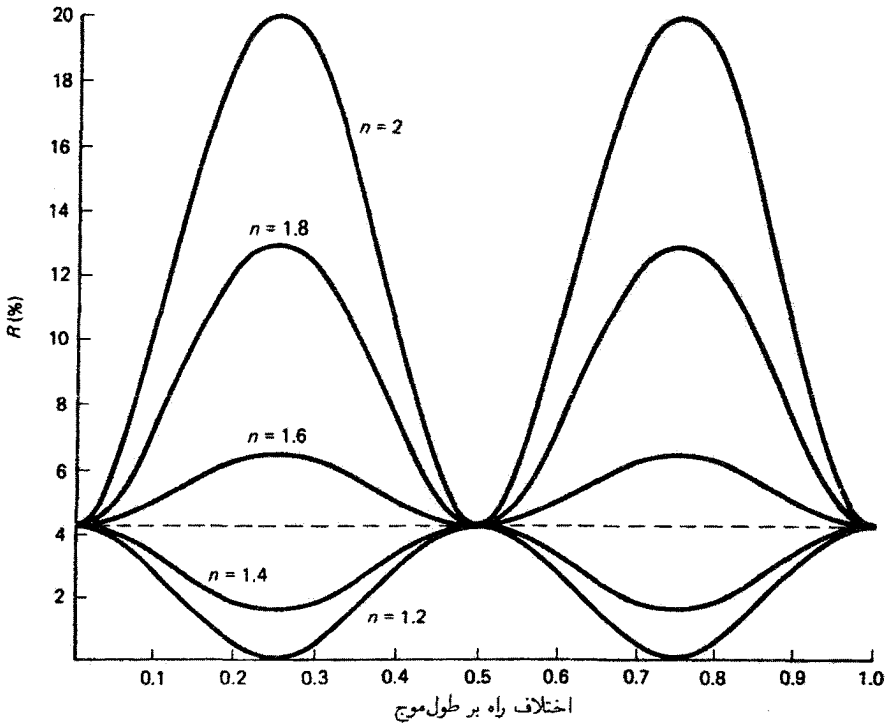
حل: اختلاف فاز برابر است با

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 t) = \frac{2\pi}{5893} (2.1)(400) = 0.8956 \text{ rad}$$

و در نتیجه $\cos \delta = 0.6250$ و $\sin \delta = 0.7806$. بنابراین، با جاگذاری در معادله ۱۹-۴۲، داریم

$$R = \frac{2.1^2 (1 - 1.5)^2 (0.6250)^2 + [(1)(1.5) - 2.1^2]^2 (0.7806)^2}{2.1^2 (1 + 1.5)^2 (0.6250)^2 + [(1)(1.5) + 2.1^2]^2 (0.7806)^2}$$

بدین ترتیب، $R = 17.4\%$.



شکل ۱۹-۲ بازتابندگی از تک‌لایه برحسب اختلاف راه بهنجار. خط چین نمایشگر پایه شیشه‌ای ناندوده با ضریب شکست $n_s = ۱.۵۲$ است.

نموداری از بازتابندگی برحسب اختلاف راه نوری در شکل ۱۹-۲ نشان داده شده است، که در آن محور طولها برحسب نسبتهای Δ/λ درجه‌بندی شده است. هر منحنی به ضریب شکست لایه مختلفی مربوط می‌شود، اما ضریب پایه شیشه‌ای در تمام موارد برابر با $n_s = ۱.۵۲$ انتخاب شده است. مقدار ضریب شکست لایه n_1 به‌وضوح تعیین می‌کند که بازتابندگی، نسبت به بازتابندگی برای شیشه ناندوده، تقویت می‌شود (به‌ازای $n_1 > n_s$) یا تضعیف می‌شود ($n_1 < n_s$). منحنیها نشان می‌دهند که ضخامت ربع موج، و مضارب فردی از آن، یا به تقویت بهینه (پوشش با بازتابندگی زیاد) منجر می‌شوند یا به تضعیف ماکسیمم (پوشش پادبازتاب). با تغییر Δ از طریق انتخاب ضخامت لایه می‌توان کاری کرد که این نقاط ماکسیمم یا مینیمم برای R در طول موجهای مختلف روی دهند. توجه کنید که به‌ازای $\Delta = \lambda/2$ (و هر مضرب زوجی از ربع موج) بازتابندگی دقیقاً بازتابندگی از شیشه ناندوده می‌شود. یک تک‌پوشش پادبازتاب، با $n_1 < n_s$ ، در هیچ طول موجی هرگز بیشتر از شیشه ناندوده بازتاب نمی‌کند. تغییر دوره‌ای R با Δ ، که متناسب با ضخامت لایه است، یک راه عملی برای بازرسی ضخامت لایه در جریان رسوب دادن لایه فراهم می‌کند.

مورد مهم ضخامت لایه ربع موج، یعنی

$$t = \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda_0}{4n_1}$$

باعث می‌شود که اختلاف فاز در معادله ۱۹-۱۵ برابر شود با $\pi/2$ و $\delta = 2\pi n_1 t / \lambda_0 = \pi/2$ و در نتیجه $\cos \delta = 0$ و $\sin \delta = 1$. در این مورد، معادله ۱۹-۴۲ به صورت زیر در می‌آید

$$R = \left(\frac{n_0 n_s - n_1^2}{n_0 n_s + n_1^2} \right)^2 \quad \begin{array}{l} \text{فرود عمودی} \\ \text{ضخامت ربع موج} \end{array} \quad (۱۹-۴۳)$$

از معادله ۱۹-۴۳ نتیجه می‌گیریم که لایه کاملاً پادبازتاب را می‌توان با پوششی به ضخامت $\lambda/4$ و ضریب شکست $n_1 = \sqrt{n_0 n_s}$ تولید کرد. اگر پایه از شیشه با $n_s = 1.52$ باشد، ضریب شکست ایده‌آل برای پوشش نابازتابنده عبارت است از $n_1 = 1.23$ با فرض اینکه با $n_0 = 1$ محصور شده باشد. یک انتخاب میانه از مواد پوشنده موجود لایه‌ای است از MgF_2 که برای آن $n_1 = 1.38$. برای این لایه، معادله ۱۹-۴۳ بازتابندگی ۱.۳٪ را در ناحیه مرئی پیش‌بینی می‌کند، در حالی که شیشه نائندوده (قرار دهید $n_1 = n_0$) حدود ۴.۳٪ را بازتاب می‌کند. این اختلاف نمایشگر حفظ انرژی نور قابل ملاحظه‌ای در یک دستگاه اپتیکی با سطوح چندگانه است. به عنوان مثال، پس از تنها شش سطح جدایی از این نوع، یا سه مؤلفه اپتیکی متوالی، ۹۳٪ از نور فرودی در مورد پوشش MgF_2 باقی می‌ماند، در حالی که در مورد شیشه نائندوده این مقدار ۷۷٪ است.

۱۹-۳ لایه دوگانه پادبازتاب

بدیهی است که مواد پوشنده با دوام با ضرایب شکست اختیاری فوراً در دسترس نیستند. بنابراین، عملاً نمی‌توان تک‌لایه‌هایی با بازتابندگی صفر را تولید کرد. اما با استفاده از یک لایه دوگانه از لایه‌هایی با ضخامت ربع موج اساساً دسترسی به بازتابندگی صفر در یک طول موج با مواد پوشنده موجود امکانپذیر است. در فرود عمودی، ماتریس تبدیل برای تک‌لایه‌ای با ضخامت ربع موج عبارت است از

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل برای دو لایه از این نوع، بنابه معادله ۱۹-۲۶ از حاصلضرب زیر به دست می‌آید

$$M = M_1 M_2 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i\gamma_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i\gamma_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_2 & 0 \\ \gamma_1 & -\gamma_1/\gamma_2 \end{bmatrix}$$

عناصر ماتریسی عبارت‌اند از $m_{11} = -\gamma_2/\gamma_1$ ، $m_{12} = -\gamma_1/\gamma_2$ ، $m_{21} = 0$ و $m_{22} = 0$. با استفاده از این مقادیر در معادله ۱۹-۳۶، به دست می‌آوریم

$$r = \frac{\gamma_2^2 \gamma_0 - \gamma_s \gamma_1^2}{\gamma_2^2 \gamma_0 + \gamma_s \gamma_1^2} \quad (44-19)$$

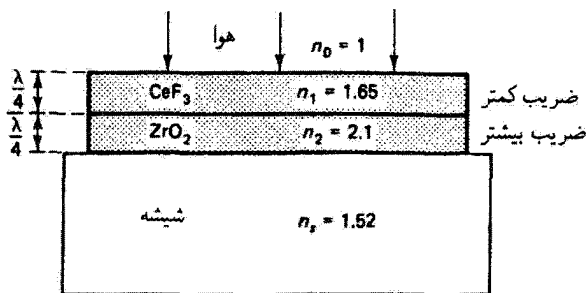
با جاگذاری برحسب ضرایب شکست از معادله‌های ۱۹-۱۲ تا ۱۹-۱۴ و سپس با مجذور کردن نتیجه، بازتابندگی به دست می‌آید:

$$R = \left(\frac{n_o n_p^2 - n_s n_i^2}{n_o n_p^2 + n_s n_i^2} \right)^2 \quad \begin{array}{l} \text{فرود عمودی} \\ \text{ضخامت ربع موج} \end{array} \quad (45-19)$$

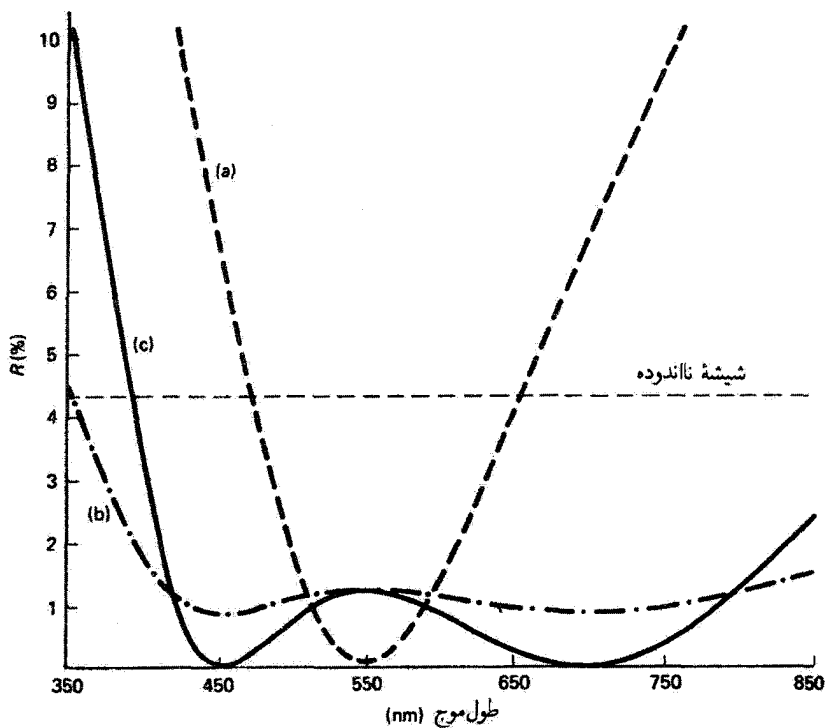
بازتابندگی صفر از معادله ۱۹-۴۵ به‌ازای $n_o n_p^2 = n_s n_i^2$ پیش‌بینی می‌شود، یعنی وقتی که

$$\frac{n_p}{n_i} = \sqrt{\frac{n_s}{n_o}} \quad (46-19)$$

برای پایه شیشه‌ای ($n_s = 1.52$) و فرود از هوا ($n_o = 1$)، نسبت ایده‌آل برای این دو لایه عبارت است از $n_p/n_i = 1.23$. این شرط با استفاده از دی‌اکسید زرگونیم ($n_p = 2.1$) و تری‌فلوئورید سریم ($n_i = 1.65$)، که هر دو مواد پوشنده خوبی هستند تقریباً به‌طور کامل برقرار می‌شود. نسبت ضرایب شکست برای ZrO_2 و CeF_3 یعنی 1.27 ، بازتابندگی را بنابه معادله ۱۹-۴۵ به مقدار تنها 1% به دست می‌دهد. آرایه مربوط به شکل ۱۹-۳ و نمودار مربوط با منحنی (الف) در شکل ۱۹-۴ نشان داده شده‌اند. رسیدن به بازتابندگی صفر در یک طول موج نمی‌تواند نیاز بسیار عمومی را برای کاستن بازتابندگی در ناحیه وسیعی از طیف مرئی برآورده کند. منحنی (الف) در دو طرف مینیم خود در 550 nm نسبتاً پشیم است. اگر ضریب شکست پایه بزرگتر از ضریب شکست لایه مجاور باشد، یعنی $n_s > n_p$ ، ناحیه‌های وسیعتری با بازتابندگی کمتر برای پوششهای حاصل می‌شوند. در این نوع موارد، ضریب شکست از پایه به محیط خارج مرتباً نزول



شکل ۱۹-۳ لایه دوگانه پادبازتاب، با استفاده از لایه‌هایی با ضخامت $\lambda/4$ - $\lambda/4$.



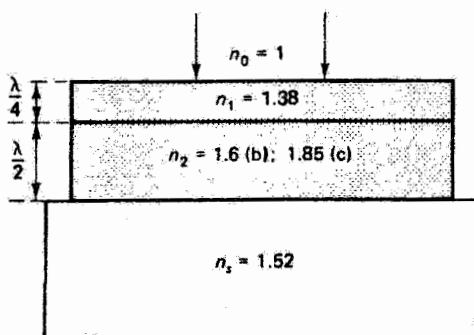
شکل ۱۹-۴ بازتابندگی از لایه دوگانه برحسب طول موج، در تمام موارد، $n_0 = 1$ و $n_s = 1.52$. ضخامتها در $\lambda = 550 \text{ nm}$ تعیین شده‌اند. (الف) $\lambda/4$ - $\lambda/4$; $n_1 = 1.65$ و $n_2 = 2.1$. (ب) $\lambda/2$ - $\lambda/4$; $n_1 = 1.38$ و $n_2 = 1.85$. (ج) $\lambda/2$ - $\lambda/4$; $n_1 = 1.38$ و $n_2 = 1.6$.

می‌کند. ضریبهای به اندازه کافی زیاد برای برقراری این شرط در کاربردهای فروسرخ امکانپذیراند زیرا در این ناحیه مقادیر بزرگ n_s همچون $n_s = 4$ برای ژرمانیم قابل دسترسی هستند. فهرستی از ضرایب شکست مفید در جدول ۱۹-۱ داده شده است. اگر قید پوششهای $\lambda/4$ مساوی را

جدول ۱۹-۱ ضرایب شکست برای چند ماده پوشنده

ماده	مرئی ($\sim 550 \text{ nm}$)	فروسرخ نزدیک ($\sim 2 \mu\text{m}$)
Na_2AlF_6	۱۳۰ تا ۱۳۳	—
MgF_2	۱۳۸	۱۳۵
SiO_2	۱۴۶	۱۴۴
SiO	۱۵۵ تا ۲۰	۱۸۵ تا ۱۸۵
Al_2O_3	۱۶۰	۱۵۵
CeF_3	۱۶۵	۱۵۹
ThO_2	۱۸	۱۷۵
Nd_2O_3	۲۰	۱۹۵
ZrO_2	۲۱	۲۰
CeO_2	۲۳۵	۲۲
ZnS	۲۳۵	۲۲
TiO_2	۲۴	—
Si	—	۳۳
Ge	—	۴۰

کنار بگذاریم، ناحیه‌های وسیعتر با بازتابندگی کم در ناحیه مرئی طیف نیز ممکن می‌شوند. به‌عنوان مثال، منحنیهای (ب) و (ج) در شکل ۱۹-۴ دو جواب برای این مسئله‌اند که در آنها، چنانکه در شکل ۱۹-۵ نشان داده شده است، ضخامت پوشش درونی $\lambda/2$ است. در طول موج 550 nm که ضخامتهای $\lambda/4$ و $\lambda/2$ برای آن تعیین شده‌اند، لایه $\lambda/2$ تأثیری روی بازتابندگی ندارد، و این لایه دوگانه مانند یک تک‌لایه $\lambda/4$ عمل می‌کند. اما در طول موجهای دیگر، لایه $\lambda/2$ باعث می‌شود R کمتر از مقادیر به‌دست آمده از تنها یک لایه $\lambda/4$ باشد. به‌ازای $n = 1.85$ [منحنی (ج)]، دو مینیمم نزدیک $R = 0$ دیده می‌شوند. اگر چه بازتابندگی در 550 nm برابر با 1.26% یعنی بیشتر از مورد منحنی (الف) برای پوشش $\lambda/4 - \lambda/4$ است، اما در ناحیه وسیعی از طول‌موجها از حدود 420 nm تا 800 nm در مقادیر کمتر از این مقدار باقی می‌ماند. به‌ازای $n_2 = 1.6$ [منحنی (ب)]، پاسخ طیفی لایه دوگانه، در حالی‌که بازتابنده‌تر است، روی ناحیه مرئی صافتر است. اگر ضخامتهای لایه‌ها را با مقادیری غیر از مضارب $\lambda/4$ انتخاب کنیم، باز هم جوابهای عملی دیگری برای لایه‌های چندگانه پادبازتاب امکانپذیر می‌شوند.



شکل ۱۹-۵ لایه دوگانه پادبازتاب با استفاده از لایه‌هایی با ضخامتهای $\lambda/2$ و $\lambda/4$. منحنیهای بازتابندگی مربوط در شکل ۱۹-۴ نشان داده شده‌اند.

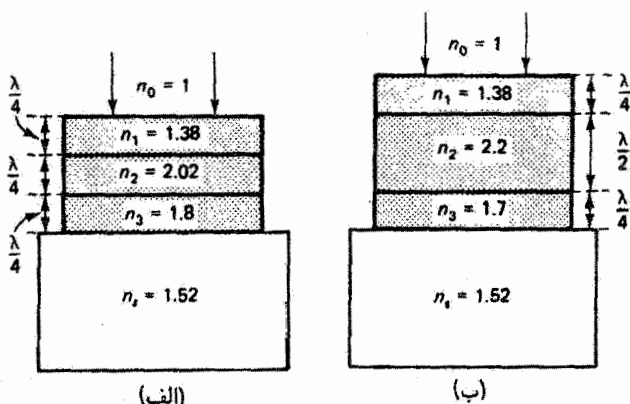
منحنیهای شکل ۱۹-۴ با استفاده از نظریه ارائه شده در این فصل محاسبه شده‌اند. عناصر ماتریس انتقال کل ابتدا با تشکیل حاصلضرب ماتریسهای انتقال لایه‌های انفرادی تعیین می‌شوند. در این عناصر، اختلاف فاز δ به صورت تابعی از λ بیان می‌شود، و ضخامت لایه به مقدار لازم $\lambda/4$ یا $\lambda/2$ در یک طول موج تعیین می‌شود. سپس این عناصر ماتریس در معادله ۱۹-۳۶ برای ضریب بازتاب به کار برده می‌شوند. پس از مجذور کردن، بازتابندگی به صورت تابعی از طول موج به دست می‌آید. اگر چه محاسبات ممکن است دشوار باشند، اما با استفاده از یک ماشین حساب برنامه‌پذیر یا رایانه به آسانی به انجام می‌رسند.

۱۹-۴ لایه‌های سه‌گانه پادبازتاب

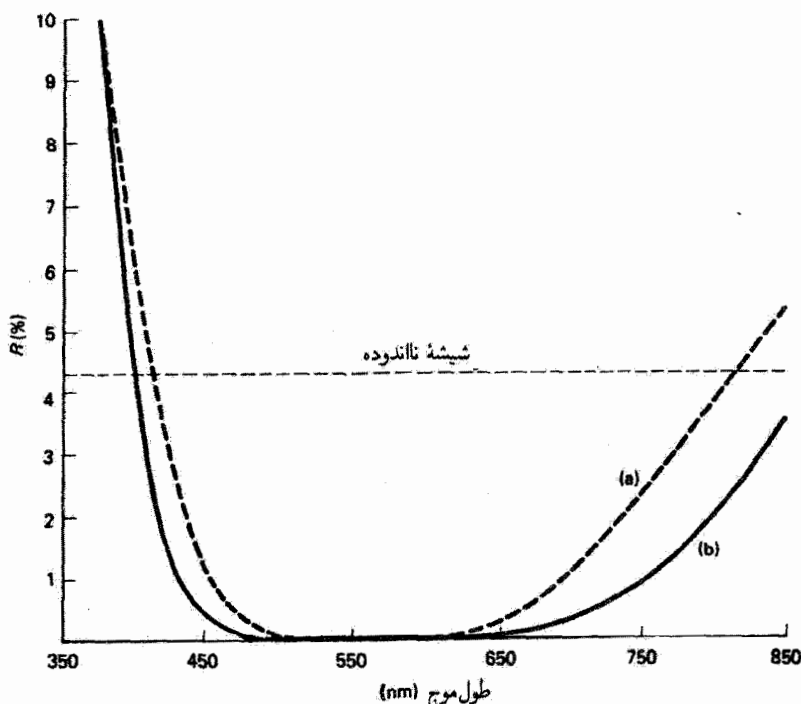
راهکاری که خطوط اصلی آن هم اکنون بیان شد برای محاسبه بازتابندگی طیفی لایه‌های سه‌گانه نیز به کار می‌رود. استفاده از سه یا چند لایه پوشش ناحیه وسیعتری با بازتابندگی کم را ممکن می‌سازد که در آن پاسخ لایه صافتر است. اگر هر یک از سه لایه دارای ضخامت $\lambda/4$ باشد، می‌توان نشان داد که بازتابندگی صفر وقتی روی می‌دهد که ضرایب شکست در رابطه زیر صدق کنند

$$\frac{n_1 n_2}{n_2} = \sqrt{n_0 n_3} \quad (19-47)$$

یک جواب عملی از این نوع در شکل ۱۹-۶ الف نشان داده شده است و با منحنی (الف) در شکل ۱۹-۷ ترسیم شده است. به ازای ضخامت $\lambda/2$ برای لایه میانی، همچون در شکل ۱۹-۶ ب، نتیجه نسبتاً بهتری، مانند منحنی (ب) در شکل ۱۹-۷، به دست می‌آید.



شکل ۶-۱۹ لایه‌های سه‌گانه پادبازتاب. (الف) لایه‌های ربع-ربع طول موج. (ب) لایه‌های ربع-نیم-ربع طول موج. منحنیهای بازتابندگی در شکل ۷-۱۹ نشان داده شده‌اند.



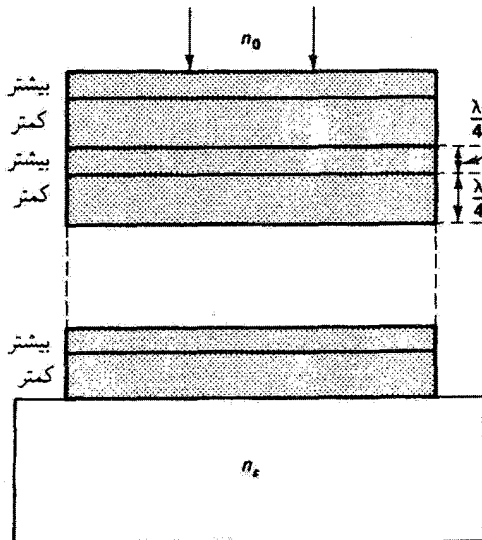
شکل ۷-۱۹ بازتابندگی از لایه‌های سه‌گانه بر حسب طول موج. در تمام موارد، $n_0 = 1$ و $n_s = 1.52$. ضخامتها در $\lambda = 550 \text{ nm}$ تعیین شده‌اند. (الف) $\lambda/4 - \lambda/4 - \lambda/4$; $n_1 = 1.38$; $n_2 = 2.02$; $n_3 = 1.8$. (ب) $\lambda/4 - \lambda/2 - \lambda/4$; $n_1 = 1.38$; $n_2 = 2.2$; $n_3 = 1.7$.

۱۹-۵ لايه‌هاى پربازتابندگى

اگر ترتيب لايه‌ها در يك لايه دوگانه $\lambda/4 - \lambda/4$ كه براى پادبازتاب بهينه شده است وارونه شود، و در نتيجه ترتيب به صورت هوا-ضريب بزرگتر-ضريب كوچكتر-پايه باشد، هر سه باريكه بازتابيده هنگام خروج از اين ساختار همفاز هستند، و بازتابندگى به جاي تضعيف شدن تقويت مى‌شود. يك رشته از اين نوع لايه‌هاى دوگانه بازتابندگى را باز هم بيشتر مى‌كند؛ اين ساختار را پشته پربازتابندگى يا آينه دى‌الكتريك مى‌نامند.

اكنون رابطه‌اى براى بازتابندگى اين نوع ساختار، كه طرح آن در شكل ۱۹-۸ نشان داده شده است و در آن "كمتري" و "بيشتر" به معنى ضرايب شكست كمتر و بيشتر هستند، به دست مى‌آوريم. درست مانند مورد لايه‌هاى دوگانه پادبازتاب، ماتريس تبديل براى يك لايه دوگانه با پوششهايى به ضخامت $\lambda/4$ عبارت است از حاصلضرب ماتريسهاى لايه‌هاى انفرادى:

$$\mathfrak{M}_{HL} = \mathfrak{M}_H \mathfrak{M}_L$$



شكل ۱۹-۸ پشته پربازتابندگى از لايه‌هاى دوگانه با ضرايب شكست متناوباً بيشتر و كمتر. منحنىهاى بازتابندگى در شكل ۱۹-۹ نشان داده شده‌اند.

$$\mathfrak{M}_{HL} = \begin{bmatrix} \circ & \frac{i}{\gamma_H} \\ \frac{i}{\gamma_H} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{i}{\gamma_L} \\ i\gamma_L & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\gamma_L}{\gamma_H} & \circ \\ \circ & \frac{-\gamma_H}{\gamma_L} \end{bmatrix} \quad (48-19)$$

برای N لایه دوگانه مشابه متوالی داریم

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_{H_1} \mathfrak{M}_{L_1}) (\mathfrak{M}_{H_2} \mathfrak{M}_{L_2}) \cdots (\mathfrak{M}_{H_N} \mathfrak{M}_{L_N}) = (\mathfrak{M}_H \mathfrak{M}_L)^N = (\mathfrak{M}_{HL})^N \quad (49-19)$$

با جاگذاری ماتریس لایه دوگانه از معادله ۴۸-۱۹، به دست می‌آوریم

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{-\gamma_L}{\gamma_H} & \circ \\ \circ & \frac{-\gamma_H}{\gamma_L} \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} \left(\frac{-\gamma_L}{\gamma_H}\right)^N & \circ \\ \circ & \left(\frac{-\gamma_H}{\gamma_L}\right)^N \end{bmatrix}$$

برای فرود عمودی داریم

$$\frac{\gamma_L}{\gamma_H} = \frac{n_L}{n_H} \quad , \quad \frac{\gamma_H}{\gamma_L} = \frac{n_H}{n_L}$$

و در نتیجه

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \left(\frac{-n_L}{n_H}\right)^N & \circ \\ \circ & \left(\frac{-n_H}{n_L}\right)^N \end{bmatrix} \quad (50-19)$$

بنابراین، عناصر ماتریس تبدیل نمایشگر N لایه دوگانه بیشتر کمتر متوالی با پوششهایی به ضخامت $\lambda/4$ عبارت‌اند از

$$m_{11} = \left(\frac{-n_L}{n_H}\right)^N, \quad m_{22} = \left(\frac{-n_H}{n_L}\right)^N, \quad m_{12} = m_{21} = \circ \quad (51-19)$$

با استفاده از این عناصر ماتریس در رابطه ضریب بازتاب، معادله ۱۹-۳۶، به دست می‌آوریم

$$r = \frac{n_o (-n_L/n_H)^N - n_s (-n_H/n_L)^N}{n_o (-n_L/n_H)^N + n_s (-n_H/n_L)^N} \quad (52-19)$$

اکنون اگر صورت و مخرج معادله ۱۹-۵۲ را در $(-n_L/n_H)^N/n_o$ ضرب کنیم و نتیجه را برای به دست آوردن بازتابندگی مجذور کنیم، داریم

$$R_{\max} = \left[\frac{(n_o/n_s)(n_L/n_H)^{2N} - 1}{(n_o/n_s)(n_L/n_H)^{2N} + 1} \right]^2 \quad (53-19)$$

مثال

یک پشته پربازتابندگی مانند پشته شکل ۱۹-۸ از شش لایه دوگانه از لایه‌های SiO_2 ($n = 1.46$) و ZnS ($n = 2.35$) روی پایه شیشه‌ای ($n = 1.48$) ساخته شده است. بازتابندگی را برای نور 550 nm در فرود عمودی به دست آورید.

حل: با جاگذاری مستقیم در معادله ۱۹-۵۳، داریم

$$R = \left[\frac{(1/1.48)(1.46/2.35)^2 - 1}{(1/1.48)(1.46/2.35)^2 + 1} \right]^2$$

یا $R = 99.1\%$

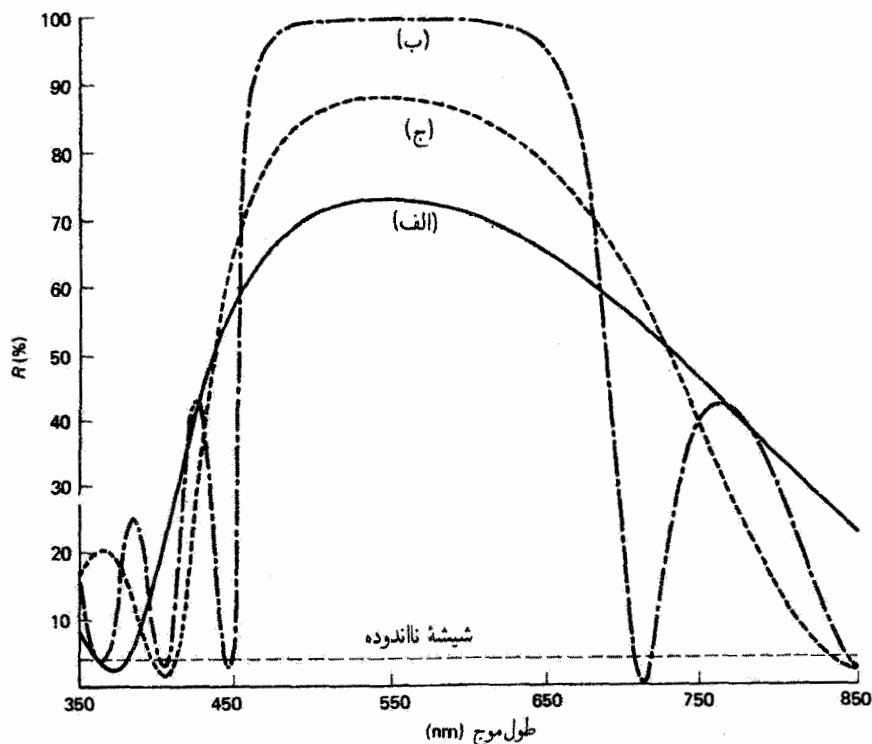
اگر N به بینهایت میل کند یا (n_L/n_H) به صفر میل کند، معادله ۱۹-۵۳ بازتابندگی 100% را پیش‌بینی می‌کند. بعضی از داده‌هایی که میل به این حد را نشان می‌دهند در جدول ۱۹-۲ داده شده‌اند. دیده می‌شود که بازتابندگی برای چندین لایه دوگانه سریعاً به 100% نزدیک می‌شود. چون بهترین بازتابندگیها به ازای کوچکترین نسبت n_L/n_H به دست می‌آیند، پشته‌های پربازتابندگی را می‌توان از لایه‌های متناوب MgF_2 ($n_L = 1.38$) و ZnS ($n_H = 2.35$) یا TiO_2 ($n_H = 2.40$) تولید کرد.

بازتابندگی در معادله ۱۹-۵۳ نمایشگر بازتابندگی ماکسیمم در طول موج λ_o است که برای آن لایه‌ها دارای ضخامت اپتیکی $\lambda_o/4$ هستند. برای سایر طول‌موجها باید ماتریس انتقال را به صورت کلی آن، شامل اختلاف فازهای وابسته به طول‌موج، به کار برد. منحنیهای بازتابندگی طیفی برای پشته‌های $N = 2$ و $N = 6$ لایه دوگانه محاسبه شده‌اند و در شکل ۱۹-۹ ترسیم شده‌اند. منحنی

جدول ۱۹-۲ بازتابندگی پشته ربع موج بیشتر-کمتر

بازتابندگی برای $N = 3$ لایه		بازتابندگی برحسب N به‌ازای $n_L/n_H = 0.587$	
بیشتر-کمتر برحسب n_L/n_H		برای لایه‌های دوگانه متناوب MgF_2 و ZnS	
$R(\%)$	n_L/n_H	$R(\%)$	N
۴٫۲۶	۱٫۰	۳۹٫۷۱	۱
۲۱٫۰۱	۰٫۹۱	۷۳٫۰۸	۲
۴۰٫۸۲	۰٫۸۳	۸۹٫۷۷	۳
۵۷٫۷۷	۰٫۷۷	۹۶٫۳۵	۴
۷۰٫۴۴	۰٫۷۱	۹۸٫۷۲	۵
۷۹٫۳۵	۰٫۶۷	۹۹٫۵۶	۶
۸۵٫۴۸	۰٫۶۲۵	۹۹٫۸۵	۷
۸۹٫۶۷	۰٫۵۹	۹۹٫۹۵	۸
۹۲٫۵۵	۰٫۵۶		
۹۴٫۵۶	۰٫۵۳		
۹۵٫۹۷	۰٫۵۰		

(ج) اصلاحی را در بازتابندگی ماکسیم نشان می‌دهد که وقتی حاصل می‌شود که یک لایه اضافی با ضریب بیشتر بین پایه و آخرین لایه با ضریب کمتر قرار داده شود. پهنای ناحیه پربازتابندگی در این منحنیها تقریباً مستقل از تعداد لایه‌های دوگانه است اما با افزایش نسبت n_L/n_H افزایش می‌یابد. در شکل ۱۹-۹ این نسبت ۱٫۷۰ است و به لایه‌های متناوب MgF_2 و ZnS روی شیشه مربوط می‌شود. خارج از نوار ایست مرکزی، بازتابندگی بین یک رشته ماکسیم و مینیم نوسان می‌کند. مرکز نوار ایست را با نشان دادن لایه‌هایی که ضخامت آنها در یک $\lambda/4$ دیگری است می‌توان منتقل کرد. صرف نظر از اتلاف انرژی نور به علت جذب و پراکندگی ضمن عبور از لایه‌های دی‌الکتریک، تراگسیلندگی درصد ساختار با $T(\%) = 100 - R(\%)$ داده می‌شود. بدین ترتیب، این نوع ساختارها را می‌توان همچون صافیهای عبور نوار طراحی کرد که تراگسیلندگی طیفی آنها اساساً وارون بازتابندگی طیفی است. صافیهای عبور نوار باریک را که مانند سنجه‌های فابری-پرو عمل می‌کنند با استفاده از دو ساختار چندلایه‌ای آینه دی‌الکتریک که با لایه‌ای مانند MgF_2 از هم جدا شده‌اند می‌توان تولید کرد. ناحیه‌های طول موج باریک را که تداخل سازنده داشته باشند می‌توان با فاصله به اندازه کافی زیاد تولید کرد به طوری که تنها یکی از این ناحیه‌ها با یک صافی جذب متداول رنگ به آسانی تصفیه می‌شود. نتیجه یک صافی با پهنای نوار عبوری به اندازه شاید 15\AA و تراگسیلندگی ۴۰٪ است.



شکل ۱۹-۹ بازتابندگی طیفی پشته لایه‌های دوگانه با ضرایب بیشتر کمتر برای $N = 2$ [منحنی (الف)] و $N = 6$ [منحنی (ب)]. منحنی (ج) به یک پشته $N = 2$ با لایه ضریب بیشتر اضافی در مجاورت پایه مربوط است. لایه‌ها دارای ضخامت $\lambda/4$ در $\lambda = 550 \text{ nm}$ هستند. در تمام موارد، $n_H = 2.35$ ، $n_o = 1.52$ و $n_L = 1.38$.

مسائل

۱۹-۱ نشان دهید وقتی میدان E ی فرودی موازی با صفحه فرود است، γ_1 به صورتی است که در معادله ۱۹-۳۷ داده شده است.

۱۹-۲ یک لایه شفاف روی شیشه‌ای با ضریب شکست 1.5° کشیده شده است.

(الف) مقادیری برای ضخامت و ضریب شکست (نظری) لایه تعیین کنید که باعث می‌شوند لایه برای نور 500 nm با فرود عمودی ناپازتابنده باشد.

(ب) بازتابندگی این ساختار را برای نور فرودی 550 nm به دست آورید.

۱۹-۳ از معادله ۱۹-۴۲ نشان دهید که بازتابندگی عمودی برای تک‌لایه‌ای با ضخامت نیم طول موج

که روی یک پایه نشانده شده است برابر با بازتابندگی از پایه ناندوده است:

$$R = \frac{(n_o - n_s)^2}{(n_o + n_s)^2}$$

۴-۱۹ تک‌لایه‌ای از $(n = ۱.۴۶)\text{SiO}_2$ با ضخامت ۱۳۷ nm روی یک پایه شیشه‌ای ($n = ۱.۵۲$) رسوب داده شده است. بازتابندگی عمودی را برای نور با طول موج (الف) ۸۰۰ nm ؛

(ب) ۶۰۰ nm ؛

(ج) ۴۰۰ nm به دست آورید. موجه بودن جوابهای خود را از مقایسه با شکل ۲-۱۹ تحقیق

کنید.

۵-۱۹ لایه‌ای از $(n = ۲.۳۵)\text{ZnS}$ با ضخامت ۵۹۶ \AA روی شیشه ($n = ۱.۵۲$) نشانده شده است. بازتابندگی عمودی را برای نور ۵۶۰ nm محاسبه کنید.

۶-۱۹ ضخامت و ضریب شکست نظری یک تک‌لایه روی پایه ژرمانیم ($n = ۴.۰$) را طوری تعیین کنید که بازتابندگی عمودی برای طول موج $۲\text{ }\mu\text{m}$ صفر باشد. از چه ماده واقعی می‌توان برای این منظور استفاده کرد؟

۷-۱۹ یک لایه دوگانه با لایه‌های ربع موج از $(n = ۱.۶۰)\text{Al}_2\text{O}_3$ و $(n = ۱.۳۰)\text{Na}_3\text{AlF}_6$ با همین ترتیب روی پایه شیشه‌ای ($n = ۱.۵۲$) کشیده شده است.

(الف) ضخامت لایه‌ها و بازتابندگی عمودی را برای نور ۵۵۰ nm به دست آورید.

(ب) اگر ترتیب لایه‌ها عوض شود بازتابندگی عمودی جدید را محاسبه کنید.

۸-۱۹ لایه‌های نازک ربع موج $(n = ۲.۲)\text{ZnS}$ و $(n = ۱.۳۵)\text{MgF}_2$ را به ترتیب روی پایه‌ای از سیلیسیم ($n = ۳.۳$) برای ایجاد بازتابندگی مینیمم در $۲\text{ }\mu\text{m}$ می‌شناسیم.

(الف) ضخامت واقعی لایه‌ها را تعیین کنید.

(ب) نسبت ضرایب لایه‌ها چند درصد اختلاف با نسبت ایده‌آل دارد؟

(ج) بازتابندگی عمودی تولید شده را به دست آورید.

۹-۱۹ با استفاده از ماتریس تبدیل مناسب نشان دهید بازتابندگی یک لایه دوگانه ربع موج-

نیم‌موج، همچون در شکل ۵-۱۹، با مورد تنها یک لایه ربع موج یکی است.

۱۰-۱۹ یک برنامه رایانه‌ای برای محاسبه و یا ترسیم مقادیر بازتابندگی لایه دوگانه تحت فرود عمودی

بنویسید. پارامترهای ورودی باید شامل ضخامت و ضرایب شکست لایه‌ها و ضریب شکست پایه باشند. نتایج را با مقایسه با شکل ۱۹-۴ واریسی کنید.

۱۱-۱۹ شرطی را که با معادله ۱۹-۴۷ برای بازتابندگی صفر لایه‌های سه‌گانه ربع-ربع موج در وضعیت فرود عمودی داده شده است اثبات کنید. این کار را با تعیین ماتریس تبدیل مرکب برای سه‌لایه ربع موج و استفاده از عناصر ماتریس برای محاسبه ضریب بازتاب در معادله ۱۹-۳۶ انجام دهید.

۱۲-۱۹ با استفاده از مواد داده شده در جدول ۱۹-۱، یک لایه سه‌گانه با ضخامتهای ربع موج روی پایه ژمانیم طراحی کنید که برای فرود عمودی تابش $2\mu\text{m}$ بازتابندگی تقریباً صفر ایجاد کند.

۱۳-۱۹ بازتابندگی ماکسیمم در مرکز طیف مرئی را برای یک پشته پربازتابندگی متشکل از لایه‌های دوگانه بیشتر-کمتر با $n_L = 1.38$ و $n_H = 2.6$ روی پایه‌ای با ضریب 1.52 تعیین کنید. لایه‌ها دارای ضخامت اپتیکی یکسان متناظر با ربع طول موج برای نوری با طول موج متوسط 550 nm هستند. نور، همچون در شکل ۱۹-۸، ابتدا به ماده ضریب بیشتر فرود می‌آید. فرود را عمودی و پشته‌هایی با

(الف) ۲،

(ب) ۴، و

(ج) ۸ لایه دوگانه در نظر بگیرید.

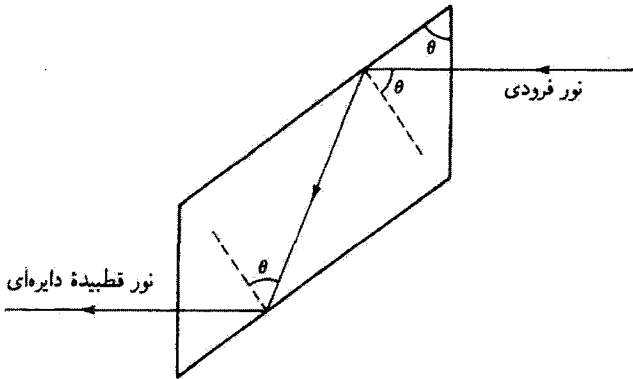
۱۴-۱۹ یک پشته پربازتابندگی از لایه‌هایی با ضرایب شکست متناوباً بیشتر و کمتر برای کار در فرورسوخ نزدیک به $2\mu\text{m}$ ساخته می‌شود. این پشته دارای چهار لایه دوگانه از ژرمانیم ($n = 4.0$) و MgF_2 ($n = 1.35$)، هر یک به ضخامت اپتیکی $0.5\mu\text{m}$ ، است. با فرض فرود عمودی و ضریب 1.50 برای پایه، بازتابندگی را در $2\mu\text{m}$ محاسبه کنید.

۱۵-۱۹ نسبت نظری ضرایب شکست بیشتر به کمتر را که برای به‌دست آوردن بازتابندگی حداقل 90% در پشته پربازتابندگی با دو لایه دوگانه با لایه‌های ربع موج در فرود عمودی لازم است تعیین کنید. ضریب پایه را 1.52 بگیرید.

۱۶-۱۹ نشان دهید R_{max} در معادله ۱۹-۵۳ وقتی به 1 میل می‌کند که یا N به بینهایت میل کند یا نسبت n_L/n_H به صفر میل کند.

مراجع

- 1] Dobrowolski, J. A. "Coatings and Filters." In *Handbook of Optics*, edited by Walter G. Driscoll and William Vaughan. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978.
- 2] Knittl, Z. *Optics of Thin Films, an Optical Multilayer Theory*. New York: John Wiley and Sons, 1976.
- 3] Heavens, O. S. *Thin Film Physics*. New York: Barnes and Noble, 1970.
- 4] Macleod, H. A. *Thin Film Optical Filters*. New York: American Elsevier Publishing Company, 1969.
- 5] Chopra, Kasturi L. *Thin Film Phenomena*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.
- 6] Baumeister, Philip, and Gerald Pincus. "Optical Interference Coatings." *Scientific American* (Dec. 1970): 58.
- 7] Nussbaum, Allen, and Richard A. Phillips. *Contemporary Optics for Scientists and Engineers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1976. Ch. 8.



۲۰

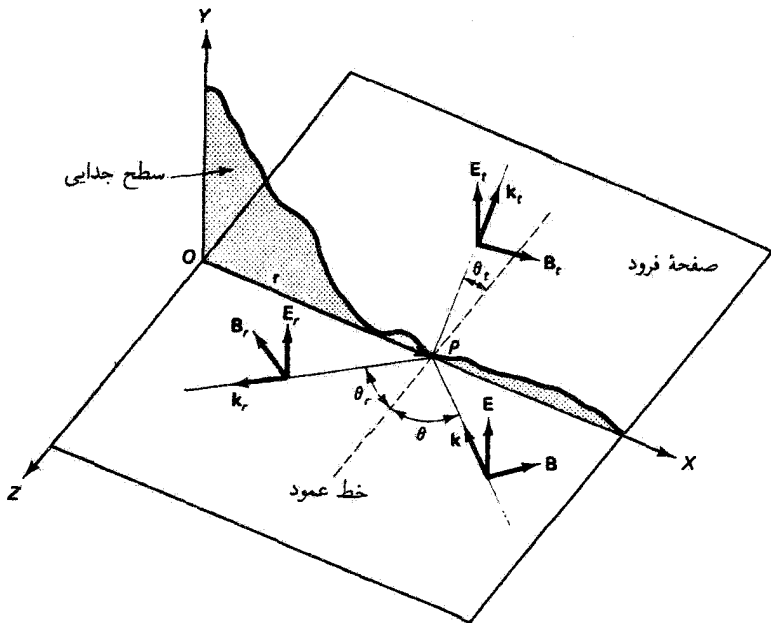
معادلات فرنل

مقدمه

قوانین اساسی بازتاب و شکست در اپتیک هندسی را قبلاً بر اساس اصول هویگنس و فرما به دست آوردیم. در این فصل نور را به صورت موج الکترومغناطیسی در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که قوانین بازتاب و شکست را می‌توان از این دیدگاه نیز به دست آورد. از این مهمتر، این رهیافت همچنین به معادلات فرنل منجر می‌شود که کسر عبور کرده و بازتابیده انرژی فرودی به سطح جدایی را توصیف می‌کنند. خواهیم دید که این کمیتها نه تنها به تغییر ضریب شکست و زاویه فرود در این سطح بلکه به قطبش نور فرودی نیز بستگی دارند. در پایان، تفاوت‌های مهم بین بازتاب‌های داخلی و خارجی را روشن خواهیم کرد.

۱-۲۰ معادلات فرنل

در شکل ۱-۲۰ یک پرتو نور فرودی در نقطه P به سطح جدایی تخت —صفحه xy — و پرتوهای بازتابیده و شکسته حاصل نشان داده شده‌اند. صفحه فرود صفحه xz است. فرض می‌کنیم نور



شکل ۱-۲۰ نمودار تعریفگر پرتوهای فرودی، بازتابیده، و شکسته در سطح جدایی تخت XY وقتی میدان الکتریکی عمود بر صفحه فرود است (مد TE).

فرودی متشکل از امواج هماهنگ تخت است که با معادله زیر بیان می‌شوند

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (1-20)$$

که در آن مبدأ مختصات در نقطه O گرفته شده است. بردار موج \mathbf{E} مربوط به موج فرودی را در جهت $+y$ انتخاب کرده‌ایم، و در نتیجه یک موج قطبیده خطی داریم. آنگاه باید جهت بردار میدان مغناطیسی مربوط \mathbf{B} را طوری تعیین کنیم که $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ در جهت انتشار موج \mathbf{k} قرار گیرد. این مد قطبش که در آن میدان \mathbf{E} عمود بر صفحه فرود است و میدان \mathbf{B} در صفحه فرود قرار دارد مد الکتریکی عرضی (TE) نامیده می‌شود. اما اگر \mathbf{B} عمود بر صفحه فرود باشد، موردی که بعداً بررسی می‌کنیم، مد را مد مغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند. راستای قطبش اختیاری را با یک ترکیب خطی از این دو مورد خاص نمایش می‌دهیم.

امواج بازتابیده و عبور کرده شکل ۱-۲۰ را می‌توان با صورتهایی مانند صورت موج فرودی ۱-۲۰

به ترتیب با معادله‌های زیر بیان کرد

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{or} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} \quad (۲-۲۰)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{ot} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)} \quad (۳-۲۰)$$

در صفحهٔ مرزی xy که در آن هر سه موج به‌طور همزمان وجود دارند باید رابطهٔ ثابتی بین سه دامنهٔ موج (و در نتیجه بازتابندگی آنها) برقرار باشد که می‌خواهیم آن را به‌دست آوریم. چون رابطه‌ای از این نوع نمی‌تواند نه به انتخاب نقطهٔ مرزی \mathbf{r} و نه به زمان بستگی داشته باشد، نتیجه می‌گیریم که فازهای سه موج که به \mathbf{r} و t بستگی دارند باید با هم برابر باشند:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = (\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t) = (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t) \quad (۴-۲۰)$$

به‌خصوص، در نقطهٔ مرزی $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ در شکل ۱-۲۰ داریم

$$-\omega t = -\omega_r t = -\omega_t t$$

یا

$$\omega = \omega_r = \omega_t \quad (۵-۲۰)$$

که نشان می‌دهد تمام بسامدها با هم برابرند. از طرف دیگر، در $t = 0$ ، روی صفحهٔ مرزی از معادلهٔ ۴-۲۰ به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \quad (۶-۲۰)$$

از روابط معادلهٔ ۶-۲۰ چند نتیجه گرفته می‌شوند. اولاً، با تفریق هر رابطه از دو رابطهٔ دیگر می‌بینیم که این روابط معادل‌اند با

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (۷-۲۰)$$

معادلهٔ ۷-۲۰ نشان می‌دهد که بردارهای \mathbf{k}_r و \mathbf{k}_t باید در صفحهٔ متشکل از بردارهای \mathbf{k} و \mathbf{r} باشند. بنابراین، هر سه بردار انتشار در صفحهٔ xz هستند، و نتیجه می‌گیریم که موجهای بازتابیده

و شکسته در صفحه فرود قرار دارند. ثانیاً، دو قسمت اول معادله ۶-۲۰ را که حاکم بر رابطه بین موجهای فرودی و بازتابیده هستند در نظر بگیرید. برحسب زاویه‌هایی که در شکل ۱-۲۰ نشان داده شده‌اند، این دو قسمت معادل‌اند با

$$kT \sin \theta = k_r r \sin \theta_r$$

چون هر دو موج در یک محیط حرکت می‌کنند دارای طول‌موجهای یکسان هستند و در نتیجه $k = k_r$. بنابراین، می‌رسیم به

$$\theta = \theta_r \quad \text{قانون بازتاب:} \quad (۸-۲۰)$$

و ثالثاً، دو قسمت آخر معادله ۶-۲۰ معادل‌اند با

$$k_r r \sin \theta_r = k_t r \sin \theta_t \quad (۹-۲۰)$$

با استفاده از $k_r = \omega/v_r = n_r \omega/c$ و $k_t = n_t \omega/c$ معادله ۹-۲۰ تبدیل به قانون اسنل می‌شود:

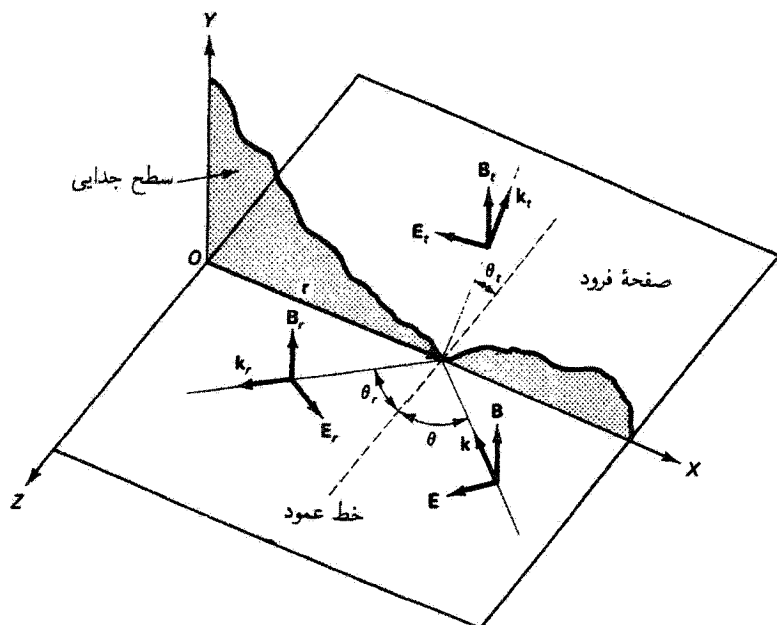
$$n_r \sin \theta_r = n_t \sin \theta_t \quad \text{قانون شکست:} \quad (۱۰-۲۰)$$

اکنون بحث را با تعیین وضعیت در مرز با استفاده از شرایط مرزی ناشی از معادلات ماکسول، که در کتابهای الکتریسیته و مغناطیس بررسی می‌شوند، ادامه می‌دهیم. این شرایط، که آنها را بدون اثبات به‌کار می‌بریم، ایجاب می‌کنند که مؤلفه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موازی با صفحه مرزی در عبور از مرز پیوسته باشند. با توجه به جهتی که در شکل ۱-۲۰ برای \mathbf{E} انتخاب شده است، شرط پیوستگی برای میدان الکتریکی عبارت است از

$$E + E_r = E_t \quad (۱۱-۲۰)$$

که در آن میدان کل در سمت فرودی مرز را با برهم‌نهی امواج فرودی و بازتابیده و در سمت دیگر تنها با میدان عبور کرده توصیف کرده‌ایم. توجه کنید که هر سه میدان با صفحه مرزی موازی و در جهت $+y$ هستند. در مورد میدانهای مغناطیسی متناظر، شرط مرزی برای مؤلفه‌های موازی به صورت زیر است

$$B \cos \theta - B_r \cos \theta = B_t \cos \theta_t \quad (۱۲-۲۰)$$



شکل ۲-۲۰ نمودار تعریفگر برای پرتوهای فرودی، بازتابیده، و شکسته در سطح جدایی تخت XY وقتی میدان مغناطیسی عمود بر صفحه فرود است (مد TM).

که در آن از معادله ۸-۲۰ استفاده کرده‌ایم. علامت منفی نشان می‌دهد که مؤلفه B_r در باریکه بازتابیده در جهت $-x$ است. معادله‌های ۱۱-۲۰ و ۱۲-۲۰ برای بردارهای E و B به صورتی که در شکل ۱-۲۰ انتخاب شده‌اند معتبرانند. اگر انتخاب دیگری، به عنوان مثال با وارونه کردن بردار E ی موج فرودی (و همچنین B برای ثابت ماندن جهت موج)، صورت گیرد معادله‌های ۱۱-۲۰ و ۱۲-۲۰ با تغییر علامت ظاهر می‌شوند. اما مفاد فیزیکی این معادله‌ها وقتی از روی شکلهای اصلی آنها تعبیر شوند یکی است. قبل از تعیین معنی معادله‌های ۱۱-۲۰ و ۱۲-۲۰ برای مد TE ، معادله‌های مشابهی را برای مد TM ، که در شکل ۲-۲۰ نشان داده شده است، بیان می‌کنیم. متناظر با معادله‌های ۱۱-۲۰ و ۱۲-۲۰، اکنون داریم

$$B + B_r = B_t \quad (۱۳-۲۰)$$

$$-E \cos \theta + E_r \cos \theta = -E_t \cos \theta_t \quad (۱۴-۲۰)$$

معادله‌های ۱۱-۲۰ تا ۱۴-۲۰ برای مقادیر لحظه‌ای میدانها در مرز معتبرانند. به علت مساوی بودن فازها این معادله‌ها برای دامنه‌های میدانها نیز معتبر هستند. میدانهای مغناطیسی در

معادله‌های ۱۲-۲۰ و ۱۳-۲۰ را می‌توان برحسب میدانهای الکتریکی از طریق رابطه زیر بیان کرد

$$E = vB = \left(\frac{c}{n}\right) B \quad (۱۵-۲۰)$$

اکنون اگر ضرایب شکست برای محیطهای فرود و شکست را به ترتیب با n_1 و n_2 نشان دهیم، معادله‌های ۱۱-۲۰ تا ۱۴-۲۰ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\left. \begin{array}{l} \text{TE :} \\ \\ \text{TM :} \end{array} \right\} \begin{array}{l} E + E_r = E_t \quad (۱۶-۲۰) \\ n_1 E \cos \theta - n_1 E_r \cos \theta = n_2 E_t \cos \theta_t \quad (۱۷-۲۰) \\ \\ n_1 E + n_1 E_r = n_2 E_t \quad (۱۸-۲۰) \\ -E \cos \theta + E_r \cos \theta = -E_t \cos \theta_t \quad (۱۹-۲۰) \end{array}$$

آنگاه، با حذف E_t از هر زوج معادله بالا، ضریب بازتاب $r = E_r/E$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{TE :} \quad r = \frac{E_r}{E} = \frac{\cos \theta - n \cos \theta_t}{\cos \theta + n \cos \theta_t} \quad (۲۰-۲۰)$$

$$\text{TM :} \quad r = \frac{E_r}{E} = \frac{n \cos \theta - \cos \theta_t}{n \cos \theta + \cos \theta_t} \quad (۲۱-۲۰)$$

که در آنها از ضریب شکست نسبی $n \equiv n_2/n_1$ استفاده کرده‌ایم. و سرانجام، چون n و θ_t از طریق قانون اسنل به θ مربوط می‌شوند، $\sin \theta = n \sin \theta_t$ ، می‌توانیم θ_t را با استفاده از رابطه زیر حذف کنیم

$$n \cos \theta_t = n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \quad (۲۲-۲۰)$$

نتایج عبارت‌اند از

$$\text{TE :} \quad r = \frac{E_r}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (۲۳-۲۰)$$

$$\text{TM :} \quad r = \frac{E_r}{E} = \frac{n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (۲۴-۲۰)$$

در معادله‌های ۱۶-۲۰ تا ۱۹-۲۰، به جای E_t اگر E_r را حذف کنیم، به روش مشابهی معادله‌های توصیف‌کننده ضریب عبور $t = E_t/E$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{TE: } t = \frac{E_t}{E} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (25-20)$$

$$\text{TM: } t = \frac{E_t}{E} = \frac{2n \cos \theta}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (26-20)$$

معادله‌های ۲۵-۲۰ و ۲۶-۲۰ را می‌توان به روش سریعتری نیز به دست آورد: ابتدا معادله‌های ۱۶-۲۰ و ۱۸-۲۰ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\text{TE: } t = r + 1$$

$$\text{TM: } nt = r + 1$$

و سپس نتایج ۲۳-۲۰ و ۲۴-۲۰ را در آنها جاگذاری می‌کنیم. معادله‌های ۲۳-۲۰ تا ۲۶-۲۰، ضرایب بازتاب و عبور یعنی نسبت دامنه‌های بازتابیده و شکسته به دامنه فرودی میدان E را تعیین می‌کنند، معادلات فرنل نامیده می‌شوند. البته در عمل ضرایب اندازه‌گیری شده بازتاب و عبور به اتلافهای پراکندگی از سطح ناتخت نیز بستگی دارند.

مثال

بازتابندگی و تراکسیندگی را برای مدهای TE و TM مربوط به نوری که با زاویه 30° به شیشه‌ای با ضریب شکست 1.6 فرود می‌آید محاسبه کنید.

حل: برای معادله‌های ۲۳-۲۰ و ۲۴-۲۰ داریم

$$r_{TE} = \frac{\cos 30^\circ - \sqrt{1.6^2 - \sin^2 30^\circ}}{\cos 30^\circ + \sqrt{1.6^2 - \sin^2 30^\circ}} = -0.2740$$

$$r_{TM} = \frac{1.6^2 \cos 30^\circ - \sqrt{1.6^2 - \sin^2 30^\circ}}{1.6^2 \cos 30^\circ + \sqrt{1.6^2 - \sin^2 30^\circ}} = 0.1866$$

بنابراین،

$$R_{TE} = r_{TE}^2 = ۷,۵۱\% \quad \text{و} \quad T_{TE} = ۱ - R_{TE} = ۹۲,۵\%$$

$$\blacktriangle \quad R_{TM} = r_{TM}^2 = ۳,۴۸\% \quad \text{و} \quad T_{TM} = ۱ - R_{TM} = ۹۶,۵\%$$

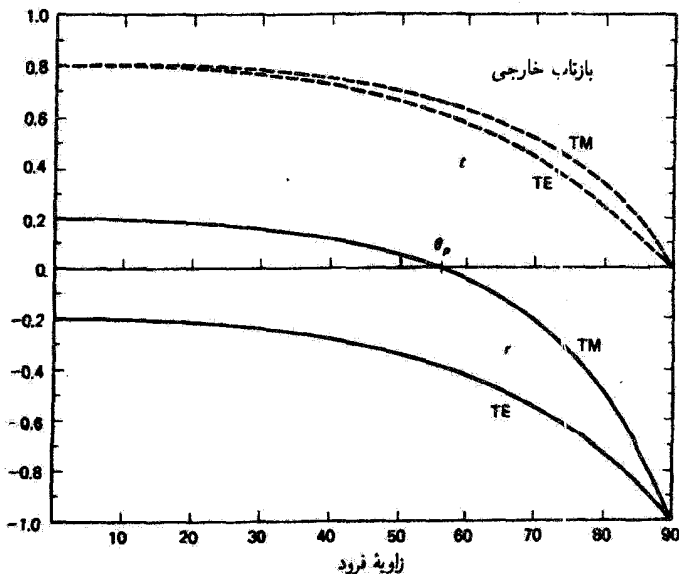
۲-۲۰ بازتابهای خارجی و داخلی

وقتی با تعبیر معادلات فرنل سروکار داریم، باید دو وضعیت مختلف فیزیکی را از هم متمایز کنیم:

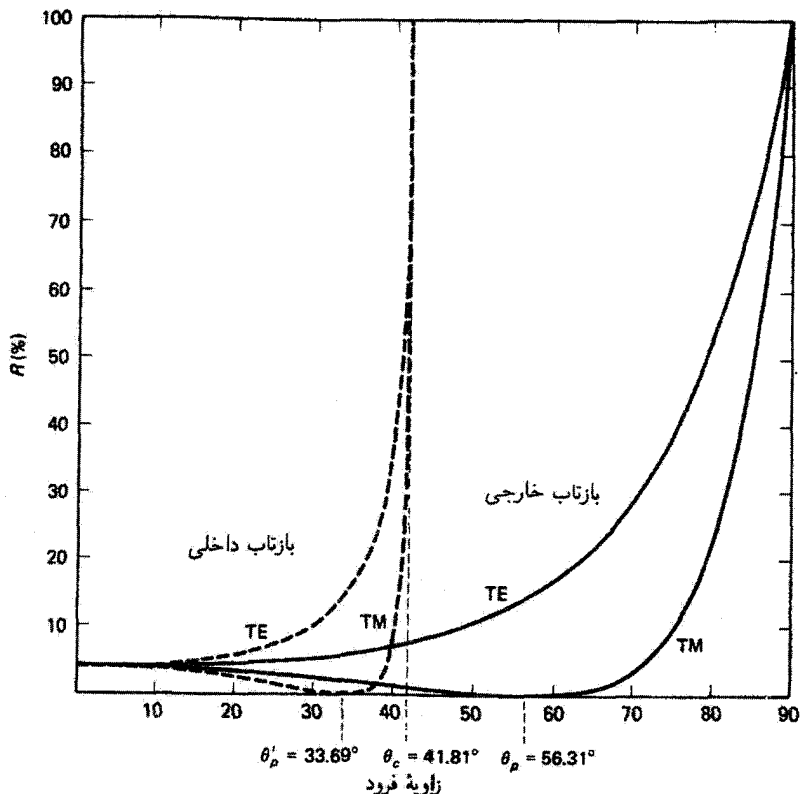
$$n_1 < n_2 \quad \text{یا} \quad n = \frac{n_2}{n_1} > 1 \quad \text{بازتاب خارجی:}$$

$$n_1 > n_2 \quad \text{یا} \quad n = \frac{n_2}{n_1} < 1 \quad \text{بازتاب داخلی:}$$

شکل ۳-۲۰ نموداری از معادلات $۲۳-۲۰$ تا $۲۶-۲۰$ را برای مورد بازتاب خارجی به ازای $n = ۱,۵$ نشان می‌دهد. توجه کنید که در فرود عمودی و مماسی — به ترتیب با زاویه‌های ۰° و ۹۰° — مدهای TE و TM به مقدار یکسانی برای هر یک از ضرایب بازتاب و عبور منجر می‌شوند. مقدار منفی r برای مدهای TE و TM نشاندهنده تغییر فازی برای بردارهای میدان



شکل ۳-۲۰ ضرایب بازتاب (r) و عبور (t) برای مورد بازتاب خارجی، با $n = n_2/n_1 = ۱,۵$.



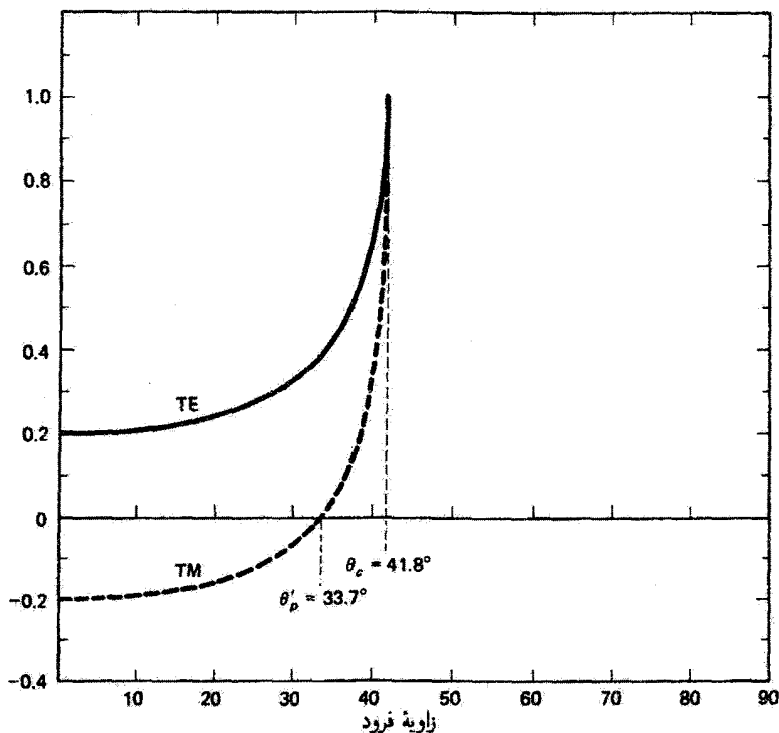
شکل ۴-۲۰ بازتابندگی برای بازتابهای خارجی و داخلی با $n_1 = 1$ و $n_2 = 1.5^\circ$

E یا **B** در بازتاب است که بعداً درباره آن بحث می‌کنیم. کسری از توان P در موج فرودی که بازتابیده می‌شود و آن را بازتابندگی می‌نامند یا عبور می‌کند و آن را تراکسپندگی می‌نامند، بستگی به نسبت مجذور دامنه‌ها دارد:

$$\text{بازتابندگی} = R = \frac{P_r}{P_i} = r^2 = \left(\frac{E_r}{E}\right)^2 \quad (27-20)$$

$$\text{تراکسپندگی} = T = \frac{P_t}{P_i} = n \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}\right) t^2 \quad (28-20)$$

این روابط را بعداً در این فصل توجیه می‌کنیم. نمودار بازتابندگی به صورت تابعی از زاویه فرود در شکل ۴-۲۰ نشان داده شده است. منحنی مربوط به مورد بازتاب خارجی برای مد TM نشان می‌دهد که وقتی زاویه فرود نزدیک 60° است هیچ انرژی موجی بازتابیده نمی‌شود. به بیان دقیقتر، اگر $\theta = \tan^{-1} n$ ، که آن را زاویه بروستر می‌نامند و با θ_p به معنی زاویه قطبیده نشان



شکل ۵-۲۰ ضریب بازتاب برای مورد بازتاب داخلی با $n = n_1/n_2 = 1/1.5$

می‌دهند، آنگاه $R_{TM} = 0$. این وضعیت از صفر شدن r_{TM} در شکل ۳-۲۰ و صورت کسر در معادله ۲۴-۲۰ نیز واضح است. در این وضعیت R_{TE} صفر نمی‌شود، و در نتیجه نور بازتابیده تنها شامل مد TE است با $R_{TE} = 15\%$ و قطبیده خطی است. برای مورد $n = 1.5$ که در شکل‌های ۳-۲۰ و ۴-۲۰ به‌کار رفته است داریم $\theta_p = 56.31^\circ$. در فرود عمودی ($\theta = 0$) برای مدهای TE و TM، معادله‌های ۲۳-۲۰ و ۲۴-۲۰ به‌صورت ساده زیر در می‌آیند

$$R = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 \quad (29-20)$$

که بازتابندگی ۴٪ را از شیشه‌ای با ضریب شکست $n = 1.5$ نشان می‌دهد. اما می‌دانیم که n تابعی از طول موج است. اگر زاویه فرود را تا فرود مماسی ($\theta = 90^\circ$) افزایش دهیم، هم R_{TE} و هم R_{TM} برابر با یک می‌شوند، اگر چه تا وقتی از زاویه برون‌تر نگذشته‌ایم R_{TM} کوچک باقی می‌ماند. ضریب بازتاب برای مورد بازتاب داخلی به‌ازای $n = 1/1.5$ ، مثلاً وقتی نور از شیشه وارد هوا می‌شود، در شکل ۵-۲۰ نشان داده شده است. شواهد تغییرات فاز و وجود زاویه برون‌تر یا

قطبند را می‌توان همچنین در اینجا دید. اما این شکل نشان می‌دهد که در این مورد بیش از اینکه زاویهٔ فرود به 90° برسد هم r_{TE} و هم r_{TM} به مقدار ۱ می‌رسند. این پدیده را بازتاب داخلی کلی می‌نامند و در زاویهٔ حد $\theta_c = \sin^{-1} n$ روی می‌دهد. برای مثال شیشه ($n = 1.5$) که در شکل $5-2^\circ$ به‌کار برده شده است داریم $\theta'_p = 33.7^\circ$ و $\theta_c = 41.8^\circ$. وقتی $\sin \theta_c > n$ کمیت $n^2 - \sin^2 \theta$ در زیر رادیکال منفی است و r_{TE} و r_{TM} مختلط هستند. اما به آسانی نشان داده می‌شود که قدرمطلق‌های آنها در این گستره یک هستند که به معنی بازتاب کلی برای $\theta > \theta_c$ است. بازتابندگی برای بازتاب داخلی در شکل $4-2^\circ$ ترسیم شده است.

۳-۲۰ تغییر فاز در بازتاب

مقادیر منفی ضریب بازتاب در شکلهای $3-2^\circ$ و $5-2^\circ$ نشان می‌دهند که در بعضی وضعیتهای داریم $E_r = -|r|E$. بدیهی است که جهت بردار میدان الکتریکی در بازتاب معکوس می‌شود. به عبارت دیگر، در این نوع موارد یک انتقال فاز π برای E در بازتاب، چنانکه استدلال ریاضی زیر ثابت می‌کند، روی می‌دهد:

$$E_r = -|r|E = e^{i\pi}|r|E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} = |r|E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t + \pi)}$$

بدین ترتیب، در مورد بازتاب خارجی (شکل $3-2^\circ$) در هر زاویهٔ فرودی برای مد TE و در $\theta > \theta_p$ برای مد TM یک انتقال فاز π برای E روی می‌دهد. برای بازتاب داخلی (شکل $5-2^\circ$)، نتیجه می‌گیریم که انتقال فاز π برای مد TM به‌ازای $\theta < \theta'_p$ صورت می‌گیرد، اما وضعیت در ناحیهٔ $\theta > \theta_c$ ، که در آن r مختلط است، مستلزم بررسی بیشتری است. وقتی $\theta > \theta_c = \sin^{-1} n$ در معادله‌های $23-2^\circ$ و $24-2^\circ$ انگاری می‌شود، و این معادله‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\text{TE: } r = \frac{\cos \theta - i\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad (30-20)$$

$$\text{TM: } r = \frac{n^2 \cos \theta - i\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta + i\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad (31-20)$$

ضریب بازتاب در هر یک از این معادله‌ها به‌صورت $r = (a - ib)/(a + ib)$ است. چون قسمتهای حقیقی و همچنین انگاری در صورت و مخرج کسر دارای بزرگیهای یکسان هستند،

قدرمطلق‌های صورت و مخرج با هم برابرند، و r دارای قدرمطلق یک است. شناسهٔ r را می‌توان با تبدیل معادلهٔ $۲۰-۳۰$ به صورت قطبی مختلط بررسی کرد:

$$r = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}} = e^{-i(2\alpha)}$$

که در آن مد TE داریم $\tan \alpha = \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} / \cos \theta$. اگر بنویسیم $r = e^{-i\phi}$ ، برای فاز r داریم $\phi = 2\alpha$ ، و روابطی که محاسبهٔ ϕ را ممکن می‌سازند عبارت‌اند از

$$\text{TE: } \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta} \quad (۲۲-۲۰)$$

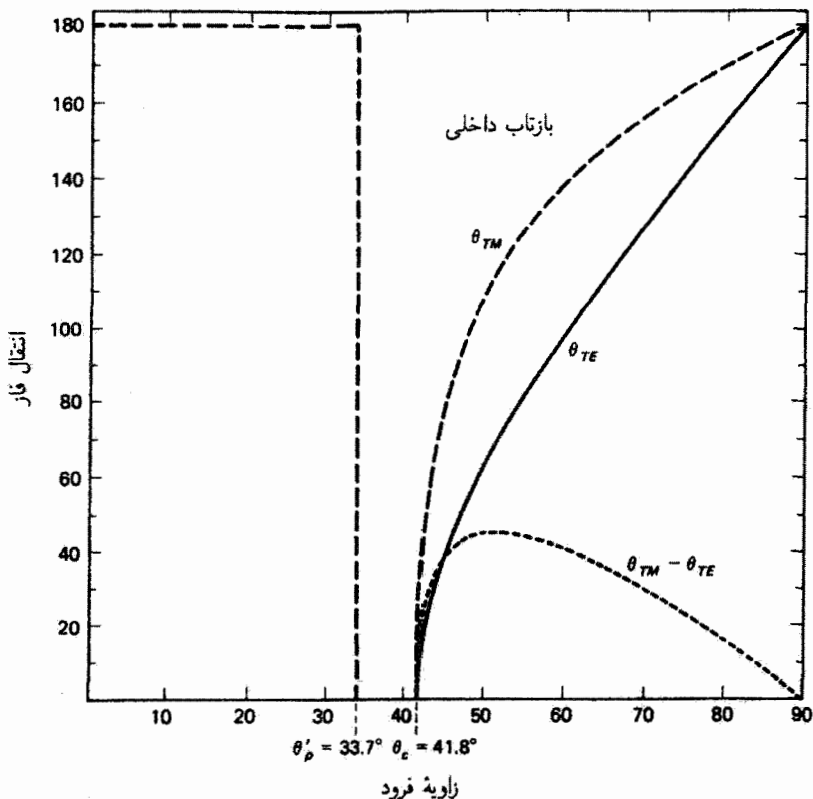
$$\text{TM: } \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta} \quad (۲۳-۲۰)$$

واضح است که اختلاف فازی که از بازتاب وارد می‌شود می‌تواند مقادیری غیر از ۰° و ۱۸۰° داشته باشد که بستگی به زاویهٔ فرود دارند. زاویهٔ فاز ϕ که از معادله‌های $۲۰-۳۲$ و $۲۰-۳۳$ تعیین می‌شود در شکل $۲۰-۶$ ترسیم شده است. در این شکل همچنین انتقال فاز نسبی $\phi_{TM} - \phi_{TE}$ ترسیم شده است. توجه کنید که در زاویهٔ فرود نزدیک ۵۰° انتقال نسبی برابر با ۴۵° است. بنابراین، دو بازتاب داخلی متوالی از این نوع یک اختلاف ۹۰° بین مؤلفه‌های عمودی بردار E به وجود می‌آورند که منجر به قطبش دایره‌ای نور می‌شود. این پدیده در لوزی فرنل قابل مشاهده است (شکل $۲۰-۷$). نتایج را برای مورد بازتاب داخلی خلاصه می‌کنیم:

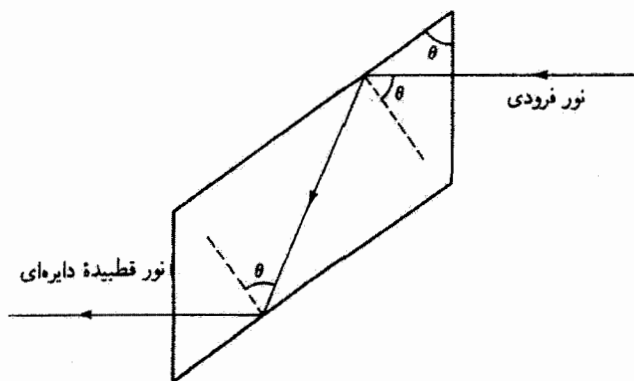
$$\phi_{TM} = \begin{cases} ۱۸۰^\circ, & \theta < \theta'_p \\ ۰^\circ, & \theta'_p < \theta < \theta_c \\ 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta}\right), & \theta > \theta_c \end{cases} \quad (۳۴-۲۰)$$

$$\phi_{TE} = \begin{cases} ۰^\circ & \theta < \theta_c \\ 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta}\right), & \theta > \theta_c \end{cases} \quad (۳۵-۲۰)$$

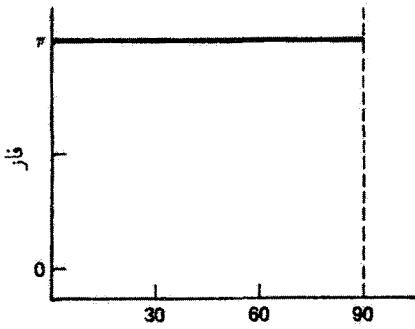
انتقال فازها برای مدهای TE و TM و برای بازتابهای داخلی و خارجی به اختصار در شکل $۲۰-۸$ نشان داده شده‌اند.



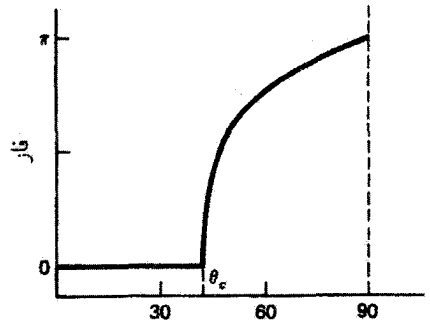
شکل ۲-۶ انتقال فاز میدان الکتریکی برای پرتوهای بازتابیده داخلی با $n_1/n_2 = 1/1.5$



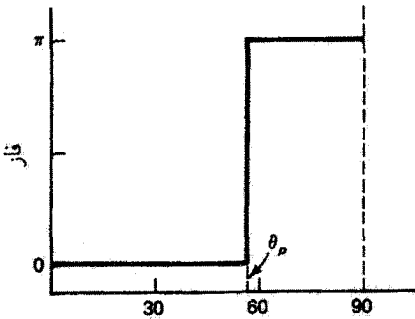
شکل ۲-۷ لوزی فرنل. با نور فرودی که در زاویه 45° نسبت به صفحه فرود قطبیده است، دو بازتاب داخلی دامنه‌های مساوی TE و TM با انتقال فاز نسبی 90° یا نور قطبیده دایره‌ای تولید می‌کنند. برای $n = 1.5$ داریم $\theta = 53^\circ$. این ابزار در گستره وسیعی از طول موجها کارایی دارد.



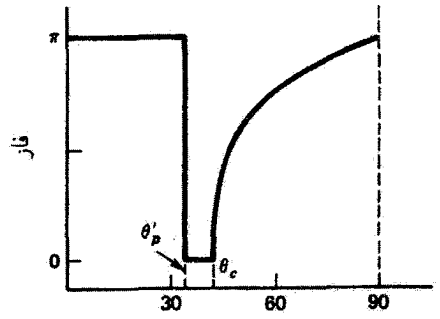
زاویه فرود
(الف) مد TE، بازتاب خارجی



زاویه فرود
(ب) مد TE، بازتاب داخلی



زاویه فرود
(ج) مد TM، بازتاب خارجی



زاویه فرود
(د) مد TM، بازتاب داخلی

شکل ۸-۲۰ تغییرات فاز بین پرتوهای فرودی و بازتابیده برحسب زاویه فرود. نایبوستگیها در $\theta_c = ۳۸٫۷^\circ$ ، $\theta_p = ۵۶٫۳^\circ$ و $\theta'_p = ۳۳٫۷^\circ$ برای ضرایب شکست $n_1 = ۱$ و $n_2 = ۱٫۵^\circ$ روی می‌دهند.

مثال

انتقال فاز پرتوهای TE و TM در بازتابهای داخلی و خارجی را در مثال قبل به‌دست آورید.

حل: برای آن مثال داریم

$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{1}{1.5} \right) = ۳۸٫۷^\circ$$

$$\theta_p = \tan^{-1}(۱٫۶) = ۵۸٫۷^\circ$$

$$\theta'_p = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1.6} \right) = ۳۲٫۰^\circ$$

چون زاویهٔ فرود 30° کمتر از θ'_p یا θ_c است، از معادله‌های $20-34$ و $20-35$ یا از شکل $20-8$ نتیجه می‌گیریم که برای بازتاب داخلی $\phi_{TM} = 180^\circ$ و $\phi_{TE} = 0^\circ$ در حالی که شکل $20-8$ نشان می‌دهد که برای بازتاب خارجی $\phi_{TM} = 0^\circ$ و $\phi_{TE} = 180^\circ$. بنابراین، یک انتقال فاز π بین پرتوهای بازتابیدهٔ خارجی و داخلی برای مدهای TE و TM روی می‌دهد. ▲

از تغییرات فاز برای مدهای TE و TM در بازتاب داخلی و خارجی یک نتیجهٔ کلی می‌توان به‌دست آورد: برای زاویه‌های فرودی که از فرود عمودی دور نباشند، تغییرات فازی که در بازتاب داخلی روی می‌دهند (0° برای TE، π برای TM) عکس تغییراتی هستند که در همین زاویه‌های فرود برای بازتاب خارجی روی می‌دهند (π برای TE، 0° برای TM). برای مدهای TE و TM، دو باریکهٔ بازتابیدهٔ متحمل یک انتقال فاز نسبی π می‌شوند. در مورد یک لایهٔ نازک در هوا، آنچه مهم است انتقال فاز نسبی بین پرتوهای بازتابیده از سطح اول (خارجی) و سطح دوم (داخلی) است. از بررسی شکل $20-8$ دیده می‌شود که انتقال فاز نسبی π در مد TE برای زاویه‌های فرود داخلی کمتر از θ_c و در مد TM برای زاویه‌های فرود داخلی کمتر از θ'_p روی می‌دهد. زاویه‌های فرود خارجی متناظر در سطح اول عبارت‌اند از 90° (مد TE) و θ_p (مد TM). بدین ترتیب، در مد TE انتقال فاز نسبی π برای تمام زاویه‌های فرود خارجی روی می‌دهد، اما در مد TM این امر تنها برای زاویه‌های خارجی کمتر از θ_p صادق است.

۲۰-۴ پایستگی انرژی

از دیدگاه انرژی، آهنگ انرژی ورودی یا توان فرودی باید برابر با مجموع توان بازتابیده و توان عبور کرده در مرز باشد، یا

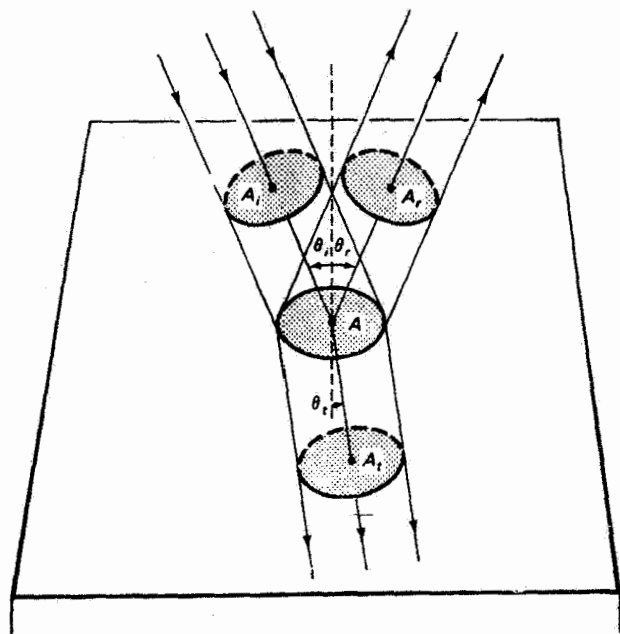
$$P_i = P_r + P_t \quad (20-36)$$

اگر بازتابندگی R را به صورت نسبت توان بازتابیده به فرودی و تراگسیلندگی T را به صورت توان عبور کرده به فرودی نمایش دهیم، یعنی

$$R = \frac{P_r}{P_i} \quad \text{و} \quad T = \frac{P_t}{P_i} \quad (20-37)$$

آنگاه معادلهٔ $20-36$ به صورت زیر در می‌آید

$$1 = R + T \quad (20-38)$$



شکل ۹-۲۰ مقایسهٔ مقاطع عرضی باریکه‌های فرودی، بازتابیده و شکسته.

تابیدگی I چگالی توان (W/m^2) است، و در نتیجه می‌توانیم به جای معادلهٔ ۳۶-۲۰ بنویسیم

$$I_i A_i = I_r A_r + I_t A_t \quad (۳۹-۲۰)$$

مساحت‌های مقاطع عرضی سه باریکهٔ فرودی، بازتابیده و شکسته (شکل ۹-۲۰ را ببینید) به ترتیب با کسینوس زاویه‌های فرود، بازتاب و شکست به مساحت A که این باریکه‌ها در صفحهٔ مرزی قطع می‌کنند مربوط می‌شوند. بنابراین، معادلهٔ ۳۹-۲۰ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I_i (A \cos \theta_i) = I_r (A \cos \theta_r) + I_t (A \cos \theta_t)$$

البته بنابه قانون بازتاب $\theta_i = \theta_r$. همچنین با استفاده از رابطهٔ بین تابیدگی و دامنهٔ میدان الکتریکی، یعنی

$$I = \left(\frac{\epsilon v}{\gamma} \right) E^2$$

و این واقعیت که $v_i = v_r$ و $\varepsilon_i = \varepsilon_r$ ، زیرا اینها به محیط یکسانی مربوط هستند، به معادله زیر می‌رسیم

$$E_{oi}^r = E_{or}^r + \left(\frac{v_t \varepsilon_t}{v_i \varepsilon_i} \right) \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) E_{ot}^r \quad (40-20)$$

کمیت $(v_t \varepsilon_t / v_i \varepsilon_i)$ در واقع صورت پیچیده‌ای از ضریب شکست نسبی n است:

$$\frac{v_t \varepsilon_t}{v_i \varepsilon_i} = \frac{v_t}{v_i} \frac{v_i^r \mu_i}{v_t^r \mu_t} = \frac{v_i}{v_t} = n \quad (41-20)$$

در اثبات این نتیجه از روابط

$$\mu_i = \mu_t = \mu_o$$

که برای مواد نامغناطیسی معتبراند و از رابطه

$$v^r = \frac{1}{\mu \varepsilon}$$

که برای سرعت موج الکترومغناطیسی تخت صادق است استفاده کرده‌ایم. از جاگذاری معادله ۴۱-۲۰ در معادله ۴۰-۲۰ داریم

$$E_{oi}^r = E_{or}^r + n \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) E_{ot}^r \quad (42-20)$$

این معادله از تقسیم بر قسمت سمت چپ و با وارد کردن ضرایب بازتاب r و عبور t به صورت زیر در می‌آید

$$1 = r^r + n \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) t^r \quad (43-20)$$

اما کمیت r^r همان بازتابندگی R است:

$$R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)^2 = r^r$$

از مقایسه معادله ۲۰-۴۳ با معادله ۲۰-۳۸، رابطه زیر را برای تراکسیلندگی T به دست می آوریم

$$T = n \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) t^2 \quad (۴۴-۲۰)$$

توجه کنید که T برابر با تنها t^2 نیست زیرا باید سرعت و راستای دیگری در یک محیط جدید به حساب آورده شوند. تغییر در سرعت باعث تغییر آهنگ انتشار انرژی و در نتیجه تغییر توان باریکه می شود؛ تغییر در راستا مقطع عرضی و در نتیجه چگالی توان باریکه را تغییر می دهد. اما برای فرود عمودی، معادله ۲۰-۴۴ تبدیل می شود به $T = nt^2$ و معادله ۲۰-۴۳ به صورت زیر در می آید

$$1 = r^2 + nt^2 \quad \text{فرودی عمودی:} \quad (۴۵-۲۰)$$

نمودار T برحسب زاویه فرود را می توان به آسانی با استفاده از شکل ۲۰-۴ همراه با معادله ۲۰-۳۸ تهیه کرد.

۲۰-۵ امواج گذرا

در بحث انتشار موج نور با بازتاب داخلی کلی (TIR) در یک تار نوری، پدیده تداخل خط را بیان خواهیم کرد (فصل ۲۴) که عبارت است از جفت شدگی انرژی موج به محیط دیگر وقتی به اندازه کافی به موج بازتابیده نزدیک می شود. این اتلاف انرژی را بازتاب کلی بازداشته می نامند. با استفاده از نظریه ای که در این فصل ارائه شده است می توانیم این پدیده را به طور کمی توصیف کنیم.

موج عبور کرده در شکست در سطح جدایی با معادله ۲۰-۳ داده می شود:

$$E_t = E_{o_t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

که در آن، بنابه مختصات انتخابی در شکل ۲۰-۱، داریم

$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} = k_t (\sin \theta_t, \cos \theta_t, 0) \cdot (x, y, 0)$$

$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} = k_t (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)$$

$\cos \theta_t$ را به صورت زیر می نویسیم

$$\cos \theta_t \equiv \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}}$$

که در آن در آخرین قسمت از قانون اسنل استفاده کرده‌ایم. در زاویه بحرانی داریم $\sin \theta = n$ و $\cos \theta = 0$. به‌ازای زاویه‌هایی که برای آنها $\sin \theta > n$ ، یعنی وقتی بازتاب داخلی کلی روی می‌دهد، $\cos \theta_t$ انکاری محض می‌شود و می‌توانیم بنویسیم

$$\cos \theta_t = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}$$

بنابراین، عامل نمای $k_t \cdot r$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$k_t \cdot r = k_t x \frac{\sin \theta}{n} + i k_t y \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}$$

اگر قرار دهیم

$$\alpha \equiv k_t \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}$$

که یک عدد حقیقی مثبت است، آنگاه موج عبور کرده را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$E_t = E_{o_t} e^{-i\omega t} e^{izk_t \sin \theta/n} e^{-\alpha y}$$

آخرین عامل توصیفگر کاهش نمایی در دامنه موجی است که در راستای y وارد محیط رقیق می‌شود. سایر عوامل نما شامل عدد i هستند که از آنها توابع هماهنگی با دامنه یک می‌سازد. وقتی موج به اندازه

$$y = \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}} \quad (۴۶-۲۰)$$

به محیط رقیق نفوذ می‌کند دامنه به نسبت $1/e$ کاهش می‌یابد. انرژی این موج گذرا به محیط اصلی برمی‌گردد مگر اینکه محیط دومی در منطقه نفوذ آن قرار داشته باشد. بازداشتگی بازتاب داخلی کلی اگر چه در مورد تداخل خط در تارهای نزدیک به هم که فاقد غلاف محافظ هستند مضر است اما در ابزارهایی مانند جفتگر خروجی متغیر، متشکل از دو منشور قائم که فاصله آنها در امتداد وجوه وتری را می‌توان برای تغییر مقدار موج گذرای جفت‌شده از یک منشور به منشور

دیگر به دقت تنظیم کرد، به کار می‌آیند. در یک کاربرد عملی دیگر وجه یک منشور را به سطح موجبر اپتیکی نزدیک می‌کنند به طوری که موج گذرای خروجی از منشور می‌تواند در یک زاویه (مد) معین انتشار به موجبر جفت شود.

مثال

اگر دامنه یک موج گذرا در بازتاب داخلی کلی در سطح جدایی شیشه ($n = ۱.۵$) به هوا به نسبت $1/e$ مقدار اصلی موج تضعیف شده باشد عمق نفوذ آن را محاسبه کنید. فرض کنید نور با طول موج ۵۰۰ nm در زاویه ۶۰° به این سطح جدایی فرود می‌آید.

حل: چون $\theta_c = \sin^{-1}(1/1.5) = 41.8^\circ$ در ۶۰° بازتاب داخلی کلی روی می‌دهد. عمق نفوذ از معادله $۴۶-۲۰$ به دست می‌آید:

$$y = \frac{0.500 \mu\text{m}}{2\pi \sqrt{\frac{\sin^2 60^\circ}{(1/1.5)^2} - 1}} = 0.96 \mu\text{m}$$

۶-۲۰ ضریب شکست مختلط

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم برای سطح بازتابنده فلزی معادلات فرنل که قبلاً به دست آوردیم با یک تغییر مهم باز هم معتبر می‌مانند. این تغییر عبارت است از اینکه ضریب شکست یک عدد مختلط می‌شود که قسمت انگاری آن اندازه‌ای از جذب موج است. این موضوع را در فصل ۲۷ با تفصیل بیشتری، شامل امتحان وابستگی قسمتهای حقیقی و انگاری ضریب شکست به بسامد، بررسی خواهیم کرد.

وقتی سطح بازتابنده سطح یک دی‌الکتریک همگن است — موردی که قبلاً در این فصل در نظر گرفته‌ایم — رسانندگی σ برای این ماده صفر است. رسانندگی عبارت است از ضریب تناسب در قانون اهم:

$$j = \sigma E$$

که در آن j چگالی جریان (A/m^2) است که میدان E ایجاد می‌کند. در این نوع موارد، میدانهای E و B در معادله موجی، چنانکه در فصل ۸ توصیف شد، صدق می‌کنند که به صورت زیر است

$$\nabla^2 E = \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (47-20)$$

موج هماهنگی را که در معادله ۴۷-۲۰ صدق می‌کند می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (۴۸-۲۰)$$

اما اگر ماده فلز باشد یا رسانندگی قابل ملاحظه‌ای داشته باشد، معادلات اساسی الکتریسته و مغناطیس ماکسول منجر به تغییری در معادله‌های ۴۷-۲۰ و ۴۸-۲۰ می‌شوند. معادله موج حاکم بر میدان \mathbf{E} اکنون عبارت است از

$$\nabla^2 E = \left(\frac{1}{c^2} \right) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \right) \frac{\partial E}{\partial t} \quad (۴۹-۲۰)$$

توجه کنید که معادله موج جدید ۴۹-۲۰ در مقایسه با معادله ۴۷-۲۰ دارای یک جمله اضافی شامل رسانندگی و مشتق اول E نسبت به زمان است. در نتیجه، وقتی موج هماهنگی به صورت معادله ۴۸-۲۰ را در معادله ۴۹-۲۰ جاگذاری کنیم می‌بینیم بردار انتشار \mathbf{k} باید دارای بزرگی مختلط زیر باشد

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \left[1 + i \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) \right]^{1/2} \quad (۵۰-۲۰)$$

چون ضریب شکست n با رابطه $n = (c/\omega)k$ به k مربوط می‌شود، ضریب شکست اکنون عدد مختلطی است برابر با

$$\tilde{n} = \left[1 + i \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) \right]^{1/2} \quad (۵۱-۲۰)$$

که آن را به صورت کلی زیر می‌نویسیم

$$\tilde{n} = n_R + i n_I \quad (۵۲-۲۰)$$

که در آن $n_R = \text{Re}(\tilde{n})$ و $n_I = \text{Im}(\tilde{n})$. از مجذور کردن معادله‌های ۵۱-۲۰ و ۵۲-۲۰ و مساوی گرفتن قسمت‌های حقیقی و همچنین انگاری، می‌توان ثابت‌های ابتیکی n_R و n_I را برحسب رسانندگی از طریق معادله‌های زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} n_R^2 - n_I^2 &= 1 \\ 2n_R n_I &= \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \end{aligned} \quad (۵۳-۲۰)$$

به علاوه، اگر سرشت مختلط k را به صورت

$$\bar{k} = \left(\frac{\omega}{c}\right) \bar{n} = \left(\frac{\omega}{c}\right) [n_R + in_I] \quad (54-20)$$

در موج هماهنگ ۴۸-۲۰ وارد کنیم به دست می آوریم

$$E = E_0 e^{-(\omega n_I r/c)} e^{i\omega(n_R r/c - t)} \quad (55-20)$$

از معادله ۵۵-۲۰ نتیجه می گیریم که موج در این ماده با سرعت موج c/n_R منتشر می شود و طوری جذب می شود که دامنه با آهنگی که عامل نمایی $e^{-(\omega n_I r/c)}$ تعیین می کند کاهش می یابد. بدین ترتیب، کمیت $\text{Re}(\bar{n}) = n_R$ باید مانند ضریب شکست معمولی عمل کند، و کمیت $\text{Im}(\bar{n}) = n_I$ که ضریب خاموشی نامیده می شود آهنگ جذب موج در محیط رسانا را تعیین می کند. این جذب که ناشی از صرف انرژی در تولید جریان رسانش J در ماده است معمولاً با کاهش چگالی توان I نسبت به فاصله به صورت زیر توصیف می شود

$$I = I_0 e^{-\alpha r} \quad (56-20)$$

از مقایسه با چگالی توانی که از معادله ۵۵-۲۰ با $I \propto |E|^2$ تعیین می شود، به دست می آوریم

$$I = I_0 e^{-2\omega n_I r/c} \quad (57-20)$$

و در نتیجه می بینیم که ضریب جذب α و ضریب خاموشی n_I با رابطه زیر به هم مربوط اند

$$\alpha = \frac{2\omega n_I}{c} = \frac{4\pi n_I}{\lambda} \quad (58-20)$$

۷-۲۰ بازتاب از فلزات

با گذاشتن \bar{n} به جای n در معادلات فرنل، معادله های ۲۳-۲۰ و ۲۴-۲۰، برای فلزات داریم

$$\text{TE} : \frac{E_R}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\bar{n}^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\bar{n}^2 - \sin^2 \theta}} \quad (59-20)$$

$$\text{TM} : \frac{E_R}{E} = \frac{\bar{n}^2 \cos \theta - \sqrt{\bar{n}^2 - \sin^2 \theta}}{\bar{n}^2 \cos \theta + \sqrt{\bar{n}^2 - \sin^2 \theta}} \quad (60-20)$$

با جاگذاری \bar{n} به صورت $n_R + in_I$ در معادله‌های $۲۰-۵۹$ و $۲۰-۶۰$ ، این معادله‌ها به صورت زیر در می‌آیند

$$\text{TE: } \frac{E_R}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{(n_R^2 - n_I^2 - \sin^2 \theta) + i(2n_R n_I)}}{\cos \theta + \sqrt{(n_R^2 - n_I^2 - \sin^2 \theta) + i(2n_R n_I)}} \quad (۶۱-۲۰)$$

$$\text{TM: } \frac{E_R}{E} = \frac{[n_R^2 - n_I^2 + i(2n_R n_I)] \cos \theta - \sqrt{(n_R^2 - n_I^2 - \sin^2 \theta) + i(2n_R n_I)}}{[n_R^2 - n_I^2 + i(2n_R n_I)] \cos \theta + \sqrt{(n_R^2 - n_I^2 - \sin^2 \theta) + i(2n_R n_I)}} \quad (۶۲-۲۰)$$

در محاسبه بازتابندگی $R = |E_R/E|^2$ می‌توان ابتدا کمیت مختلط E_R/E را به نسبتی از اعداد مختلط به صورت $(a + ib)/(c + id)$ تبدیل کرد به طوری که

$$R = (a^2 + b^2)/(c^2 + d^2)$$

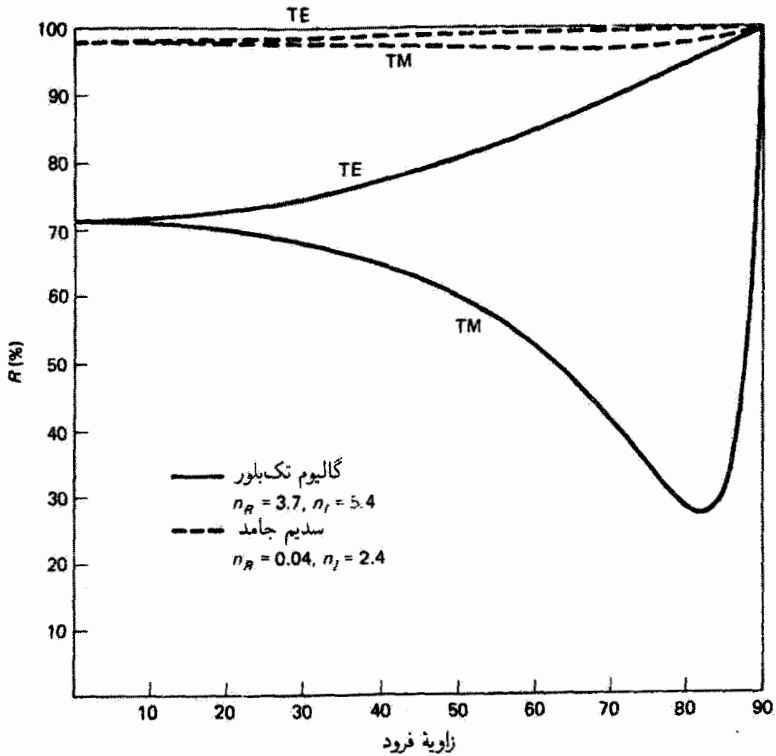
در این فرایند، باید ریشه دوم یک عدد مختلط را بگیریم. برای این کار ابتدا عدد مختلط را به صورت قطبی می‌نویسیم. به عنوان مثال، اگر $z = A + iB$ ، آنگاه در صورت قطبی داریم

$$z = (A^2 + B^2)^{1/2} e^{i[\text{atan}(B/A)]}$$

و ریشه دوم آن عبارت است از

$$z^{1/2} = (A^2 + B^2)^{1/4} e^{i[(1/2)\text{atan}(B/A)]} \quad (۶۳-۲۰)$$

سپس می‌توان عبارت مختلط در معادله $۲۰-۶۳$ را با استفاده از معادله اویلر به صورت مختلط عمومی $C + iD$ برگرداند. این عملیات ریاضی با ماشین حساب برنامه‌پذیر یا رایانه به آسانی انجام می‌شوند. نتایج این محاسبات برای دو سطح فلزی، سدیم جامد و گالیم تک‌بلور، در شکل $۲۰-۱۰$ نشان داده شده‌اند. بازتابندگی زیاد در طیف مرئی، چنانکه از منحنیهای مربوط به سدیم جامد در طول موج ۳۸۹nm دیده می‌شود، مشخصه سطوح فلزی است. منحنیهای مربوط به سطح گالیم تک‌بلور تمایز شدیدی بین مدهای TE و TM در تابش فرودی نشان می‌دهند.



شکل ۱۰-۲۰ بازتابندگی از سطوح فلزی با استفاده از معادلات فرنل. مقادیر n_I و n_R برای نور سدیم با $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ داده شده‌اند.

مسائل

۱۰-۲۰ نشان دهید صفر شدن ضریب بازتاب در مد TM، معادله ۲۰-۴۰، منجر به قانون بروستر می‌شود.

۲-۲۰ معلوم شده است که زاویه بحرانی برای یک نوع روغن $33^\circ 33'$ است. زاویه‌های بروستر آن را برای بازتابهای خارجی و داخلی به دست آورید.

۳-۲۰ زاویه بحرانی و زاویه‌های قطبیده را برای بازتابهای (الف) خارجی و (ب) داخلی از شیشه فلینت چگال با ضریب $n = 1.84$ به دست آورید.

۴-۲۰ وقتی محیط اول هوا است، برای چه ضریب شکستی زاویه بحرانی و زاویه بروستر (خارجی) با هم برابرند؟

۵-۲۰ نشان دهید معادلات فرنل $23-20$ تا $26-20$ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد

$$\text{TE: } r = -\frac{\sin(\theta - \theta_t)}{\sin(\theta + \theta_t)} \quad t = \frac{2 \cos \theta \sin \theta_t}{\sin(\theta + \theta_t)}$$

$$\text{TM: } r = \frac{\tan(\theta - \theta_t)}{\tan(\theta + \theta_t)} \quad t = \frac{2 \cos \theta \sin \theta_t}{\sin(\theta + \theta_t) \cos(\theta - \theta_t)}$$

۶-۲۰ شکلهای $3-20$ و $5-20$ را با نوشتن برنامه‌های رایانه‌ای برای محاسبه و یا ترسیم نمودارها، با استفاده از معادله‌های $23-20$ تا $26-20$ ، تأیید کنید.

۷-۲۰ یک برنامه رایانه‌ای برای محاسبه و یا ترسیم منحنیهای بازتابندگی شکل $4-20$ بنویسید. تراگیسیلندگی متناظر را نیز ترسیم کنید.

۸-۲۰ یک برنامه رایانه‌ای برای محاسبه نموداری از انتقال فاز به صورت تابعی از زاویه فرود، همچون در شکل $6-20$ ، برای $\theta > \theta_c$ بنویسید.

۹-۲۰ لایه‌ای از فلونورید منیزیم با ضخامت اپتیکی ربع طول موج نوری که باید به آن فرود آید روی پایه شیشه‌ای کشیده شده است. ضریب شکست لایه 1.38 و ضریب شکست پایه 1.52 است. لایه را غیرجاذب فرض کنید. کمیت‌های زیر را برای نور تکفام با فرود عمودی به دست آورید:

(الف) بازتابندگی از سطح هوا-لایه؛

(ب) بازتابندگی از سطح لایه-شیشه؛

(ج) بازتابندگی از یک سطح هوا-شیشه بدون لایه؛

(د) بازتابندگی کل از ساختار (معادله $19-43$ را ببینید).

۱۰-۲۰ بازتابندگی از آب ($n = 1.33$) را برای قطبشهای (الف) TE و

(ب) TM به ازای زاویه‌های فرود 0° ، 10° ، 45° و 90° محاسبه کنید.

۱۱-۲۰ نوره یک سطح جدایی هوا-الماس فرود می‌آید. اگر ضریب الماس 2.42 باشد، زاویه‌های بروستر و بحرانی را برای بازتابهای

(الف) خارجی و

(ب) داخلی به دست آورید. در هر مورد، مدهای قطبش را مشخص کنید.

۱۲-۲۰ بازتابندگی و تراگیسیلندگی درصد مدهای

(الف) TE و

(ب) TM را برای نور فرودی در 50° به سطح شیشه‌ای با $n = 1.60$ محاسبه کنید.۱۳-۲۰ معادله‌های $20-25^\circ$ و $20-26^\circ$ برای ضریب عبور را به دو روش(الف) حذف E_r از معادله‌های $20-16^\circ$ تا $20-19^\circ$ ، و

(ب) استفاده از معادله‌های متناظر برای ضریب بازتاب، همراه با روابط بین ضرایب عبور و

بازتاب که از معادله‌های $20-16^\circ$ و $20-18^\circ$ نتیجه می‌شوند، به دست آورید.۱۴-۲۰ موج ناقطبیده از سطح تخت شیشه سیلیکای مذاب با $n = 1.458$ بازتابیده می‌شود.

(الف) زاویه‌های بحرانی و قطبیده را تعیین کنید.

(ب) بازتابندگی و تراکسیلندگی را برای مد TE در فرود عمودی و در 45° به دست آورید.

(ج) قسمت (ب) را برای مد TM حل کنید.

(د) اختلاف فاز بین مدهای TE و TM را برای پروهای بازتابیده داخلی در زاویه‌های فرود

 $0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 70^\circ$ و 90° محاسبه کنید.۱۵-۲۰ یک لوزی فرنل از ماده‌ای شفاف با ضریب 1.65 ساخته شده است.(الف) زاویه رأس θ که در شکل $20-7$ نشان داده شده است چه اندازه باید باشد؟(ب) اختلاف فاز بین مدهای TE و TM را پس از دو بازتاب، وقتی این زاویه 5% کمتر و

بیشتر از مقدار درست است، به دست آورید.

۱۶-۲۰ بازتابندگی را برای بازتاب فلزی نور سدیم (589.3 nm) از یولاد، که برای آن $n_R = 2.485$ و $n_I = 1.381$ تعیین کنید. بازتابندگی را برای مدهای

(الف) TE و

(ب) TM در زاویه‌های فرود $0^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$ و 90° محاسبه کنید.۱۷-۲۰ بازتابندگی از قلع را در زاویه‌های فرود $0^\circ, 30^\circ$ و 60° برای مدهای قطبش

(الف) TE و

(ب) TM به دست آورید. قسمت‌های حقیقی و انگاری ضریب شکست مختلط برای نور

 589.3 nm به ترتیب 1.5 و 0.3 هستند.۱۸-۲۰ (الف) ضریب جذب را برای قلع با قسمت انگاری ضریب شکست 0.3 برای نور 589.3 nm تعیین کنید.(ب) در چه عمقی 99% نور سدیم با فرود عمودی در قلع جذب می‌شود؟

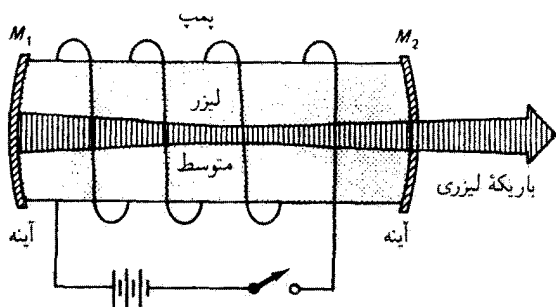
۱۹-۲۰ (الف) از شرط پایستگی توان که با معادله $۴۳-۲۰$ بیان شده است، نشان دهید ضریب عبور t برای بازتاب خارجی باید کمتر از ۱ باشد اما برای بازتاب داخلی t' می‌تواند بزرگتر از ۱ باشد. (ب) همچنین با استفاده از معادلات فرنل $۲۵-۲۰$ و $۲۶-۲۰$ نشان دهید وقتی زاویه فرود به زاویه بحرانی نزدیک می‌شود t' باید به مقدار ۲ در مد TE و $۲/n$ در مد TM نزدیک شود. (ج) ضریب عبور t' را برای سطح جدایی شیشه ($n = ۱.۵$) و هوا ترسیم کنید.

۲۰-۲۰ باریکه نور کم‌عرضی ($\lambda = ۵۴۶ \text{ nm}$) با بازتاب داخلی کلی از وجه وتری یک منشور $۴۵^\circ-۹۰^\circ-۴۵^\circ$ از جنس شیشه‌ای با $n = ۱.۶۰$ به اندازه ۹۰° دوران می‌کند. (الف) عمق نفوذی را که در آن دامنه موج گذرا به $1/e$ مقدار اولیه خود در سطح کاهش می‌یابد به دست آورید.

(ب) نسبت تابیدگی موج گذرا در فاصله $1 \mu\text{m}$ از سطح به تابیدگی در سطح را تعیین کنید.

مراجع

- [1] Dichtburn, R. W. *Light*, vol. 2. New York: Academic Press, 1976. Ch. 14.
- [2] Longhurst, R. S. *Geometrical and Physical Optics*, 2d ed. New York: John Wiley and Sons, 1967. Ch. 21.
- [3] Rossi, Bruno. *Optics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1957. Ch. 8.



۲۱

اصول لیزر

مقدمه

در میان ابزارهای اپتیکی که در ۵۰ سال گذشته تکوین و تکامل یافته‌اند شاید لیزر از همه مهمتر باشد. لیزر از ابتدای پیدایش خود در دهه ۱۹۶۰، که خارج از جامعه علمی تقریباً ناشناخته بود، باعث شده است که اپتیک به صورت یکی از بالنده‌ترین حوزه‌های علم و تکنولوژی امروزی در آید. لیزر اساساً یک تقویت‌کننده اپتیکی است. واژه لیزر از حروف اول عبارت انگلیسی **Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation**، به معنی "تقویت نور با گسیل القایی تابش" ساخته شده است. واژه‌های اساسی در اینجا تقویت و گسیل القایی هستند. زمینه نظری کار لیزر به عنوان پایه‌ای برای تقویت‌کننده اپتیکی را قبلاً اینشتین فراهم کرده بود؛ او در سال ۱۹۱۶ وجود یک فرایند تابشی را که گسیل القایی نامیده شد پیش‌بینی کرد. اما از کار نظری او استفاده چندانی نشد تا اینکه در سال ۱۹۵۴ چارلز تاونز و همکارانش یک تقویت‌کننده میکروموج بر اساس گسیل القایی تابش، که میزر نامیده شد، ساختند. چندی بعد، در سال ۱۹۵۸، آرتور شاولو و تاونز اصول میزر را با نور ناحیه مرئی تطبیق دادند، و در سال ۱۹۶۰ تئودور میمان اولین ابزار لیزری را ساخت. در لیزر میمان از بلور باقوت برای محیط تقویت لیزری و از کاواک اپتیکی فابری-پرو به عنوان

تشدیدگر استفاده شده بود. چند ماه پس از ورود لیزر یاقوتی میمان، که نور سرخ سیر در طول موج 694.3 nm گسیل می‌کرد، علی جوان و همکارانش نخستین لیزر گازی را ساختند، که یک لیزر نئون-هلیوم بود و در ناحیه‌های طیفی فرورسرخ (در $1.15 \mu\text{m}$) و مرئی (در 632.8 nm) گسیل می‌کرد. پس از تولد این لیزرهای یاقوتی و هلیوم-نئون (He-Ne)، ابزارهای لیزری دیگری، هر یک با محیط لیزری متفاوتی و با گسیل طول موج متفاوتی، به سرعت ساخته شدند. در بیشتر دهه ۱۹۶۰، دنیای صنعت و تکنولوژی به لیزر به عنوان یک کنجکاری علمی نگاه می‌کرد، و آن را به کنایه "جوابی در جستجوی سؤال" می‌نامیدند. اما در دهه ۱۹۷۰ همه چیز تغییر کرد، و قدر لیزر را به عنوان چشمه منحصربه‌فرد نور قوی هم‌دوس شناختند. امروزه، تقریباً هفته‌ای نیست که کاربردهای جدیدی از لیزر، با استفاده از منابع متعدد، کشف نشوند. لیزرها، همراه با کابل تار نوری و ابزارهای فوتوالکترونیکی نیم‌رسانا، انقلابی در اپتیک و صنعت اپتیک ایجاد کرده‌اند.

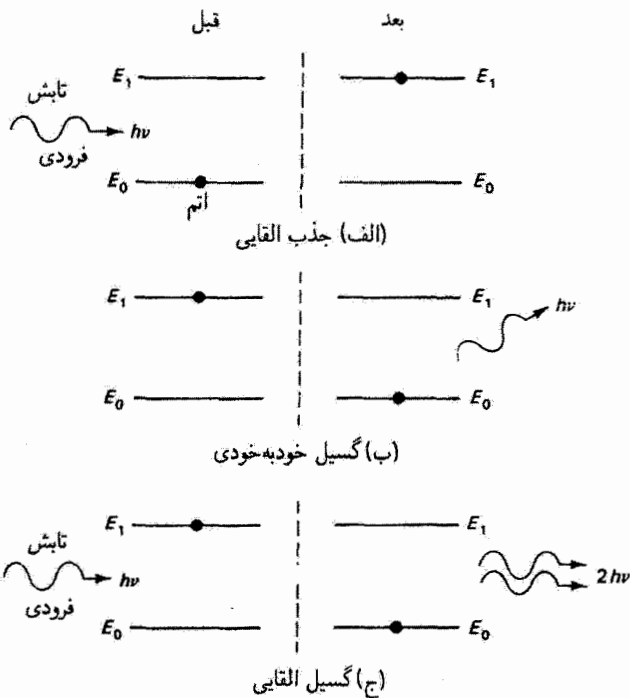
در این فصل، اساس پیش‌بینی اینشتین درباره وجود گسیل القایی را مرور می‌کنیم، عناصر اساسی تشکیل دهنده لیزر را بررسی می‌کنیم، طرز کار لیزر را به زبان ساده شرح می‌دهیم، و مشخصات نور لیزر را که باعث منحصر به فرد شدن آن شده‌اند بیان می‌کنیم. در پایان، بعضی از لیزرهای متداول را که امروزه وجود دارند، همراه با پارامترهای کاری مهم آنها، در جدولی به اختصار فهرست خواهیم کرد.

۲۱-۱ نظریه کوانتومی تابش اینشتین

در سال ۱۹۱۶، اینشتین، هنگام مطالعه فرایندهای بنیادی مؤثر در برهم‌کنش تابش الکترومغناطیسی با ماده، نشان داد که وجود تعادل بین ماده و تابش مستلزم فرایند تابشی است که قبلاً کشف نشده بود و گسیل القایی نامیده شد. بنابه نظر اینشتین، برهم‌کنش تابش با ماده را می‌توان برحسب سه فرایند اساسی توضیح داد که عبارت‌اند از جذب القایی، گسیل خودبه‌خودی، و گسیل القایی. این سه فرایند در شکل ۲۱-۱ نمایش داده شده‌اند.

جذب القایی (شکل ۲۱-۱ الف)، یا به‌طور ساده جذب، وقتی روی می‌دهد که تابش حاوی فوتونهای با انرژی $E_1 - E_0 = h\nu$ به ماده با انرژی حالت پایه E_0 و انرژی حالت برانگیخته E_1 فرود آید. انرژی فوتون تشدید $h\nu$ اتم را از حالت انرژی E_0 به E_1 بالا می‌برد.

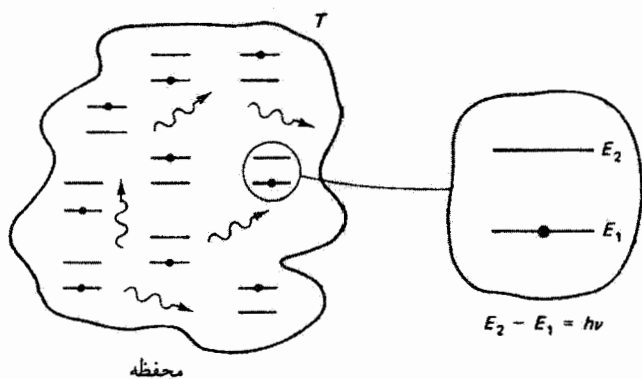
گسیل خودبه‌خودی (شکل ۲۱-۱ ب) وقتی روی می‌دهد که اتمها در یک حالت برانگیخته باشند. برای شروع این گسیل وجود تابش خارجی لازم نیست. در این فرایند، وقتی اتم در حالت برانگیخته E_1 است انرژی‌اش را خودبه‌خود از دست می‌دهد و به حالت E_0 پایین می‌افتد، و فوتونی با انرژی $E_1 - E_0 = h\nu$ در یک راستای اتفاقی گسیل می‌شود. حتی وقتی تابش خارجی وجود داشته باشد، فوتون خودبه‌خودی در راستایی صادر می‌شود که کاملاً مستقل از راستای تابش خارجی است.



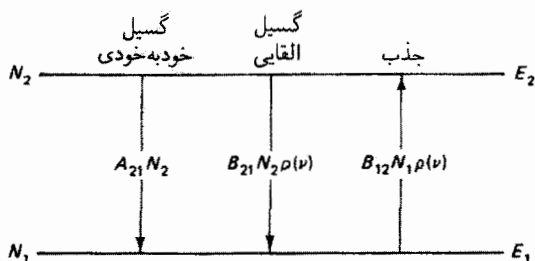
شکل ۲۱-۱ سه فرایند اساسی که در عبور تابش از ماده مؤثراند. توجه کنید که $h\nu = E_1 - E_0$.

کاملاً برعکس، گسیل القایی (شکل ۲۱-۱ ج) مستلزم وجود تابش خارجی است. وقتی یک فوتون فرودی با انرژی شدید $h\nu = E_1 - E_0$ از کنار اتمی که در حالت برانگیخته E_1 است می‌گذرد آن را "تحریک" می‌کند که به حالت پایینتر E_0 بیفتد. در این فرایند، اتم فوتونی با همان انرژی، راستا، فاز، و قطبش فوتون گذرنده گسیل می‌کند. بنابراین، نتیجه نهایی وجود دو فوتون یکسان به جای یکی، یا افزایش شدت "باریکه" فرودی است. دقیقاً این فرایند گسیل القایی است که تقویت نور در لیزرها را ممکن می‌سازد.

ضرایب اینشتین A و B . اثبات وجود گسیل القایی توسط اینشتین از علاقه او برای درک سازوکار اساسی برهم‌کنش بین تابش الکترومغناطیسی و ماده ناشی شد. مروری بر کار او هم جالب است و هم آموزنده. به عنوان الگویی در این بررسی، فرض می‌کنیم ماده (مجموعه‌ای از اتمها) در تعادل ترمودینامیکی با یک میدان تابش جسم سیاه است. اتمها و تابش تشدیدی در محفظه‌ای در دمای T با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند. شکل ۲۱-۲ تصویر ساده‌ای از اتمهای دوتراز و تابش (فوتونها) مقید در حجم واحد اختیاری را نشان می‌دهد. اگر تعادل ترمودینامیکی وجود داشته باشد، تعداد اتمهای N_1 در تراز انرژی E_1 ، تعداد اتمهای N_0 در تراز انرژی E_0 ، و تعداد فوتونها



شکل ۲-۲۱ یک جسم سیاه در دمای T تابشی گسیل می‌کند که با اتمها در جسم سیاه برهم‌کنش دارد.



شکل ۳-۲۱ سه فرایند تابشی که روی تعداد اتمها در انرژی E_1 و E_2 مؤثراند، دو فرایند گسیل اتمها را از تراز E_2 خارج می‌کند و آنها را به تراز E_1 اضافه می‌کند. فرایند جذب باعث گذار از E_1 به E_2 است.

در میدان تابش همگی ثابت می‌مانند. فرایندهای گسیل و جذب که فوتونهایی را به میدان تابش اضافه می‌کنند و از آن حذف می‌کنند با آهنگ ثابتی روی می‌دهند که تعداد کل فوتونها را بدون تغییر می‌گذارد. در همین زمان، به‌ازای هر اتم از N_2 که در فرایند گسیل به E_1 می‌رود یک اتم از N_1 در فرایند جذب به E_2 می‌رود، و در نتیجه N_2 و N_1 تغییر نمی‌کنند. این وضعیت توازن در شکل ۳-۲۱ برحسب اتمهایی که از تراز E_1 به E_2 و از E_2 به E_1 می‌روند نشان داده شده است.

معنی ضرایب اینشتین B_{12} و B_{21} ، A_{21} در نظریه کوانتومی تابش و درکار لیزر دارای اهمیت قابل ملاحظه‌ای است. معنی این ضرایب را از روی شکل ۳-۲۱ که در آن هر ضریب به یکی از سه فرایند تابشی زیر مربوط شده است بهتر می‌توان درک کرد.

گسیل خودبه‌خودی (A_{21}). اتمها در تراز انرژی E_2 خودبه‌خود به تراز E_1 فرو می‌افتند و فوتونهایی با انرژی $h\nu = E_2 - E_1$ را به میدان تابش (جمعیت فوتونها) اضافه می‌کنند. در همین هنگام،

جمعیت N_2 مربوط به تراز E_2 کاهش می‌یابد. آهنگ این کاهش متناسب با جمعیت در هر زمان است، یعنی

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{خود}} = -A_{21}N_2$$

اگر تنها گسیل خودبه‌خودی روی بدهد، جواب معادلهٔ بالا عبارت است از

$$N_2(t) = N_{20} e^{-A_{21}t}$$

که نشان می‌دهد جمعیت N_2 با ثابت زمانی $\tau = 1/A_{21}$ کاهش می‌یابد. در حالی که تعداد N_2 در تراز E_2 با آهنگ N_2/τ یا $A_{21}N_2$ کم می‌شود تعداد N_1 در تراز E_1 با همین آهنگ افزایش می‌یابد. ثابت τ را طول عمر تابشی خودبه‌خودی تراز E_2 و ضریب A_{21} را آهنگ تابشی، که معمولاً برحسب s^{-1} سنجیده می‌شود، می‌نامند. ضریب A_{21} یک ثابت مشخصهٔ اتم است. دقیقاً توجه کنید که خود (dN_2/dt) ربطی به حضور یا غیاب میدان تابش ندارد.

گسیل القایی (B_{21}). در این فرایند آهنگی که با آن N_2 اتم توسط میدان تابش (فوتونها) تحریک می‌شوند تا از تراز E_2 به تراز E_1 بیفتند متناسب است با تعداد اتمهای موجود و چگالی میدان تابش، یعنی

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{القایی}} = -B_{21}N_2\rho(\nu)$$

که در آن چگالی فوتون به صورت تابعی از بسامد با عامل $\rho(\nu)$ بیان شده است.

جذب (B_{12}). جذب نیز یک فرایند القایی است زیرا بستگی به شدت میدان فوتون دارد. در واقع، جذب (القایی) و گسیل القایی فرایندهای وارون هم هستند. آهنگی که با آن N_1 اتم از تراز انرژی E_1 به E_2 بالا برده می‌شوند با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{جذب}} = -B_{12}N_1\rho(\nu)$$

ضریب B_{12} یک ثابت مشخصهٔ اتم است. معلوم می‌شود که B_{21} و B_{12} رابطهٔ نزدیکی با هم دارند؛ این دو ضریب تنها در شرایط خاص ناواگنی حالت‌های اتمی متناظر با ترازهای انرژی E_1 و E_2 با هم برابرند (تراز واگن تراز است که برای آن بیشتر از یک حالت وجود دارند).

اکنون که سه فرایند اساسی جذب، گسیل خودبه‌خودی و گسیل القایی را به ضریبهای A و B مربوط کرده‌ایم، به بیان فرضهای اینشتین و مضامین آنها می‌پردازیم:

۱. تعادل ترمودینامیکی در دمای اختیاری T بین میدان تابش و اتمها برقرار است.
۲. میدان تابش $\rho(\nu)$ دارای توزیع طبیعی مشخصه جسم سیاه در دمای T است.
۳. چگالیهای جمعیت اتمی N_1 و N_2 به ترتیب در ترازهای انرژی E_1 و E_2 مطابق با توزیع بولتزمن در دمای T توزیع شده‌اند.
۴. چگالیهای جمعیت N_1 و N_2 نسبت به زمان ثابت‌اند.

از شکل ۳-۲۱ و فرضهای ۱ و ۴ نتیجه می‌گیریم که آهنگ تغییر تعداد اتمها در تراز E_2 با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 = -N_2 A_{21} - N_2 B_{21} \rho(\nu) + N_1 B_{12} \rho(\nu) \quad (۱-۲۱)$$

بنابه فرضهای ۲ و ۳، برای چگالی انرژی طیفی $\rho(\nu)$ مربوط به جسم سیاه می‌نویسیم^۱

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (۲-۲۱)$$

و برای توزیع بولتزمن اتمها بین دو تراز انرژی می‌نویسیم

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} = e^{-h\nu/kT} \quad (۳-۲۱)$$

در معادله‌های ۲-۲۱ و ۳-۲۱، ν بسامد تابش است به طوری که $h\nu = E_2 - E_1$ ، دمای T ، جسم سیاه است، و k ثابت بولتزمن است. همچنین باید توجه کرد که معادله ۳-۲۱ برای مورد خاص ترازهای انرژی ناواکن نوشته شده است. این شرط جزئی محاسبات را ساده می‌کند و در عین حال تأثیر مهمی روی نتیجه‌ای که به دست می‌آوریم ندارد. با حل معادله ۱-۲۱ برای $\rho(\nu)$ و جاگذاری N_1/N_2 از معادله ۳-۲۱، داریم

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}(N_1/N_2) - B_{21}} = \frac{A_{21}}{B_{21}e^{h\nu/kT} - B_{21}} \quad (۴-۲۱)$$

۱. معادله ۲-۲۱ برای $\rho(\nu)$ یعنی چگالی انرژی طیفی با ابعاد انرژی بر (حجم $\times \Delta\nu$) از معادله ۱۲-۲ برای تابندگی طیفی جسم سیاه برحسب توان بر (مساحت $\times \Delta\lambda$) نتیجه می‌شود. ابتدا با تبدیل λ و $\Delta\lambda$ به ν و $\Delta\nu$ در معادله ۱۲-۲، به دست می‌آوریم $M_\lambda d\lambda = (2\pi h\nu^2/c^2)(e^{h\nu/kT} - 1)^{-1} M_\nu d\nu$. آنگاه کافی است $M_\lambda d\lambda$ را در $c/4$ ضرب کنیم تا معادله ۲-۲۱ برای $\rho(\nu)$ حاصل شود. [A] را ببینید.

از مساوی قرار دادن این رابطه با معادله ۲-۲۱،

$$\frac{A_{21}}{B_{12}e^{h\nu/kT} - B_{21}} = \frac{\lambda\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (5-21)$$

و فاکتورگیری جمله $e^{h\nu/kT}$ به دست می آوریم

$$\left(\frac{A_{21}}{B_{21}} - \frac{\lambda\pi h\nu^3}{c^3} \frac{B_{12}}{B_{21}} \right) e^{h\nu/kT} - \left(\frac{A_{21}}{B_{21}} - \frac{\lambda\pi h\nu^3}{c^3} \right) = 0 \quad (6-21)$$

اکنون معادله‌ای شامل سه ضریب اینشتین و فاقد N_2 و N_1 داریم. بنابه فرضهای بالا، معادله ۶-۲۱ باید برای دمای اختیاری T برقرار باشد. این امر تنها به شرطی صادق است که جمله ضریب $e^{h\nu/kT}$ و جمله مستقل از آن متحد با صفر باشند. بنابراین، به سادگی به دست می آوریم

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \lambda\pi h\nu^3/c^3 \quad (7-21)$$

و

$$B_{12} = B_{21} \quad (8-21)$$

اهمیت معادله‌های ۷-۲۱ و ۸-۲۱ فوق‌العاده زیاد است، و نتایج زیر را می‌توان از هر دو آنها به دست آورد.

۱. ضرایب بنیادی اینشتین A_{21} ، B_{21} و B_{12} همگی به هم مرتبط‌اند، و اگر یکی را با اندازه‌گیری یا محاسبه بدانیم همه را می‌دانیم.

۲. ضریب گسیل القایی B_{21} و ضریب جذب (القایی) B_{12} ، دست‌کم برای مورد حالت‌های ناواگن، با هم برابرند. این برابری مسلماً تأکیدی است بر این نکته که، چنانکه قبلاً گفته شد، گسیل القایی یعنی فرایندی که جدیداً توسط اینشتین کشف شد و جذب، تا حد آهنگ رویداد آنها، فرایند‌های وارون هم هستند. اما دقیقاً توجه کنید که آهنگ‌های $dN_2/dt = N_2 B_{21} \rho(\nu)$ و $dN_1/dt = N_1 B_{12} \rho(\nu)$ چون به چگالی‌های جمعیت N_2 و N_1 بستگی دارند با هم برابر نیستند. اگر N_2 بزرگتر از N_1 باشد و میدان تابش با اتمها برهم‌کنش کند، گسیل القایی از جذب بیشتر می‌شود و فوتونها به میدان اضافه می‌شوند. اما اگر N_1 بزرگتر از N_2 باشد، جذب از گسیل القایی بیشتر می‌شود و فوتونها از میدان حذف می‌شوند. مورد اول ($N_2 > N_1$) به افزایش $\rho(\nu)$ ، تقویت، منجر می‌شود. مورد دوم ($N_1 > N_2$) به کاهش $\rho(\nu)$ ، تضعیف، منجر

می‌شود. برای اینکه لیزر کار کند لازم است N_2 بزرگتر از N_1 باشد. این وضعیت را وارونی جمعیت می‌نامند. بدون وارونی جمعیت — وضعیتی که با چگالیهای جمعیت تعادلی که توزیع بولتزمن پیش‌بینی می‌کند متناقض است — لیزر کار نمی‌کند.

۳. چون B_{21}/A_{21} متناسب با معکوس مکعب بسامد ν است، هر چه بسامد زیادتر (طول موج کوچکتر) باشد B_{21} در مقایسه با A_{21} کوچکتر می‌شود. چون B_{21} به گسیل القایی (که به تقویت فوتون منجر می‌شود) مربوط است و A_{21} به گسیل خودبه‌خودی (که اگر هم سهمی در تقویت فوتون داشته باشد اندک است)، به نظر می‌رسد که ساختن و به‌کار انداختن لیزرهای تابش طول‌موجهای کوچکتر (به‌عنوان مثال فرابنفش یا پرتو ایکس) مشکلتر است. در واقع نیز همین‌طور است، حتی اگر چه لیزرهای طول‌موجهای کوچکتر تا حد نسبتاً زیادی توسعه یافته‌اند.

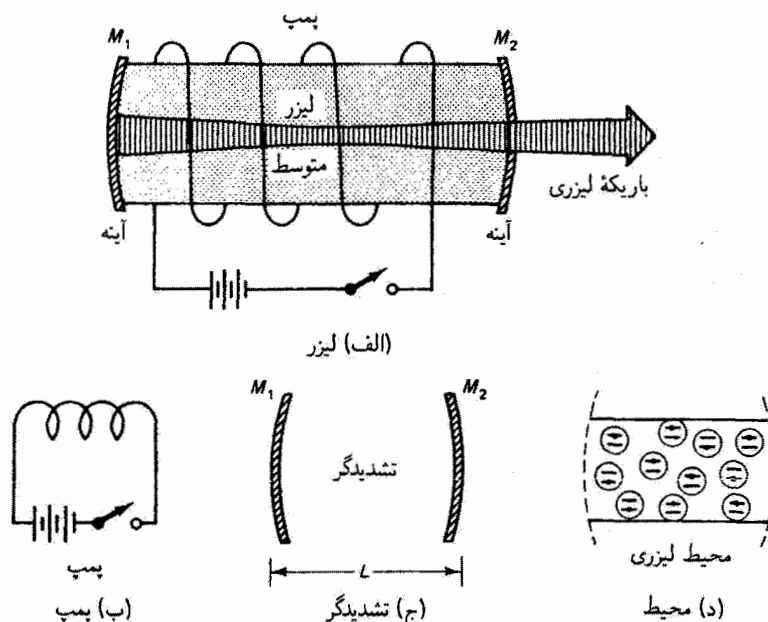
۴. با اینکه روابط مهم بین A_{21} ، B_{21} و B_{12} را بر اساس وضعیت تعادل ترمودینامیکی به‌دست آوردیم اما این روابط در هر وضعیتی معتبر و برقراراند. به سختی می‌توان گفت که لیزر، موقع کار کردن، محفظه‌ای در تعادل ترمودینامیکی است. اما روابط ضرایب A و B ، از آنجا که اینها مشخصه‌اتم هستند، باز هم معتبراند خواه اتم در میدان تابش شدید کاواک لیزر باشد خواه کوره‌داغی که می‌توان آن را جسم سیاهی در تعادل ترمودینامیکی در نظر گرفت.

از مرور بررسی اینشتین درباره‌ی برهم‌کنش تابش الکترومغناطیسی با ماده دو نظر مهم برای کار کردن موفقیت‌آمیز لیزر به‌دست می‌آیند. اول اینکه فرایندی، گسیل القایی، وجود دارد که به تقویت نور منجر می‌شود. دوم اینکه وارونی جمعیت آنها در ترازهای انرژی باید حاصل شود اگر بخواهیم فرایند گسیل القایی که تولیدکننده فوتونهای همدوس است از فرایند جذب که حذف‌کننده فوتونها است پیش بیفتد. از این نظرات برای توصیف طرز کار لیزر استفاده خواهیم کرد، اما قبلاً لیزر را به‌عنوان یک ابزار در نظر می‌گیریم و اجزائی را که برای کار آن اساسی هستند بررسی می‌کنیم.

۲۲۱- عناصر اساسی لیزر

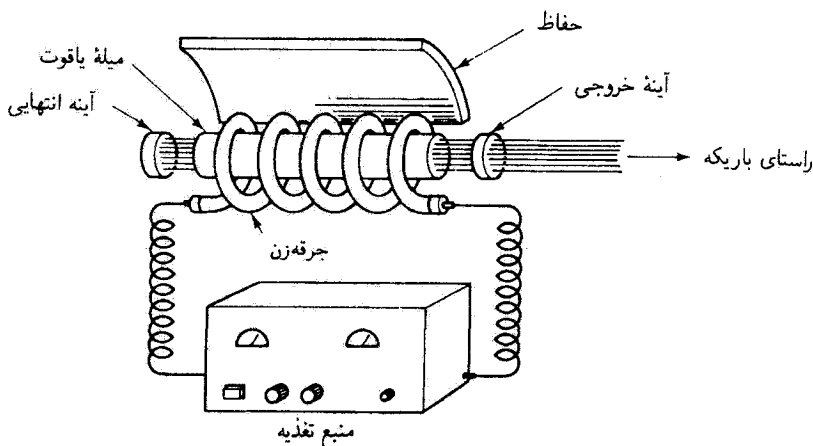
ابزار لیزر یک نوسانگر اپتیکی است که باریکه بسیار موازی شده شدیدی از تابش همدوس را گسیل می‌کند. این ابزار اساساً از سه عنصر ساخته شده است: چشمه انرژی خارجی یا دمنده، محیط تقویت‌کننده، و کاواک اپتیکی یا تشدیدگر. این سه عنصر به‌صورت یک واحد در شکل ۲۱-۴الف و به‌طور جداگانه در شکل ۲۱-۴ب، ج، و د نشان داده شده‌اند.

دهنده. دمنده یک چشمه انرژی خارجی است که وارونی جمعیت را در محیط لیزری به‌وجود می‌آورد. چنانکه در بخش قبل توضیح داده شد، تقویت موج نور یا میدان تابش فوتون تنها در یک



محیط لیزری که در آن وارونی جمعیت بین دو تراز انرژی وجود داشته باشد روی می‌دهد. در غیر این وضعیت، موج نور عبورکننده از محیط لیزری تضعیف خواهد شد.

دمنده‌ها می‌توانند از نوع اپتیکی، الکتریکی، شیمیایی یا گرمایی باشند به شرط اینکه انرژی لازمی را فراهم کنند که بتواند با محیط لیزری برای برانگیختن آنها و ایجاد وارونی جمعیت لازم همراه شود. در لیزرهای گازی، مانند لیزر He-Ne، دمنده‌ای که از همه بیشتر به‌کار می‌رود از نوع تخلیه الکتریکی است. عوامل مهم حاکم بر این نوع دَم‌ش مقطعی‌های برانگیزش الکترونی و طول عمرهای ترازهای انرژی مختلف هستند. در بعضی از لیزرهای گازی، الکترونهای آزادی که در فرایند تخلیه تولید شده‌اند با آنها، یونها یا مولکولهای لیزر مستقیماً برخورد و آنها را برانگیخته می‌کنند. در سایر لیزرها، برانگیزش توسط برخوردهای ناکثسان اتم-اتم (یا مولکول-مولکول) روی می‌دهد. در این رهیافت، مخلوطی از دو گاز به‌کار برده می‌شود به‌طوری که دو نمونه مختلف از آنها، مانند A و B ، حالت‌های برانگیخته A^* و B^* دارند که برهم منطبق‌اند. انرژی می‌تواند از



شکل ۵-۲۱ مؤلفه‌های دستگاه لیزر یاقوتی. حفاظ باعث می‌شود تا نور درخش‌زن دوباره به میلۀ یاقوت تابیده شود.

یک نمونهٔ برانگیخته به نمونهٔ دیگر در فرایندی منتقل شود که اثر نهایی آن را می‌توان با رابطهٔ نمادین $A + B \rightarrow A^* + B^*$ نشان داد. اتم A انرژی برانگیختگی خود را بدو از یک الکترون آزاد یا با فرایند برانگیزش دیگری به دست می‌آورد. یک مثال جالب توجه لیزر He-Ne است که در آن اتمهای نئون فعال لیزری با انتقال تشدید انرژی از اتمهای هلیم در حالت شبه پایدار برانگیخته می‌شوند. این اتمهای هلیم انرژی خود را از برخورد با الکترونهای آزاد دریافت می‌کنند.

اگر چه دمنده‌ها یا فرایندهای برانگیزش متعدد دیگری نیز وجود دارند، تنها یک فرایند دیگر را که اهمیت تاریخی دارد ذکر می‌کنیم. اولین لیزر، که توسط میمان در آزمایشگاههای پژوهشی هیوز در سال ۱۹۶۰ ساخته شد، یک لیزر یاقوتی تپی بود که در طول موج مرئی سرخ 694.3 nm کار می‌کرد. شکل ۵-۲۱ طرح این ابزار لیزر یاقوتی را نشان می‌دهد. برای برانگیختن یونهای ناخالصی Cr^{+2} در میلۀ یاقوت، میمان از یک درخش‌زن مارپیچی حاوی گاز زنون استفاده کرد. این روش خاص برانگیزش محیط لیزری را دَمَش اپتیکی می‌نامند. این تنها روش عملی برای دمیدن به محیطهای جامد یا مایع است.

محیط لیزری. محیط تقویت‌کننده یا محیط لیزری یک قسمت مهم از ابزار لیزر است. بسیاری از لیزرها از روی نوع محیط لیزری به‌کاررفته در آنها نامگذاری می‌شوند، به‌عنوان مثال، هلیم-نئون (He-Ne)، دی‌اکسید کربن (CO_2)، و نئودیمیم: نارسنگ ایتیریم آلومینیم (Nd: YAG). محیط لیزری، که می‌تواند گاز، مایع یا جامد باشد، طول موج تابش لیزری را تعیین می‌کند. به علت اختیاری زیادی که در انتخاب محیطهای لیزری وجود دارد، گسترهٔ طول موجهای لیزری موجود از ناحیهٔ فرابنفش تا فروسرخ، و گاهی تا طول موجهایی که کسر قابل توجهی از یک میلی‌متر هستند، وسعت

دارد. کنتش لیزری در بیشتر از نصف عناصر شناخته شده، با بیشتر از هزار گذار لیزری تنها در گازها، مشاهده شده است. دو گذار که در گازها بیشتر از همه از آنها استفاده می‌شود تابش مرئی 632.8 nm از نئون و تابش فرورسج $10.6 \mu\text{m}$ از مولکول CO_2 هستند. سایر محیطهای لیزری متداول و تابش مربوط به آنها در جدول ۲۱-۲ در آخرین فصل فهرست شده‌اند.

در بعضی از لیزرها محیط تقویت‌کننده از دو قسمت تشکیل می‌شود: محیط لیزری میزبان و اتمهای لیزری. به عنوان مثال، میزبان لیزر Nd : YAG بلور نارسنگ ایتیم آلومینیم (که عموماً YAG نامیده می‌شود) است در حالی که اتمهای لیزری یونهای نئودیمیم سه ظرفیتی هستند. لیزرهای گازی حاوی مخلوط گازها به طور کلی تمایزی بین میزبان و اتمهای لیزری وجود ندارد.

مهمترین لازمه محیط تقویت‌کننده توانایی آن برای ایجاد وارونی جمعیت بین دو تراز انرژی اتمهای لیزری است. این وضعیت با برانگیختن (یا دمیدن) اتمهای بیشتری به تراز انرژی بالاتر نسبت به اتمهای موجود در تراز پایینتر تحقق می‌یابد. چنانکه قبلاً گفته شد، بدون دمش هیچ وارونی جمعیتی بین هیچ جفت تراز انرژی اتمهای لیزری وجود نخواهد داشت. بنابه توزیع بولتزمن، داریم $N_2/N_1 = e^{-\Delta E/kT}$ که در آن $\Delta E = E_2 - E_1$ و تراز بالاتر E_2 نسبت به تراز پایینتر E_1 همیشه کم جمعیت تر است. دمش، و گاهی دمش قوی، برای ایجاد وضعیت "غیرعادی" وارونی جمعیت لازم است. اما چنانکه معلوم شده است، حتی با دمش قوی، به علت اختلاف زیاد طول عمرهای ترازهای انرژی اتمهای قابل استفاده، تنها جفتهای مشخصی از ترازهای انرژی با طول عمرهای خودبه‌خودی مناسب را می‌توان "وارون" کرد.

تشدیدگر. با فرض وجود دمنده مناسب و محیط لیزری قابل وارون کردن، سومین عنصر اساسی یک تشدیدگر است، یعنی یک "اپازر بسخور" اپتیکی که فوتونها را در محیط (تقویت‌کننده) لیزری به جلو و عقب می‌راند. این تشدیدگر، یا کاواک اپتیکی، در ساده‌ترین نوع آن، چنانکه در شکل ۲۱-۴ نشان داده شده است، از یک جفت آینه تخت یا خمیده تشکیل شده است که دقیقاً همدریف شده‌اند و مراکز آنها روی محور اپتیکی دستگاه لیزر قرار دارند. بازتابندگی آینه انتهایی باید تا حد امکان نزدیک به 100% باشد. آینه دیگر با بازتابندگی اندکی کمتر از 100% انتخاب می‌شود تا قسمتی از باریکه بازتابنده داخلی بتواند، به عنوان باریکه لیزری مفید خروجی، از آن عبور کند.

هندسه آینه‌ها و فاصله آنها تعیین‌کننده ساختار میدان الکترومغناطیسی داخل کاواک لیزری هستند. توزیع دقیق نقش میدان الکتریکی روی جبهه موج باریکه لیزری خروجی، و در نتیجه تابیدگی عرضی باریکه، بستگی به ساختمان کاواک تشدیدگر و سطوح آینه‌ها دارد. چندین نقش تابیدگی عرضی، که مدهای TEM نامیده می‌شوند، معمولاً در باریکه لیزری خروجی وجود دارند. با تضعیف کردن بهره مدهای مرتبه بالاتر—مدهای با میدان الکتریکی شدید نزدیک لبه‌های باریکه—

لیزر می‌تواند در یک تک مد پایه، یعنی مد TEM_{۰۰} کار کند. تغییر عرضی در تابیدگی این مد به صورت گاوسی است، به طوری که تابیدگی دارای قله‌ای در مرکز است و به طرف لبه‌ها به طور نمایی کاهش می‌یابد.

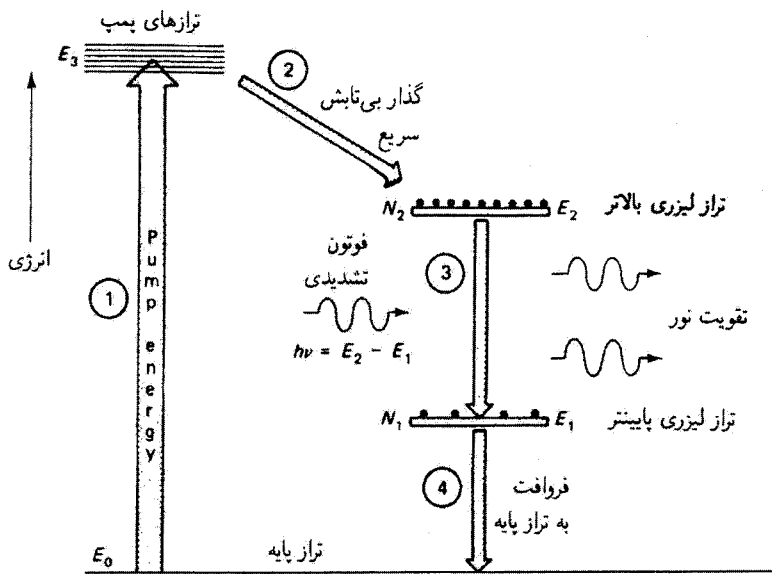
مفید است که تشدیدگر لیزری را با تشدیدگر فابری-پرو که با آینه‌های تخت موازی محصور شده است مقایسه کنیم. با توجه به شکل ۱۱-۸، که در آن کاواکی با دو صفحه موازی برای تداخل سنج فابری-پرو نشان داده شده است، شرط تشدید به صورت $m\lambda = 2t \cos \theta_t$ داده می‌شود. اگر یک کاواک لیزری متشکل از دو آینه تخت موازی با فاصله $t = L$ در نظر بگیریم که در آن برای فوتونهای لیزری، که روی محور بین دو آینه به جلو و عقب بازتابیده می‌شوند، داریم $\theta_t = 0$ آنگاه شرط فابری-پرو برای تشدید به صورت ساده $m\lambda/2 = L$ در می‌آید. این نتیجه که غالباً با عبارت "گنجیدن تعداد درستی نیم موج بین دو آینه" بیان می‌شود یادآور شرط امواج ساکن در ریسمان کشیده‌ای است که بین دو سر ثابت خود ارتعاش تشدید دارد.

بدین ترتیب، مناسب است که تشدیدگر لیزری را یک تشدیدگر فابری-پرو با چند متغیر در نظر بگیریم. در تشدیدگر لیزری، کاواک به طور کلی با آینه‌های خمیده به جای آینه‌های تخت محصور شده است، و به جای کاواک تهی که مشخصه تشدیدگر فابری-پرو است کاواک پر (یا تقریباً پر) از ماده بهره به کار می‌رود. با وجود این، وضعیت تشدید برای مدهای محوری (یا طولی) برای دو تشدیدگر یکسان است.

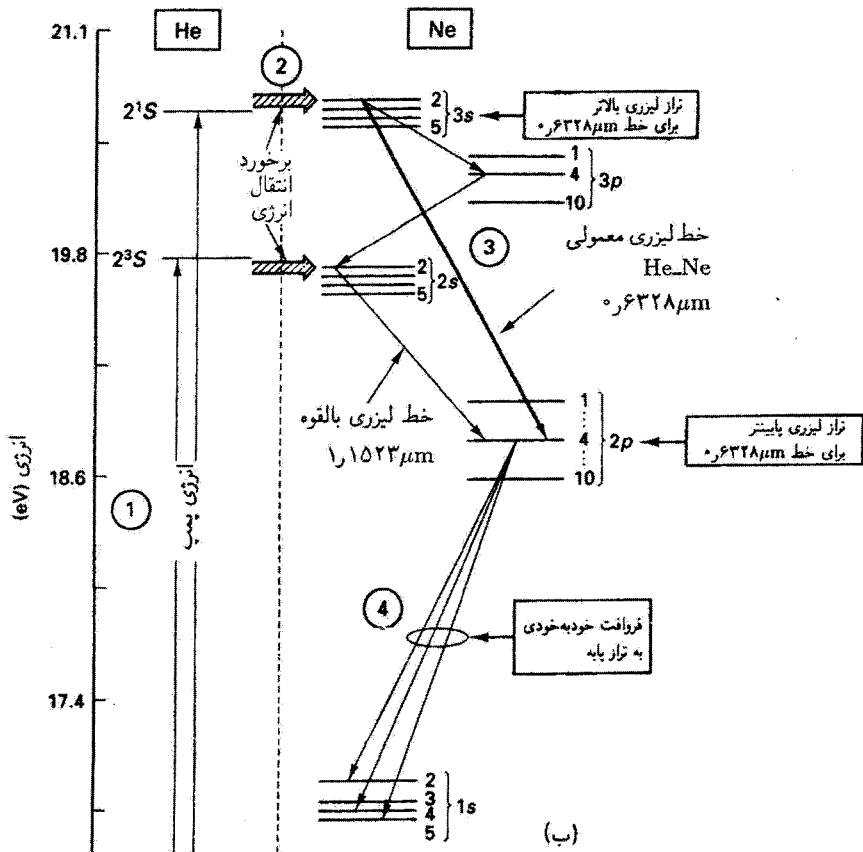
۲۱-۳ توصیف ساده طرز کار لیزر

سه عنصر اساسی تشکیل‌دهنده ابزار لیزر را به اختصار توصیف کردیم. این عناصر — دمنده، محیط و تشدیدگر — چگونه کار می‌کنند؟ اساساً می‌دانیم که فوتونها با انرژی تشدید می‌شوند و باید در کاواک لیزری تولید شوند، باید با آنها برهم‌کنش کنند، و باید از طریق گسیل القایی تقویت شوند، و تمام اینها در حین رفت و برگشت بین آینه‌های تشدیدگر روی می‌دهند. با بررسی شکل‌های ۲۱-۶ و ۲۱-۷ می‌توان درک نسبتاً دقیقی، هر چند کیفی، از طرز کار لیزر پیدا کرد. شکل ۲۱-۶ آنچه را که برای یک اتم نوعی در محیط لیزری هنگام تولید فوتون لیزری اتفاق می‌افتد در چهار مرحله نشان می‌دهد. شکل ۲۱-۶ ب نمودار تراز انرژی واقعی برای لیزر هلیوم-نئون را، همراه با مشخص کردن چهار مرحله‌ای که در شکل ۲۱-۶ الف توصیف شده‌اند، نشان می‌دهد. سپس همین فرایند چهار مرحله‌ای با تمرکز روی رفتار اتمها در محیط لیزری و جمعیت فوتون در کاواک لیزری در شکل ۲۱-۷ نشان داده شده است. اکنون این شکلها را به ترتیب بررسی می‌کنیم.

در مرحله ۱ از شکل ۲۱-۶ الف، انرژی از یک دمنده مناسب به محیط لیزری جفت می‌شود.

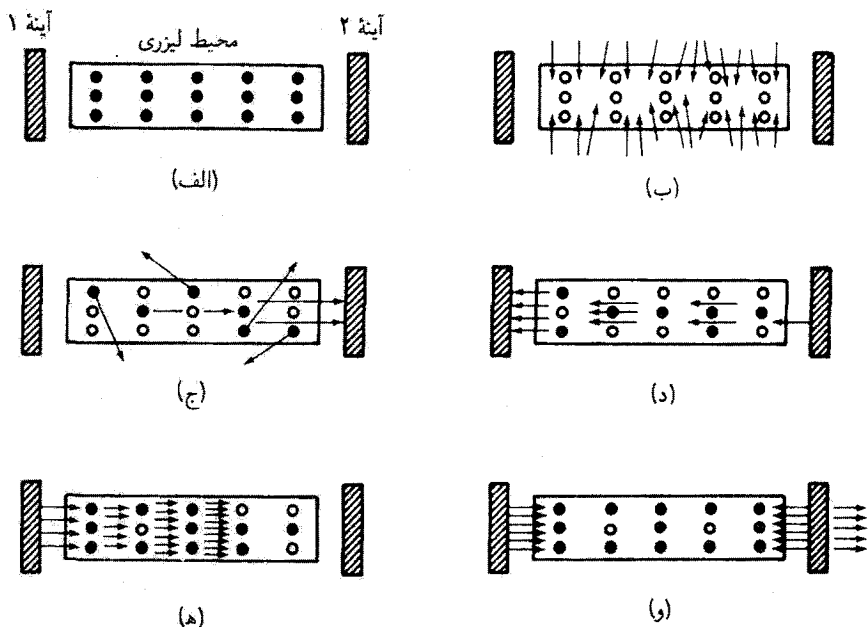


(الف)



(ب)

شکل ۶-۲۱ چرخه انرژی چهار مرحله‌ای مربوط به فرایند تابش لیزری برای یک لیزر چهارترازی کلی و (ب) یک لیزر خاص، لیزر هلیم-نون. (الف) چرخه انرژی چهار مرحله‌ای برای یک اتم لیزری درگیر در تولید فوتونهای لیزری. (ب) نمودار تراز انرژی برای لیزر هلیم-نون، با نمایش تولید خط لیزری $0.6328 \mu\text{m}$ برحسب چهار مرحله.



شکل ۲۱-۷ تحول مرحله به مرحله نوسان لیزری در یک کاواک لیزری نوعی. (الف) لیزر خاموش. (ب) دیمش لیزر. (ج) گسیل خودبه خودی و القایی. (د) شروع تقویت نور. (ه) ادامه تقویت نور. (و) تثبیت کار لیزر.

این انرژی به اندازه کافی هست تا بتواند تعداد زیادی اتم را از حالت پایه E_0 به چندین حالت برانگیخته، که دسته جمعی با E_2 نشان داده شده اند، ببرد. همینکه اتمها در این ترازها قرار گرفتند خودبه خود، از طریق زنجیره های مختلف، دوباره به حالت پایه E_0 فرو می افتند. اما بسیاری از آنها سفر بازگشت را ترجیحاً با یک فروافت بسیار سریع (و معمولاً بی تابش) از ترازهای دمنده E_2 به یک تراز بسیار خاص مانند E_2 شروع می کنند. این فرایند فرو افتادن در مرحله ۲ نشان داده شده است. تراز E_2 را "تراز لیزری بالاتر" نامیده ایم. این تراز به این معنی یک تراز خاص است که طول عمر زیادی دارد. در حالی که اکثر ترازهای برانگیخته در یک اتم ممکن است در زمانهایی از مرتبه 10^{-8} s فروافت کنند، تراز E_2 شبه پایدار است و طول عمر آن نوعاً از مرتبه 10^{-2} s یعنی چند صد هزار بار بیشتر از سایر ترازها است. بنابراین، وقتی اتمها از ترازهای دمنده E_2 سریعاً به E_2 سرازیر می شوند در این تراز شبه پایدار، که به منزله تنگه عمل می کند، تدریجاً جمع می شوند. در این فرایند، N_2 به مقدار زیادی افزایش می یابد. وقتی تراز E_2 مثلاً با گسیل خودبه خودی فروافت می کند، به تراز E_1 ، که "تراز لیزری پایستتر" نامیده می شود، فرو می افتد. تراز E_1 یک تراز عادی است که سریعاً به حالت پایه فرو می افتد، و در نتیجه جمعیت N_1 نمی تواند چندان زیاد شود. اثر

نهایی عبارت است از وارونی جمعیت ($N_2 > N_1$) که برای تقویت نور از طریق گسیل القایی لازم است.

همینکه وارونی جمعیت برقرار شد اگر فوتونی با انرژی تشدید $E_2 - E_1 = h\nu$ از کنار یکی از اتمهای N_2 که در تراز لیزی بالاتر هستند بگذرد (مرحله ۳) گسیل القایی می‌تواند روی بدهد. با وقوع گسیل القایی، تقویت لیزی شروع می‌شود. دقیقاً توجه کنید که فوتونی با انرژی تشدید $E_2 - E_1$ می‌تواند همچنین باعث جذب از تراز E_1 به تراز E_2 شود، که در نتیجه در این فرایند خود فوتون از بین می‌رود. اما چون N_2 بزرگتر از N_1 است و چنانکه قبلاً نشان دادیم $B_{21} = B_{12}$ ، آهنگ مربوط به گسیل القایی یعنی $B_{21}N_2\rho(\nu)$ از آهنگ مربوط به جذب القایی یعنی $B_{12}N_1\rho(\nu)$ بیشتر است. بنابراین، تقویت نور روی می‌دهد. در این وضعیت، جمعیت فوتون تشدید فرودی دائماً زیاد می‌شود و تابش لیزی ادامه می‌یابد. این فرایند در مرحله ۳ نمایش داده شده است، که در آن فوتون تشدید فرودی که از "سمت چپ" نزدیک می‌شود ناحیه اطراف یک اتم N_2 را با همتای خود ترک می‌کند. در مرحله ۴، یکی از اتمهای وارون شده N_2 که در فرایند گسیل القایی به تراز E_1 سقوط کرده است اکنون سریعاً به حالت پایه E_0 فرو می‌افتد. اگر دمنده هنوز کار کند، این اتم آماده است تا این چرخه را تکرار کند، و در نتیجه یک وارونی جمعیت پایا و باریکه لیزی خروجی ثابتی تضمین می‌شود.

در شکل ۲۱-۶، انرژی دمنده (مرحله ۱) با تخلیه الکتریکی در مخلوط گاز کم فشار فراهم می‌شود، و نتیجه آن صعود اتمهای هلیوم حالت پایه به حالت‌های انرژی بالاتری است که یکی از آنها با تراز 2^1S نمایش داده شده است. آنگاه با انتقال انرژی برخوردی تشدید می‌شود که امکانپذیر است زیرا تراز هلیوم 2^1S تقریباً برابر با تراز نئون $3S_2$ است. مرحله ۲ وقتی اتمهای هلیوم برانگیخته انرژی خود را به اتمهای نئون حالت پایه می‌رسانند و آنها را به تراز نئون $3S_2$ بالا می‌برند تحقق می‌یابد. این فرایند است که وارونی جمعیت لازم را برای تقویت مؤثر از طریق گسیل القایی تابش به وجود می‌آورد. فرایند گسیل القایی (مرحله ۳) بین ترازهای نئون $3S_2$ و $2P_2$ روی می‌دهد، و این گذاری است با بیشترین احتمال^۱ از $3S_2$ به هر یک از ده حالت $2P$. این گذار منجر به فوتونهایی با طول موج 6328 \AA می‌شود که از طریق گسیل القایی تقویت شده‌اند و باریکه سرخ معمولی را که مشخصه لیزرهای هلیوم-نئون است به وجود می‌آورند. و سرانجام، در مرحله ۴، اتم نئون در حالت انرژی $2P_2$ با گسیل خودبه‌خودی به تراز پایه $1S$ فرو می‌افتد. این اتم همینکه به حالت پایه بازگشت باز هم می‌تواند با یک اتم هلیوم برانگیخته برخورد کند و چرخه را تکرار کند. در حالی که شکل ۲۱-۶ این چهار مرحله را برای گسیل خط 6328 \AA نانومتری لیزر He-Ne به هم مربوط

۱. یک بحث جامع و خواندنی درباره لیزر هلیوم-نئون با نمودارهای تراز انرژی و احتمالهای گذار را در [۴] می‌توان یافت.

کرده است، گذارهای دیگری از تراز $3s$ به ترازهای $2s$ و $2p$ نیز برای لیزرگری صورت می‌گیرند. یکی از این گذارها که به خط $1523\mu m$ منجر می‌شود در شکل نشان داده شده است.

اکنون به شکل ۲۱-۷ می‌پردازیم. این شکل اساساً همین کنش را برحسب رفتار آنها در محیط لیزری و جمعیت فوتون در کاواک نشان می‌دهد. در (الف) محیط لیزری واقع در بین آینه‌های تشدیدگر اپتیکی نشان داده شده است. آینه ۱ اساساً 100% بازتابنده است، در حالی که آینه ۲ به طور جزئی بازتابنده و به طور جزئی تراگسیلنده است. بیشتر آنها در محیط لیزری در حالت پایه‌اند. این حالت با نقطه‌های سیاه نشان داده شده است. در (ب)، انرژی خارجی (نور ناشی از درخشندگی یا از تخلیه الکتریکی) به محیط دمیده می‌شود و بیشتر آنها را به ترازهای برانگیخته (E_2 در شکل ۲۱-۶) بالا می‌برد. حالت‌های برانگیخته با دایره نشان داده شده‌اند. در فرایند دمش، وارونی جمعیت برقرار می‌شود. فرایند تقویت نور در (ج)، وقتی آنها برانگیخته (بعضی از آنها در تراز E_2 در شکل ۲۱-۶) خودبه‌خود به تراز E_1 فرو می‌افتند، شروع می‌شود. چون این یک گسیل خودبه‌خودی است، فوتونهای تولید شده در این فرایند به‌طور کاتوره‌ای در تمام راستاها منتشر می‌شوند. بنابراین، بسیاری از آنها با عبور از جدار جانبی کاواک لیزر از دست می‌روند. با این همه، به‌طور کلی چند فوتون که آنها را فوتونهای "بذر" می‌نامیم—در راستای محور اپتیکی لیزر انتشار می‌یابند. این فوتونها در شکل ۲۱-۷ ج با پیکانهایی که عمود بر آینه هستند نشان داده شده‌اند. با وجود فوتونهای بذر با انرژی (تشدید) صحیح که دقیقاً بین آینه‌ها جهت گرفته‌اند و مقدار بسیاری اتم N_2 که هنوز در حالت وارون E_2 هستند، مرحله گسیل القایی شروع می‌شود. همچنانکه فوتونهای بذر از کنار آنها وارون N_2 می‌گذرند، گسیل القایی فوتونهای یکسانی را در همین راستا اضافه می‌کند، و در نتیجه جمعیت دائماً افزایش‌یافته فوتونهای همدوسی که بین آینه‌ها به جلو و عقب بازتابیده می‌شوند فراهم می‌آید. این فرایند سازندگی، که در شکل ۲۱-۷ و ه نشان داده شده است، تا وقتی آنها وارون و فوتونهای انرژی تشدید در کاواک وجود داشته باشند ادامه می‌یابد. چون آینه خروجی ۲ تا حدی شفاف است، کسری از فوتونهای فرودی به این آینه از آن عبور می‌کنند. این فوتونها باریکه لیزری خارجی را که در شکل ۲۱-۷ و نشان داده شده است تشکیل می‌دهند. آن فوتونهایی که از آینه خروجی بازتابیده می‌شوند، حرکت رفت و برگشت را در ماده بهره کاواک تکرار می‌کنند. بدین ترتیب، فرایند لیزری به‌طور خلاصه بستگی به عوامل زیر دارد.

۱. وارونی جمعیت بین دو تراز انرژی مناسب در محیط لیزری. این وضعیت با فرایند دمش و وجود حالت شبه پایدار تحقق می‌یابد.

۲. فوتونهای بذر با انرژی و راستای مناسب، که از گسیل خودبه‌خودی همیشه موجود بین دو تراز انرژی لیزری حاصل می‌شوند. این فوتونها آغازگر فرایند گسیل القایی هستند.

۳. کاواک اپتیکی که حاوی تعداد زیادشونده‌ای از فوتونهای انرژی تشدید است و آنها را در محیط لیزری به جلو و عقب می‌برد، دائماً از وارونی جمعیت برای ایجاد گسیلهای القایی بیشتر و بیشتری استفاده می‌کند، و در نتیجه فوتونهای بیشتر و بیشتری که بین آینه‌ها به جلو و عقب می‌روند تولید می‌کند.

۴. جفت شدن کسر مشخصی از موج نور لیزری (جمعیت فوتون کاواک) به خارج کاواک از طریق آینه جفتگر خروجی برای تشکیل باریکه خارجی.

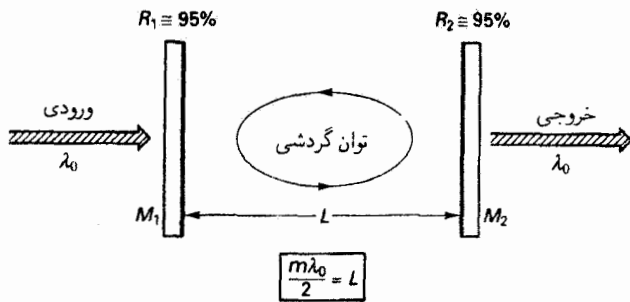
مقایسه تشدیدگرهای لیزری و فابری-پرو. در پایان این بخش، آموزنده است که کار کاواک (تشدیدگر) فابری-پرو را با کار نوسانگر (تشدیدگر) لیزری و تقویت‌کننده لیزری مقایسه کنیم. شکل ۲۱-۸ این مقایسه را با سه ترسیم جداگانه نشان می‌دهد. فوراً می‌توان دید که نوسانگر لیزری (ج) مشخصه‌های کاواک فابری-پرو و تقویت‌کننده لیزری (الف و ب) را با هم ترکیب می‌کند.

شکل ۲۱-۸ الف یک کاواک فابری-پرو با طول موج تشدید $L = \lambda_0 / 2$ برقرار شده است. چنانکه شکل نشان می‌دهد، با دو آینه تخت موازی به فاصله L که بازتابندگی مساوی (مثلاً ۹۵٪) دارند، توان خروجی برابر است با توان ورودی با البته توان گردشی بسیار زیادتری که بین آینه‌ها محبوس شده است. (بین دو آینه ماده بهره وجود ندارد.)

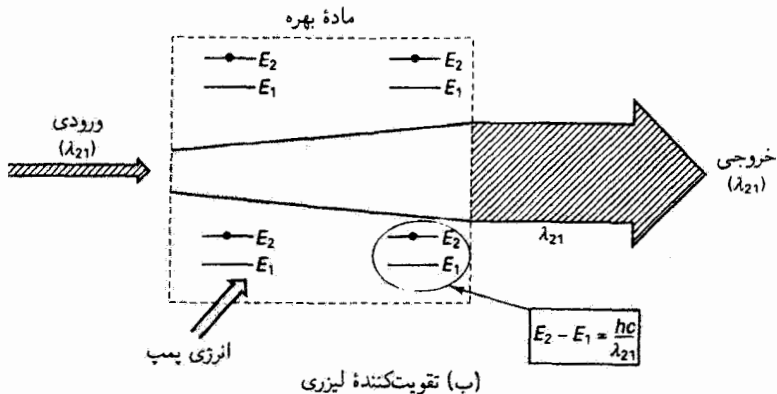
ترسیم بعدی (شکل ۲۱-۸ ب) کار تقویت‌کننده لیزری — ماده بهره با وارونی جمعیت و گسیل القایی — را بدون کاواک (یعنی بدون آینه‌ها) نشان می‌دهد. در این ترسیم، باریکه ورودی (به‌طور کلی یک باریکه لیزری با طول موج λ_{21}) وارد ماده بهره‌ای می‌شود که حاوی جمعیت وارون بین دو تراز انرژی مشخص E_1 و E_2 ، با $E_2 - E_1 = hc/\lambda_{21}$ است. آنگاه این باریکه لیزری ورودی موقع عبور از ماده بهره از طریق گسیل القایی انرژی می‌گیرد، و سرانجام با توان تقویت شده قابل ملاحظه‌ای خارج می‌شود.

آخرین ترسیم، شکل ۲۱-۸ ج، نشان می‌دهد که چگونه نوسانگر لیزری عناصر کاواک فابری-پرو و ماده بهره تنها را با هم ترکیب می‌کند و ابزار لیزر و باریکه لیزری به وجود می‌آورد. در این ترسیم، ماده بهره که با چشمه خارجی دمیده می‌شود شامل ترازهای وارون E_1 و E_2 است به طوری که $E_2 - E_1 = hc/\lambda_{21}$. به علاوه، کاواک در طول موج λ_{21} تشدیدکننده است زیرا شرط $L = m\lambda_{21}/2$ برای این طول موج خاص برقرار می‌شود. بدین ترتیب، با یک کاواک تشدید و یک ماده بهره، شرایط لازم برای نوسان لیزری فراهم می‌شوند.

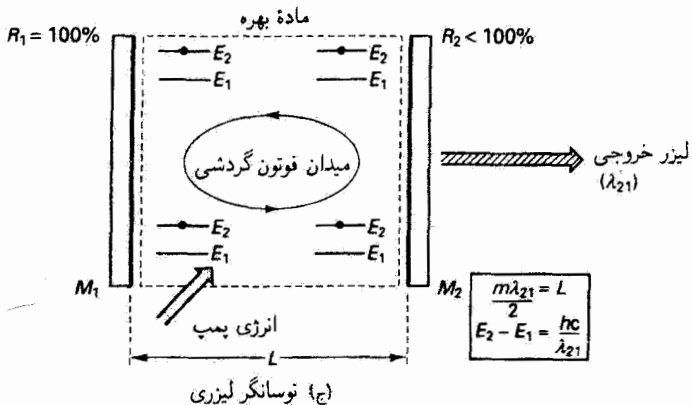
اکنون که طرز کار لیزر و منشأ باریکه لیزری را بیان کرده‌ایم، به بررسی مشخصات نور لیزری می‌پردازیم.



(الف) کاواک فابری-پیرو



(ب) تقویت‌کننده لیزری



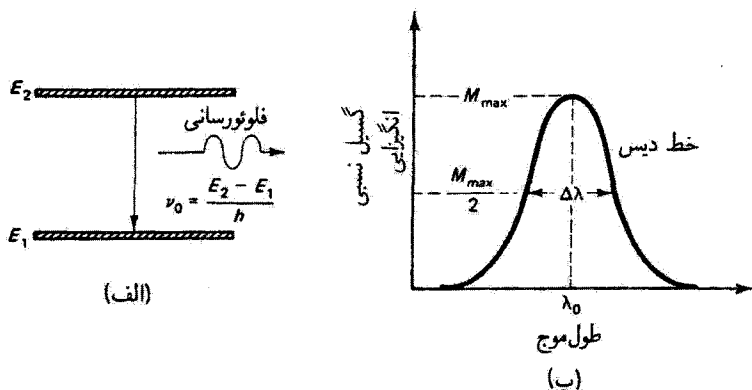
(ج) نوسانگر لیزری

شکل ۲۱-۸ مقایسه مشخصه‌های اساسی کاواک فابری-پیرو، تقویت‌کننده لیزری و نوسانگر لیزری. (الف) کاواک فابری-پیرو با آینه‌های یکسان M_1 و M_2 به فاصله L از یکدیگر. کاواک در طول موج تشدید λ_0 تنظیم شده است. توان خروجی برابر با توان ورودی است. (ب) ماده بهره تنها (بدون آینه‌های دو طرف)، که با چشمه انرژی خارجی دمیده می‌شود، دارای ترازهای جمعیت وارون E_1 و E_2 است به طوری که $E_2 - E_1 = hc/\lambda_{21}$. باریکه ورودی همدوس با طول موج λ_{21} در عبور از ماده بهره تقویت می‌شود. (ج) نوسانگر لیزری عناصر کاواک تشدید فابری-پیرو و ماده بهره را برای تولید باریکه لیزری همدوس با هم ترکیب می‌کند.

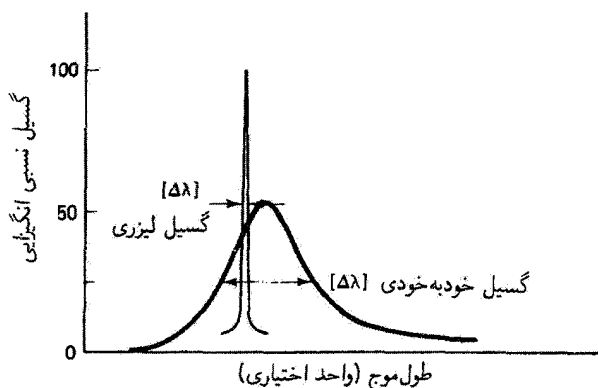
۴-۲۱ مشخصات نور لیزری

تکفامی. نور گسیل شده از لیزر از لحاظ رنگ تقریباً خالص است، یعنی تقریباً تنها یک طول موج یا بسامد دارد. البته می‌دانیم که هیچ نوری نمی‌تواند واقعاً تکفام، به معنی تیزی نامحدود در طول موج تعریف‌کننده آن، باشد اما لیزر بسیار بیشتر از هر چشمه دیگری به این حد ایده‌آل نزدیک می‌شود.

تکفامی نور با فرایند بنیادی گسیلی که در آن اتمهای در حالت برانگیخته به حالت‌های انرژی پایینتر فرو می‌افتند و نور گسیل می‌کنند تعیین می‌شود. در تابش جسم سیاه، در فرایند گسیل میلیاردها اتم و تعداد بسیار زیادی جفت تراز انرژی درون هر اتم دخالت دارند. چنانکه می‌دانیم، تابش حاصل اصلاً تکفام نیست. اگر می‌توانستیم مجموعه یکسانی از اتمهای این جسم سیاه را انتخاب کنیم و گسیل تعیین شده از یک تک جفت از ترازهای انرژی را منزوی کنیم، تابش حاصل اگر چه ضعیفتر می‌شد اما قطعاً تکفامتر بود. وقتی این نوع تابش با برانگیزش غیرگرمایی تولید می‌شود تابش را غالباً فلوتورسانی می‌نامند. شکل ۴-۲۱ فرایند گسیلی از این نوع را نمایش می‌دهد. فلوتورسانی از فروافت تابشی اتمها بین دو تراز انرژی کاملاً معین E_1 و E_2 ناشی می‌شود. ماهیت فلوتورسانی، که با طیف-نورسنج تحلیل می‌شود، در نمودار نمای خط که ترسیم تابندگی طیفی برحسب طول موج است نشان داده شده است. دقیقاً توجه کنید که نور گسیل شده دارای پخش‌شدگی طول موج $\Delta\lambda$ حول طول موج مرکزی λ_0 است به طوری که $\lambda_0 = c/\nu_0$ و $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h$. در حالی که بیشتر نور ممکن است در طول موج λ_0 گسیل شود، آزمایش نشان می‌دهد که قسمتی از



شکل ۴-۲۱ فلوتورسانی و محتوای طیفی آن برای فرایند فروافت تابشی بین دو تراز انرژی در یک اتم. (الف) فرایند فروافت خودبه‌خودی بین ترازهای انرژی کاملاً معین. (ب) محتوای طیفی فلوتورسانی در (الف) با نمایش نمای خط و پهنای خط.



شکل ۲۱-۱۰ مقایسه کیفی پهنای خطهای گسیل لیزری و گسیل خودبه خودی مربوط به جفت یکسانی از ترازهای انرژی در اتم. قله پهن نمایشگر نمای خط نور گسیل شده خودبه خود بین ترازهای E_1 و E_2 پیش از شروع لیزرگری است. قله تیز نمایشگر نمای خط نور لیزری بین ترازهای E_1 و E_2 پس از شروع لیزرگری است.

آن در طول موجهای بیشتر و کمتر از λ_0 با گسیلندگی نسبی مختلف، چنانکه در نمودار نمای خط می بینیم، گسیل می شود. بنابراین، گسیل تکفام نیست، و دارای پخش شدگی طول موجی است که با $\lambda_0 \pm \Delta\lambda/2$ داده می شود و در آن $\Delta\lambda$ را غالباً پهنای خط می نامند. وقتی پهنای خط در ارتفاع نصف ماکسیم نمودار نمای خط اندازه گیری شود، آن را "پهنای کامل در نصف ماکسیم" می نامند.

در فرایند لیزری، پهنای خط $\Delta\lambda$ که در شکل ۲۱-۹ نشان داده شده است به طور قابل ملاحظه ای باریک است و این به معنی نوری با درجه بسیار زیاد تکفامی است. اساساً این وضعیت به این علت پیش می آید که فرایند گسیل القایی به طور مؤثری نوار طول موجهای گسیل شده در فرایند گسیل خودبه خودی را باریک می کند. این باریک شدگی پهنای خط به طور کیفی در شکل ۲۱-۱۰ نشان داده شده است. برای داشتن تصویری کمی از تکفامی نور لیزری، داده های جدول ۲۱-۱ را در نظر بگیرید که در آن پهنای خط یک لیزر He-Ne با کیفیت خوب با پهنای خط خروجی طیفی لامپ تخلیه سدیم نوعی و با پهنای خط نور سرخ بسیار باریک کادمیم در گسیل طیفی لامپ کم فشار مقایسه شده است. تبدیل از $\Delta\lambda$ به $\Delta\nu$ با استفاده از رابطه تقریبی $\Delta\nu = c\Delta\lambda/\lambda^2$ صورت می گیرد.

داده های جدول ۲۱-۱ نشان می دهند که لیزر هلیوم-نئون 10^6 میلیون بار تکفامتر از لامپ تخلیه معمولی و حدود 10^6 بار تکفامتر از خط سرخ کادمیم است. هیچ چشمه معمولی بدون صافی کردن قابل ملاحظه ای نمی تواند به درجه تکفامی موجود در باریکه خروجی لیزرهای رایج برسد.

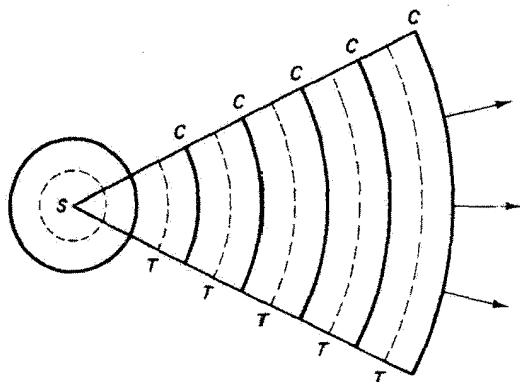
جدول ۱-۲۱ مقایسه پهنای خطها

پهنای خط کامل در نصف ماکسیم	پهنای خط کامل در نصف ماکسیم	طول موج مرکزی	چشمه نور
$\Delta\nu(\text{Hz})$	$\Delta\lambda(\text{\AA})$	$\lambda_0(\text{\AA})$	
9×10^{10}	$\cong 1$	۵۸۹۶	لامپ تخلیه معمولی
9.4×10^8	$\cong 0.013$	۶۴۳۸	لامپ کم فشار کادمیم
7.5×10^3	$\cong 10^{-7}$	۶۳۲۸	لیزر هلیم-نئون

همدوسی، آن خاصیت اپتیکی نور که لیزر را بیشتر از همه از سایر چشمه‌های نور متمایز می‌کند همدوسی است. لیزر را کاملاً به درستی نخستین چشمه نور واقعاً همدوس می‌دانند. سایر چشمه‌های نور مانند خورشید یا لامپ تخلیه گازی در بهترین وضعیت تنها تا حدی همدوس هستند.

با استفاده از تعبیر آماری می‌توان موضوع همدوسی را کاملاً دقیق و ریاضیاتی بررسی کرد. این بررسی تا حدی در فصل ۱۲ که به همدوسی اختصاص دارد انجام شده است. در اینجا از تحلیل ریاضی می‌گذریم و در کوششی تنها برای ادراک کیفی مفیدی از همدوسی لیزری همدوسی را به معنی کلی آن توضیف می‌کنیم.

همدوسی به زبان ساده اندازه‌ای از درجه همبستگی فازی موجود در میدان تابش چشمه نور در مکانهای مختلف و زمانهای مختلف است. همدوسی غالباً به صورت همدوسی زمانی که اندازه‌ای از درجه تکفامی نور است و همدوسی فضایی که اندازه‌ای از یکنواختی فاز در جبهه موج نور است توصیف می‌شود. برای درک کیفی همدوسی زمانی و فضایی، مثال ساده امواج آب را در نظر بگیرید که در مرکز یک برکه آرام با آشفتگی دوره‌ای منظم ایجاد می‌شوند. چشمه این آشفتگی می‌تواند چوب‌پنبه‌ای باشد که به طرزی منظم بالا و پایین می‌رود و دنباله منظمی از قله‌ها و دره‌ها را که به سمت برونسو حرکت می‌کنند، همچون در شکل ۱-۲۱، به وجود می‌آورد. می‌توان گفت که این میدان موج آب دارای همدوسی کامل زمانی و فضایی است. همدوسی زمانی کامل است زیرا تنها یک طول موج وجود دارد: فاصله قله‌به‌قله ثابت می‌ماند. تا وقتی چوب پنبه حرکت بالا-پایینی منظمی را حفظ کند طول موج ثابت خواهد ماند، و می‌توان مکان قله‌ها و دره‌ها را روی سطح برکه با دقت زیاد پیش‌بینی کرد. همدوسی فضایی نیز کامل است زیرا چوب‌پنبه چشمه کوچکی است که امواج ایده‌آلی با قله‌ها و دره‌های دایره‌ای با نظم ایده‌آل تولید می‌کند. در نتیجه، تغییر فضایی فاز نسبی حرکت آب در امتداد هر موج صفر است، یعنی سطح آب در امتداد یک قله یا دره همگام یا



شکل ۲۱-۱۱ قسمتی از میدان موج آب کاملاً همدوس که از حرکت بالا و پایینی منظم یک چوب‌پنبه در S ایجاد شده است. این میدان موج دارای جبهه‌های موجهای کاملاً مرتب C (قله‌ها) و T (دره‌ها) است که نمایشگر امواج آب با تنها یک طول موج هستند.

همفاز است. جابه‌جایی قائم سطح آب در تمام برکه را می‌توان باز هم با دقت زیاد پیش‌بینی کرد. میدان موج آبی را که در بالا توصیف شد می‌توان از لحاظ زمانی و فضایی ناهمدوس کرد اگر تعداد بسیار زیادی چوب‌پنبه، به جای یکی، با حرکت‌های دوره‌ای مختلفی و به‌طور کاتوره‌ای متغیری بالا و پایین بروند. در این وضعیت، همبستگی اندکی بین رفتار سطح آب در نقاط مختلف وجود دارد، و جبهه‌های موج منحنی‌های هندسی کاملاً نامنظمی هستند که شکل آنها تا وقتی چوب‌پنبه‌ها به حرکت‌های جهشی بی‌ارتباط خود ادامه می‌دهند با بی‌نظمی تغییر می‌کند. برای رفتن از مجموعه‌ی چوب‌پنبه‌هایی که باعث امواج آب می‌شوند به مجموعه‌ی اتم‌های برانگیخته‌ای که نور ایجاد می‌کنند احتیاج به قوه‌ی تصور چندان زیادی نیست. تولید ناهمبسته و بی‌ارتباط امواج آب منجر به میدان موج ناهمدوس آب می‌شود. تولید ناهمبسته و بی‌ارتباط امواج نور به‌طور مشابهی منجر به میدان تابش ناهمدوس می‌شود.

بنابراین، برای گسیل نور با همدوسی زیاد باید وسعت ناحیه‌ی تابش‌کننده‌ی چشمه کوچک باشد (که البته حد آن یک اتم است) و نوری با پهنای توار باریک گسیل کند (در حد، با $\Delta\lambda = 0$). برای چشمه‌های واقعی نور، هیچ‌یک از این شرایط قابل حصول نیستند. چشمه‌های واقعی نور، به استثنای لیزر، نور را از طریق کنش ناهمبسته‌ی تعداد بسیار زیادی اتم با طول‌موجهای مختلف بسیار زیادی گسیل می‌کنند. نتیجه تولید نور ناهمدوس است. برای رسیدن به اندازه‌ای از همدوسی، می‌توان دو تغییر روی نور گسیل شده به عمل آورد. اولاً، برای محدود کردن وسعت فضایی چشمه‌ی نور می‌توان از یک روزنه کوچک استفاده کرد. ثانیاً، برای کاهش قابل ملاحظه‌ی پهنای خط $\Delta\lambda$ ی

نور می‌توان از یک صافی نوار باریک استفاده کرد. هر یک از این تغییرات همدوسی نور ناشی از چشمه را بهتر می‌کند، اما البته در ازای آنها انرژی نور به مقدار زیادی کم می‌شود.

برعکس، چشمه لیزری بنا به خود ماهیت تولید نور تقویت شده آن از طریق گسیل القایی هم خروجی نور باریک و هم درجه زیادی از همبستگی فازی را تضمین می‌کند. یادآوری می‌کنیم که در فرایند گسیل القایی، هر فوتون اضافه شده به تابش القایی دارای فاز، قطبش، انرژی و جهت یکسان با موج نور تقویت شده در کاواک لیزری است. نور لیزری که بدین ترتیب تولید و گسیل می‌شود هم از لحاظ زمانی و هم از لحاظ فضایی همدوس است. در واقع، می‌توانیم ابزار لیزر واقعی را به‌عنوان یک "چشمه نقطه‌ای" بسیار قوی مجازی توصیف یا مجسم کنیم که در فاصله‌ای قرار دارد و در یک زاویه مخروطی کوچک نور تکفام گسیل می‌کند. مفهوم اساسی همدوسی برای چشمه‌های لیزری و نالیزری در شکل ۲۱-۱۲ خلاصه شده است.

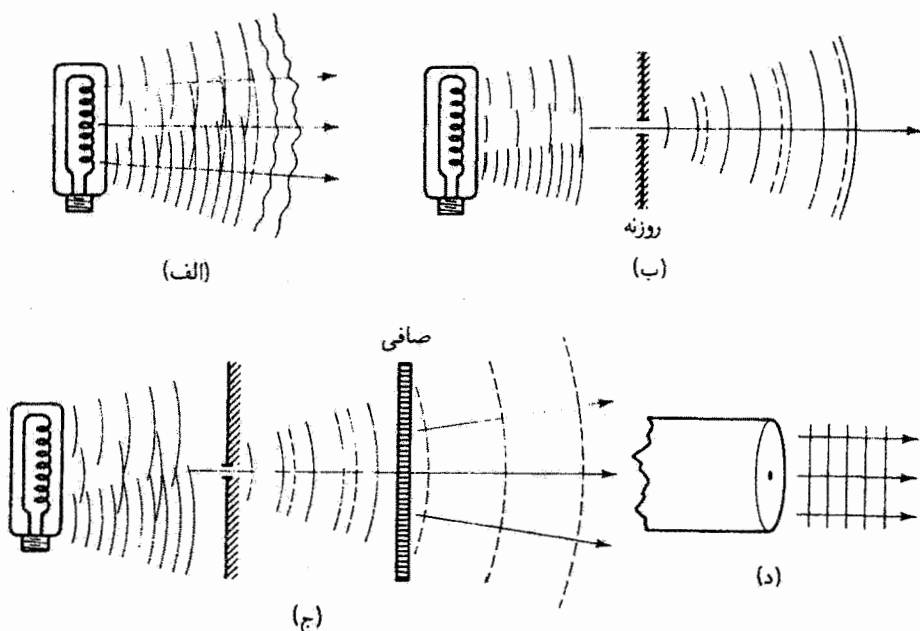
همدوسی زمانی و همدوسی فضایی برای نور لیزرهای معمولی بسیار بیشتر است تا برای نور چشمه‌های دیگر. همدوسی فضایی عرضی باریکه لیزری تک مدی در تمام عرض باریکه با هر پهنایی که داشته باشد وجود دارد. همدوسی زمانی، که آن را "همدوسی فضایی طولی" هم می‌نامند، به مراتب بیشتر از مورد مربوط به هر چشمه معمولی نور است. زمان همدوسی t_c برای یک لیزر عبارت است از بازه زمان متوسطی که در آن می‌توان فاز درست باریکه لیزری را در یک مکان معین پیش‌بینی کرد. طول همدوسی L_c با معادله زیر به زمان همدوسی مربوط می‌شود

$$L_c = ct_c$$

که در آن c سرعت نور است. بنابراین، طول همدوسی طول متوسط باریکه نور است که در آن فاز موج بدون تغییر می‌ماند. برای لیزر He-Ne که در جدول ۲۱-۱ توصیف شده است، زمان همدوسی از مرتبه چند هزارم ثانیه است (مقایسه کنید با تقریباً 10^{-11} s برای نور لامپ تخلیه سدیم)، و طول همدوسی برای همین لیزر چند هزار کیلومتر است (مقایسه کنید با حدود چند میلیمتر برای لامپ سدیم).

یکسوایی. هر کس که باریکه موازی کم‌عرض یک لیزر He-Ne را برای نخستین بار می‌بیند، بی‌درنگ از درجه زیاد یکسوایی آن متعجب می‌شود. هیچ چشمه نور دیگری، با یا بدون عدسی یا آینه، نمی‌تواند باریکه‌ای با چنین تعریف دقیقی و پخش زاویه‌ای حداقلی تولید کند.

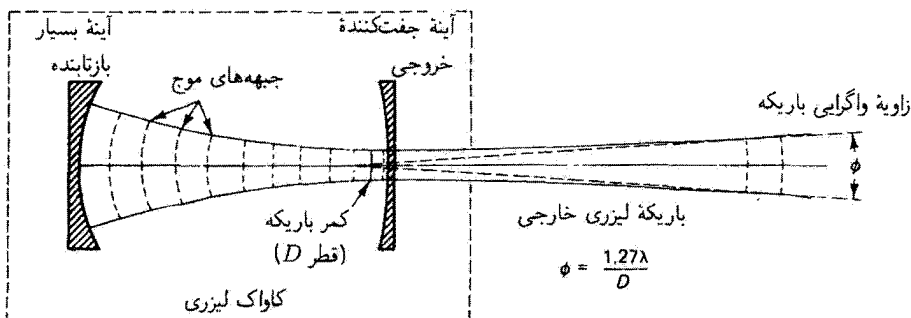
درجه حیرت‌انگیز یکسوایی باریکه لیزری از طرح هندسی کاواک لیزری و از سرشت تکفام و همدوس نور تولید شده در کاواک ناشی می‌شود. در شکل ۲۱-۱۳ یک طرح کاواک خاص و یک باریکه لیزری بیرونی با پخش زاویه‌ای که با زاویه ϕ مشخص می‌شود نشان داده شده‌اند. آینه‌های کاواک با سطوح خمیده‌ای که تقعر آنها به طرف داخل کاواک است باعث "تمرکز" نور



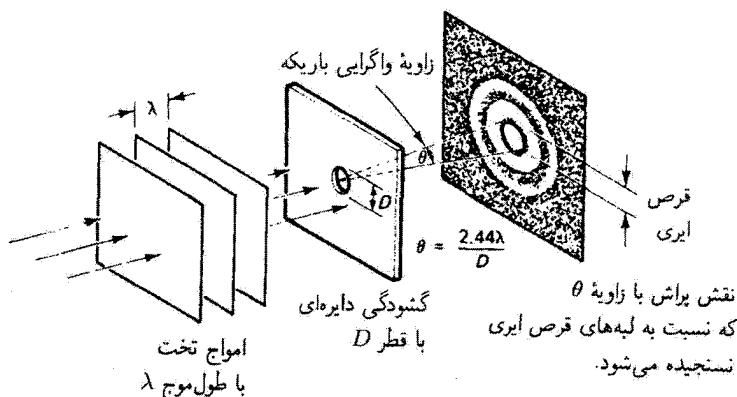
شکل ۲۱-۱۲ برای تولید نور نسبتاً همدوس با چراغ تنگستن باید از روزنه و صافی استفاده کرد. نور لیزر طبعاً همدوس است. (الف) چراغ تنگستن. چراغ تنگستن یک چشمه گسترده است که طول موجهای بسیار زیادی گسیل می‌کند. این گسیل فاقد همدوسی زمانی و فضایی است. جبهه‌های موج نامنظم هستند و شکل آنها به نحوی اتفاقی تغییر می‌کند. (ب) چراغ تنگستن با روزنه. یک روزنه ایده‌آل وسعت چشمه تنگستن را محدود و همدوسی فضایی نور آن را بهتر می‌کند. اما باز هم نور فاقد همدوسی زمانی است زیرا تمام طول موجها وجود دارند. توان باریکه کاهش یافته است. (ج) چراغ تنگستن با روزنه و صافی. افزودن یک صافی نوار باریک خوب توان را بیشتر کاهش می‌دهد اما همدوسی زمانی را بهتر می‌کند. اکنون نور "همدوس" است اما توان موجود بسیار کمتر از آن است که چراغ در ابتدا تابش کرده بود. (د) لیزر. نوری که از لیزر می‌آید دارای درجه زیادی از همدوسی زمانی و فضایی است. به علاوه، توان خروجی می‌تواند بسیار زیاد باشد.

بازتابیده به درون کاواک می‌شوند و در نتیجه در مکانی داخل کاواک کمر باریکه تشکیل می‌شود. ماهیت باریکه در کاواک لیزری و مشخصات آن بیرون کاواک از حل مسئله نسبتاً پیچیده امواج الکترومغناطیسی در یک کاواک باز تعیین می‌شوند. اگر چه جزئیات این تحلیل فراتر از هدف این بحث هستند اما چند نتیجه آن ارزش بررسی دارند. ثابت می‌شود که زاویه پخش باریکه ϕ با رابطه زیر داده می‌شود

$$\phi = \frac{1.22\lambda}{D} \quad (9-21)$$



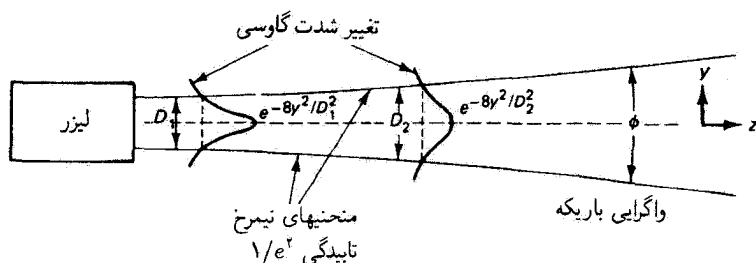
شکل ۲۱-۱۳ باریکه لیزری بیرونی و درونی برای یک کاوآک معین. پراش یا پخش باریکه، که با زاویه واگرایی باریکه ϕ سنجیده می‌شود، به نظر می‌رسد که از یک گشودگی مؤثر به قطر D واقع در کمر باریکه ناشی می‌شود.



شکل ۲۱-۱۴ پراش فرانیهوفر امواج تخت در عبور از گشودگی دایره‌ای. زاویه واگرایی باریکه θ با لبه‌های قرص ایری تعیین می‌شود.

که در آن λ طول موج باریکه لیزری و D قطر آن در کمر باریکه است. به‌وضوح دیده می‌شود که معادله ۲۱-۹ کاملاً مشابه معادله‌ای است که برای پخش زاویه‌ای نور ناشی از پراش امواج تخت در عبور از روزنه دایره‌ای به‌دست آمد (فصل ۱۶). نقش حاصل شامل یک لکه دایره‌ای روشن مرکزی، قرص ایری، است که با رشته‌ای از حلقه‌های تاریک و روشن احاطه شده است. اساس این پدیده در شکل ۲۱-۱۴ نشان داده شده است. زاویه پراش θ که روی قرص ایری تشکیل می‌شود با رابطه زیر داده می‌شود

$$\theta = \frac{2.44\lambda}{D} \quad (۲۱-۱۰)$$



شکل ۲۱-۱۵ باریکه گاوسی TEM_{۰۰}. قطر (پهنای عرضی) باریکه بین منحنیهای نیمرخ $1/e^2$ اندازه‌گیری می‌شود. این منحنیها مکان هندسی نقاطی هستند که در آنها تابیدگی باریکه در دو طرف محور اپتیکی به $1/e^2$ مقدار آن در مرکز باریکه کاهش می‌یابد. تغییر تابیدگی گاوسی در دو مکان در امتداد باریکه، جایی که قطرهای باریکه D_1 و D_2 هستند، نشان داده شده است. قطر D_2 بزرگتر از D_1 است زیرا باریکه مطابق با زاویه واگرایی باریکه $\phi = 1.27\lambda/D$ پخش می‌شود.

که در آن λ طول موج نور موازی شده تکفام و D قطر روزنه دایره‌ای است. معادله‌های ۲۱-۹ و ۲۱-۱۰ هر دو متضمن نسبت یک طول موج به یک قطر هستند، و اختلاف آنها تنها در یک ضریب ثابت است. بنابراین، به نظر می‌رسد که می‌توان زاویه پخش ϕ را که ذاتی باریکه‌های لیزری است و با معادله ۲۱-۹ داده می‌شود برحسب پراش توصیف کرد. اگر کمر باریکه را یک گشودگی دایره‌ای مؤثر واقع در داخل کاواک لیزری در نظر بگیریم آنگاه با تنظیم اندازه کمر باریکه می‌توانیم پراش یا پخش باریکه لیزری را تنظیم کنیم. در عمل، کمر باریکه از طرح کاواک لیزری تعیین می‌شود و بستگی به شعاعهای انحنای دو آینه کاواک و فاصله بین آنها دارد. بنابراین، باید بتوان، و در واقع می‌توان، لیزرهایی با کمر باریکه معین و در نتیجه با واگرایی باریکه یا پخش باریکه معین در میدان دور ساخت، یعنی در فاصله به اندازه کافی زیاد L از گشودگی پراشده به طوری که $L/\lambda \gg$ (مساحت گشودگی).

اکنون به بررسی چند نکته درباره شکل‌های ۲۱-۱۳ و ۲۱-۱۴ می‌پردازیم که می‌توانند مفید باشند. در شکل ۲۱-۱۴ امواج تخت با تابیدگی یکنواخت از گشودگی دایره‌ای عبور می‌کنند، یعنی شدت میدان الکتریکی در تمام نقاط جبهه موج یکسان است. در شکل ۲۱-۱۳، جبهه‌های موجی که "از" گشودگی مؤثر یا کمر باریکه می‌گذرند نیز امواج تخت هستند اما تابیدگی نور لیزر روی این صفحه‌ها یکنواخت نیست. برای مد عرضی با کمترین مرتبه، یعنی مد TEM_{۰۰} یا باریکه گاوسی، تابیدگی باریکه به سمت لبه‌های باریکه به طور نمایی مطابق با صورت گاوسی e^{-8y^2/D^2} کاهش می‌یابد، که در آن y معرف راستای عرضی باریکه و D پهنای باریکه در یک مکان معین در امتداد باریکه است (شکل ۲۱-۱۵ را ببینید). گشودگی دایره‌ای در شکل ۲۱-۱۴ یک گشودگی

فیزیکی واقعی است، اما کمر باریکه در شکل ۲۱-۱۳ چنین نیست. وقتی پخش باریکه برای لیزر با پراش تور از گشودگی واقعی مقایسه می‌شود کمر باریکه را گشودگی موثر تعبیر می‌کنند. اکنون با استفاده از معادله ۲۱-۹ می‌توان تصویری از پخش باریکه کم یا درجه زیاد یکسویی برای باریکه‌های لیزری پیدا کرد.

مثال

(الف) لیزرهای He-Ne (۶۳۲٫۸ nm) دارای کمر باریکه‌ای به قطر تقریبی ۵ mm هستند. واگرایی باریکه را به دست آورید.

(ب) چون کمر باریکه D را می‌توان با طرح کاواک لیزری و "گزینش" طول موج با انتخاب محیطهای لیزری مختلف تنظیم کرد، حد پایینی را که برای واگرایی باریکه می‌توان انتظار داشت تعیین کنید. لیزرها تا چه حد می‌توانند یکسو باشند؟ فرض کنید لیزری را با کمر باریکه‌ای به قطر ۵ cm و طول موج ۲۰۰ nm طراحی کنیم. واگرایی باریکه با چه ضریبی اصلاح می‌شود؟

حل: (الف) از معادله ۲۱-۹ داریم

$$\phi = \frac{1.27\lambda}{D} = \frac{(1.27)(632.8 \times 10^{-9} \text{ m})}{5 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1.6 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

این واگرایی باریکه لیزری نوعاً وجود دارد، و نشان می‌دهد که در هر ۱۰۰۰ cm پهنای باریکه تقریباً ۱٫۶ cm زیاد می‌شود.

(ب)

$$\phi = \frac{1.27\lambda}{D} = \frac{(1.27)(200 \times 10^{-9} \text{ m})}{5 \times 10^{-2} \text{ m}} = 5.1 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

بنابراین، زاویه واگرایی باریکه حدود $5 \times 10^{-5} \text{ rad}$ می‌شود که تقریباً 3° بار کمتر است از پخش باریکه برای لیزر He-Ne که در قسمت (الف) توصیف شد. این باریکه باید هر ۳۲۰ m حدود ۱٫۶ cm پخش شود. واضح است که اگر اندازه کمر باریکه در اختیار ما باشد و بتوانیم لیزرهای با طول موجهای کمتر از فرابنفش بسازیم، هیچ حدی برای موازی و یکسو بودن باریکه‌های لیزری نمی‌توان تعیین کرد.

درجه زیاد یکسویی لیزر، یا هر چشمه نور دیگری، بستگی به تکفامی و همدوسی نور تولید شده دارد. چشمه‌های معمولی نه تکفام‌اند و نه همدوس. از طرف دیگر، لیزرها از این دو نظر عالی هستند، و در نتیجه باریکه‌های نور بسیار یکسو و موازی تولید می‌کنند.

شدت چشمه لیزری. گفته شده است که لیزر هلیوم-نئون یک میلی‌واتی صدها بار "درخشانتر" از خورشید است. اگر چه تصور این ادعا مشکل است اما محاسبه درخشایی یا روشنایی دیداری یک لیزر نوعی، در مقایسه با خورشید، آن را اثبات می‌کند. برای ایجاد تصویری از تفاوت بسیار زیاد بین تابندگی لیزرها و چشمه‌های گرمایی، مقایسه‌ای بین آهنگهای خروجی فوتون آنها (تعداد فوتونها بر ثانیه) انجام می‌دهیم.

مثال

(الف) لیزرهای گازی کوچک نوعاً دارای ۱ mW توان خروجی P هستند. لیزرهای نتودیمیم-شیشه از نوع آنهایی که برای تولید گداز لیزر-القایبی در دست ساخت قرار دارند مدعی توان خروجی حدود 10^{14} W هستند. با استفاده از این دو مقدار حدی و انرژی متوسط 10^{-19} J برای هر فوتون مرئی ($E = h\nu$)، گستره تقریبی آهنگ خروج فوتون را برای لیزرها تعیین کنید.

(ب) برای مقایسه، یک چشمه گرمایی پهن‌نوار با سطح تابنده‌ای برابر با سطح کمر باریکه لیزر هلیوم-نئون ۱ میلی‌واتی به قطر ۵ mm در 10^3 K (یا مساحت $A = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$) در نظر بگیرید. اگر این سطح در دمای $T = 10^3$ K تابشی در طول موج ۶۳۳ nm با پهنای خط $\Delta\lambda = 10^0 \text{ nm}$ گسیل کند، آهنگ خروج فوتون را برای این چشمه گرمایی به دست آورید.

حل: (الف) آهنگ خروج فوتون با $P/h\nu$ داده می‌شود:

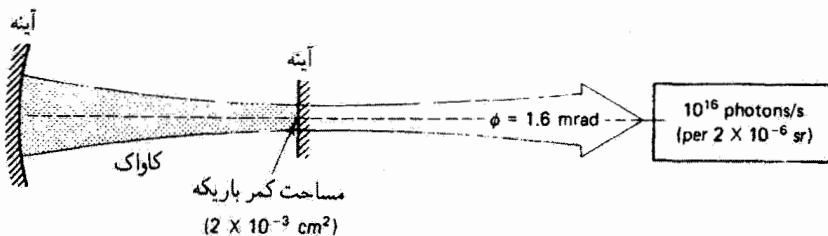
$$\frac{P}{h\nu} = \frac{10^{-2} \text{ J/s}}{10^{-19} \text{ J/فوتون}} = 10^{16} \text{ فوتون/s}$$

$$\frac{P}{h\nu} = \frac{10^{14} \text{ J/s}}{10^{-19} \text{ J/فوتون}} = 10^{33} \text{ فوتون/s}$$

(ب) آهنگ خروج فوتون برای این چشمه گرمایی پهن‌نوار را می‌توان از معادله زیر محاسبه کرد^۱

$$\text{فوتونهای گرمایی/s} \cong \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \Delta A \Delta \nu \quad (11-21)$$

۱. معادله ۱۱-۲۱ را می‌توان از معادله ۲-۲۱ با تبدیل $\rho(\nu)$ برحسب انرژی بر واحد حجم بر گستره بسامد $[E/(\text{حجم} \times \Delta\nu)]$ به $\rho(\nu)$ برحسب واحدهایی که فوتونهای گرمایی بر ثانیه را می‌دهند $[E/(h\nu \times \Delta t)]$ به دست آورد. بنابراین، در این فرایند باید هندسه را از عنصر حجم تابنده همسانگرد ΔV (معادله ۲-۲۱) به عنصر سطح تابنده ΔA (معادله ۱۱-۲۱) تغییر داد.



(الف)



(ب)

شکل ۱۶-۲۱ مقایسهٔ آهنگهای خروجی فوتون بین لیزرگازی کم‌توان He-Ne و چشمهٔ گرمایی داغ با مساحت تابندهٔ یکسان. (الف) لیزر هلیوم-نئون ۱ میلی‌واتی ($\lambda = 633 \text{ nm}$). (ب) چشمهٔ گرمایی نوار پهن (لامبرتی) با مقادیر تقریبی $T = 1000 \text{ K}$ ، $\Delta A = 2 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ ، $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ ، و $\Delta\lambda = 100 \text{ nm}$. توجه کنید که لیزر تمام فوتونها را در یک زاویهٔ فضایی کوچک ($\sim 2 \times 10^{-6} \text{ sr}$) در مقایسه با زاویهٔ فضایی 2π برای چشمهٔ گرمایی گسیل می‌کند.

بسامد برابر است با $\nu = c/\lambda = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ، و برای پهنای نوار بسامد به دست می‌آوریم $\Delta\nu = (c/\lambda^2)\Delta\lambda = 7.5 \times 10^{13} \text{ Hz}$ مقدار نما عبارت است از

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ Js})(4.74 \times 10^{14} \text{ s}^{-1})}{(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(1000 \text{ K})} = 22.77$$

با جاگذاری این مقادیر در معادلهٔ ۱۱-۲۱، خروجی فوتون گرمایی بر ثانیه به دست می‌آید:

$$\left(\frac{1}{(633 \times 10^{-9})^2 \text{ m}^2} \right) \left(\frac{1}{7.76 \times 10^9} \right) (2 \times 10^{-2} \text{ m}^2) (7.5 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}) \cong 5 \times 10^9$$

آهنگی به مقدار تنها حدود 10^9 فوتون بر ثانیه به دست آورده‌ایم! این مقدار هفت مرتبهٔ بزرگی کوچکتر از آهنگ خروجی فوتون برای لیزر هلیوم-نئون کم‌توان ۱ میلی‌واتی و ۲۴ مرتبهٔ بزرگی کوچکتر از لیزر پرتوان نودیمیم-شیشه است. این مقایسه در شکل ۱۶-۲۱ خلاصه شده است. ▲

همچنین از شکل ۱۶-۲۱ می‌بینیم که لیزر هلیوم-نئون فوتون 10^{16} به زاویهٔ فضایی بسیار کوچکی حدود $2 \times 10^{-6} \text{ sr}$ گسیل می‌کند، در حالی که گسیلندهٔ گرمایی که همچون چشمهٔ لامبرتی

عمل می‌کند 10^9 فوتون/s به زاویه فضایی نیمکره پیش‌سو (با مقدار 2π sr) تابش می‌کند. اگر از ما سؤال می‌شد که چند فوتون گرمایی بر ثانیه توسط چشمه گرمایی به زاویه فضایی مربوط به لیزر گسیل می‌شود، جوابی برابر با تنها 32° فوتون/s به دست می‌آوردیم:

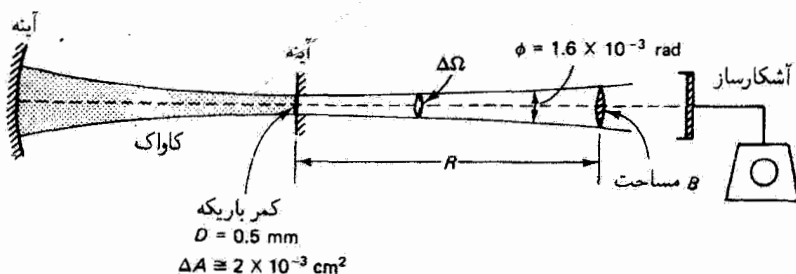
$$(10^9 \text{ فوتون/s}) \left(\frac{2 \times 10^{-6} \text{ sr}}{6,28 \text{ sr}} \right) = 32^\circ \text{ فوتون/s}$$

تمایز بین 10^{16} فوتون/s برای چشمه لیزری و 32° فوتون/s برای چشمه گرمایی اکنون حتی بارزتر شده است.

اگر مقایسه شدت چشمه بین چشمه‌های لیزری و نالیزری را یک گام بیشتر ببریم، می‌توانیم تعیین کنیم چگونه تابندگی [$W/(cm^2 sr)$] مربوط به چشمه نالیزری پرتوان با تابندگی لیزر کم‌توان مقایسه می‌شود.

مثال

چشمه نالیزری را یک لامپ جیوه بسیار پرفشار می‌گیریم که توانایی تابندگی چشمه L_e برابر با $25^\circ W/(cm^2 sr)$ را دارد. این نوع لامپها تقریباً بهترین چشمه پرتابندگی موجود قبل از اختراع لیزر بودند. به‌عنوان چشمه لیزری، یک لیزر هلیوم-نئون ۴ میلی‌واتی با قطر کمر باریکه 0.5 mm و زاویه واگرایی باریکه 1.6 mrad را انتخاب می‌کنیم که در طول موج 633 nm گسیل می‌کند. هندسه مربوط در شکل ۱۷-۲۱ نشان داده شده است. از این شکل باید واضح باشد که لیزر را می‌توان یک سطح تابنده با مساحتی برابر با مساحت کمر باریکه در نظر گرفت. توان تابش این سطح برابر است با توان تابش لیزر، و سطح تنها در زاویه‌ای که توسط لیزر تعیین می‌شود تابش می‌کند.



شکل ۱۷-۲۱ تابندگی یک لیزر کم‌توان He-Ne. تابندگی لیزر (کمر باریکه) که آشکارساز آن را "می‌بیند" حدود $10^6 W/cm^2 sr$ است.

حل: با استفاده از تعریف تابندگی L_e برحسب توان لیزر Φ_e ، مساحت چشمه یا کمر باریکه A و زاویه فضایی $\Delta\Omega$ ، یعنی

$$L_e = \frac{\Phi_e}{\Delta A \Delta\Omega} \quad (۱۲-۲۱)$$

مقدار تابندگی لیزر برابر با $۱۰^6 \text{ W/cm}^2 \text{ sr}$ به صورت زیر به دست می آید: با توجه به شکل ۱۷-۲۱، برای زاویه فضایی $\Delta\Omega$ داریم $\Delta\Omega = (B \text{ مساحت})/R^2$ که در آن

$$B \text{ مساحت} = \pi \left[R \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]^2 \cong \frac{\pi R^2 \phi^2}{4}$$

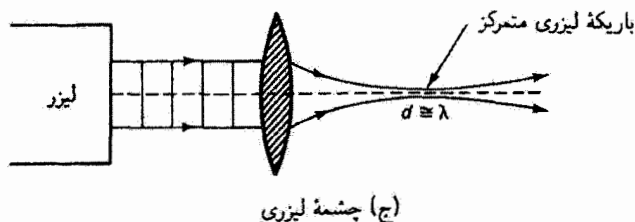
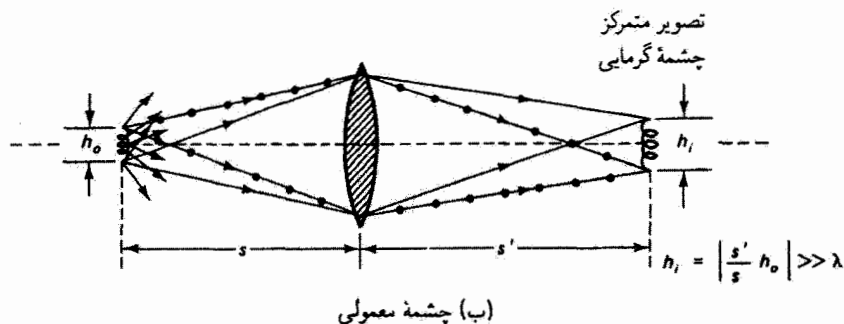
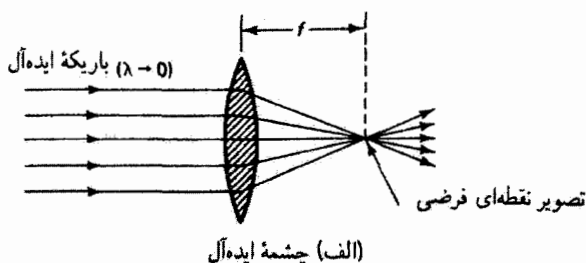
آنگاه با جاگذاری در معادله ۱۲-۲۱، برای تابندگی داریم

$$L_e = \frac{4\Phi_e}{\pi\phi^2\Delta A} = \frac{4(4 \times 10^{-2} \text{ W})}{\pi(1.6 \times 10^{-2})^2(2 \times 10^{-2} \text{ cm}^2)} = 1 \times 10^6 \text{ W/cm}^2 \text{ sr}$$

در اینجا نیز تفاوت میان چشمه لیزری و لامپ جیوه پر شدت چشمگیر است. نتیجه می گیریم جایی که درخشایی و تابندگی در انتخاب چشمه های نور اهمیت دارند تنها لیزر می تواند مطرح باشد. ▲

تمرکز پذیری. تمرکز نور در یک لکه کوچک محدود از پراش کاری دشوار است. در اپتیک هندسی رسم بر این است که عدسی مثبت را با تمرکز باریکه نور کاملاً موازی شده در یک "تصویر نقطه ای" نشان می دهند (شکل ۱۸-۲۱ الف را ببینید). می دانیم که تصویر نقطه ای حتی در اپتیک هندسی ($\lambda \rightarrow 0$) یک آرمان ناممکن است، زیرا عدسی کامل و بدون ابیراهی وجود ندارد. با این همه، آرمان تمرکز نور در یک تصویر نقطه ای محدود از پراش مدتها یک هدف بوده است. اکنون لیزر با باریکه تقریباً موازی شده همدوس خود این آرمان را قابل حصول کرده است. شکل ۱۸-۲۱ ب مشکل تمرکز نور معمولی در یک لکه کوچک را نشان می دهد. اولاً نور گسیلیده ناهمدوس است. ثانیاً، چشمه فیزیکی نور نمی تواند بیش از اندازه کوچک باشد، زیرا آنگاه یا نور تولید شده کافی نیست یا چشمه ذوب می شود. ترکیب چشمه غیرنقطه ای و نور ناهمدوس منجر به اندازه های نسبتاً بزرگ تصویر می شوند که مقدار آنها کم و بیش با قوانین بزرگنمایی در اپتیک هندسی تعیین می شود.

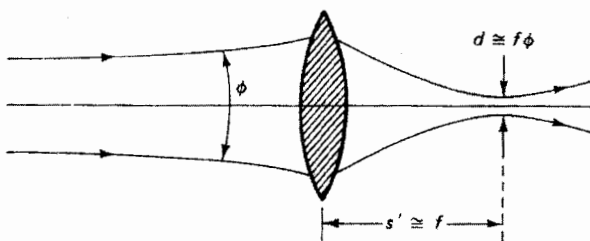
از طرف دیگر، لیزر نور همدوس شدیدی تابش می کند که به نظر می رسد از یک "چشمه نقطه ای" دور می آید. بنابراین، لیزر با خواص منحصر به فرد خود بر محدودیتهای قاطعی دست می یابد که کوشش ما را برای متمرکز کردن تابش گرمایی در یک لکه کوچک ناموفق می کنند. شکل ۱۸-۲۱ ج یک باریکه لیزری را نشان می دهد که با عدسی مثبت در لکه محدود از پراشی



شکل ۱۸-۲۱ باریکه‌های متمرکز از چشمه‌های مختلف. (الف) باریکه موازی شده ایده‌آل در یک "نقطه" فرضی مطابق با اپتیک هندسی متمرکز شده است. (ب) تابش ناهمدوس از چشمه گرمایی در یک تصویر (کوچک شده) با اندازه $h_i \gg \lambda$ متمرکز شده است. (ج) باریکه لیزری همدوس در یک لکه محدود از پراش به قطر $d \cong \lambda$ متمرکز شده است.

متمرکز شده است که قطر فوق‌العاده کوچکی تقریباً برابر با طول موج نور متمرکز دارد. می‌توان نشان داد که باریکه لیزری با واگرایی باریکه ϕ که به یک عدسی، با فاصله کانونی f و قطری که چندین بار بزرگتر از پهنای باریکه است، فرود می‌آید در یک لکه محدود از پراش متمرکز می‌شود که قطر آن، چنانکه در شکل ۱۹-۲۱ نشان داده شده است، تقریباً برابر است با

$$d \cong f\phi$$



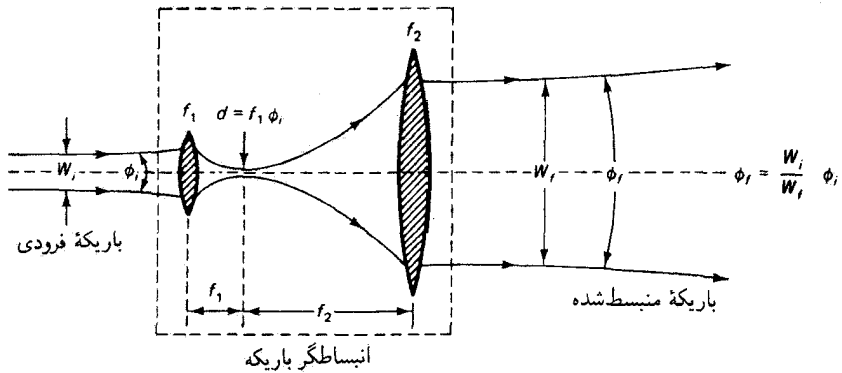
شکل ۲۱-۱۹ باریکه لیزری TEM_{۰۰} با زاویه پخش باریکه ϕ .

زاویه واگرایی باریکه ϕ ، مطابق با معادله ۲۱-۹، برابر است با $1.27\lambda/D$. دقیقاً توجه کنید که D در معادله ۲۱-۹ قطر کمر باریکه در لیزری است که واگرایی باریکه را "تعیین" کرده است، و d در معادله ۲۱-۱۳ قطر باریکه لیزری را که توسط عدسی مثبت متمرکز شده است نشان می‌دهد. مکان لکه لیزری متمرکز اساساً در صفحه کانونی عدسی است ($s' = f$)، اگر چه تحلیل دقیق نشان می‌دهد که این در واقع یک تقریب است، و البته تقریب خوبی است.

با استفاده از معادله ۲۱-۱۳ می‌توانیم چند محاسبه تقریبی برای پیش‌بینی اندازه لکه باریکه‌های لیزری متمرکز انجام دهیم. با یک عدسی با فاصله کانونی $f = 0.1 \text{ m}$ و نور لیزر فرودی با واگرایی باریکه ϕ مساوی با 10^{-2} تا 10^{-4} rad ، به آسانی می‌توان لکه‌هایی به دست آورد که قطر آنها از مرتبه 10^{-2} m تا 10^{-5} m (یا $100 \mu\text{m}$ تا $10 \mu\text{m}$) است. اگر این مقادیر را با طول موج لیزر دی‌اکسید کربن ($\lambda = 10.6 \mu\text{m}$) مقایسه کنیم، می‌بینیم که نور لیزر CO₂ — و در واقع نور تمام لیزرها — را می‌توان در لکه‌هایی با اندازه‌هایی از مرتبه یک طول موج متمرکز کرد.

معادله ۲۱-۱۳ نشان می‌دهد که تمرکز نور لیزر در لکه‌های کوچک را می‌توان با عدسی‌هایی با فاصله کانونی کوچک و باریکه‌های لیزری با واگرایی باریکه کوچک به انجام رساند. اگر عدسی‌های فاقد ابیراهی و با کیفیت عالی در دست باشند، در عمل می‌توانیم فاصله کانونی را هر قدر که بخواهیم کوچک انتخاب کنیم. واگرایی باریکه مربوط به لیزر را، که معمولاً موقع طراحی لیزر تعیین می‌شود، می‌توان با امکانات اپتیکی اضافی که در انبساطگر باریکه یافت می‌شود باز هم کاهش داد. در شکل ۲۱-۲۰، یک باریکه لیزری موازی شده با پهنای W_i و واگرایی باریکه ϕ_i توسط عدسی اول انبساطگر باریکه (با فاصله کانونی f_1) در لکه‌ای به قطر $d = f_1 \phi_i$ ، مطابق با معادله ۲۱-۱۳، متمرکز شده است. عدسی دوم (با فاصله کانونی f_2) در فاصله f_2 از لکه متمرکز و با $f_2 > f_1$ ، نور منبسط از لکه متمرکز را جمع‌آوری می‌کند و اساساً آن را دوباره موازی می‌کند. واگرایی باریکه برای این باریکه منبسط شده باز موازی شده برابر است با

$$\phi_f = \left(\frac{W_i}{W_f} \right) \phi_i = \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \phi_i \quad (14-21)$$



شکل ۲۰-۲۱ انبساط باریکه به عنوان روشی برای کاهش واگرایی باریکه در یک باریکه لیزری.

که در آن کمیت $f_2/f_1 = W_f/W_i$ را نسبت انبساط باریکه می‌نامیم. اثبات اعتبار معادله ۲۱-۱۴ مشکل نیست. باریکه فرودی، که توسط عدسی اول متمرکز شده است، دارای قطر لکه‌ای است برابر با $d_1 = f_1 \phi_i$. بنابه اصل برگشت‌پذیری نور، اگر باریکه منبسط شده به سمت چپ تغییر جهت دهد و توسط عدسی دوم متمرکز شود، باید لکه یکسانی در همان مکان تشکیل دهد به طوری که $d_2 = f_2 \phi_f$ چون الزاماً $d_1 = d_2$ داریم

$$f_1 \phi_i = f_2 \phi_f$$

$$\phi_f = \frac{f_1}{f_2} \phi_i$$

اگر نسبت انبساط باریکه برابر باشد با $f_2/f_1 = 5$ ، واگرایی باریکه برای باریکه لیزری منبسط شده $1/5$ واگرایی باریکه فرودی است. منبسط شدن پهنای باریکه با ضریب ۵ منجر به کاهش واگرایی باریکه با همین ضریب می‌شود.

چه به‌دست آمده است؟ فرض کنید یک باریکه لیزری توسط یک انبساطگر باریکه مناسب 10° بار منبسط شود. بنابراین، باریکه خروجی دارای واگرایی باریکه‌ای است که 10° بار کاهش یافته است. اکنون اگر این باریکه منبسط شده را با یک عدسی با فاصله کانونی اختیاری f در یک لکه کوچک متمرکز کنیم، قطر این لکه $1/10^\circ$ قطر لکه‌ای است که با همین عدسی برای باریکه منبسط نشده به‌دست می‌آوریم. این کاهش 10° بارهٔ قطر به کاهش 100° بارهٔ مساحت لکه و در نتیجه، برای هر توان باریکه لیزری معین، به افزایش 100° باره در تابیدگی لکه متمرکز منجر می‌شود. انرژی لیزری متمرکز در سطوح هدف کوچک باعث می‌شود که بتوان سوراخهای باریکی در مواد چگال و سخت ایجاد کرد، برشها و جوشکاریهای ظریفی انجام داد، اطلاعات بسیاری را ثبت

کرد، و به طور کلی عملیات صنعتی یا پزشکی را در سطوح هدفی به اندازه یکی دو طول موج به اجرا در آورد. به عنوان مثال، در چشم پزشکی، که در آن برای جراحی چشم از لیزرهای Nd : YAG استفاده می شود، تابیدگیهای هدفی به مقدار 10^4 تا 10^{12} W/cm² لازم هستند. این ترازهای تابیدگی با استفاده از انبساطگرهای باریکه و ابزارهای اپتیکی متمرکزکننده مناسب، چنانکه در بخش ۵-۷ بیان شد (مسئله ۷-۱۰ را ببینید)، به آسانی به دست می آیند.

۵-۲۱ انواع و پارامترهای لیزر

تا اینجا فرضهای بنیادی را که باعث شدند اینشتین پی به وجود گسیل القایی ببرد بررسی کرده ایم، قسمتهای اساسی تشکیل دهنده لیزر را تعیین کرده ایم، طرز کار کلی لیزرها را توضیح داده ایم، و مشخصاتی را که از لیزر یک چشمه منحصر به فرد نور می سازند بیان کرده ایم. اکنون، به اختصار، به معرفی بعضی از لیزرهای رایجی که امروزه وجود دارند و به تعیین پارامترهایی که آنها را از هم متمایز می کنند می پردازیم.

لیزرها به چند روش رده بندی می شوند. گاهی آنها را از روی حالت ماده موجود در محیط لیزری گاز، مایع یا جامد و گاهی آنها را از روی روشی که دمش می شوند — درخشن، تخلیه الکتریکی، کنشهای شیمیایی، و غیره — رده بندی می کنند. در انواع دیگر رده بندی، لیزرها را مطابق با ماهیت خروجی آنها [تپدار یا موج پیوسته (cw)] یا مطابق با ناحیه گسیل طیفی آنها (فروسرخ، مرئی، یا فرابنفش) تقسیم می کنند.

هیچ رده بندی خاصی را برای لیزرهایی که در جدول ۲-۲۱ فهرست شده اند انتخاب نکرده ایم. لیزرهایی که معرفی شده اند تا اندازه ای نمونه ۳۰ تا ۴۰ لیزر متداولی هستند که امروزه عرضه می شوند. بررسی دقیق جدول ۲-۲۱ وضعیت تکنولوژی لیزر را نشان می دهد. برای هر لیزری که در جدول آمده است، داده هایی درباره طول موج گسیل، توان خروجی (یا در مواردی انرژی هر تپ)، ماهیت خروجی، قطر باریکه، واگرایی باریکه، و بازده عملی درج شده اند. جدول ۲-۲۱ شامل مثالهایی است از لیزرهای گازی (He-Ne، CO₂، نیتروژن)، لیزرهای حالت جامد (یاقوت، Nd : YAG، Nd-شیشه)، لیزرهای مایع یا رزینی، لیزرهای نیرسانایی (آرسنید گالیم)، لیزرهای گازی اگزایمر (فلوئورید آرگون)، لیزرهای شیمیایی (فلوئورید هیدروژن)، و لیزرهای یونی (یون آرگون). لیزرهای تپی و پیوسته کار (cw) هردو ارائه شده اند. جدول ۲-۲۱ در کل شامل لیزرهایی است که طول موجهای آنها از ۱۹۳ nm (فرابنفش ژرف) تا $10^6 \mu\text{m}$ (فروسرخ دور) تغییر می کنند، خروجیهای توان cw آنها از ۱ mW تا ۶۰۰ W تغییر می کنند، و واگراییهای باریکه آنها از ۲ mrad (مقطع عرضی دایره ای) تا 600×200 mrad (مقطع عرضی خاکواری) تغییر می کنند؛ و بازده های کل (انرژی خروجی لیزر تقسیم بر انرژی ورودی دمنده) از کمتر از ۱٪ تا ۲۰٪ تغییر می کنند.

جدول ۲-۲۱ پارامترهای لیزر برای چند لیزر متداول

نوع لیزر	طول موج	توان یا انرژی	نوع خروجی	قطر باریکه	واگرایی باریکه	بازده ^۱
هلیوم-نون (گاز)	۶۳۲٫۸ nm	۵۰ mW - ۰٫۱	cw	۲ mm - ۰٫۵	۱٫۷ mrad - ۰٫۵	< ۰٫۱٪
یاقوت (جامد)	۶۹۴٫۳ nm	۱۰۰ J - ۰٫۰۳	تبی	۲٫۴ cm - ۱٫۵ mm	۱۰ mrad - ۰٫۲	< ۰٫۵٪
دیوکسید کربن (گاز)	۱۰٫۶ μm	۱۰۰ W - ۳	cw	۳ - ۴ mm	۱ - ۲ mrad	۵ - ۱۵٪
نیترژن (گاز)	۳۳۷ nm	۳۰۰ mW - ۱	تبی	۲ × ۳ - ۶ × ۳۰ mm (مستطیلی)	۱ - ۳ × ۷ mrad	< ۰٫۱٪
Nd : YAG (جامد)	۱٫۰۶۴ μm	۶۰۰ W - ۰٫۰۴	cw	۶ mm - ۰٫۷۵	۱۸ mrad - ۲	۰٫۱ - ۲٪
Nd-شیشه (جامد)	۱٫۰۶ μm	۱۰۰ J - ۰٫۱۵	تبی	۳ mm - ۲٫۵ cm	۱۰ mrad - ۳	۱ - ۵٪
یون آرگون (گاز)	۴۸۸ nm یا ۵۱۴٫۵ nm	۲۰ W - ۵ mW	cw	۲ mm - ۰٫۷	۱٫۵ mrad - ۰٫۴	< ۰٫۱٪
رزین (مایع)	۴۰۰ - ۹۰۰ nm (قابل تنظیم)	۸۰۰ mW - ۲۰	تبی/cw (بسپ شده با لیزر یون آرگون)	۰٫۶ mm - ۰٫۴	۲ mrad - ۱	۱۰ - ۲۰٪
آرگون فلوراید (اگزایمر)	۱۹۳ nm	۱۰ W بالاتر	تبی	۲۰ × ۳۲ - ۲۳ × ۶ mm (مستطیل)	۶ mrad - ۲	< ۰٫۵٪
هیدروژن فلوراید (شیمیایی)	۳ μm - ۲٫۶	۱۵۰ W cw - ۰٫۱ یا ۶۰۰ mJ - ۲ در هر تب	تبی/cw	۲ mm - ۴ cm	۱۵ mrad - ۱	۰٫۱ - ۱٪
گالیم آرسنید (دیود نیم رسانا)	۷۸۰ - ۹۰۰ nm	۴۰ mW cw - ۱	تبی/cw	N/A (سریعاً واگرا)	۶۰۰ mrad × ۲۰۰ (خاکی شکل)	۱ - ۲۰٪

۱. بازده داده شده بازده عملی کل است که غالباً آن را برای نشان دادن نسبت توان باریکه لیزری خروجی به توان الکتریکی سوپج ورودی بازده "سویچی" می نامند. توان کوانتومی، که همیشه بیشتر از توان سوپچی است، به صورت نسبت انرژی گذار لیزر ($E_{لیزر} - E_{پایه}$) به انرژی پمپ ($E_{پمپ} - E_{پایه}$) تعریف می شود.

مسائل

۱-۲۱ با شروع از رابطه آهنگ فروافت خودبه‌خودی برای چگالی اتم N_2 در تراز انرژی برانگیخته E_2 ، یعنی

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{خود}} = -A_{21}N_2$$

نشان دهید چگالی جمعیت اولیه N_2 در زمان $\tau = 1/A_{21}$ به مقدار N_2/e کاهش می‌یابد.

۲-۲۱ فرض کنید اتمی دارای دو تراز انرژی است که به اندازه انرژی متناظر با طول موج 632.8 nm ، همچون در لیزر He-Ne، از هم فاصله دارند. اگر فرض کنیم تمام اتمها در یکی از این دو تراز قرار دارند، در دمای اتاق $T = 300 \text{ K}$ چه کسری از اتمها مطابق با توزیع بولتزمن در تراز بالاتر واقع شده‌اند؟

۳-۲۱ نشان دهید معادله ۲-۲۱ برای چگالی انرژی طیفی جسم سیاه $(\Delta\nu \times \text{حجم})/(\text{توان})$ ، یعنی

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \right)$$

را می‌شود از معادله ۱۲-۲ برای تابندگی طیفی جسم سیاه $(\Delta\lambda \times \text{مساحت})/(\text{توان})$ ، یعنی

$$M_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right)$$

با تعویض متغیر از λ به ν (و $\Delta\lambda$ به $\Delta\nu$) و آنگاه ضرب نتیجه در $c/4$ به دست آورد. (زیرنویس صفحه ۶۱۸ را ببینید.)

۴-۲۱ با فرض اینکه خورشید یک تابشگر جسم سیاه است، چگالی انرژی طیفی آن $\rho(\nu)$ را در ناحیه مرئی نزدیک $\lambda = 550 \text{ nm}$ به دست آورید. دمای سطح خورشید را $6000 \text{ K} \approx$ بگیرید.

۵-۲۱ چرا باید انتظار داشت که لیزرگری در طول‌موجهای فرابنفش مشکلتر از لیزرگری در طول‌موجهای فروسرخ باشد؟ جواب را بر اساس معنی ضرایب A_{21} و B_{21} ، و نسبت A_{21}/B_{21} به دست آورید.

۶-۲۱ نسبت گذار القایی به گذار خود به خودی را برای نور سبز در $5\mu\text{m}$ در داخل یک پلاسمای جسم سیاه چگال در دمای 5000 K محاسبه کنید، یعنی مقدار نسبت زیر را تعیین کنید

$$\frac{(dN/dt)_{\text{تلقا}}}{(dN/dt)_{\text{خود}}} = \frac{-B_{21}N_2\rho(\nu)}{-A_{21}N_2}, \quad \left(\frac{B_{21}}{A_{21}} = \frac{\lambda^2}{8\pi h} \right)$$

از مقدار عددی این نسبت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷-۲۱ (الف) با معلوم بودن طول موج مرکزی λ و پهنای خط $\Delta\lambda$ (پهنای کامل در نصف ماکسیمم) برای سه موردی که در جدول ۱-۲۱ آمده‌اند (لامپ تخلیه معمولی، لامپ کم فشار Cd، لیزر He-Ne)، تحقیق کنید که پهنای خط کامل بسامد در نصف ماکسیمم $\Delta\nu$ (Hz) همان است که در جدول داده شده است.

(ب) گسیل خط لیزر He-Ne چه اندازه از، به عنوان مثال، خط سدیم ناشی از لامپ تخلیه سدیم "تیزتر" است؟

۸-۲۱ با فرض اینکه زمان همدوسی یک باریکه نور تقریباً برابر با عکس پهنای خط بسامد آن (پهنای کامل در نصف ماکسیمم) است، زمان همدوسی و طول همدوسی لیزر He-Ne در جدول ۱-۲۱ را به دست آورید.

۹-۲۱ یک لیزر He-Ne دارای کمر باریکه‌ای به قطر تقریباً ۱ mm است. زاویه پخش باریکه آن را در میدان دور محاسبه کنید.

۱۰-۲۱ یک چشمه گرمایی پهن نوار را با سطح تابنده دایره‌ای به قطر ۵ mm (تقریباً به اندازه کمرهای باریکه در لیزرهای He-Ne) در نظر بگیرید. فرض کنید این سطح در دمای ۱۰۰۰ K نوری با طول موج ۶۳۳ nm با پهنای خط (پهنای کامل در نصف ماکسیمم) ۱۰۰ nm گسیل می‌کند. با استفاده از معادله ۱۱-۲۱ نشان دهید آهنگ خروجی فوتون گرمایی حدود 10^1 فوتون/s است.

۱۱-۲۱ یک لیزر هلیوم-نئون ۱ میلی‌واتی را در نظر بگیرید که در ۶۳۲٫۸ nm با پهنای خط بسامد (پهنای کامل در نصف ماکسیمم) $\Delta\nu = 10^4$ Hz گسیل می‌کند. فرض کنید زاویه کامل واگرایی باریکه ϕ در میدان دور برابر است با $\phi = 1.27\lambda/D$ که در آن D قطر گشودگی پراشده (کمر باریکه) است. شکل ۱۷-۲۱ را ببینید.

(الف) نشان دهید تابندگی طیفی $\phi_e/(\Delta A \Delta \Omega \Delta \nu) = \Delta L_e/\Delta\nu$ که در آن ϕ_e توان لیزر، ΔA مساحت سطح تابنده، $\Delta \Omega$ زاویه فضایی تحت تابش لیزر و $\Delta \nu$ پهنای خط طیفی (پهنای کامل در نصف ماکسیمم) گسیل لیزر است. از مقدار قطر D مربوط به گشودگی پراشده مستقل است.

(ب) مقدار عددی این تابندگی طیفی را (بر حسب $\text{W/m}^2\text{sr Hz}$) برای لیزر بالا به دست آورید.

۲۱-۱۲ با توجه به انبساطگر باریکه‌ای که در شکل ۲۱-۲۰ نشان داده شده است، فرض کنید $f_2/f_1 = 10$ و واگرایی باریکه برای باریکه فرودی 1 mrad است. (الف) واگرایی باریکه برای باریکه انبساط‌یافته را به دست آورید.

(ب) اگر باریکه منبسط شده با یک عدسی بعدی با توان 10° دیوپتر متمرکز شود، کمر باریکه را در لکه کانونی تعیین کنید.

(ج) اگر توان در باریکه فرودی 1 mW باشد، تابیدگی (W/m^2) را در لکه کانونی محاسبه کنید.

۲۱-۱۳ با توجه به شکل ۲۱-۸ الف، فرض کنید 1 W توان لیزری با طول موج شدید λ_0 به کاواک فابری-پرو فرود می‌آید.

(الف) توان خروجی را به دست آورید.

(ب) چه توانی در داخل کاواک گردش می‌کند؟

(ج) توضیح دهید که در آینه M_1 چه اتفاقی باید روی دهد تا جوابهای شما برای قسمتهای (الف) و (ب) معتبر باشند.

۲۱-۱۴ برای لیزر Nd : YAG، چهار تراز دمنده در 1053 eV ، 10653 eV ، 1119 eV ، و 2361 eV بالای تراز انرژی حالت پایه وجود دارند.

(الف) طول موج وابسته به انرژی فوتون را که برای اشغال هر یک از ترازهای دمنده لازم است به دست آورید.

(ب) با توجه به اینکه لیزر Nd : YAG فوتونهایی با طول موج $1064 \mu\text{m}$ گسیل می‌کند، بازدهی کوانتومی مربوط به هر یک از ترازهای دمنده را تعیین کنید.

۲۱-۱۵ برای اینکه یک لیزر Nd : YAG کار کند، 2500 W توان "سویچی" برای منبع تغذیه لازم است تا لامپهای قوس الکتریکی را تحریک کند. این لامپهای قوس انرژی دمنده را برای ایجاد وارونی جمعیت فراهم می‌کنند. کل دستگاه لیزر، از توان ورودی (به منبع تغذیه) تا توان خروجی (باریکه خروجی لیزر)، با بازده‌های مؤلفه‌ای زیر مشخص می‌شود:

۸۰٪- کار منبع تغذیه

۳۰٪- لامپهای قوس برای انرژی نور دمنده

۷۰٪- بازتابگرهای اپتیکی برای تمرکز نور دمنده روی میله لیزر

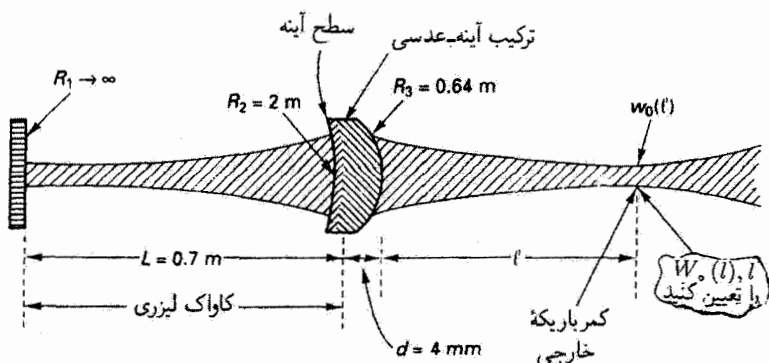
۱۵٪- برای جور کردن طیفی نور دمنده به ترازهای دمنده Nd : YAG

۵۰٪- ناشی از اتلافهای داخلی کاواک و یا میله

(الف) با احتساب این بازده‌ها به ترتیبی که "روی می‌دهند"، چه مقدار از ۲۵۰۰ وات اولیه برای توان در باریکه خروجی موجود است؟
 (ب) بازده عملی کل (بازده سوپچی) را برای این لیزر به دست آورید.

مراجع

- [1] Lengyel, B. A. *Lasers*, 2d ed. New York: John Wiley and Sons, 1971.
- [2] Siegman, A. E. *An Introduction to Lasers and Masers*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1971.
- [3] Siegman, A. E. *Lasers*. Mill Valley, Calif.: University Science Books, 1986.
- [4] Thompson, G. H. B. *Physics of Semiconductor Laser Devices*. New York: Wiley-Interscience, 1980.
- [5] Verdeyen, J. T. *Laser Electronics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1981.
- [6] Unger, H. G. *Introduction to Quantum Electronics*. New York: Pergamon Press, 1970.
- [7] O'Shea, D. C., W. R. Callen, and W. T. Rhodes. *Introduction to Lasers and Their Applications*. Reading Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1978.
- [8] Klein, M. V. *Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1970.
- [9] Saleh, B. E. A., and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. New York: John Wiley and Sons, 1991.
- [10] Schawlow, Arthur L. "Optical Masers." *Scientific American* (June 1961): 52.
- [11] Schawlow, Arthur L. "Advances in Optical Masers." *Scientific American* (July 1963): 34.
- [12] Pimentel, George C. "Chemical Lasers." *Scientific American* (Apr. 1966): 32.
- [13] Lempicki, Alexander, and Harold Samelson. "Liquid Lasers." *Scientific American* (June 1967): 80.
- [14] Patel, C. K. N. "High-Power Carbon Dioxide Lasers." *Scientific American* (Aug. 1968): 22.
- [15] Sorokin, Peter. "Organic Lasers." *Scientific American* (Feb. 1969): 30.
- [16] Panish, Morton B., and Izuo Hayashi. "A New Class of Diode Lasers." *Scientific American* (July 1971): 32.
- [17] Silfvast, William T. "Metal-Vapor Lasers." *Scientific American* (Feb. 1973): 88.
- [18] Tsang, W. T. "The C³ Laser." *Scientific American* (Nov. 1984): 148.



۲۲

مشخصات باریکه‌های لیزری

مقدمه

در این فصل به باریکه اپتیکی تولید شده با لیزر و مشخصات انتشاری این باریکه می‌پردازیم. خواهیم دید که باریکه لیزری مشخصات امواج تخت و کروی را دارد، و در عین حال هویت مختص به خود را حفظ می‌کند. باریکه لیزری در ساده‌ترین مد خود - مد پایه - به صورت جبهه‌های موج تقریباً کروی در می‌آید که در آن میدان الکتریکی دارای توزیع تابیدگی^۱ عرضی گاوسی جایگزیده و در نزدیکی محور انتشار است. در صورتهای پیچیده‌تر دیگر، که مدهای مرتبه بالاتر یا هرمیت-گاوسی نامیده می‌شوند، میدان الکتریکی دارای توزیعی تابیدگی عرضی ای است که از تغییر گاوسی ساده منحرف می‌شوند و نقش مرتبی از "لکه‌های داغ" را نمایش می‌دهند. در بسیاری از موارد، باریکه لیزری خروجی از آمیخته‌ای از مدها تشکیل می‌شود: مد پایه و چندین مد مرتبه بالاتر.

در این فصل ماهیت باریکه لیزری را بررسی می‌کنیم و مشخصات کلی آن را شرح می‌دهیم. خواص آن را در مکانهای نزدیک به لیزر (میدان نزدیک) و دور از لیزر (میدان دور) مطالعه می‌کنیم.

۱. واژه‌های شدت و تابیدگی غالباً در متون لیزری به جای هم به‌کار برده می‌شوند، اما منظور ما از تابیدگی توصیف توان بر مساحت (مثلاً W/m^2) در مکانی روی صفحه "هدف" در راستای مسیر باریکه است (جدول ۱-۲ را ببینید).

روشی کلی برای تعیین مشخصات آن شامل انحنای جبهه موج و توزیع تابیدگی عرضی— هنگام عبور از دستگاه‌های اپتیکی اختیاری به دست می‌دهیم. پس از مطالعه نسبتاً جامعی درباره مد پایه باریکه لیزری، که مد باریکه گاوسی TEM_{۰۰} نامیده می‌شود، مدهای عرضی مرتبه بالاتر و توزیع تابیدگی عرضی آنها را بررسی خواهیم کرد.

۱-۲۲ معادله موج سه بعدی و امواج الکترومغناطیسی

در فصل ۸ با عنوان معادله موج، انتشار امواج عرضی در محیط همگن را بررسی کردیم. دیدیم که معادله موج یک بعدی حاکم بر این نوع حرکت به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (۱-۲۲)$$

در اینجا y جابه‌جایی عرضی موج، z مختصه در راستای انتشار موج، t زمان، و v سرعت موج در محیط انتشار همگن را نشان می‌دهد.

اگر معادله موج یک بعدی ۱-۲۲ را به سه بعد برای جابه‌جایی میدان الکتریکی $E(x, y, z, t)$ در محیط همگن فاقد بار آزاد یا جریان تعمیم دهیم، معادله موج به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (۲-۲۲)$$

که در آن ∇^2 عملگر لاپلاسی، n ضریب شکست محیط انتشار، و c سرعت موج در خلأ است.

جوابهای موج تخت معادله موج. به اصطلاح جوابهای موج تخت معادله موج سه بعدی را می‌توان به صورت مختلط زیر بیان کرد

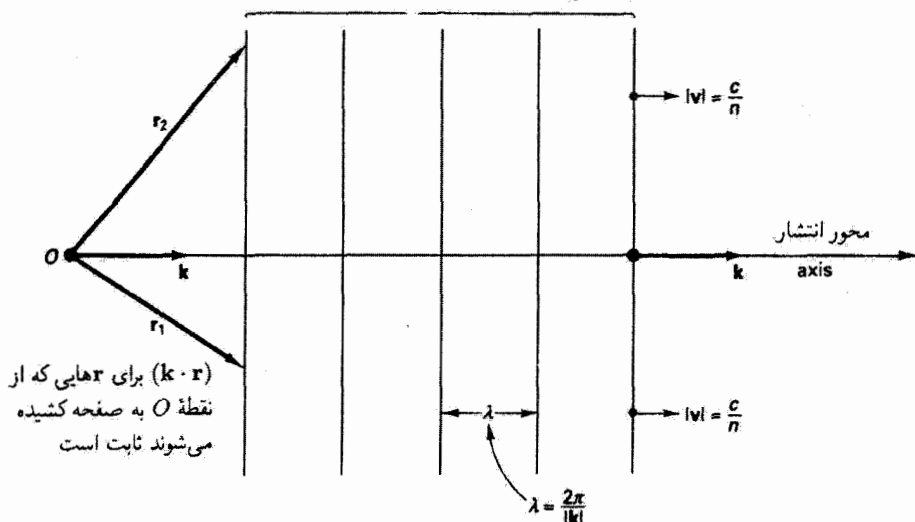
$$\vec{E}(\mathbf{r} \cdot t) = \mathbf{E}_0 e^{i(xk_x + yk_y + zk_z - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (۳-۲۲)$$

که در آن بردارهای انتشار و مکان عبارت‌اند از

$$\mathbf{k} = \hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z \quad \text{و} \quad \mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

و $\omega = |\mathbf{k}|c/n$ جوابهای موج تخت به عنوان توابع پایه در تحلیل فوریه موجهای اختیاری و به عنوان توصیف موجه میدانهای الکترومغناطیسی که از چشمه نقطه‌ای دور به آشکارساز می‌رسند

۱. به تفاوت بردار بکه \hat{i} با عدد انگاری $i = \sqrt{-1}$ و بردار بکه \hat{k} با ثابت انتشار k توجه داشته باشید.

امواج تخت: $E(x, y, z, t) = E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}$ 

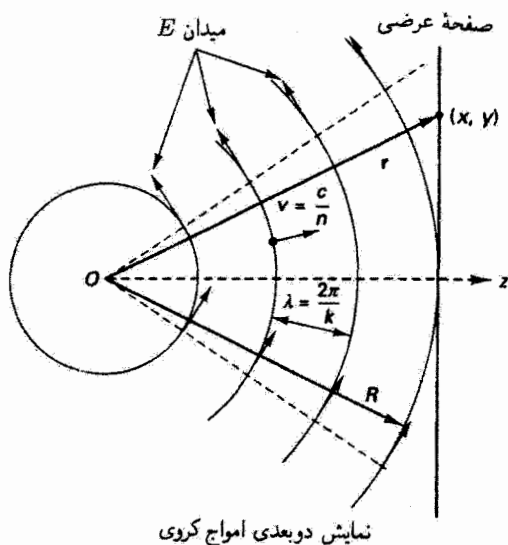
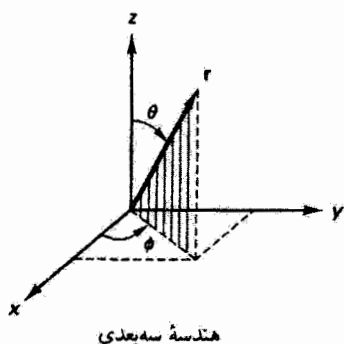
شکل ۱-۲۲ سطوح فاز ثابت $k \cdot r$ برای امواج تخت صفحه‌های هندسی در راستای عمود بر بردار موج k هستند و با سرعت $v = c/n$ در محیط همگنی که ضریب شکست آن n است حرکت می‌کنند.

مفیداند. این جوابها را از این لحاظ موج تخت می‌نامند که سطوح فاز ثابت $(k \cdot r)$ صفحه‌های هندسی عمود بر بردار موج k هستند. ویژگیهای اساسی امواج تخت متحرک را، که در شکل ۱-۲۲ نشان داده شده‌اند، در فصل ۸ بیان کردیم.

جوابهای موج کروی معادله موج. جوابهای کروی را که در معادله موج صدق می‌کنند می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = \frac{E_0(\theta, \phi)}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (۴-۲۲)$$

هندسه مربوط و پارامترهای اساسی در شکل ۲-۲۲ نشان داده شده‌اند. جوابهای موج کروی در فرمولبندی نظریه پراش هویگنس، فرنل و کیرشهوف مفیداند. این امواج نمایشگر صورتی هستند که برای موجکهای ثانوی هویگنس که از گشودگی پراش ناشی می‌شوند به کار می‌روند (بخش ۱-۳ را ببینید). به علاوه، امواج کروی توصیف معتبری از انرژی الکترومغناطیسی صادر از چشمه نقطه‌ای را نمایش می‌دهند. وقتی فاصله از چشمه نقطه‌ای بسیار زیاد می‌شود، امواج کروی را می‌توان امواج تخت در نظر گرفت و برای توصیف ریاضی آنها معادله ۲-۲۲ را به جای معادله ۴-۲۲ به کار برد.



شکل ۲-۲۲. سطح فاز ثابت برای امواج کروی کره‌های هندسی هستند که از چشمه نقطه‌ای O صادر می‌شوند.

۲-۲۲ تغییر فاز امواج کروی در صفحه عرضی

برای درک بهتر ماهیت باریکه لیزری، مفید است که در اینجا توزیع فاز میدان الکتریکی E وابسته به امواج کروی را در صفحه‌ای عمود بر راستای معین انتشار تعیین کنیم. در شکل ۲-۲۲، این صفحه به‌عنوان صفحه xy و راستای انتشار در امتداد محور z انتخاب شده است. در هر نقطه (x, y) از صفحه عرضی $z = R$ ، قسمت فضایی میدان الکتریکی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\vec{E}(x, y)_{z=R} = (\text{مقدار ثابت}) \times e^{ikr} \quad (۵-۲۲)$$

که در آن R فاصله عمودی از چشمه تا صفحه عرضی است و $r = (x^2 + y^2 + R^2)^{1/2}$ از شکل ۲-۲۲ واضح است که R همچنین شعاع انحنای موج کروی‌ای است که در $(x, y) = (0, 0)$ بر این صفحه مماس است. اگر r را به صورت

$$r = R \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right)^{1/2} \quad (۶-۲۲)$$

بنویسیم و نقاط (x, y) از صفحهٔ عرضی را به نقاط نزدیک به محور انتشار محدود کنیم به طوری که $(x^2 + y^2) \ll R^2$ ، می‌توانیم معادلهٔ ۲۲-۶ را با معادلهٔ زیر تقریب بگیریم^۱

$$r \cong R + \frac{x^2 + y^2}{2R} \quad (۷-۲۲)$$

آنگاه معادلهٔ ۲۲-۵ برای قسمت فضایی میدان الکتریکی E در نقطهٔ (x, y) از صفحهٔ عرضی $z = R$ به صورت صریح زیر در می‌آید

$$\bar{E}(x, y)_{z=R} \cong (\text{مقدار ثابت}) \times e^{ikR} e^{i(k/2)[(x^2+y^2)/R]} \quad (۸-۲۲)$$

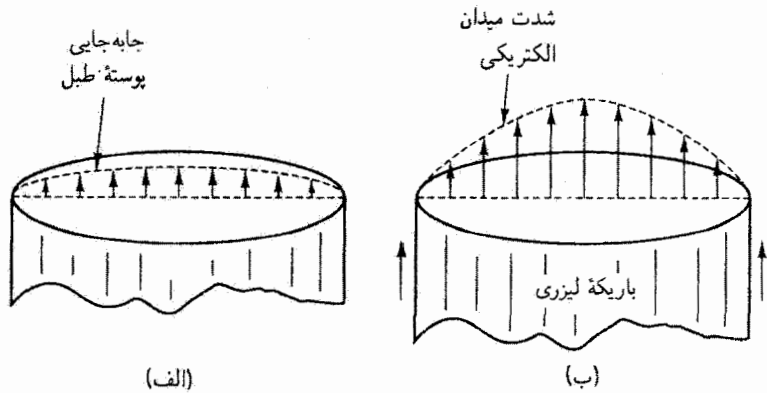
بعداً از معادلهٔ ۲۲-۸ به عنوان شرطی برای شناسایی موج کروی که از یک صفحهٔ عرضی می‌گذرد، در حالی که بررسی میدان الکتریکی E را به نقاط نزدیک به محور انتشار محدود کرده‌ایم، استفاده خواهیم کرد.

۲۲-۳ مبنایی برای تعریف ساختارهای مدی باریکهٔ لیزری

پیش از آنکه به ادامهٔ توصیف باریکه‌های لیزری بپردازیم لازم است مختصری دربارهٔ تغییر میدان الکتریکی در صفحهٔ عمود بر باریکه و مخصوصاً اینکه چگونه از این تغییر برای تشخیص ساختار مدی باریکه استفاده می‌شود صحبت کنیم. برای این منظور، شاید مفید باشد که تشبیهی بین جابه‌جایی پوستهٔ یک طبل و مقدار میدان الکتریکی در صفحهٔ عرضی باریکهٔ لیزری انجام دهیم. برای طبل، مد پایه وقتی روی می‌دهد که تمام پوسته که به کناره محکم شده بالا و پایین برود در حالی که بیشترین حرکت در مرکز پوسته است و یک نیمرخ تک‌کوهانه ایجاد می‌شود. به‌طور مشابه، مد پایه برای باریکهٔ لیزری وقتی وجود دارد که میدان الکتریکی در مرکز باریکه دارای بیشترین مقدار باشد و مطابق با نیمرخ گاوسی افت کند. این نیمرخ یک "کوهان" است که از مرکز به سمت لبه‌های باریکه در تمام راستاها به‌طور متقارن کاهش می‌یابد.^۲ شکل ۲۲-۳ مقایسهٔ جابه‌جایی پوستهٔ طبل و بردار میدان الکتریکی در عرض باریکهٔ لیزری را در یک لحظه نشان می‌دهد.

۱. با تعریف $u^2 \equiv (x^2 + y^2)/R^2$ و بسط دوجمله‌ای $(1 + u^2)^{1/2}$ که در آن $u^2 \ll 1$ ، معادلهٔ ۲۲-۷ از معادلهٔ ۲۲-۶، با حذف جمله‌های کوچکتر مرتبه‌های بالاتر، نتیجه می‌شود.

۲. لبهٔ پوستهٔ مرتعش طبل کاملاً معین است اما "لبه" باریکهٔ لیزری معین نیست. با این‌همه، این تشبیه اصولاً مفید است.



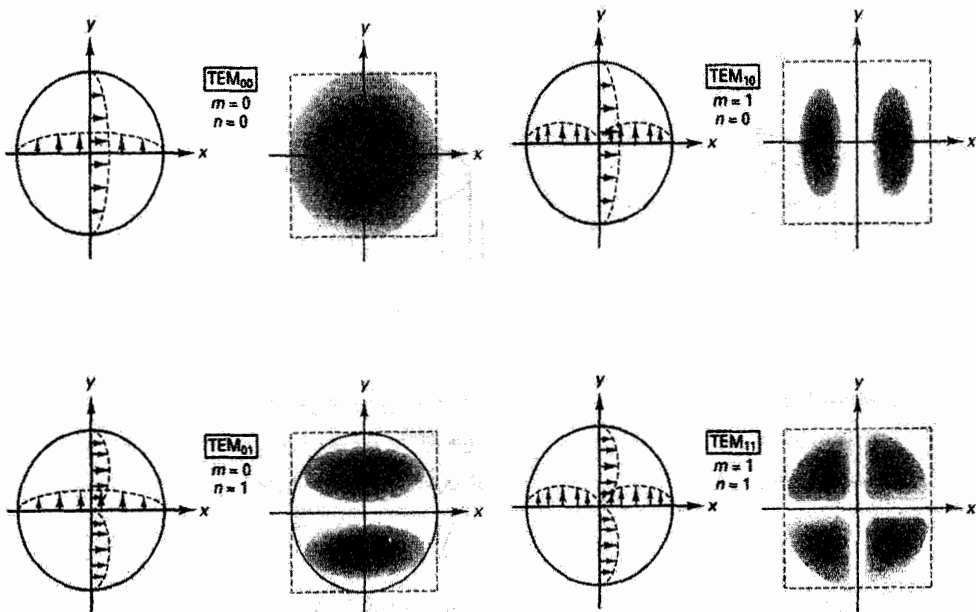
شکل ۳-۲۲ مقایسه جابه جایی مکانیکی پوسته مرتعش طبل و میدان الکتریکی باریکه لیزری. (الف) نمای جانبی لحظه‌ای پوسته طبل مرتعش در مد پایه خود. این جابه جایی قائم در تمام قطرهای یکسان است. (ب) نمای لحظه‌ای تغییر میدان الکتریکی روی قطری در صفحه عمود بر باریکه. میدان الکتریکی برای مد پایه در تمام قطرهای یکسان است.

برای نشان دادن مد پایه باریکه لیزری از نماد TEM_{mn} استفاده می‌کنند که مورد خاصی از نمادنگاری کلی TEM_{mn} است.^۱ در اینجا TEM به معنی "عرضی الکتریکی و مغناطیسی" است. شاخصهای m و n تعداد دفعاتی را نشان می‌دهند که میدان الکتریکی به ترتیب روی محورهای x و y ، که بر صفحه عرضی باریکه منطبق شده‌اند، صفر می‌شود. بنابراین، TEM_{00} نمایشگر یک "نیمرخ تک کوهانه" است که در راستاهای x و y (یا هر قطری در عرض باریکه) هیچ صفری ندارد، البته مگر در لبه‌ها که در آنجا باریکه به صفر میل می‌کند.

بر اساس آنچه گفته شد، تغییرات میدان الکتریکی و نقشهای داغ^۲ برای TEM_{00} ، TEM_{01} ، TEM_{10} ، TEM_{11} به صورتی هستند که در شکل ۳-۲۲ نشان داده شده است. به عنوان مثال، TEM_{01} هیچ صفری برای میدان E در راستای محور x ندارد (نیمرخ تک کوهانه) و یک صفر برای میدان E در راستای محور y دارد (نیمرخ دو کوهانه با صفری در نقطه مرکزی). این تغییر یک نقش داغ (روی هدف) ایجاد می‌کند که شامل دو ناحیه تیره افقی متقارن در بالا و پایین ناحیه "بی داغ" است. بررسی دقیق تغییر میدان E و نقشهای داغ برای مواردی که تصویر شده‌اند و در واقع، برای تمام مدهای مرتبه بالاتر TEM_{mn} - همبستگیهای مشابهی را بین تغییر میدان E و ناحیه‌های "داغ شده" آشکار می‌کند.

۱. البته مدهای عرضی که در اینجا با نماد TEM_{mn} نشان داده شده‌اند در تشدیدگر دوسرآینه‌ای اپتیکی با دیواره‌های باز، کواک لیزری، تولید می‌شوند.

۲. این نامگذاری به دلیل نقشی است که باریکه پر شدت وقتی با "سوزاندن" در هدف پیش می‌رود تولید می‌کند.



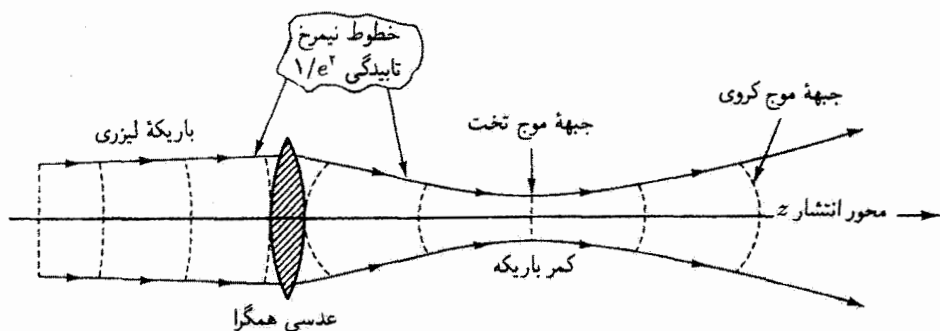
شکل ۴-۲۲ تغییرات میدان الکتریکی روی قطرهای عرضی باریکه برای چند مد مختلف TEM_{mn} ، و نقشهای داغ متناظری که این باریکه‌ها روی هدف به‌وجود می‌آورند.

برای رعایت سادگی در این بررسی، ما عمدتاً با باریکه TEM_{00} کار خواهیم کرد که نقش داغ آن اصولاً یک دایره تیره با بیشترین شدت داغ در مرکز (روی محور) است.

۴-۲۲ جواب باریکه گاوسی برای لیزرها

اگر سرشت الکترومغناطیسی باریکه لیزری TEM_{00} را بررسی کنیم می‌بینیم جبهه‌های موج آن سطوحی اساساً کروی یا شعاعهای انحنای بزرگی هستند که با پیشروی باریکه در راستای محور انتشار افزایش می‌یابند. جبهه موج مرکب و تغییر تابیدگی یک باریکه لیزری TEM_{00} که از عدسی همگرا عبور می‌کند به‌صورتی هستند که در شکل ۵-۲۲ نشان داده شده است.

خطوط اصلی پر، در بالا و پایین محور z ، مکان هندسی نقاطی را نمایش می‌دهند که برای آنها تابیدگی میدان الکتریکی باریکه در راستای عرضی برابر با $1/e^2$ مقدار آن روی محورهاست. بدین ترتیب، این خطوط برای تعریف پهنای باریکه متغیر بیوسته به‌کار برده شده‌اند. کمانهای چین در عرض محور z جبهه‌های موج باریکه را نشان می‌دهند. چون شکل هندسی جبهه‌های فاز مشترک برای باریکه



شکل ۵-۲۲ باریکه لیزری بیرونی، که اساساً محدود به ناحیه داخل خطوط اصلی تابیدگی $1/e^2$ است، با یک عدسی همگرا متمرکز شده است. باریکه فرودی فوق العاده موازی شده است و در نتیجه جبهه‌های موج آن با تقریب بسیار خوب تخت هستند. عدسی همگرا شکل این جبهه‌های موج را تغییر می‌دهد و باریکه را در سمت راست خود با تشکیل کمر باریکه متمرکز می‌کند. باریکه ضمن انتشار پس از کمر باریکه شدیداً واگرا می‌شود.

لیزری فوق العاده موازی شده "کم و بیش" تخت است، می‌توانیم یک جواب آزمونی برای میدان الکتریکی $E(r, t)$ مربوط به این باریکه لیزری از روی موج یک‌بعدی به صورت زیر در نظر بگیریم^۱

$$E(r, t) = U(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} \quad (۹-۲۲)$$

جمله $U(x, y, z)$ پس از آنکه تعیین شد، جزئیاتی را به دست می‌دهد که تغییرات تابیدگی و فاز موج را، عمدتاً در راستاهای x و y ، به دقت مشخص می‌کنند. جمله نهایی در معادله ۹-۲۲ صرفاً معرف سرشت موج "کم و بیش" تخت جواب است. اگر در تعیین تابع $U(x, y, z)$ موفق باشیم آنگاه جواب مفیدی که توصیفگر باریکه لیزری واقعی است خواهیم داشت.

تعیین تابع $U(x, y, z)$ چون جواب آزمونی ۹-۲۲ باید در معادله موج صدق کند، آن را در معادله ۲-۲۲ می‌گذاریم و معادله تعریفگری برای تابع هنوز نامشخص $U(x, y, z)$ به دست می‌آوریم:

$$e^{i(kz - \omega t)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial U}{\partial z} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) U \right] = 0 \quad (۱۰-۲۲)$$

۱. معادله ۹-۲۲ را بر اساس تقریب پیرامحوری نوشته‌ایم. یعنی یک موج تخت را در نظر گرفته‌ایم که اساساً تنها در راستای محور z منتشر می‌شود، و در نتیجه توانسته‌ایم میدان الکتریکی $E(x, y, z, t)$ را به صورت نرده‌ای معادله ۹-۲۲ بنویسیم.

از مشتق مرتبه دوم U نسبت به z صرف نظر می‌کنیم زیرا تضعیف یکنوای $E(x, y, z, t)$ نسبت به فاصله انتشار محوری کوچک است. اما مشتق مرتبه اول U نسبت به z و همچنین مشتقات U نسبت به x و y را نگه می‌داریم. آخرین جمله در معادله ۱۰-۲۲ آشکارا صفر است زیرا $\omega \equiv kc$. بدین ترتیب، معادله ۱۰-۲۲ را می‌توانیم ساده کنیم، و معادله زیر را که $U(x, y, z)$ باید در آن صدق کند به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (11-22)$$

معادله ۱۱-۲۲ یک معادله دیفرانسیل جزئی نابدیهی با جمله‌های مختلط است. برای جواب آن، یک حدس "قریب به یقین" می‌زنیم^۱ که تا اندازه‌ای از تقارن استوانه‌ای که انتظار داریم بزرگی میدان الکتریکی باریکه لیزری در راستای عرضی داشته باشد و تا اندازه‌ای از ماهیت مختلط که جواب $U(x, y, z)$ باید از خود نشان دهد منبث می‌شود. بنابراین، صورت زیر را "حدس" می‌زنیم

$$\tilde{U}(x, y, z) = E_0 e^{i\{p(z) + [(x^2 + y^2)/2q(z)]\}} \quad (12-22)$$

که در آن $q(z)$ و $p(z)$ توابعی کلی هستند که باید آنها را تعیین کنیم و مقید به قیودی هستند که معادله ۱۱-۲۲، معادله معرف $\tilde{U}(x, y, z)$ ، تحمیل می‌کند. پس از جاگذاری معادله ۱۲-۲۲ در معادله ۱۱-۲۲، به دست می‌آوریم

$$\frac{2ik\tilde{U}}{q} - \frac{k^2}{q^2}(x^2 + y^2)\tilde{U} - 2k\tilde{U}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k^2}{q^2}(x^2 + y^2)\tilde{U}\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

که اگر آن را برحسب توانهای $(x^2 + y^2)$ مرتب کنیم به صورت زیر در می‌آید

$$\left[\left(\frac{2ik}{q} - 2k \frac{\partial p}{\partial z} \right) (x^2 + y^2)^0 + \left(\frac{k^2}{q^2} \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{k^2}{q^2} \right) (x^2 + y^2)^1 \right] \tilde{U} = 0 \quad (13-22)$$

اگر معادله ۱۱-۲۲ باید جوابی به ازای تمام x و y ها باشد آنگاه هر جمله ضریب توانهای مختلف $(x^2 + y^2)^0$ و $(x^2 + y^2)^1$ باید جداگانه صفر شود. بنابراین، از "ضرایب" $(x^2 + y^2)^0$ و $(x^2 + y^2)^1$ وقتی محاسبه دقیق معادله باریکه گاوسی در مرجع [۱] فصل ۱۶ داده شده است. آنها را که می‌خواهند با جزئیات این محاسبه آشنا شوند ترغیب می‌کنیم که روش زیگمان را امتحان کنند.

مساوی صفر قرار داده شوند، به دست می آوریم

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{i}{q} \quad (۱۴-۲۲)$$

و

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 1 \quad (۱۵-۲۲)$$

اکنون معنی محدودیتهایی را جستجو می کنیم که معادله های ۱۴-۲۲ و ۱۵-۲۲ روی توابع $q(z)$ و $p(z)$ اعمال می کنند.

تعریف شعاع مختلط انحنای q دیده می شود که p و q به طور کلی می توانند مختلط باشند. همچنین، از مقایسه جمله دوم در نمای معادله ۱۲-۲۲ با جمله دوم در معادله ۸-۲۲، ملاحظه می شود که اگر جبهه های موج باریکه لیزری واقعاً باید سرشت کروی داشته باشند، $q(z)$ باید تا اندازه ای شبیه به شعاع انحنای جبهه موج باشد. بنابراین، حدس فوق العاده "زیرکانه" ای می زنیم: q را به صورت مختلط \bar{q} نشان می دهیم و آن را شعاع مختلط انحنای می نامیم و به صورت زیر می نویسیم^۱

$$\frac{1}{\bar{q}} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (۱۶-۲۲)$$

که در آن R شعاع انحنای جبهه موج و w اندازه عرضی باریکه است.

باید صادقانه گفت که معادله ۱۶-۲۲ یک حدس مبتنی بر تجربه است که بیشتر حاصل از گذشته نگری است تا آینده نگری. با این همه، این معادله مزیت های زیادی دارد. می بینیم که $1/\bar{q}$ ، به صورتی که در معادله ۱۶-۲۲ داده شده است، واقعاً مختلط است، قسمت حقیقی آن $(1/R)$ به شعاع انحنای حقیقی جبهه موج R مربوط می شود، و قسمت انگاری آن $(\lambda/\pi w^2)$ به اندازه عرضی باریکه w مربوط می شود. واقعیت این است که بعداً خواهیم دید w — که آن را (متأسفانه) "اندازه لکه" می نامند و در نتیجه با قطر اشتباه می شود — معرف نیم پهنای باریکه (شعاع) است. پارامتر w روی صفحه عرضی از نقطه محوری تا نقطه برون محوری که در آن تابیدگی باریکه به

۱. بعضی از کتابهای درسی (از جمله [۱]، [۳] و [۶]) معادله ۱۶-۲۲ را با علامت منفی بین دو جمله طرف راست می نویسند. اگر معادله ۹-۲۲ را مانند بالا با جمله e^{ikz} بنویسیم معادله ۱۶-۲۲ با همین صورت نتیجه می شود، و اگر معادله ۹-۲۲ را با جمله e^{-ikz} بنویسیم معادله ۱۶-۲۲ با علامت منفی به دست می آید. در هر مورد، با داشتن مجموعه سازگاری از معادلات، مشخصات یکسانی برای باریکه لیزری گاوسی به دست می آیند.

$1/e^2$ مقدار محوری کاهش می‌یابد اندازه‌گیری می‌شود. بدین ترتیب، اگر معادله ۲۲-۱۶ را در معادله ۲۲-۱۲ بگذاریم به دست می‌آوریم

$$\bar{U}(x, y, z) = E_0 e^{ip(z)} e^{ik(x^2+y^2)/2R(z)} e^{-(x^2+y^2)/w^2} \quad (17-22)$$

صرف نظر از $p(z)$ که آن را بعداً در این فصل تعیین می‌کنیم، اکنون رابطه صریحی برای $\bar{U}(x, y, z)$ و در نتیجه، همراه با معادله ۲۲-۹، صورت کارآمدی برای تغییر زمانی و فضایی میدان الکتریکی در باریکه لیزری در دست داریم.^۱

باریکه لیزری گاوسی کروی. تا اینجا مسئله را برای نمایش ریاضی باریکه لیزری "حل" کرده‌ایم. با جاگذاری معادله ۲۲-۱۷ در حدس اولیه

$$E(x, y, z, t) = U(x, y, z, t) e^{i(kz - \omega t)}$$

نمایش باریکه گاوسی را برای میدان \mathbf{E} به دست می‌آوریم:

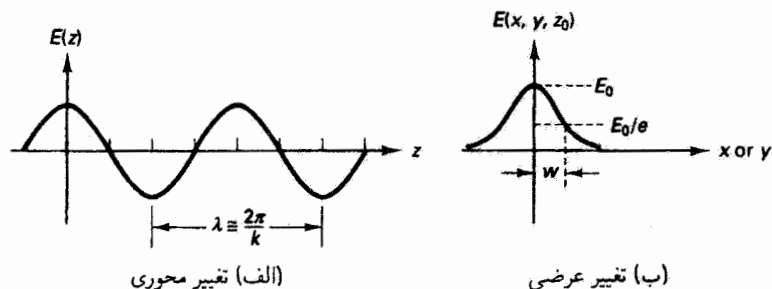
$$\bar{E}(x, y, z, t) = E_0 e^{ik(x^2+y^2)/2R(z)} e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)} e^{i[kz+p(z)-\omega t]} \quad (18-22)$$

اولین جمله نمایی در معادله ۲۲-۱۸، که با دومین جمله نمایی در معادله ۲۲-۸ که قبلاً برای استفاده در اینجا به دست آمد یکی است؛ نشان می‌دهد که هندسه باریکه لیزری یک سطح کروی است. دومین جمله نمایی نشان می‌دهد که میدان الکتریکی در هر صفحه عرضی (در یک z معین) به صورت یک تابع گاوسی که مقدار قله‌ای آن روی محور است افت می‌کند.^۲ آخرین جمله نمایی حاوی اطلاعات فازی وابسته به z است. در این مرحله، تا جایی که به $p(z)$ مربوط می‌شود، تنها متذکر می‌شویم که این تابع باید در شرط $\partial p / \partial z = i/q$ صدق کند.

بدین ترتیب، در پیدا کردن جواب باریکه‌گونه برای معادله موج موفق بوده‌ایم. این جواب دارای صورت صریحی است که با معادله ۲۲-۱۸ داده شده است و آن را باریکه گاوسی کروی می‌نامند. در راستای محور انتشار باریکه (راستای z) میدان الکتریکی ماهیتاً هماهنگ است اما با طول موجی

۱. یادآور می‌شویم که این تنها یک جواب بسیار مفید برای معادله ۲۲-۱۱ است. بحث درباره جویهای دیگر را به بخش ۷-۲۲ موکول می‌کنیم.

۲. فرض کرده‌ایم که خواننده با معنی تغییر "گاوسی" صورت $\exp(-r^2/a^2)$ برای باریکه متقارن استوانه‌ای که در آن $r^2 = x^2 + y^2$ آشنایی دارد.



شکل ۶-۲۲ تغییر محوری تقریبی و تغییر عرضی دامنه میدان الکتریکی $E(x, y, z)$ در باریکه لیزری. در اینجا w پهنای باریکه در E_0/e است.

که تقریباً با $\lambda = 2\pi/k$ ، به علت وجود جمله $p(z)$ در آخرین نما، داده می‌شود. در هر صفحه عرضی (با z ثابت) میدان الکتریکی به طرز گاوسی با فاصله از محور افت می‌کند. این نتایج در شکل ۶-۲۲ نمایش داده شده‌اند.

۲۲-۵ اندازه لکه و شعاع انحنای باریکه گاوسی

فرض کنید در یک صفحه عرضی مانند $z = 0$ باریکه گاوسی دارای جهت موج تخت است، یعنی $R(z=0) \rightarrow \infty$. آنگاه، از معادله ۱۶-۲۲ داریم

$$\frac{1}{\bar{q}_0} = \frac{i\lambda}{\pi w_0^2} \quad \text{یا} \quad \bar{q}_0 = -i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (19-22)$$

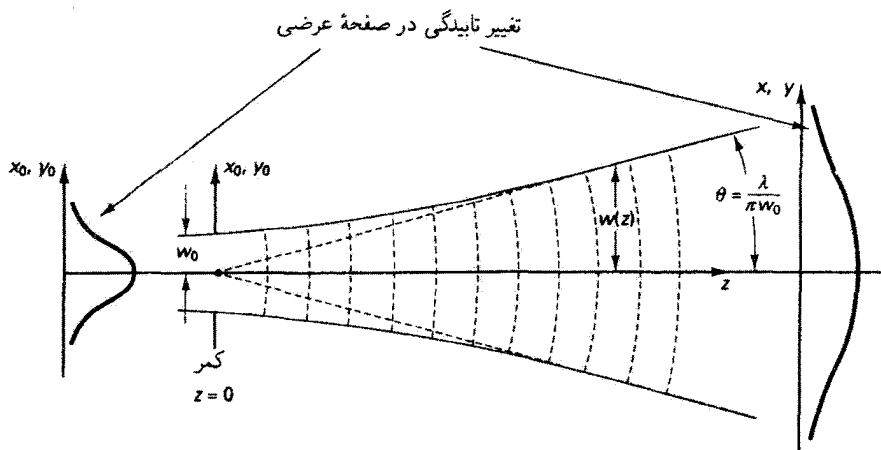
که در آن \bar{q}_0 و w_0 به ترتیب عبارت‌اند از $\bar{q}(z=0)$ و $w(z=0)$. صفحه $z=0$ مکان کمر باریکه را تعیین می‌کند. بنابراین، پارامتر w_0 ، چنانکه در شکل ۷-۲۲ نشان داده شده است، اندازه لکه در کمر باریکه است.

برای هر صفحه عرضی دیگر در $z \neq 0$ ، از معادله ۱۵-۲۲ نتیجه می‌گیریم که

$$\bar{q}(z) = \bar{q}(0) + z \quad (20-22)$$

که در آن z فاصله محوری از کمر باریکه است. این معادله قانون اساسی انتشار برای باریکه لیزری است. از ترکیب معادله ۲۰-۲۲ با معادله ۱۹-۲۲، به دست می‌آوریم

$$\bar{q}(z) = z - i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (21-22)$$



شکل ۲۲-۷ انتشار باریکه کروی گاوسی در راستای z . اندازه لکه $w(z)$ در کمر باریکه (جبهه موج تخت) با w_0 نشان داده شده است. نیم زاویه واگرایی باریکه $(\theta = \lambda / (\pi w_0))$ تنها در میدان دور معتبر است. به تغییر در تابیدگی عرضی همچنانکه باریکه منتشر می‌شود توجه کنید.

این معادله را معکوس می‌کنیم و پس از گویا کردن مخرج آن به رابطه زیر می‌رسیم

$$\frac{1}{\bar{q}(z)} = \frac{z}{\left(z^2 + \frac{\pi^2 w_0^2}{\lambda^2}\right)} + i \frac{\pi w_0^2 / \lambda}{\left(z^2 + \frac{\pi^2 w_0^2}{\lambda^2}\right)} \quad (22-22)$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و انگاری معادله ۲۲-۲۲ با هم‌تاهای خود از معادله ۲۲-۱۶، یعنی معادله تعریفگر $1/\bar{q}(z)$ ، روابط مفیدی برای $w(z)$ و $R(z)$ ، برحسب اندازه لکه w_0 کمر باریکه و فاصله z از کمر باریکه تا صفحه عرضی مورد نظر، به دست می‌آوریم که عبارت‌اند از

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (23-22)$$

و

$$w(z)^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (24-22)$$

۱. به‌عنوان قرارداد علامت، موج واگرا یا انبساطی را با R مثبت و موج همگرا را، که به سمت یک نقطه حرکت می‌کند، با R منفی مشخص می‌کنیم.

معادله ۲۲-۲۳ شعاع انحنای جبهه موج باریکه لیزری را به صورت تابعی از فاصله z از صفحه مرجع یعنی از کمر باریکه در $z = 0$ مشخص می‌کند. توجه کنید که اگر جبهه‌های موج کروی حول $z = 0$ هم‌مرکز بودند آنگاه تساوی $R(z) = z$ برقرار بود. اما معادله ۲۲-۲۳ نشان می‌دهد که این امر صادق نیست؛ مرکزهای تمام جبهه‌های موج کروی در $z = 0$ واقع نمی‌شوند. اما وقتی فاصله $z \gg \pi w_0^2 / \lambda$ آنگاه $R(z) \cong z$ ، و جبهه‌های موج تقریباً کروی هم‌مرکز حول $z = 0$ داریم.

ناحیه‌ای را که با رابطه

$$z \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (25-22)$$

مشخص می‌شود میدان دور می‌نامند.^۱ در این ناحیه است که می‌توانیم پراش از کمر باریکه (گشودگی) را پراش فرانوفر محض در نظر بگیریم. در حد معادله ۲۲-۲۵، معادله‌های ۲۲-۲۳ و ۲۲-۲۴ به صورتهای میدان دور زیر در می‌آیند

$$R(z) = z \quad (26-22)$$

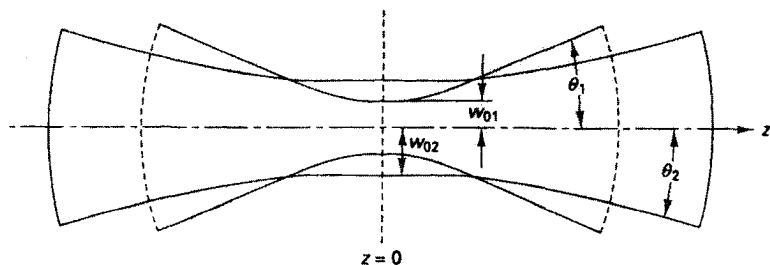
و

$$w(z) = \frac{\lambda}{\pi w_0} z \quad (27-22)$$

بدین ترتیب، وقتی فاصله از کمر باریکه تا هدف یا آشکارساز بسیار بیشتر از $\pi w_0^2 / \lambda$ است، می‌گوییم هدف یا آشکارساز در میدان دور نسبت به لیزر قرار دارد. در این میدان دور، از معادله ۲۲-۲۷ واضح است که $w(z)$ یعنی اندازه لکه با z به طور خطی زیاد می‌شود. چون نیم‌زاویه پخش باریکه θ ، که در شکل ۲۲-۷ مشخص شده است، در بیشتر کاربردها کوچک است (۱ میلی‌رادیان یا کمتر) پس $\tan \theta \cong \theta$. بدین ترتیب، واگرایی باریکه نیم‌زاویه^۲ میدان دور (FF) برای لیزر با رابطه

۱. در عمل، "شدت" این نامساوی را ۲۰ تا ۵۰ برابر مقدار $\pi w_0^2 / \lambda$ می‌گیرند. در واقع، همیشه یک "ناحیه خاکستری" بین میدان نزدیک (که در آن نظریه پراش فرنل برای محاسبات جبهه موج لازم است) و میدان دور (که در آن نظریه پراش فرانوفر قابل قبول است) وجود دارد. وقتی شک داشته باشیم، می‌توانیم همیشه محاسبات فرنل دقیق را انجام دهیم و با نتایج فرانوفر تقریبی مقایسه کنیم.

۲. دقیقاً توجه کنید که در فصل ۲۱ واگرایی باریکه تمام‌زاویه را با حرف ϕ نشان دادیم. در اینجا واگرایی باریکه نیم‌زاویه را با حرف θ نشان می‌دهیم.



شکل ۲۲-۸ دو باریکه لیزری با کمر باریکه در $z = 0$. هر چه کمر باریکه w_0 کوچکتر باشد واگرایی باریکه θ بیشتر است.

زیر تعریف می‌شود

$$\theta_{FF} \cong \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (28-22)$$

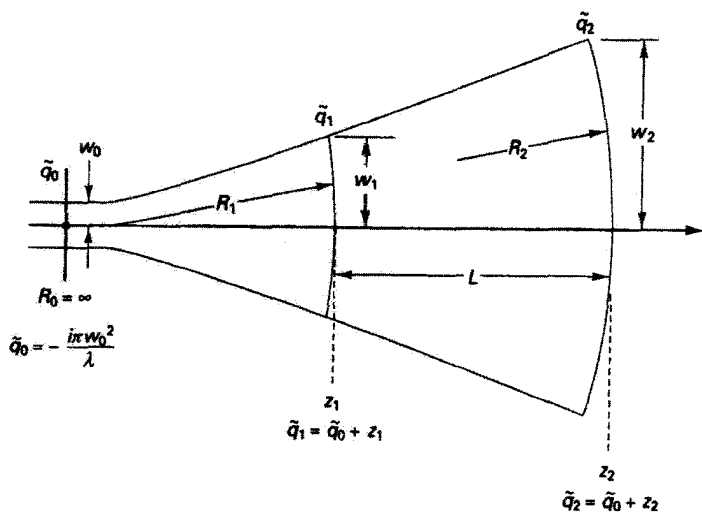
در شکل ۲۲-۸، مضامین معادله‌های ۲۲-۲۶ و ۲۲-۲۷ نمایش داده شده‌اند. در فواصل دور از کمر، جبهه موج باریکه به شکل کروی با مرکز انحنا در کمر است. همچنین، درست همان‌طور که معادله ۲۲-۲۸ نشان می‌دهد، هر چه کمر w_0 کوچکتر باشد واگرایی یا پخش باریکه، برای باریکه‌ای که از کمر باریکه دور می‌شود، بیشتر است.

بناباه معادله‌های ۲۲-۲۳ و ۲۲-۲۴، اگر w_0 یعنی اندازه لکه در کمر باریکه و z یعنی فاصله کمر باریکه تا صفحه عرضی معلوم باشند می‌توانیم شعاع انحنای $R(z)$ و اندازه لکه باریکه $w(z)$ را به دست آوریم. برعکس، اگر $w(z)$ و $R(z)$ برای یک صفحه عرضی خاص داده شده باشند، می‌توانیم جای کمر باریکه و اندازه لکه آن w_0 را به روش زیر تعیین کنیم. شکل ۲۲-۹ را در نظر بگیرید که در آن w_1 و R_1 در صفحه عرضی در z_1 معلوم‌اند. اگر \bar{q}_1 را با استفاده از معادله ۲۲-۱۶ برحسب R_1 و w_1 بیان کنیم و معادله ۲۲-۲۱ را به‌کار ببریم، می‌توانیم بنویسیم

$$\left(\frac{1}{R_1} + i \frac{\lambda}{\pi w_1^2} \right)^{-1} = z_1 - i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (29-22)$$

اکنون اگر طرف چپ معادله ۲۲-۲۹ را به‌طور مناسب گویا کنیم و سپس قسمتهای حقیقی و همچنین انگاری را مساوی قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$z_1 = \frac{R_1}{1 + \left(\frac{\lambda R_1}{\pi w_1^2} \right)^2} \quad (30-22)$$



شکل ۲۲-۹ قانون اساسی انتشار برای شعاع مختلط انحنای (\bar{q}) . با دانستن w_1 و R_1 در z_1 می‌توانیم w_0 و z_1 را به دست آوریم. و برعکس، با دانستن w_0 و مکان کمر باریکه می‌توانیم تمام \bar{q} های دیگر را محاسبه کنیم.

و

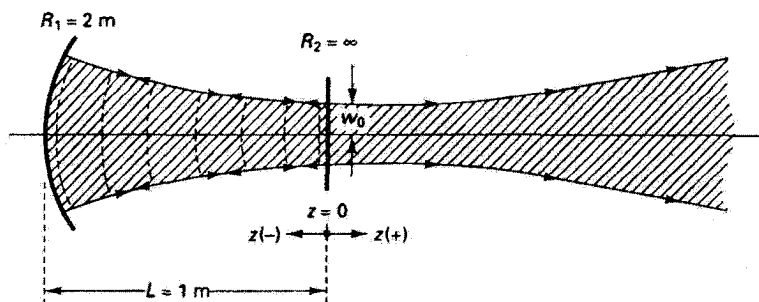
$$w_0 = \frac{w_1}{\left[1 + \left(\frac{\pi w_1^2}{\lambda R_1} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (۳۱-۲۲)$$

بنابراین، با داشتن w_1 و R_1 ، می‌توان مکان کمر باریکه و اندازه آن را از معادله‌های ۲۲-۳۰ و ۲۲-۳۱ تعیین کرد. به علاوه، با معادله‌های ۲۲-۲۳ و ۲۲-۲۴ می‌توانیم $R(z)$ و $w(z)$ را برای هر صفحه عرضی دیگری نسبت به کمر باریکه تعیین کنیم.

مثال

در این مثال روش استفاده از چند معادله‌ای را که به دست آورده‌ایم بیان می‌کنیم. یک لیزر هلیوم-نئون TEM_{۰۰} چهار میلی‌واتی ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) را با ابعاد کاواکی که در زیر داده شده‌اند در نظر بگیرید. آینه چپ ($R_1 = 2 \text{ m}$) 10° بازتابنده است. آینه راست ($R_2 \rightarrow \infty$) تا اندازه‌ای بازتابنده است و باریکه خروجی ۴ میلی‌واتی از آن عبور می‌کند. کمر باریکه که در آن صفحه مرجع $z = 0$ را انتخاب کرده‌ایم در کاواک لیزری ($L = 1 \text{ m}$) روی آینه تخت واقع شده است. نیمرخهای

چین نمایشگر جبهه‌های موج در کاواک هستند. برای نوسان لیزری پایدار، انحناهای جبهه‌های موج با انحناهای آینه‌ها جور شده است.



- (الف) اندازه لکه w_0 در کمر باریکه را به دست آورید.
 (ب) اندازه لکه باریکه لیزری w را روی آینه عقب تعیین کنید.
 (ج) شعاع مختلط انحنا $\bar{q}(z)$ را در $z = 0$ و $z = -1$ m به دست آورید.
 (د) مکان z_{FF} مربوط به میدان دور از کمر باریکه ($z = 0$) را تعیین کنید.
 (ه) واگرایی باریکه نیم‌زاویه میدان دور θ_{FF} را برای این لیزر محاسبه کنید.

حل: (الف) از معادله ۲۲-۲۳، با $R(z) = -2$ m و $z = -1$ m، $\lambda = 632.8$ nm، می‌توان w_0 را به دست آورد. با جاگذاری مستقیم داریم

$$-2 = -1 \left[1 + \left(\frac{3.14 w_0^2}{632.8 \times 10^{-9} \times (-1)} \right)^2 \right]$$

که از آن مقدار w_0 برابر با 0.45 mm یا 449×10^{-6} m به دست می‌آید.

(ب) معادله ۲۲-۲۴ را با $w_0 = 449 \times 10^{-6}$ m و $z = -1$ m، $\lambda = 632.8$ nm

می‌نویسیم:

$$w(z)^2 = (449 \times 10^{-6})^2 \left[1 + \left(\frac{632.8 \times 10^{-9} \times (-1)}{3.14 \times (449 \times 10^{-6})^2} \right)^2 \right]$$

و در نتیجه $w(z) = 635 \times 10^{-6}$ m $\cong 0.64$ mm و در نتیجه بدین ترتیب، اندازه لکه از شعاع $w = 0.45$ mm در کمر به $w = 0.64$ mm در آینه عقب افزایش می‌یابد.

(ج) با استفاده از معادله ۲۲-۲۱ داریم

$$\bar{q}(z) = z - \frac{i\pi w_0^2}{\lambda} = -1 - \frac{i(3,14)(4,5 \times 10^{-4})^2}{632,8 \times 10^{-9}} = -1 - i \quad : z = -1 \text{ m در}$$

$$\bar{q}(z) = 0 - \frac{i(3,14)(4,5 \times 10^{-4})^2}{632,8 \times 10^{-9}} = -i \quad : z = 0 \text{ در}$$

(د) از معادله ۲۲-۲۵، با $w_0 = 4,49 \times 10^{-4} \text{ m}$ و $\lambda = 632,8 \times 10^{-9} \text{ m}$ به دست

می‌آوریم

$$z_{FF} \gg \frac{3,14 \times (4,49 \times 10^{-4})^2}{632,8 \times 10^{-9}} \quad \text{یا} \quad z_{FF} \gg 1,0 \text{ m}$$

با استفاده از این معیار که نماد \gg به معنی 20° تا 50° بار بزرگتر است، نتیجه می‌گیریم که میدان دور برای این لیزر 20° تا 50 m از لیزر فاصله دارد. به عنوان مثال در $z = 50 \text{ m}$ ، محاسبات پراش فرانوفر معتبرانند.

(ه) از معادله ۲۲-۲۸ به دست می‌آوریم

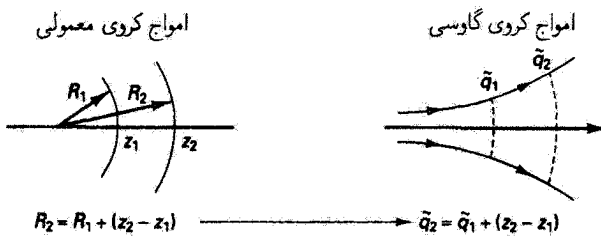
$$\Delta \theta_{FF} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{632,8 \times 10^{-9}}{(3,14)(4,49 \times 10^{-4})} = 4,49 \times 10^{-4} \text{ rad} \cong 0,45 \text{ mrad}$$

۲۲-۶ انتشار لیزری در دستگاههای اپتیکی اختیاری

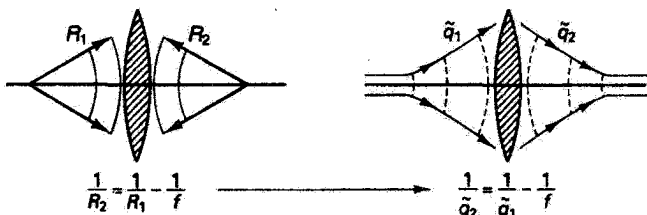
با قانون اساسی انتشار برای شعاع مختلط انحنای \bar{q} ، معادله ۲۲-۲۰، و معادله‌های معرف برای شعاع حقیقی انحنای $R(z)$ و پهنای باریکه $w(z)$ ، معادله‌های ۲۲-۲۳ و ۲۲-۲۴، می‌توانیم پارامترهای باریکه را برای انتشار لیزری در هر محیط همگنی با ضریب شکست n مشخص کنیم. اکنون می‌خواهیم به این مسئله پردازیم که چگونه باریکه توسط یک دستگاه اپتیکی اختیاری شامل عدسیها، آینهها، منشورها، و غیره تغییر می‌کند.

مفید است که به شباهت بین رفتار امواج کروی معمولی در اپتیک هندسی و امواج کروی گاوسی در اینجا توجه کنیم. در شکل ۲۲-۱۰، قانون اساسی انتشار برای هر یک از این دو موج و اثر عدسی در تغییر شکل جبهه موج منتشرشونده نمایش داده شده‌اند.

تناظر بین $R(z)$ برای امواج کروی معمولی و $\bar{q}(z)$ برای امواج کروی گاوسی در معادله‌های تعریفگر مسلماً شگفت‌انگیز است. به عنوان مثال، قانون انتشار امواج کروی معمولی چنانکه می‌دانیم



انتشار ساده



اثر عدسی ساده

شکل ۲۲-۱۰ تناظر بین امواج کروی معمولی و امواج کروی گاوسی. اگر قانون مربوط به امواج کروی معمولی را بدانیم می‌توانیم قانون مشابهی را برای امواج کروی گاوسی از تعویض ساده $R(z)$ با $q(z)$ طوری که در بالا نشان داده شده است استنباط کنیم.

با رابطه زیر داده می‌شود

$$R_2 = R_1 + (z_2 - z_1) \quad (۲۲-۳۲)$$

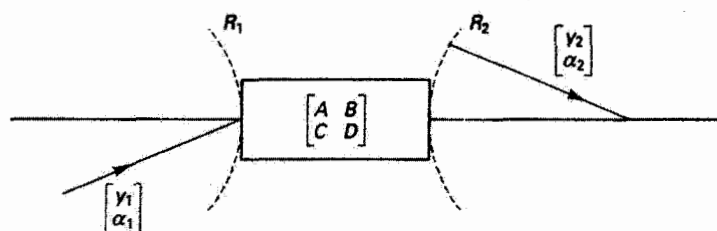
علاوه بر این، مطابق با نتیجه‌ای که قبلاً در معادله ۲۲-۲۰ به دست آمد، قانون اساسی انتشار برای باریکه لیزری عبارت است از

$$q_2 = q_1 + (z_2 - z_1) \quad (۲۲-۳۳)$$

که با معادله ۲۲-۳۲ یکسان است به استثنای اینکه q به جای R نشسته است. با قوه ابتکار، این تناظر را به قوانین اساسی دیگر، به عنوان مثال قانون عدسی ساده، گسترش می‌دهیم. برای امواج کروی معمولی، صورت متداول این قانون عبارت است از

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \quad (۲۲-۳۴)$$

۱. می‌توان نشان داد تناظری که در اینجا به آن اشاره می‌کنیم دقیق است و تنها یک مانستگی نیست.



شکل ۱۱-۲۲ انتشار امواج کروی معمولی در یک دستگاه اپتیکی اختیاری با فرمولبندی ماتریسی.

که در آن R_1 و R_2 به ترتیب شعاعهای انحنا در فرود و شکست هستند، و f فاصله کانونی است (شکل ۱۱-۲۲). اگر برای باریکه لیزری چنانکه باید \bar{q} را به جای R بگذاریم بی درنگ به دست می آوریم

$$\frac{1}{\bar{q}_2} = \frac{1}{\bar{q}_1} - \frac{1}{f} \quad (35-22)$$

این رابطه تغییر شکل باریکه لیزری فرودی را پس از شکست توسط عدسی نازک ساده دقیقاً پیش بینی می کند.

قانون عمومی انتشار لیزری. با تناظری که بین $R(z)$ و $\bar{q}(z)$ برقرار شد، می توانیم با استفاده از روشهای ماتریسی که در فصل ۴ به اختصار بیان کردیم دستوری ساده اما قوی برای انتشار باریکه لیزری در یک دستگاه اپتیکی اختیاری به دست آوریم.

شکل ۱۱-۲۲ را در نظر بگیرید که در آن یک پرتو فرودی با پارامترهای (y_1, α_1) به صفحه ورودی یک دستگاه اپتیکی اختیاری می تابد که با ماتریس دستگاه کل زیر توصیف می شود

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

همین پرتو پس از خروج از دستگاه دارای پارامترهای (y_2, α_2) است. شعاع انحنای R برای موج کروی معمولی را می توان به پارامترهای پرتو پیرامحوری مناسب آن، y و α ، با رابطه ساده زیر مربوط کرد

$$R = \frac{y}{\alpha} \quad (36-22)$$

از اپتیک ماتریسی می دانیم که وقتی پرتو ۱ توسط دستگاه اپتیکی به پرتو ۲ تغییر می یابد،

این تغییر را می‌توان با ماتریس دستگاه $ABCD$ به صورت زیر نمایش داد

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (۳۷-۲۲)$$

بنابراین، باید معادله‌های زیر صادق باشند

$$y_2 = Ay_1 + B\alpha_1 \quad \text{و} \quad \alpha_2 = Cy_1 + D\alpha_1 \quad (۳۸-۲۲)$$

از تقسیم معادله اول بر دومی و با استفاده از معادله ۳۶-۲۲، به دست می‌آوریم

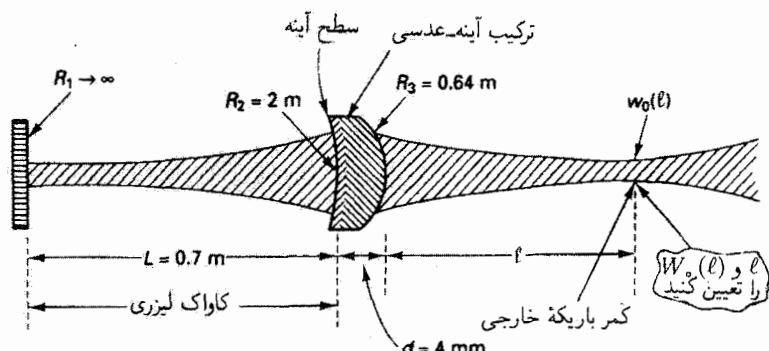
$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \quad (۳۹-۲۲)$$

برای گسترش معادله اساسی ۳۹-۲۲ به موج کروی گاوسی، کافی است $\bar{q}(z)$ را به جای $R(z)$ بگذاریم، و در نتیجه به دست می‌آوریم

$$\bar{q}_2 = \frac{A\bar{q}_1 + B}{C\bar{q}_1 + D} \quad : \text{قانون انتشار } ABCD \quad (۴۰-۲۲)$$

رابطه بین \bar{q}_1 و \bar{q}_2 در معادله ۴۰-۲۲ به ما امکان می‌دهد تا تغییر شکل باریکه لیزری را پس از اینکه از یک دستگاه اپتیکی اختیاری عبور کرد تعیین کنیم. تنها لازم است پارامتر باریکه فرودی (\bar{q}_1) را وقتی باریکه وارد دستگاه می‌شود و ماتریس 2×2 کل را که مشخص‌کننده دستگاه اپتیکی است بدانیم. معادله ۴۰-۲۲ در واقع یک نتیجه مفید و کارآمد است، و آن را غالباً قانون انتشار $ABCD$ برای باریکه‌های لیزری گاوسی کروی می‌نامند. به‌عنوان مثال، شکل ۱۲-۲۲ یک دستگاه لیزر نوعی را نشان می‌دهد که می‌توان قانون انتشار $ABCD$ را برای آن به کار برد. مسئله‌ای که در شکل ۱۲-۲۲ مطرح شده است تعیین مکان کمر باریکه خارجی l و اندازه لکه آن (l) است. واضح است که از معادله ۴۰-۲۲ وقتی می‌توانیم استفاده کنیم که مقدار \bar{q}_1 را در جایی در کاواک، مثلاً در آینه چپ (صفحه ۱)، و ماتریس $ABCD$ را برای دستگاه اپتیکی، که باید در نتیجه از آینه چپ تا ترکیب آینه-عدسی راست به صفحه عرضی شامل کمر باریکه بیرونی گسترش داده شود، بدانیم. آنگاه مقدار \bar{q}_2 که از معادله ۴۰-۲۲ محاسبه می‌شود هم l و هم w_0 را برای کمر باریکه متمرکز بیرونی به دقت تعیین می‌کند. خطوط کلی این حل را در مثال زیر می‌توان دید.

۱. چنانکه قبلاً اشاره شد و در مثال قبل از آن استفاده شد، می‌توان نشان داد انحنای جبهه‌های موج باریکه در آینه‌ها با انحنای سطوح آینه‌ها جور می‌شود.



شکل ۱۲-۲۲ هندسه یک دستگاه لیزر He-Ne. با پارامترهایی که برای دستگاه لیزر مشخص شده‌اند می‌توانیم از قانون انتشار ABCD برای تعیین مکان l و اندازه $w_0(l)$ مربوط به کمر باریکه در خارج از لیزر استفاده کنیم.

مثال

برای هندسه لیزر He-Ne که در شکل ۱۲-۲۲ داده شده است، با استفاده از قانون انتشار ABCD، اندازه لکه w_0 مربوط به کمر باریکه بیرونی و فاصله آن از سطح خارجی R_3 مربوط به ترکیب آینه-عدسی را به دست آورید. شعاع مختلط انحنای \bar{q}_1 را در آینه تخت در کاواک تعیین کنید. آنگاه یک ماتریس ABCD برای انتشار تا کمر باریکه بیرونی بسازید. شعاع مختلط انحنای \bar{q}_2 در کمر باریکه بیرونی را با استفاده از قانون انتشار ABCD،

$$\bar{q}_2 = \frac{A\bar{q}_1 + B}{C\bar{q}_1 + D}$$

تعیین کنید. آنگاه از این \bar{q}_2 اندازه لکه w_0 و مکان کمر باریکه را به دست آورید. مراحلی که در زیر ارائه شده‌اند به صورت یک طرح کلی هستند. جزئیات در مسائل مطرح خواهند شد.

(الف) رابطه‌ای برای \bar{q}_1 به دست آورید.

(ب) ماتریس ABCD را برای دستگاه اپتیکی از آینه تخت تا کمر باریکه بیرونی تعیین کنید.

(ج) از قانون انتشار ABCD برای مربوط کردن $\bar{q}_2(l)$ به \bar{q}_1 استفاده کنید.

حل: (الف) چون در آینه تخت $R_1 \rightarrow \infty$ ،

$$\frac{1}{\bar{q}_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{i\lambda}{\pi w_1^2} \rightarrow \frac{i\lambda}{\pi w_1^2} \quad \text{یا} \quad \bar{q}_1 = -\frac{i\pi w_1^2}{\lambda}$$

رابطه شعاع انحنای جبهه موج در R_2 — در R_2 انحنای جبهه موج با انحنای آینه جور شده است. با اندازه لکه w_1 در آینه تخت و فاصله z از آینه تخت تا آینه خمیده R_2 را با استفاده از معادله ۲۲-۲۳ می‌نویسیم:

$$R_2 = z_2 \left[1 + \left(\frac{\pi w_1^2}{\lambda z_2} \right)^2 \right]$$

که در آن $\lambda = 0.633 \times 10^{-6} \text{ m}$ ، $z_2 = 0.7 \text{ m}$ و $R_2 = 2.0 \text{ m}$. (توجه کنید که بنا به قرارداد علامت برای آینه‌های کاواک لیزری، برای آینه‌های مقعر به سمت کاواک R مثبت است، و در غیر این وضعیت R منفی است.) برای w_1 به دست می‌آوریم $w_1 = 4.38 \times 10^{-2} \text{ m}$. بنابراین، $\tilde{q}_1 = -i\pi w_1^2/\lambda = -0.952i$.

(ب) ماتریس دستگاه، از آینه تخت تا کمر باریکه بیرونی، عبارت است از

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{انتقال}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}}_{\text{شکست}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}}_{\text{شکست}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{انتقال}}$$

پس از انجام ضرب، داریم

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.53\ell & 0.7 + 0.63\ell \\ -0.53 & 0.63 \end{bmatrix}$$

(ج) با استفاده از نتایج قسمتهای (الف) و (ب)، یعنی

$$A = 1 - 0.53\ell, \quad B = 0.7 + 0.63\ell, \quad C = -0.53, \quad D = 0.63$$

$$\tilde{q}_1 = -0.952i, \quad R_2(\ell) \rightarrow \infty$$

و معادله ۲۲-۱۶،

$$\frac{1}{\tilde{q}_2(\ell)} = \frac{1}{R_2(\ell)} + \frac{i\lambda}{\pi w_2(\ell)^2}$$

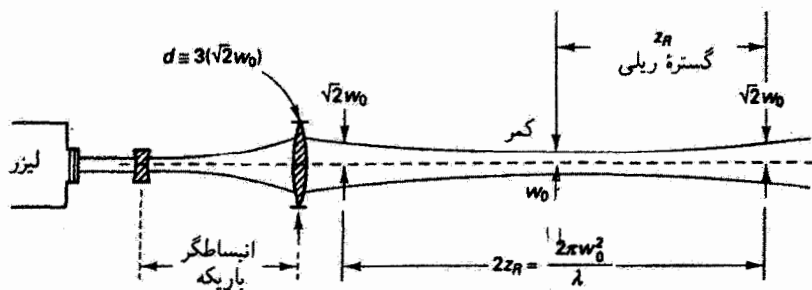
مقادیر مربوط را در قانون انتشار که در بالا داده شد جاگذاری می‌کنیم. با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و همچنین انگاری، پس از حل نتیجه می‌گیریم که $\ell = 0.6 \text{ m}$ و $w_2(\ell) = 0.54 \text{ mm}$. بنابراین، کمر باریکه بیرونی دارای اندازه لکه $w_2(\ell)$ به مقدار 0.54 mm واقع در فاصله 6 cm از سطح ترکیب آینه-عدسی R_2 است. ▲

موازی کردن باریکه گاوسی. باریکه لیزری موازی شده، چنانکه در شکل ۲۲-۱۳ نشان داده شده است، یک باریکه گاوسی با کمر دراز است. طول باریکه موازی شده، بنابه یک تعریف اختیاری، عبارت است از فاصله بین دو صفحه عرضی متقارن در دو طرف کمر باریکه به طوری که در این صفحه‌ها اندازه لکه $w(z)$ با ضریب $\sqrt{2}$ نسبت به اندازه لکه w_0 در کمر کاهش یافته است. در شکل ۲۲-۱۳، باریکه‌ای که از لیزر خارج می‌شود از یک انبساطگر باریکه نوع گالیله‌ای عبور می‌کند و کمر باریکه w_0 را در فاصله‌ای در سمت راست عدسی همگرا تشکیل می‌دهد. گستره ریلی Z_R بنابه تعریف عبارت است از فاصله بین کمر باریکه w_0 و صفحه عرضی که در آن $w(z) = \sqrt{2}w_0$ یا به طور معادل، جایی که مساحت عرضی باریکه دو برابر می‌شود. گستره ریلی را می‌توان با گذاشتن $\sqrt{2}w_0$ به جای $w(z)$ در معادله ۲۲-۲۴ و تعیین $Z = Z_R$ به دست آورد:

$$w(z) = \sqrt{2}w_0 = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda Z_R}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (41-22)$$

که از آن به دست می‌آوریم

$$Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{گستره ریلی}) \quad (42-22)$$



شکل ۲۲-۱۳ باریکه لیزری موازی شده و گستره ریلی Z_R متناظر.

بنابراین، ناحیه موازی‌شدگی دوگستره ریلی را، با کمر باریکه در وسط ناحیه، در بر می‌گیرد. چنانکه قبلاً در شکل ۸-۲۲ نشان داده شد، هر چه اندازه لکه w در کمر باریکه کوچکتر باشد باریکه پس از عبور از کمر سریعتر واگرا می‌شود و در نتیجه گستره ریلی، یا فاصله‌ای که در آن باریکه با قطر تقریباً ثابت و جبهه موج تخت موازی شده می‌ماند، کوچکتر است.

انتخاب ابزارهای اپتیکی شکل‌دهنده باریکه برای انتشار باریکه بهینه. باریکه‌های لیزری را غالباً از ابزارهای اپتیکی مانند آینه‌ها، عدسیها، انبساطگرهای باریکه، و تلسکوپها عبور می‌دهند. اگر بخواهیم این نوع "ابزارها" مقدار انرژی لیزری عبوری را به‌طور جدی محدود نکنند باید معیاری برای اندازه ابزار نسبت به اندازه لکه باریکه تعیین کنیم.

برای یافتن کسر توان فرودی که از یک گشودگی دایره‌ای (عدسی، میانبند، و غیره) به شعاع a می‌گذرد به نمایش باریکه گاوسی TEM_0 ، معادله ۲۲-۱۸، برای میدان الکتریکی در صفحه عمود بر باریکه باز می‌گردیم:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 e^{ik(x^2+y^2)/2R(z)} e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)} e^{i[kz+p(z)-\omega t]} \quad (18-22)$$

چون تابیدگی باریکه متناسب با مجذور دامنه میدان الکتریکی است، توان کل $\Phi_{کل}$ در باریکه از محاسبه انتگرال زیر به دست می‌آید

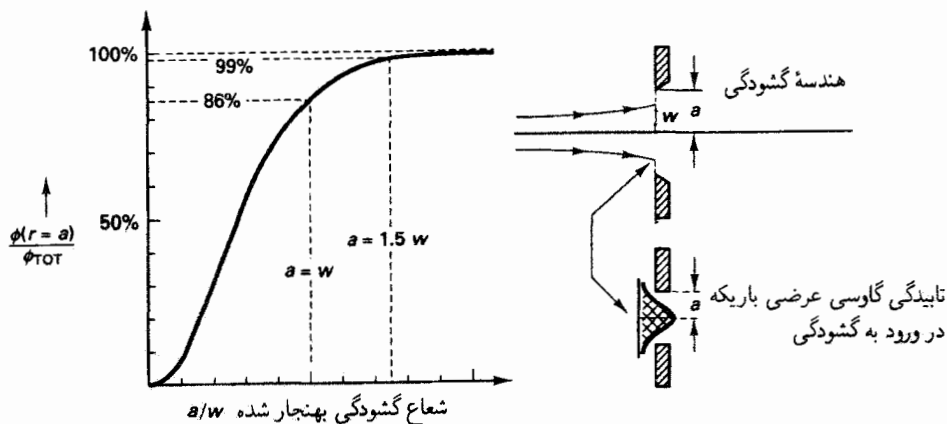
$$\Phi_{کل} = \iint_A |\vec{E}(x, y, z, t)|^2 dA = \iint_A E_0^2(z) e^{-2(x^2+y^2)/w^2(z)} dA$$

که در آن انتگرال‌گیری روی مساحت تمام مقطع عرضی باریکه انجام می‌شود. پس از انتگرال‌گیری، برای توان باریکه کل به دست می‌آوریم

$$\Phi_{کل} = [E_0(z)]^2 \frac{\pi [w(z)]^2}{4}$$

در اینجا $E_0(z)$ دامنه میدان الکتریکی در مرکز باریکه برای صفحه عرضی در z با اندازه لکه w است. بنابراین،

$$E_0(z) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \sqrt{\Phi_{کل}}$$



شکل ۲۲-۱۴ عبور توان نسبی باریکه گاوسی با اندازه لکه \$w\$ از گشودگی دایره‌ای به شعاع \$a\$.

با استفاده از معادله ۲۲-۱۸ و محاسبه توان نسبی \$\Phi_{کل} / \Phi(r=a)\$ می‌توان نسبتی که از گشودگی دایره‌ای به شعاع \$a\$ می‌گذرد، داریم

$$\Phi_{نسبی} = \frac{\Phi(r=a)}{\Phi_{کل}} = \frac{1}{\Phi_{کل}} \iint_{گشودگی} |\vec{E}(x, y, z, t)|^2 dA$$

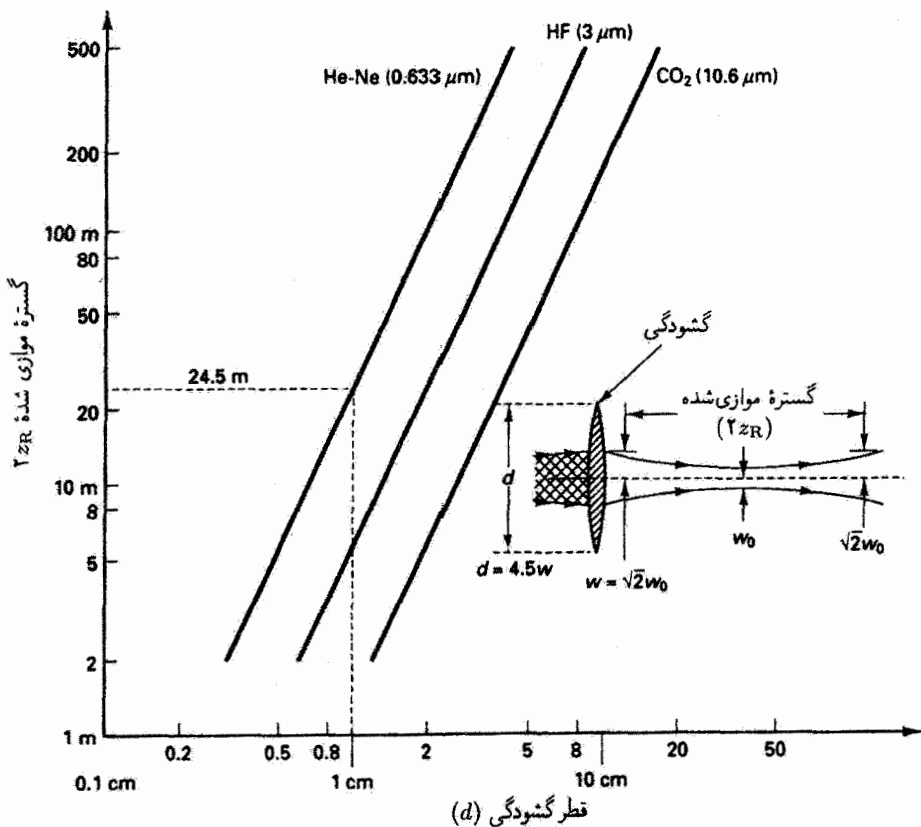
$$\Phi_{نسبی} = \frac{E_0^2(z)}{\Phi_{کل}} \int_0^a e^{-2r^2/w^2} (2\pi r dr)$$

و در نتیجه

$$\Phi_{نسبی} = 1 - e^{-(2a^2)/w^2} \quad (۲۲-۴۳)$$

توان نسبی \$\Phi(r=a)/\Phi_{کل}\$ که از گشودگی دایره‌ای به شعاع \$a\$ می‌گذرد برحسب نسبت \$a/w\$ که در آن \$w\$ اندازه لکه باریکه در مکان گشودگی است در شکل ۲۲-۱۴ نشان داده شده است. توجه کنید که وقتی شعاع گشودگی برابر با اندازه لکه است ۸۶٪ باریکه عبور می‌کند (۱۴٪ مسدود شده است)، در حالی که وقتی شعاع گشودگی به ۱٫۵ برابر اندازه لکه افزایش می‌یابد درست نزدیک به ۹۹٪ عبور می‌کند.

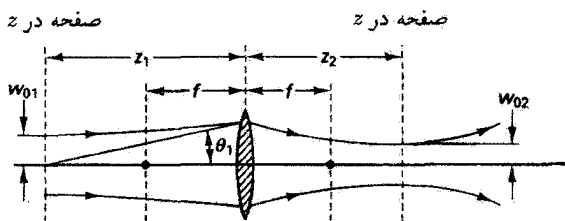
بدین ترتیب، اگر هر عنصر شکل‌دهنده باریکه که لیزری را در یک دستگاه اپتیکی معین عبور می‌دهد دارای قطری ۳ برابر اندازه لکه باریکه باشد (\$d = 3w\$) تقریباً ۹۹٪ باریکه می‌گذرد. اگر چه در \$d = 3w\$ تقریباً تمام توان عبور می‌کند، باید توجه کرد که اثرات پراش ناشی



شکل ۱۵-۲۲ گستره موازی شده Z_R برحسب قطر گشودگی d ، برای باریکه لیزری متمرکز در کمر w_0 با فرض قطر گشودگی $d = 4.5w_0$ که در آن $w = \sqrt{2}w_0$.

از گشودگی‌های دایره‌ای تیزلبه اثرات موجی روی نقش تابیدگی در میدان نزدیک و کاهش تابیدگی محوری در میدان دور حدود ۱۷٪ به وجود می‌آورند [۱]. برای خنثی کردن این اثرات پراش، گشودگی را گشادتر می‌کنند به طوری که $d \cong 4.5w_0$. ابزارهای اپتیکی شکل دهنده باریکه با قطرهایی که در معیار $d \cong 4.5w_0$ صدق می‌کنند اساساً ۱۰۰٪ توان باریکه را بدون تحمیل اثرات پراش اضافی روی باریکه عبور می‌دهند.

با معادله ۲۲-۴۲ برای گستره ریلی و معیار قطر گشودگی $d \cong 4.5w_0$ (عبور ۹۹٪) می‌توانیم گستره ریلی برای لیزرهای نوعی را به صورت تابعی از قطر گشودگی محاسبه کنیم. در شکل ۱۵-۲۲، نتایج برای لیزرهای He-Ne، HF (فلوئورید هیدروژن) و CO₂ روی نمودار لگاریتمی نشان داده شده‌اند. به عنوان مثال، اگر قطر گشودگی برابر باشد با $1 \text{ cm} = 4.5w_0$ ، طول باریکه موازی شده Z_R برابر است با ۲۴۵ m برای نور He-Ne در $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ و ۱۴۶ m برای نور CO₂



شکل ۱۶-۲۲. باریکه گائوسی با کمر w_{01} و نیم‌زاویه واگرایی باریکه θ_1 توسط عدسی نازک مثبت با فاصله کانونی f در کمر باریکه w_{02} به فاصله Z_2 متمرکز می‌شود.

$106.4 \mu\text{m}$. به‌ازای قطر گشودگی $w = 2 \text{ cm}$ ، 4.5 cm طول باریکه موازی شده، با افزایشی متناسب با مجذور قطر گشودگی، برای لیزر He-Ne برابر با 9.8 m و برای لیزر CO_2 برابر با 5.8 m می‌شود.

متمرکز کردن باریکه لیزری، اکنون مسئله متمرکز کردن باریکه لیزری گائوسی توسط یک عدسی با فاصله کانونی f را مطرح می‌کنیم. یک مورد نسبتاً کلی را انتخاب می‌کنیم که در آن باریکه‌ای با کمر باریکه w_{01} واقع در فاصله Z_1 از یک عدسی نازک مثبت در سمت چپ آن به عدسی فرود می‌آید و با کمر باریکه w_{02} واقع در فاصله Z_2 در سمت راست عدسی متمرکز می‌شود. هندسه مربوط در شکل ۱۶-۲۲ نشان داده شده است.

مسئله‌ای که پیش رو داریم این است: با داشتن کمر باریکه w_{01} و فاصله Z_1 در طرف فرود عدسی، کمر باریکه w_{02} و فاصله Z_2 در طرف تصویر عدسی را تعیین کنید. از قانون انتشار $ABCD$ ، معادله ۱۶-۲۲، استفاده می‌کنیم که در آن ماتریس $ABCD$ از صفحه عرضی Z_1 تا صفحه عرضی Z_2 را در بر می‌گیرد. این ماتریس به‌صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{Z_2}{f} & Z_1 + Z_2 - \frac{Z_1 Z_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{Z_1}{f} \end{bmatrix} \quad (۴۴-۲۲)$$

بنابراین، قانون انتشار $ABCD$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\bar{q}_2 = \frac{\left(1 - \frac{Z_2}{f}\right) \bar{q}_1 + \left(Z_1 + Z_2 - \frac{Z_1 Z_2}{f}\right)}{-\frac{1}{f} \bar{q}_1 + \left(1 - \frac{Z_1}{f}\right)} \quad (۴۵-۲۲)$$

با استفاده از معادلهٔ ۲۲-۱۹ که از آن داریم

$$\tilde{q}_1 = -i \frac{\pi w_{o1}^2}{\lambda} \quad (\text{در } Z_1) \quad \text{و} \quad \tilde{q}_2 = -i \frac{\pi w_{o2}^2}{\lambda} \quad (\text{در } Z_2)$$

و جاگذاری در معادلهٔ ۲۲-۴۵، یک معادلهٔ نسبتاً پیچیده شامل مجهولهای خواسته شدهٔ Z_2 و w_{o2} به دست می‌آوریم. پس از مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و همچنین انگاری، مجهولهای w_{o2} و Z_2 را به صورت‌های زیر از هم جدا می‌کنیم

$$\frac{1}{w_{o2}^2} = \frac{1}{w_{o1}^2} \left(1 - \frac{Z_1}{f}\right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\pi w_{o1}}{\lambda}\right)^2 \quad (۴۶-۲۲)$$

$$Z_2 = f + \frac{f^2(Z_1 - f)}{(Z_1 - f)^2 + (\pi w_{o1}^2/\lambda)^2} \quad (۴۷-۲۲)$$

از معادلهٔ ۲۲-۴۷ دیده می‌شود که برای مورد کلی، $Z_2 \neq f$. بنابراین، واضح است که باریکهٔ گاوسی الزاماً در صفحهٔ کانونی عدسی، یعنی در فاصلهٔ f در سمت راست عدسی، متمرکز نمی‌شود. اما می‌توانیم با استفاده از چند فرض عملی معادله‌های ۲۲-۴۶ و ۲۲-۴۷ را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده کنیم. ابتدا معادلهٔ ۲۲-۴۶ را در نظر می‌گیریم. اگر $w_{o1} \gg w_{o2}$ — یعنی از یک عدسی مثبت قوی در فرایند تمرکز استفاده شود — آنگاه جملهٔ اول در معادلهٔ ۲۲-۴۶ در مقایسه با جملهٔ دوم کوچک است و کمر باریکهٔ متمرکز w_{o2} با رابطهٔ تقریبی زیر داده می‌شود

$$w_{o2} \cong \frac{f\lambda}{\pi w_{o1}} = f\theta_1 \quad (۴۸-۲۲)$$

که در آن $\theta_1 \equiv \lambda/\pi w_{o1}$ با توجه به معادلهٔ ۲۲-۲۸ و اگرایی باریکهٔ تمام-زاویه است. اکنون به معادلهٔ ۲۲-۴۷ می‌پردازیم. اگر یک دستگاه فیزیکی داشته باشیم که برای آن $(Z_1 - f)^2 \gg \pi w_{o1}^2/\lambda$ — که وضعیت نادری نیست^۱ — آنگاه معادلهٔ ۲۲-۴۷ تبدیل می‌شود به

$$Z_2 \cong f \quad (۴۹-۲۲)$$

۱. در بسیاری از موارد، همچون جوشکاری لیزری، باریکه‌های لیزری را پیش از متمرکز کردن در یک لکهٔ کوچک ابتدا از لحاظ مقطع عرضی منبسط می‌کنند. در این موارد، کمر باریکهٔ w_{o1} می‌تواند از مرتبهٔ یک سانتیمتر یا کمتر باشد و در نتیجه اعتبار نامساوی $(Z_1 - f)^2 \gg \pi w_{o1}^2/\lambda$ تضمین می‌شود. (به عنوان مثال، مسئلهٔ ۲۲-۹ را ببینید.)

البته اگر کمر باریکه w_{01} در صفحه کانونی عدسی واقع باشد ($Z_1 = f$)، معادله ۲۲-۴۷ در هر وضعیتی به معادله ۲۲-۴۹ تبدیل می‌شود.

اگر فرض کنیم w_{01} تقریباً برابر با شعاع عدسی است، آنگاه با ضرب صورت و مخرج معادله ۲۲-۴۸ در ۲ و با استفاده از تعریف $f\# \equiv f/d$ برای عدد f عدسی که در آن d قطر عدسی است، به دست می‌آوریم

$$w_{02} = \frac{2f\lambda}{\pi(2w_{01})} = \frac{2\lambda f\#}{\pi} \quad (50-22)$$

بنابراین، به طور کلی هر چه $f\#$ (عدد f) عدسی متمرکزکننده کوچکتر باشد کمر باریکه در لکه متمرکز کوچکتر است.

۷-۲۲ باریکه‌های گاوسی مرتبه بالاتر

جواب برای باریکه لیزری گاوسی کروی، که قبلاً به صورت معادله ۲۲-۱۸ به دست آمد، مد الکترومغناطیسی عرضی پایینترین مرتبه — یعنی پایه — را که در کاواک لیزری بازپهلوی وجود دارد نمایش می‌دهد. مدهای دیگری — مدهای مرتبه بالاتر — وجود دارند که تغییر تابیدگی آنها در صفحه عرضی دارای نیمرخ گاوسی محض نیست. به بررسی اولیه خود در این فصل برمی‌گردیم و معادله ۲۲-۱۲ را که ابتدا در آنجا به صورت

$$\bar{U}(x, y, z) = E_0 e^{i\{p(z) + k(x^2 + y^2)\}/2\bar{q}(z)} \quad (12-22)$$

حس زدیم به معادله زیر تعمیم می‌دهیم

$$\bar{U}(x, y, z) = E_0 g\left(\frac{x}{w}\right) h\left(\frac{y}{w}\right) e^{i\{p(z) + (kr^2)\}/2\bar{q}(z)} \quad (51-22)$$

توابع $g(x/w)$ و $h(y/w)$ تغییرات پیچیده‌تری را برای تابیدگی باریکه با x و y نشان می‌دهند. با جاگذاری معادله ۲۲-۵۱ در معادله ۲۲-۱۱، که معادله تعریفگر برای \bar{U} است، به دست می‌آوریم

$$\underbrace{\frac{1}{w^2} \frac{g''}{g} + \frac{2ikx}{w} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{g'}{g}}_1 + \underbrace{\frac{1}{w^2} \frac{h''}{h} + \frac{2iky}{w} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{h'}{h}}_2 + \underbrace{\frac{2ik}{\bar{q}} - 2k \frac{\partial p}{\partial z}}_3 - \underbrace{\frac{k^2}{\bar{q}^2} (x^2 + y^2) \left(1 - \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right)}_4 = 0 \quad (52-22)$$

که در آن پریماها به معنی مشتق‌گیری نسبت به شناسه‌های g و h هستند.

بررسی معادله ۲۲-۵۲ نشان می‌دهد که به‌ازای یک z معین، یعنی یک صفحه عرضی معین، عبارتی که با آکولاد شماره ۱ مشخص شده است و آن را عبارت g می‌نامیم تابعی از تنها x است؛ عبارت شماره ۲ یا عبارت h تابعی از تنها y است؛ عبارت ۳ مستقل از x و y است؛ و عبارت ۴ متحد با صفر است زیرا رابطه $z = \bar{q} + \bar{q}_0$ قانون انتشاری است که آن را معتبر می‌دانیم. بنابراین، معادله ۲۲-۵۲ می‌تواند به‌ازای تمام x ها و y ها در یک z اختیاری صادق باشد تنها اگر (۱) عبارت g برابر با ثابتی مانند $-\lambda_1$ باشد، (۲) عبارت h برابر با ثابتی مانند $-\lambda_2$ باشد، و در نتیجه (۳) عبارت سوم برابر با $\lambda_1 + \lambda_2$ باشد. برای عبارت g می‌نویسیم

$$\frac{1}{w^2} \frac{g''}{g} + \frac{2ikx}{w} \left(\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{g'}{g} = -\lambda_1 \quad (53-22)$$

می‌توانیم با استفاده از معادله‌های ۲۲-۱۶ و ۲۲-۲۴ نشان دهیم که عبارت داخل پرانتز با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{i\lambda}{\pi w^2} \quad (54-22)$$

اگر از معادله ۲۲-۵۴ و تعویض متغیر $\xi = \sqrt{2}x/w$ در معادله ۲۲-۵۳ استفاده کنیم، بلافاصله معادله دیفرانسیل هرمیت زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\lambda_1 w^2}{2} g = 0 \quad (55-22)$$

این معادله دارای جواب است تنها اگر

$$\frac{\lambda_1 w^2}{2} = 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (56-22)$$

جوابهای معادله ۲۲-۵۵ چندجمله‌ایهای هرمیت هستند:

$$g(\xi) = H_m(\xi) = H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) \quad (57-22)$$

که در آن $H_m(\xi)$ را می‌توان به‌ازای هر m مجاز از تابع مولد زیر به‌دست آورد

$$H_m(\xi) = (-1)^m e^{\xi^2} \frac{d^m}{d\xi^m} (e^{-\xi^2}) \quad (58-22)$$

از معادله ۵۸-۲۲ برای $m = 0, 1, 2$ داریم

$$m = 0: H_0(\xi) = 1$$

$$m = 1: H_1(\xi) = 2\xi = \frac{2\sqrt{2}x}{w} \quad (59-22)$$

$$m = 2: H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 = \frac{4x^2}{w^2} - 2$$

با اعمال شرط (۲) برای عبارت h در معادله ۵۲-۲۲، به روشی یکسان با مورد عبارت g اما با استفاده از تعویض متغیر $\eta = \sqrt{2}y/w$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\lambda_2 w^2}{2} h = 0 \quad (60-22)$$

که معادله دیفرانسیل هرمیت است و جوابهای آن چندجمله‌ایهای هرمیت زیر هستند

$$h(\eta) = H_n(\eta) = H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (61-22)$$

که برای تمام n ها از معادله مولد ۵۸-۲۲ به دست می‌آیند.

پیش از بررسی اثراتی که توابع هرمیت $g(\xi)$ و $h(\eta)$ روی ماهیت عرضی تابیدگی باریکه دارند، پیامدهای شرط سوم که روی معادله ۵۲-۲۲ تحمیل می‌شود، یعنی

$$\frac{2ik}{\bar{q}} - 2k \frac{\partial p}{\partial z} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (62-22)$$

را بررسی می‌کنیم که در آن $\lambda_1 = 4m/w^2$ و $\lambda_2 = 4n/w^2$. توجه کنید که اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ که الزاماً به‌ازای $m = n = 0$ صادق است (معادله ۵۶-۲۲ را ببینید)، آنگاه $g(\xi) = h(\eta) = 1$ و به جواب موج کروی گاوسی محض باز می‌گردیم. در این مورد، معادله ۶۲-۲۲ به i/\bar{q} تبدیل می‌شود که همان معادله معرف برای p است که قبلاً به دست آمد، اما در مورد کلی که برای آن λ_1 و λ_2 صفر نیستند، معادله ۶۲-۲۲ باید باز هم معادله معرف برای تابع $p(z)$ باشد. آنگاه برای به دست آوردن رابطه‌ای برای $p(z)$ باید معادله زیر را حل کنیم

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{i}{\bar{q}(z)} - \frac{\lambda(m+n)}{\pi w(z)^2} \quad (63-22)$$

با جاگذاری $\bar{q}(z)$ از معادله ۲۲-۱۶ در معادله ۲۲-۶۳ و سپس $R(z)$ و $w(z)$ از معادله‌های ۲۲-۲۳ و ۲۲-۲۴، از معادله حاصل انتگرال می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$p(z) = \frac{i}{\gamma} \ln \left[\frac{\lambda^2 z^2 + (\pi w_0^2)^2}{(\pi w_0^2)^2} \right] - (m+n+1) \arctan \left[\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right] \quad (۶۴-۲۲)$$

با توجه به معادله ۲۲-۶۴، می‌توانیم جمله $e^{ip(z)}$ را به صورت زیر بنویسیم

$$e^{ip(z)} = \frac{w_0}{w(z)} e^{-i(m+n+1) \arctan(\lambda z / \pi w_0^2)} \quad (۶۵-۲۲)$$

که در آن برای ساده‌تر شدن صورت رابطه از معادله ۲۲-۲۴ برای $w(z)$ استفاده کرده‌ایم.

جوابهای باریکه هرमित-گاوسی. اکنون با جمع‌آوری نتایجی که برای \bar{q} ، φ و $g(\xi)$ و $h(\eta)$ به دست آوردیم و قرار دادن آنها در رابطه عمومی برای میدان الکتریکی $E(x, y, z, t)$ که ابتدا در معادله ۲۲-۹ معرفی کردیم، سرانجام به دست می‌آوریم

$$E(x, y, z, t) = E_0 \underbrace{\frac{w_0}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{\gamma} x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{\gamma} y}{w(z)} \right) e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}}_{\text{دامنه}} \underbrace{e^{ik(x^2+y^2)/\gamma R(z)} e^{i[kz - (m+n+1) \arctan(\lambda z / \pi w_0^2)]}}_{\text{فاز}} e^{-i\omega t} \quad (۶۶-۲۲)$$

این رابطه برای $E(x, y, z, t)$ مدهای مرتبه بالاتر و همچنین موج کروی گاوسی را (وقتی $m = n = 0$)، که قبلاً به دست آمد، در بردارد. اولین مجموعه جمله‌ها توصیفگر تغییر دامنه میدان الکتریکی در هر صفحه عرضی z است. چندجمله‌ایهای هرमित H_n و H_m تغییر ظریفتری نسبت به آنچه قبلاً جمله گاوسی محض به تنهایی یعنی

$$e^{-(x^2+y^2)/w^2}$$

توصیف می‌کرد ایجاد می‌کنند. هر چه اعداد درست m و n بزرگتر باشند تغییر دامنه عرضی انحراف بیشتری از تغییر گاوسی محض پیدا می‌کند. البته این اعداد درست مشخصه مدهای مرتبه بالاتر هستند.

مجموعهٔ دوم جمله‌ها، که یک فاز پیچیده است، ماهیت جبههٔ موج را به صورت تابعی از m و n توصیف می‌کند. باز هم می‌بینیم که به ازای $m = n = 0$ ، این جملهٔ فاز تبدیل می‌شود به صورت مشخصهٔ موج کروی گاوسی محض که قبلاً به دست آمد. می‌توان نشان داد که بسامد وابسته به یک مد باریکهٔ مرتبه بالاتر اختیاری با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f_{mnq} = \left[q + \frac{m+n+1}{\pi} \left(\arctan \frac{Z_T}{Z_R} - \arctan \frac{Z_1}{Z_R} \right) \right] \frac{c}{2L} \quad (۶۷-۲۲)$$

که در آن q عدد مد محوری است (نه شعاع مختلط انحنا)، m و n اعداد درست وابسته به چندجمله‌ایهای هرمیت H_m و H_n هستند، Z_1 و Z_T به ترتیب فاصله از کمر باریکهٔ داخل کاواک لیزری تا آینه‌های M_1 و M_T هستند، L طول کاواک بین آینه‌ها است، و Z_R گسترهٔ ریلی است. رابطهٔ عمومی برای $E(x, y, z, t)$ در معادلهٔ ۶۶-۲۲ را جواب باریکهٔ هرمیت-گاوسی معادلهٔ موج برای کاواک لیزری پایدار می‌نامند. هر باریکهٔ اختیاری را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از باریکه‌های هرمیت-گاوسی بسط داد که هر یک از آنها دارای قانون انتشار یکسان $z = \bar{q}_0 + z$ است.

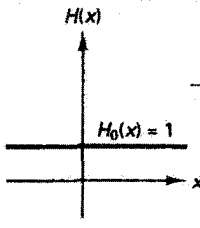
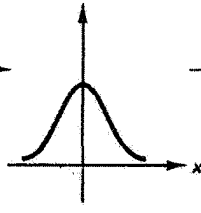
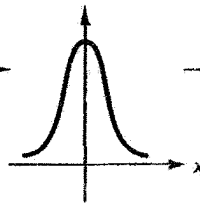

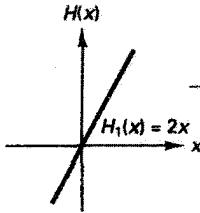
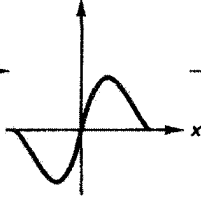
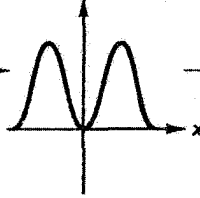
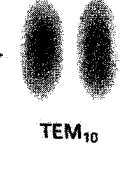
میدان و نقش تابیدگی برای باریکه‌های هرمیت-گاوسی. با استفاده از معادلهٔ ۶۶-۲۲ می‌توانیم میدان الکتریکی عرضی و تغییر تابیدگی را برای چند مد مرتبهٔ پایینتر m و n های کوچک ترسیم کنیم و در نتیجه ماهیت نقش "داغ" را پیش‌بینی کنیم.

معادلهٔ ۶۶-۲۲ را می‌توانیم، بدون نقض کلیت، با قرار دادن $w(z)$ به ازای یک صفحهٔ عرضی $z = z_0$ مساوی با $\sqrt{2}$ (واحد طول) ساده‌تر کنیم. بنابراین، شناسه‌های چندجمله‌ایهای هرمیت تبدیل به تنها x و y می‌شوند. به علاوه، با توجه به اینکه جملهٔ فاز در معادلهٔ ۶۶-۲۲ سهمی در تابیدگی ندارد، می‌توانیم صرفاً روابط تناسبی برای $E(x, y, z_0)$ و $|E(x, y, z_0)|^2$ را به صورتهای زیر بنویسیم

$$E(x, y, z_0) \propto H_m(x) H_n(y) e^{-(x^2+y^2)/2} \quad (۶۸-۲۲)$$

$$|E(x, y, z_0)|^2 \propto [H_m(x)]^2 [H_n(y)]^2 e^{-(x^2+y^2)} \quad (۶۹-۲۲)$$

شکل ۱۷-۲۲ چگونگی به دست آمدن نقشهای تابیدگی $|E(x, y, z_0)|^2$ برای تغییر در راستای x در صفحهٔ عرضی $z = z_0$ را نشان می‌دهد. بنابه تقارن، واضح است که نتایج یکسانی برای تغییر در راستای y به دست می‌آیند. در این شکل، توابع $H_m(x)$ ، $H_m(x) \exp(-x^2/2)$ و در

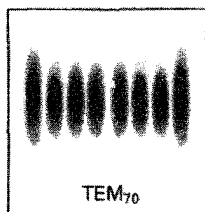
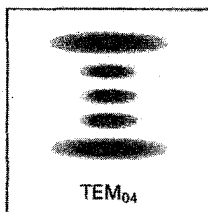
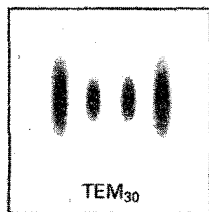
	چندجمله‌ای هرمیت $H_m(x)$	تغییر x میدان الکتریکی $H_m(x) e^{-x^2/2}$	تغییر x تابیدگی $[H_m(x) e^{-x^2/2}]^2$	نقش داغ برای صفحه (x, y)
$m = 0$				 TEM ₀₀
$m = 1$				 TEM ₁₀

شکل ۱۷-۲۲ میدان الکتریکی باریکه لیزری و تغییرات تابیدگی در راستای x برای دو مقدار از عدد درست هرمیت m . نقشهای داغ مربوط برای $m = 0, n = 0$ و $m = 1, n = 0$ نشان داده شده‌اند.

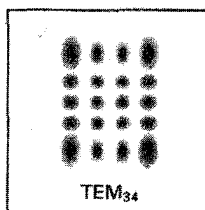
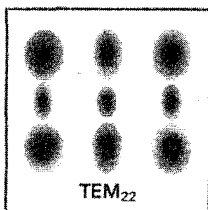
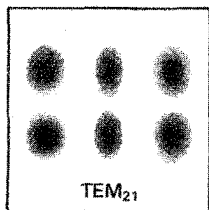
نهایت $[H_m(x) \exp(-x^2/2)]^2$ ، که مدرک مستقیمی برای نقش داغی که باید انتظار داشت به دست می‌دهد، به ازای $m = 0$ و $m = 1$ ترسیم شده‌اند.^۱

از بررسی شکل ۱۷-۲۲ دیده می‌شود که تعداد صفرهای تغییر تابیدگی در راستای x ، بدون احتساب صفرهای مربوط به ناحیه‌های دور پوش گاوسی، برابر با m است. بدین ترتیب، برای $m = 1$ ، تنها یک صفر در $x = 0$ و یک قله در هر طرف داریم. در راستای y ، همین نوع تغییر را برای تابیدگی $[H_n(y) \exp(-y^2/2)]^2$ باید انتظار داشته باشیم. از ترکیب تغییرات مربوط به x و y برای یک جفت m و n می‌بینیم که معادله ۶۹-۲۲ و همای آن برجسب y تابیدگی باریکه لیزری در صفحه عرضی را به طور یکتا تعیین می‌کنند. چنانکه در ابتدای این فصل گفته شد، این مدها را عموماً مدهای TEM_{mn} می‌نامند. وقتی $m = n = 0$ ، یک باریکه کروی گاوسی با تغییر گاوسی محض در تابیدگی داریم. وقتی $m \neq 0$ و $n \neq 0$ ، مدهای مرتبه بالاتر به دست می‌آیند. بعضی از نقشهای تابیدگی برای مقادیر کوچک اعداد درست هرمیت m و n که از معادله ۶۹-۲۲ و شکل ۱۷-۲۲ قابل پیش‌بینی هستند در شکل ۱۸-۲۲ نشان داده شده‌اند.

۱. برای اطمینان از درک آنچه شکل ۱۷-۲۲ نشان می‌دهد، در مسئله ۱۷-۲۲ از خواننده می‌خواهیم که سطر بعدی (مربوط به $m = 2$) را محاسبه کند.



۱۸-۲۲-۱۸



شکل ۱۸-۲۲ ترسیمهای نمایشگر نقشهای تابیدگی یا داغ برای چند مرتبه مختلف مدهای تشدیدگر اپتیکی هرمیت-گائوسی آنطور که در عکسبرداری از باریکه خروجی نوسانگر لیزری باید دیده شوند.

مسائل

۱-۲۲ الف) با شروع از معادله ۶-۲۲ مربوط به هندسه‌ای که در شکل ۲-۲۲ ترسیم شده است، نشان دهید که برای نقاط $r(x, y, z)$ نزدیک به محور انتشار، که در آنها $(x^2 + y^2) \ll R^2$ ، رابطه تقریبی زیر به دست می‌آید

$$r \cong R + \frac{x^2 + y^2}{2R}$$

ب) اکنون با استفاده از e^{ikr} (مقدار ثابت) $\times \bar{E}(x, y)_{z=R}$ و رابطه تقریبی برای r که در بالا داده شده است، نشان دهید

$$\bar{E}(x, y)_{z=R} \cong (\text{مقدار ثابت}) \times e^{ikR} e^{ik(x^2+y^2)/2R}$$

۲-۲۲ نشان دهید با جاگذاری $\bar{E}(r, t) = U(r)e^{i(kz - \omega t)}$ در معادله موج ۲-۲۲ معادله ۱۰-۲۲ به دست می‌آید.

۳-۲۲ یک لیزر هلیم-نئون TEM_{۰۰} ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) دارای کمر باریکه 0.5 mm در $z = 0$ (در $z = 0$) و واگرایی باریکه نیم‌زاویه $\theta = 4 \text{ mrad}$ است. در فاصله $z = 5 \text{ m}$ از کمر باریکه،

(الف) مقدار شعاع مختلط انحنای \bar{q} در کمر باریکه را به دست آورید؛

(ب) رابطه‌ای عددی برای شعاع مختلط انحنای \bar{q} بر حسب متر را از هر یک از روابط زیر

تعیین کنید

$$\frac{1}{\bar{q}} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad \text{و} \quad \bar{q} = z - i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

[راهنمایی: آیا صفحه عرضی در فاصله 5° m از کمر باریکه را می‌توان در میدان دور دانست؟

اگر چنین است، درباره R و z چه می‌توان گفت؟]

۴-۲۲ (الف) با استفاده از معادله‌های ۲۳-۲۲ و ۲۴-۲۲ در مسئله ۳-۲۲، $w(z)$ و $R(z)$ در 5° m $z = 5^\circ \text{ m}$ را به دست آورید.

(ب) آیا رابطه $R(z) \cong z$ در میدان دور درست است؟ آیا از رابطه $\tan \theta \cong w(z)/z$ که

در آن θ واگرایی باریکه نیم‌زاویه است، می‌توان به‌عنوان یک تقریب خوب برای تعیین $w(z)$ در 5° m $z = 5^\circ \text{ m}$ استفاده کرد؟

۵-۲۲ یک لیزر هلیوم-نئون TEM_{۰۰} ($\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$) دارای کاواکی است به طول 34 m که با یک آینه کاملاً بازتابنده به شعاع $R = 1^\circ \text{ m}$ (که قطر آن به سمت داخل کاواک است) و یک آینه خروجی به شعاع $R = 1^\circ \text{ m}$ (که این هم به سمت داخل کاواک تفرع دارد).

(الف) از تقارن هندسه‌های آینه‌ها و این شرط مرزی که جبهه موج و انحنای آینه در آینه‌ها جور هستند، مکان کمر باریکه در کاواک را تعیین کنید. صفحه مرجع $z = 0$ را در این مکان بگیرید.

(ب) کمر باریکه w_0 را به دست آورید.

(ج) اندازه لکه باریکه $w(z)$ را در آینه‌های چپ و راست کاواک محاسبه کنید.

(د) واگرایی باریکه نیم‌زاویه θ را برای این لیزر به دست آورید.

(ه) اگر از معیار $Z_{FF} \geq 5^\circ (\pi w_0^2 / \lambda)$ استفاده کنیم، میدان دور برای این لیزر در کجا قرار دارد؟

(و) اگر لیزر باریکه ثابتی با توان 5 mW گسیل کند، تابیدگی متوسط را در مکانی که

$Z_{FF} = 5^\circ (\pi w_0^2 / \lambda)$ به دست آورید.

۶-۲۲ ماتریس تبدیل پرتو متناظر با شکل ۱۲-۲۲ را برای عنصر خروجی لیزر، یعنی ترکیب آینه-عدسی با ضخامت 4 m 0.4° ، که در آن شعاع سطح آینه $|R_2|$ مساوی 2 m ، شعاع سطح عدسی $|R_3|$ مساوی 4 m 0.6° و ضریب شکست عدسی مساوی 1.5 است، بنویسید.

(الف) با استفاده از تعاریفی که در فصل ۴ برای ماتریسهای شکست و انتقال داده شده‌اند،

ماتریس $ABCD$ برای این عنصر را به صورت زیر بسازید

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{R_1 n'} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{R_2 n'} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$

مخصوصاً به معنی تغییرکننده n و n' برای دو شکست و به قرارداد علامت برای R_1 و R_2 در فرمولبندی ماتریسی توجه کنید. با تقریبهایی مربوط به گرد کردن، باید نتیجه زیر را به دست آورید

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0007 & 0,0027 \\ -0,5318 & 0,9979 \end{bmatrix}$$

(ب) چون مقدار $L = 0,004 \text{ m}$ در مقایسه با $|R_1| = 2 \text{ m}$ یا $|R_2| = 0,64 \text{ m}$ بسیار کوچک است، محاسبه $ABCD$ را با تعویض ماتریس انتقال با ماتریس یکه، یعنی

$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تکرار کنید. در این وضعیت، نتیجه ماتریس $ABCD$ را برای این "عدسی نازک" تعیین کنید.

۷-۲۲ (الف) چون عنصر خروجی توصیف شده در مسئله ۶-۲۲ اساساً یک عدسی نازک است، ماتریس $ABCD$ را که در مسئله ۶-۲۲ (ب) به دست می‌آید با ماتریس عدسی نازک یعنی

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

مقایسه کنید و فاصله کانونی این عنصر خروجی را به دست آورید.
(ب) با استفاده از فرمول فاصله کانونی عدسی نازک، یعنی

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

و با توجه دقیق به قرارداد علامت برای عدسی نازک، فاصله کانونی عنصر خروجی عدسی نازک را به دست آورید. نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را با هم مقایسه کنید.

۸-۲۲ با توجه به مثالی که درباره شکل ۱۲-۲۲ بیان شد،

(الف) رابطه‌ای برای \bar{q}_1 در آینه تخت تعیین کنید؛

(ب) معادله ۲۳-۲۲ را برای مقدار اندازه لکه w_1 حل کنید؛

(ج) مقداری عددی برای \bar{q}_1 به دست آورید؛

(د) \bar{q}_2 را از ضرب \bar{q}_1 در ماتریس $ABCD$ به دست آورید؛

(ه) ℓ و $w(\ell)$ را با استفاده از معادله ۱۶-۲۲ و \bar{q}_2 در قسمت (د) تعیین کنید.

۹-۲۲ (الف) با توجه به محاسبات مثال مربوط به شکل ۱۲-۲۲ که در آن کمر باریکه بیرونی در $m \cong 0.06$ با ℓ با اندازه کمر $w(\ell) = 0.54 \text{ mm}$ متمرکز شده است، از معادله‌های ۴۶-۲۲ و ۴۷-۲۲ همراه با شکل ۱۶-۲۲ مقادیر w_0 و z_2 را به دست آورید. این نتایج را با نتایجی که در آن مثال برای $w_0(\ell)$ و ℓ به دست آمده‌اند مقایسه کنید.

(ب) توضیح دهید که چرا در این مورد نمی‌توانیم از تقریبهای زیر استفاده کنیم

$$w_{0_2} \cong \frac{f\lambda}{\pi w_{0_1}} = f\theta \quad \text{و} \quad z_2 \cong f$$

۱۰-۲۲ باریکه لیزری متمرکز بیرونی TEM_{۰۰} را که در شکل ۱۲-۲۲ نشان داده شده است با کمر باریکه $w_0(\ell) = 0.54 \text{ mm}$ واقع در فاصله 0.06 m از عنصر خروجی در نظر بگیرید.

(الف) فاصله میدان دور را برای این کمر باریکه متمرکز بیرونی محاسبه کنید.

(ب) نیم‌زاویه واگرایی باریکه میدان دور را برای باریکه لیزری ناشی از کمر باریکه متمرکز به دست آورید.

(ج) یک انبساطگر باریکه $10 \times$ سر راه باریکه در فاصله $z = 30 \text{ m}$ پس از کمر باریکه متمرکز می‌گذاریم. اندازه لکه باریکه w را در جبهه ورودی و خروجی انبساطگر باریکه محاسبه کنید.

(د) اکنون یک عدسی نازک با فاصله کانونی 10 cm و قطر مناسب در فاصله 20 cm از جبهه خروجی انبساطگر باریکه قرار می‌دهیم. با توجه به شکل ۱۶-۲۲ و معادله‌های ۴۶-۲۲ و ۴۷-۲۲، z_2 و w_{0_2} را برای باریکه متمرکز جدید به دست آورید. آیا می‌توانستید از فرمولهای تقریبی $w_{0_2} \cong f\lambda/\pi w_{0_1}$ و $z_2 = f$ در این مورد استفاده کنید؟ چرا؟ محاسبات مربوط به فرمولهای دقیق و فرمولهای تقریبی چه نسبتی با هم دارند؟

$$\frac{\Phi(r=a)}{\Phi_{\text{کل}}} = \frac{1}{\Phi_{\text{کل}}} \iint_{\text{گشودگی}} |\bar{E}(x, y, z, t)|^2 dA$$

و معادله ۱۸-۲۲ برای $\bar{E}(x, y, z, t)$ ، با محاسبه انتگرال روی گشودگی دایره‌ای به شعاع $r = a$ نشان دهید توان نسبی باریکه لیزری TEM_0 که از گشودگی عبور می‌کند با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\frac{\Phi(r=a)}{\Phi_{\text{کل}}} = 1 - e^{-(2a^2)/w^2}$$

۱۲-۲۲ انتگرال زیر را روی تمام مقطع عرضی باریکه TEM_0 محاسبه کنید

$$\Phi_{\text{کل}} = \iint_{\text{گشودگی}} E_0^2(z) e^{-2(x^2+y^2)/w^2(z)} dA$$

و نشان دهید توان کل $\Phi_{\text{کل}}$ در این باریکه برابر است با

$$\Phi_{\text{کل}} = E_0^2(z) \frac{\pi w^2(z)}{2}$$

۱۳-۲۲ توضیح دهید چگونه می‌توان از یک گشودگی دایره‌ای قابل تنظیم (عنبیه) و یک توانسنج برای تعیین اندازه لکه w مربوط به باریکه لیزری TEM_0 در هر مکان در راستای باریکه استفاده کرد.

۱۴-۲۲ طولهای باریکه موازی شده $2Z_R$ را که در آن Z_R گستره ریلی است برای باریکه TEM_0 مربوط به لیزر Nd:YAG ($\lambda = 1.064 \mu\text{m}$) که توسط عدسیهایی با قطر گشودگی $d = 1 \text{ cm}$ ، 2 cm ، 3 cm و 5 cm متمرکز شده است به دست آورید. فرض کنید قطر عدسی d به کمر باریکه متمرکز w_0 با معادله $d = 4r_0(\sqrt{2}w_0)$ مربوط می‌شود. برای هندسه و محاسبات مشابهی که برای لیزرهای هلیم-نئون، فلوراید هیدروژن، و دی‌اکسید کربن TEM_0 انجام شده‌اند به شکل ۱۵-۲۲ مراجعه کنید.

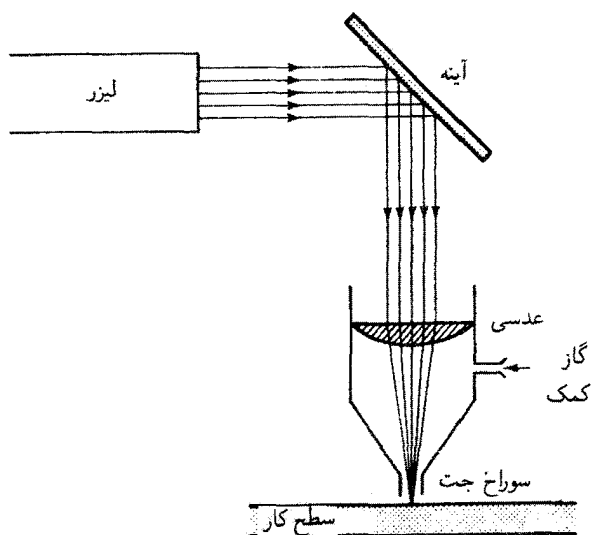
۱۵-۲۲ با توجه به تابع مولد $H_m(x)$ که در آن $\xi = \sqrt{2}x/w$ موارد خاص مربوط به $m = 0, 1, 2$ را که در معادله ۵۹-۲۲ داده شده‌اند تحقیق کنید.

۱۶-۲۲ با انجام تمام محاسبات لازم نشان دهید چگونه معادله ۲۲-۶۵ از معادله ۲۲-۶۴ نتیجه می‌شود.

۱۷-۲۲ در شکل ۲۲-۱۷، "جدول" را به مورد $m = 2, n = 0$ گسترش دهید. بدین ترتیب که در یک سطر سوم، در ستون ۱ منحنی $H_2(x)$ ، در ستون ۲ منحنی تغییر x میدان الکتریکی، در ستون ۳ منحنی تغییر x تابیدگی، و در ستون ۴ نقش داغ منتظره را ترسیم کنید.

مراجع

- [1] Siegman, Anthony E. *Lasers*. Mill Valley, Calif.: University Science Books, 1986. Ch. 16, 17.
- [2] Saleh, B. E. A., and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. New York: John Wiley and Sons, 1991. Ch. 3, 9.
- [3] Guenther, Robert. *Modern Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1990. Ch. 9.
- [4] Möller, K. D. *Optics*. Mill Valley, Calif.: University Science Books, 1988. Ch. 15.
- [5] Gerrard, A., and J. M. Burch. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1975.
- [6] Verdeyen, J. T. *Laser Electronics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1981.



۲۳

کاربردهای لیزر

وقتی می‌خواهیم کاربردهای جاری در حوزهٔ سریعاً متحولی مانند تکنولوژی لیزری را شرح دهیم باید این واقعیت مسلم را بپذیریم که این گونه اطلاعات تقریباً به همان سرعتی که ارائه می‌شوند کهنه می‌شوند. برای اطلاعاتی که در کتابهای درسی نوشته می‌شوند، کهنگی مخصوصاً مضطرب‌کننده است. با این همه، به نظر با ارزش می‌رسد که بعضی از کاربردهای مهم لیزرها را چنانکه امروز وجود دارند توصیف کنیم.^۱ این نوع کاربردها هم مفید بودن خواص قابل توجه نور لیزر را نشان می‌دهند و هم معرف تکنولوژی لیزری در اواسط دههٔ ۱۹۸۰ و اوائل دههٔ ۱۹۹۰ هستند.

مقدمه

به نظر می‌رسد که تنوع راههای استفاده از لیزرها تنها به خلاقیت و نبوغ انسان می‌تواند محدود شود. طی چند دههٔ اندکی که از اختراع لیزر می‌گذرد، این ابزار کاربردهای متعددی در صنعت، پزشکی، کشاورزی، ساختمان‌سازی، سرگرمی، مخابرات، و تسلیحات یافته است. به‌طور خلاصه،

۱. برای این ویرایش دوم، محتوای این فصل اساساً همان است که در ویرایش اول (۱۹۸۷) بیان شد. اما در آخرین فصل، به‌عنوان یک گزارش روز مختصر، مروری گزینشی از تکنولوژی لیزری و کاربردهای لیزر که در آغاز دههٔ ۱۹۹۰ به ظهور رسیده‌اند ارائه می‌کنیم.

جدول ۲۳-۱ رده‌بندی کاربردهای لیزر

لیزرها و اطلاعات	لیزرها و برهم‌کنشها
مخابرات	پردازش مواد
پردازش اطلاعات	برش
حسگری اپتیکی	جوشکاری
گستره‌یابی اپتیکی	مته‌کاری
ذخیره‌سازی اپتیکی	گرماپردازی
چاپگرها و تکثیرکننده‌ها	پزشکی
اندازه‌شناسی	نشانگذاری و حکاکی
هولوگرافی	تولید قطعات ریز
همردیف‌سازی	طیف‌نگاری لیزری
روبشگرهای فروشگاهی	انرژی رانش لیزری
سرگرمی و نمایش	تسلیحات

لیزر دنیای علم و تکنولوژی را با دقت چشمگیر خود تسخیر کرده است، و همچنان پیش می‌رود تا وسیله‌ای برای ابداعات هیجان‌انگیز در زمینه انفجاری تکنولوژی امواج نوری باشد.

البته خواص منحصر به فرد لیزر—تکفامی، یکسویی، همدوسی، و درخشایی—باعث مفید بودن و مقبولیت وسیع آن شده‌اند. در هر کاربرد از یک یا چند خاصیت لیزر برای رسیدن به یک هدف استفاده می‌شود. بیشتر کاربردهای لیزر را می‌توان به دو رده کلی تقسیم کرد: (۱) لیزرها و برهم‌کنشها، (۲) لیزرها و اطلاعات، که در جدول ۲۳-۱ فهرست شده‌اند. در مورد اول، لیزر با ماده برهم‌کنش می‌کند و باعث تغییرات مطلوبی می‌شود که دائمی یا موقتی هستند. در مورد دوم، از لیزر برای ارسال، آشکارسازی، ذخیره‌سازی، و پردازش اطلاعات استفاده می‌شود.

رده وسیع کاربردهایی که برهم‌کنش لیزرها با ماده در آنها دخالت دارد متشکل است از ماشینکاری صنعتی و پردازش مواد، استفاده‌های درمانی و جراحی در پزشکی، چشمه‌های انرژی، رانش لیزری، حکاکی، و تولید قطعات ریز در تکنولوژیهای نیم‌رسانا و رایانه. رده دوم که به همان وسعت است و به لیزرها و اطلاعات مربوط می‌شود شامل پردازش اطلاعات، حسگری و رده‌بندی اپتیکی، مخابرات نوری، سرگرمیها، چاپگرها و تکثیرکننده‌ها، اندازه‌شناسی، و تجهیزات ردیف‌سازی در ساختمان‌سازی و کشاورزی است. در این فصل چندین حوزه عمده کاربردهای لیزر از دو رده وسیع بالا را بررسی می‌کنیم.

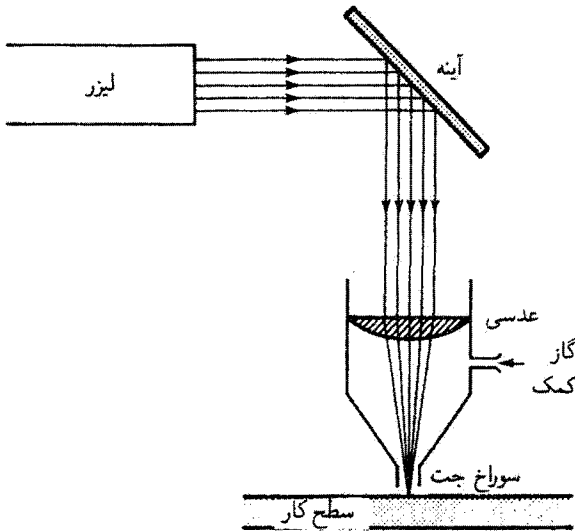
۲۳-۱ لیزرها و برهم‌کنش

باریکه لیزری با چگالی توان زیاد، یکسویی عالی، تکفامی، و خلوص همدوسی خود به‌طور مؤثری با مواد مختلف از راههای مختلف بسیار زیادی برهم‌کنش می‌کند. توانایی نور لیزر برای ایجاد تغییرات در ماده‌ای که با آن برخورد می‌کند لیزر را برای بسیاری از کاربردها، مخصوصاً در حوزه‌های پردازش مواد، پزشکی و گداز با باریکه لیزری، ایده‌آل ساخته است. در قسمتهای زیر بعضی از دستاوردهای مهمی را که با لیزرها در این زمینه‌ها محقق شده‌اند بیان می‌کنیم.

پردازش مواد. در پردازش صنعتی مواد، از لیزر برای برش، جوشکاری، مته‌کاری، سونش، منگنه کردن، و گرم‌پردازی اجسام گوناگونی استفاده می‌شود. لیزر برای این کارها یک چشمه ایده‌آل است زیرا انرژی گرمایی مناسب (فروسرخ) را در یک باریکه بسیار متمرکز فراهم می‌کند. باریکه لیزری را، که قابلیت انعطاف و تنظیم آسان دارد، به‌منظور فرستادن توان لیزری شدید، به‌طور دقیق و مکرر، روی تقریباً هر هدف یا سطح کار می‌توان به شکل بهینه‌ای در آورد. وقتی در نظر بگیریم که یک لیزر 50°kW با واگرایی باریکه 1 mrad را می‌توان برای تولید چگالی توان 10^{12} W/cm^2 روی هدف متمرکز کرد، فوراً جذابیت لیزرها در پردازش مواد را احساس می‌کنیم.

لیزر دی‌اکسید کربن گازی (CO_2) با گسیل در $10.6 \mu\text{m}$ و لیزر نئودیمیم حالت جامد (Nd : YAG) با گسیل در $1.06 \mu\text{m}$ ، دو لیزری هستند که برای تغییر مواد و سطوح فراوان به‌کار می‌روند. متداولترین کاربردهای لیزرها در پردازش مواد معمولاً شامل فلزات در برش، جوشکاری و گرم‌پردازی می‌شوند. البته لیزرها به‌طور روزافزونی در پردازش و تولید انبوه پلاستیکها و سایر مواد غیرفلزی به‌کار می‌روند. لیزرها مخصوصاً با فرایندهای تولید خودکار و رایانه‌ای سازگار هستند، زیرا می‌توان آنها را برای حرکت روی سطح قطعه کار و اجرای عملیات برش و جوشکاری با کنترل رایانه‌ای برنامه‌دهی کرد. ماهیت قابل انعطاف لیزرها مخصوصاً آنها را برای تولید نمونه‌ها مناسب ساخته است. به‌عنوان مثال، یک سازنده خودرو می‌تواند داشبوردی از نوعی پلاستیک روی رایانه طراحی کند و بعداً یک لیزر را برای در آوردن دقیق طرح مورد نظر توسط رایانه هدایت کند.

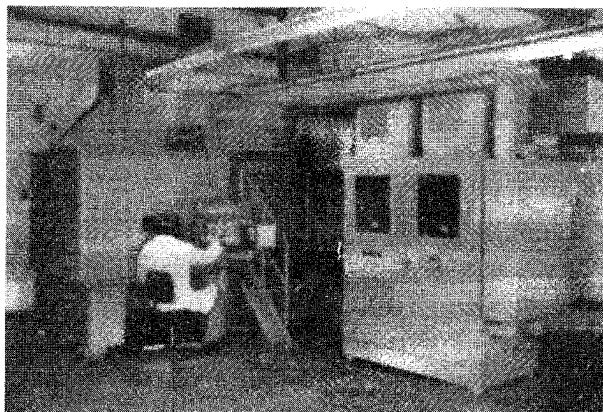
هزاران لیزر با توانهای خروجی که به ترازهای کیلووات می‌رسند روزانه در کاربردهای پردازش مواد به‌کار برده می‌شوند. از لیزرها برای اجرای جوشکاری دقیق روی گستره وسیعی از اجزای کوچک، مانند مهرموم کردن قطعات الکترونیکی بدون منفذ استفاده می‌شود. از لیزرها در جوشکاری قسمتهای انتقال خودرو برای افزایش توان تولید استفاده می‌شود. لیزرها در جوشکاری مجتمعهای ساختمانی برای ارتقای کنترل کیفیت به‌کار می‌روند. لیزر در کارگاهها برای برش دقیق و اقتصادی ورقهای فلزی به‌کار می‌رود. همچنین از لیزر برای ایجاد برشهای دقیق و سریع در پلاستیکها، لاستیک، کاغذ، پارچه و چوب استفاده می‌کنند.



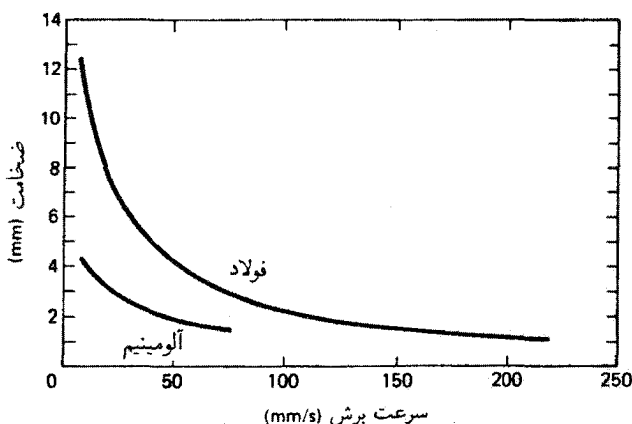
شکل ۱-۲۳ دستگاه تحویل ثابت-باریکه لیزری برای عمل برش.

در صنایع خودرو و هواپیما، مته‌کاری بدون تماس توسط لیزر یک فرایند تولید حساس است. سوراخهای دقیق و قابل تکرار برای کنترل شارش هوا و مایع در مؤلفه‌های بادی و هیدرولیک به‌طور کلی با باریکه‌های لیزری دقیقاً کنترل شده ایجاد می‌شوند. گرم‌پردازی موضعی سطوح فلزی که در معرض ساییدگی و خستگی هستند با فرایندهای سخت‌سازی و غلافکاری لیزری انجام می‌شوند. حکاکی لیزری در مواد شکننده ماشین مانند سرامیک پخته یا قرص سیلیسیم با موفقیت به‌کار برده می‌شود. تنظیم دقیق میکرومدارها و شبکه‌های مقاومت، که کار صنعتی مهمی است، با لیزرها به آسانی انجام می‌شود. از لیزرهای کم‌توان برای تراز کردن، اندازه‌گیری و آشکارسازی درزها در کاربردهای گوناگون استفاده می‌شود. لیزرها همچنین وسیله مناسبی برای نشانگذاری هزاران قسمت به‌منظور شناسایی و مرتب‌سازی فراهم می‌کنند.

فرایند برش لیزری یک کاربرد معمولی لیزر در صنعت است. شکل ۱-۲۳ یک رسام خط از دستگاه ساده تحویل ثابت-باریکه لیزری با جت-گاز معین را برای کاربرد برش لیزری نشان می‌دهد. گاز معین برای "پف کردن" ماده در بریدگی و در عین حال تقویت فرایند سوزاندن و ذوب کردن به‌کار می‌رود. دستگاه لیزر واقعی کمتر شباهتی به طرح شکل ۱-۲۳ دارد. یک مرکز ماشینکاری لیزری که می‌تواند قطعاتی تقریباً با هر نوع هندسه را تحت شرایط ناسازگار برش دهد، مته کند، و جوشکاری کند در شکل ۲-۲۳ نشان داده شده است. تجهیزاتی که با لیزر همراهند به‌منظور تولید توان زیاد که برای به‌کار انداختن لیزر لازم است به‌کار می‌روند.



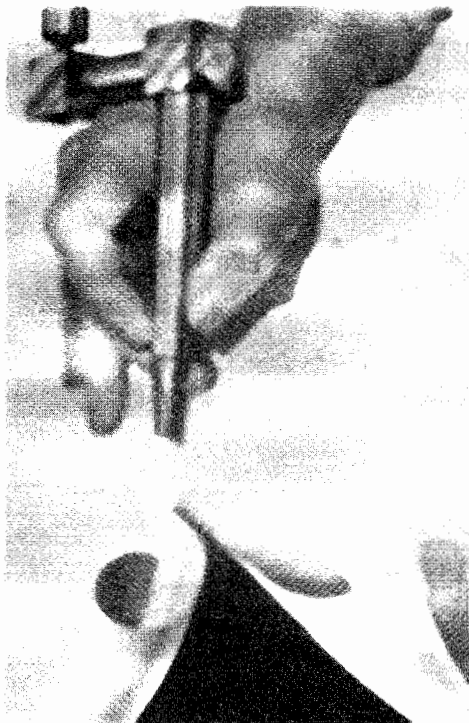
شکل ۲-۲۳ یک مرکز ماشینکاری لیزری برای کارهای سنگین که مته کردن، برش دادن و جوشکاری قطعاتی با تقریباً هر نوع هندسه را ممکن می‌سازد.



شکل ۳-۲۳ داده‌های کاری نوعی برای یک لیزر صنعتی پرتوان که در عملیات برش فلز به‌کار می‌رود.

شکل ۳-۲۳ یک منحنی نوعی برای کار برش لیزر صنعتی پرتوان را نشان می‌دهد. نمودار نشان‌دهنده ضخامت بریدگی فلز به‌صورت تابعی از سرعت خطی لیزر در عمل برش است. جالب‌توجه است که لیزری که در تولید داده‌های شکل ۳-۲۳ از آن استفاده شده است می‌تواند، در هر سرعت برش مفروضی، فولاد را آسانتر از آلومینیم برش دهد. به‌عنوان مثال، در سرعت برش 50 mm/s ، لیزر مورد نظر 4 mm فولاد و 2 mm آلومینیم را می‌برد.

از لیزرها چه در برش، مته‌کاری یا جوشکاری استفاده شود چه در کارهای خاص بیشمار دیگر، آشکار است که لیزرها ناگزیر به صنعت و فرایند تولید پیوسته شده‌اند. ائتلاف لیزرها با روباتها نمایشگر یکی از کاربردهای صنعتی نوین لیزر است که اکنون در مراحل اولیه پیشرفت است.



شکل ۲۳-۴ لیزرها در دست پزشکان به دنیای پزشکی وارد شده‌اند.

امروزه، صنعت تولید در حال تهیه دستگاه‌های عظیمی است که لیزرهای پرتوان CO_2 و هم Nd : YAG را با واحدهای روبات متحد کرده‌اند. به عنوان مثال، در یک کارخانه خودروسازی بزرگ، یک لیزر CO_2 ۵۰۰ واتی با یک روبات خط پیوند کار می‌کند تا قابهای داشبورد را از مواد زائد، به طور مکرر و مؤثر، با کنترل کیفیت زیاد تراش دهد. تا وقتی لیزرها و روباتها با هم کار می‌کنند این‌گونه کاربردها چندین برابر خواهند شد.

پزشکی. در عمل ثابت شده است که باریکه لیزری — به عنوان تیغ نوری — می‌تواند بافت‌های انسان را ببرد، تبخیر کند، پاره کند، جوش بدهد، ببندد، بسوزاند، منعقد کند، باز کند و التیام دهد. به عنوان مثال، در فصل ۷ نسبتاً به تفصیل دیدیم که چگونه از لیزرها برای معالجه معایب چشم استفاده می‌کنند. لیزریکی از تازه‌ترین تجهیزات اتاق‌های عمل بیمارستانها و مراکز درمان سرپایی است که به صورت ابزار جراحی مفید غیر تخریبی پدیدار شده است (شکل ۲۳-۴ را ببینید).

لیزرهایی که امروزه در پزشکی به عنوان ابزارهای تشخیصی و درمانی به‌کار برده می‌شوند، همراه با داده‌های وابسته درباره طول موج، تراز توان نوعی و استفاده اصلی پزشکی در جدول ۲۳-۲

جدول ۲۳-۲ انواع لیزرها در پزشکی

نوع لیزر	طول موج	تراز توان	مورد استفاده
اکسایمر فلوئورید آرگون	(نامرئی، فرابنفش) ۱۹۳ nm	نبی، ۱ J/cm^2 ، با پهنای تپ حدود	برش و تجزیه نوری (چشم پزشکی، کاردیولوژی، معاینه مفاصل)
فلوئورید کریتون	(نامرئی، فرابنفش) ۲۴۸ nm	$۱۰ \text{ ns} (\cong ۱۰^8 \text{ W/cm}^2)$	انعقاد نوری
یون آرگون	(مرئی، فیروزه‌ای) ۴۸۸ nm	پیوسته تا ۱۰ W	جوش دهی تبخیر (پوست، چشم پزشکی جراحی عمومی) فعال سازی نوری
رزینی کوکئیدیر (دمیده با لیزر یون آرگون)	(مرئی، سرخ) ۶۳۱ nm	پیوسته ۳-۴ W (درمان تومورها)	انعقاد نوری
Nd : YAG	(نامرئی، فروسرخ) $۱۰۶ \mu\text{m}$	پیوسته تا حداکثر ۶۰-۱۰۰ W	تبخیر سوراخ کردن (چشم پزشکی گوارش پوست اورولوژی، و تومورها)
دی اکسید کربن (CO ₂)	(نامرئی، فروسرخ) ۱۰۶۰ nm	پیوسته تا ۸۰ W	تبخیر بافتی، برش، در آوردن (پوست زنان گوارش جراحی اعصاب)

فهرست شده‌اند. چنانکه این جدول نشان می‌دهد، پنج نوع لیزر که بیشتر از همه در حوزه‌های پزشکی به‌کار برده می‌شوند عبارت‌اند از لیزر اکسایمر، لیزر یون آرگون، لیزر YAG : Nd، لیزر CO₂، و لیزر رزینی کوکبذیر. لیزرهای اکسایمر [فلوئورید آرگون (ArF) و فلوئورید کریبتون (KrF)] انرژی لیزری نامرئی را در فرابنفش زرف گسیل می‌کنند. لیزرهای YAG : Nd و CO₂ انرژی لیزری را در طرف دیگر طیف اپتیکی، یعنی فروسرخ نزدیک و دور که باز هم نامرئی است، گسیل می‌کنند. لیزر یون آرگون باریکه مرئی (فیروزه‌ای) گسیل می‌کند که می‌توان آن را دید و در نتیجه کار با آن و کوک کردن آن آسانتر است. لیزر رزینی کوکبذیر، اگر چه به‌طور کلی دارای توان خروجی بسیار کمی است، باریکه‌ای گسیل می‌کند که شامل طول موجهایی است که از انتهای بنفش ناحیه مرئی (۴۰۰ nm) تا فروسرخ نزدیک (۹۰۰ nm) گسترده‌اند. برای لیزرهای "نامرئی"، باریکه‌های هدفیاب — عموماً لیزرهای He-Ne — برای تسهیل کار و تمرکز توأمأً به‌کار برده می‌شوند.

لیزر CO₂، یکی از اولین لیزرهایی که در پزشکی به‌طور وسیعی به‌کار برده شد، انرژی فروسرخ را در $106\mu\text{m}$ گسیل می‌کند که تقریباً تماماً توسط آب جذب می‌شود. چون ۷۰ تا ۹۰٪ یاخته‌ها و بافت‌های بدن را آب تشکیل می‌دهد، لیزر CO₂ می‌تواند برش تمیزی ایجاد کند یا، اگر تمرکز آن تیزتر باشد، می‌تواند بافت بدخیم را تبخیر کند. چون لیزر همچنانکه برش می‌دهد مویرگ‌ها را می‌سوزاند و می‌بندد، جراحی اساساً بدون خونریزی است. یک اشکال لیزرهای CO₂، تا به امروز، دشواری کاربرد آنها در تارهای نوری است؛ انتقال باریکه از لیزر تا سطح هدف غالباً با بازوهای اپتیکی مفصلدار و پر زحمت انجام می‌شود.

برخلاف لیزر CO₂، باریکه لیزر YAG : Nd در $106\mu\text{m}$ و باریکه لیزر یون آرگون در ۴۸۸ nm با تارهای نوری خوب کار می‌کنند. در اینجا انرژی لیزری به آسانی از چشمه لیزری، بدون اتلاف توان چندانی، به تخت عمل منتقل می‌شود. با استفاده از دستگاه‌های قابل انعطافی که از تلفیق باریکه‌های لیزری و نمایانگرهای نورتاری (آندوسکوپها) حاصل شده‌اند، جراحان می‌توانند، به‌عنوان مثال، جراحی عمده‌ای در شکم از راه یک بریدگی به کوچکی ۱ اینچ انجام دهند.

باریکه فیروزه‌ای لیزر یون آرگون از این لحاظ یکتا است که توسط اجسام سرخ و قهوه‌ای، مانند گوچه‌های سرخ خون و لکه‌های تیره، به‌طور گزینشی جذب می‌شود، و بنابراین می‌تواند خونریزی شبکه‌ای را متوقف کند (انعقاد نوری) و شبکه‌ی جدا شده را جوش دهد. این باریکه می‌تواند با نفوذ در لایه بالایی بدون رنگدانه پوست، بی‌آنکه صدمه‌ای بزند، خالها و لکه‌های مادرزادی را از بین ببرد.

لیزر YAG : Nd، با نمایانگر نورتاری، نیز به‌طور مؤثری در عملیات انعقاد نوری — مهار یا توقف خونریزی زخمها و غده‌های بزرگ یا رگهای عمق بدن — به‌کار می‌رود. از این لیزر برای بستن رگهای کوچک خونبار شبکه‌ی و در نتیجه درمان پارگی شبکه‌ی که غالباً منجر به کوری می‌شود تا

جدول ۲۳-۳ حوزه‌های پزشکی شامل لیزرها

حوزه‌های جاری عمل	حوزه‌های آینده عمل
چشم‌پزشکی (چشم)	جراحی اعصاب
زنان (دستگاه تناسلی زنان)	گوش و حلق
یوست	پا
قلب (قلب و عروق)	کلیه‌ها و مجاری ادرار (دستگاه ادراری)
گوارش (روده‌ها)	دندان‌پزشکی (دندان)
سرطان (غده‌ها و یاخته‌ها)	

حدی با موفقیت استفاده شده است. برای انجام این کار، باریکه لیزر Nd : YAG را با قطر $1/1000$ in متمرکز می‌کنند.

باریکه لیزر Nd : YAG را در یکی از کاربردهای تازه آن در یک لکه ۳۰ میکرومتری داخل چشم متمرکز کرده‌اند. با متمرکز شدن توانهای بیشتر از یک بلیون وات بر سانتیمتر مربع، شکست پلاسمایی در ماده زجاجیه چشم روی می‌دهد. امواج شوک آکوستیکی پسین باعث قطع غشاهای کدر شده نامطلوب در امتداد محور دید چشم می‌شوند. این مثال بی‌نظیر از جراحی غیر تخریبی بدون درد با دقت بیشتری در فصل ۷ بررسی شد.

این اواخر، لیزرهای Nd : YAG و اکسایمر را در مقابله با تصلب شرائین (سخت شدن شریانها) و بسته شدن وخیم رگهای قلب آزمایش کرده‌اند. همچنین، با نمایانگرهای نورتاری ظریف، که با دقت و آهسته به درون رگهای بزرگ پیش‌برده می‌شوند، رسوبات چربی و جرمها را به معنی دقیق کلمه منفجر می‌کنند. این فن، گرچه امیدبخش است، اما هنوز از مرحله آزمایش نگذشته است. در جدول ۲۳-۳ حوزه‌های عمده پزشکی که در آنها امروزه از لیزر استفاده می‌شود یا در آینده ممکن است از این وسیله استفاده شود، به‌طور خلاصه فهرست شده‌اند. با نگاهی به این جدول تعدد عضوهایی از بدن که در این حوزه‌ها قرار می‌گیرند معلوم می‌شود و به‌وضوح می‌بینیم لیزر تا چه حد در معالجه بیماریهای انسان دخالت دارد یا خواهد داشت. آشکار است که تقریباً هر قسمت مهم بدن، بزرگ یا کوچک، می‌تواند از یکی از انواع لیزر درمانی برخوردار باشد.

گداخت لیزر-القایی. استفاده از یک چشمه انرژی پایان‌ناپذیر از مدتها قبل هدف دانشمندان بوده است. با درک پدیده‌های گرمایسته‌ای و گداخت که در اوایل دهه ۱۹۵۰ کشف شدند، به نظر می‌رسید که دستیابی به این هدف اندکی نزدیکتر شده است. در واکنش گداخت هسته‌ای مشهور

بالا می‌رود. این شرایط اگر برای ۱ ps برقرار باشند منجر به واکنش گداخت و رهایی مقدار عظیمی انرژی در هر واکنش می‌شوند.

امروزه، لیزر CO_2 ($10.6 \mu\text{m}$) و لیزرهای Nd : YAG (یا شیشه-نئودیمیم $1.06 \mu\text{m}$) در ترکیب با هم برای تاباندن به گویهای D-T به‌کار می‌روند. تکنولوژی گداخت لیزر CO_2 در آزمایشگاه ملی آلاموس در نیومکزیکو در دست توسعه است؛ تکنولوژی Nd : YAG و یا شیشه-نئودیمیم در آزمایشگاه ملی لاورنس لیورمور در کالیفرنیا دنبال می‌شود. خروجی توان لیزری دستگاههای نئودیمیم-شیشه NOVA به تراز باور نکردنی ۱ تریلیون وات رسیده است که از NOVA قویترین لیزر در کار را ساخته است. با این‌همه، هم آزمایش و هم نظریه نشان می‌دهند که طول موجهای کوچکتر از $1 \mu\text{m}$ مزیت‌های بسیاری در تولید موج تراکمی دارند. به همین دلیل، آزمایشهای گداخت لیزری اخیر در طول موجهای $53 \mu\text{m}$ و $35 \mu\text{m}$ انجام شده‌اند. این آزمایشها، موافق با پیش‌بینیهای نظری، کارایی طول موجهای کوچکتر را در گیرانش و فرایند سوزش گرما هسته‌ای تأیید می‌کنند. انتظار می‌رود که لیزرهای طول موج کوچکتر—لیزرهای اکسایمر یا لیزرهای الکترون آزاد—نقش مهم روزافزونی در گداخت لیزری داشته باشند. اگر روزی گداخت لیزری از لحاظ اقتصادی عملی شود، یکی از شیرین‌ترین رؤیاهای انسان، تهیه نامحدود انرژی، تحقق خواهد یافت.

۲۳-۲ لیزرها و اطلاعات

ما در عصر انفجار اطلاعات زندگی می‌کنیم. رایانه‌ها دسترسی فوری به منابع جهانی اطلاعات، موجود در خزائن غنی داده‌ها، را ممکن ساخته‌اند. در میان همه آنها، لیزرها نقش اصلی را دارند. آنها در دستگاههایی به‌کار می‌روند که اطلاعات را روبش، حس، چاپ، منتقل و ذخیره می‌کنند. چاپگرهای لیزری و روبشگرهای واریسی هم اکنون در بازار یافت می‌شوند. حسگرهای لیزری برای آشکارسازی آلودگی، سرعت باد، و نقشهای هواسنجی جهانی به‌کار برده می‌شوند. لیزرها و کابل‌های تار نوری تکنولوژیهای مخابراتی را تغییر می‌دهند. لیزرها و هولوگرامها به سمت یک دستگاه کارآمد ذخیره‌سازی و واخوانی مقادیر فراوان اطلاعات پیش می‌روند. در اینجا کاربردهای لیزر در پردازش اطلاعات را به اختصار بررسی می‌کنیم.

مخابرات لیزری. ظرفیت یک مجرای مخابراتی با پهنای Δf مربوط به نوار بسامد آن متناسب است. حتی با نور بسیار تکفام، که برای آن $\Delta f/f$ بسیار کوچک است، پهنای نوار Δf وقتی می‌تواند بزرگ باشد که f بسیار زیاد باشد. بدین ترتیب، یک دستگاه مخابراتی که از امواج نور استفاده می‌کند، که در آن بسامدهای مرکزی f فوق‌العاده بزرگ و حدود 10^{14} Hz هستند، باید اصولاً اطلاعاتی چندین برابر ظرفیت دستگاههای رادیو و میکروموج، که در بسامدهای مرکزی بسیار

کمتری کار می‌کنند، حمل کند. به علاوه، اگر نور تکفام را بتوانیم همدوس کنیم تمام اجزاء لازم برای مخابرات نوری را در دست داریم. وقتی لیزر در دهه ۱۹۶۰ وارد صحنه شد یک جواب دوخته بر قامت شرایط لازم برای تکفامی، همدوسی و پهنای نوار وسیع فراهم شد. اکنون پس از گذشت حدود ۳۰ سال، که تکنولوژی مخابرات لیزری جایگاه خود را تثبیت کرده است، این امید در راه تحقق یافتن است.

مقدار زیادی اطلاعات در فواصل طولانی با دستگاههای مخابراتی متشکل از ماهواره‌ها، رله‌های رادیو-میکروموجی، کابلهای هم‌محور، و موجبرها منتقل می‌شوند. هر یک از این دستگاهها با امواج الکترومغناطیسی دارای طول‌موجهای بزرگتر و بسامدهای کمتر از نور لیزر سروکار دارند. به عنوان مثال، بسامد در مرکز طیف مرئی حدود 10^{14} بار بزرگتر از بسامد امواج ۶ سانتیمتری است که در دستگاههای رله رادیو-میکروموجی به کار می‌روند. در نتیجه، ظرفیت نظری اطلاعات برای یک موج نور نوعی حدود 10^{14} بار بزرگتر از ظرفیت مربوط به یک میکروموج نوعی است. ببینیم این عدد از کجا حاصل شده است.

دستگاههای مخابراتی دوربرد تماماً متکی بر اصل چندگسلی، یعنی ارسال همزمان چندین پیام (اطلاعات) مختلف روی یک خط سیر، هستند. صدای معمولی انسان (مکالمه) احتیاج به یک نوار بسامد از ۲۰۰ Hz تا ۴۰۰۰ Hz یعنی نواری با پهنای 3800 Hz دارد. بنابراین، یک گفتگوی تلفنی می‌تواند روی هر نواری با پهنای 3800 Hz تراگسیل شود. به عنوان مثال، این گفتگو می‌تواند با کابل هم‌محور در نوار بسامد مگاهرتز بین 10^{11} و 10^{14} Hz حمل شود، که در نتیجه حدود 10^4 ٪ بسامد حامل هم‌محور موجود را اشغال می‌کند. از طرف دیگر، این گفتگو می‌تواند همچنین با یک باریکه لیزر He-Ne (632.8 nm ، 10^{14} Hz) در نوار بسامد بین 10^{11} و 10^{14} Hz حمل شود، که آنگاه کمتر از یک بیلیونم ٪ بسامد باریکه لیزری را به کار برده‌ایم. برای میکروموجها، که به طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از امواجی هستند که توسط کابلهای هم‌محور حمل می‌شوند، این تباین چندان زیاد نیست؛ اما حتی در اینجا نیز، ظرفیت حمل لیزر 10^{11} بار بیشتر از ظرفیت دستگاه میکروموجی است.

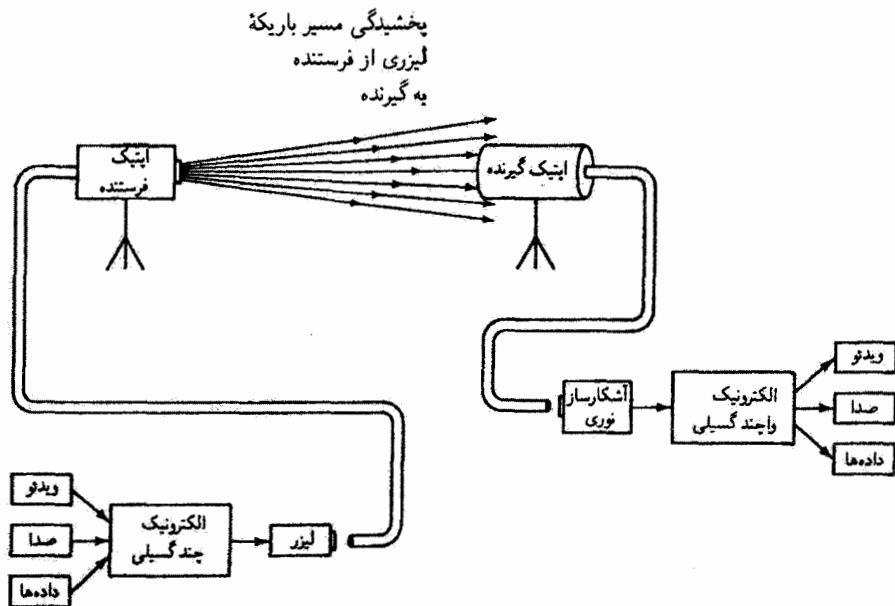
فرض کنید بتوانیم یک دستگاه مخابراتی لیزری با بسامد حامل 10^{14} Hz و پهنای نوار کار 10^9 Hz (۱۰ GHz) بسازیم. این دستگاه خواهد توانست روی تنها یک باریکه لیزری حدود ۲٫۵ میلیون مکالمه همزمان یا ۲۰۰۰ برنامه تلویزیونی همزمان را حمل کند. وقتی اولین دستگاه تلفن ساخته شد، هر سیم تنها یک مکالمه را حمل می‌کرد. امروزه هر خط صدها مکالمه حمل می‌کند و هر کابل هم‌محور تا ۱۰۰۰ مکالمه در ساعت تراگسیل می‌کند، و خطها باز هم شلوغ هستند. کابلهای تار نوری را، که اندازه آنها از انگشت کوچکتر است، می‌توان با ۱۴۴ تار

مجهز کرد. هر جفت تاری می‌تواند ۶۷۲ پیام تلفنی همزمان روی تپهای نور لیزر حمل کند. برای کابل ۱۴۴ تار، که به‌طور قابل ملاحظه‌ای کم‌حجم‌تر از کابل هم‌محور حامل مسی است، این عدد به ۵۰۰۰۰ پیام تلفنی همزمان تبدیل می‌شود.

دستگاههای نورتاری-لیزری حمل اطلاعات از آنچه چندگسلی تقسیم زمانی نامیده می‌شود استفاده می‌کنند. این نوع دستگاه علامت صوتی را به چندین پاره کوچک تقسیم می‌کند و مکتهای کوتاه عادی در نقشهای مکالمه را با مکالمه‌های دیگر پر می‌کند، و در نتیجه ظرفیت حمل را افزایش می‌دهد. برای یک تک‌مکالمه تلفنی، فرایند نورتاری-لیزری به‌صورت زیر کار می‌کند. امواج صوت در دهنی تلفن به امواج الکتریکی تبدیل می‌شوند. آنگاه یک ابزار نمونه‌گیر دامنه هر موج الکتریکی را ۸۰۰۰ بار در ثانیه اندازه می‌گیرد و به هر موج یک عدد دوتایی نسبت می‌دهد، که این همان دستگاه اعدادی است که در زبانهای رایانه‌ای به‌کار می‌رود. از این راه هر صوت از لحاظ الکترونیکی رمزبندی می‌شود. همه اینها با آهنگ میلیونها پاره در هر ثانیه انجام می‌گیرد. هر پاره نور لیزری دوتایی-رمزیده از طریق تارهای نوری منتقل می‌شود و در طرف دیگر خط تلفن با یک فرایند وارون به امواج صوت تبدیل می‌شود. لیزرهای He-Ne و دیودی (خانواده نیم‌رسانای آرسنید گالیم) اخیراً به دستگاههای مخابراتی اپتیکی امروزی پیوسته شده‌اند (فصل ۲۴، اپتیک تاری را ببینید). خواص اتلاف کم و پاشیدگی کم تارهای نوری تک مدی پایه-سیلیکا تراگسیل بیلیونها پاره اطلاعات در هر ثانیه را در فواصل بیشتر از ۱۰۰ مایل ممکن ساخته‌اند. نور با طول‌موجهای بلند (۱٫۳ تا ۱۵ μm)، که با تارهای نوری تک‌مدی جفت شده‌اند، در کاربردهای مخابرات اپتیکی، هم روی زمین و هم زیر آب، تسلط یافته است.

دستگاههای لیزری رایج در مخابرات فضا تا ۱ بیلیون بیت در هر ثانیه را تراگسیل می‌کند، و این آهنگ تراگسیلی است که می‌تواند تمام اطلاعات موجود در دائرةالمعارف بریتانیکا یا برنامه‌های همزمان ۱۴ فرستنده تلویزیون رنگی را در حدود ۱۸ پردازش کند. مؤلفه‌های اساسی تشکیل‌دهنده یک دستگاه مخابرات لیزری جوی نوعی در شکل ۲۳-۶ نشان داده شده‌اند. اطلاعات ویدئو، صدا، و داده‌ها با الکترونیک چندگسلی پردازش می‌شوند و به لیزر خوراند می‌شوند. آنگاه باریکه لیزری مدوله در جو فرستاده می‌شود و در جایگاه آشکارسازی جمع‌آوری می‌شود. علامت آشکارسازی نوری، با چندگسلی وارون، دوباره به اطلاعات ویدئو، صدا، و داده‌ها تبدیل می‌شود.

پردازش اطلاعات. لیزرها نه تنها روی تکنولوژی مخابرات، که با تراگسیل و دریافت اطلاعات -زیر آب، روی زمین، و در فضا- سروکار دارد، تأثیر شدیدی دارند بلکه همچنین تکنولوژیهای جدیدی در ذخیره‌سازی داده‌های اپتیکی، برخوانی یا واخوانی داده‌های اپتیکی و چاپ لیزری وارد می‌کنند. لیزرها به علت همدوسی و تمرکزپذیری عالی خود در این نوع کاربردها ایده‌آل هستند.



شکل ۲۳-۶ آرایه کاری یک دستگاه مخابرات لیزری جوی.

به عنوان مثال، هولوگرامها که در فصل ۱۳ بررسی شده اند محیطهای بسیار مؤثری برای ذخیره سازی اپتیکی فراهم می کنند. لیزرهایی که بیشتر از همه در پردازش اطلاعات به کار برده می شوند لیزرهای He-Ne، آرگون و دیودی هستند.

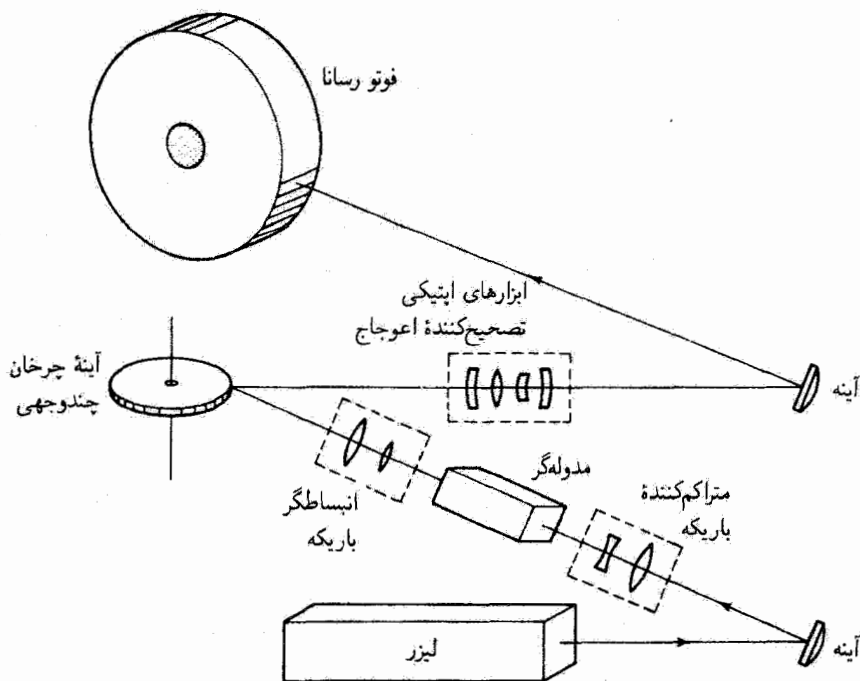
ذخیره سازی اطلاعات در جوامع کنونی یک مسئله رو به رشد است. به عنوان مثال، سازمان ناسا سالانه ۱۰۰۰ تریلیون بیت داده های ماهواره ها و کاوه های فضایی را دریافت می کند که باید پردازش، تعبیر و ذخیره شوند. با رشد ظاهراً نامایی داده های تولید شده و جمع آوری شده، واضح است که دستگاههای سریع و قابل اعتماد برای پردازش اطلاعات یکی از نیازهای مهم فعلی است. در ذخیره سازی اپتیکی داده ها استفاده از لیزر برای ذخیره کردن اطلاعات رقمیده روی سطوح برگزیده، با ثبت نقش چاپ دائمی یا پاک شدنی، دخیل است. کوچکترین واحدی که اطلاعات رقمیده را می توان برحسب آن تقسیم کرد، یعنی یک رقم دوتایی یا بیت^۱ در زبان دوتایی به صورت ۰ یا ۱ ذخیره می شود. هشت بیت یک بایت می سازند، و از یک بایت می توان برای نمایش یک حرف الفبا مانند F^3 یا L یا دورقم اعشاری مانند اعداد ۲۷ یا ۳۲ استفاده کرد. بایت 1000000 می تواند نمایشگر A ، و بایت 10000000 می تواند نمایشگر B باشد، و غیره. امروزه، دستگاههای

۱. bit، ساخته شده از Binary digit. [م]

ذخیره‌سازی اپتیکی پرچگالی در حدود $10^1 \times 4$ بایت (۴ گیگابایت) را در یک طرف یک دیسک ۱۴ اینچی جای می‌دهند. ظرفیت ذخیره‌سازی ۴ گیگابایت معادل حدود ۳۲۰۰۰۰ صفحه چاپی است! زمان متوسط دسترسی از مرتبه ۱۸۰ تا ۵۸۰ میلی‌ثانیه است.

در ذخیره‌سازی اپتیکی داده‌ها، یک چشمه لیزری به‌طور مناسب با ورودی الکترونیک داده‌های رقمی که در بالا توصیف شد مدوله می‌شود. لیزر بیت‌های داده‌ها را روی یک سطح حساس به نور که معمولاً به شکل دیسک ۳۰ سانتیمتری یا ۱۲ سانتیمتری است می‌نویسد. در اینجا لیزر باعث یک تغییر دائمی یا برگشت‌پذیر در رفتار اپتیکی دیسک در حفره‌های میکرونی که مکان آنها به دقت تعیین شده است می‌شود. حفره‌ها از جذب سطحی انرژی لیزری که با برکنش سطحی همراه است ناشی می‌شوند. برای بازگردانی یا برخوانی، یک لیزر کم‌توان‌تر به طرف سطح گرفته می‌شود، و نور آن بازتابیده می‌شود یا در بعضی موارد، مطابق با نقش دقیق تفصیل نوشته بر سطح، عبور می‌کند. باریکه لیزری بازتابیده (یا عبور کرده) آنگاه با فوتودیودهایی که به‌طور مناسب مستقر شده‌اند و علامتهای بازگشتی را به نقش داده‌های الکترونیکی اصلی ترجمه می‌کنند آشکارسازی می‌شود. ثبت‌های دائمی امروزه برای ذخیره‌سازی مواد بایگانی تهیه می‌شوند. دیسکهای فشرده مردم‌پسند (CD) برای ثبت یا بازگردانی اطلاعات شنیداری یا دیداری نیز از این نوع هستند. ثبت‌های پاک‌شدنی اگر چه هنوز موجود نیستند اما در دست تکمیل هستند. اینکه ثبت‌های لیزری پاک‌شدنی قسمتی از تکنولوژی ذخیره‌سازی نوین داده‌ها شود تنها احتیاج به زمان دارد.

چاپگرهای لیزری که می‌توانند سریعترین و تمیزترین چاپهای موجود را تولید کنند به‌سرعت جانشین چاپگرهای سنتی می‌شوند. در چاپگرهای سنتی، با فشار مکانیکی یک نوار مرکبی روی کاغذ با مجموعه‌ای از سوزنهای کوچک همچون در چاپگرهای نقطه-ماتریسی، یا با چرخ‌خورشیدی که از قبل کامل شده، همچون در چاپگرهای چرخ‌خورشیدی، تصویر به‌وجود می‌آید. چاپگرهای نقطه-ماتریسی می‌توانند متن یا گرافیک تولید کنند اما فاقد تفکیک واضح هستند؛ چاپگرهای چرخ‌خورشیدی کیفیت متن خوبی دارند اما نمی‌توانند گرافیک تولید کنند. هر دو چاپگر، از آنجا که مکانیکی هستند، پر صدا و، با سرعت چند صفحه در دقیقه، نسبتاً کند هستند. در مقابل، چاپگر لیزری با باریکه لیزری که سریعاً روی طبلم نوررسانا مرور می‌کند و بعضی از ناحیه‌های طبلم را به‌طور گزینشی تخلیه می‌کند تصویر به‌وجود می‌آورد (شکل ۲۳-۷ را ببینید). مرکب یا تونر، که دارای باری با قطبیت مخالف است، به سطح نوررسانا می‌چسبد و آنگاه با فشار و گرما به کاغذ منتقل می‌شود. در این فرایند، باریکه لیزری لکه‌های چاپی بسیار کوچکتری (باز هم به علت همدوسی و تمرکزپذیری) نسبت به سوزنهای مکانیکی به‌وجود می‌آورد و در نتیجه متنی با کیفیت بسیار بهتر ایجاد می‌کند. به‌علاوه، فرایند چاپ لیزری با نرمی، سکوت، و سرعت اجرا می‌شود. آهنگ چاپ می‌تواند از چند صفحه در دقیقه تا دو صفحه در ثانیه، بسته به بهای چاپگر، باشد.



شکل ۲۳-۷ نمودار یک دستگاه اپتیکی نوعی برای چاپگر لیزری.

در یافت دور. موفقیت‌های اخیر مأموریت‌های فضایی، همراه با پیشرفتهای تکنولوژی لیزری، زمینه دریافت دور لیزری را آماده کرده‌اند. به بیان ساده، دریافت دور شامل آشکارسازی نور پراکنده لیزر از هدفهایی است که نسبت به دستگاههای بازجوینده لیزری فعال در دوردست واقع شده‌اند. این دستگاههای لیزری — چشمه‌ها و آشکارسازها — غالباً در ایستگاههای فضایی قرار دارند، در حالی که هدفهای دور که بسیار پایینتر هستند می‌توانند جو زمین، زمینهای کشت شده، یا پوسته سخت زمین باشند. دستگاههای مستقر در زمین، که در معرض دید هستند اما الزاماً دور نیستند، برای آشکارسازی آلودگی و دیدبانی بادهای ارضی به کار می‌روند.

فن به‌کاررفته، که غالباً رادار لیزری یا لیدار (Light Detection And Ranging)، آشکارسازی و گستره‌یابی نوری) نامیده می‌شود، به حضور چشمه لیزری، هدف مناسب برای جستجو، و آشکارسازهای حساس بستگی دارد. یک لیزر ایده‌آل برای هر کاربرد دریافت دور باید طول موج، کوکبذیری، توان خروجی، آهنگ تکرار تپ، و پایداری دامنه و بسامد مناسب داشته باشد. به علاوه، باید بهره کاری بسیار زیادی داشته باشد، از لحاظ مکانیکی مقاوم باشد، و دارای طول عمر کاری طولانی باشد. چشمه‌های لیزری رایج عبارت‌اند از لیزرهای دی‌اکسید کربن موج پیوسته،

لیزرهای تپی Nd : YAG و شیشه-نئودیمیم، لیزرهای الکساندریت، لیزرهای رزینی دمیده با Nd : YAG، لیزرهای اکسایمر، لیزرهای Nd : YAG دمیده با AlGaAs، و گروه کاملاً جدیدی از لیزرهای حالت جامد کوکپذیر پیوسته مانند لیزرهای فلئوئورید منیزیم کبالت (CoMgF). مجموعاً، این خانواده لیزرهای خاص طول موجهایی را فراهم می‌کنند که از $0.66\text{ }\mu\text{m}$ تا $10.6\text{ }\mu\text{m}$ را در بر می‌گیرند و برای بیشتر کاربردهای دریافت دور کافی هستند.

هدف، هر ماهیتی که داشته باشد، باید با نور لیزر بازجوینده برهم‌کنش کند و تغییری سنجش‌پذیر که بتوان آن را آشکارسازی کرد به وجود آورد. این نوع تغییرات، که با تابش لیزری پس‌پراکنده به دستگاه آشکارسازی بازگردانده می‌شوند، شامل فلئوئورسانی، طول موجهای انتقال یافته رامان، و اثر دوپلر هستند که هر یک از آنها اطلاعات مهمی درباره هویت، تمرکز، یا حرکت نمونه‌ها فراهم می‌کنند. دستگاههای لیدار بسیار تخصصی، مانند لیدار جذب جزئی، لیدار رامان، و لیدار دوپلر، برای آشکارسازی مفاد اطلاعاتی خاص نهفته در تابش پس‌پراکنده طراحی شده‌اند.

جنبه هنری دریافت دور و مبارزه‌ای که در پیش است از مروری بر دو کاربرد رایج، مربوط به اندازه‌گیری سرعت باد و جابه‌جاییهای پوسته سخت زمین، فوراً آشکار می‌شوند. حرکت و سرعت تفصیلی بادهای گشتسپهری در مطالعه نقشه‌های هواشناسی جهانی اهمیت فوق‌العاده‌ای دارند. برای بیرون کشیدن این نوع اطلاعات، یک دستگاه لیزر CO_2 مستقر در فضا باید از یک سفینه فضایی مداری، که می‌تواند یک ماهواره عملیاتی یا شاتل فضایی در فواصل 250° تا 80° km بالای زمین باشد، به‌کار بیفتد. از چنین ارتفاعاتی، به توان لیزری اولیه زیادی احتیاج است، وگرنه تابش پس‌پراکنده ضعیفتر از آن است که آشکارسازی شود. تابش لیزری فرودی توسط ذرات غباری که همراه باد منتقل می‌شوند پس‌پراکنده می‌شود. محاسبات سرعت و جهت باد براساس انتقال بسامد دوپلری در تابش بازتابیده صورت می‌گیرند. یک لیزر CO_2 برای اندازه‌گیری سرعت باد با دقت 1 m/s به تپهای حدوداً 10° ژولی در هر ثانیه، با پایداری بسامد چندصد کیلوهرتز یا بهتر، احتیاج دارد. تجهیزات توانی بزرگ با چند کیلووات برای به‌کار انداختن این نوع دستگاههای لیزری لازم هستند. مبارزه به‌وضوح عبارت است از تدارک توان زیادی که ذخیره شده باشد و در مأموریت فضایی قابل دسترسی باشد.

استفاده از دستگاه لیداری که برای آشکارسازی حرکت پوسته سخت زمین به فضا برده شده است در تعیین کرنشهای نزدیک مناطق زلزله‌خیز، تورم زمین قبل از فعالیت آتش‌فشان، و نشست زمین ارزشمند است. براساس اندازه‌گیری زمان حرکت تپهای لیزری بسیار کوتاه (نانوثانیه) از فضا به برگشت‌دهنده‌های زمینی و برگشت، و استفاده از روشهای ساده مثلث‌بندی، فاصله تا قسمتهای خاصی از پوسته زمین با تقریب 1 تا 2 cm تعیین می‌شود! با تکرار اندازه‌گیری در بازه‌های زمانی مناسب، حرکت مهم زمین آشکارسازی و دیدبانی می‌شود. دستگاههای مورد نظر برای مطالعات

پوسته‌ای زمین شامل لیزر Nd : YAG با پهنای تپی کمتر از ۵ ns و آهنگ تکرار تپی از مرتبه ۱۰ بر ثانیه است. آشکارسازی علامت پس‌پراکنده را می‌توان در سفینه فضایی با تلسکوپهای جمع‌کننده موجود با قطر ۶ in و دستگاههای الکترونیکی فوتوفزونگر انجام داد.

فنون لیداری همراه با دستگاههای لیزری دریافت دور، در آشکارسازی آلودگی، تعیین غلظت ذرات سمی، یا اندازه‌گیری گازهای جوی خاص و ذرات معلق در هوا به کار می‌روند. از تکنولوژی دریافت اپتیکی برای آشکارسازی پسماندهای دودکشهای کارخانه‌های صنعتی یا آشکارسازی نشت گاز در لوله‌ها با موفقیت استفاده می‌شود. در یک مقیاس وسیعتر، غلظت اوزون، بخار آب، و اسیدسولفوریک جوی را می‌توان با دقت قابل ملاحظه‌ای اندازه‌گیری کرد. به خصوص، طیف‌سنجیهای جذب لیزری، مبتنی بر اصول جذب جزئی و فلوروسانسی تشدید، هم‌اکنون مفید بودن خود را نشان داده‌اند. اندازه‌گیریهای جهانی برای تعیین غلظت تعلیق ذرات جوی اهمیت زیادی دارند و در قلمرو کارایی دستگاههای دریافت دور هستند. این نوع سنسورها تأثیر ذرات معلق در هوا روی سرد شدن یا گرم شدن سیاره زمین و همچنین تشکیل و تحول لایه‌های مه در گشتسپهر را معلوم می‌کنند.

موفقیت‌های ثبت شده مأموریت‌های فضایی رویجر، ماهواره اخترشناسی فروسرخ، و چند مدارگرد لندسات، همراه با پیشرفتهای تکنولوژی لیزری، نشان می‌دهند که دریافت دور فضاپردی جو و پوسته سخت زمین یک تکنولوژی در حال پیشرفت سریع است.

۲۳-۳ پیشرفتهای تازه‌تر

طی دهه ۱۹۹۰ فعالیت شدید لیزرها و کاربردهای لیزری در بازار کالا ادامه داشته است. تکنولوژی لیزری دائماً با اطمینان در حوزه‌های جا افتاده پردازش مواد، اندازه‌شناسی، روبش خط‌مرز کالاها، چاپ، ذخیره‌سازی و حافظه اپتیکی، مخبرات، کاربردهای تشخیص و درمان در پزشکی، امور دفاعی، و صنعت سرگرمی-نمایش به پیش رفته است.

در اوایل دهه ۱۹۹۰، تکوین و تکامل کالاها و ابزارهای لیزری جدید با گامهای سریع ادامه یافته است، و انتخاب طیف وسیعی از لیزرها را در پیوستاری از طول‌موجهای $3\mu\text{m}$ تا $1\mu\text{m}$ ، با توانهای از چند میلی‌وات تا چند ده وات ممکن می‌کند. لیزرهای جدید، با نامهایی همچون تیتانیم-یاقوت کبود، فلوراید منیزیم کبالت-آلوده، الکساندریت، Nd : YLF (نئودیمیم فلوراید لیتیم ایتیم) و NYAB (نئودیمیم بورات آلومینیم ایتیم) به لیزرهای رایج دهه ۱۹۸۰ He-Ne، Nd : YAG، CO₂، آرگون، و آرسنید گالیم- پیوسته‌اند.

۱. هدف مطالب این بخش ارائه نمونه‌هایی از تکنولوژی و کاربردهای لیزری در اوائل دهه ۱۹۹۰ است که مسلماً نمی‌تواند جامع باشد.

لیزرهای دیودی اکنون با لیزر قدیمی دیربای He-Ne رقابت می‌کنند. دمش دیودی، که تهدیدی برای جانشینی لیزرهای دمیده-لامپی است، سازگاری طیفی تقریباً ایده‌آلی بین دمنده و جذب‌کننده را، با بهره‌کاری بیشتر، قابلیت اعتماد بهتر، و تجهیزات سردکننده کمتر، ارائه می‌کند. در زمینه‌های دیگر، بلورهای دو برابرکننده بسامد، مانند NYAB و $LiNbO_3$ (MLNN) نئودیمیم و منیزیم-آلوده) برای تولید مستقیم نور سبز نزدیک به ۵۳۱ nm به‌کار می‌روند. در دنیای مخابرات اپتیکی، تقویت‌کننده‌های نورتاری اریبم-آلوده، که با لیزرهای دیودی دمیده می‌شوند، به سرعت جانشین تکرارکننده‌های پرهزینه در دستگاههای مخابراتی زیر اقیانوسها می‌شوند.

بعضی از پیشرفتهای کنونی را در چند حوزه پزشکی، دفاع لیزری، و پژوهش لیزری در جهان ریز- با اندکی تفصیل بیشتر بررسی خواهیم کرد

کاربردهای پزشکی. در پزشکی، لیزر هم به‌عنوان ابزار تشخیص و هم ابزار جراحی همچنان فوق‌العاده مفید مانده است. در اتاقهای عمل، به‌عنوان مثال، لیزرهای CO_2 و Nd : YAG موفقیت‌های جدیدی در یک عمل کیسه صفرا (*Laparoscopic Laser Cholecystectomy*) نشان می‌دهند. در حالی‌که عمل کیسه صفرا با لیزر رو به افزایش است، آنژیوپلاستی لیزری (استفاده از لیزر نوک داغ برای تبخیر رسوبات در شاهرگهای بسته) در حال کاهش است. در عوض آنژیوپلاستی بالونی با استفاده از لیزر (باد کردن یک بالون کوچک برای گشاد کردن ناحیه بسته در شاهرگ) امروزه یک فن پذیرفته شده است. همچنین، گاهی جراحی پشت با استفاده از گرمایش گزینشی باریکه لیزری برای برداشتن ماده دیسک شکسته بین مهره‌های پشت امکانپذیر است.

در چشمپزشکی، هنوز لیزر اگزایمر (با باریکه فرابنفش) را به‌عنوان "تیغ جراحی" برای تصحیح نزدیک‌بینی در نظر می‌گیرند. امروزه از دو فن استفاده می‌شود که هر دو مربوط به تغییر شکل سطح قرنیه هستند. یکی از اینها برش شعاعی قرنیه نامیده می‌شود (ایجاد شیارهای دقیقاً کنترل‌شده در سطح قرنیه)؛ دیگری عبارت است از تسطیح قرنیه (برداشتن مناسب بافت‌های سطح قرنیه). در تشخیص پزشکی، برنامه‌های پژوهشی برای توسعه تکنولوژی لیزر نمک سرب دیودی کوکپذیر در معاینه بالینی در دست اجرا هستند. هدف این پژوهش استفاده از ایزوتوپهای ناپرتوزای پایدار به‌عنوان ردیاب برای کمک به آشکارسازی معلولیت‌های فیزیولوژیک است. ابزاربندی شامل طیف‌نمایی فروسرخ پرتفکیک برای اجرای تحلیل ایزوتوپی بازدم انسان (یک روش غیرتخریبی) در حال طراحی است. امید می‌رود که این روش یک ابزار مهم آینده برای تشخیص بالینی بیماریهایی مانند دیابت باشد.

کاربردهای نظامی. فنون هدایت لیزری عامل دقت بسیار زیادی هستند که اکنون در پرتابهای نظامی امکانپذیر شده است. در سخت‌افزار و دستگاههای مورد توجه امور نظامی امروزی، لیزرها باز هم در مرکز پیشرفتهای مربوط به بردیابها، هدف‌یابها، دستگاههای مخابرات ماهواره‌ای، پشتیبانی

دریایی مبتنی بر رادار لیزری، و دریافت دور قرار دارند. دستگاههای لیزری فعال در این حوزه‌ها لیزرهای CO₂ پرتوان، لیزرهای Nd : YAG (با دمش دیودی و بسامد دو برابر)، لیزرهای YAG اربیم-آلوده، لیزرهای دیودی، و تا حد کمتری لیزرهای الکترون آزاد (FEL) و شیمیایی (DF) و HF) را شامل می‌شوند. طول موجهای مورد توجه عبارت‌اند از ۵۳۲ nm، ۶۹۳ nm، ۸۳۰ nm، ۱٫۰۶ μm، ۱٫۵۴ μm، ۳ μm، و ۱۰٫۶ μm با انرژیهای تپی که از میلی ژول تا کیلوژول گسترش دارند.

لیزرها و ریزجهان. وسایل لیزری خارق‌العاده جدید امروزه در خطوط مقدم پژوهش زیراتمی دیده می‌شوند. خواص یکتای نور لیزر به زیست‌شناسان امکان داده است تا مولکولهای منفرد پروتئین متصل به غشاء داخلی گویچهٔ سرخ خون را بررسی کنند. فیزیکدانها می‌توانند میلیونها اتم سدیم را در ظروف فولادی ضدزنگ شناور کنند و آنها را همزمان در فواره‌های نور رها کنند. شیمیدانها می‌توانند یک تک‌اتم هیدروژن را مشاهده کنند که یک اتم اکسیژن را از مولکول CO₂ به سمت خود می‌کشد. لیزرهای فمتوثانیه‌ای (دارای طول تپ 10^{-15} s) می‌توانند حرکت اتمها و مولکولها را منجمد کنند، و از این رو گرفتن عکسهای لحظه‌ای از واکنشهای شیمیایی را ممکن ساخته‌اند. باریکه‌های نور لیزر، در به اصطلاح دامهای لیزری، برای احاطه کردن گروههایی از اتمها و حرکت دادن دلخواه آنها به اطراف به‌کار برده می‌شوند. در فنونی که "ملاس اپتیکی" نامیده می‌شوند از نور لیزر برای ایجاد نیروهای الکترومغناطیسی که می‌توانند اتمهای فوق صوتی را کند کنند استفاده می‌شود. اتمهای مهارشدهٔ حاصل، که هم در حال سقوط آزاد و هم در حال حرکتهای نوسانی مشاهده می‌شوند، اندازه‌گیری نیروهای گرانشی با دقت بسیار زیاد و ساخت نسلهای جدیدی از ساعت‌های اتمی را ممکن می‌سازند. به‌علاوه، باریکه‌های لیزری انفرادی که به‌عنوان "انبرک اپتیکی" به‌کار برده می‌شوند، با نشان‌گیری روی یا اطراف ذرات میکروسکوپی، مانند مولکولهای DNA، امکان مطالعهٔ ساختارهای داخلی و خارجی این ذرات را فراهم می‌کنند. لیزرها یک قسمت اساسی میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM)، "حسگر" ممتازی که روشی سریع و دقیق برای اندازه‌گیری جزئیات اتمی سطح را ارائه می‌کند، هستند. AFM با حرکت کردن بالای سطح میکروسکوپی، خطوط کلی اتمهای انفرادی را به دقت احساس و ردیابی می‌کند. این میکروسکوپ می‌تواند حرکتی تا مرتبهٔ آنگستروم را نظارت کند، نیروهای جابه‌جایی به کمی 10^{-10} N را موضع‌یابی لیزری کند، و اندازه‌هایی از مرتبهٔ $100 \mu\text{m}^2$ را روبش کند. درک تفصیل سطح اتمی مواد عایق و رسانا در، به‌عنوان مثال، تولید ابزارهای اپتیکی نورتاری بسیار معتبر اهمیت اساسی دارد.

کاربردهای دیگر. در این فصل سعی کردیم بعضی از کاربردهای مهمتر لیزر را در تکنولوژی نوین به اختصار بررسی کنیم. این بررسی مختصر حول دو ردهٔ کلی ترتیب یافته است: لیزرها و اطلاعات، و برهم‌کنشهای لیزری با ماده. از این طریق فرصت یافتیم تعدادی از کاربردهای لیزر را

در پردازش مواد، پزشکی، گداخت لیزر-القایی، مخابرات، پردازش اطلاعات، و دریافت دور مرور کنیم. این کاربردها، با اینکه بسیار مهم‌اند، تمام راه‌های مختلفی که لیزرها در آنها به‌کار برده می‌شوند نیستند. لیزرها همچنین در مهندسی راه و ساختمان (جایی که خط کاملاً مستقیم وجود ندارد)؛ در کشاورزی به‌عنوان دستگاه‌های هدایت برای تسطیح لیزری زمین؛ در صنعت نیم‌رسانا، که در آن لیزرها ریزبازرهای لازم برای تراش و برش دقیق در عملیات پردازش ابزار هستند؛ و در تقریحات، که در آن لیزرها رنگهای درخشان و موسیقی را در نقش‌های پرتحرک و شگفت‌انگیز ترکیب می‌کنند، کاربردهای مستقیمی یافته‌اند.

مسائل

۲۳-۱ یک لیزر نوع فرسوخ تپی با قله توان 10 MW و واگرایی باریکه 1 mrad را در نظر بگیرید که با یک عدسی با فاصله کانونی 20 cm روی سطح کار (هدف) متمرکز شده است. چگالی توان (تابیدگی) را روی هدف به‌دست آورید.

۲۳-۲ وقتی یک لیزر در یک لکه (کمر باریکه) متمرکز می‌شود دارای "عمق تمرکز" مشخص d است که در طول آن کمر باریکه افزایش محسوسی ندارد، و با رابطه زیر داده می‌شود

$$d = \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right) \sqrt{p^2 - 1} \left(\frac{2f}{D} \right)^2$$

در اینجا f فاصله کانونی عدسی متمرکزکننده، D قطر باریکه لیزری فرودی در کمر باریکه، λ طول‌موج، و p ضریب تحملی است که درجه‌ای را که باریکه متمرکز مجاز است منبسط شود و بازهم "متمرکز" در نظر گرفته شود تعیین می‌کند.

(الف) یک باریکه لیزر CO_2 با 6 mm و 10° را در نظر بگیرید که از کمر باریکه خود با قطر 8 mm و اگر می‌شود و به یک عدسی ژرمانیم با فاصله کانونی 60 mm فرود می‌آید. اگر بخواهیم قطر باریکه بیشتر از 10% مقدار مینیم آن در کمر افزایش نیابد ($p = 1.10$)، عمق تمرکز را در لکه کانونی به‌دست آورید.

(ب) کمر باریکه D' در صفحه کانونی عدسی ژرمانیم با $D' = f\phi$ داده می‌شود که در آن زاویه $\phi = 27.8/D$ و اگرایی باریکه لیزری فرودی است. D' و قطر باریکه در نقطه انتهایی ناحیه عمق تمرکز d را به‌ازای ضریب تحمل قسمت (الف) محاسبه کنید.

۲۳-۳ انجام برش با لیزر را که نمودار آن در شکل ۲۳-۳ نشان داده شده است در نظر بگیرید. توضیح دهید چرا یک لیزر معین با سرعت برش عرضی مثلاً 25 mm/s به عمق کمتری در

آلومینیم (۲۷g/cm^3) نسبت به فولاد (۷۸g/cm^3) نفوذ می‌کند. در فرمولبندی جواب خود، تأثیر ضرایب بازتاب و جذب و همچنین رسانایی گرمایی را در نظر بگیرید.

۲۳-۴ یک باریکه تپی لیزر Nd : YAG که در جراحی چشم به‌کار می‌رود تپی با انرژی حدود ۱ mJ در ۱ ns گسیل می‌کند. این باریکه لیزری در لکه کوچکی به قطر $۳۰\text{ }\mu\text{m}$ در داخل چشم متمرکز می‌شود.

(الف) تابیدگی در لکه تمرکز را به‌دست آورید.

(ب) با فرض اینکه چشم دارای ضریب شکست ۱.۳۳ و گذردمی حدود ۷۸E است، شدت میدان الکتریکی را در لکه تمرکز تخمین بزنید. [راهنمایی: از معادله $۸-۴۲$ با تغییر مناسب استفاده کنید.]

۲۳-۵ در نظریهٔ مخابرات، می‌دانیم که ظرفیت اطلاعات C مربوط به علامتی با توان متوسط S در حضور توان سفید-نوفهٔ جمع‌پذیر N در مجرای با پهنای نوار B با رابطهٔ $C = B \log(1 + S/N)$ داده می‌شود. (توجه کنید که ظرفیت مجرای C مستقیماً متناسب با پهنای نوار B است، که این امر علاقهٔ زیاد به لیزرها برای مقاصد مخابراتی را توجیه می‌کند.) فرض کنید نسبت علامت به نوفهٔ S/N برابر با ۹ و پهنای نوار موجود در یک دستگاه مخابرات لیزری حدود ۴۰۰۰ MHz (تنها ۱۰۰% بسامد حامل، که حدود $۱۰^{۱۲}\text{ Hz}$ است) باشد.

(الف) ظرفیت اطلاعات C را تعیین کنید.

(ب) چند مکالمهٔ تلفنی با پهنای نوار ۴۰۰۰ Hz را می‌توان با این دستگاه لیزری حمل کرد؟

۲۳-۶ در یک دستگاه لیزری، که روی ماهوارهٔ زمین-همگام نصب شده است، از لیزر Nd : YAG استفاده شده است که تابش $۱۰۶\text{ }\mu\text{m}$ را در باریکهٔ بسیار موازی شده‌ای با واگرایی باریکهٔ $۵\text{ }\mu\text{rad}$ گسیل می‌کند.

(الف) اگر لیزر ۳۶۲۰۵ km بالای زمین باشد، قطر مینیمم "جای پا"ی باریکهٔ لیزری را روی سطح زمین به‌دست آورید.

(ب) اگر این لیزر تپهایی با توان ۲۰۰ MW گسیل کند، میدان الکتریکی متوسط بر تپ را در باریکهٔ لیزری در سطح زمین تعیین کنید [راهنمایی: معادلهٔ $۸-۴۲$ را ببینید.]

۲۳-۷ افرادی که با لیزرهای پرتوان یا باریکه‌های لیزری بدون حفاظ کار می‌کنند باید برای حفاظت خود از صدمات لیزری به پوست و چشم اندازه‌گیریهایی انجام دهند. بدین منظور، می‌توان منطقه‌های خطر اسمی (NHZ) برای لیزر تعریف کرد. منطقهٔ خطر اسمی نشاندهندهٔ یک فضای مخروطی است که در آن تراز تابش مستقیم، بازتابیده، یا پراکنده طی کار عادی از ترازهای تعیین‌شده برای

نورگیری مجاز ماکسیم (MPE) بیشتر می‌شود. ترازهای نورگیری خارج از این ناحیه مخروطی پایتتر از تراز نورگیری مجاز ماکسیم تعیین شده قرار دارند. ناحیه مخروطی، که نوک آن روی لیزر است و سطح جانبی آن در زاویه واگرایی باریکه ϕ تشکیل شده است، تا برد R_{NHZ} ادامه دارد. این برد برای باریکه لیزری نامتمرکز با رابطه زیر داده می‌شود

$$R_{NHZ} = \frac{1}{\phi} \left[\left(\frac{4P}{\pi MPE} \right)^{1/2} - d \right]$$

که در آن P توان لیزر، ϕ واگرایی باریکه، MPE نورگیری مجاز ماکسیم برحسب توان بر مساحت، و d قطر گشودگی قسمت خروجی لیزر است.

(الف) نمودار منطقه خطر اسمی (شکل مخروطی) را ترسیم کنید و برد مخروط R_{NHZ} و واگرایی باریکه تمام-زاویه ϕ را در آن نشان دهید.

(ب) R_{NHZ} را برای لیزر موج پیوسته YAG : Nd ($\lambda = 1.06 \mu\text{m}$) با توان ۵۰ W، و واگرایی باریکه ۳ mrad، نورگیری مجاز ماکسیم 10^{-2} W/cm^2 ، نورگیری ۱۰ s، و قطر گشودگی خروجی ۳ mm تعیین کنید.

۲۳-۸ برد R_{NHZ} (به مسئله ۲۳-۷ مراجعه کنید) برای لیزری که باریکه لیزری خروجی آن بلاواسطه روی یک عدسی فرود می‌آید با رابطه زیر داده می‌شود

$$R_{NHZ} = \left(\frac{f}{b} \right) \left(\frac{4P}{\pi MPE} \right)^{1/2}$$

که در آن R_{NHZ} طول مخروطی است که از نقطه تمرکز باریکه ناشی می‌شود، و f فاصله کانونی عدسی، b قطر باریکه خارج‌شونده از لیزر، P توان لیزر، و MPE نورگیری مجاز ماکسیم است.

(الف) نمودار منطقه خطر اسمی (شکل مخروطی) را برای این باریکه لیزری متمرکز ترسیم کنید.

(ب) برای لیزر موج پیوسته YAG : Nd با توان ۵۰ W و قطر باریکه خروجی ۵ mm

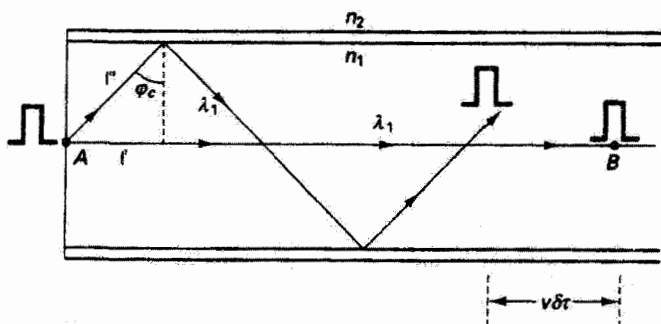
که با یک عدسی با فاصله کانونی ۷۵ cm محدود می‌شود، اگر نورگیری مجاز ماکسیم برای این لیزر به‌ازای ۸ ساعت نورگیری برابر با 10^{-2} W/cm^2 ، باشد، R_{NHZ} را به‌دست آورید.

مراجع

[1] Berns, Michael W. "Laser Surgery." *Scientific American* (June 1991): 84.

[2] Goldman, Leon. *Applications of the Laser*. Malabar, Fla.: Robert E. Krieger Publishing Company, 1982.

- [3] Ready, J. F. *Industrial Applications of Lasers*. New York: Academic Press, 1978.
- [4] Sliney, D. H., and H. L. Wolbarsht. *Safety with Lasers and Other Optical Sources: A Comprehensive Handbook*. New York: Plenum Press, 1980.
- [5] *Lasers and Optronics*. Morris Plains, N.J.: Elsevier Communications. Trade journal, published monthly.
- [6] *Optics and Photonics*. Washington, D.C.: Optical Society of America. Published monthly.
- [7] *Photonics Spectra*. Pittsfield, Mass.: Laurin Publishing Co. Trade journal, published monthly.
- [8] Vali, Victor. "Measuring Earth Strains by Laser." *Scientific American* (Dec. 1969): 88.
- [9] Berns, Michael H., and Donald E. Rounds. "Cell Surgery by Laser." *Scientific American* (Feb. 1970): 98.
- [10] Faller, James E., and E. Joseph Wampler. "The Lunar Laser Reflector." *Scientific American* (Mar. 1970): 38.
- [11] Lubin, Moshe J., and Arthur P. Fraas. "Fusion by Lasers." *Scientific American* (June 1971): 21.
- [12] Feld, M. S., and V. S. Letokhov. "Laser Spectroscopy." *Scientific American* (Dec. 1973): 69.
- [13] Emmett, John L., John Nuckolls, and Lowell Wood. "Fusion Power by Laser Implosion." *Scientific American* (June 1974): 24.
- [14] Zare, Richard N. "Laser Separation of Isotopes." *Scientific American* (Feb. 1977): 86.
- [15] Ronn, Avigdor M. "Laser Chemistry." *Scientific American* (May 1979): 114.
- [16] Tsipis, Kosta. "Laser Weapons." *Scientific American* (Dec. 1981): 51.
- [17] LaRocca, Aldo V. "Laser Applications in Manufacturing." *Scientific American* (Mar. 1982): 94.
- [18] Anderson, Dana Z. "Optical Gyroscopes." *Scientific American* (Apr. 1986): 94.
- [19] Jewell, Jack L., James P. Harbison, and Axel Scherer. "Microlasers." *Scientific American* (Nov. 1991): 86.



۲۴

اپتیک تاری

مقدمه

چنانکه در مرور کاربردهای لیزر دیدیم، مجرا بندی نور از طریق رسانه شفاف اخیراً اهمیت زیادی پیدا کرده است. این اهمیت مخصوصاً به دلیل کاربردهای آن در مخابرات و پزشکی لیزری است. اگر یک استوانه جامد شفاف، مانند تار شیشه‌ای، دارای ضریب شکستی بیشتر از ضریب شکست محیط احاطه‌کننده آن باشد، بیشتر نوری که از یک سر آن فرستاده می‌شود از سر دیگر خارج می‌شود، و تضعیف اندک نور به علت تعداد زیاد بازتابهای داخلی کلی است. بررسی جامع اپتیک تاری مستلزم رهیافت موجی است که در آن معادلات ماکسول را باید در محیط دی‌الکتریک با شرایط مرزی در دیواره تار حل کرد. در این فصل یک رهیافت ساده‌تر و شهودی‌تر را انتخاب می‌کنیم که در آن جبهه‌های موج منتشرشونده با پرتوهای آنها توصیف می‌شوند، اگر چه به مناسبتهایی از خواص موج، مانند فاز و تداخل، استفاده خواهیم کرد.

۱-۲۴ کاربردها

ساده‌ترین استفاده تارهای نوری، چه به طور منفرد چه به طور کلافی، به صورت لوله نور است. به عنوان مثال، می‌توان از یک کلاف تار قابل انعطاف برای انتقال نور از داخل یک دستگاه تخلیه به خارج، که

در آنجا آسانتر قابل اندازه‌گیری است، استفاده کرد.^۱ این کلاف را می‌توان در نقطه‌ای به دو بخش یا بیشتر تقسیم کرد تا مانند یک تقسیمگر باریکه عمل کند. برای این نوع کاربردهای غیرتصویری، توزیع تارها در داخل کابل می‌تواند کاتوره‌ای باشد. اما وقتی بخواهیم تصویرسازی کنیم، باید سرهای تارها در ورودی با سرهای آنها در خروجی هماراسته باشند. برای برقراری این همارایی، تارها در دو سر به هم پیوند داده می‌شوند. نماتار متشکل از یک کلاف از این نوع تارها است که در دو سر به عدسی شیئی و چشمی مجهز شده است. استفادهٔ پزشکان از این وسیله برای معاینهٔ ناحیه‌هایی از شکم، شنش، و اثنی عشر (دوازدهه) یک کار عادی است. بعضی از تارها به‌عنوان لولهٔ نور عمل می‌کنند و نور را از چشمهٔ خارجی برای روشن کردن ناحیه‌های غیرقابل دسترسی داخلی منتقل می‌کنند. سایر تارها تصویر را برمی‌گردانند.

تارها را می‌توان با گذاختن پوشش خارجی آنها یا غلافکاری به هم محکم کرد. از این طریق، نماتخته‌های تارنوری ساخته می‌شوند که از آنها به‌عنوان دریچه در لامپهای پرتو کاتودی استفاده می‌شود. به‌علاوه، وقتی این کلافهای تارگذاخته را با گرم کردن و کشیدن باریک کنیم می‌توانیم تصاویر را بسته به مساحت‌های نسبی وجوه ورودی یا خروجی بزرگ یا کوچک کنیم. توان تفکیک تارهای تصویرساز به دقت همسویی تارها و، چنانکه انتظار می‌رود، به قطر d هر تار بستگی دارد. یک تخمین محتاطانه [۱] برای توان تفکیک تار RP با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$RP (\text{خط/mm}) = \frac{500}{d(\mu\text{m})} \quad (1-24)$$

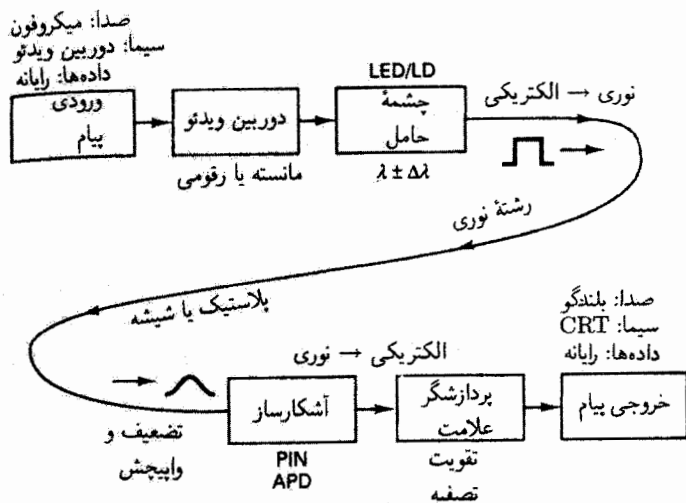
بنابراین، یک تار ۵ میکرومتری، به‌عنوان مثال، می‌تواند تفکیک بزرگی حدود ۱۰۰ خط بر میلی‌متر ایجاد کند.

گسترده‌ترین کاربرد اپتیک تاری در حوزهٔ مخابرات است که در بخش زیر به آن می‌پردازیم.

۲-۲۴ دید کلی از دستگاه مخابراتی

مخابرات صوتی و تصویری و انتقال داده‌ها بیشتر از کاربردهای دیگر باعث توسعهٔ سریع اپتیک تاری شده‌اند. مزایای رسانه‌های تارنوری یا موجبرها نسبت به دستگاههای موجبر میکروموج یا کابل هم‌محور دوسیمی غیر قابل انکار هستند. استفاده از امواج نور به جای میکروموجها و امواج رادیویی مخصوصاً جالب توجه است، زیرا ظرفیت حمل اطلاعات موج حاصل مستقیماً با پهنای نوار بسامد موجود افزایش می‌یابد. بنابراین، کابل تارنوری نسبت به کابل هم‌محور مسی ظرفیت مخابراتی

۱. جالب‌توجه است که معلوم شده است میله‌ها و مخروطهای چشم انسان با انتقال نور در طول خود، همچون تارهای نوری، مانند لوله‌های نور عمل می‌کنند [۱].



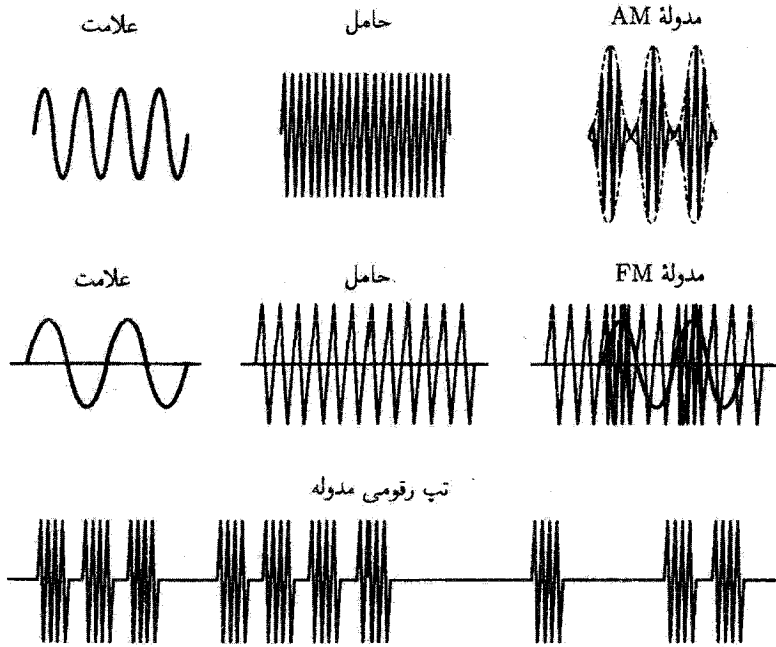
شکل ۲۴-۱ نمای کلی یک دستگاه مخابراتی تارنوری.

بیشتری را در کابل سبکتری که فضای کمتری می‌گیرد فراهم می‌کند. به‌علاوه، مخابرات نوری، برخلاف فنون رسانی فلزی، امکان عایقکاری الکتریکی، مصونیت از تداخل الکترومغناطیسی، و رهایی از نشت علامت را ایجاد می‌کند. مورد اخیر مخصوصاً جایی اهمیت دارد که امنیت اطلاعات، همچون در شبکه‌های رایانه‌ای که با داده‌های محرمانه سروکار دارند، حیاتی است.

در شکل ۲۴-۱ یک نمای کلی از مؤلفه‌ها و فرایندهای اساسی که در یک دستگاه مخابرات تارنوری دخالت دارند، از چشمه پیام تا خروجی پیام، ارائه شده است. در سرورودی کابل تارنوری، اطلاعاتی که باید منتقل شود با نوعی مبدل از علامت الکتریکی به علامت اپتیکی تبدیل می‌شود، و پس از انتقال با تار نوری از علامت اپتیکی به الکتریکی برگردانده می‌شود. تار نوری به‌عنوان موجبر اپتیکی، برای منتشر کردن اطلاعات با کمترین واپیچش و اتلاف توان ممکن در فاصله‌ای که می‌تواند از چند متر تا چند هزار کیلومتر باشد، عمل می‌کند.

چشمه پیام می‌تواند شنیداری باشد، که یک علامت الکتریکی مانسته از میکروفون را فراهم می‌کند، یا ممکن است دیداری باشد، که یک علامت مانسته از دوربین ویدئو را فراهم می‌کند، یا می‌تواند اطلاعات رمزبده رقمی، مانند داده‌های رایانه‌ای به‌صورت قطار تپ، باشد. پیکره‌های مانسته و رقمی قابل تبدیل به یکدیگر هستند، و در نتیجه انتخاب پیکره برای انتقال از طریق تار، ماهیت اصلی علامت هر چه باشد، همیشه امکانپذیر است.

هدف مدوله‌ساز اجرای این تبدیل در وقت لزوم و نشانیدن این علامت روی موج حاملی است که چشمه حامل تولید کرده است. برای گنجانیدن اطلاعات علامت در موج حامل می‌توان این



شکل ۲۴-۲ سه نوع مدوله‌سازی که در آنها موج حامل برای اینکه علامت را حمل کند تغییر یافته است. بالا: مدوله‌سازی دامنه؛ وسط: مدوله‌سازی بسامد؛ پایین: مدوله‌سازی رقومی که در آن یک تپ یا هست ("روشن") یا نیست ("خاموش").

موج را از راه‌های مختلفی، معمولاً با مدوله‌سازی دامنه (AM)، مدوله‌سازی بسامد (FM)، و مدوله‌سازی رقومی، مدوله کرد^۱ (شکل ۲۴-۲ را ببینید). در دستگاه‌های تارنوری، چشمه حامل یک دیود گسیلنده نور (LED) یا لیزر دیودی (LD) است (بخش ۲-۵ را ببینید). موج حاصل ایده‌آل یک موج تک‌بسامد با توان کافی برای انتشار دوربرد در تار است. در واقع، هیچ چشمه نوری نمی‌تواند تابشی با بسامد منفرد تولید کند. LD و LED با نوار بسامدی با طول موج مرکزی λ و پهنای طیفی $\Delta\lambda$ مشخص می‌شوند. LD ارجحیت دارد زیرا بیشتر از LED به بسامد منفرد ایده‌آل نزدیک می‌شود؛ اما ملاحظات دیگر، چنانکه خواهیم دید، LED را در بعضی از دستگاه‌ها قابل قبول کرده‌اند.

در شکل ۲۴-۱، خروجی چشمه حامل به تار نوری با یک علامت که تپ مربعی است نمایش داده شده است. این علامت ضمن انتشار در تار به علت سازوکارهایی که آنها را بیان می‌کنیم متحمل تضعیف (اتلاف دامنه) و واپیچش (تغییر شکل) می‌شود. تار می‌تواند نوعاً از شیشه یا پلاستیک با قطر $50\ \mu\text{m}$ باشد. اگر این تار بسیار دراز باشد، ممکن است لازم شود که علامت

۱. بعضی از فنون مدوله‌سازی نور در فصل ۲۶ بررسی شده‌اند.

در یک یا چند نقطهٔ میانی با یک تکرارگر که شکل اصلی تپ را تقویت و بازسازی می‌کند قطع شود.^۱ در سر دور تار، علامت نوری به یک آشکارساز جفت می‌شود که علامت اپتیکی را دوباره به علامت الکتریکی تبدیل می‌کند. این کار با یک وسیلهٔ نیرسانا، که اکثراً یک دیود PIN، یا یک دیود بهمنی، یا یک فوتوفزونیتر (بخش ۲-۶) است، به انجام می‌رسد. البته پاسخ آشکارساز باید با بسامد اپتیکی علامت دریافتی کاملاً جور شده باشد. آنگاه خروجی آشکارساز با یک پردازشگر علامت که کار آن بازگیری علامت الکتریکی اصلی از حامل است—فرایندی که شامل تصفیه و تقویت و احتمالاً تبدیل رقومی به مانسته است—پردازش می‌شود. سپس خروجی پیام را می‌توان با بلندگو (شنیداری)، لامپ پرتو کاتودی (دیداری)، یا ورودی رایانه (رقومی) مخابره کرد.

۲۴-۳ پهنای نوار و آهنگ داده‌ها

هر چه علامتی که باید مخابره شود پیچیده‌تر باشد گسترهٔ طول‌موجهایی که برای نمایش آن لازم‌اند بزرگتر است. خروجی یک دستگاه استریو به علامت اصلی وفادارتر از خروجی گوشی تلفن است زیرا گسترهٔ بسامد بزرگتری به فرایند بازتولید اختصاص یافته است. گسترهٔ بسامد لازم برای مدوله کردن حامل در یک مجرای منفرد تلفن تنها ۴ kHz است، در حالی که پهنای نوار یک ایستگاه فرستندهٔ رادیویی FM برابر با ۲۰۰ kHz است. در یک ایستگاه فرستندهٔ تلویزیونی تجاری، که باید علامتهای صوتی و تصویری را با هم مخابره کند، پهنای نوار ۶ MHz به‌کار برده می‌شود. قوهٔ حمل اطلاعات زیاد باریکهٔ نور وقتی ظاهر می‌شود که نسبت بسامد حامل به پهنای نوار را، که اندازه‌ای از تعداد مجراهای جداگانه‌ای است که می‌توان روی حامل سوار کرد، محاسبه کنیم. برای یک ایستگاه تلویزیونی که از حامل ۳۰۰ MHz استفاده می‌کند این نسبت $300 \text{ MHz} / 6 \text{ MHz}$ یا ۵۰ است؛ برای یک تار نوری که از حامل طول‌موج $1 \mu\text{m}$ (10^8 MHz) برای حمل اطلاعات یکسانی استفاده می‌کند این نسبت $10^8 \text{ MHz} / 6 \text{ MHz}$ یا ۳۰۰۰۰۰۰۰ است!

اگر بتوانیم تپهای متمایز را با توالی سریع‌تری تراگسیل کنیم، اطلاعات بیشتری را می‌توانیم با تار نوری بفروستیم. این کار مستلزم بسامد بزرگتر یا در مورد اطلاعات رقومی مستلزم آهنگ بیت بزرگتر است. در مورد اخیر، فرض کنید ۸ بیت (تپهای روشن یا خاموش) برای نمایش دامنهٔ یک علامت رقومی لازم‌اند. بنابه قضیهٔ نمونه‌گیری^۱ یک علامت مانسته باید با آهنگی دست‌کم دو برابر مؤلفهٔ بیشترین بسامد آن نمونه‌گیری شود تا با وفاداری نمایش داده شود. در مورد مجرای تلویزیونی با

۱. در مطالعات نظری و کاربردهایی که از قبل به راه افتاده‌اند از تارهای اریبوم-آلودهٔ سیک که از انتهای فرستنده دمیده می‌شوند استفاده می‌شود به طوری که خود تار همچون یک تقویت‌کنندهٔ گسترده عمل می‌کند. بدین ترتیب، این تار می‌تواند اتلافهای خود را برطرف کند و احتیاج به ایستگاههای تکرارگر را کاهش دهد یا حذف کند. [۱۱] و [۱۸] را ببینید.
۱. در بحث طیف‌نمایی تبدیل فوریه در بخش ۲۵-۲، باز هم با این قضیه مواجه می‌شویم.

پهنای نوار ۶ MHz، این نسبت به معنی این است که $2 \times 6 \text{ MHz}$ یا $10^6 \times 12$ نمونه باید در هر ثانیه گرفته شود. چون هر نمونه با استفاده از ۸ بیت توصیف می‌شود، آهنگ داده‌های لازم برابر با ۹۶ Mbps (مگابیت بر ثانیه) است. آهنگ داده‌ها توسط ظرفیت مدوله‌ساز و همچنین توسط واپیچشهای تار که مانع تشخیص واضح تپهای مجاور هستند، و در بحثهای آینده خواهیم دید، محدود می‌شود.

۲۴-۴ اپتیک انتشار

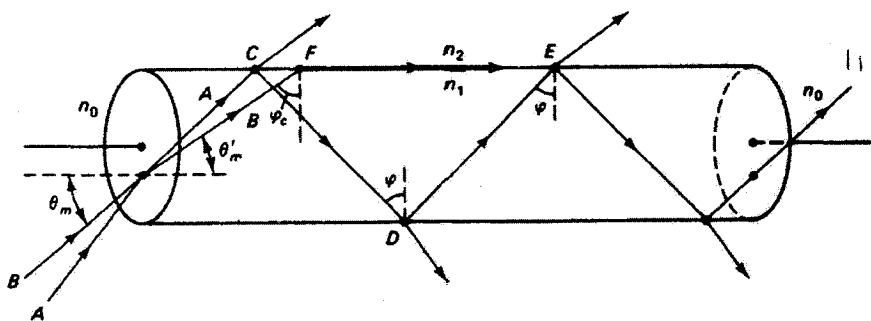
اکنون نحوه انتشار نور در تار نوری را بررسی می‌کنیم. در اینجا شرایط انتشار موفق را عمدتاً از دیدگاه اپتیک هندسی به دست می‌آوریم. به علاوه، تنها پرتوهای نصف‌النهاری را که با محور مرکزی تار برخورد می‌کنند در نظر می‌گیریم.^۱

بخش کوچکی از یک تار مستقیم را در نظر بگیرید که در شکل ۲۴-۳ الف نشان داده شده است. خود تار دارای ضریب شکست n_1 است، در حالی که ماده احاطه‌کننده آن (که غلاف نامیده می‌شود) دارای ضریب شکست n_2 است، و وجوه انتهایی در معرض محیطی با ضریب شکست n_0 قرار دارند. پرتو A که از وجه چپ تار وارد می‌شود در آنجا می‌شکند و به نقطه C روی سطح تار می‌رسد و در این نقطه قسمتی از آن با شکست از تار خارج می‌شود و قسمت دیگر بازتاب داخلی پیدا می‌کند. این پرتو داخلی، در حالی که دامنه‌اش کم می‌شود، به D می‌رسد، آنگاه به E و ... این پرتو پس از بازتابهای چندگانه مقدار زیادی از انرژی خود را از دست می‌دهد. برای پرتو A شرط بازتاب داخلی کلی صدق نمی‌کند، یعنی این پرتو به سطح تار در نقاط C ، D ، E ، ... طوری می‌خورد که زاویه فرود φ برای آن کمتر از زاویه بحرانی φ_c است، یا

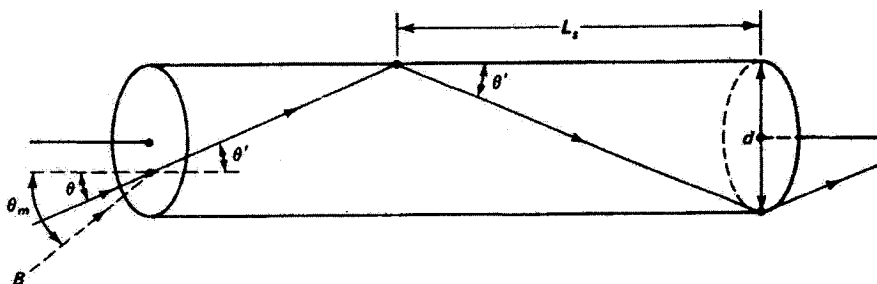
$$\varphi < \varphi_c = \sin^{-1}(n_2/n_1) \quad (2-24)$$

از طرف دیگر، پرتو B که در زاویه کوچکتر θ_m نسبت به محور وارد می‌شود با سطح تار در نقطه F طوری برخورد می‌کند که موازی با سطح تار شکسته می‌شود. پرتوهای دیگر که، همچون در شکل ۲۴-۳، در زاویه‌های $\theta < \theta_m$ فرود می‌آیند در سطح تار بازتاب داخلی کلی می‌یابند. این پرتوها با دنباله‌ای از این نوع بازتابها، بدون اتلاف انرژی به علت شکست به خارج استوانه، در امتداد تار منتشر می‌شوند. اما بسته به درجه شفافیت ماده تار نسبت به نور، اندکی تضعیف به علت جذب روی می‌دهد.

۱. پرتوهای دیگر، که پرتوهای متناظر نامیده می‌شوند، در صفحه شامل محور مرکزی تار قرار ندارند. این پرتوها دارای مسیر مارپیچی مقطع در تار هستند.



(الف)



(ب)

شکل ۳-۲۴ الف) انتشار پرتوهای نور در تار نوری. پرتو B معرف بزرگترین مخروط پرتوهای ورودی است که متحمل بازتاب داخلی کلی در دیواره تار می‌شوند. ب) انتشار یک پرتو نوعی نور در تار نوری.

بدین ترتیب، پرتو B نمایشگر یک پرتو حدی است که سطح جانبی مخروطی از پرتوهایی را تعیین می‌کند که برای تمام آنها شرط بازتاب داخلی کلی در تار صادق است. بدیهی است که نیم‌زاویهٔ ماکسیمم θ_m مربوط به این مخروط به زاویهٔ بحرانی بازتاب φ_c وابسته است. در وجه ورودی داریم

$$n_0 \sin \theta_m = n_1 \sin \theta'_m \quad (3-24)$$

و در نقطه‌ای مانند F

$$\sin \varphi_c = \frac{n_2}{n_1}$$

با استفاده از این واقعیت هندسی که $\theta'_m = 90^\circ - \varphi_c$ و اتحاد مثلثاتی $\sin^2 \varphi_c + \cos^2 \varphi_c = 1$

از ترکیب این روابط گشودگی عددی با تعریف زیر به دست می آید

$$\text{N.A.} \equiv n_o \sin \theta_m = n_1 \cos \varphi_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (4-24)$$

اگر $n_o = 1$ ، گشودگی عددی صرفاً سینوس نیم زاویه بزرگترین مخروط پرتوهای نصف النهاری (یعنی پرتوهای هم صفحه با محور تار) است که با دنباله ای از بازتابهای داخلی کلی در تار منتشر می شوند. واضح است که گشودگی عددی نمی تواند بزرگتر از یک باشد مگر اینکه $n_o > 1$ به عنوان مثال، گشودگی عددی ۰٫۶ را متناظر با مخروط پذیرش 74° است. توانایی جمع آوری نور تار نوری با گشودگی عددی آن افزایش می یابد.

همچنین از شکل ۳-۲۴ ب می توان فاصله پرش L_s را بین دو بازتاب متوالی پرتو نوری که در تار منتشر می شود به صورت زیر تعریف کرد

$$L_s = d \cot \theta' \quad (5-24)$$

که در آن d قطر تار است. از مربوط کردن θ' به زاویه ورود θ با قانون اسنل، به دست می آوریم

$$L_s = d \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_o \sin \theta}\right)^2 - 1} \quad (6-24)$$

به عنوان مثال، در مورد $n_o = 1$ ، $n_1 = 1.60$ ، $\theta = 30^\circ$ و $d = 50 \mu\text{m}$ ، از معادله ۶-۲۴ نتیجه می گیریم که $L_s = 152 \mu\text{m}$. بنابراین، در یک متر از این تار تعداد بازتابها ($\cong 1/L_s$) تقریباً ۶۵۸۰ است. در جدول ۱-۲۴ امکانات مختلف درونه و غلاف، با مقادیر محاسبه شده زاویه

جدول ۱-۲۴ مشخصات چند تار نوری

$1/L_s$	N.A.	θ_{\max}	φ_c	n_2	n_1	n_o	درونه-غلاف
۸۹۴۴	۱	90.0°	41.8°	1.0	1.50	۱	شیشه-هوا
۳۸۶۶	0.54	35.5°	68.9°	1.39	1.49	۱	پلاستیک-پلاستیک
۲۹۶۲	0.41	24.5°	73.5°	1.40	1.46	۱	شیشه-پلاستیک
۱۶۵۷	0.24	14.0°	80.6°	1.46	1.48	۱	شیشه-شیشه

تذکر: عکس فاصله پرش ($1/L_s$) یا پرش بر متر) برای تار با قطر $100 \mu\text{m}$ و در $\theta = \theta_{\max}$ محاسبه شده است.

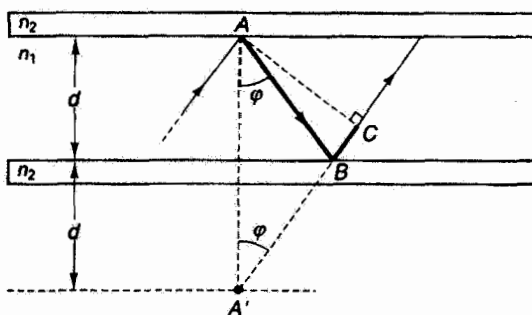
بحرانی، گشودگی عددی، و فاصله پرش، فهرست شده‌اند. با این تعداد زیاد بازتاب، شرط بازتاب داخلی کلی باید دقیقاً در تمام طول تار برقرار باشد. خراشها یا بی‌نظمیهای سطح و همچنین غبار، رطوبت و چربی سطح منابع اتلافی می‌شوند که انرژی نور را سریعاً کاهش می‌دهند. اگر در هر بازتاب تنها ۱٪ نور تلف شود، این تضعیف در طول ۱ m انرژی را با ضریبی حدود ۷۲۰ کم می‌کند. بنابراین، برای حفظ کیفیت اپتیکی تار لازم است که تار با لایه‌ای از پلاستیک یا شیشه که غلاف نامیده می‌شود پوشانده شود. احتیاجی نیست که ماده غلاف زیاد شفاف باشد اما باید با درون تار، به عنوان مثال، برحسب ضرایب انبساط سازگار باشد. ضریب شکست n_2 برای غلاف، با $n_1 < n_2$ ، روی زاویه بحرانی و گشودگی عددی تار تأثیر می‌گذارد.

غلاف اطراف درون تار وظیفه مهم دیگری نیز دارد که عبارت است از جلوگیری از وقوع چیزی که بازتاب داخلی کلی بازداشته نامیده می‌شود. اگر فرایند بازتاب داخلی کلی را به صورت برهم‌کنش آشفته‌گی موجی با نوسانگرهای الکترونی تشکیل دهنده محیط در نظر بگیریم، بدیهی است که نفوذ کم‌گستره‌ای برای موج به آن سوی مرز روی خواهد داد. با اینکه دامنه موج در آن سوی مرز سریعاً کاهش می‌یابد، اگر محیط دومی در این ناحیه قرار داده شود می‌تواند به موج جفت شود و وسیله‌ای برای انتقال انرژی به خارج فراهم کند که در غیر این وضعیت به محیط اول برمی‌گشت. بدین ترتیب، اگر تارهای نوری لخت را به طور فشرده در یک کلاف کنار هم قرار دهیم مقداری نشت بین تارها خواهیم داشت که این پدیده را در کاربردهای مخابراتی تداخل خط می‌نامند. وجود غلاف با ضخامت کافی مانع نشت می‌شود یا، به بیان پیچیده‌تر، با بازداشتگی بازتاب داخلی کلی مخالفت می‌کند.^۱ در بحث بالا فرض شده است که درون تار نوری از لحاظ ترکیب همگن است و تنها با یک ضریب شکست n_1 مشخص می‌شود. نور در این تار با بازتابهای داخلی کلی چندگانه منتشر می‌شود. این نوع تارها را تار ضریب پله‌ای می‌نامند زیرا ضریب شکست بین درون و غلاف به طور ناپیوسته تغییر می‌کند. اگر تار چندین مد متمایز (یا راستای پرتو) را منتشر کند آن را تار چندمدی می‌نامند. وقتی تار به اندازه‌ای باریک است که تنها برای یک مد (پرتو در راستای محور) این شرط صدق می‌کند تار یک‌مدی نامیده می‌شود. محدودیتهای مدهای ممکن را بعداً شرح می‌دهیم. نوع دیگری تار تولید می‌شود که ضریب شکست آن از محور درون به صورت تابعی از شعاع کاهش می‌یابد و آن را تار ضریب تدریجی می‌نامند. درباره تمام این انواع در بخشهای بعد بحث خواهیم کرد.

۵-۲۴ مدهای مجاز

در یک تار نوری، تمام پرتوهایی که در محدوده مخروط پذیرش تار وارد آن می‌شود نمی‌توانند انتشار موفقی در تار داشته باشند. تنها راستاهای پرتو یا مدهای مشخصی مجازاند. برای اینکه ببینیم چرا

۱. این مبحث در بخش ۵-۲۰ به طور کمتی بررسی شده است.



شکل ۴-۲۴ مقطع طولی یک موجبر تخت با نمایش انتشار موفق یک پرتو یا یکی از مدهای ممکن. هندسه مربوط برای تعیین شرط تداخل سازنده است.

همه مدها مجاز نیستند، مورد ساده‌تر موجبر تخت یا تخته‌ای را که در شکل ۴-۲۴ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. درونه این موجبر با ضریب شکست n_1 دارای مقطع عرضی مستطیلی (نه دایره‌ای) است و با غلافی با ضریب n_2 در بالا و پایین به‌طور متقارن محصور شده است. یک پرتو نمونه نشان داده شده است که از سطح جدایی درونه-غلاف در نقاط A و B متحمل دو شکست داخلی کلی می‌شود. با یادآوری اینکه این پرتو نمایشگر امواج تختی است که در موجبر به بالا و پایین حرکت می‌کنند، بدیهی است که این امواج روی هم می‌افتند و با هم تداخل می‌کنند. تنها امواجی نگه داشته می‌شوند که شرط تشدید برای آنها صادق باشد. توجه کنید که نقاط A و C روی یک جبهه موج مشترک از این نوع امواج قرار دارند. اگر تغییر فاز کل که بین نقاط A و C ایجاد می‌شود مضربی از 2π باشد آنگاه جبهه‌های موج تداخل‌کننده متحمل تداخل سازنده می‌شوند و راستاهای پرتو مربوط به آنها مجاز هستند. تغییر فاز کل از دو قسمت تشکیل می‌شود که یکی از اختلاف راه نوری Δ ناشی می‌شود و دیگری تغییر فاز $2\phi_r$ است که به علت دو بازتاب داخلی کلی که در نقاط A و B روی می‌دهند به‌وجود می‌آید. بنابراین، برای امواج خودنگه‌دار باید شرط زیر برقرار باشد

$$\frac{\Delta}{\lambda} 2\pi + 2\phi_r = 2m\pi$$

که در آن m یک عدد درست است. از تمثیلهای هندسی که در شکل ۴-۲۴ با خط چین نشان داده شده‌اند، و مثلث ACA' را می‌سازند، واضح است که

$$\Delta = AB + BC = A'B + BC = 2n_1 d \cos \phi \quad (۷-۲۴)$$

و در نتیجه مدهای ممکن با رابطه زیر داده می‌شوند

$$m = \frac{2n_1 d \cos \varphi}{\lambda} + \frac{\phi_r}{\pi}$$

اما چون $\phi_r < \pi$ ، جمله دوم حداکثر برابر با یک است و در مقایسه با جمله اول قابل چشمپوشی است. بدین ترتیب، هر مد موفق انتشار در موجبر دارای یک عدد مد درست m است که به راستای φ_m مربوط می‌شود و با رابطه زیر داده می‌شود

$$m \cong \frac{2n_1 d \cos \varphi_m}{\lambda} \quad (۸-۲۴)$$

برای مقاصد فعلی ما، تعداد دقیق مدهای مجاز به اندازه وابستگی کیفی مرتبه مد m به مشخصات تار اهمیت ندارد. توجه کنید که مدهای مرتبه پایین m های کوچک با $\varphi \cong 90^\circ$ ، یا با راستاهای پرتو تقریباً محوری، متناظراند، و مدهای مرتبه بالا m های بزرگ متناظر با پرتوهایی هستند که با φ ی نزدیک به φ_c ، یا با زاویه‌های پرتو پرشیب‌تر، منتشر می‌شوند. تعداد کل مدهای منتشرشونده وقتی برابر با مقدار m است که $\cos \varphi_m$ بیشترین مقدار خود را دارد. این وضعیت در زاویه بحرانی، $\varphi_m = \varphi_c$ ، روی می‌دهد. چون بنابه معادله ۴-۲۴، داریم $n_1 \cos \varphi_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = N.A.$ می‌توانیم بنویسیم

$$m = \frac{2d}{\lambda} N.A. + 1 = \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} + 1 \quad (۹-۲۴)$$

عدد ۱ را به تعداد کل مدها اضافه کرده‌ایم تا مد "سراسر" ($m = 0$) در $\varphi = 90^\circ$ را به حساب آورده باشیم. در پایان باید متذکر شویم که چون دو قطبش مستقل برای موج تخت منتشرشونده داریم، تعداد کل مدها دو برابر آن است که در معادله ۹-۲۴ داده شده است.

از این تحلیل موجبر تخت برای روشن کردن دلایل فیزیکی محدودیت مدها استفاده شده است. تحلیلی که مدهای ممکن در تار استوانه‌ای را مشخص می‌کند مبتنی بر اصول فیزیکی یکسانی است اما پیچیده‌تر است و آن را در اینجا بررسی نمی‌کنیم. در این مورد، نشان داده شده است [۲ و ۳] که

$$m_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi d}{\lambda} N.A. \right)^2 \quad (۱۰-۲۴)$$

توجه کنید که، همچون برای موجبر تخت، تعداد مدهای ممکن با نسبت d/λ افزایش می‌یابد. بنابراین، تارهای قطورتر تارهای چندمدی هستند. اگر d/λ به اندازه کافی کوچک باشد طوری که $m < 2$ ، تنها مد محوری می‌تواند در تار منتشر شود. آنگاه یک تار تک‌مد (یا یک‌مدی) داریم. قطر لازم برای اجرای یک‌مدی با تحمیل شرط $m_{\max} < 2$ روی معادله ۲۴-۱۰ به دست می‌آید:

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{2}{\pi(N.A.)}$$

تحلیل دقیقتر [۲] نشان می‌دهد که حتی وقتی

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{2.4}{\pi(N.A.)} \quad (11-24)$$

باز هم اجرای یک‌مدی حاصل می‌شود..

مثال

فرض کنید از یک تار نوری (با ضریب درونۀ ۱٫۴۶۵ و ضریب غلاف ۱٫۴۶۰) در طول موج $1.25 \mu\text{m}$ استفاده می‌شود. قطر لازم برای اجرای تک‌مد و تعداد مدهای منتشرشونده را به ازای $d = 50 \mu\text{m}$ تعیین کنید.

حل: در این مورد عدد گشودگی N.A. برابر است با $0.121 = \sqrt{(1.465^2 - 1.460^2)}$ و قطر لازم برای اجرای تک‌مد از رابطه ۲۴-۱۱ به دست می‌آید:

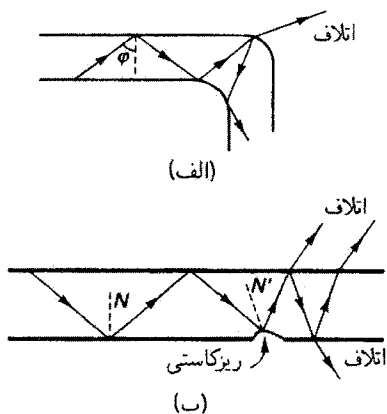
$$d < \frac{2.4}{\pi(0.121)} (1.25 \mu\text{m}) \quad \text{یا} \quad d < 7.9 \mu\text{m}$$

از طرف دیگر، اگر $d = 50 \mu\text{m}$ ، تار چندمدی است و تعداد مدهای منتشرشونده بنا به معادله ۲۴-۱۰ برابر است با

$$\blacktriangle \quad m_{\max} = \frac{1}{2} \left[\pi \frac{50}{1.25} (0.121) \right]^2 = 115$$

۲۴-۶ تضعیف

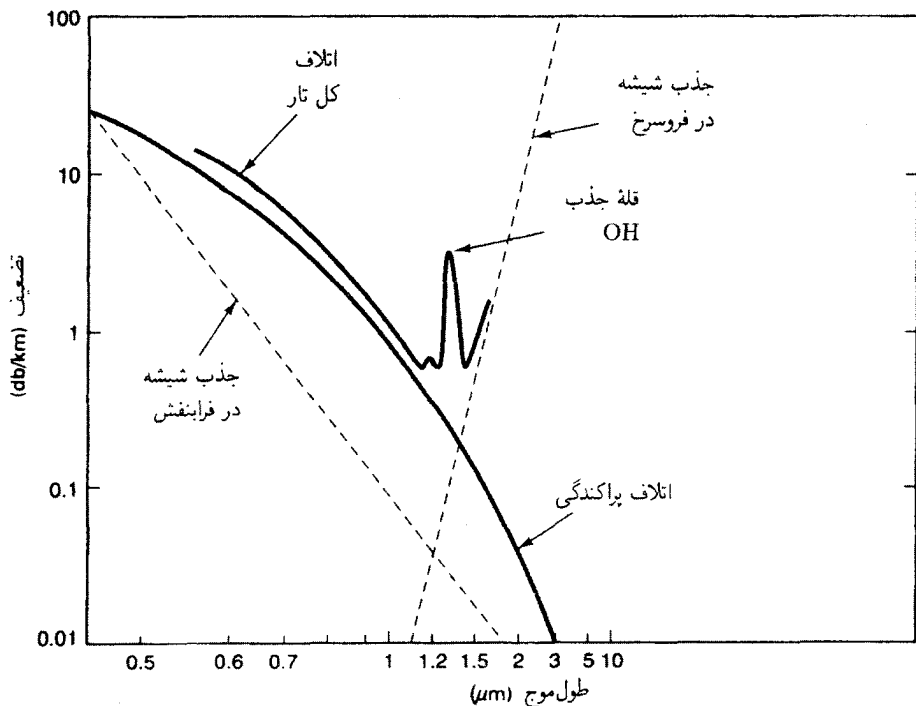
شدت نور منتشرشونده در تار دائماً به علت سازوکارهای مختلفی که می‌توان آنها را به صورت اتلافهای عارضی و ذاتی رده‌بندی کرد تضعیف می‌شود. ناهمگنیا و اثرات هندسی در زمره



شکل ۵-۲۴ اتلاف تابش از تار نوری به علت (الف) خم تند و (ب) ریزکاستیها در سطح تار اتلاف جایی روی می‌دهد که شرط بازتاب داخلی کلی برقرار نباشد. توجه کنید که در (ب) کاستی همچنین باعث جفت‌شدگی مد می‌شود، که در این مورد تبدیل از یک مد پایسته به یک مد بالاتر است.

اتلافهای عارضی هستند. ناهمگنیهایی که اندازه‌های آنها بسیار بزرگتر از طول موج اپتیکی هستند می‌توانند، به عنوان مثال، از آمیختگی نامناسب ماده تار قبل از جامد شدن و از سطح جدایی ناقص بین درونه و غلاف ناشی شوند. بی‌نظمیهای هندسی شامل خمهای تند و همچنین ریزخمهایی هستند که هردو باعث اتلاف تابش می‌شوند زیرا شرط بازتاب داخلی کلی دیگر برقرار نیست (شکل ۵-۲۴ را ببینید). سایر اتلافهای عارضی وقتی روی می‌دهند که نور به درون یا به خارج تار جفت می‌شود. در ورودی تار اتلافهایی به علت محدودیتهای گشودگی عددی و همچنین اتلافهایی به علت بازتابهای چاره‌ناپذیر در سطح، که اتلافهای فرنل نامیده می‌شوند، وجود دارند. نقش تابش و اندازه چشمه نور نیز ممکن است به سرورودی تار بد وفق داده شده باشند، که این باعث کاهش بازدهی ورودی می‌شود. البته این نوع اتلافها در سر خروجی، که نور از تار به آشکارساز خورانده می‌شود، نیز روی می‌دهند. باز هم اتلافهای دیگری در خطهای درازتر، هر جا رابطها، جفتگرها و اتصالها لازم باشند، اهمیت پیدا می‌کنند. بدجورشدگی سرهای جفت‌شده تار، که در آن قطر درونه و همردیف‌سازی عرضی و زاویه‌ای دخالت دارند، می‌تواند باعث اتلاف شود. جدایی و ناسازگاری گشودگی عددی نیز امکان‌پذیر هستند و وقتی خوب تصحیح نشده باشند می‌توانند منجر به اتلافهای بزرگی شوند.

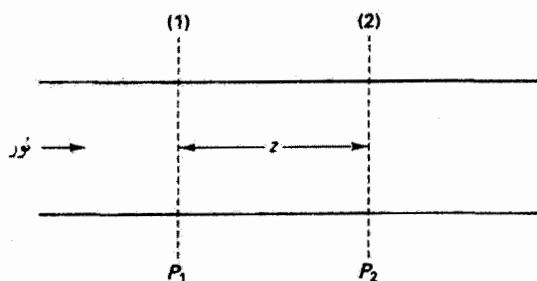
اتلافهای ذاتی به علت جذب، هم توسط ماده درونه و هم توسط ناخالصیهای باقی‌مانده، و به علت پراکندگی ریلی هستند، که این یکی از ناهمگنیهایی میکروسکوپی که اندازه آنها از



شکل ۲۴-۶ سهمهای مربوط به تضعیف کل برای نار شیشه‌ای سیلیکای ژرمانیم-آلوده.

طول موج اپتیکی کوچکتر است ناشی می‌شود. ماده درونه سیلیکا در مورد تارهای شیشه‌ای— در ناحیه نوارهای گذار الکترونی و مولکولی خود جذب می‌کند (شکل ۲۴-۶ را ببینید). جذب شدید در فرابنفش به علت نوارهای الکترونی و مولکولی روی می‌دهد. جذب در فروسرخ به علت نوارهای ارتعاشی مولکولی است. وقتی طول موج به ناحیه مرئی نزدیک می‌شود جذبهای فرابنفش و فروسرخ کاهش می‌یابند. شکل ۲۴-۶ یک مینیمم جذب در نزدیکی $1.3\mu\text{m}$ را نشان می‌دهد. ناخالصیهایی باقی مانده، مانند یونهای فلزات واسط ($\text{V}, \text{Cr}, \text{Mn}, \text{Ni}, \text{Co}, \text{Cu}, \text{Fe}$) و مخصوصاً یون هیدروکسیل (OH)، نیز در جذب دخیل اند، و این آخری جذب عمده‌ای در 95°C ، $1.23\mu\text{m}$ و $1.73\mu\text{m}$ ایجاد می‌کند. پراکندگی ریلی، با وابستگی مشخصه $1/\lambda^4$ خود، از تغییرات جایگزیده در چگالی یا ضریب شکست ماده درونه ناشی می‌شود.^۱ به‌عنوان مثال، یک تار نوری که در $1.3\mu\text{m}$ ، به جای مثلاً 800nm ، تراگیسیل می‌کند یک کاهش هفت‌باره در اتلافهای پراکندگی ریلی از خود نشان می‌دهد.

۱. درباره پراکندگی ریلی با تفصیل بیشتری در بخش ۱۵-۳ بحث شده است.



شکل ۷-۲۴ نمودار مربوط به تعریف ضریب جذب برای تار شیشه‌ای.

اتلافهای جذبی در طول تار L را می‌توان با قانون نمایی معمولی برای تابیدگی نور I توصیف کرد:

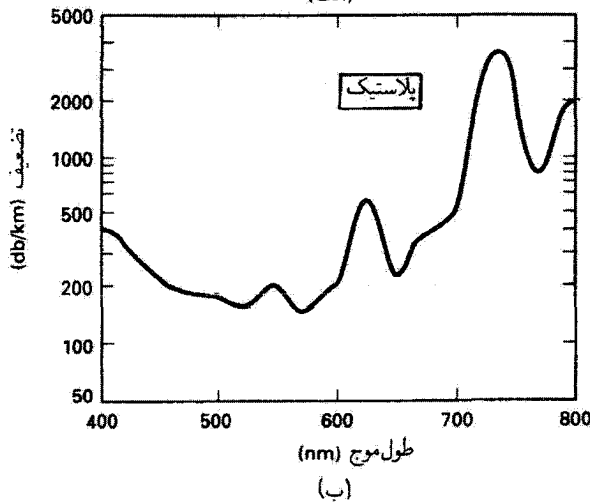
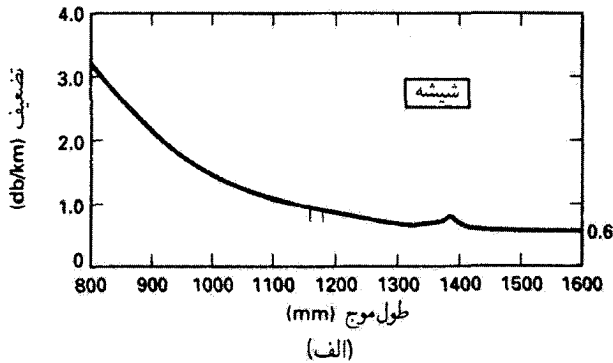
$$I = I_0 e^{-\alpha L} \quad (۱۲-۲۴)$$

که در آن α ، که تابع طول موج است،^۱ ضریب تضعیف یا جذب تار است. برای تارهای نوری، معادله تعریف‌کننده ضریب جذب برحسب دسی‌بل (db) عبارت است از

$$\alpha_{\text{db}} \equiv 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad (۱۳-۲۴)$$

که در آن P_1 و P_2 عبارت‌اند از ترازهای توان نور در مقاطع عرضی (۱) و (۲) که در شکل ۷-۲۴ نشان داده شده‌اند. فاصله z را معمولاً به‌عنوان استاندارد برابر با ۱ km انتخاب می‌کنند. برای مثال، اگر تار خاصی اتلافی معادل $\alpha_{\text{db}} = 5 \text{ db/km}$ را متحمل شود، تنها ۳۲٪ انرژی نور فرستاده شده به تار به طول ۱ km به سر دیگر می‌رسد. (مقادیر منفی α_{db} نشان‌دهنده تقویت هستند!) پیشرفتهای چشمگیری در کاهش جذب سیلیکای گذاشته صورت گرفته‌اند، و در نتیجه امروزه تارهایی با آهنگ 2 db/km (با کار در $155 \mu\text{m}$) به آسانی یافت می‌شوند. تارهای پلاستیکی ارزانتراند اما تا این اندازه شفاف نیستند. تضعیف کل این تارها دست‌کم یک مرتبه بزرگی از تضعیف مربوط به شیشه بیشتر است. بنابراین، تارهای شیشه‌ای در کار بردهای راه دور ارجحیت دارند. از شکل ۸-۲۴ می‌توان تضعیف طیفی در تارهای سیلیکایی و پلاستیکی را مقایسه کرد.

۱. چون پرتوهایی که در زاویه‌های فرود کوچکتر به دیواره تار برخورد می‌کنند فاصله بزرگتری در طول محوری یکسان L در محیط جاذب طی می‌کنند، α تابعی از زاویه فرود نیز هست.

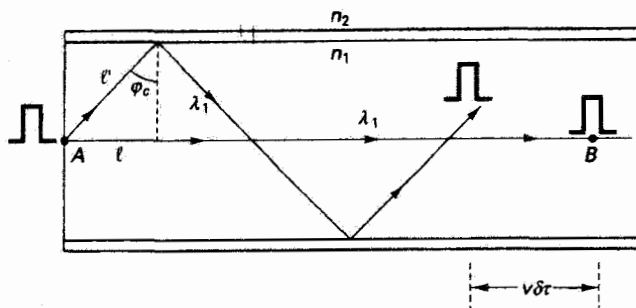


شکل ۲۴-۸ (الف) تضعیف طیفی برای تارهای چندمدی تمام شیشه. (ب) تضعیف طیفی برای کابل تاری تمام پلاستیک.

۲۴-۷ واپیچش

نوری که در یک تار منتقل می شود تنها دارای اتلاف توان از طریق سازوکارهایی که در بالا بیان شدند نیست، بلکه به علت پهن شدگی تب متحمل اتلاف اطلاعات نیز می شود. وقتی نور ورودی برای انتقال اطلاعات مدوله می شود، جبهه موج علامت به علت سازوکارهایی که شرح داده می شوند واپیچیده می شود. علل عمده واپیچش — به ترتیب شدت اثر — واپیچش مدی، پاشندگی ماده و پاشندگی موجبر هستند.

واپیچش مدی. شکل ۲۴-۹ نمودار ورود یک موج مربعی (علامت رقمی) به تار را نشان می دهد. واپیچش مدی به این دلیل روی می دهد که پرتوهای منتشرشونده (مدهای تار) برای رسیدن به



شکل ۹-۲۴ نمایش نموداری وایپیش مدی. یک موج مربعی ورودی در زمانهای مختلف، که به مسیر طی شده بستگی دارند، به انتهای تار می‌رسد. مسیرهای حدی مربوط به پرتو محوری و پرتوی که در زاویه بحرانی منتشر می‌شود، نشان داده شده‌اند. فاصله آنها پس از هر بازه زمانی ΔT برابر با $v\Delta T$ است.

خروجی مسافتهای مختلفی طی می‌کنند. در نتیجه، این پرتوها در زمانهای مختلفی می‌رسند، و موج مربعی پهن می‌شود. کوچکترین فاصله L از A تا B توسط پرتو محوری طی می‌شود؛ بزرگترین فاصله L' از A تا B را شیبدارترین پرتو منتشرشونده که با زاویه بحرانی φ_c بازتابیده می‌شود طی می‌کند. چنانکه از هندسه شکل ۹-۲۴ می‌توان دید، فاصله‌های L و L' با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\sin \varphi_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{l}{L'} = \frac{L}{L'}$$

بنابراین، بازه زمانی δT بین این دو پرتو عبارت است از

$$\delta T = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{L'}{v} - \frac{L}{v} = \frac{L}{v} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$$

که در آن v سرعت نور در درونه تار است. چون $v = c/n$ ، این نتیجه را می‌توان به آسانی به صورت بخش زمانی تپ در واحد طول بیان کرد:

$$\delta \left(\frac{\tau}{L} \right) = \frac{n_1}{c} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2} \right) \quad (۹-۲۴) \text{ وایپیش مدی (تار ضریب پله‌ای):}$$

مثال

فرض کنید تار دارای ضریب درونه ۱٫۴۶ و ضریب غلاف ۱٫۴۵ است. وایپیش مدی را برای این تار به دست آورید.

حل: با استفاده از معادله ۲۴-۱۴، داریم

$$\delta \left(\frac{\tau}{L} \right) = \frac{1.46}{3 \times 10^{-4} \text{ km/ns}} \left(\frac{1.46 - 1.45}{1.45} \right) = 34 \text{ ns/km}$$

نپ به اندازه ۳۴ ns در هر کیلومتر از تار پهن می‌شود. ^۱

واضح است که این اثر پهن‌شدگی باعث محدود شدن بسامد ممکن تپهای متمایز می‌شود. واپیچش مدی را می‌توان با کم کردن تعداد مدهای منتشرشونده کاهش داد. در نتیجه، استفاده از تار تک‌مد، با تنها یک مد منتشرشونده، بهترین راه‌حل است. بهترین راه‌حل بعدی عبارت است از استفاده از تار ضریب تدریجی (GRIN)، که در زیر شرح می‌دهیم.

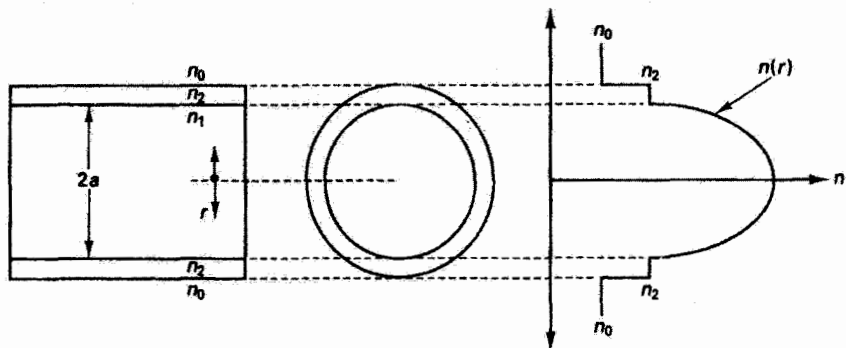
تار ضریب تدریجی (GRIN). تار ضریب تدریجی با ضریب شکستی ساخته می‌شود که تدریجاً از محور درون به صورت تابعی از شعاع کاهش می‌یابد. شکل ۲۴-۱۰ نیم‌رخ تار ضریب تدریجی را همراه با نیم‌رخ تار ضریب پله‌ای معمولی، برای مقایسه، نشان می‌دهد. در تار ضریب تدریجی، فرایند شکست پیوسته پرتوهای نور را خمیده می‌کند. توجه کنید که در هر نقطه از مسیر، قانون اسنل در مقیاس میکروسکوپی برقرار است. نگهداری پرتو اکنون با فرایند شکست پیوسته، به جای بازتاب داخلی کلی، صورت می‌گیرد. شکست ممکن است برای نگه‌داشتن پرتوهایی که زاویه‌های بزرگتر با محور می‌سازند کافی نباشد، و از این رو تارهای ضریب تدریجی با مخروط پذیرش نیز مشخص می‌شوند. وقتی نمودار ضریب شکست به‌طور مناسب تنظیم شود، پرتوهایی که در شکل ۲۴-۱۰ ب.ج نشان داده شده‌اند تشکیل حلقه‌های تک‌زمان می‌دهند، و این یک ویژگی تار ضریب تدریجی است که باعث کاهش واپیچش مدی است. تارهای ضریب تدریجی را نیز مانند تارهای معمولی برای حفاظت غلافکاری می‌کنند.

تغییر ضریب شکست با شعاع تار به‌طور کلی با رابطه زیر داده می‌شود [۴]

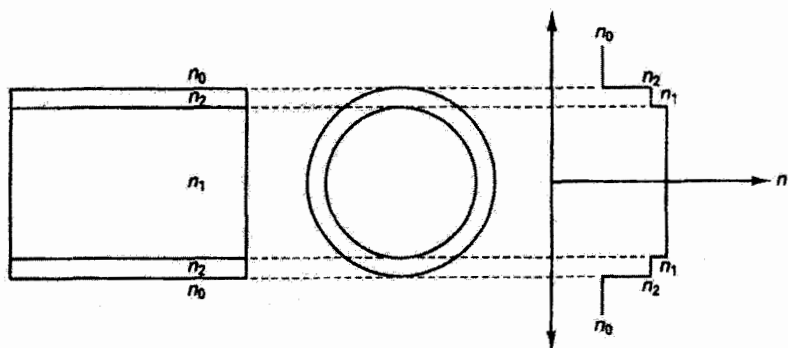
$$n(r) = n_1 \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \Delta}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (15-24)$$

که در آن $n_1 = [n(r)]_{\max}$ و $\Delta \cong (n_1 - n_2)/n_1$ پارامتر α برای مینیمم کردن واپیچش

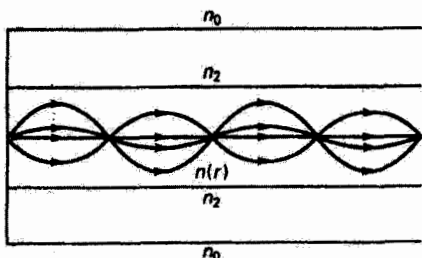
۱. مقادیر واقعی تا اندازه‌ای بهتر از پیش‌بینی معادله ۲۴-۱۴ هستند. علل این امر عبارت‌اند از جفت‌شدگی یا آمیختگی مد (پرتوها می‌توانند ضمن عبور، به علت سازوکارهای پراکندگی که به‌طور متوسط از مدهای بالاتر و پایتر به مدهای میانی توان منتقل می‌کنند، تغییر مد دهند) و تضعیف ترجیحی (مدهای بالاتر که مسیرهای طولانی‌تری طی می‌کنند متحمل تضعیف بیشتری می‌شوند و از این رو سهم کمتری در پهن‌شدگی کل تپ دارند). برای فواصل بزرگتر، اینها منجر به وابستگی تغییر یافته‌ای به صورت $\delta\tau \propto \sqrt{L}$ می‌شوند.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۰-۲۴ نیمرخ تار ضریب تدریجی (GRIN) با نمایشی از تغییر ضریب شکست در درونه. (ب) نیمرخ تار ضریب پله‌ای که در آن ضریب درونه ثابت است و کمی بیشتر از ضریب غلاف است. (ج) چند مسیر پرتو در تار ضریب تدریجی با نمایشی از خودمحصوری آنها به علت شکست پیوسته.

مدی انتخاب می‌شود. به ازای $\alpha = 1$ ، نمودار به شکل مثلث است؛ به ازای $\alpha = 2$ ، نمودار سهموی است؛ به ازای مقادیر بزرگتر α ، نمودار تدریجاً به مورد حدی خود که نمودار ضریب پله‌ای به ازای $\alpha \rightarrow \infty$ است نزدیک می‌شود. مینیمم کردن $\delta\tau$ برای تمام مدها مستلزم مقدار $\alpha = 2$ است. بنابراین، نمودار سهموی شکل ۲۴-۱۰ بهینه است. می‌توان نشان داد [۵] که برای این مورد، پهن‌شدگی تپ به‌طور تقریبی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\delta\left(\frac{\tau}{L}\right) = \frac{n_1}{2c} \Delta^2 \quad (\alpha = 2, \text{ تار ضریب تدریجی}), \quad (16-24)$$

از مقایسه با واپیچش مدی در تار ضریب پله‌ای (معادله ۲۴-۱۴)، می‌توانیم بنویسیم

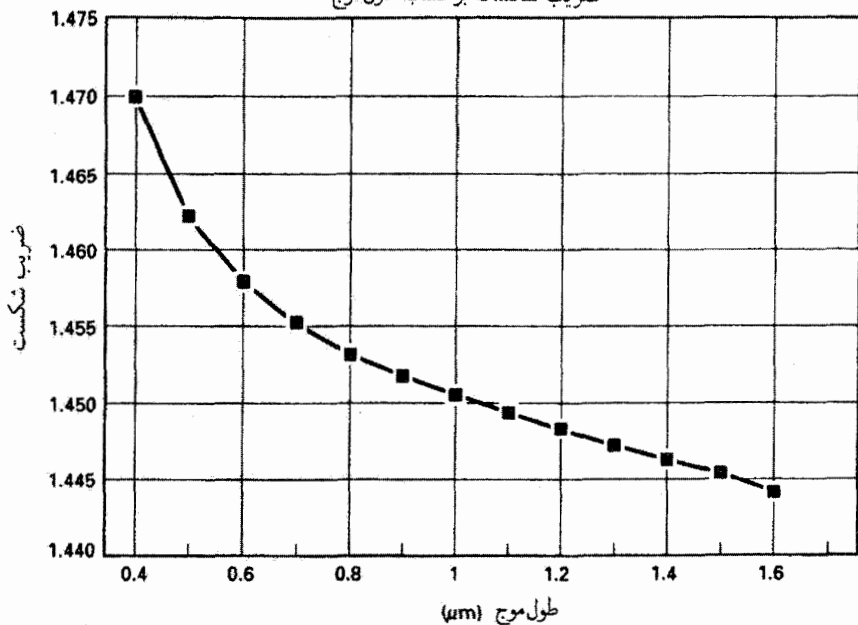
$$\delta\left(\frac{\tau}{L}\right)_{GRIN} = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{n_1}{c} \Delta\right) = \frac{\Delta}{2} \delta\left(\frac{\tau}{L}\right)_{SI}$$

بنابراین، عامل $\Delta/2$ نمایشگر اصلاحی است که تار ضریب تدریجی ایجاد می‌کند. برای مثال قبل، که در آن $n_1 = 1.46$ و $n_2 = 1.45$ داریم $\Delta/2 = 1/292$. تار ضریب تدریجی اثر پهن‌شدگی تپ برای پیچش مدی را در این مورد با ضریب ۲۹۲ کاهش می‌دهد.

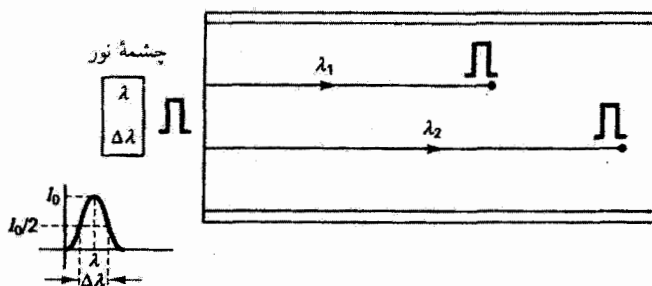
پاشندگی ماده. حتی اگر واپیچش مدی وجود نداشته باشد باز هم مقداری پهن‌شدگی تپ به علت اینکه ضریب شکست تابعی از طول‌موج است روی می‌دهد. پاشندگی برای تار سیلیکایی در شکل ۲۴-۱۱ نشان داده شده است. چون هیچ چشمه نوری نمی‌تواند دقیقاً تکفام باشد، انتشار نور در این تار با پخش طول‌موجهایی که توسط چشمه نوری تعیین می‌شوند مشخص می‌شود. هر مؤلفه طول‌موج دارای ضریب شکستی متفاوت و بنابراین دارای سرعتی متفاوت در تار است. پهن‌شدگی تپ به این علت روی می‌دهد که هر مؤلفه در زمان متفاوتی وارد می‌شود. نور هر چه تکفامتر باشد واپیچش ناشی از پاشندگی ماده کمتر است. برای اینکه تپ خروجی به‌صورت یک تپ منفرد آشکارسازی شود نباید زیاد روی تپهای مجاور بیفتد. این شرط باز هم محدودیتی برای بسامد تپهای ورودی یا آهنگی که با آن می‌توان بیت‌های اطلاعات را فرستاد به‌وجود می‌آورد.

در شکل ۲۴-۱۲، از طریق نمایش پیشروی دو تپ مربعی (با انطباق اولیه) در طول‌موجهای λ_1 و λ_2 در تار، پاشندگی ماده نشان داده شده است. اگر ضرایب شکست مربوط را با n_1 و n_2 نشان دهیم، از شکل دیده می‌شود که باید $n_1 > n_2$. این طول‌موجها تنها دو طول‌موج از بیوستاری هستند که با پهنای طیفی $\Delta\lambda$ ی چشمه، که معمولاً آن را (چنانکه نشان داده شده است) پهنای خروجی طیفی چشمه در نیمه‌ماکسیمم انتخاب می‌کنند، توصیف می‌شود.

پاشندگی در کوآرتز گذاخته
ضریب شکست بر حسب طول موج



شکل ۲۴-۱۱ پاشندگی در کوآرتز گذاخته. ضریب شکست بر حسب طول موج.



شکل ۲۴-۱۲ نمایش نمادین پاشندگی ماده. یک موج مربعی ورودی در زمانهای مختلفی که بستگی به طول موج دارند به انتهای تار می‌رسد. خروجی طیفی چشمه نور هم با طول موج مرکزی λ و هم با پهنای طیفی $\Delta\lambda$ مشخص می‌شود.

چون تار نوری پاشنده است، سرعت انتشار تپ را با سرعت گروه آن، v_g ، توصیف می‌کنیم (بخش ۹-۵). بنابراین، زمان لازم τ برای اینکه علامتی با بسامد زاویه‌ای ω فاصله L را در امتداد

تاری کند با رابطه زیر داده می‌شود

$$\tau(\omega) = \frac{L}{v_g(\omega)}, \quad v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk}$$

اگر $\Delta\omega$ پهنای نوار علامت باشد، پخشیدگی در زمانهای ورود در واحد طول به صورت زیر بیان می‌شود

$$\delta\left(\frac{\tau}{L}\right) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g}\right) \Delta\omega = \frac{d^2 k}{d\omega^2} \Delta\omega$$

اما مشتق اول $dk/d\omega$ را می‌توان از $k = 2\pi/\lambda = n\omega/c$ که در آن n تابعی از ω است، محاسبه کرد:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{1}{c} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (17-24)$$

که در آن از رابطه $\omega/d\omega = -\lambda/d\lambda$ استفاده کرده‌ایم. با در نظر گرفتن مشتق دوم، می‌توانیم بنویسیم

$$\delta\left(\frac{\tau}{L}\right) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dk}{d\omega}\right) \Delta\omega = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dk}{d\omega}\right) \Delta\lambda$$

و با جاگذاری از معادله ۱۷-۲۴ به دست می‌آوریم

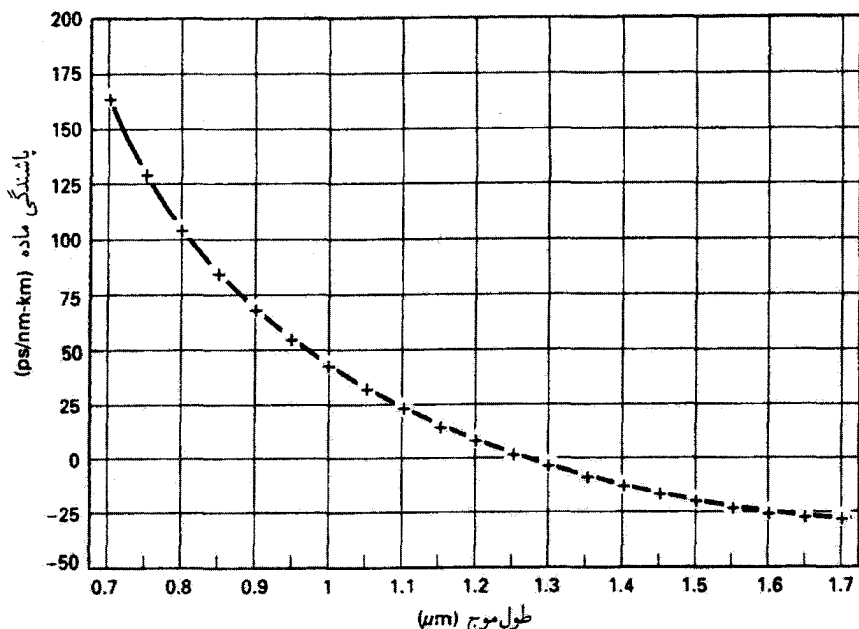
$$\delta\left(\frac{\tau}{L}\right) = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{c} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) \right] \Delta\lambda = \frac{1}{c} \left(\frac{dn}{d\lambda} - \frac{dn}{d\lambda} - \lambda \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \right) \Delta\lambda$$

یا

$$\delta\left(\frac{\tau}{L}\right) = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \Delta\lambda \equiv -M \Delta\lambda \quad \text{باشندگی ماده:} \quad (18-24)$$

که در آن M خاصیتی از ماده درونه است که با حاصلضرب λ/c و مشتق دوم پخشیدگی $(d^2 n/d\lambda^2)$ تعریف می‌شود. از معادله ۱۸-۲۴ دیده می‌شود که M به معنی پخش زمانی تب در واحد پهنای طیفی در واحد طول تار است. مقادیر M (برحسب ps/nm km) برای سیلیکای خالص در شکل ۱۳-۲۴ داده شده‌اند.

باشندگی ماده برای سیلیکات خالص



شکل ۲۴-۱۳ باشندگی ماده برای سیلیکای خالص. کمیت M ، که نمایشگر پهن‌شدگی تب (ps) در واحد پهنای طیفی (nm) در واحد طول تار (km) است، برحسب طول موج ترسیم شده است. پهن‌شدگی تب در $1.27 \mu\text{m}$ را صفر می‌شود و به‌ازای طول موجهای بزرگتر منفی است.

مثال

با استفاده از شکل ۲۴-۱۳، پخش تب ناشی از باشندگی ماده را در سیلیکای خالص برای چشمه‌های نور LED و LD محاسبه کنید. طول موج چشمه را $0.82 \mu\text{m}$ ، با پهنای طیفی 20 nm برای LED و 1 nm برای چشمه تکفامتر LD، بگیریید.

حل: از شکل ۲۴-۱۳، برای $0.82 \mu\text{m}$ مقداری نزدیک به 110 ps/nm km به‌دست می‌آید. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\text{LED} : \delta(\tau/L) = (110 \text{ ps/nm km})(20 \text{ nm}) = 2.2 \text{ ns/km}$$

$$\text{LD} : \delta(\tau/L) = (110 \text{ ps/nm km})(1 \text{ nm}) = 0.11 \text{ ns/km}$$

در $0.82 \mu\text{m}$ ، چشمه LD چنانکه دیده می‌شود 20 بار بهتر از LED است، و این نتیجه مستقیم تکفامی عالی آن است.



همچنین توجه کنید که پهن‌شدگی تب ناشی از پاشندگی ماده بسیار کمتر از پهن‌شدگی ناشی از واپیچش مدی است. بنابراین، پاشندگی ماده تنها وقتی، برای تارهای تک‌مد و ضریب تدریجی، مهم می‌شود که واپیچش مدی بسیار کاهش یافته باشد. در نتیجه، اگر واپیچش مدی وجود داشته باشد، مزیت تکفامی عالی LD نسبت به LED از بین می‌رود. در کاربردهایی که در آنها طولهای تارها به اندازه کافی کوچک هستند، تارهای پلاستیکی و چشمه‌های LED بهترین حد وسط بین کارایی و هزینه را ارائه می‌دهند. در پایان، متذکر می‌شویم که با توجه به شکل ۲۴-۱۳ عملاً M در حدود $1.27 \mu\text{m}$ از صفر می‌گذرد، و در نتیجه با یافتن چشمه‌های نوری که در این ناحیه طیفی کار می‌کنند می‌توان پاشندگی ماده را نیز کاهش داد.

با تعمیم مثال عددی بالا، محدودیت پهنای نوار ناشی از پخشیدگی تب را تعیین می‌کنیم. واپیچش تب بسامد تراگیسل و آهنگ اطلاعات را به طریقی محدود می‌کند که می‌توانیم آن را تا حدی تخمین بزنیم. بدین منظور، این معیار منطقی را اختیار می‌کنیم که برای تشخیص کامل تپهای مجاور از یکدیگر باید فاصله $\delta\tau$ بین آنها کمتر از نصف دوره آنها نباشد:

$$\delta\tau > \frac{T}{2} \quad \text{یا} \quad \delta\tau > \frac{1}{2\nu}$$

که در آن ν بسامد است. نتیجه می‌گیریم که بسامد ماکسیمم برابر است با^۱

$$\nu_{\max} = \frac{0.5}{\delta\tau} \quad \text{یا} \quad \nu_{\max} L = \frac{0.5}{\delta(\tau/L)} \quad (19-24)$$

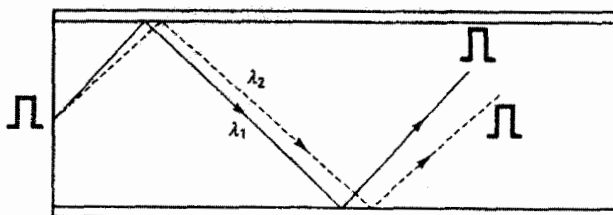
برای مثال عددی بالا، پهنای نوار تقریبی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{LED: } \nu_{\max} L = \frac{0.5}{2.2 \text{ ns/km}} = 0.23 \text{ GHz km}$$

$$\text{LD: } \nu_{\max} L = \frac{0.5}{0.11 \text{ ns/km}} = 4.5 \text{ GHz km}$$

پاشندگی موجبر. آخرین اثری که در پهن‌شدگی تب بررسی می‌کنیم پاشندگی موجبر نامیده می‌شود که یک اثر هندسی است که بستگی به پارامترهای موجبر دارد. در مقایسه با واپیچش مدی و پاشندگی ماده، پاشندگی موجبر اثر کوچکی است که تنها وقتی مهم می‌شود که سایر اثرات پهن‌شدگی

۱. این مقدار متناظر است با تقریباً پهنای نوار ۳ db، یعنی بسامد مدولاسیونی که در آن توان علامت به علت واپیچش علامت به نصف کاهش می‌یابد.



شکل ۲۴-۱۴ نمایش نمادین پاشندگی موجبر. حتی در یک محیط بدون پاشندگی، یک موج مربعی ورودی در زمانهای مختلف، که بستگی به طول موج دارند، به انتهای تار می‌رسد. برای هر مد، زاویه انتشار تابعی از طول موج است.

تپ اساساً حذف شده باشند. اما وجود آن، چنانکه خواهیم دید، در تعیین طول موجی اهمیت دارد که در آن پاشندگی کل تار صفر است.

تغییر ضریب شکست با طول موج، چنانکه قبلاً گفته شد، منجر به پاشندگی ماده می‌شود. یک ضریب شکست موثر n_{eff} برای موج برده تعریف می‌کنیم به صورت $n_{eff} = c/v_g$ که در آن v_g سرعت گروه است. حتی اگر پاشندگی ماده وجود نداشته باشد، تغییر n_{eff} با λ برای تاری با قطر ثابت منجر به پاشندگی موجبر می‌شود. می‌توان نشان داد [۶] که $n_{eff} = n_1 \sin \varphi$. چون φ بین 90° و φ_c تغییر می‌کند و $\sin \varphi_c = n_2/n_1$ ، نتیجه می‌گیریم که n_{eff} بین n_1 (در $\varphi = 90^\circ$) و n_2 (در $\varphi = \varphi_c$) تغییر می‌کند. بنابراین، برای پرتو محوری تنها به ضریب درونه و برای پرتوی در زاویه بحرانی تنها به ضریب غلاف بستگی دارد. تغییر n_{eff} کاملاً کوچک است زیرا $n_1 - n_2$ عملاً بسیار کوچک است. شکل ۲۴-۱۴ پاشندگی موجبر را در نمایش پرتو نشان می‌دهد. برای یک مد معین، زاویه بین پرتو و محور تار با λ تغییر می‌کند. بنابراین، مسیرهای پرتو و زمانهای مربوط به دو طول موج مختلف نیز با λ تغییر می‌کنند، و این تغییر منجر به پهن‌شدگی تپ می‌شود.

تغییر n_{eff} با λ شبیه به پاشندگی ماده است و می‌توان آن را از لحاظ کمی با معادله ۲۴-۱۸، با n_{eff} به جای n ، بیان کرد:

$$\delta \left(\frac{\tau}{L} \right) = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \Delta\lambda \equiv -M \Delta\lambda \quad \text{پاشندگی ماده:} \quad (18-24)$$

$$\delta \left(\frac{\tau}{L} \right) = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2} \Delta\lambda \equiv -M' \Delta\lambda \quad \text{پاشندگی موجبر:} \quad (20-24)$$

می‌توانیم سهم نسبی پاشندگیهای ماده و موجبر را با مقایسه مقادیر M' و M برآورد کنیم. در شکل ۲۴-۱۳، M از حدود ۱۶۵ تا 30 ps/nm km در گستره طیفی ۷ تا $17 \mu\text{m}$ تغییر

می‌کند. مقادیر M' برای کوارتز گذاخته در همین گستره تنها در حدود ۱ تا 4.5 ps/nm km تغییر می‌کند [۶]. به عنوان مثال، از محاسبه مربوط به پاشندگی ماده با استفاده از چشمه LED در $0.82 \mu\text{m}$ ، با $M = 110 \text{ ps/nm km}$ ، مقدار 2200 ps/km را برای پهن‌شدگی تپ به دست آوردیم. به ازای همین طول موج داریم $M' = 2 \text{ ps/nm km}$ ، که پهن‌شدگی تپ برای آن $110/2$ بار کوچکتر یعنی تنها 40 ps/km است.

شکل ۲۴-۱۳ نشان می‌دهد که M برای پاشندگی ماده در حدود $1.27 \mu\text{m}$ صفر می‌شود و سپس در طول موجهای بزرگتر منفی می‌شود. از طرف دیگر، پاشندگی موجبر همیشه مثبت است. بنابراین، از ترکیب این دو پاشندگی، طول موج مربوط به پاشندگی کل صفر به طول موج بزرگتری حدود $1.31 \mu\text{m}$ برای یک تار نوعی منتقل می‌شود. در نتیجه، چشمه‌هایی که در این طول موج یا نزدیک آن کار می‌کنند برای کاهش پهن‌شدگی تپ و افزایش آهنگ تراگسیل مناسب‌اند. در بحث قبلی درباره تضعیف، گفتیم که جذب مینیمم در تارهای سیلیکایی در حدود $1.55 \mu\text{m}$ روی می‌دهد. نزدیکی طول موجهای مربوط به جذب مینیمم و پاشندگی مینیمم باعث کوششهایی برای برقرار کردن هر دو شرط شده است تا در نتیجه محنی پاشندگی، با انتقال به سمت طول موجهای بزرگتر، در $1.55 \mu\text{m}$ به جای $1.31 \mu\text{m}$ از صفر بگذرد. عوامل تغییر محنی پاشندگی عبارت‌اند از استفاده از لایه‌های غلاف چندگانه، تنظیم اختلاف ضرایب شکست درون و غلاف، و تغییر پارامتر نیمرخ α در تارهای ضریب تدریجی.

سه روش اصلی کاهش پهن‌شدگی تپ در تارها که آنها را بررسی کردیم، به طور خلاصه عبارت‌اند از (۱) استفاده از تار تک‌مد برای حذف واپیچش مدی، (۲) استفاده از چشمه نوری با پهنای طیفی کوچک $\Delta\lambda$ برای کاهش پاشندگی ماده، و (۳) استفاده از چشمه نوری که در ناحیه طیفی کار آن هم تضعیف و هم پاشندگی تا حد امکان کوچک‌اند. واضح است که طول لازم برای تار و هزینه‌های تجهیزات نقش عمده‌ای در انتخاب بهترین دستگاه برای یک کاربرد خاص دارند.

مسائل

۲۴-۱ پهنای نوار یک مجرای منفرد تلفن 4 kHz است. در یک دستگاه تلفن خاص، آهنگ تراگسیل 44.7 Mbps است. در یک دستگاه واقعی، بعضی از مجراها را به خدماتی مانند همزمان کردن اختصاص می‌دهند. در این دستگاه، ۲۶ مجرا برای این کار در نظر گرفته شده‌اند. این دستگاه چند مجرای مستقل تلفن را می‌تواند جا بدهد؟

۲۴-۲ حد نظری تعداد مجراهای ایستگاه تلویزیون را که می‌توان روی یک باریکه اپتیکی منفرد به طول موج $1 \mu\text{m}$ فرستاد به دست آورید.

۳-۲۴ (الف) نشان دهید برای پرتوی که در یک موجبر با بزرگترین زاویه نسبت به محور تار حرکت می‌کند، فاصله پرش L_s را می‌توان با رابطه زیر بیان کرد

$$L_s = \frac{n_2 d}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

(ب) برای این پرتو در یک تار ضریب پله‌ای با $n_1 = ۱.۴۶۰$ ، $n_2 = ۱.۴۵۷$ و $d = ۵.۰ \mu\text{m}$ چند بازتاب روی می‌دهند؟

۴-۲۴ در یک تار ضریب پله‌ای، ضریب شکست برای درونه ۱.۵۲ و برای غلاف ۱.۴۱ است. کمیت‌های زیر را به دست آورید:

(الف) زاویه بحرانی،

(ب) گشودگی عددی، و

(ج) زاویه فرود ماکسیم θ_m برای نوری که بازتاب داخلی کلی یافته است.

۵-۲۴ یک تار ضریب پله‌ای به قطر ۰.۲۵ in دارای درونه‌ای با ضریب ۱.۵۳ و غلافی با ضریب ۱.۳۹ است.

(الف) گشودگی عددی تار،

(ب) زاویه پذیرش (یا زاویه ماکسیم مخروط ورود)، و

(ج) تعداد بازتابها در طول ۳ ft از تار برای پرتوی با زاویه ورود ماکسیم و برای پرتوی با نصف این زاویه را تعیین کنید.

۶-۲۴ (الف) نشان دهید فاصله واقعی x_s که پرتوی در یک فاصله پرش طی می‌کند برای تاری که در هوا به کار برده می‌شود با رابطه زیر داده می‌شود

$$x_s = \frac{n_1 d}{\sin \theta}$$

که در آن θ زاویه ورود است.

(ب) نشان دهید فاصله کل واقعی x_t که پرتوی با زاویه ورود θ در طول کل تار L طی می‌کند با رابطه زیر داده می‌شود

$$x_t = \frac{n_1 L}{(n_1^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

(ج) x_s ، L_s و x_t را برای تار به طول 10^3 m، قطر $50 \mu\text{m}$ و ضریب درونۀ 1.5 ، و پرتوی با زاویۀ ورود 10° به دست آورید.

۷-۲۴ چند مد می‌توانند در یک تار ضریب پله‌ای با $n_1 = 1.461$ و $n_2 = 1.456$ در 850 nm منتشر شوند؟ شعاع درونۀ $20 \mu\text{m}$ است.

۸-۲۴ شعاع ماکسیم درونۀ یک تار شیشه‌ای را، که برای آن $n_1 = 1.460$ و $n_2 = 1.457$ ، طوری تعیین کنید که تنها یک مد در طول موج $1.25 \mu\text{m}$ منتشر کند.

۹-۲۴ یک موجبر تخت AlGaAs در نظر بگیرید که برای آن $n_1 = 3.60$ و $n_2 = 3.55$ ، تعداد مدهای مستقلی را که می‌توانند در این موجبر منتشر شوند به‌ازای $d = 5 \lambda$ و به‌ازای $d = 50 \lambda$ به دست آورید.

۱۰-۲۴ شار $5 \mu\text{W}$ درست در ورودی تار به طول 100 m وجود دارد. این شار درست در خروجی تار $1 \mu\text{W}$ است. ضریب جذب تار را برحسب db/km به دست آورید.

۱۱-۲۴ یک کابل تار نوری به طول 3 km از سه قسمت یک کیلومتری که به هم وصل شده‌اند ساخته شده است. هر قسمت دارای اتلاف 5 db و هر اتصال دارای اتلاف 1 db است. اگر توان ورودی 4 mW باشد، توان خروجی را تعیین کنید.

۱۲-۲۴ تضعیف در طول 1 km از کابل هم‌محور RG-19/U حدود 12 db در 50 MHz است. فرض کنید توان ورودی به کابل 10 mW و حساسیت گیرنده $1 \mu\text{W}$ است. در این شرایط، این کابل هم‌محور چه اندازه می‌تواند طول داشته باشد؟ اگر به جای این کابل از یک تار نوری با آهنگ اتلاف 4 db/km استفاده شود، این خط تراگسیل چه طولی می‌تواند داشته باشد؟

۱۳-۲۴ یک تار سیلیکای ژرمانیم-آلوده دارای اتلاف تضعیف 12 db/km به علت تنها پراکندگی ریلی در طول موج $900 \mu\text{m}$ است. اتلاف تضعیف را در $1.55 \mu\text{m}$ به دست آورید.

۱۴-۲۴ (الف) نشان دهید تضعیف db/km با رابطه زیر داده می‌شود

$$\alpha = 10 \log_{10}(1 - f)$$

که در آن f اتلاف توان نسبی کل از ورودی تا خروجی در تار به طول 1 km است.

(ب) تضعیف برحسب db/km را برای تارهایی با اتلاف توان نسبی کل 0.75% ، 0.25% و 0.90% و 99% محاسبه کنید.

۱۵-۲۴ (الف) طول و

(ب) زمان عبور را برای بزرگترین و کوچکترین مسیرها در یک تار ضریب پله‌ای به طول ۱ km، با ضریب درونه ۱٫۴۶ و ضریب غلاف ۱٫۴۵، تعیین کنید.

۱۶-۲۴ با محاسبه اختلاف زمانهای عبور مربوط به پرتو محوری و پرتوی با زاویه ورود ماکسیمم 35° در تاری به طول ۱ km، واپیچش مدی را برای این تار به دست آورید. درونه را سیلیکای گذاخته با ضریب ۱٫۴۴ بگیرد و بسامد ماکسیمم را برای تپهای ورودی که به علت این واپیچش مدی تپهای خروجی جدا از هم تولید می‌کنند تعیین کنید.

۱۷-۲۴ تأخیر زمانی را بین پرتو محوری و پرتوی که در زاویه 15° وارد تاری به طول ۱ km می‌شود به دست آورید. ضریب درونه ۱٫۴۸ است.

۱۸-۲۴ تأخیر گروهی را بین تندترین و کندترین مدها در یک تار ضریب پله‌ای به طول ۱ km با $n_1 = 1.46$ و اختلاف نسبی ضریب $n_2 = 1.03$ که با چشمه‌ای در طول موج $9 \mu\text{m}$ کار می‌کند محاسبه کنید.

۱۹-۲۴ نمودار ضریب شکست را برای یک تار ضریب تدریجی به شعاع $5 \mu\text{m}$ و با $n_1 = 1.5$ و $n_2 = 1.02$ به ازای پارامتر نیمرخ $\alpha = 2$ و به ازای $\alpha = 10$ ترسیم کنید.

۲۰-۲۴ تأخیر ناشی از واپیچش مدی را در یک تار ضریب تدریجی به طول ۱ km با $\alpha = 2$ به دست آورید. ضریب ماکسیمم درونه ۱٫۴۶ و ضریب غلاف ۱٫۴۴ است. این تار نسبت به یک تار ضریب پله‌ای با $n_1 = 1.46$ و $n_2 = 1.44$ چند بار بهتر است؟

۲۱-۲۴ از معادله ۱۹-۲۴ می‌توان پهنای نوار را برای فواصل کمتر از طول تعادل تار محاسبه کرد (زیرنویس صفحه ۷۳۸ را ببینید). طول تعادلی برابر با ۱ km در نظر بگیرید و برای این طول تار پهنای نوار ۳ دسی‌بل مربوط به تار چندمدی ضریب پله‌ای را که پهن‌شدگی تپ آن با 20 ns/km داده می‌شود به دست آورید.

۲۲-۲۴ پاشندگی ماده را در طول ۱ km از تار سیلیکای گذاخته وقتی چشمه نور

(الف) یک LED با مرکز 820 nm و پهنای طیفی 40 nm است، و

(ب) یک LD با مرکز 820 nm و پهنای طیفی 4 nm است تعیین کنید.

۲۳-۲۴ تأخیر زمانی کل ΔT ناشی از واپیچش مدی و پاشندگی ماده با هم با رابطه زیر داده می‌شود

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta\tau_{\text{مدی}})^2 + (\Delta\tau_{\text{ماد}})^2$$

تاخیر زمانی کل را در تار به طول ۱ km، که برای آن $n_1 = ۱٫۴۶$ ، $\Delta = ٪۱$ ، $\lambda = ۸۲۰ \text{ nm}$ ، و $\Delta\lambda = ۴۰ \text{ nm}$ ، به دست آورید.

۲۴-۲۴ پاشندگی موجبر در یک تار سیلیکایی برای طول موجهای مختلف با استفاده از چشمه‌های لیزری دیودی با پهنای طیفی ۲ nm اندازه‌گیری شده است. نتایج در جدول زیر آورده شده‌اند.

$\Delta(\tau/L)$ (ps/km)	λ (μm)
۱٫۸۸	۰٫۷۰
۵٫۰۲	۰٫۹۰
۷٫۰۸	۱٫۱۰
۸٫۴۰	۱٫۴۰
۸٫۸۰	۱٫۷۰

(الف) پارامتر موجبر M' را برحسب λ در گستره $۰٫۷۰ \mu\text{m}$ تا $۱٫۷۰ \mu\text{m}$ ترسیم کنید.

(ب) پاشندگی موجبر را برحسب ps/km در $\lambda = ۱٫۲۷ \mu\text{m}$ و $\lambda = ۱٫۵۵ \mu\text{m}$ برای چشمه‌ای با پهنای طیفی ۱ nm به دست آورید.

۲۴-۲۵ پهن‌شدگی تب برای تار سیلیکایی ناشی از سه علت اصلی — واپیش مدی، پاشندگی ماده و پاشندگی موجبر — را در یک تار ضریب پله‌ای مقایسه کنید. در $\lambda = ۱ \mu\text{m}$ ، ضریب درونه $۱٫۴۷۰$ و ضریب غلاف $۱٫۴۵۵$ است. یک چشمه LED با پهنای طیفی ۲۵ nm را در نظر بگیرید. مقادیر پارامترهای M و M' به ترتیب ۴۳ ps/nm km و ۳ ps/nm km هستند.

(الف) هر مورد را جداگانه با محاسبه $\Delta\tau$ برای تار به طول ۱ km تعیین کنید.

(ب) پهن‌شدگی کل $\Delta\tau$ را برای تار به طول ۱ km با استفاده از رابطه زیر به دست آورید

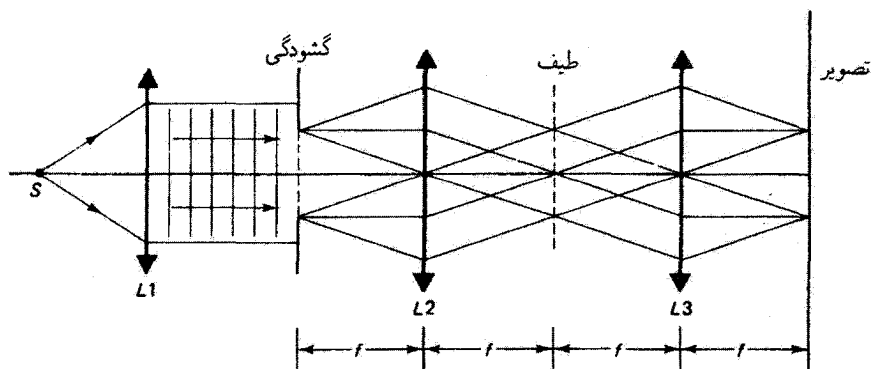
$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta\tau_{\text{مدی}})^2 + (\Delta\tau_{\text{ماده}})^2 + (\Delta\tau_{\text{موجبر}})^2$$

مراجع

- [1] Siegmund, Walter P. "Fiber Optics." In *Handbook of Optics*, edited by Walter G. Driscoll and William Vaughan. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978.
- [2] Yariv, Amnon. *Optical Electronics*, 3d ed. New York: Holt, Rinehart and Winston,

1985. Ch. 3.

- [3] Cheo, Peter K. *Fiber Optics Devices and Systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1985. Ch. 4.
- [4] Gloge, D., and E. A. J. Marcatili. "Multimode Theory of Graded-Core Fibers." *Bell Syst. Tech. J.* 52 (Nov. 1973): 1563.
- [5] Miller, Stewart E., Enrique A. J. Marcatili, and Li Tingye. "Research toward Optical-Fiber Transmission Systems." *Proc. IEEE* 61, no. 12 (Dec. 1973): 1703.
- [6] Palais, Joseph C. *Fiber Optic Communications*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1988.
- [7] Guenther, Robert. *Modern Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1990. Ch. 5.
- [8] Karim, Mohammad A. *Electro-Optical Devices and Systems*. Boston: PWS-Kent Publishing Company, 1990. Ch. 9.
- [9] Nerou, Jean Pierre. *Introduction to Fiber Optics*. Sainte-Foy, Quebec: Les Editions Le Griffon D'Argile, 1988.
- [10] Boyd, Waldo T. *Fiber Optics Communications, Experiments and Projects*. Indianapolis: Howard W. Sams and Co., 1982.
- [11] Urquhart, Paul, and Timothy J. Whitley. "Long Span Fiber Amplifiers." *Applied Optics* 29, no. 24 (Aug. 20, 1990): 3503.
- [12] Kapany, Narinder S. "Fiber Optics." *Scientific American* (Nov. 1960): 72.
- [13] Busignies, Henri. "Communication Channels." *Scientific American* (Sept. 1972): 98.
- [14] Cook, J. S. "Communication by Optical Fiber." *Scientific American* (Nov. 1973): 28.
- [15] Yariv, Amnon. "Guided Wave Optics." *Scientific American* (Jan. 1979): 64.
- [16] Mandoli, Dina F., and Winslow R. Briggs. "Fiber Optics in Plants." *Scientific American* (Aug. 1984): 90.
- [17] Katzir, Abraham. "Optical Fibers in Medicine." *Scientific American* (May 1989): 120.
- [18] Desurvire, Emmanuel. "Lightwave Communications: The Fifth Generation." *Scientific American* (Jan. 1992): 114.



۲۵

اپتیک فوریه

مقدمه

در این فصل دو حوزه نسبتاً وسیع را به اختصار بررسی می‌کنیم که در آنها تبدیل فوریه وظیفه اصلی را برای کاربردهای اپتیکی به عهده دارد. از این دو، یکی تحت عنوان کلی تصویرسازی و پردازش داده‌های اپتیکی ارائه می‌شود و دیگری طیف‌نمایی تبدیل فوریه‌ای است، و هر دو متعلق به شاخه‌ای از فیزیک هستند که عموماً اپتیک فوریه نامیده می‌شود و در آن تبدیل فوریه، همبستگی، و همبستگی مفاهیم اصلی تحلیل ریاضی هستند.

پردازش داده‌های اپتیکی از این واقعیت بهره می‌گیرد که عدسی ساده یک رایانه تبدیل فوریه است که می‌تواند یک نقش دوبعدی پیچیده را با تفکیک بسیار زیاد و با سرعت نور به یک تبدیل دوبعدی مبدل کند. نشان داده می‌شود که نقش پراش یک شیء فضایی که توسط عدسی تشکیل می‌شود یک تبدیل فوریه دوبعدی یا طیف ورودی است. این نقش را می‌توان به نوبه خود، با نقابها و صافیها، دستکاری کرد تا تصویر نهایی که توسط یک عدسی دیگر تشکیل شده است در فرایندی که تصفیه فضایی نامیده می‌شود تغییر کند. چون جزئیات مختلف تصویر را می‌توان با تصفیه مناسب تغییر داد، از این فن در حوزه‌هایی مانند افزایش تباين و بازگردانی تصویر استفاده می‌شود. اگر

تصویر مستقیماً با یک شیء دیگر مقایسه شود، این دو می‌توانند همبسته اپتیکی شوند. این نوع همبستگی، به‌عنوان مثال، در مسئله تشخیص نقش به‌کار برده می‌شود. با این نوع ابزارهای اپتیکی، متون و تصاویر دوبعدی فوراً، بدون نیاز به روبش متوالی شیء، پردازش می‌شوند. پردازش داده‌های اپتیکی نمایشگر همگرایی سودمندی در زمینه‌های اپتیک، دانش اطلاعات، و هولوگرافی است. وجود لیزر به‌عنوان چشمه نور همدوس در این زمینه‌ها نیز پیشرفتهای سریع را تضمین کرده است. طیف‌نمایی تبدیل فوری‌های بر این واقعیت بنا شده است که تغییرات فضایی یا زمانی یک نقش تابیدگی ناشی از تابش چندفام را می‌توان به تجزیه طیفی تابش تبدیل فوری‌ای کرد. این فن کاربرد دیگری از تداخل‌سنجی را با مزایای متمایز برای طیف‌نمایی امکان‌پذیر ساخته است. طیف‌نمایی تبدیل فوری‌ای موضوع دومین قسمت این فصل است.

۱-۲۵ تصویرسازی و پردازش داده‌های اپتیکی

پراش فرانهورف و تبدیل فوری. می‌خواهیم نشان دهیم که نقش پراش فرانهورف، با تقریبهای مشخصی، تبدیل فوری توزیع دامنه میدان \mathbb{E} در صفحه شیء است. تبدیلات فوری یک‌بعدی را که در فصل ۱۲ ارائه شدند یادآوری می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-ikx} dk \quad (۱-۲۵)$$

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (۲-۲۵)$$

معادله ۱-۲۵ می‌گوید که می‌توان یک تابع نادره‌ای اختیاری $f(x)$ را با جمع‌زدن روی توزیع پیوسته‌ای از امواج تخت با توزیع دامنه $g(k)$ ، که با معادله ۲-۲۵ داده می‌شود، ساخت. توابع $f(x)$ و $g(k)$ را یک جفت تبدیل فوری می‌نامند. این دو تابع تبدیلات فوری یکدیگر هستند و می‌توان آنها را به‌صورت نمادین زیر نوشت

$$g(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \quad (۳-۲۵)$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{g(k)\} \quad (۴-۲۵)$$

تبدیل تبدیل وارون یک تابع خود این تابع است:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{g(k)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{f(x)\} = f(x) \quad (۵-۲۵)$$

تبدیلات فوریه در دو بعد به صورت زیر در می آیند

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} g(k_x, k_y) e^{-i(xk_x + yk_y)} dk_x dk_y \quad (۶-۲۵)$$

$$g(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(xk_x + yk_y)} dx dy \quad (۷-۲۵)$$

بنابراین، تابع نادره‌ای دو متغیره $f(x, y)$ را می توان از ترکیب امواج تختی ساخت که با دامنه‌های $g(k_x, k_y)$ توزیع شده‌اند و فاز آنها ثابت است:

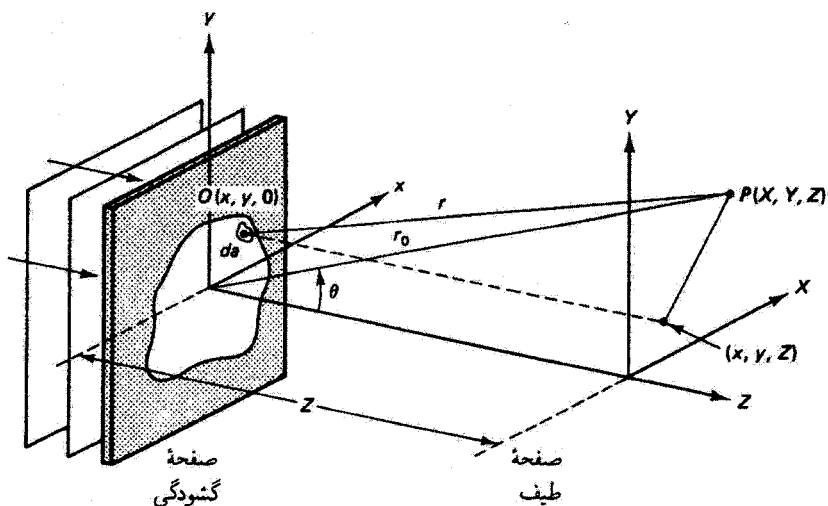
$$xk_x + yk_y = \text{const.} \quad (۸-۲۵)$$

کمیت‌های k_x و k_y مؤلفه‌های بسامد فضایی $(2\pi/\lambda)$ هستند که در بسط نمایشگر تابع مطلوب $f(x, y)$ باید به کار برده شوند. امواج تخت انفرادی در توزیع پیوسته صفحه xy را در راستای خطوط راستی قطع می‌کنند که با معادله ۸-۲۵ تعریف می‌شوند. با تغییر k_x و k_y ، شیبهای این خطوط تغییر می‌کنند. بنابراین، ترکیب مزبور شامل امواج تختی با راستاهای متفاوت است.

نقش پراش فرانهورف ناشی از یک گشودگی اختیاری واقع در صفحه xy را، همچون در شکل ۱-۲۵، در نظر بگیرید. امواج تخت تکفام از صفحه گشودگی (xy) پراشیده می‌شوند. نقش پراش روی صفحه XY ، که آن را صفحه طیف می‌نامیم و در فاصله Z موازی با صفحه xy است، مشاهده می‌شود. سهم dE_P در نقطه اختیاری P ناشی از دامنه نور از عنصر سطح da حول نقطه O در گشودگی با رابطه زیر داده می‌شود

$$dE_P = \left(\frac{E_s da}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \quad (۹-۲۵)$$

که در آن r فاصله از نقطه O تا نقطه P است. با صرف نظر کردن از ضریب تمایل برای زاویه‌های کوچک θ ، معادله ۹-۲۵ نمایشگر یک موج کروی است که دامنه آن با فاصله r کاهش می‌یابد. کمیت E_s قدرت چشمه، یعنی دامنه در واحد مساحت گشودگی در همسایگی نقطه O ، است. بنابراین، ترکیب $E_s da$ دامنه در فاصله واحد ($r = 1$) از O ناشی از عنصر سطح گشودگی da است. اگر گشودگی به طور یکنواخت روشن نشده باشد یا به طور یکنواخت شفاف نباشد، آنگاه $E_s = E_s(x, y)$ را تابع گشودگی می‌نامند. در معادله ۹-۲۵، ω و k مربوط به خواص تابش فرودی و پراشیده هستند. نقطه P در صفحه طیف در فاصله r_0 از مبدأ دستگاه مختصات xy که



شکل ۱-۲۵ پراش فرانهوفر در صفحه طیف XY ناشی از گشودگی در صفحه xy .

در صفحه گشودگی واقع است قرار دارد. فاصله r را می‌توان به صورت زیر به فاصله r_0 مربوط کرد. از هندسه شکل ۱-۲۵ واضح است که

$$r^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - 0)^2$$

و

$$r_0^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

بنابراین،

$$r^2 = r_0^2 - 2xX - 2yY + (x^2 + y^2) \quad (۱۰-۲۵)$$

در حالی که اندازه‌های X و Y در صفحه طیف می‌توانند قابل ملاحظه باشند، اندازه‌های x و y در مقایسه با r_0 برای پراش میدان دور نوعاً قابل چشمپوشی هستند. بنابراین، از جمله‌های x^2 و y^2 صرف‌نظر می‌کنیم، و معادله ۱۰-۲۵ را به صورت زیر در می‌آوریم

$$r = r_0 \left[1 - 2 \frac{(xX + yY)}{r_0^2} \right]^{1/2} \quad (۱۱-۲۵)$$

معادله ۱۱-۲۵ قابل تطبیق فوری با بسط دوجمله‌ای $(1+u)^{1/2} = 1 + (1/2)u + \dots$ برای تقریب‌گیری است. تنها دو جمله اول را نگه می‌داریم، و در نتیجه

$$r = r_0 \left[1 - \frac{(xX + yY)}{r_0^2} \right] \quad (12-25)$$

در معادله ۹-۲۵، فاصله r هم در دامنه و هم در فاز ظاهر شده است. در دامنه می‌توان آن را با اطمینان با Z ، یعنی فاصله بین صفحه‌ها، تقریب گرفت، اما در فاز از رابطه تقریبی که هم اکنون به دست آوردیم استفاده می‌کنیم. پس می‌توانیم بنویسیم

$$dE_P = \left(\frac{E_s dx dy}{Z} \right) e^{i\omega t} e^{-ik[r_0 - (zX+yY)/r_0]} \quad (13-25)$$

با انتگرال‌گیری روی صفحه گشودگی داریم

$$E_P = \left[\frac{e^{i(\omega t - kr_0)}}{Z} \right] \iint E_s(x, y) e^{ik(xX+yY)/r_0} dx dy \quad (14-25)$$

اگر توزیع دامنه نسبی میدان الکتریکی در صفحه طیف را بخواهیم، می‌توانیم قرار دهیم $Z = 1$ و بنویسیم

$$E_P = \iint E_s(x, y) e^{ik(xX+yY)/r_0} dx dy \quad (15-25)$$

آنگاه، با معرفی بسامدهای زاویه‌ای فضایی

$$k_X \equiv \frac{kX}{r_0} \quad \text{و} \quad k_Y \equiv \frac{kY}{r_0} \quad (16-25)$$

مربوط به هر نقطه (X, Y) در صفحه طیف، می‌توانیم معادله ۱۵-۲۵ را به صورت زیر بنویسیم

$$E_P(k_X, k_Y) = \iint E_s(x, y) e^{i(xk_X + yk_Y)} dx dy \quad (17-25)$$

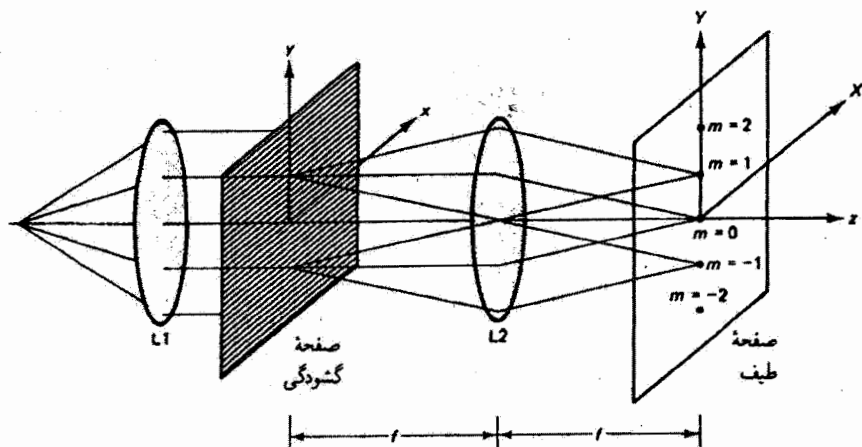
معادله ۱۷-۲۵ را با این صورت می‌توان مستقیماً با معادله ۷-۲۵ مقایسه کرد، و خواسته ما اثبات می‌شود. می‌بینیم که E_P و E_s از طریق تبدیل فوریه به هم مربوط‌اند. تبدیل وارون، بنابه

معادله ۲۵-۶، عبارت است از

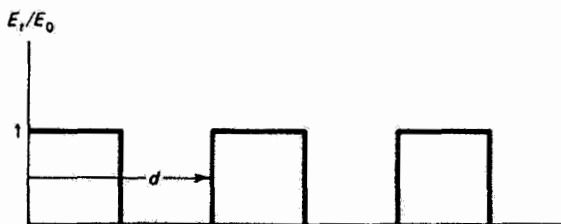
$$E_s(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint E_P(k_x, k_y) e^{-i(xk_x + yk_y)} dk_x dk_y \quad (18-25)$$

در تقریبی که گفته شد، نشان داده‌ایم که نقش پراش فرانهورفر که با $E_P(k_x, k_y)$ توصیف می‌شود درست تبدیل فوریه دوبعدی تابع گشودگی $E_s(x, y)$ است. توزیع پیوسته امواج تخت چندراستایی مؤلف باعث "خمش" نور به ناحیه‌های مختلف نقش پراش دوبعدی است.

تحلیل طیف اپتیکی. نقش پراش فرانهورفر یک گشودگی معین را با استفاده از عدسی مثبت، همچون در شکل ۲۵-۲، بهتر از همه می‌توان نمایش داد. نور یک چشمه نقطه‌ای (همدوس فضایی) تکفام (همدوس زمانی) با عدسی L_1 موازی می‌شود و در صفحه گشودگی یا ورودی یک نقش دوبعدی را روشن می‌کند که تراگسیلندگی آن در عرض گشودگی تغییر می‌کند. عدسی L_2 نقش فرانهورفر را در صفحه طیف تشکیل می‌دهد. از ابزرایهای عدسی صرف نظر می‌کنیم و همچنین فرض می‌کنیم گشودگی به اندازه کافی بزرگ است به طوری که مرزهای آن نقش پراش را به طور محسوس تغییر نمی‌دهند. آنگاه می‌توانیم تابع گشودگی را روی هر فیلم عکاسی تشکیل دهیم. برای سادگی، فرض می‌کنیم تابع گشودگی مانند یک موج مربعی تغییر می‌کند، و این را می‌توان با زرده رونچی به وجود آورد که یک توری با خطوط مستقیم موازی و ثابت توری بزرگ است و ناحیه‌های کدر و شفاف آن دارای پهنای یکسانی هستند. چون تبدیل فوریه یک تبدیل دامنه (و نه تابیدگی) است، موج مربعی



شکل ۲۵-۲ پراش فرانهورفر زرده رونچی.



شکل ۳-۲۵ تابع تراگسیل با دوره d ناشی از نرده رونچی که در آن پهناهای کدر و تراگیلنده با هم برابراند.

شکل ۳-۲۵ را با دامنه نور عبور کرده توصیف می‌کنیم. نسبت دامنه‌های عبور کرده به فرودی E_t/E_0 را تراگیله می‌نامیم، و از این رو تراگیلندگی، که چنانکه می‌دانیم به نسبت تابیدگیهای I_t/I_0 گفته می‌شود، صرفاً مجذور تراگیله است. تابع گشودگی، که شامل دامنه‌ها است، می‌تواند تابع تراگیل هم نامیده شود. عدسی L_2 همچون یک عدسی تبدیل فوریه عمل می‌کند. با یک تابع تراگیل در صفحه کانونی اول این عدسی، نقش پراش فرانهور که تبدیل فوریه این تابع است در صفحه کانونی دوم آن، که صفحه طیف یا خروجی است، ایجاد می‌شود. نرده رونچی همچون یک توری درشت‌ساخت عمل می‌کند و یک رشته لکه‌های روشن به وجود می‌آورد که به مرتبه‌های مختلف پراش مربوط می‌شوند. چون خطوط نرده رونچی موازی با محور x در صفحه گشودگی هستند، طیف لکه‌های روشن در صفحه خروجی، چنانکه نشان داده شده است، در راستای Y تشکیل می‌شود. اما بنابه معادله توری

$$m\lambda = d \sin \theta = d \frac{Y_m}{f} \quad (۱۹-۲۵)$$

که در آن d دوره فضایی نرده است، لکه‌ها را در فاصله‌های Y_m از محور اپتیکی که با رابطه زیر داده می‌شوند مشاهده می‌کنیم

$$Y_m = m \left(\frac{\lambda f}{d} \right) \quad (۲۰-۲۵)$$

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم این رشته لکه‌های روشن در واقع طیف بسامدهای لازم در نمایش فوریه تابع تراگیل یا گشودگی شکل ۳-۲۵ است. بسامدهای فضایی زاویه‌ای لازم در انتگرال فوریه، که در معادله ۱۶-۲۵ معرفی شده‌اند، در راستای Y با رابطه زیر داده می‌شوند

$$k_Y = \frac{kY}{f} \quad (۲۱-۲۵)$$

چون تابع تراکسیل برای نرده رونچی یک تابع دوره‌ای مربعی است، با مجموعه گسسته‌ای از بسامدها در یک رشته فوریه، به جای توزیع پیوسته‌ای از بسامدها در یک انتگرال فوریه، نمایش داده می‌شود. اکنون یک عدد موج یا صورت "بهنجار" بسامدهای فضایی در رشته فوریه را با رابطه زیر معرفی می‌کنیم

$$\nu_Y \equiv \frac{1}{\lambda_Y} = \frac{k_Y}{2\pi} \quad (22-25)$$

آنگاه، با جاگذاری k_Y از معادله ۲۵-۲۱ و Y از معادله ۲۵-۲۰، برای طیف بسامدهای فضایی که در نقش پراش ظاهر می‌شوند داریم

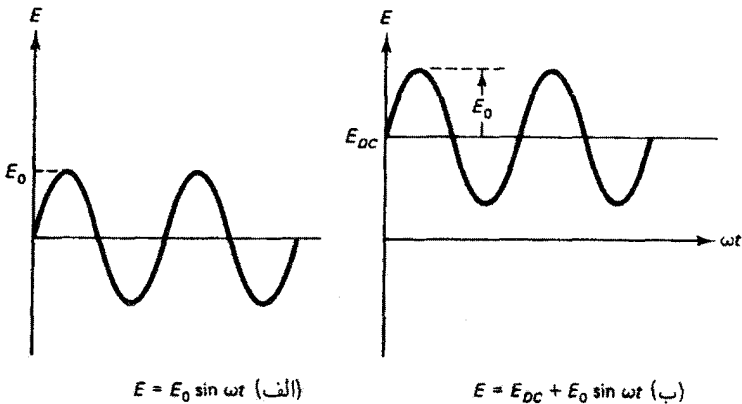
$$\nu_Y = \frac{m}{d} \quad (23-25)$$

بنابراین، لکه مرکزی با $m = 0$ مربوط به بسامد $\nu_Y = 0$ است که آن را، مشابه با بسامدهای الکتریکی، مؤلفه DC می‌نامیم. لکه‌های مرتبه اول ($m = 1$) در بالا و پایین لکه مرکزی نمایشگر بسامد پایه $\nu_{Y1} = 1/d$ هستند. لکه‌های مرتبه‌های بالاتر ($m > 1$) نمایشگر هماهنگهای بالاتر هستند که با $m\nu_{Y1}$ داده می‌شوند. می‌بینیم اگر بسامد موج مربعی بزرگتر باشد (خطوط نرده با d کوچکتر به هم نزدیکتر باشند)، بسامد پایه در طیف فوریه نیز بزرگتر است، و فاصله $Y_1 = \lambda f/d$ افزایش می‌یابد - نتیجه‌ای که قبلاً در مطالعه توری پراش ملاحظه کردیم.

رشته فوریه زیر را (که نیز در فصل ۱۲ برای موج مربعی با تابع زوج محاسبه شد) از تحلیل فوریه تابع مربعی به دست می‌آوریم

$$f(Y) = \frac{1}{2} + \frac{Y}{\pi} \left(\cos kY + \frac{1}{3} \cos 3kY + \frac{1}{5} \cos 5kY + \dots \right) \quad (24-25)$$

در اینجا یک جمله ثابت ($k = 0$) به مقدار $1/2$ مربوط به مؤلفه DC یا لکه مرکزی نقش پراش، یک جمله با بسامد (فضایی) پایه $k_1 = 2\pi/d$ ، و جمله‌هایی با هماهنگهای بالاتر فرد $3k_1, 5k_1, \dots$ داریم. نبود هماهنگهای زوج ممکن است در وهله اول بنا بر معادله ۲۵-۲۳ عجیب باشد، زیرا با توجه به این معادله انتظار می‌رود که تمام هماهنگهای بالاتر در نمایش وجود داشته باشند. اما هماهنگهای زوج دقیقاً همان هماهنگهای مربوط به مرتبه‌های غایب در پراش توری هستند. این مرتبه‌های غایب ناشی از این وضعیت هستند که، دقیقاً مانند مورد نرده رونچی، جدایی شکافها دو برابر پهنای شکافها است. مجذور ضرایب رشته فوریه متناسب با تابیدگی لکه‌های پراش متناظر است.

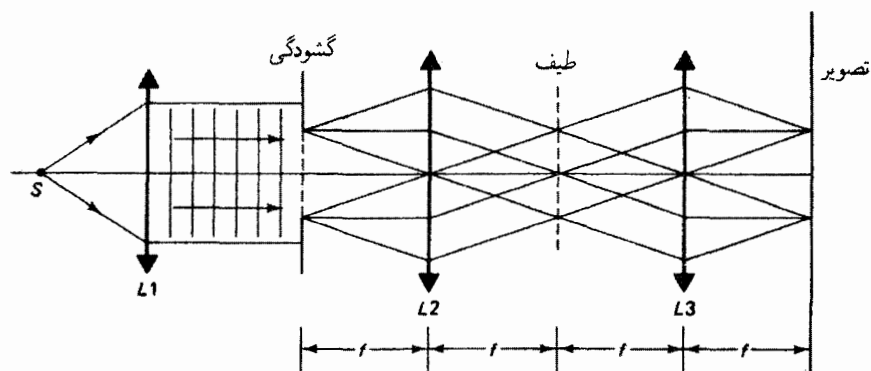


شکل ۲۵-۴ دامنه یا تابع تراگسیل سینوسی با (الف) جابه‌جاییهای منفی و (ب) جابه‌جاییهای تماماً مثبت. تابع گشودگی واقعی دامنه منفی ندارد.

اکنون فرض کنید تابع تراگسیل به جای اینکه موج مربعی باشد یک موج سینوسی است. اگر خطوط زرده رونچی دارای کدری تدریجاً متغیر باشند به طوری که دامنه عبور کرده به طور سینوسی تغییر کند، توری سینوسی خواهیم داشت. از رشته فوریه نمایشگر این نوع تابع گشودگی دیده می‌شود که مرتبه‌های بالاتر از $m = 1$ در طیف پراش ظاهر نمی‌شوند. واضح است که تنها یک بسامد برای نمایش موج سینوسی لازم است. پس چرا این طیف یک لکه مرکزی یعنی مؤلفه DC با $m = 0$ را نیز نشان می‌دهد؟ کمی اندیشه روشن می‌کند که تابع گشودگی دامنه نمی‌تواند هم با قسمت مثبت و هم با قسمت منفی، مانند موج سینوسی محض شکل ۲۵-۴ الف، تولید شود. یک نگاتیو عکاسی در نقاطی که کدری آنها کامل است می‌تواند دامنه $E = 0$ به وجود آورد اما نمی‌تواند مقادیر منفی ایجاد کند. بنابراین، توری سینوسی می‌تواند تابع گسیلی فراهم کند که مانند تابعی است که در شکل ۲۵-۴ نشان داده شده است و در آن موج سینوسی به اندازه یک مقدار DC جابه‌جا شده است. دقیقاً همین مؤلفه E_{DC} است که علامت پراش مرتبه صفرم را به وجود می‌آورد.

وارون تبدیل فوریه توری سینوسی نقش پراشی است که از دو شکاف به دست می‌آید. چنانکه قبلاً نشان داده شد، وقتی تداخل دو چشمه نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم، نقش پراش حاصل عبارت است از یک رشته فریز که نقش تابیدگی آنها در عرض فریزها به صورت مجذور کسینوس یا سینوسی است. فیلم عکاسی، یا هر آشکارساز دیگری، نقش تابیدگی را به صورتی ثبت می‌کند که در شکل ۲۵-۴ ب نشان داده شده است.

تصفیه اپتیکی. قبلاً دیدیم که صفحه کانونی پشت عدسی تبدیل عبارت است از صفحه طیف که در آن تبدیل فوریه تابع تراگسیل یا گشودگی قرار گرفته است. اگر این صفحه طیف اکنون به نوبه

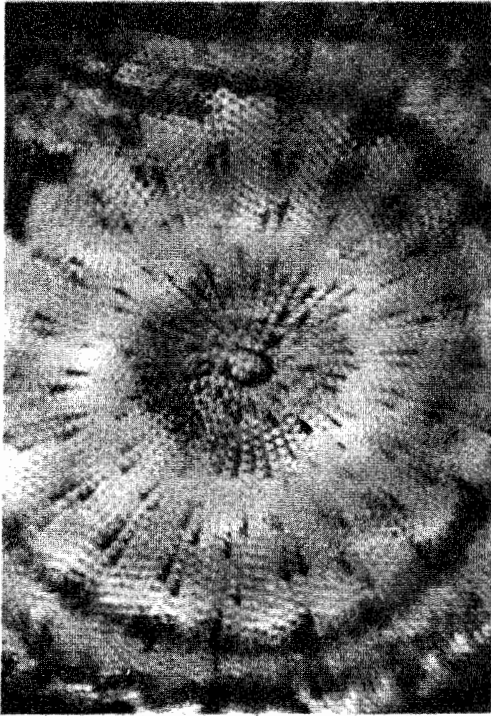


شکل ۲۵-۵ صافی اپتیکی.

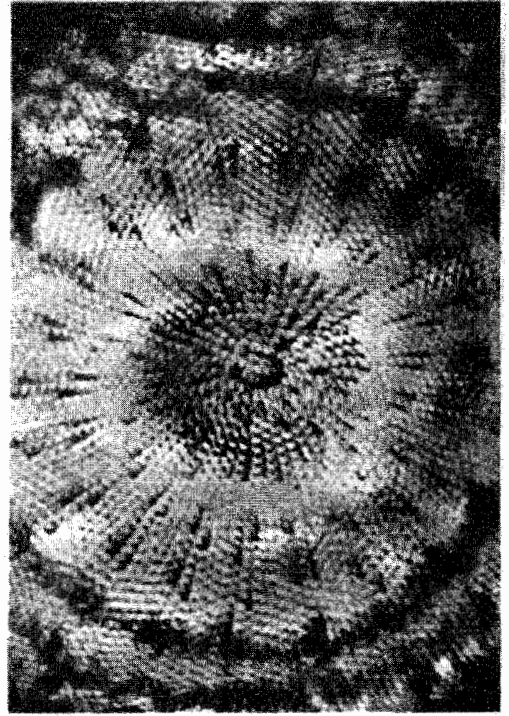
خود به منزله یک تابع گشودگی جدید برای یک عدسی دوم $L3$ ، که مطابق با شکل ۲۵-۵ به اندازه یک فاصله کانونی دورتر گذاشته شده است، عمل کند آنگاه صفحه کانونی پشت این عدسی دوم تبدیل فوریه تابع گشودگی جدید را دریافت می‌کند. بدین ترتیب، این تبدیل فوریه دوم تبدیل تابع گشودگی اصلی است و از این رو تابع گشودگی اصلی را باز می‌گرداند، یعنی تصویری از گشودگی اصلی در صفحه کانونی پشت عدسی $L3$ تشکیل می‌شود. این نتیجه همچنین با استفاده از قوانین اپتیک هندسی که از نمودار پرتو شکل ۲۵-۵ بدیهی هستند به دست می‌آید.

چنانکه قبلاً گفتیم، هر لکه پراش در صفحه طیف، با مختصات (X, Y) ، نمایشگر بسامدهای فضایی موجود در صفحه طیف است. هر یک از این لکه‌های پراش اکنون در روشن کردن تصویر گشودگی در صفحه تصویر دخالت دارند. اگر جلو نور ناشی از یک یا چند تا از این لکه‌های پراش گرفته شود به طوری که سهم آن یا آنها در تصویر حذف شود، چه تغییری در این تصویر به وجود می‌آید؟ از مبحث رشته فوریه نتیجه می‌گیریم که وقتی جلو لکه‌های مربوط به بسامدهای فضایی بزرگتر گرفته می‌شود ویژگیهای ظریفتر تصویر از بین می‌روند. اگر تمام لکه‌ها به جز مؤلفه DC یا باریکه پراش منحرف نشده — مثلاً با یک میانبند قابل تنظیم به مرکز لکه مرکزی — پوشانده شوند، صفحه تصویر روشن می‌شود اما جزئیات تصویر آشکار نمی‌شوند. وقتی روزنه دایره‌ای میانبند را به تدریج باز می‌کنیم بسامدهای فضایی بزرگتر پذیرفته می‌شوند و تصویر به تدریج واضح می‌شود. بنابراین، عمل فیزیکی باز کردن میانبند از لحاظ ریاضی مشابه با منظور کردن منظم جمله‌های با بسامد بزرگتر و بزرگتر در رشته فوریه نمایشگر تابع گشودگی است.

فرایند بستن عمدی قسمتهای مشخصی — یعنی بسامدهای فضایی مشخصی — از نقش پراش برای دستکاری تصویر را تصفیه اپتیکی می‌نامیم. به عنوان مثال، فرض کنید تابع گشودگی برهم‌نهشی از دو موج سینوسی است که توسط دو توری سینوسی پشت سر هم با خطوط موازی اما فواصل خطوط یا



(الف)



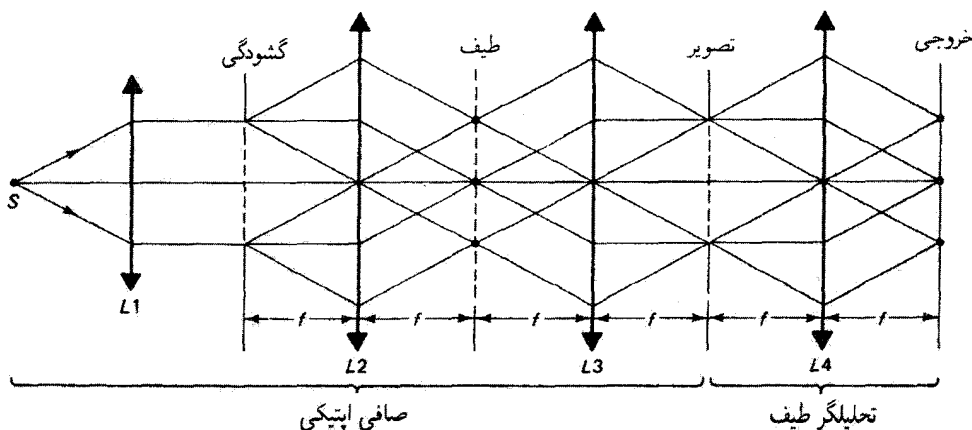
(ب)

شکل ۲۵-۶ (الف) میکرو عکس ویدئویی یک صدف دیاتوم شامل خطوط (قائم) روبش ویدئو. (ب) میکرو عکس ویدئویی (الف) که برای حذف خطوط روبش ویدئو تصفیه فضایی شده است.

بسامدهای فضایی مختلف ایجاد شده‌اند. نقش پراش شامل دو جفت لکه نور، علاوه بر باریکه مستقیم، است که هر جفت از یکی از بسامدهای فضایی موجود ناشی می‌شود. اگر جلوی یکی از جفتها را بگیریم آن بسامد از روشنایی حذف یا تصفیه می‌شود. این تصویر یک نقش سینوسی از بسامد دیگر است. این مثال نشان می‌دهد که چگونه تصفیه اپتیکی برای استخراج علامتهای دوره‌ای مطلوب از نوبه زمینه یا از طرف دیگر برای حذف نوبه دوره‌ای از یک علامت مطلوب به‌کار برده می‌شود. به‌عنوان مثالی دیگر، فرض کنید تابع گشودگی عبارت است از یک تصویر تلویزیونی که در آن خطوط افقی محل تصویر مرئی هستند. نقش پراش ناشی از این تابع می‌تواند کاملاً پیچیده باشد، اما خطوط محل تصویر، مانند نرده رونچی، یک رشته لکه پراش در راستای قائم در صفحه طیف به‌وجود می‌آورند. اگر از یک حفاظ کدر مستطیلی برای پوشاندن سهم این لکه‌ها استفاده کنیم، بسامدهای خط محل تصویر تصفیه می‌شوند و تصویر نهایی تولید مجددی از تصویر تلویزیونی اما بدون حضور خطوط محل تصویر است. از این فن برای حذف خطوط روبش ویدئو از میکرو عکس ویدئویی صدف، چنانکه در شکل ۲۵-۶ دیده می‌شود، استفاده شده است.

بنابراین، از دیدگاه تصفیة اپتیکی باید روشن باشد که میانبندی که تمام بسامدها به‌جز بسامدهای نزدیک باریکه مستقیم را می‌پوشاند مانند یک صافی اپتیکی پایین‌گذر عمل می‌کند؛ میانبندی که تنها بسامدهای نزدیک باریکه مستقیم را می‌پوشاند مانند یک صافی اپتیکی بالاگذر، عمل می‌کند؛ و یک گشودگی حلقوی که بسامدهای بزرگتر و کوچکتر را می‌پوشاند مانند یک صافی اپتیکی نوارگذر عمل می‌کند. یک مورد مربوط بازداري بسامدهای فضایی کوچک، یا تصفیة اپتیکی بالاگذر، برای تقویت تباین در یک عکس است. (اهمیت مؤلفه‌های پربسامد در رشته فوریه برای ساختن ویژگیهای ظریف تابع، مانند گوشه‌های موج مربعی، را یادآوری می‌کنیم؛ بخش ۱۲-۱). تصفیة پیچیده‌تر در بازگرداندن تصویر، به‌عنوان مثال در پخش‌زدایی از عکسهای ماه، نیز به‌کار برده شده‌اند.

همبستگی اپتیکی. چنانکه دیدیم، تصویر شیء دوبعدی واقع در صفحه گشودگی در صفحه تصویر صافی اپتیکی تشکیل می‌شود (شکل ۲۵-۵). اکنون فرض کنید در مکان این صفحه تصویر یک شیء دوم، یعنی یک عکس شفاف دیگر، قرار دهیم به طوری که تصویر شیء اصلی روی تصویر شیء دوم بیفتد. آنگاه مقدار نوری که از شیء دوم در هر نقطه می‌گذرد هم به مقدار نور موجود در تصویر و هم به شفافیت شیء دوم بستگی دارد. اکنون سر راه این نور یک عدسی اضافه قرار می‌دهیم و آن را با یک فیلم یا آشکارساز نور، واقع در صفحه کانونی دوم این عدسی، ثبت می‌کنیم (شکل ۲۵-۷). در واقع، یک تحلیلگر طیف اپتیکی به صافی اپتیکی شکل ۲۵-۵ اضافه کرده‌ایم. در صفحه خروجی که آشکارساز قرار دارد، انتظار داریم طیف یا تبدیل فوریة تابع تراکسیلی را اندازه‌گیری کنیم که با نور عبور کرده از شیء دوم نمایش داده می‌شود. این دستگاه یک ابزار آزمایش برای مقایسه یا همبسته کردن دو شیء یا توابع تراکسیلی که این دو شیء تعیین می‌کنند



شکل ۲۵-۷ همبستگر اپتیکی که از ترکیب یک صافی اپتیکی و یک تحلیلگر طیف تشکیل شده است.

فراهم می‌کند. اگر این دو تابع یکسان باشند و طوری قرار گرفته باشند که تصویر اولی بر دومی منطبق باشد آنگاه عبور نور ماکسیم روی می‌دهد و در این مورد همبستگی ماکسیمم است. اما اگر یک شیء را نسبت به دیگری جابه‌جا کنیم، نقاط روشن تصویر به‌طور کامل بر ناحیه‌های شفاف شیء دوم منطبق نخواهند بود، و عبور نور و همبستگی کاهش می‌یابند. به‌عنوان مثال، اگر شیء اول در صفحه گشودگی تصویر عکاسی حرف A و شیء دوم در صفحه تصویر نیز به همین شکل باشد، وقتی این دو شیء به‌طور مناسب قرار داده می‌شوند باید همبستگی با درجه زیاد به دست آید؛ از طرف دیگر، اگر شیء دوم تصویر عکاسی حرف B باشد، عبور نور ماکسیمم و همبستگی به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابند. این تشخیص نقش، به‌عنوان مثال، در تشخیص و شمارش ذرات کوچک با شکلهای مختلف، مثل گویچه‌های خون، یا در پژوهش برای نقشهای مشخصه در عکسهای هوایی، پروهای ایکس پزشکی، و مدارک اثر انگشت به‌کار برده می‌شود.

اکنون وضعیتی را که در بالا توصیف کردیم به زبان ریاضیات به‌طور دقیقتری بیان می‌کنیم. فرض کنید شیء اول در صفحه گشودگی با نور یکنواختی با دامنه واحد روشن شود و تابع تراگیسیل آن $E_1(x, y)$ باشد. بنابراین، نور عبور کرده که دامنه آن مدوله شده است و تصویر آن در مکان شیء دوم در صفحه تصویر تشکیل شده است با $E_1(-x, -y)$ نمایش داده می‌شود. مختصات منفی از وارونی تصویر حقیقی نسبت به شیء ناشی شده‌اند. اکنون اگر تابع تراگیسیل دوم $E_2(x, y)$ باشد، نور عبور کرده با تابع حاصلضرب $E_1(-x, -y)E_2(x, y)$ توصیف می‌شود. تبدیل فوریه یا طیف این تابع تراگیسیل مرکب در صفحه خروجی تشکیل می‌شود، یعنی نقش پراش در این صفحه با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$\mathcal{F}[E_1(-x, -y)E_2(x, y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} E_1(-x, -y)E_2(x, y) e^{i(xk_x + yk_y)} dx dy \quad (25-25)$$

برای اینکه در این نقش تنها باریکه مستقیم یا مؤلفه DC را در نظر بگیریم بسامدهای فضایی k_x و k_y را برابر با صفر می‌گذاریم، و در نتیجه

$$\mathcal{F}[E_1(-x, -y)E_2(x, y)]_{DC} = \iint_{-\infty}^{\infty} E_1(-x, -y)E_2(x, y) dx dy \quad (26-25)$$

تابع تراگیسیل $E_1(x, y)$ و $E_2(x, y)$ در دستگاههای مختصاتی بیان شده‌اند که اختلاف آنها تنها در مبدأهای آنها است که در راستای محور اپتیکی z نسبت به هم منتقل شده‌اند. اگر شیء اول به اندازه یک انتقال اختیاری که برای مثال با مؤلفه‌های (q_x, q_y) داده می‌شود در صفحه

گشودگی جابه‌جا شود، تابع تراگیسل آن باید نشاندهندهٔ یک انتقال مبدأ در صفحهٔ xy باشد، و معادلهٔ ۲۵-۲۶ به صورت کلی‌تر زیر بیان می‌شود

$$\mathcal{F}[E_1(-x, -y)E_2(x, y)]_{DC} = \iint_{-\infty}^{\infty} E_1(q_x - x, q_y - y)E_2(x, y)dx dy \quad (27-25)$$

انتگرال معادلهٔ ۲۵-۲۷ مثالی است از تابع همتافتگی دوبعدی که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\rho_{12}(q_x, q_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(q_x - x, q_y - y)f_2(x, y)dx dy \quad (28-25)$$

اگر تابع تراگیسل دارای تقارن وارونی باشد، یعنی اگر

$$f_1(-x, -y) = f_1(x, y)$$

آنگاه علامتهای منفی در انتگرالده معادلهٔ ۲۵-۲۸ را می‌توان به مثبت تبدیل کرد، و انتگرال به تابع همبستگی زیر تبدیل می‌شود

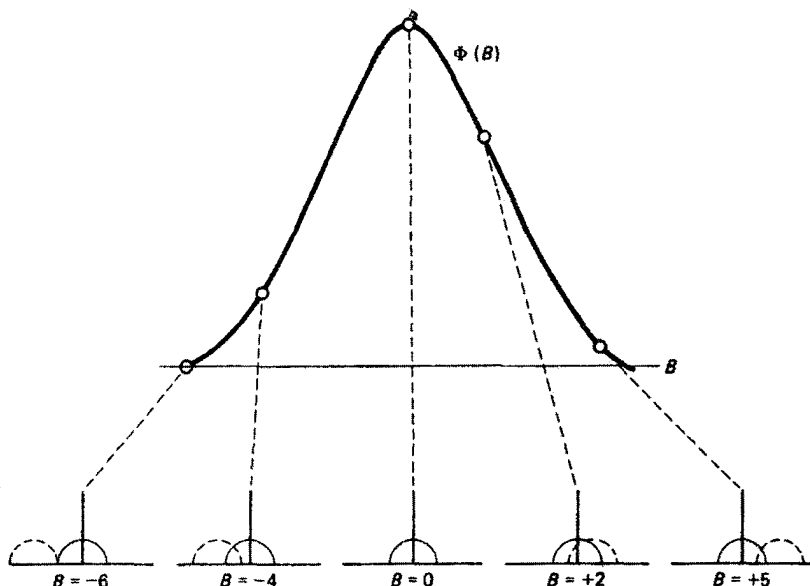
$$\Phi_{12}(q_x, q_y) = \mathcal{F}[f_1(x, y)f_2(x, y)]_{DC} \quad (29-25)$$

$$\Phi_{12}(q_x, q_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x + q_x, y + q_y)f_2(x, y)dx dy$$

به علاوه، اگر f_1 و f_2 صورتهای منتقل شده‌ای از یک تابع یکسان باشند، آنگاه تابع خودهمبستگی خواهیم داشت:

$$\Phi_{11}(q_x, q_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x + q_x, y + q_y)f(x, y)dx dy \quad (30-25)$$

توابع تراگیسل با تقارن وارونی طوری تصویر می‌شوند که وارونی واقعی تصویر ناشی از عدسی آشکار نمی‌شود. در اینجا انتگرال خودهمبستگی معادلهٔ ۲۵-۳۰ را به اختصار بررسی می‌کنیم. انتگرالده حاصلضرب دو تابع است و تنها در آن نقاط (x, y) مخالف صفر است که هر دو تابع



شکل ۸-۲۵ خودهمبستگی یک بعدی $\Phi(B)$ مربوط به نیمدایره‌ای به شعاع ۳ واحد به صورت تابعی از پارامتر جابه‌جایی B . چند نقطه روی منحنی همبستگی با خط چین به انتقالهای خاصی که آنها را تولید کرده‌اند مربوط شده‌اند.

صفر دارند. با مقادیر ثابت (q_x, q_y) ، انتگرال برابر با مساحت زیر منحنی نمایشگر حاصلضرب دو تابع است. واضح است که این مساحت، که آن را همبستگی می‌نامیم، بستگی به انتخاب (q_x, q_y) دارد. اگر q_x و q_y به اندازه کافی بزرگ باشند که دو تابع روی هم نیفتند، این مساحت و همبستگی صفر می‌شوند. وقتی q_x و q_y هر دو صفر هستند، دو تابع برهم منطبق می‌شوند و یک منحنی حاصلضرب با مساحت و همبستگی ماکسیمم به دست می‌آید. برای مثال، نیمه بالایی یک دایره را به عنوان تابع انتخاب می‌کنیم (شکل ۸-۲۵). وقتی یک منحنی از این نوع در راستای محور x نسبت به دیگری منتقل می‌شود، خودهمبستگی آنها به صورت تابعی از پارامتر B_x ، که جابه‌جایی محوره‌های y آنها است، تغییر می‌کند. این مثال نمایشی از همبستگی یک بعدی است.

از معادله ۲۵-۲۹ دیده می‌شود که همبستگی با مؤلفه DC طیف یا نقطه طیفی مرتبه صفرم تبدیل فوریه داده می‌شود. بنابراین، آشکارسازی که روی محور در صفحه خروجی در دستگاه همبستگی اپتیکی شکل ۷-۲۵ قرار داده شود همبستگی را اندازه می‌گیرد. به طور دقیقتر، چون آشکارساز تنها به تأییدگی حساس است کمیتی متناسب با مجذور همبستگی را اندازه‌گیری می‌کند. وقتی شیء اول را در صفحه گشودگی در راستای محور x آن منتقل کنیم، انرژی نور در باریکه مستقیم تغییر می‌کند و تابع همبستگی $\Phi_{12}(q_x)$ ایجاد می‌شود. یک تابع معین (شیء اول)

را می‌توان با چندین تابع مرجع دیگر (شیء دوم)، با تقسیم این توابع مرجع در نوارهای افقی یا مجراها در مکان شیء دوم، به‌طور همزمان همبسته کرد. مؤلفه‌های طیفی DCی مربوط به هر یک از مجراهای مرجع، با استفاده از یک عدسی استوانه‌ای به‌عنوان عدسی تبدیل نهایی، در صفحه خروجی جدا از هم نگه داشته می‌شوند.

روش تشخیص نقشی که هم اکنون توصیف شد شاید برای درک از همه ساده‌تر باشد، اما فنون بسیار دیگری با مزایای مختلف ابداع شده‌اند. در این بررسی مقدماتی، تنها می‌توانیم یک رهیافت دیگر را به اختصار بیان کنیم که در آن از یک هولوگرام به‌عنوان صافی فضایی استفاده می‌شود. این فن در سال ۱۹۶۳ توسط واندرلوگت ارائه شد. ابتدا، از نقش خاصی که باید "تشخیص داده شود" هولوگرامی ساخته می‌شود. توزیع دامنه این هولوگرام را با تابع f نشان می‌دهیم. صفحه هولوگرافیک در صفحه تبدیل فوریه قرار داده می‌شود. هولوگرام حاصل را صافی جور شده یا به نام مبتکر آن صافی واندرلوگت می‌نامند. این صافی هولوگرافیک در صفحه فوریه متوالیاً، همراه با نقشهای آزمون مختلف با توزیعهای دامنه g_1, g_2, \dots در صفحه شیء، به‌کار برده می‌شود. می‌توان نشان داد [۱ و ۲] که به‌طور کلی سه باریکه در سه زاویه متمایز به‌دست می‌آیند، و در نتیجه سه لکه متمایز در صفحه تصویر ظاهر می‌شوند. مرکز یکی از این لکه‌ها روی محور اپتیکی است، و دو لکه دیگر، که برون‌محوری هستند، به‌ترتیب همتافتگی و همبستگی توابع نقش f و g را نمایش می‌دهند. وقتی نقش آزمون g با نقش مطلوب f جور باشد، تصویر همبستگی با لکه روشن مرکزی ظاهر می‌شود، و تشخیص نقش حاصل می‌شود.

در بعضی از فنون همبستگی اپتیکی، تشخیص نقش مستقل از اندازه و سمتگیری آن صورت می‌گیرد. فنون تصفیة جور شده، که در آنها از نور ناهمدوس استفاده می‌شود، نیز برای کاهش زمینه علامت به نوفه، که نوعاً در دستگاههای نور همدوس وجود دارد، ابداع شده‌اند.

الگوی تصویرسازی دیگر: همتافتگی. در بخشهای قبل، تصویرسازی را به‌عنوان (۱) نتیجه پراش یا تحلیل فوریه، که طیفی با بسامدهای فضایی تولید می‌کنند، و (۲) ترکیب مجدد آنها یا ترکیب فوریه برای تشکیل تصویر، ارائه کردیم. اکنون می‌خواهیم ریاضیات و اصطلاحات متداول در بحث تبدیلات فوریه را با رهیافت دیگری برای تصویرسازی معرفی کنیم.

یک گشودگی دوبعدی (صفحة xy) و تصویر آن (صفحة XY) ناشی از یک دستگاه اپتیکی واسطه را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم این دو مجموعه محورها، همچون در شکل ۲۵-۱، دارای سمتگیری مشابهی هستند. در مورد دستگاه اپتیکی کامل، یک تناظر یک‌به‌یک بین نقاط همیوغ شیء و تصویر برقرار است. برای سادگی، بزرگنمایی خطی را ۱ می‌گیریم. فرض کنید تابیدگی این تصویر کامل (فرضی) با $I_o(x, y) \equiv I_o(X, Y)$ داده شده باشد. البته در عمل، نور ناشی از

هر نقطه شیء در اطراف نقطه همیوگ تصویر آن، به علت پراش و ابیراهی، پخش می‌شود. در این الگو، تصویر حاصل را همپوشی این نقاط تصویر "پخشیده" در نظر می‌گیریم. در یک دستگاه خطی، این نقشهای تابیدگی جزئی صرفاً باهم جمع می‌شوند. فرض کنید تابیدگی واقعی روی صفحه تصویر با $I_i(X, Y)$ داده شود. واضح است که تبدیل از $I_o(X, Y)$ به $I_i(X, Y)$ دستگاه اپتیکی را مشخص می‌کند و با یک تابع سوم، که تابع پخش نقطه‌ای $G(x, y, X, Y)$ نامیده می‌شود، صورت می‌گیرد. به عنوان مثال، در مورد یک دستگاه بدون ابیراهی، G همان تابع توصیفگر نقش آیری است (بخش ۱۶-۳).

اکنون اگر فرض کنیم تابع پخش نقطه‌ای فضا-ناوردا (مستقل از مختصات نقطه شیء) باشد، این تابع می‌تواند تنها به جابه‌جایی نسبی نقاط همیوگ بستگی داشته باشد:

$$G(x, y, X, Y) = G(X - x, Y - y)$$

علاوه بر این، اگر نور ناشی از صفحه شیء ناهمدوس باشد، تابیدگیها باهم جمع می‌شوند،^۱ و برای تابیدگی در نقطه تصویر (X, Y) ناشی از تمام نقاط شیء (x, y) می‌توانیم بنویسیم

$$\underbrace{I_i(X, Y)}_{\text{تابیدگی تصویر}} = \iint \underbrace{I_o(x, y)}_{\text{تابیدگی شیء}} \underbrace{G(X - x, Y - y)}_{\text{تابع پخش نقطه‌ای}} dx dy \quad (31-25)$$

انتگرال معادله ۲۵-۳۱ را همتافتگی توابع I_o و G می‌نامند،^۲ و معمولاً با علامت زیر نشان می‌دهند

$$I_i = I_o \otimes G \quad (32-25)$$

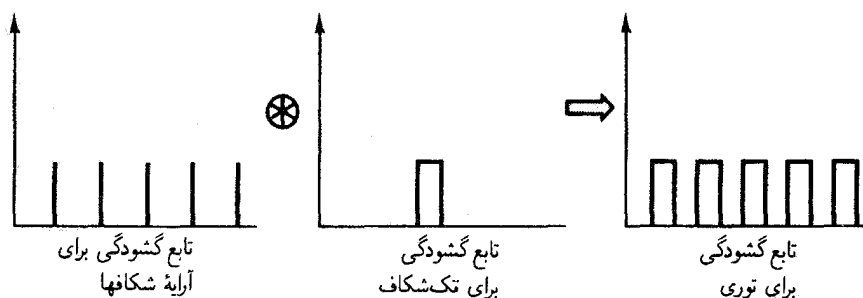
فرض کنید تبدیل فوریه هر یک از این توابع را محاسبه کنیم و آنها را با $\mathcal{F}(I_o)$ ، $\mathcal{F}(I_i)$ ، و $\mathcal{F}(G)$ نشان دهیم. قضیه همتافتگی (به مسائل مراجعه کنید) می‌گوید تبدیل فوریه همتافتگی دو تابع برابر با حاصلضرب تبدیلیهای انفرادی آنها است، یا به طور نمادین

$$\mathcal{F}(I_i) = \mathcal{F}(I_o \otimes G) = \mathcal{F}(I_o) \times \mathcal{F}(G) \quad (33-25)$$

مفاد معادله‌های ۲۵-۳۲ و ۲۵-۳۳ را می‌توان در این جمله خلاصه کرد که همتافتگی در فضای حقیقی متناظر با ضرب در فضای فوریه است. از ترکیب این نتیجه با هم‌ارزی تبدیل فوریه و

۱. این انتگرال کاربردهای مهم دیگری در فیزیک دارد، و در آن باید یک تابع در هر نقطه را در تمام تابع دیگر ضرب کنیم و سپس روی نتایج جمع بزنیم. در نتیجه، آن را انتگرال برهم‌نش یا ناخوردگی نیز می‌نامند.

۲. اگر نور همدوس باشد، این مجموع یک مجموع برداری از دامنه‌های میدان الکتریکی مختلط است.



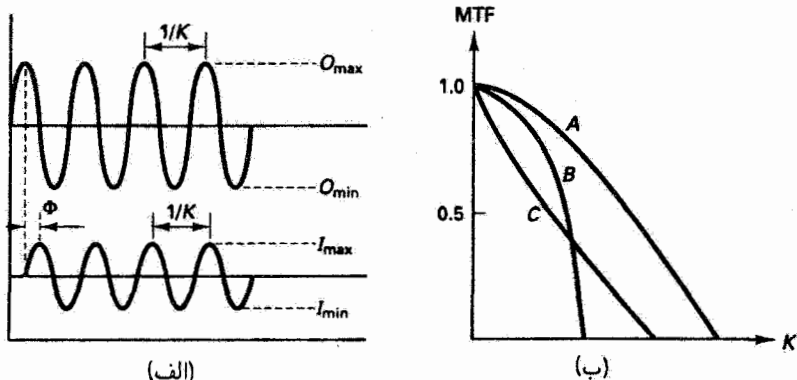
شکل ۲۵-۹ نمایش نمادین قضیه همافتگی برای توری.

طیف بسامد فضایی (یا تابع پراش فرانوفر) مربوط به یک تابع گشودگی، می‌توانیم معادله ۲۵-۳۳ را به صورت زیر تعبیر کنیم: طیف بسامد فضایی تابیدگی تصویر برابر با حاصلضرب طیف بسامد فضایی تابیدگی شیء و طیف بسامد فضایی تابع پخش نقطه‌ای است. آخرین عامل، یعنی $\mathcal{F}(G)$ ، را تابع تبدیل اپتیکی (OTF) می‌نامند زیرا طیف شیء را به طیف تصویر تبدیل می‌کند یا تغییر می‌دهد. بنابراین، از تابع تبدیل اپتیکی برای مشخص کردن کار دستگاه اپتیکی استفاده می‌شود.

به عنوان مثالی از قضیه همافتگی، نتایج داده شده در معادله ۱۶-۳۲ برای پراش فرانوفر توری را یادآوری می‌کنیم. در آنجا دیدیم که دو تابع حاصلضرب را می‌توان جداگانه به عنوان پراش از یک شکاف منفرد و تداخل از شکافهای (با پهنای قابل چشمپوشی) چندگانه تعبیر کرد. چون این تابعها تبدیلیهای فوریه تابعهای گشودگی مربوط به خود هستند، می‌توانیم بگوییم که (۱) در فضای فوریه، نقش پراش توری با حاصلضرب تبدیل فوریه تابع گشودگی منفرد و تبدیل آرایه چشمه‌های خطی تعریفگر توری داده می‌شود، یا اینکه (۲) در فضای حقیقی، تابع گشودگی توری همافتگی تابع گشودگی آرایه شکافها با تابع گشودگی تک شکاف است. فرمولبندی دوم از شکل ۲۵-۹ استنباط می‌شود. به زبان ساده‌تر، اگر تبدیل فوریه توابع گشودگی ساده را بدانیم، می‌توانیم نقش فرانوفر ناشی از توابع گشودگی پیچیده‌تر را با استفاده از قضیه همافتگی آسانتر محاسبه کنیم.

ارزیابی دستگاه با تابع تبدیل. مشخص‌سازی ظرفیت تصویرسازی یک دستگاه اپتیکی صرفاً با ارائه توان تفکیک آن نمی‌تواند ارزیابی کافی برای کارکرد دستگاه به دست بدهد. معیار بهتر این کارکرد تابع تبدیل اپتیکی (OTF) است. برای اینکه یک دستگاه اپتیکی را به طور مناسب آزمون کنیم به اشیاىی احتیاج داریم که هم بسامدهای فضایی زیاد و هم بسامدهای فضایی کم داشته باشند. مطابق معمول، بسامدهای فضایی کم برای تصویر کردن جزئیات درشت شیء کافی هستند، در حالی که بسامدهای فضایی زیاد برای تولید جزئیات ریزتر لازم‌اند.

در یک فن آزمون دستگاه اپتیکی از یک رشته نقشه‌های آزمون با تاریکی متغیر سینوسی،



شکل ۲۵-۱۰ (الف) تاییدگیهای سینوسی شیء و تصویر، هر دو با بسامد فضایی K . دستگاه اپتیکی دارای بزرگنمایی ۱ است. (ب) نمودار تابع تبدیل مدولاسیون (MTF) بر حسب بسامد فضایی برای سه دستگاه اپتیکی.

هر یک در بسامد فضایی مختلف K ، استفاده می شود. وقتی نور تابانده می شود، تصویرسازی ناهمدوس نقش آزمون صورت می گیرد. بزرگنمایی دستگاه را ۱ می گیریم. تصویر حاصل از دستگاه اپتیکی خطی نیز در همان بسامد فضایی، اما با تغییری در دامنه و فاز، چنانکه در شکل ۲۵-۱۰ الف نشان داده شده است، سینوسی است. تابع تبدیل اپتیکی OTF، وقتی به صورت مختلط نوشته شود، هر دو تغییر را در بر می گیرد:

$$OTF = (MTF) e^{i(PTF)} \quad (25-34)$$

که در آن MTF قدرمطلق و PTF فاز است. وقتی هر یک از این دو به صورت تابعی از بسامد معلوم باشد، MTF تابع تبدیل مدولاسیون و PTF تابع تبدیل فاز است. سینوسهای متناظر با شیء و تصویر با مدولاسیون تباین γ آنها به صورت زیر توصیف می شوند

$$\gamma_o = \frac{O_{\max} - O_{\min}}{O_{\max} + O_{\min}} \quad \text{و} \quad \gamma_I = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (25-35)$$

آنگاه MTF و OTF به صورت ساده زیر داده می شوند

$$MTF = \gamma_I / \gamma_o \quad \text{و} \quad PTF = \Phi \quad (25-36)$$

تعیین تابع تبدیل مدولاسیون (MTF) و تابع تبدیل اپتیکی (OTF) در بسامدهای فضایی مختلف، مانند منحنیهایی که در شکل ۲۵-۱۰ ب نشان داده شده اند، ارزیابی کاملتر کاربرد دستگاه را نسبت

به تفکیک تنها امکانپذیر می‌سازد. سه دستگاه مشخص نشان داده شده‌اند که وقتی بسامد فضایی به صفر میل می‌کند همگی به MTF برابر با ۱ میل می‌کنند، اما وقتی MTF صفر می‌شود حدهای تفکیک مختلفی را نشان می‌دهند. دستگاه A به‌وضوح بهترین کارکرد را دارد. دستگاه B دارای حد بسامد کمتری نسبت به دستگاه C است اما کارکرد بهتری در بسامدهای کمتر دارد.

۲-۲۵ طیف‌نمایی تبدیل فوری‌های

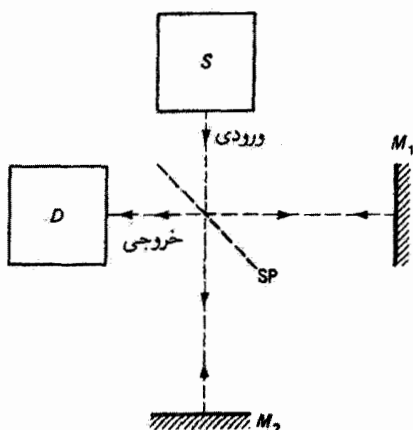
طیف‌نمایی تبدیل فوری‌های جانشینی عالی برای فنون مرسوم تحلیل طیف است. مزیت‌های خاص این فن منجر به کاربردهای وسیعی در پژوهش و صنعت شده‌اند. با استفاده از ابزارهای مانند تداخل‌سنج مایکلسون به‌عنوان طیف‌سنج، این مزیت‌ها هم از به‌کار بردن گشودگی بزرگ در ورودی علامت و هم از وجود طیف کامل در خروجی علامت ناشی می‌شوند. عبور انرژی زیاد که نتیجه استفاده از گشودگی بزرگ است مزیت ژاکینو نامیده می‌شود، در حالی‌که پردازش همزمان گستره طیفی کامل در طی یک روبش منفرد ابزار را مزیت فلزه یا چندتایه می‌نامند. بدین ترتیب، طیف‌سنج تبدیل فوری‌های، برخلاف طیف‌سنج‌های توری و منشوری، به علت وجود شکاف‌های باریک، که هم بازه طول‌موج و هم تابیدگی موجود در هر نوبت را محدود می‌کنند، محدود نمی‌شود. به‌علاوه، این فن توانایی تفکیک زیادی دارد که اصولاً تنها به علت پهنای نمونه داده‌های ورودی و ناحیه طول‌موج تحت تحلیل محدود می‌شود.

گشودگی بزرگ و عبور کامل در تداخل‌سنج مایکلسون از این ابزار یک طیف‌سنج تبدیل فوری‌های ساخته‌اند. در بررسی زیر نشان داده می‌شود که توزیع طیفی یا طیف‌نگاشت (تابیدگی برحسب عدد موج) مربوط به نور فرودی به تداخل‌سنج مایکلسون دقیقاً تبدیل فوری توزیع تابیدگی یا تداخل‌نگاشت (تابیدگی برحسب اختلاف راه) مربوط به تداخل دو باریکه آن به‌صورت تابعی از حرکت آینه است. شکل ۲۵-۱۱ نموداری از یک تداخل‌سنج مایکلسون را نشان می‌دهد که در آن تقسیمگر باریکه SP باریکه ورودی طیفی ناشی از چشمه S را به قسمت‌های همدامنه تفکیک می‌کند و دوباره آنها را پس از بازتاب از آینه‌های M_1 و M_2 باهم ترکیب می‌کند. باریکه‌های تداخل‌کننده در آشکارساز D جمع می‌شوند. فرض کنید میدان‌های الکتریکی این باریکه‌ها برای یک مؤلفه عدد موج خاص $k (= 2\pi/\lambda)$ در چشمه نور، موقع ورود به آشکارساز، به‌صورت زیر باشند

$$E_1 = E_0 \cos(kx_1 - \omega t) \quad (37-25)$$

و

$$E_2 = E_0 \cos(kx_2 - \omega t) \quad (38-25)$$



شکل ۱۱-۲۵ عناصر تداخل سنج مایکلسون که به عنوان طیف سنج تبدیل فوریه‌ای به کار می‌رود.

که در آنها دو باریکه یک اختلاف راه فیزیکی $x = x_2 - x_1$ بین تفکیک و ترکیب مجدد متحمل شده‌اند. آنگاه تابیدگی متوسط زمانی برای مؤلفه k در آشکارساز عبارت است از

$$I_k = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle$$

و از آن، همچنانکه در فصل ۱۰ محاسبه شد، به دست می‌آوریم

$$I_k = 2I_0 (1 + \cos kx) \quad (۲۵-۳۹)$$

که در آن I_0 نمایشگر تابیدگی متوسط زمانی هر یک از باریکه‌ها است. چون k دارای مقادیر پخش شده‌ای در چشمه است، I_k را می‌توان به صورت تابیدگی $I(k)$ بر بازه واحد k در k تعبیر کرد که از آن تابیدگی کل روی تمام طول موجها به دست می‌آید:

$$I = \int_0^{\infty} I(k) dk = \int_0^{\infty} 2I_0(k) dk + \int_0^{\infty} 2I_0(k) \cos(kx) dk \quad (۲۵-۴۰)$$

جمله اول که به صورت یک جمله زمینه عمل می‌کند نمایشگر تابیدگی کل ثابتی است که از تمام مؤلفه‌های طول موج در دو باریکه تداخل کننده ناشی می‌شود. جمله دوم نمایشگر تداخل بین دو باریکه است و می‌توان آن را، بسته به اختلاف راه x ، انحراف مثبت یا منفی از جمله ثابت در نظر گرفت. افت و خیزهای

حول زمینه ثابت توزیع طیفی (تداخل‌نگاشت) را تشکیل می‌دهند که با رابطه زیر داده می‌شود

$$I(x) = \int_0^{\infty} I(k) \cos(kx) dk \quad (41-25)$$

و تبدیل فوریه طیف‌نگاشت زیر است

$$I(k) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \int_0^{\infty} I(x) \cos(kx) dx \quad (42-25)$$

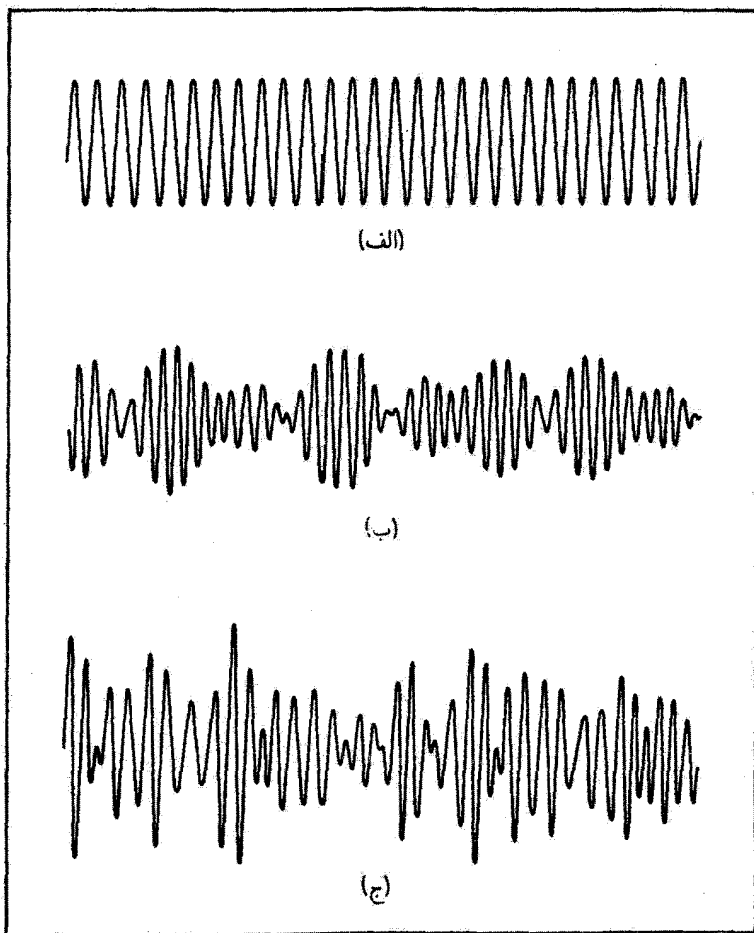
بنابراین، آشکارسازی خروجی تداخل‌نگاشت $I(x)$ ، به صورت تابعی از اختلاف راه x ، در نقطه‌ای روی محور اپتیکی دستگاه محاسبه توزیع تابیدگی طیفی $I(k)$ را به صورت تابعی از عدد موج k توسط انتگرال‌گیری تبدیل فوریه معادله ۴۲-۲۵ امکان‌پذیر می‌کند. در شکل ۱۲-۲۵ سه تداخل‌نگاشت نمونه تجربی نشان داده شده‌اند که از یک تداخل‌سنج مایکلسون با ورودیهای طیفی مختلف به دست آمده‌اند. این نوع طیف‌نگاشتها، به علت محاسبات تبدیل فوریه با نمونه‌برداری دوره‌ای، تقریبی هستند. وقتی تابع $I(x)$ مجموعه گسسته‌ای از نقاط نمونه است، تبدیل فوریه پیوسته را می‌توان به مجموع تبدیل کرد و آن را تبدیل فوریه گسسته نامید. استفاده از بازه‌های نمونه‌برداری متناهی در یک پهنای نمونه کل متناهی یا درجه به محدودیتهایی در توان تفکیک دستگاه و در طول موج مینیممی که آن را با محاسبه تبدیلی بدون ابهام برداش می‌کنیم منجر می‌شود. می‌توان نشان داد که محدود کردن داده‌ها به یک درجه متناهی x_w تفکیک توزیع طیفی را محدود می‌کند به طوری که بازه طول موج تفکیک‌پذیر مینیمم با رابطه زیر داده می‌شود

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{x_w} \quad (43-25)$$

و در نتیجه توان تفکیک برابر است با

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{x_w}{\lambda} \quad (44-25)$$

می‌بینیم که استفاده از پهنای نمونه بزرگ تفکیک را بهتر می‌کند. برای مثال، حرکت آینه‌ای به اندازه ۵ cm، که اختلاف راه کل یا درجه‌ای به اندازه ۱ cm ایجاد می‌کند، به توان تفکیک ۴۰۰۰۰ در ۵۰۰ nm و تفکیک ۲۵ nm در ۵۰۰ nm منجر می‌شود. طیف‌سنجی با جابه‌جاییهای نسبی آینه به اندازه یک متر یا بیشتر ساخته شده‌اند که توانهای تفکیک ۱۰^۵ یا بزرگتر را به وجود می‌آورند. اما محدودیت مهم دیگری را نیز باید در نظر گرفت. چون تداخل‌نگاشت واقعی تنها یک تقریب در بازه



شکل ۱۲-۲۵ طیف‌نگاشت‌های حاصل از یک تداخل‌سنج مایکلسون با استفاده از چشمه‌های نور مختلف. (الف) لیزر He-Ne. (ب) چشمه Hg، صافی بنفش. (ج) چشمه Hg، بدون تصفیه.

نمونه‌برداری خاص (خوانش/nm) است، پدیده مشهوری در نظریه نمونه‌برداری که دگرنامی نامیده می‌شود محدودیتی روی کوچکترین طول موجی که می‌توان آن را با این روش بدون ابهام پردازش کرد ایجاد می‌کند. طول موجهای موجود در تابش ورودی که از یک طول موج خاص λ_{\min} کوچکتر هستند به صورت طول موجهای بزرگتری در طیف تبدیل شده مشاهده می‌شوند. از این نوع همپوشی طول موجها می‌توان با توجه به معیار نیکیس جلوگیری کرد: علامت باید با آهنگی دست‌کم دو برابر مؤلفه بزرگترین بسامد آن نمونه‌برداری شود. قابل تذکر است که از این معیار در تولید ثبتهای شنیداری رقمی نوین نیز استفاده می‌شود که در آنها آهنگ نمونه‌برداری ۵۰ kHz از علامت شنیداری بازسازی

دقیق بسامد شنیداری ماکسیمم 20 kHz را تضمین می‌کند. این معیار به بیان معادل برحسب پارامترهای تجربی اپتیکی می‌گوید که برای جلوگیری از دگرنامی باید بازه نمونه‌برداری کمتر از نصف کوچکترین طول موج موجود در چشمه باشد. بدین ترتیب، طول موج مینیمم با رابطه زیر داده می‌شود

$$\lambda_{\min} = \frac{2x_w}{N-1} \quad (45-25)$$

که در آن N تعداد کل نمونه‌ها است و در نتیجه $N-1$ تعداد بازه‌های نمونه‌برداری است. اکنون می‌بینیم که یک x_w بزرگ، که در ایجاد تفکیک خوب مفید است، می‌تواند همچنین به علت محدود کردن گستره طیفی طیف‌سنج مضر باشد، مگر اینکه N نیز به‌طور مناسب بزرگ باشد. اما تعداد ماکسیمم نقاط داده‌ها توسط لوازم ذخیره داده‌های رایانه و زمان محاسبات رایانه محدود می‌شود. تعداد عملیاتی که در محاسبه توزیع طیفی $I(k)$ توسط رایانه انجام می‌شوند تقریباً برابر با N^2 است. استفاده از الگوریتم کولی-توکی برای اجرای این رشته از محاسبات تعداد آنها را به حدود $N \log_2 N$ کاهش می‌دهد و تبدیل فوریه تند نامیده می‌شود. برای مثال، تبدیلی که در آن از 1000 نقطه داده‌ها استفاده می‌شود از 1000000 عمل به 10000 کاهش می‌یابد، و این صرفه‌جویی قابل ملاحظه‌ای در هزینه و زمان رایانه است. در مثالی که هم‌اکنون بیان شد، اگر تابش ورودی شامل طول‌موج‌هایی در ناحیه مرئی و فرابنفش نزدیک باشد، N نمی‌تواند کمتر از حدود 67000 باشد بدون اینکه تحلیل درست طول‌موج‌هایی به کوچکی 300 nm به مخاطره افتد.

مسائل

۱-۲۵ (الف) فاصله از محور را برای سه لکه روشن اول حاصل از زرده رونچی (شکل ۲-۲۵) با پهنای شکاف 25 mm و 25° محاسبه کنید. تابش لیزری در 632.8 nm و یک عدسی با فاصله کانونی 50 cm را در نظر بگیرید.

(ب) طول موج مربوط به بسامد پایه را به دست آورید.

(ج) سه بسامد فضایی زاویه‌ای کمترین راه، جدا از مؤلفه DC، که برای نمایش تابع گشودگی رونچی لازم‌اند تعیین کنید.

(د) نسبت‌های تابیدگی سه لکه اول را نسبت به تابیدگی "پایه" به دست آورید.

۲-۲۵ (الف) اگر دو تابع تراگیسل را، با پشت سرهم قرار دادن دو عکس شفاف در صفحه گشودگی، روی هم بیندازیم، تابع تراگیسل مرکب چه رابطه‌ای با توابع تراگیسل انفرادی دارد؟

(ب) یک تابع گشودگی متشکل از دو زرده رونچی متعامد را در نظر بگیرید. انتظار دارید چه چیزی را در صفحه طیف ببینید؟

۳-۲۵ چگالی اپتیکی لایه را به صورت لگاریتم معمولی کدري آن تعريف می‌کنند. کدري، به نوبه خود، معکوس تراگسیلندگی T است.

(الف) نشان دهید چگالی اپتیکی برابر با $-\log_{10} T$ است.

(ب) نشان دهید چگالی اپتیکی کل چند لایه مجموع چگالیهای اپتیکی انفرادی آنها است.

(ج) تراگسیلندگی پشته پنج لایه‌ای را، که کدري هر لایه آن ۲۵٪ است، به دست آورید. چگالی اپتیکی کل لایه‌های مرکب را تعیین کنید.

۴-۲۵ تراگیسله سینوسی یک توری به صورت $\sin(ay)$ ، با واحدهای اختیاری، تغییر می‌کند. (الف) با فرض عبور ماکسیم 100% ، برای تولید وفادارانه تغییر سینوسی در تراگیسلندگی

توری چه زمینه ثابتی در تابع تراگیسل لازم است؟

(ب) تابع گشودگی را با و بدون جمله زمینه ترسیم کنید.

(ج) تابع تابیدگی در آشکارساز را به ازای تابیدگی واحد فرودی به توری به دست آورید.

۵-۲۵ قضیه همافترگی را ثابت کنید، یعنی نشان دهید اگر

$$h(x) = f(x) \otimes g(x)$$

آنگاه

$$\mathcal{F}[h(x)] = \mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[g(x)]$$

۶-۲۵ همافترگی در یک بعد را برای دو تپ مربعی یکسان، با ارتفاع ۱ واحد و طول ۶ واحد، ترسیم کنید.

۷-۲۵ تابع خودهمبستگی یک بعدی $\Phi_{11}(\tau)$ را برای تابع سینوسی $y = A \sin(\omega t + \alpha)$ به دست آورید.

۸-۲۵ (الف) خروجی طیف سنج مایکلسون به یک آشکارساز نور خورانده می‌شود. ورودی نور سبز جیوه با 5461 nm است. اگر یک آینه با سرعت 5 mm/s جابه‌جا شود، بسامد مدولاسیون جریان نور را تعیین کنید.

(ب) بسامد زنش جریان نور را وقتی ورودی نور زرد سدیم، در 5889.95 \AA و 5895.92 \AA است به دست آورید. [راه‌نمایی: معادله ۱۱-۱۴ را ببینید.]

۹-۲۵ انتقال آینه در یک طیف‌سنج مایکلسون ۵ cm است. طول موج تفکیک‌پذیر مینیمم را در (الف) 632.8 nm و (ب) $1 \mu\text{m}$ تعیین کنید.

۱۰-۲۵ نور یک چراغ جیوه به تقسیم‌گر باریکه یک طیف‌سنج مایکلسون فرود می‌آید. طول موجهای کوتاه‌تر از 360 nm از نور تصفیه می‌شوند. آهنگ انتقال آینه 715 nm/s است. آهنگی که با آن داده‌های طیف‌نگاشت نمونه‌برداری می‌شوند 128 خوانش بر ثانیه است. کلاً 256 نقطه داده‌ها برای تحلیل تبدیل فوریه‌ای به رایانه خواننده می‌شود.

(الف) پهنای دریچه x_w ،

(ب) بازه طول موج تفکیک‌پذیر مینیمم در 400 nm ،

(ج) طول موج مینیمی که متحمل دگرنامی نمی‌شود، و

(د) آهنگ نمونه‌برداری مینیمم مطابق با معیار نیکیس را به دست آورید.

۱۱-۲۵ یک طیف‌سنج تبدیل فوریه‌ای که در فرسوخ کار می‌کند یک اختلاف راه کل 278 mm به وجود می‌آورد. گستره آن از 4400 تا 400 cm^{-1} است. (الف) تفکیک آن را برحسب عدد موج به دست آورید.

(ب) چند نقطه داده‌ها در روبش باید گرفته شوند تا از دگرنامی در این گستره جلوگیری شود؟

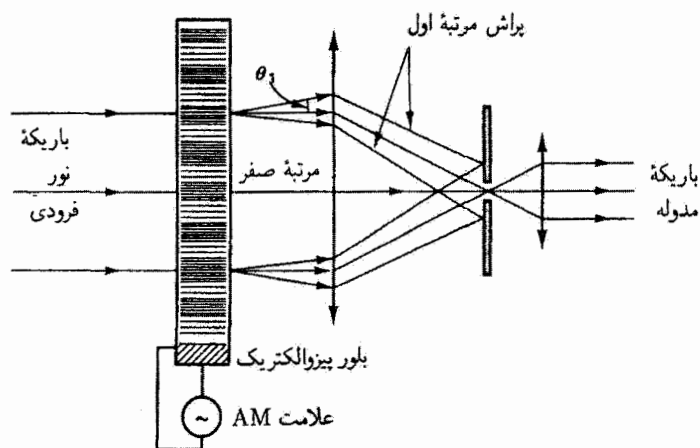
(ج) اگر یک راند در 30 s کامل شود، آهنگ روبش را به دست آورید.

مراجع

- [1] Steward, E. G. *Fourier Optics: An Introduction*, 2d ed. New York: Halsted Press, 1987. Ch. 4, 5.
- [2] Goodman, Joseph W. *Introduction to Fourier Optics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [3] Almeida, Silverio P., and Guy Indebetouw. "Pattern Recognition via Complex Spatial Filtering." *Applications of Optical Fourier Transforms*, edited by Henry Stark. New York: Academic Press, 1982.
- [4] Duffieux, P. M. *The Fourier Transform and Its Applications to Optics*, 2d ed. New York: John Wiley and Sons, 1983.
- [5] Françon, M. *Optical Image Formation and Processing*. New York: Academic Press, 1979.
- [6] Lee, S. H. ed. *Optical Information Processing, Fundamentals*. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [7] Bell, Robert John. *Introductory Fourier Transform Spectroscopy*. New York: Academic Press, 1972.
- [8] Griffiths, Peter, and James A. de Haseth. *Fourier Transform Infrared Spectrometry*.

New York: John Wiley and Sons, 1986. Ch. 1-4.

- [9] Matthys, D. R., and F. L. Pedrotti. "Fourier Transforms and the Use of a Microcomputer in the Advanced Undergraduate Laboratory." *American Journal of Physics* 50 (1982): 990.
- [10] Strong, John. *Concepts of Classical Optics*. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1958. Appendix F.
- [11] Mertz, Lawrence. *Transformations in Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1965. Ch. 1, 2.
- [12] Williams, Charles S., and Orville A. Becklund. *Introduction to the Optical Transfer Function*. New York: John Wiley and Sons, 1989.
- [13] Smith, F. Dow. "How Images Are Formed." *Lasers and Light, Readings from Scientific American*, p. 59. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1969.
- [14] Campbell, Fergus W., and Lamberto Maffei. "Contrast and Spatial Frequency." *Scientific American* (Nov. 1974): 106.
- [15] Bracewell, Ronald N. "The Fourier Transform." *Scientific American* (June 1989): 86.
- [16] James, J. F., and R. S. Sternberg. *The Design of Optical Spectrometers*. London: Chapman and Hall Ltd., 1969. Ch. 3.
- [17] Reynolds, George O., John B. DeVelis, George B. Parrent, Jr., and Brian J. Thompson. *Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics*. Bellingham, Wash.: SPIE Optical Engineering Press, 1989.



۲۶

اپتیک غیرخطی و مدولاسیون نور

مقدمه

مباحثی که در بیشتر این کتاب بررسی شده‌اند، از جمله فرایندهای عبور، بازتاب، شکست، برهم‌نهش و دوشکستی، در مقوله‌ای قرار می‌گیرند که اپتیک خطی نامیده می‌شود. وقتی از اپتیک خطی صحبت می‌کنیم، فرض می‌کنیم یک آشفتگی اپتیکی را که در محیط اپتیکی منتشر می‌شود می‌توان با معادله موج خطی توصیف کرد. به‌عنوان پیامدی از این فرض، دو موج هماهنگ در این محیط از اصل برهم‌نهش پیروی می‌کنند، یعنی شدت نور هر چه باشد این دو موج بدون واپیچش ناشی از خود محیط یا از تداخل امواج حرکت می‌کنند. تنها طول موج و سرعت باریکه نور در ماده شفاف برای توصیف رفتار آن لازم هستند.

اما می‌دانیم که وقتی شدت نور به اندازه کافی زیاد باشد اپتیک خطی برای توصیف وضعیت کارایی ندارد. با ایجاد نور شدیدتر و هم‌دوس توسط لیزرها، می‌بینیم که خواص اپتیکی محیط، مانند ضریب شکست آن، تابعی از شدت نور می‌شود. وقتی دو یا چند موج نور در این محیط تداخل می‌کنند، اصل برهم‌نهش دیگر برقرار نیست. این پدیده‌های غیرخطی مستلزم گسترش نظریه خطی‌اند به طوری که بتوان پاسخ غیرخطی مواد اپتیکی به تابش الکترومغناطیسی را در نظر گرفت.

در این فصل قلمرو اپتیک غیرخطی را به طور دقیقتری تعریف می‌کنیم، بعضی از خواص جدیدی را که کشف شده‌اند توصیف می‌کنیم، و درباره بعضی از کاربردهای عملی آنها در مدولاسیون باریکه نور بحث می‌کنیم.

۱-۲۶ محیط غیرخطی

پدیده‌های غیرخطی در نهایت از ناتوانی دو قطبیهای محیط اپتیکی برای پاسخ خطی به میدان متناوب E ی وابسته به باریکه نور ناشی می‌شوند. هسته‌های اتمی و الکترونهاى درونی به ترتیب سنگینتر و مقیدتر از آن هستند که به میدان متناوب E در بسامد نور (حدود 10^{14} تا 10^{15} Hz) پاسخ دهند. بنابراین، الکترونهاى بیرونی اتمهای ماده عمدتاً باعث قطبش محیط اپتیکی توسط میدان E ی باریکه می‌شوند.^۱ وقتی نوسانهای این الکترونها در پاسخ به میدان کوچک باشند قطبیدگی، چنانکه بعداً در بخش ۱-۲۷ شرح می‌دهیم، متناسب با میدان E است. اما وقتی میدان E با شدت باریکه افزایش می‌یابد، تناسب دقیق شروع به خراب شدن می‌کند، درست همان طور که نوسانهای هماهنگ یک فنر ساده با افزایش دامنه نوسان دائماً ناهماهنگ‌تر می‌شوند. وسیله دیگری برای برانگیختن رفتار غیرخطی بدون استفاده از شدتهای زیاد باریکه انتخاب بسامد اپتیکی برانگیزنده نزدیک به بسامد شدید دو قطبیهای نوسان‌کننده است، و این فنی است که به طور گسترده‌ای در طیف‌نمایی غیرخطی به‌کار برده می‌شود و آن را تقویت تشدید می‌نامند [۱].

قطبیدگی محیط خطی ناشی از میدان الکتریکی E معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (1-26)$$

که در آن χ پذیرفتاری و ϵ_0 گذردهی خلا است. وقتی انحراف از خطیت کوچک باشد می‌توان تغییر پذیرفتاری در محیط غیرخطی را با یک رشته توانی به صورت زیر نمایش داد

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^4 + \dots \quad (2-26)$$

با جاگذاری در معادله ۱-۲۶، قطبیدگی به صورت زیر در می‌آید

$$P = \epsilon_0 (\chi_1 E + \chi_2 E^3 + \chi_3 E^5 + \dots) \quad (3-26)$$

۱. در اینجا منظور قطبش الکتریکی است نه قطبش موج که در فصلهای ۱۴ و ۱۵ بررسی شده است.

$$P = \underbrace{P_1}_{\text{خطی}} + \underbrace{(P_2 + P_3 + \dots)}_{\text{جمله‌های غیرخطی کوچک}}$$

که در آن شاخصهای پایین χ با توانهای E جور هستند و بزرگی زیادشونده جمله‌های مرتبه‌های بالاتر را نشان می‌دهند. ضرایب پذیرفتاری خطی و غیرخطی خواص اپتیکی محیط را مشخص می‌کنند، و این رابطه بین P و E پاسخ محیط اپتیکی به میدان را کاملاً مشخص می‌کند.

اولین جمله در معادله ۳-۲۶، یا P_1 ، نمایشگر اپتیک خطی است که در آن قطبیدگی محیط صرفاً متناسب با میدان E است. اگر میدان E زیاد بزرگ نباشد، ضرایب جمله‌های با توان بزرگتر به اندازه‌ای کوچک‌اند که نمی‌گذارند این جمله‌ها تأثیر قابل ملاحظه‌ای روی قطبیدگی داشته باشند. تنها اگر نور شدید همدوس موجود باشد این جمله‌های مرتبه بالاتر مهم می‌شوند. همدوسی زیاد نور لیزر باعث می‌شود که باریکه در لکه‌های کوچکی با اندازه‌ای از مرتبه یک طول‌موج متمرکز شود،^۱ و در نتیجه میدانهای E با شدتی حدود 10^{10} V/m به‌وجود می‌آیند که از مرتبه میدانهایی هستند که الکترونها را در محیط اپتیکی به هسته‌ها مقید می‌کنند. پیتز فرانکن و همکارانش موفق به انجام اولین آزمایش اپتیک همدوس غیرخطی [۲] در دانشگاه میشیگان در سال ۱۹۶۱ شدند. این گروه خروجی همدوس 6943 nm از یک لیزر یاقوتی تپی را روی بلور کوارتز متمرکز کردند و تولید هماهنگ دوم، وجود مؤلفه تابش همدوس فرابنفش ضعیف در 347.15 nm یعنی با دو برابر بسامد یا نصف طول‌موج نور برانگیزنده در خروجی، را آشکارسازی کردند. این پدیده غیرخطی را در بخش بعد بررسی می‌کنیم.

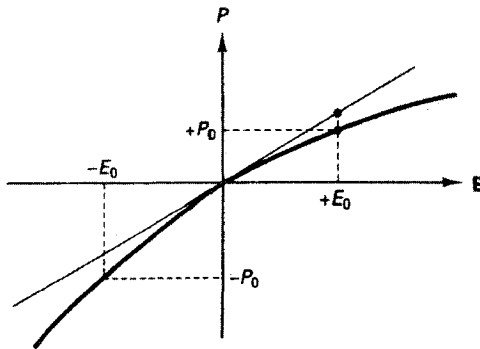
۲-۲۶ تولید هماهنگ دوم

تولید هماهنگ دوم ناشی از سهم جمله مرتبه دوم در معادله ۳-۲۶ است:

$$P_2 = \epsilon_0 \chi_2 E^2 \quad (4-26)$$

که در آن جمله قطبیدگی مرتبه دوم P_2 مربوط به محیط اپتیکی متناسب با مجذور میدان E است. شکل ۱-۲۶ قطبیدگی را به‌صورت تابعی از میدان E برای مورد خطی و انحراف از خطیت به علت این جمله مرتبه دوم را نشان می‌دهد.

۱. بحث درباره متمرکز کردن باریکه‌های لیزری در بخش ۴-۲۱ را ببینید.



شکل ۱-۲۶ پاسخ نوعی غیرخطی و خطی قطبیدگی P به میدان الکتریکی اعمال شده E . برای میدانهای مثبت و منفی برابر، پاسخ محیط اپتیکی در وضعیت غیرخطی (خط خمیده سیاه) متقارن نیست. در این مورد، میدان منفی E_0 قطبیدگی بزرگتری نسبت به میدان مثبت با بزرگی یکسان به وجود می آورد.

به آسانی می توان نشان داد که جمله مرتبه دوم در قطبیدگی در ماده اپتیکی همسانگرد یا ماده ای که مرکز تقارن دارد سهم نیست. بلوری که دارای مرکز تقارن است با یک مرکز وارونی مشخص می شود به طوری که اگر مختصه شعاعی r به $-r$ تبدیل شود آرایه اتمی بلور بدون تغییر می ماند و در نتیجه پاسخ بلور به یک اثر فیزیکی تغییر نمی کند. در این نوع بلور، وارونی میدان اعمال شده نباید خواص فیزیکی، مانند قطبیدگی، را به استثنای علامت تغییر دهد. بنابراین، هر دو رابطه زیر باید صادق باشند

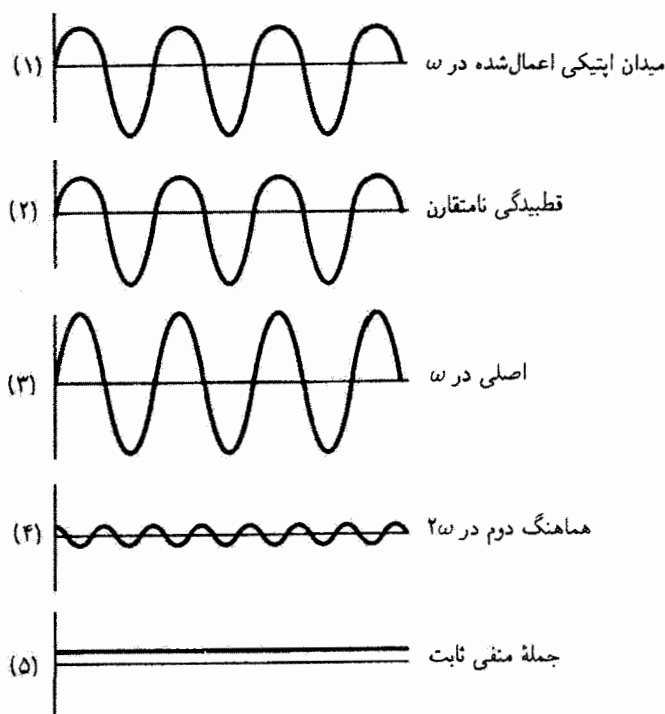
$$P_r = \epsilon_0 \chi_r (+E)^r \quad \text{و} \quad -P_r = \epsilon_0 \chi_r (-E)^r$$

چون میدان E مجذور شده است داریم $P_r = -P_r$ که تنها وقتی درست است که $P_r = 0$. بلور کوارتز، که فرانکن به کار برد، و بسیاری از بلورهای دیگر تقارن وارونی ندارند، و از این رو می توانند تولید هماهنگ دوم را علاوه بر پدیده های مرتبه دوم دیگری که بعداً بررسی می کنیم نمایان کنند. پیدایش هماهنگ دوم در قطبیدگی را می توان از استدلال ریاضی زیر پیش بینی کرد. اگر میدان اعمال شده E یا یکی از مؤلفه های فوریه آن به صورت زیر باشد

$$E = E_0 \cos \omega t$$

با جاگذاری آن در معادله ۱-۲۶ به دست می آوریم

$$P_r = \epsilon_0 \chi_r E_0^r \cos^r \omega t = \epsilon_0 \chi_r E_0^r [(1 + \cos 2\omega t)/2]$$



شکل ۲-۲۶ میدان E ی برانگیزنده (۱) و اثرات آن در محیط غیرخطی: قطبیدگی نامتقارن (۲) و مؤلفه‌های تابشی فوریه آن (۳، ۴ و ۵).

که در آن از اتحاد دو برابر زاویه برای $\cos^2 \omega t$ استفاده کرده‌ایم. معادله بالا را به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$P_T = \frac{1}{4} \epsilon_0 \chi_r E_0^2 + \frac{1}{4} \epsilon_0 \chi_r E_0^2 \cos 2\omega t \quad (5-26)$$

قطبیدگی مرتبه دوم P_T شامل جمله‌ای است با دو برابر بسامد میدان ایتیکی اعمال شده و یک مؤلفه ثابت یا DC که نمایشگر یکسوسازی ایتیکی است. بنابراین، نوسانهای دو قطبی ایجادکننده وابستگی زمانی قطبیدگی یک تابش الکترومغناطیسی با بسامد زاویه‌ای 2ω به وجود می‌آورند که، همراه با اثرهای مرتبه اول بسیار قویتر در بسامد پایه ω ، در میدان حاصل مشاهده می‌شود. قطبیدگی نامتقارن و مؤلفه‌های فوریه حاصل از آن در شکل ۲-۲۶ نشان داده شده‌اند.

نوری که در بسامد 2ω به‌طور پیوسته تولید شده است به علت پاشیدگی با سرعتی متفاوت از نوری که دارای بسامد ω است در ماده ایتیکی حرکت می‌کند. دو موج تداخل‌کننده ضمن حرکت در بلور متناوباً همگام و ناهمگام می‌شوند. می‌توان نشان داد [۳] که شدت خروجی متناسب است با

$$\text{sinc}^2 \left(\frac{L\Delta k}{2} \right)$$

که در آن L مسافت داخل بلور است و k ثابت انتشار موج، برابر با $n\omega/c$ است. در اینجا، $\Delta k = k_{\gamma\omega} - 2k_{\omega}$. بنابراین، وقتی $\Delta k = 0$ ، بلور از خود پاشندگی نشان نمی‌دهد و عامل شدت بالا ماکسیمم است. چون پاشندگی در مواد وجود دارد، $\Delta k \neq 0$ و عامل شدت تداخل حاصل بین هماهنگ پایه و هماهنگ دوم را توصیف می‌کند. با توجه به بحث مربوط به تابع سینک (شکل ۱۶-۲ را ببینید) می‌توان نشان داد که تغییر در شناسه تابع از یک مینیمم به یک ماکسیمم برابر با $\pi/2$ است. تغییر متناظر در L را طول همدرسی می‌نامند.^۱ بنابراین،

$$L_c \Delta k / 2 = \pi / 2 \quad \text{و} \quad L_c = \pi / \Delta k$$

طول همدرسی را می‌توان با رابطه زیر نیز بیان کرد

$$L_c = \frac{\pi}{\Delta k} = \frac{\pi}{\frac{\gamma\omega}{c} \Delta n} = \frac{\pi}{\frac{\gamma\pi}{\lambda_0} \Delta n}$$

یا

$$L_c = \frac{\lambda_0}{2\Delta n} \quad (۶-۲۶)$$

که در آن از روابط زیر استفاده کرده‌ایم

$$k = \frac{n\omega}{c} \quad \text{و} \quad \Delta k = \frac{n_{\gamma\omega}(\gamma\omega)}{c} - \frac{2n_{\omega}(\omega)}{c} = \frac{\gamma\omega}{c} \Delta n$$

در اینجا λ_0 طول موج خلأ پایه و Δn تفاضل ضرایب شکست مربوط به هماهنگ پایه و هماهنگ دوم است.

مثال

فرض کنید $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$ طول موج پایه است و ضرایب شکست در KDP (فسفات دی‌هیدروژن پتاسیم) برای هماهنگ دوم 1.4802 و برای هماهنگ پایه 1.5019 هستند. ضخامت بلور ماکسیمم قابل استفاده در تولید نور هماهنگ دوم را به دست آورید.

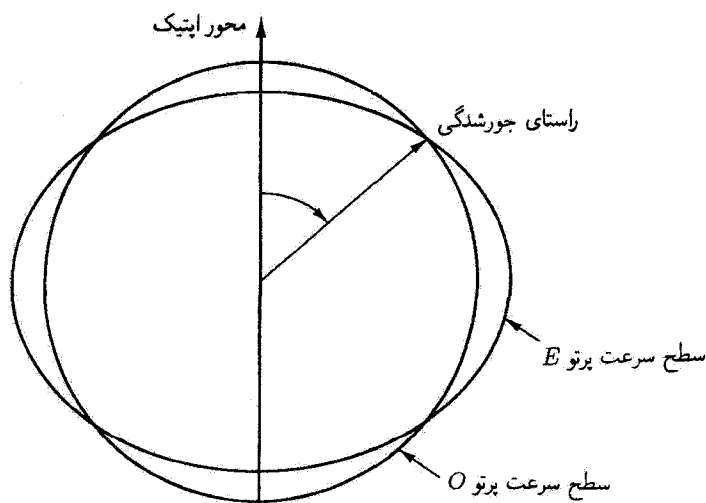
۱. این طول همدرسی را نباید با کمیتی به همین نام که در فصل ۱۲ معرفی شده است اشتباه کرد.

حل: با جاگذاری در معادله ۶-۲۶ داریم

$$L_c = \frac{0.8 \mu\text{m}}{(4)(1.5019 - 1.4802)} = 9.2 \mu\text{m}$$

این محاسبه نشان می‌دهد ضخامت بلور ماکسیم قابل استفاده در تولید نور هماهنگ دوم نوعاً بسیار کوچک است، و در مورد بالا حدود 10° برابر طول موج مربوط به هماهنگ پایه است. بلورهای با ضخامتهای برابر با طول همدوسی خود به طور تحقق‌ناپذیری کوچک هستند. ▲

فنی که می‌تواند کوچک بودن طول همدوسی بلورهای غیرخطی را چاره کند شامل استفاده از دوشکستی این بلورها است. چنانکه در بخش ۵-۱۵ گفته شد، ضریب شکست (و در نتیجه سرعت) پرتو غیرعادی E با راستا در بلور تغییر می‌کند. اگر راستا در بلور را طوری انتخاب کنیم که $n_{2\omega}$ برای پرتو غیرعادی E برابر با n_{ω} برای پرتو عادی O باشد، موجهای پایه و هماهنگ دوم همگام باقی می‌مانند و بلور می‌تواند با ضخامت یک سانتیمتر یا در همین حدود باشد. این فن را جور کردن ضریب شکست یا جور کردن فاز می‌نامند و با شکل ۳-۲۶ نمایش داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که چگونه بیضیوارهای نمایشگر سرعت برحسب راستای بلور برای پرتوهای O و E یکدیگر را در راستای جورشدگی قطع می‌کنند.



شکل ۳-۲۶ بیضیوارهای سرعت برای باریکه‌های نور یا قطبش متعامد در محیط دوشکست. بیضیوار پرتو O کروی است و بیضیوار پرتو E را در راستایی (که نسبت به محور اپتیک نشان داده شده است) قطع می‌کند که برای آن هر دو پرتو دارای یک سرعت هستند.

جدول ۱-۲۶ فرایندهای خطی و غیرخطی

غیرخطی مرتبه سوم: $P_3 = \varepsilon_0 \chi_3 E^3$	غیرخطی مرتبه دوم: $P_2 = \varepsilon_0 \chi_2 E^2$	خطی مرتبه اول: $P_1 = \varepsilon_0 \chi_1 E$
	مواد فاقد تقارن وارونی:	اپتیک کلاسیک:
تولید هماهنگ سوم	تولید هماهنگ دوم	برهم‌نهی
آمیختگی چار-موج	آمیختگی سه-موج	بازتاب
اثر کیر	یکسوسازی اپتیکی	شکست
پراکندگی رامان	تقویت پارامتری	دوشکستی
پراکندگی بریلوئن	اثر پوکلز	جذب
هیموغ‌سازی فاز اپتیکی		

تولید هماهنگ دوم تنها پدیده غیرخطی ناشی از وابستگی درجه دوم قطبیدگی به میدان الکتریکی نیست. پدیده‌های دیگری، و همچنین چند پدیده که به تقریب مرتبه بالاتر بعدی با $P_3 = \varepsilon_0 \chi_3 E^3$ بستگی دارند، در جدول ۱-۲۶ فهرست شده‌اند. به‌عنوان مثال، توجه کنید که برای فرایندهای غیرخطی مرتبه سوم تولید هماهنگ سوم می‌تواند روی دهد. دربخش زیر بعضی از پدیده‌های غیرخطی مرتبه بالاتر را بررسی می‌کنیم.

۳-۲۶ آمیختگی بسامد

وقتی دو یا چند باریکه فرودی با بسامدهای مختلف در ماده‌ی الکتریک غیرخطی با هم تداخل می‌کنند آمیختگی بسامد می‌تواند روی دهد. فرض کنید دو موج فرودی تداخل‌کننده با بسامدهای ω_1 و ω_2 به‌صورت زیر نمایش داده شوند

$$E = E_{o_1} \cos \omega_1 t + E_{o_2} \cos \omega_2 t$$

یا به‌صورت نمایی معادل زیر

$$E = \frac{1}{2} E_{o_1} (e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + \frac{1}{2} E_{o_2} (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})$$

قطبیدگی مرتبه دوم $P_2 = \epsilon_0 \chi_2 E^2$ مستلزم مجذور میدان فرودی است. بدین ترتیب، بنابه مشاهده، می‌توانیم ببینیم که مجذور E هماهنگهایی در $2\omega_1$ ، $2\omega_2$ ، $\omega_1 - \omega_2$ و $\omega_1 + \omega_2$ تولید می‌کند. به همین ترتیب، قطبیدگی مرتبه سوم آمیختگی بسامدی با تمام ترکیبهای ممکن دو یا چند باریکه فرودی به وجود می‌آورد.

یک مورد خاص از آمیختگی بسامد فرایندی است که تقویت پارامتری نامیده می‌شود. به جای $\omega_1 \rightarrow 2\omega_1$ که در تولید هماهنگ دوم روی می‌دهد، می‌توان به وضعیتی رسید که در آن $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_1$ و ω_2 توان از موج دمنده در ω_2 به امواج علامت و هرزرو در ω_1 و ω_2 منتقل می‌شود. (توجه کنید که در تولید هماهنگ دوم شارش توان برعکس است، یعنی از موج در ω_1 به موجی با بسامد دو برابر در ω_2 است.) برای تجسم دقیقتر این اثر، فرض کنید یک موج علامت کوچک در ω_s با یک موج دمنده قوی در ω_p در محیط غیرخطی برهم‌کنش کند. یک بسامد تفاضل یا هرزرو $\omega_s = \omega_p - \omega_s$ به صورت بسامد زنش تولید می‌شود. این بسامد هرزرو می‌تواند به نوبه خود با بسامد دمنده زنش کند و بسامد علامت $\omega_s = \omega_p - \omega_s$ را افزایش دهد. بدین ترتیب، در این فرایند هم موج هرزرو و هم موج علامت، با کشیدن توان از موج دمنده، تقویت می‌شوند. وقتی بسامدهای علامت و هرزرو با بسامدهای تشدید در بلور غیرخطی، که به صورت کاواک کوک شده فابری-پرو عمل می‌کند، انطباق داشته باشند، نوسانگر پارامتری یک چشمه کوکپذیر تابش همدوس است. کوک کردن کاواک با تغییر ضریب شکست کاواک از طریق کنترل دما یا اعمال میدان DC انجام می‌شود. بعضی از فرایندهای غیرخطی که در جدول ۲۶-۱ عنوان شده‌اند در بخشهای بعد، همراه با چند کاربرد ایزاری آنها در تولید باریکه‌های نور مدوله، بررسی می‌شوند. مدولاسیون نور به هر طریقه تغییر دامنه (AM)، بسامد (FM)، فاز، قطبش، یا راستای موج نور گفته می‌شود. هدف از مدولاسیون این است که موج توانایی حمل اطلاعات پیدا کند. به عنوان مثال، چنانکه در فصل ۲۴ توضیح داده شد، باریکه‌های نور از طریق تارهای نوری اطلاعات حمل می‌کنند. بستاورها و برشگرهای نور می‌توانند به طور مکانیکی مدولاسیون انجام دهند. در اینجا می‌خواهیم مدولاسیونی را توصیف کنیم که با تغییر ضریب شکست ماده با استفاده از وسایل الکتریکی، مغناطیسی یا آکوستیکی صورت می‌گیرد.

معادله اساسی توصیفگر رفتار غیرخطی معادله ۲۶-۳ است که رابطه بین قطبیدگی محیط و میدان اعمال شده E را به دست می‌دهد. در بررسی محیطهای بلورین، که نمایشگر بیشتر مواد مفید آکوستو-اپتیکی هستند، مرسوم این است که غیرخطی بودن ضریب شکست n را با معادله‌ای [۴] شبیه به معادله ۲۶-۲ مربوط به پذیرفتاری بیان می‌کنند:

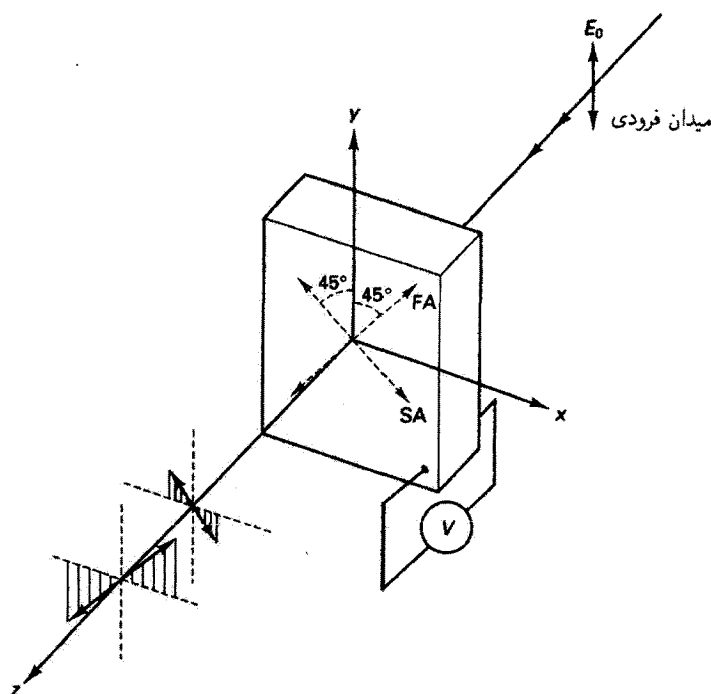
$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_0^2} + rE + RE^2 \quad (۷-۲۶)$$

که در آن r و R به ترتیب ضرایب الکترو-اپتیکی خطی و درجه دوم هستند،^۱ و فرض کرده‌ایم اثر دیگری که بتواند n را تغییر دهد (مانند کرنش بلور) وجود ندارد. ضریب شکست در غیاب میدان n_0 است. به طور کلی، ضریب شکست به راستای انتشار و قطبش موج نسبت به محورهای بلور بستگی دارد. چون میدان برداری است، ضرایب r و R تانسورهایی هستند که تقارن بلور را نشان می‌دهند. بسته به درجه تقارن، چندین مؤلفه تانسور صفر یا با همدیگر برابر می‌شوند، و در نتیجه تعداد کل عناصر مستقل^۲ که برای نمایش یک ماده بلورین خاص لازم‌اند کاهش می‌یابد [۵].

۲۶-۴ اثر پوکلز

اثر پوکلز از جمله خطی در معادله ۲۶-۷، که در آن E میدان اعمال شده DC است، ناشی می‌شود. این اثر را می‌توان یک مورد خاص از آمیختگی دو موج دانست که در آن یکی از امواج موج اپتیکی فرودی است و دیگری میدانی با بسامد صفر است. میدان E اپتیکی می‌تواند کوچک باشد، زیرا خود میدان DC به اندازه‌ای بزرگ است که رفتار غیرخطی ایجاد می‌کند. به طور کلی، میدان DC الکترونها را طوری دوباره توزیع می‌کند که در ماده قبلاً همسانگرد دوشکستی القا می‌شود، یا محورهای اپتیک جدیدی در بلورهای دوشکست طبیعی به وجود می‌آیند. چون اثر پوکلز یک اثر مرتبه دوم نسبت به قطبیدگی (معادله ۲۶-۳) است در مواد همسانگردی که تقارن وارونی دارند مشاهده نمی‌شود. تمام مواد بلورینی که اثر پوکلز از خود نشان می‌دهند^۳ پیزوالکتریک نیز هستند، یعنی دوشکستی القایی ناشی از کرنش مکانیکی پیدا می‌کنند. چون این اثر در سال ۱۸۹۳، یعنی مدتها قبل از اختراع لیزر، کشف شد حتی پیش از اینکه میدانهای اپتیکی شدید قابل دسترسی باشند به خوبی شناخته شده بود. در یک پیکربندی سلول پوکلز، محور اپتیک طبیعی بلور موازی با میدان اعمال شده قرار داده می‌شود. محورهای تند و کند (FA و SA) در یک صفحه عمود بر میدان اعمال شده، همچنانکه در شکل ۲۶-۴ دیده می‌شود، القا می‌شوند. اگر بلور سلول پوکلز را بچرخانیم تا FA و SA با محورهای x و y زاویه 45° بسازند، موج نور قطبیده قائم E_0 که در راستای میدان به بلور فرود می‌آید مؤلفه‌های دامنه مساوی روی FA و SA خواهد داشت. این مؤلفه‌ها ضرایب شکست مختلفی و سرعت‌های مختلفی در بلور پیدا می‌کنند. بنابراین، بلور مانند یک تأخیرگر فاز (بخش ۱۴-۲) عمل می‌کند، و

۱. مهم است که بین "مرتبه" فرایند الکترو-اپتیکی آن‌طور که از معادله ۲۶-۳ برای قطبیدگی تعیین می‌شود و آن‌طور که از معادله ۲۶-۷ برای $1/n^2$ Δn تعیین می‌شود فرق قائل شویم. به عنوان مثال، اثر پوکلز بنابه معیار اول یک اثر مرتبه دوم (شامل χ_2) و بنابه معیار دوم یک اثر مرتبه اول (شامل r) است. هر دو معیار به‌کار برده می‌شوند.
۲. تانسور الکترو-اپتیکی خطی p_{ij} با رابطه $\Delta(1/n^2)_i = \sum_j p_{ij} E_j$ تعریف می‌شود که در آن $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ و $j = x, y, z$ برای مثال، در بلورهایی که تقارن سه‌میل دارند تمام ۱۸ عنصر تانسور لازم‌اند؛
۳. تک بلورها را می‌توان به ۳۲ رده تقارنی تقسیم کرد؛ از میان اینها، برای ۲۰ رده اثر پوکلز روی می‌دهد.



شکل ۴-۲۶ نمودار سلول پوکلز. کنش تأخیری ناشی از ولتاژ اعمال شده V با جدایی مؤلفه‌های قطبیده‌ای که با محورهای تند و کند بلور عبور داده می‌شوند نمایش داده شده است.

امواج مؤلف با اختلاف فاز خارج می‌شوند. در عبور از بلوری به طول L ، یک مؤلفه به اندازه φ تقدم فاز و مؤلفه دیگر به اندازه $\Delta\varphi$ تأخر فاز می‌یابد، به طوری که فاز نسبی آنها موقع خروج برابر است با $\Phi = 2\Delta\varphi$. اما $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda_0)L\Delta n$ که در آن λ_0 طول موج خلأ و $L\Delta n$ اختلاف راه نوری است. Δn از معادله ۴-۲۶، که به ازای تغییرات کوچک می‌توان آن را با $d(1/n^2) = rE$ تقریب گرفت، به دست می‌آید. جمله E^2 در اثر پوکلز قابل چشمپوشی است. بنابراین، داریم

$$-2 \frac{dn}{n^3} = rE$$

$$|\Delta n| \cong \frac{r}{2} n_0^2 E$$

با جاگذاری در رابطه فاز Φ ، به دست می‌آوریم

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} r n_0^2 E L = \frac{2\pi}{\lambda_0} r n_0^2 V$$

که در آن $V = EL$ ولتاژ اعمال شده در طول سلول است. توجه کنید که اختلاف فاز Φ مستقل از طول بلور است.

اگر بخواهیم سلول پوکلز مانند تخته نیم موج عمل کند، باید کاری کنیم که $\Phi = \pi$. بنابراین، ولتاژ نیم موج لازم برابر است با

$$V_{HW} = \frac{\lambda_0}{2rn_0^2} \quad (۸-۲۶)$$

مثال

فرض کنید سلول پوکلز از بلور KD*P به ضخامت ۱ cm ساخته شده باشد و موج اپتیکی دارای طول موج $1.06 \mu\text{m}$ باشد. ولتاژ نیم موج لازم را تعیین کنید.

حل: با استفاده از جدول ۲-۲۶، داریم $r = 24.1 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ و $n_0 = 1.51$. بنابراین،

جدول ۲-۲۶ ضرایب الکترو-اپتیکی خطی برای مواد نمونه

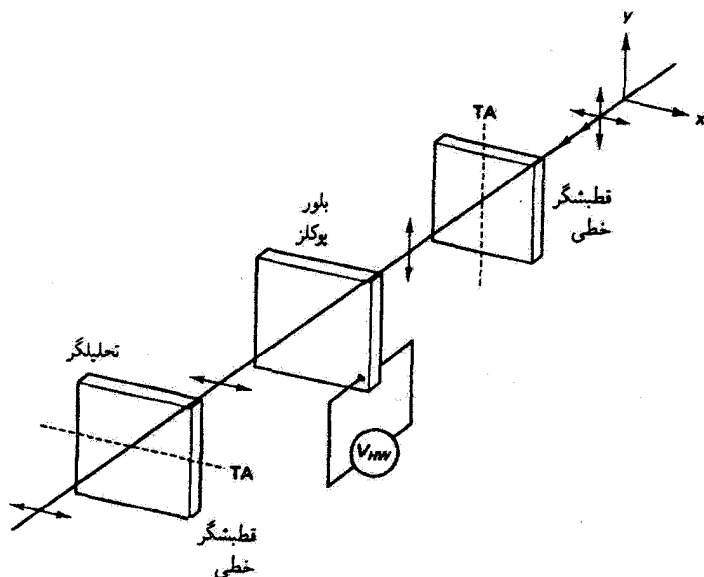
ضریب شکست n_0	ضریب الکترو-اپتیکی خطی الف $r(\text{pm/V})$	ماده (طول موج اگر 633 nm نباشد)
۱٫۵۱	۱۱	KH_2PO_4 (KDP)
۱٫۵۱	۲۴٫۱	KD_2PO_4 (KD*P)
۱٫۴۸	۸٫۵۶	$(\text{NH}_4)_2\text{H}_2\text{PO}_4$ (ADP) $\lambda = 0.546 \mu\text{m}$
۲٫۲۹	۳۰٫۹	LiNbO_3 (نیوبات لیتیم)
۲٫۱۸	۳۰٫۵	LiTaO_3 (تانالتات لیتیم)
۳٫۳	۱٫۵۱	GaAs (آرسنید گالیم) $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$
۲٫۳۶	۲٫۱	ZnS (سولفید روی) $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$
۱٫۵۴	۱٫۴	کوارتز

الف. بسته به تقارن بلور، مواد بیشتر از یک ضریب الکترو-اپتیکی دارند. در اینجا تنها یک ضریب برای استفاده در سلول پوکلز داده شده است. این ضریب و ضرایب دیگر را می توان در [۳] دید.

$$V = \frac{1.06 \times 10^{-6}}{2(24.1 \times 10^{-12})(1.51)^2} = 6390 \text{ V}$$

▲ بدین ترتیب، اعمال ولتاژ ۶۳۹۰ کیلوولتی این بلور را به تخته نیم موج تبدیل می کند.

یادآوری می کنیم (بخش ۱۵-۷) که در این مورد صفحه قطبش نور خروجی به اندازه 90° نسبت به صفحه قطبش نور فرودی چرخیده است. اگر یک قطبشگر خطی که محور تراگسیل آن (TA) در راستای محور x است، همچون در شکل ۵-۲۶، نور خروجی را قطع کند، تراگسیلندگی دستگاه به ازای $V = 0$ صفر می شود و به ازای $V = V_{HW}$ ماکسیمم می شود. بنابراین، تغییر V باعث تغییر حالت قطبش نور خروجی می شود و آن را به طور کلی بیضوی می کند به طوری که مؤلفه x آن می تواند توسط تحلیلگر عبور داده شود. در واقع، جفت قطبشگر-تحلیلگر مدولاسیون فاز را به مدولاسیون دامنه تبدیل می کند. بدین ترتیب، می بینیم که تراگسیلندگی دستگاه را می توان با تغییر ولتاژ اعمال شده مدوله کرد. تغییرات ولتاژ علامتی که روی V تحمیل می شوند در این نوع ابزار، که آن را مدوله گر الکترو-اپتیکی پوکلز می نامند، به تغییرات شدت نور تبدیل می شوند.



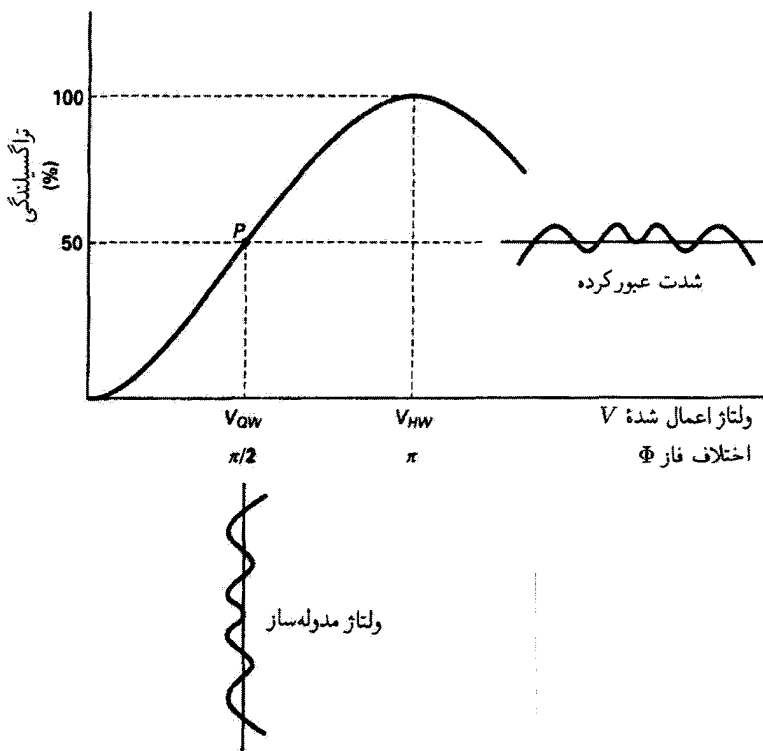
شکل ۵-۲۶ اثر اعمال ولتاژ نیم موج روی سلول پوکلز وقتی که دستگاه شامل قطبشگر و تحلیلگر متعامد است. باریکه فرودی قطبیده قائم به صورت باریکه قطبیده افقی خارج می شود. به ازای مقادیر دیگر ولتاژ اعمال شده، باریکه فرودی به تحلیلگر قطبیده بیضوی است و تنها جزئی از آن عبور می کند.

سلول پوکلز را همچنین می‌توان با میدان عمود بر راستای باریکه به‌کار برد، و این آرایه استقرار الکترودها را ساده‌تر می‌کند. در هندسه‌ای که توصیف کرده‌ایم، الکترودها معمولاً دارای سرهایی به شکل حلقه هستند که اجازه می‌دهند نور از آنها عبور کند و در عین حال یک میدان نسبتاً یکنواخت در بلور فراهم می‌کنند.

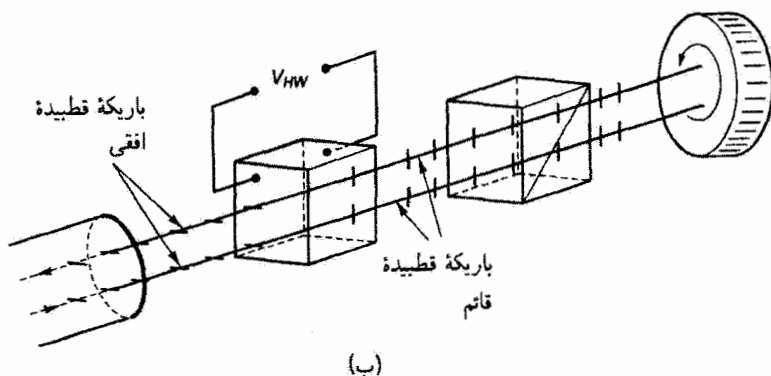
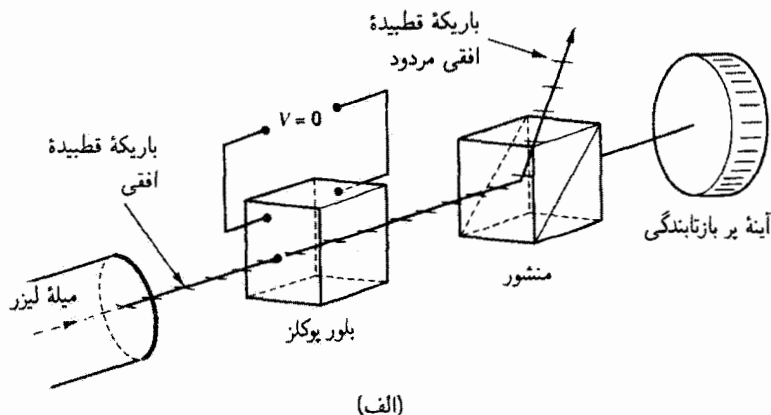
تراگسیلندگی باریکه را می‌توان با رابطه زیر [۶] بیان کرد

$$I = I_{\max} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{V}{V_{HW}} \right) \quad (۹-۲۶)$$

که در شکل ۶-۲۶ ترسیم شده است. برای استفاده کردن از ناحیه خطی‌تر تراگسیلندگی، یک تخته ربع موج غالباً بین قطبشگر اولیه و بلور پوکلز گذاشته می‌شود. بدین ترتیب، ۵۰% تراگسیلندگی



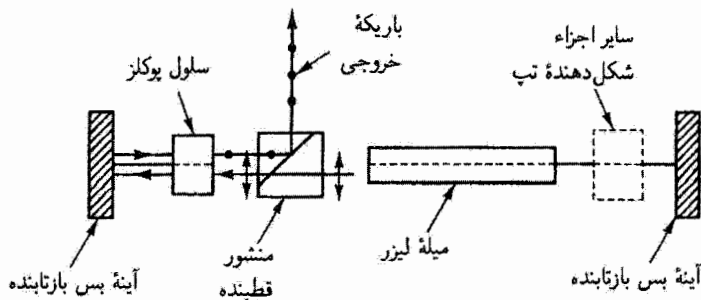
شکل ۶-۲۶ منحنی تراگسیلندگی برای مدوله‌گر سلول پوکلز. بدون تخته ربع موج، وقتی ولتاژ اعمال شده صفر است تراگسیلندگی صفر است. با استفاده از یک تخته ربع موج بین قطبشگر و مدوله‌گر، تراگسیلندگی در نقطه کار P به‌ازای ولتاژ صفر ۵۰% است. تحت این شرایط، مدوله‌گر به علامت ورودی خطی‌تر پاسخ می‌دهد.



شکل ۷-۲۶ کنش کنترل نور سلول پوکلز که به عنوان کلید Q به کار می‌رود. پیکربندی در (الف) تراگسیل کم در ولتاژ سلول صفر و در (ب) تراگسیل زیاد در ولتاژ نیم موج به وجود می‌آورد. در (ب) باریکه‌های فرودی و بازتابیده برای واضح بودن از هم جدا نشان داده شده‌اند. بازگشت‌های مکرر باریکه به کاواک لیزری باعث شروع گسیل القایی می‌شود که تب لیزری را به وجود می‌آورد.

به ازای $V = 0$ تولید می‌شود و در نتیجه نقطه کار به جای مبدأ در نقطه P که در شکل نشان داده شده است قرار می‌گیرد. بنابراین، پاسخ دستگاه برای تغییرات ولتاژ مدوله‌کننده، اگر زیاد بزرگ نباشند، خطی است.

دو کاربرد دیگر سلول پوکلز که با هم رابطه نزدیکی دارند در شکل‌های ۷-۲۶ و ۸-۲۶ نشان داده شده‌اند. در شکل ۷-۲۶، از سلول پوکلز به عنوان کلید Q استفاده می‌شود که تخلیه ناگهانی انرژی ذخیره شده در لیزر را امکانپذیر می‌سازد. بدون اعمال ولتاژ، بلور پوکلز باریکه قطبیده خطی را از کاواک لیزری بدون تغییر حالت قطبش آن منتقل می‌کند. یک منشور گلان-لیزر، که برای گذراندن نور قطبیده قائم کوچک شده است، باریکه قطبیده را دفع می‌کند. با اعمال ولتاژ نیم موج،



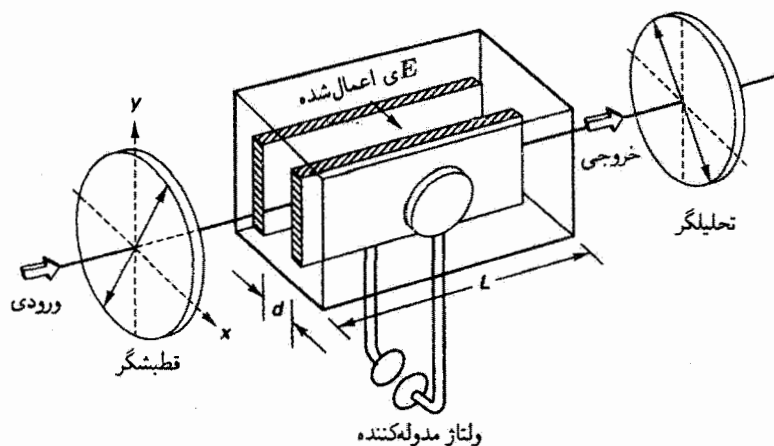
شکل ۸-۲۶ کنش کنترل نور سلول پوکلز که به عنوان تخلیه‌گر کاواک به کار می‌رود. وقتی ولتاژ نیم موج به سلول پوکلز اعمال می‌شود قطبش خطی باریکه لیزری را می‌چرخاند و در نتیجه می‌توان آن را با منشور قطبنده تخلیه کرد.

باریکه قطبیده خطی ناشی از کاواک لیزری به اندازه 90° می‌چرخد و در نتیجه توسط منشور گلان-لیزر عبور داده می‌شود و سپس از یک آینه بسیار بازتابنده به عقب بازتابیده می‌شود. این پیکربندی اکنون حرکت رفت و برگشت سریع باریکه در کاواک لیزری را ممکن می‌سازد و گسیل القایی روی می‌دهد، و در نتیجه یک تب پراثری از تابش لیزری به وجود می‌آید. در شکل ۸-۲۶، از سلول پوکلز برای شروع شدن تخلیه کاواک استفاده می‌شود. وقتی ولتاژ نیم موج اعمال می‌شود، حالت قطبش باریکه لیزری به اندازه 90° می‌چرخد، و در نتیجه می‌توان آن را با استفاده از منشور قطبنده استخراج کرد.

۵-۲۶ اثر کِر

وقتی محیط اپتیکی همسانگرد است، مانند مایعات و شیشه‌ها، اثر پوکلز وجود ندارد و قطبش توسط اثر الکترواپتیکی مرتبه سوم^۱ که بیشتر به اثر کِر مشهور است، تغییر می‌کند. این اثر، مانند تمام اثرهای مرتبه سوم، چه ماده دارای تقارن وارونی باشد چه نباشد روی می‌دهد. در واقع، اثر کِر با وجود وابستگی مرتبه سوم آن اولین اثر الکترواپتیکی بود که کشف شد (۱۸۷۵). سلولهای کِر معمولاً حاوی نیتروبنزن یا دی‌سولفید کربن در فضای بین دو الکترودی هستند که ولتاژ، چنانکه در شکل ۹-۲۶ نشان داده شده است، به آنها اعمال می‌شود. میدان الکتریکی اعمال شده دوشکستی با محور اپتیک موازی با خودش القا می‌کند. بنابراین، نوری که از سلول می‌گذرد با دو ضریب شکست مربوط به قطبشهای موازی با و عمود بر این محور اپتیک مواجه می‌شود، و در نتیجه

۱. در معادله ۷-۲۶، اثر کِر از جمله E^2 شامل ضریب الکترواپتیکی درجه دوم ناشی می‌شود.



شکل ۹-۲۶ سلول کیر. ولتاژ اعمال شده میدانی به وجود می آورد که عمود بر راستای باریکه است. مانند مورد سلول پوکلز، ولتاژ مدوله کننده مدولاسیون فازی تولید می کند که توسط جفت قطبشگر-تحلیلیگر به مدولاسیون دامنه تبدیل می شود.

روی می دهد. در این مورد، معادله ۷-۲۶ به صورت زیر در می آید

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} + RE^2 \quad \text{یا} \quad |\Delta n| = \frac{R}{2} n_o^2 E^2 \quad (10-26)$$

آزمایش نشان داده است که اختلاف بین n_o و n_E از رابطه زیر پیروی می کند

$$\Delta n = KE^2 \lambda \quad (11-26)$$

که در آن K ثابت کیر است.

از مقایسه معادله های ۱۰-۲۶ و ۱۱-۲۶، رابطه بین R و K به دست می آید:

$$K = \frac{Rn_o^2}{2\lambda}$$

چنانکه برای سلول پوکلز توضیح داده شد، تأخیر فاز نسبی برای مؤلفه های عادی و غیرعادی عبارت است از

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} L \Delta n$$

با وارد کردن ثابت کیر از طریق معادله ۱۱-۲۶، به دست می آوریم

$$\Phi = \frac{2\pi KV^2 L}{d^2}$$

که در آن قرار داده ایم $V = Ed$ ، و d فاصله بین الکترودها است. برای اینکه سلول مانند تخته نیم موج عمل کند باید $\Phi = \pi$ ، و در نتیجه ولتاژ لازم V_{HW} با رابطه زیر داده می شود

$$V_{HW} = \frac{d}{\sqrt{2KL}} \quad (12-26)$$

مثال

یک سلول کیر نیتروبنزن در نظر بگیرید که برای آن در دمای اتاق و با $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ داریم $K = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m/V}^2$ (جدول ۳-۲۶ را ببینید). اگر $d = 1 \text{ cm}$ و $L = 3 \text{ cm}$ ، ولتاژ نیم موج لازم را به دست آورید.

حل: با جاگذاری در معادله ۱۲-۲۶، داریم

$$V_{HW} = \frac{10^1}{\sqrt{(2)(2.4 \times 10^{-12})(0.03)}} = 26.4 \text{ kV}$$

بنابراین، سلول کیر در ولتاژی حدود ۲۶ kV، که بسیار بیشتر از مورد سلول پوکلز نوعی است، مانند تخته نیم موج عمل می کند.

جدول ۳-۲۶ ثابت کیر برای مواد منتخب

K (pm/V^2)	ماده (دمای اتاق، $\lambda = 589 \text{ nm}$)
4×10^{-6}	نیتروژن (شرایط متعارف)
۰.۰۰۱	شیشه (نوعاً)
۰.۰۳۶	دی سولفید کربن (CS_2)
۰.۰۵۲	آب (H_2O)
۱.۴	نیتروتولون ($\text{C}_5\text{H}_7\text{NO}_2$)
۲.۴	نیتروبنزن ($\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$)

از سلول کِر می‌توان به‌عنوان مدوله‌گر به روشی که برای سلول پوکلز گفته شد استفاده کرد. به علت لزوم ولتاژهای زیادتر، و به علت سمی بودن و قابلیت انفجار نیتروبنزن، معمولاً سلول پوکلز ارجحیت دارد. با وجود این، سلول کِر به‌عنوان بستاور بسیار سریع و به‌عنوان جانشینی برای برشگرهای مکانیکی نور، که می‌تواند به بسامدهایی در گستره 10^{10} Hz پاسخ دهد، کاربرد یافته است. سلول کِر را می‌توان غالباً در لیزرهای تپی دید که به‌عنوان کلید Q کار می‌کند.

۶-۲۶ اثر فاراده

برخلاف اثرهای الکترواپتیکی که تا کنون دربارهٔ آنها بحث کرده‌ایم، اثر فاراده یک برهم‌کنش مغناطواپتیکی مرتبهٔ اول است (یعنی $\Delta n \propto B$).^۱ وقتی مادهٔ شفافی را در میدان مغناطیسی قرار می‌دهیم و نور قطبیدهٔ خطی را در راستای میدان مغناطیسی از آن می‌گذرانیم، می‌بینیم نور خروجی باز هم قطبیدهٔ خطی است اما با چرخش صفحهٔ قطبش به اندازهٔ β که هم با ضخامت نمونهٔ d و هم با شدت میدان مغناطیسی B متناسب است:

$$\beta = V B d \quad (۱۳-۲۶)$$

در این رابطهٔ تجربی V ثابت ورده برای ماده است که معمولاً برحسب دقیقهٔ کمان بر گاوس بر سانتیمتر بیان می‌شود. ثابت ورده بستگی به دما و طول موج دارد. وابستگی آن به طول موج را در زیر شرح می‌دهیم.

یک ویژگی جالب توجه چرخش فاراده این است که جهت چرخش نسبت به راستای میدان مغناطیسی، برای یک مادهٔ معین، مستقل از راستای انتشار نور است. بنابراین، حرکت رفت و برگشت مکرر باریکهٔ نور در یک ماده روی زاویهٔ چرخش β تأثیر جمعی دارد. این رفتار بر عکس رفتاری است که در پدیدهٔ کاملاً مربوط فعالیت نوری (بخش ۱۵-۶) مشاهده می‌شود.

چرخش اپتیکی نور قطبیده را می‌توان برحسب دوشکستی دایره‌ای، یعنی وجود ضرایب شکست مختلف برای مؤلفه‌های نور قطبیدهٔ دایره‌ای چپ و راست (بخش ۱۵-۶)، توضیح داد. یادآوری می‌کنیم که نور قطبیدهٔ خطی معادل ترکیبی از مؤلفه‌های قطبیدهٔ دایره‌ای چپ و راست است. هر مؤلفه تأثیر متفاوتی از میدان مغناطیسی اعمال شده می‌گیرد و در نمونه با سرعت متفاوتی حرکت می‌کند زیرا ضریب شکست برای دو مؤلفه متفاوت است. نتیجهٔ نهایی عبارت است از

۱. مانسته‌های میدان مغناطیسی اثر کِر (که در آن $\Delta n \propto B^2$) عبارت‌اند از اثر فوگت (در گازها) و اثر کاتن-موتن (در مایعات)، که در آنها یک میدان مغناطیسی ثابت عمود بر راستای باریکهٔ نور اعمال می‌شود. این دو اثر بسیار کوچک‌اند و بیشتر از این دربارهٔ آنها بحث نمی‌کنیم.

مؤلفه‌های دایره‌ای چپ و راست که ناهمفاز هستند و برهم‌نهی آنها، در خروج از چرخشگر فاراده، نور قطبیده خطی با صفحه قطبشی است که نسبت به سمتگیری اولیه آن چرخیده است. یک محاسبه کلاسیک [۷] برای زاویه چرخش β رابطه زیر را پیش‌بینی می‌کند

$$\beta = \left(\frac{e}{2m} \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda} \right) Bd \quad (14-26)$$

که در آن e و m بار و جرم الکترون، c سرعت نور، λ طول موج، و $dn/d\lambda$ پاشیدگی چرخشی است. از مقایسه با معادله ۲۶-۱۳، این نظریه رابطه زیر را برای ثابت تجربی ورده V به دست می‌دهد

$$V = \frac{e}{2mc} \lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad (15-26)$$

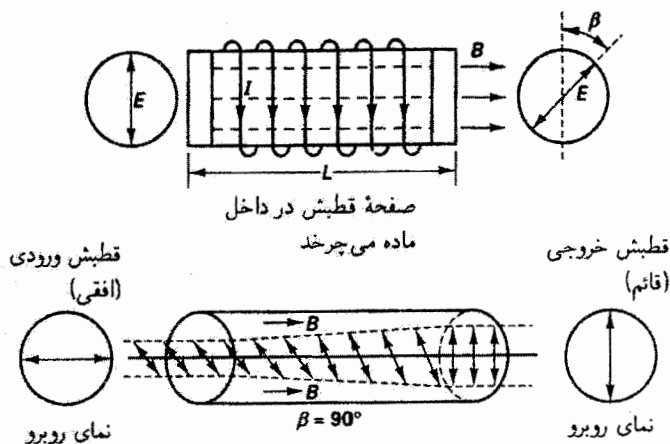
اگر مقادیر کمیتهای ثابت را جاگذاری کنیم، معادله ۲۶-۱۵ برای V برحسب واحدهای استاندارد min/G cm به صورت زیر در می‌آید

$$V = 1,00083 \lambda \frac{dn}{d\lambda}$$

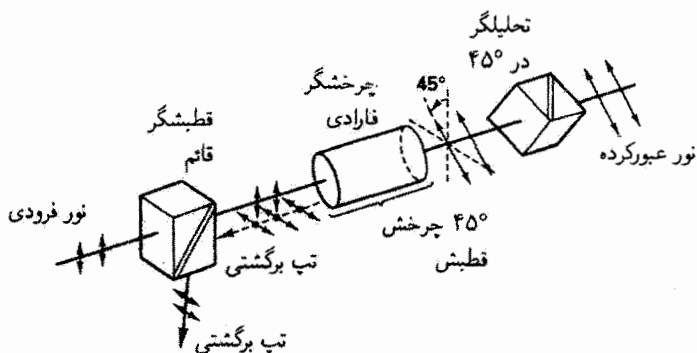
می‌بینیم که ثابت ورده هم با طول موج نور و هم با پاشیدگی چرخشی القایی در محیط متناسب است. مقادیر اندازه‌گیری شده V در 589.3 nm در جدول ۲۶-۴ داده شده‌اند.

جدول ۲۶-۴ ثابت ورده برای مواد منتخب

ماده	$V(\text{min/G cm})$ $\lambda = 589 \text{ nm}$
H ₂ O	۰.۱۳۱
شیشه کراون	۰.۱۶۲
شیشه فلینت	۰.۳۱۷
CS ₂	۰.۴۲۳
CCl ₄	۰.۱۶۰
NaCl	۰.۳۵۹
KCl	۰.۲۸۵۸
کوارتز	۰.۱۶۶
ZnS	۰.۲۲۵



شکل ۲۶-۱۰ اثر فاراده مولد چرخش صفحه قطبش.



شکل ۲۶-۱۱ چرخشگر فاراده بین جفت قطبشگر-تحلیلگر برای ایجاد انزوای اپتیکی دستگاه اپتیکی مولد نور فرودی.

از اثر فاراده می‌توان برای مدولاسیون نور استفاده کرد، اگر چه مدوله کردن میدان مغناطیسی در بسامدهای بسیار زیاد عملاً مشکل است. شکل ۲۶-۱۰ نمودار چرخشگر فاراده را نشان می‌دهد که سلولی از بلور یا مایع است که محور تقارن آن با میدان مغناطیسی موازی شده است. چنانکه در شکل دیده می‌شود، میدان B توسط جریان سه‌په‌جی برقرار شده است و چرخش قطبش در همان جهت جریان مولد میدان است. این هندسه خاص تعریف‌کننده ثابت ورده مثبت است. شکل ۲۶-۱۱ کاربرد اصلی چرخشگر فاراده را به‌عنوان منزویگر اپتیکی نشان می‌دهد. این منزویگر تشکیل شده است از یک چرخشگر فاراده که بین یک جفت قطبشگر-تحلیلگر قرار دارد. چنانکه در شکل نشان داده شده است، نور قطبیده فرودی به اندازه 45° در جهت پادساعتگرد توسط

چرخشگر فاراده چرخیده است و در این سمتگیری به طور کامل از تحلیلگر عبور می‌کند. عناصر اپتیکی در پایین و دور از خط (که نشان داده نشده‌اند) باعث پس‌بازتابهای ناخواسته این تابش (تهیای برگشتی) در راستای محور اپتیک هستند. بردار قطبش نور بازتابیده، در عبور بار دوم از چرخشگر فاراده، به اندازه ۴۵ درجه دیگر در جهت چرخش اول می‌چرخد، و در نتیجه قطبیده افقی خارج می‌شود و در زاویه ۹۰° نسبت به راستای قطبش باریکه اولیه به قطبشگر می‌رسد. در این حالت، این باریکه توسط قطبشگر دفع می‌شود و نمی‌تواند به دستگاه اپتیکی بازگردد، وگرنه، در مورد دستگاههای لیزری پرتوان، می‌تواند به مؤلفه‌های اپتیکی صدمه بزند. بدین ترتیب، چرخش اپتیکی عملاً دستگاه اپتیکی را از تهیای برگشتی سرگردان منزوی می‌کند.

مثال

اگر بخواهیم شیشه فلینت SF۵۸، که برای نور ۵۴۳.۵ nm ثابت ورده آن ۱۱۲ min/G cm^۰ است، چرخش بردار قطبش ۴۵° که در یک منزویگر اپتیکی لازم است ایجاد کند، طول لازم آن را وقتی بزرگی میدان مغناطیسی ۹ kG است محاسبه کنید.

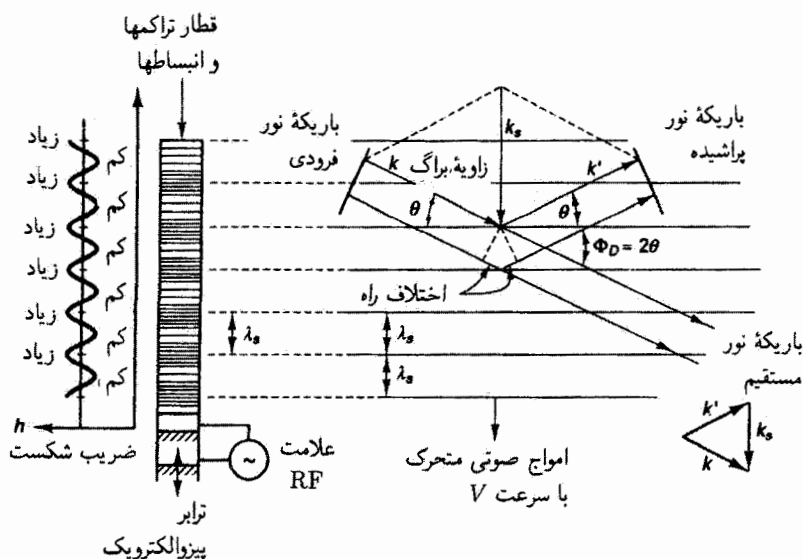
حل: با استفاده از معادله ۲۶-۱۳، داریم

$$\blacktriangle \quad d = \frac{\beta}{VB} = \frac{45^\circ \times 60 \text{ min}/^\circ}{(112 \text{ min/G cm}) \times 9000 \text{ G}} = 2.68 \text{ cm}$$

۲۶-۷ اثر آکوستو-اپتیکی

نورکشنسانی (بخش ۱۵-۷) تغییر ضریب شکست بلور به علت تنش مکانیکی است. این پدیده اثر آکوستو-اپتیکی یا AO — برهم‌کنش امواج اپتیکی و آکوستیکی — را امکانپذیر می‌کند که در آن یک موج آکوستیکی (طولی) که توسط مبدل پیزوالکتریک فراهم شده است یک تنش مکانیکی دوره‌ای در بلور تولید می‌کند. موج آکوستیکی (شکل ۲۶-۱۲ را ببینید) از یک رشته تراکمها و انبساطها (ارتعاشهای طولی) در چگالی اتمی تشکیل شده است و در نتیجه یک تغییر دوره‌ای — هر چند کوچک — در ضریب شکست حول مقدار عادی آن به وجود می‌آید. نور فرودی به این ساختار از ناحیه‌هایی که ضریب شکست زیادتری دارند به اطراف پراکنده می‌شود. این پراکندگی را پراکندگی بریلوئن می‌نامند و اثر مرتبه سوم دیگری است که می‌تواند در محیط فاقد تقارن وارونی روی دهد.

اگر بلور به اندازه کافی نازک باشد، تغییرات ضریب شکست در طول آن به تغییرات متناظری در سرعت نور منجر می‌شود، و در نتیجه بلور مانند توری عبوری فازی (بخش ۱۷-۵) عمل می‌کند.



شکل ۱۲-۲۶ تغییر در ضریب شکست محیط به علت عبور موج آکوستیکی هماهنگ (چپ) و پراکندگی باریکه نور فرودی توسط "صفحه‌های القایی" (راست). ضمیمه نمایشگر رابطه بردارهای موج است که وقتی موج آکوستیکی دارای راستای نشان داده شده است از پابستگی تکانه ایجاب می‌شود.

قسمتی از باریکه نور فرودی، مطابق با معادله توری پراش $m\lambda = d \sin \theta_m$ که در آن ثابت توری برابر با طول موج آکوستیکی است ($d = \lambda_s$) و θ_m زاویه پراش مرتبه m ام است، در مرتبه‌های مختلف پراشیده می‌شود. این وضعیت را نظام رامن-نات [۸] می‌نامند. اگر بلور ضخیم‌تر باشد، ناحیه‌های با ضریب شکست زیادتر صفحه‌های عمود بر راستای موج آکوستیکی را، همچنانکه در شکل ۱۲-۲۶ نشان داده شده است، نمایش می‌دهند. در این مورد، موج نور طوری پراشیده می‌شود که شبیه به پراکندگی براگ پرتوهای ایکس از صفحه‌های بلور (نظام براگ) است. موج نور با سرعتی که حدود پنج مرتبه بزرگی از سرعت موج آکوستیکی بزرگتر است از بلور عبور می‌کند. در نتیجه، این توری القایی در برابر موج نور اساساً ایستا است.

باریکه نور پراشیده در راستاهایی دیده می‌شود که در آنها قسمتهایی از جبهه موج که (۱) از قسمتهای مختلف یک صفحه معین و (۲) از صفحه‌های متوالی بازتابیده می‌شوند از رابطه مربوط به تداخل سازنده، یعنی اینکه اختلاف راه باید مضرب درستی از طول موج باشد، پیروی می‌کنند. شرط اول توسط زاویه پراکندگی برابر با زاویه فرود برقرار می‌شود. این وضعیت در شکل ۱۲-۲۶ نشان داده شده است. شرط دوم شرط براگ است. اختلاف راه بین موجهای فرودی و پراشیده از دو قسمت، که در شکل نشان داده شده‌اند، تشکیل شده است. با توجه به هندسه شکل، هر

قسمت برابر با $\lambda_s \sin \theta$ است. از اینجا به معادله زیر می‌رسیم

$$m\lambda = 2\lambda_s \sin \theta = 2\lambda_s \sin \frac{\Phi_D}{\gamma} \quad (۱۶-۲۶)$$

که رابطه‌ای است که در این زمینه توسط بریلوتن در سال ۱۹۲۱ به دست آمد و با معادله براگ برای پراش پرتو ایکس یکی است.^۱ در معادله ۱۶-۲۶، زاویه‌ها و طول موج اپتیکی همانهایی هستند که در محیط اندازه‌گیری می‌شوند. (مسئله ۱۵-۲۶ را نیز ببینید.)

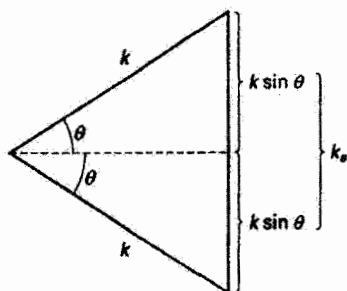
شرط براگ برای ماکسیممهای پراش را می‌توان با استدلال جانشینی به دست آورد که در آن از ماهیت ذره‌ای امواج (فصل ۱) استفاده می‌شود. باریکه نور فرودی با بردار موج k را می‌توان شاری از فوتونها در نظر گرفت که در آن هر فوتون، با بسامد زاویه‌ای ω ، دارای انرژی $\hbar\omega$ و تکانه $\hbar k$ است. به همین نحو، موج آکوستیکی با بردار موج k_s را می‌توان شار ذرات کوانتیده‌ای در نظر گرفت که فوتون نامیده می‌شوند و هر یک از آنها دارای انرژی $\hbar\omega_s$ و تکانه $\hbar k_s$ است. بنابراین، برهم‌کنش آکوستو-اپتیکی عبارت است از برخورد این ذرات که در آن انرژی و تکانه پایسته‌اند. دو بردار موج k و k_s و همچنین بردار موج k' مربوط به باریکه نور پراشیده در شکل ۱۲-۲۶ نشان داده شده‌اند. پایستگی تکانه در برخورد بین فوتون و فوتون ایجاب می‌کند که $k' = k - k_s$ ، و این در مثلث برداری ضمیمه نمایش داده شده است. از طرف دیگر، اگر جهت موج آکوستیکی عوض شود، مثلث برداری مربوط به $k' = k + k_s$ بیان می‌شود. به طور کلی، داریم

$$k' = k \pm k_s \quad (۱۷-۲۶)$$

این رابطه را با علامت جمع به این معنی تعبیر می‌کنیم که فوتون فرودی با یک فوتون ترکیب می‌شود و فوتون پراشیده به وجود می‌آید؛ با علامت منهای، رابطه را به این معنی می‌گیریم که فوتون فرودی یک فوتون اضافی به موج آکوستیکی و یک فوتون به باریکه پراشیده می‌دهد. بنابراین، معادله ۱۷-۲۶ هم‌گسبیل و هم‌جذب فوتون توسط شبکه بلور را توصیف می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم معادله ۱۷-۲۶ هم‌ارز شرط پراش براگ است. چون بسامدهای نور از مرتبه 10^{14} Hz هستند، در حالی که بسامدهای آکوستیکی به طور کلی کمتر از 10^{10} Hz هستند،

۱. یک اختلاف مهم بین پراش پرتو ایکس و پراش نور در نظام براگ این است که پراکندگی نور به نحوی پیوسته از یک توری سینوسی ضمیم، نه از صفحه‌های گسسته، روی می‌دهد. در نتیجه، تنها پراش مرتبه اول $m = 1$ در اثر آکوستو-اپتیکی وجود دارد. در این باره، به بخش ۱۳-۲ (هولوگرام چشمه نقطه‌ای) و بخش ۲۵-۱ (تصویرسازی پردازش داده‌های اپتیکی) مراجعه کنید.



شکل ۱۳-۲۶ مثلث بردار موج در تقریب $|k'| = |k| = k$. زاویه θ زاویه براگ است. رابطه هندسی اضلاع این مثلث معادل شرط پراش براگ است.

ω و ω' از ω_s بسیار بزرگتراند، یعنی $\omega' \cong \omega$ و در نتیجه $k' \cong k$. بنابراین، مثلث شکل ۱۳-۲۶ برای بردارهای موج نشان می‌دهد $k_s = 2k \sin \theta$ یا برحسب طول موج

$$\lambda = 2\lambda_s \sin \theta \quad (18-26)$$

که معادله براگ به ازای $m = 1$ است.

پایستگی انرژی ذرات برهم‌کنش‌کننده ایجاب می‌کند که $\hbar\omega' = \hbar\omega \pm \hbar\omega_s$ یا

$$\omega' = \omega \pm \omega_s \quad (19-26)$$

این رابطه نشان می‌دهد که بسامد فوتون پراشیده با بسامد فوتون فرودی به اندازه نسبتاً کوچک ω_s تفاوت دارد، و بسته به جهت موج آکوستیکی از آن بزرگتر یا کوچکتر است. این نتیجه راه دیگری برای رسیدن به اثر دوپلر برای نور است. وقتی نور فرودی با موج آکوستیکی نزدیک شونده برخورد می‌کند بسامد پراکنده بزرگتر است، و وقتی با موج آکوستیکی دور شونده (همچون در شکل ۱۲-۲۶) برخورد می‌کند بسامد پراکنده کوچکتر است.

مثال

برای داشتن تصویری از بزرگی زاویه پراش مرتبه اول، یک مورد نوعی در نظر می‌گیریم که نور فرودی طول موج 550 nm و موج آکوستیکی بسامد 200 MHz و سرعت 3000 m/s دارد.

حل: بنابراین،

$$\lambda_s = \frac{V_s}{\nu_s} = \frac{3 \times 10^3}{2 \times 10^8} = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}$$

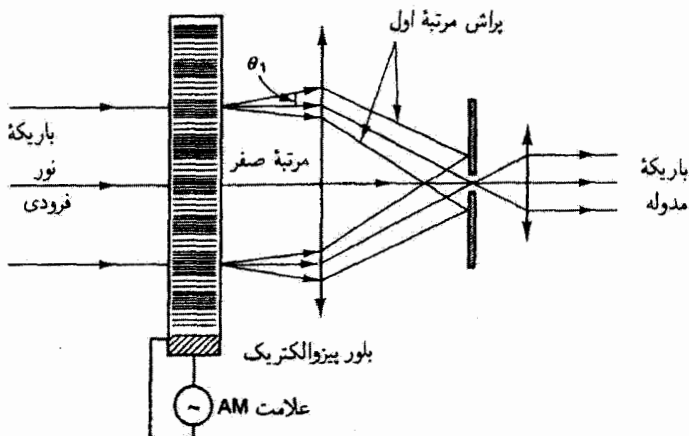
با استفاده از معادله ۱۶-۲۶، داریم

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2\lambda_s} = \frac{55^\circ \times 10^{-1}}{(2)(1.5 \times 10^{-5})} = 0.183^\circ$$

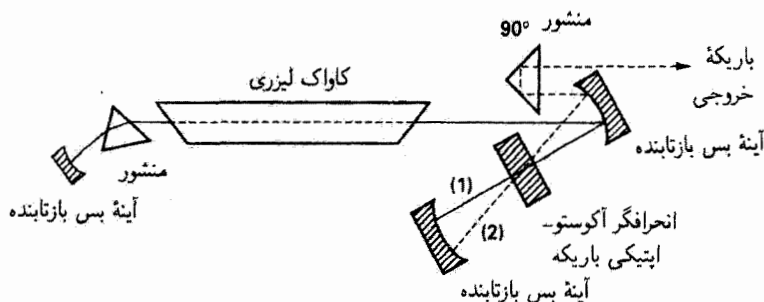
و در نتیجه

$$\theta = 1.05^\circ$$

اثر آکوستو-اپتیکی (AO) را می‌توان برای مدولاسیون باریکه نور با کنترل دامنه آن (AM)، بسامد آن (FM)، یا راستای آن به‌کار برد. شکل ۱۴-۲۶ ابزاری را برای به‌دست آوردن مدولاسیون AM با استفاده از یک ماده آکوستو-اپتیکی نازک در نظام رامان-نات نشان می‌دهد. کسری از نور که از باریکه پراشیده مرتبه صفر حذف می‌شود به بزرگی تنش القایی و در نتیجه به دامنه علامت رادیویی مدوله‌کننده بستگی دارد. شکاف تنها باریکه مرتبه صفر مدوله را از خود عبور می‌دهد. در کاربردهای دیگر از توانایی اثر آکوستو-اپتیکی برای منحرف کردن باریکه استفاده می‌شود. با مراجعه به شکل ۱۲-۲۶، دیده می‌شود که تغییر در بسامد و تغییر در راستای موج آکوستیکی هر دو باعث تغییر در راستای باریکه پراشیده می‌شوند. اگر مکان حساس به بسامد باریکه خروجی با یک آرایه آشکارساز نور تعیین شود، این ابزار آکوستو-اپتیکی را می‌توان به‌عنوان تحلیلگر طیف به‌کار برد. باز



شکل ۱۴-۲۶ مدولاسیون باریکه نور با توری آکوستو-اپتیکی در نظام رامان-نات. علامت مدوله محرک بلور پیزوالکتریک به باریکه خروجی در مرتبه صفر منتقل می‌شود. تنها باریکه‌های پراشیده مرتبه صفر و مرتبه اول نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۵-۲۶ تخلیه کاواک لیزرى با استفاده از انحرافگر آکوستو- ایتىكى باریکه. اعمال موج آکوستىكى باریکه را خارج از کاواک لیزرى منحرف مى کند و تخلیه کاواک را شروع مى کند.

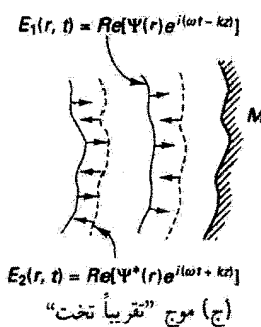
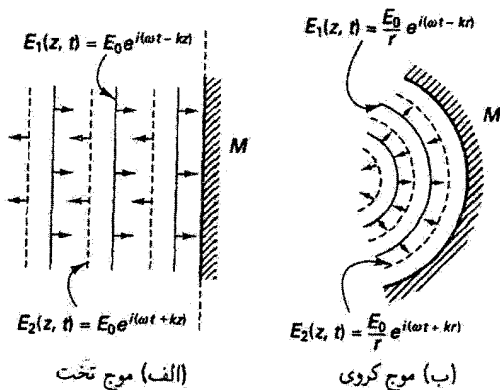
هم، چون بسامد باریکه پراشیده به مقدارى مساوى با بسامد آکوستىكى جابه جا مى شود، باریکه را مى توان مدوله بسامد کرد. در این مورد، هدف از طراحی ابزار مینیمم کردن پخش زاویه اى نور پراشیده است؛ وقتى ابزار به عنوان تحلیلگر طیف به کار مى شود، هدف از طراحی آن ماکسیمم کردن پخش زاویه اى است.

کاربرد دیگرى از این ابزار به عنوان انحرافگر باریکه برای شروع تخلیه کاواک لیزرى در شکل ۱۵-۲۶ نشان داده شده است. وقتى موج آکوستىكى اعمال نشده است، باریکه (۱) در کاواک به عقب و جلو حرکت مى کند و تا یک مقدار ماکسیمم انرژی مى گیرد. اعمال موج آکوستىكى باعث انحراف باریکه (۲) خارج از کاواک مى شود و در نتیجه انرژی ذخیره شده در کاواک را تخلیه مى کند.

۸-۲۶ همیوگسازى فاز ایتىكى غیرخطى

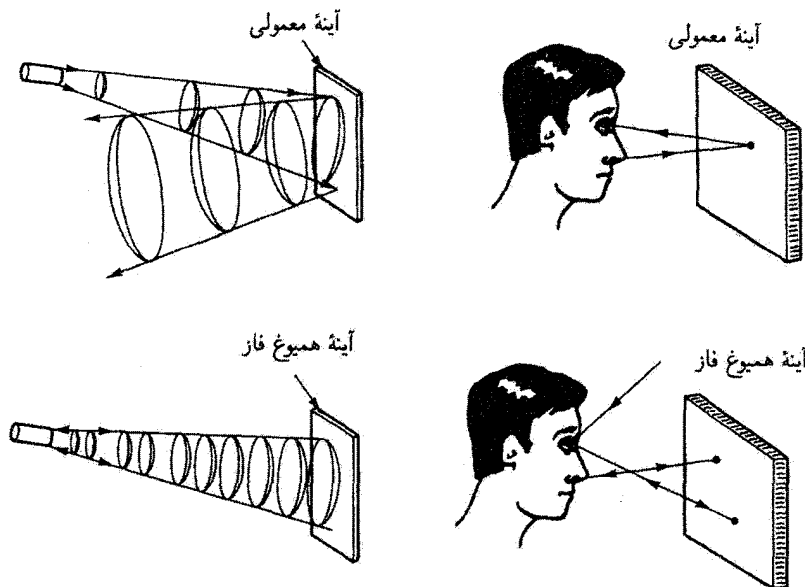
همیوگسازى فاز ایتىكى (OPC) نمایشگر پدیده غیرخطى مرتبه سوم دیگرى با چند کاربرد جذاب است. نخستین مقاله هاى مربوط به این پدیده، که نسبتاً تازه کشف شده است، در سالهاى ۱۹۷۱ و ۱۹۷۲ توسط پژوهشگران اتحاد شوروى انتشار یافته اند، و این نامگذاری به علت این است که برهم کنش غیرخطى ایجادکننده باریکه نوری است که از لحاظ ریاضى همیوگ مختلط فضایی موج فرودى است. معنى این عبارت این است که موج جدیدى به وجود مى آید که جهت و عامل فازکل باریکه اولیه را دقیقاً وارون مى کند. بنابراین، موج همیوگ فاز دقیقاً مسیر باریکه اصلى را در جهت عکس طى مى کند و در هر نقطه دقیقاً شکل جبهه موج اصلى را دوباره تولید مى کند.

فعلاً این فرایند را به عنوان نوع منحصر به فردى از بازتاب در نظر مى گیریم و محیط غیرخطى ایجادکننده موج همیوگ فاز را آینه همیوگ فاز (PCM) مى نامیم. برای اینکه منحصر به فرد بودن این فرایند را نشان دهیم، شکل ۱۶-۲۶ را در نظر مى گیریم که بازتاب از آینه هاى معمولی را نمایش مى دهد. در (الف) یک موج تخت از یک آینه تخت (نامتناهى) ایده آل بازتابیده مى شود. موج



شکل ۱۶-۲۶ سه مثال از نسخه وارونه-فاز جبهه موج فرودی در آینه‌های معمولی. در هر مورد، پرتوهای متناظر با جبهه موج در بازتاب همه جا عمود بر سطح آینه هستند. آینه همیوخ فاز تمام موارد را ارائه می‌کند و همچنین به تغییرات لحظه‌ای در جبهه موج فرودی پاسخ می‌دهد.

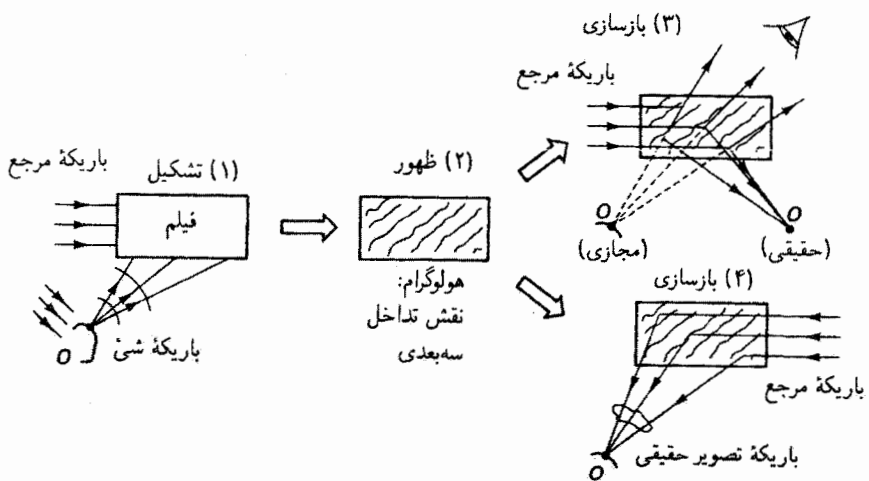
بازتابیده نیز یک موج تخت است. برای تبیین ریاضی معکوس شدن جهت موج فرودی، علامت جمله kz را از منفی به مثبت تغییر می‌دهیم. اکنون می‌بینیم که موج بازتابیده، به استثنای علامت جمله ωt ، همیوخ مختلط موج اصلی است و دارای خواص موج همیوخ فاز است که در بالا توصیف کردیم: موج بازتابیده مسیر باریکه فرودی را در جهت عکس طی می‌کند و نسخه وارونه-فاز آن است. شکل ۱۶-۲۶ ب همین فرایند را برای موج کروی فرودی نشان می‌دهد. تنها چیزی که برای تولید نسخه وارونه-فاز در بازتاب لازم است یک آینه کروی مقعر است که انحنای آن با انحنای جبهه موج در فرود دقیقاً جور باشد. برای یک جبهه موج فرودی اختیاری، چنانکه در (ج) نشان داده شده است، دامنه $\Psi(r)$ مختلط است و شامل عاملهای دامنه و فازی است که انحراف آن را از موج تخت نشان می‌دهند. این نوع موج را یک موج تخت در نظر می‌گیریم که با عبور از محیط وایپچنده، با پراش یا با مدولاسیون شکل گرفته است. نسخه وارونه-فاز این موج با همیوخ



شکل ۲۶-۱۷ تفاوت بین کنش آینه معمولی و آینه همیوگ فاز در (الف) بازتاب جبهه موج واگرا و (ب) تشکیل تصویر.

مختلط گرفتن از $\Psi(r)$ و ikz ، یا به عبارت دیگر از قسمت فضایی معادله موج، به دست می‌آید. برای تولید این موج با آینه‌های معمولی، باید سطح آینه‌ای بسازیم که دقیقاً با جبهه موج فرودی در لحظه فرود جور باشد. یکتایی آینه همیوگ فاز این است که نسخه همیوگ فاز، تا وقتی گشودگی آینه همیوگ فاز به اندازه کافی بزرگ است که بتواند تمام جبهه موج را دریافت کند، مستقل از شکل جبهه موج فرودی تولید می‌شود. برخلاف آینه‌های معمولی، آینه همیوگ فاز می‌تواند به ویژگیهای فضایی و زمانی متغیر موج فرودی فوراً پاسخ دهد، به طوری که موج همیوگ فاز دائماً تولید می‌شود. توجه کنید که معادلات مربوط به امواج همیوگ فاز در شکل ۲۶-۱۶ امواجی را ایجاد می‌کنند که از لحاظ فیزیکی هم‌ارز امواجی هستند که با دست زدن به قسمت فضایی و برگرداندن علامت t به دست می‌آیند. به این دلیل، موج همیوگید-فاز را غالباً "نسخه وارونه-زمان" موج فرودی می‌نامند. اگر می‌توانستیم ویدیویی از موج فرودی تهیه کنیم و سپس آن را در جهت معکوس نمایش دهیم، بازسازی دقیق رفتار خود موج همیوگ را مشاهده می‌کردیم.

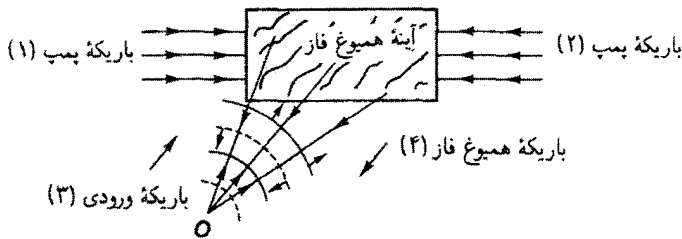
شکل ۲۶-۱۷ الف تفاوت بین آینه معمولی و آینه همیوگ فاز را بیشتر نمایان می‌کند. با یک آینه معمولی، جبهه موج واگرا پس از بازتاب بازهم واگرا است، در حالی که با آینه همیوگ فاز جبهه موج بازتابیده همگرا است به طوری که با انحنای موج فرودی در هر نقطه دقیقاً جور است و به نقطه مبدأ خود باز می‌گردد. برای درک کاملتر این اختلاف، ملاحظه کنید که با نگاه کردن به آینه



شکل ۲۶-۱۸ هولوگرافی متداول. مراحل (۳) و (۴) روشهای جانشین هستند. سه مرحله پی در پی صورت می‌گیرند.

معمولی و آینه همیوگ فاز چه خواهیم دید. در مورد اول، تصویر مثلاً نوک بینی را می‌توان توسط نوری دید که از این نقطه واگرا می‌شود و پس از بازتاب از آینه به چشم وارد می‌شود. با آینه همیوگ فاز، چنانکه در شکل ۲۶-۱۷ نشان داده شده است، این جبهه موج واگرا باید به صورت یک جبهه موج همگرا که در نقطه اصلی روی بینی متمرکز می‌شود بازگردد. بنابراین، شخصی که به آینه همیوگ فاز نگاه می‌کند تصویر چهره خود را نمی‌بیند بلکه صرفاً نوری را می‌بیند که از مردمک پراکنده می‌شود. چشم او آینه‌ای با روشنایی یکنواخت می‌بیند که درخشایی آن بستگی به شدت نوری دارد که از قرنیۀ پوشاننده مردمک به سمت آینه همیوگ فاز پراکنده شده است.

یک راه درک همیوگسازي فاز اپتیکی (OPC) این است که آن را به عنوان هولوگرافی زمان واقعی در نظر بگیریم. ابتدا، با استفاده از شکل ۲۶-۱۸ روند مرسوم ساخت یک هولوگرام (بخش ۱۳-۳) را یادآوری می‌کنیم. یک فیلم عکاسی را در مرحله (۱) در معرض همزمان باریکه مرجع و باریکه شیء قرار دهیم؛ این دو با هم تداخل می‌کنند و نقش فریز پیچیده‌ای در اندوده عکاسی به وجود می‌آورند. در مرحله (۲) فیلم را ظاهر می‌کنیم تا نقش تداخل آشکار شود و هولوگرام ساخته شود. در مرحله (۳) با دوباره تاباندن باریکه مرجع به هولوگرام، باریکه شیء به صورت یک نسخه وارونه‌فاز از اصل مجدداً تولید می‌شود. وقتی باریکه مرجع دارای راستای اصلی است، هم تصویر حقیقی و هم تصویر مجازی شیء اصلی تشکیل می‌شوند به طوری که تصویر مجازی در مکان شیء اصلی قرار دارد. اگر باریکه مرجع وارونه شود (مرحله ۴)، تصویر حقیقی در مکان شیء اصلی تشکیل می‌شود. در همیوگسازي فاز اپتیکی، فرایندهای (۱)، (۲) و (۴) همزمان، یا در "زمان واقعی"،



هولوگرام زمان حقيقي: (۱) + (۳)

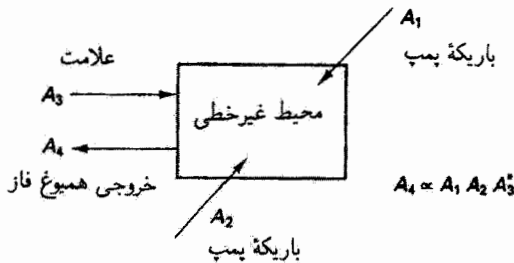
باريکه هميوغ فاز (۴): بازتاب براگ: (۲) + [(۱) + (۳)]

شکل ۲۶-۱۹ همیوگسازي فاز يا هولوگرافي زمان واقعي. آميختگي چار-موج که باريکه خروجي را به وجود مي آورد همزمان روی مي دهد. باريکه خروجي (۴) متناظر با باريکه تصوير حقيقي در هولوگرام مرسوم است.

روی مي دهند. شکل ۲۶-۱۹ يك آينه هميوغ فاز را نشان مي دهد که در معرض باريکه هاي پاد-انتشار (۱) و (۲)، که جای باريکه هاي مرجع شکل ۲۶-۱۸ را گرفته اند، قرار دارد. به همين ترتيب، باريکه هاي ورودی (۳) و خروجی (۴) به جای باريکه هاي شيء و تصوير هستند. مي توانيم باريکه هاي (۱) و (۳) را به صورت باريکه هاي تداخل کننده اي در نظر بگيريم که هولوگرام زمان واقعي، يعني ناحيه هاي پيچيده اي با ضريب شکست متناوب ناشي از ناحيه هاي متناوب با شدت نور زياد و کم، را به وجود مي آورند. وقتی باريکه دمنده (۲) به اين ساختار فرود مي آيد پراکندي براگ روی مي دهد و باريکه هميوغ فاز (۴)، که نسخه وارونه فاز از باريکه ورودی (۳) است، توليد مي شود. توجه کنيد که مي توانيم جای باريکه هاي (۱) و (۲) را در اين توصيف با هم عوض کنيم، و در نتيجه پراکندي براگ وقتی روی مي دهد که باريکه (۱) به نقشه اي تداخل ناشي از باريکه هاي (۲) و (۳) فرود آيد.

اين فن توليد موج هميوغ فاز اپتيكي را آميختگي چار-موج مي نامند، زيرا چهار موج تداخل کننده در محيط غيرخطي در آن دخالت دارند.^۱ با توجه به شکل ۲۶-۲۰، دو تا از باريکه ها باريکه هاي دمنده يا مرجع هستند که در جهتهاي مخالف به محيط فرود مي آيند. اين باريکه ها معمولاً امواج تختي هستند که طول موج آنها با طول موج باريکه ورودی سوم، يعني باريکه علامت که هميوغ فاز اپتيكي آن را مي خواهيم، يکسان است. اين باريکه علامت مي تواند هر راستايي داشته باشد، اما راستاي آن تعيين کننده راستاي هميوغ فاز آن است. دامنه هاي باريکه هاي دمنده، A_1 و A_2 ، بسيار بزرگتر از دامنه هاي باريکه هاي علامت و هميوغ فاز، A_3 يا A_4 ، هستند به طوري مي توان آنها را

۱. محيطهائي که برای همیوگسازي فاز اپتيكي غيرخطي بکار مي روند به ناحیه طول موج مورد نظر بستگی دارند و گستره وسيعی شامل مايعات، بخارها و جامدات تشکيل مي دهند. به عنوان نمونه محدودی از اين مواد، مي توانيم الکال، سولفيد کربن، بخار سدیم و بخار يد، شیشه ها، بلورهاي مايع، ياقوت، لیتيم، نيوبت، و نيمرساناهائي مانند Ge، CdTe، Si و HgCdTe را نام ببريم.



شکل ۲۴-۲۰ هندسه متداول برای همیوغسازی فاز توسط آمیختگی چار-موج. باریکه‌های دمتده A_1 و A_2 پاد موازی هستند و شدت آنها از باریکه علامت A_3 بسیار بیشتر است. خروجی همیوغ فاز مربوط به باریکه علامت باریکه‌ای است که با A_4 نشان داده شده است.

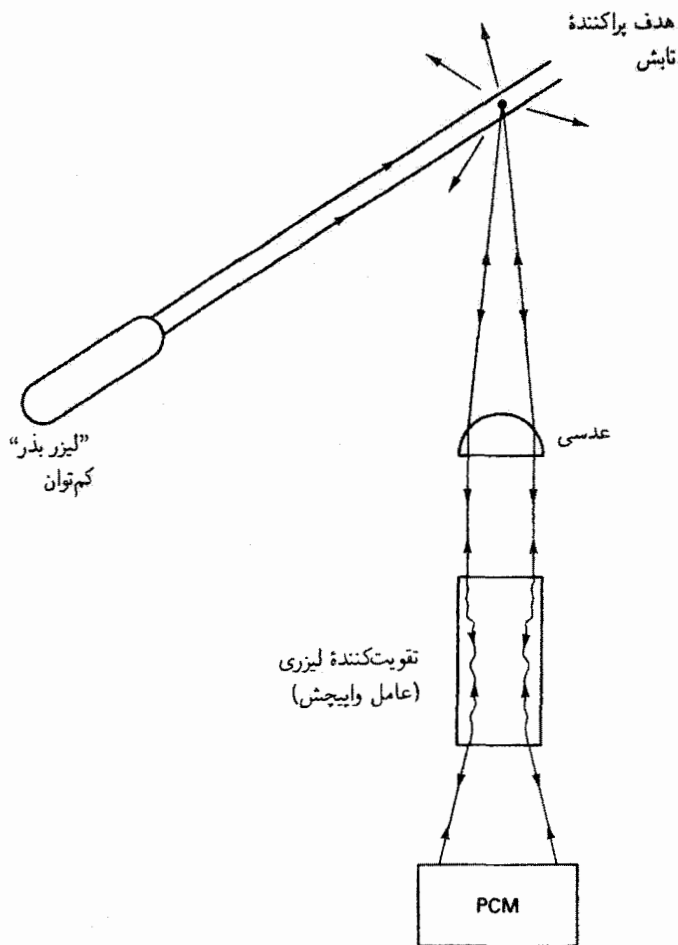
در حجم محیط غیرخطی ثابت گرفت. تحلیل این برهم‌کنش [۹] نشان می‌دهد باریکه خروجی همیوغ فاز دارای دامنه‌ای متناسب با دامنه‌های باریکه‌های دیگر است:

$$A_4 \propto A_1 A_2 A_3^2 \quad (20-24)$$

از این تناسب نتیجه می‌گیریم که می‌توان با رمزبندی مناسب فضایی یا زمانی—یک یا چند باریکه ورودی، باریکه همیوغ فاز را مدوله کرد.

چند خاصیت باریکه همیوغ فاز اپتیکی، که در بالا به آنها اشاره شد، کاربردهای جالب توجهی دارند که عبارت‌اند از تصحیح ابیراهی، نشانه‌گیری، و ردیابی. این خاصیتها از ماهیت ساده موج همیوغ فاز که در بالا توصیف شد ناشی می‌شوند. ابتدا یک محیط شفاف واپیچنده مانند شیشه برفک‌زده را در نظر بگیرید که در راه باریکه نور به آینه همیوغ فاز گذاشته شده است. موج به‌طور نایکنواخت تغییر می‌یابد اما همیوغ فاز آن دقیقاً همان مسیر را برمی‌گردد و تغییرات موج را وارون می‌کند به طوری که عبور برگشتی در محیط واپیچنده واپیچش اولیه را خنثی می‌کند یا "التمیام می‌دهد". یعنی، باریکه‌ای که به علت عبور از دستگاه اپتیکی با ابیراهیهای جدی واپیچیده شده است با "بازتاب" از آینه همیوغ فاز که آن را به همان دستگاه پس می‌فرستد بازیابی می‌شود؛ و علاوه بر این، اگر باریکه نور از یک چشمه نقطه‌ای ناشی شده باشد، موقعی که به دستگاه باز می‌گردد اثرات واگرایی و پراش وارونه می‌شوند، و در نتیجه باریکه همیوغ فاز به نقطه اصلی همگرا می‌شود. همچنین، اگر چشمه نقطه‌ای حرکت کند، باریکه بازگردنده طوری تنظیم می‌شود که دائماً به سمت چشمه است؛ خاصیت نشانه‌گیری و ردیابی.

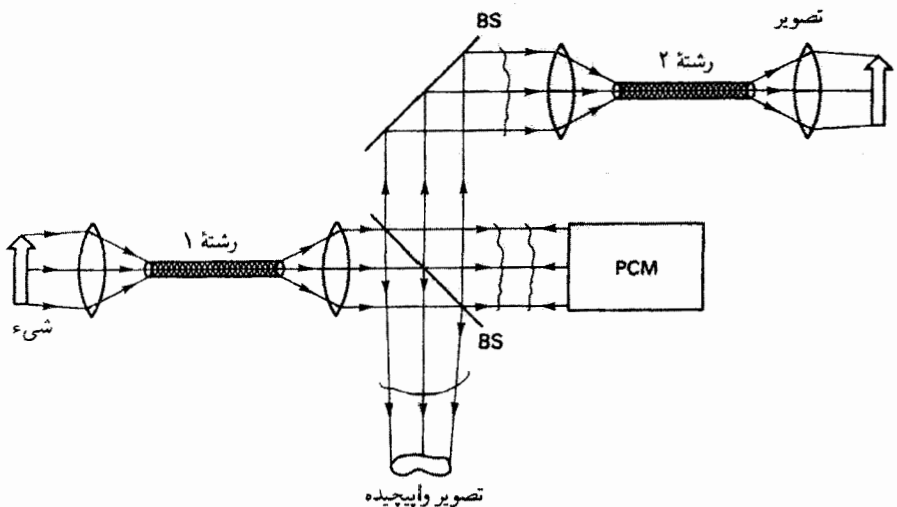
در اینجا چند مثال^۱ درباره استفاده از این خاصیتها ذکر می‌کنیم. مثالهای دیگر را می‌توان در ۱. هر چند کاربردهایی که در اینجا توصیف می‌شوند از لحاظ نظری امکانپذیراند، تمام آنها از لحاظ تجاری اجرا نشده‌اند.



شکل ۲۶-۲۱ نمودار نمایش خواص نشانه‌گیری و هدفیابی باریکه همیوگ فاز. یک باریکه پرتوان و بسیار جهتدار به مرکز پراکندگی که آن را صادر کرده است باز می‌گردد.

مراجع آخرین فصل پیدا کرد. شکل ۲۶-۲۱ کنش ساده خود-هدفیابی با استفاده از آینه همیوگ فاز را نشان می‌دهد. لازم است که باریکه لیزری پراثری را روی یک هدف کوچکتر متمرکز کنیم، و این دقیقاً گداخت لیزری است که در آن، به عنوان مثال، هدف یک گوی هیدروژن است. یک تقویت کننده لیزری که می‌تواند انرژی زیادی صادر کند دائماً واپیچشهایی در باریکه ایجاد می‌کند که جهتداری باریکه و توانایی متمرکز کردن دقیق آن روی یک هدف کوچک را خراب می‌کنند. این مشکل را می‌توان با استفاده از یک لیزر "بذر" حل کرد که به جای توان زیاد جهتداری زیادی دارد. قسمتی از نور این لیزر کم توان که از ذره پراکنده می‌شود وارد تقویت کننده لیزری می‌شود و گسیل القایی و تقویت را شروع می‌کند.

وایپچشهای ایجاد شده در این فرایند با استفاده از آینه همیوگ فاز به عنوان بازتابنده حذف می شوند. نتیجه عبارت است از باریکه لیزری جهتدار پرتوانی که مسیر خود را در جهت معکوس طی می کند و روی پراکننده اولیه دقیقاً همگرا می شود. در این فرایند، فرض شده است که نور از تقویت کننده چنان سریع می گذرد که ناهمگنیهای متغیر زمانی در محیط لیزری برای فرایند التیام مضر نیستند. برای افزایش توان بیشتر از ظرفیت یک تقویت کننده لیزری منفرد روی هدف، می توان تعدادی تقویت کننده لیزری را برای جمع آوری قسمتی از تابش تپی پراکنده و همزمان کردن تپهای بازگشتی آنها به هدف آرایش داد. با تغییر کوچکی در این تصویر، می توان گستره وسیعی از کاربردهای این طرح اساسی را به دست آورد. فرض کنید لیزر بذر در یک ماهواره باشد و تقویت کننده لیزری آینه همیوگ فاز در ایستگاه زمینی قرار داشته باشد. ماهواره می تواند باریکه همیوگ فاز از ایستگاه زمینی را بازگشت دهد که وایپچشهای ناشی از تلاطم جو و از تقویت کننده را التیام می دهد. این امر نه تنها ردیابی ماهواره بلکه مخابرات بین زمین و ماهواره را نیز امکانپذیر می سازد. اگر یکی از باریکه های دمنده تپی باشد، باریکه همیوگ فاز مطابق با آن روشن و خاموش می شود؛ اگر یکی از باریکه های دمنده مدوله اطلاعات شده باشد، این مدولاسیون، چنانکه معادله ۲۶-۲۰ ایجاب می کند، به باریکه همیوگ فاز منتقل می شود. کاربرد جالب توجه دیگر همیوگ سازی فاز اپتیکی در زمینه انتقال اطلاعات با تار نوری است. یادآوری می کنیم (بخش ۲۴-۳) که یک علامت نوری که از طریق تار نوری فرستاده می شود به تدریج به علت پاشیدگی مدی و پاشیدگی طیفی صدمه می بیند. شکل ۲۶-۲۲ قسمتی از یک



شکل ۲۶-۲۲ بازگرداندن کیفیت تصویر به نور عبور کرده از تار نوری. التیام باریکه همیوگ فاز با عبور باریکه از یک تار یکسان دوم صورت می گیرد.

تار (تار ۱) را نشان می‌دهد که برای انتقال تصویر یک شیء (در این مورد، پیکان) به‌کار برده شده است. اگر نوری که توسط تقسیمگر باریکه به پایین بازتابیده شده است متمرکز شود، واپیچش ناشی از تار به یک تصویر معیوب منجر می‌شود. برای تصحیح این وضعیت، نور عبور کرده از تقسیمگر باریکه از آینه همیوگ فاز بازتاب می‌یابد و چنانکه نشان داده شده است به سمت یک تار دیگر (تار ۲) فرستاده می‌شود که فرض می‌کنیم یکسان با تار ۱ است. این آرایه باعث می‌شود تار دوم واپیچشهای ناشی از تار اول را جبران کند، و در نتیجه می‌توان تصویری با کیفیت خوب در یک مکان دور تولید کرد.

مسائل

۱-۲۶ جمله‌های مرتبه سوم قطبیدگی را برای یک باریکه منفرد از موج تخت با دامنه E_0 و بسامد ω بنویسید. چه بسامدهایی در موج قطبیدگی ظاهر می‌شوند؟

۲-۲۶ جمله‌های مرتبه سوم قطبیدگی را برای برهم‌کنش دوباریکه‌ای بنویسید، که در آن باریکه‌ها امواج تختی با دامنه‌های E_{01} و E_{02} و بسامدهای ω_1 و ω_2 هستند. چه بسامدهایی توسط موج قطبیدگی تابش می‌شوند؟

۳-۲۶ جمله‌های مرتبه دوم قطبیدگی را برای برهم‌کنش سه‌باریکه‌ای بنویسید، که در آن باریکه‌ها امواج تختی با دامنه‌های E_{01} ، E_{02} و E_{03} و بسامدهای ω_1 ، ω_2 و ω_3 هستند. چه بسامدهایی توسط موج قطبیدگی تابش می‌شوند؟

۴-۲۶ بر اساس معادله ۷-۲۶ نشان دهید اثر الکترواپتیکی خطی تنها در بلورهای فاقد تقارن وارونی دیده می‌شود.

۵-۲۶ (الف) طول همدوسی را برای تولید هماهنگ دوم در KDP وقتی در معرض نور تپی لیزر یا قوتی در 694 nm قرار دارد به‌دست آورید. ضرایب شکست مربوط عبارت‌اند از $n(694 \text{ nm}) = 1.505$ و $n(347 \text{ nm}) = 1.534$.

(ب) طول همدوسی اندازه‌گیری شده برای تیتانات لیتیم در $1.06 \mu\text{m}$ برابر با $5.8 \mu\text{m}$ است. تغییر ضریب شکست را در $0.53 \mu\text{m}$ محاسبه کنید.

۶-۲۶ ولتاژ نیم‌موج را برای سلول طولی پوکلز از جنس ADP (فسفات دی‌هیدروژن آمونیم) در 546 nm تعیین کنید. طول سلول را به‌دست آورید.

۷-۲۶ یک سلول طولی پوکلز از نیوبات لیتیم ساخته شده است. تغییر ضریب شکست و اختلاف

فاز حاصل از ولتاژ اعمال شده ۴۲۶ V را وقتی باریکه نور از لیزر He-Ne در $۶۳۲٫۸\text{ nm}$ است تعیین کنید. طول بلور ۱ cm است.

۸-۲۶ با استفاده از معادله ۹-۲۶ نشان دهید تراگسیلندگی سلول پوکلز را می‌توان به صورت $I = I_{\max} \sin^2(\Phi/2)$ هم نوشت.

(الف) در چه مقادیری از V و Φ (بزرگتر از صفر) تراگسیلندگی صفر است؟

(ب) اگر قبل از سلول پوکلز یک تخته نیم‌موج معمولی قرار داشته باشد، تابیدگی را به ازای $V = 0$ و $V = V_{HW}$ به دست آورید.

۹-۲۶ در چه نوع محیط‌هایی اثرهای طولی پوکلز و کر هردو مشاهده می‌شوند؟ برای داشتن تصویری از شدتهای نسبی آنها، با محاسبه نسبت تأخیرهای حاصل از اعمال مناسب ۱۰ kV آنها را مقایسه کنید. رابطه‌ای برای این نسبت به دست آورید. سپس با در نظر گرفتن یک محیط فرضی با مقادیر "نوعی" $r = ۱۰\text{ pm/V}$ ، $K = ۰٫۱\text{ pm/V}^2$ ، $L = ۲\text{ cm}$ ، $d = ۱\text{ cm}$ ، و $n_0 = ۲$ یک محاسبه عددی انجام دهید. فرض کنید $\lambda = ۵۵۰\text{ nm}$.

۱۰-۲۶ طول سلول کر را با استفاده از دی‌سولفید کربن که برای تولید تأخیر نیم‌موج به ازای ولتاژ اعمال شده ۳۰ kV لازم است محاسبه کنید. فاصله بین الکترودهای سلول $۱٫۵\text{ cm}$ است. آیا این سلول عملی است؟

۱۱-۲۶ نشان دهید معادله ۹-۲۶ هم‌ارز اثر دوپلر برای نور است. از این واقعیت استفاده کنید که انتقال بسامد دوپلر برای نور بازتابیده از شیء متحرک دو برابر بسامد نور صادر از شیء متحرک است، یعنی $\Delta\nu = 2\nu u_p/v$ که در آن ν بسامد نور، v سرعت نور در محیط، و u_p مؤلفه سرعت شیء در راستای انتشار موج نور است. از هندسه شکل ۹-۲۶ و شرط براگ استفاده کنید.

۱۲-۲۶ سرعت صوت در شیشه ۳ km/s است. برای یک موج صوت با پهنای ۱ cm ، پیش‌افتادگی آن را وقتی یک موج نور از آن عبور می‌کند محاسبه کنید. فرض کنید برای شیشه $n = ۱٫۵$. معنی این نتیجه چیست؟

۱۳-۲۶ (الف) نشان دهید تغییر کوچک $\Delta\theta$ در زاویه حول راستای باریکه پراشیده را می‌توان تقریباً با $\Delta\theta = \Delta k_s/k$ بیان کرد.

(ب) نشان دهید این نتیجه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta\theta = (\lambda/v_s)\Delta\nu_s$$

که در آن λ طول موج در محیط است.

(ج) عاملی که با آن $\Delta\theta$ از واگرایی باریکه تجاوز می‌کند یک عدد عملاً مفید N است که "تعداد لکه‌های تفکیک‌پذیر" نامیده می‌شود. این عدد که یک نشانه امتیاز به‌شمار می‌رود تعداد مکانهای قابل تفکیکی را نشان می‌دهد که انحرافگر باریکه می‌تواند باریکه را به آنها هدایت کند. اگر واگرایی باریکه را با زاویه پراش $\theta_D = \lambda/D$ بیان کنیم که در آن D قطر باریکه است، نشان دهید

$$N = \frac{\Delta\theta}{\theta_D} = \tau \Delta\nu_s$$

که در آن τ زمانی است که صوت قطر باریکه اپتیکی را طی می‌کند.

(د) به‌عنوان یک مثال عددی، مدولاسیون بسامد صوت در گستره 80° تا 120° MHz را در کوارتز گذاخته، که در آن $v_s = 5.95 \times 10^5$ cm/s، در نظر بگیرید. اگر قطر باریکه ۱ cm باشد، تعداد لکه‌های تفکیک‌پذیر را به‌دست آورید.

۱۴-۲۶ چه بسامد آکوستیکی‌ای برای یک موج آکوستیکی تخت، که در یک بلور آکوستو-اپتیکی گسیل می‌شود، لازم است تا باریکه ناشی از لیزر He-Ne به اندازه 1° منحرف شود؟ سرعت صوت در این بلور 2500 m/s و ضریب شکست آن در 632.8 nm برابر با 1.6 است.

۱۵-۲۶ در معادله براگ $18-26$ ، طول موج نورو زاویه‌انهایی هستند که در محیط اندازه‌گیری می‌شوند. نشان دهید اگر محیط همسانگرد باشد و سطوح آن موازی با راستای موج آکوستیکی تخت باشند، معادله $18-26$ برای طول موج و زاویه پراشی که بیرون محیط اندازه‌گیری می‌شوند نیز برقرار است.

۱۶-۲۶ اگر باریکه ناشی از لیزر He-Ne توسط موج تخت آکوستیکی پراکندگی براگ پیدا کند، وقتی بسامدها 50 MHz و 80 MHz هستند اختلاف زاویه‌های انحراف باریکه لیزری را به‌دست آورید. بلور آکوستیکی یا قوت کبود با $n = 1.76$ است و سرعت صوت در آن 1110 km/s است.

۱۷-۲۶ یک منزویگر اپتیکی، مانند مورد شکل $11-26$ ، طراحی کنید که در آن از ZnS به‌عنوان محیط فعال استفاده شود، و میدان مغناطیسی توسط سیملوله‌ای با چگالی 60 دور بر سانتیمتر تولید شود که مستقیماً روی بلور ZnS پیچیده می‌شود. فرض کنید $\lambda = 589$ nm.

۱۸-۲۶ یک قطعه شیشه SF57 با سطوح موازی صیقلی شده به طول 2.73 cm بین قطبهای باریک‌شده آهنربای الکتریکی قرار داده شده است. سوراخ مرکزی کوچکی در قطعات قطب ایجاد شده است تا باریکه قطبیده خطی لیزر He-Ne بتواند از قطعه شیشه‌ای موازی با راستای میدان مغناطیسی عبور کند. میدان مغناطیسی در 5.98 kG تنظیم شده است.

(الف) وقتی نور سبز لیزر He-Ne (با 632.8 nm) به کار برده می شود، چرخش اندازه گیری شده 900 min است. ثابت ورده را برای این شیشه به دست آورید.

(ب) وقتی نور سبز لیزر He-Ne (با 543.5 nm) به کار برده می شود، چرخش اندازه گیری شده 1330 min است. ثابت ورده را برای این شیشه به دست آورید.

۱۹-۲۶ یک سلول مایع به طول 5 cm در میدان مغناطیسی 4 KG قرار دارد. از این سلول که پر از دی سولفید کربن است نور قطبیده خطی سدیم در راستای میدان B عبور می کند. چرخش کل نور و پاشندگی CS_2 را در این طول موج محاسبه کنید.

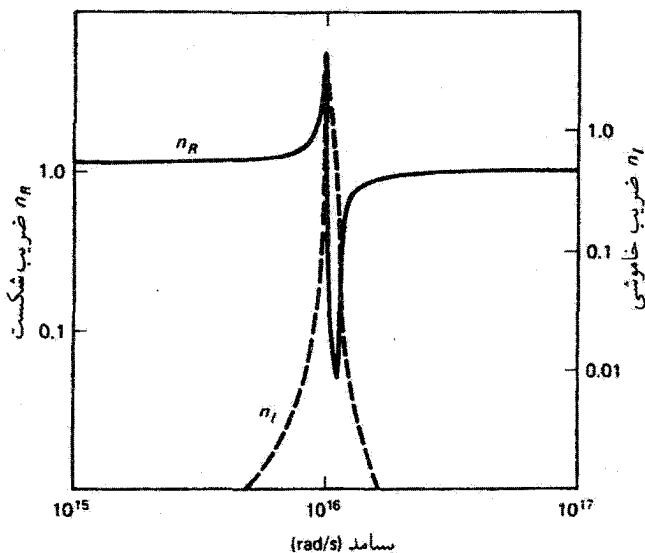
۲۰-۲۶ شکل یک تپ نامتقارن را قبل و بعد از بازتاب از آینه معمولی و آینه همیوگ فاز ترسیم کنید. در مورد دوم، فرض کنید آینه همیوگ فاز با شروع شدن باریکه های دمنده در لحظه ای که تمام تپ در محیط همیوگ فاز حرکت کرده است "روشن می شود". نشان دهید از این اثر می توان برای تصحیح پهن شدگی پاشیدگی در تار نوری استفاده کرد. (اگر لازم باشد به [۱۲] مراجعه کنید.)

۲۱-۲۶ آرایه ای برای انداختن تصویر پر شدت تیز از یک صورتک روی لایه مقاوم به نور که روی تراشه نیم رسانا کشیده شده است با استفاده از آینه همیوگ فاز و بدون استفاده از عدسی ترسیم کنید. این وسیله ای است برای انجام فوتولیتوگرافی بدون اینکه صورتک در تماس مستقیم با تراشه باشد. (اگر لازم باشد به [۱۲] مراجعه کنید.)

مراجع

- [1] Butcher, P. N., and D. Cotter. *The Elements of Nonlinear Optics*. New York: Cambridge University Press, 1990. Ch. 6.
- [2] Franken, P. A., A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weireich. "Generation of Optical Harmonics." *Phys. Rev. Letters* 7 (1961): 118.
- [3] Yariv, Ammon. *Optical Electronics*, 3d ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1985. Ch. 8.
- [4] Kaminov, Ivan P. *An Introduction to Electrooptic Devices*. New York: Academic Press, 1974. Ch. 3.
- [5] Yariv, Ammon. *Optical Electronics*, 3d ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1985. Ch. 9.
- [6] Wilson, J., and J. F. B. Hawkes. *Optoelectronics: An Introduction*. London: Prentice-Hall International, 1983. Ch. 3.
- [7] Pedrotti, Frank L., and Peter Bandettini. "Faraday Rotation in the Undergraduate Ad-

- vanced Laboratory." *Am. J. Phys.* 58 (June 1990): 542.
- [8] Guenther, Robert. *Modern Optics*. New York: John Wiley and Sons, 1990. Ch. 14.
- [9] Yariv, Ammon. *Optical Electronics*, 3d ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1985. Ch. 16.
- [10] Yariv, Ammon, and Robert A. Fisher. In *Optical Phase Conjugation*, edited by Robert A. Fisher, Ch. 1. New York: Academic Press, 1983.
- [11] Giuliano, Concetto R. "Applications of Optical Phase Conjugation." *Physics Today* 34, no. 4 (April 1981): 27.
- [12] Shkunov, Vladimir V., and Boris Ya. Zel'dovich. "Optical Phase Conjugation." *Scientific American* (Dec. 1985): 54.
- [13] Pepper, David M. "Applications of Optical Phase Conjugation." *Scientific American* (Jan. 1986): 74.
- [14] Karim, Mohammad A. *Electro-optical Devices and Systems*. Boston: PWS-Kent Publishing Company, 1990. Ch 7.
- [15] Boyle, W. S. "Light Wave Communications." *Scientific American* (Aug. 1977): 40.
- [16] Giordmaine, J. A. "The Interaction of Light with Light." *Scientific American* (Apr. 1964): 38.
- [17] Miller, Stewart E. "Communication by Laser." *Scientific American* (Jan. 1966): 19.
- [18] Nelson, Donald F. "The Modulation of Laser Light." *Scientific American* (June 1968): 17.
- [19] Pepper, David M., Jack Feinberg, and Nicolai V. Kukhtarev. "The Photorefractive Effect." *Scientific American* (Oct. 1990): 62.



۲۷

خواص اپتیکی مواد

مقدمه

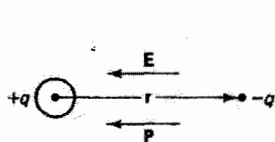
امواج الکترومغناطیسی در برخورد با مواد برهم‌کنشهای پیچیده‌ای با ذرات باردار محیط به وجود می‌آورند. نیروهایی به این بارها توسط میدان الکتریکی این امواج و، به علت حرکت بارها، توسط میدان مغناطیسی این امواج وارد می‌شوند. در پاسخ به این میدانهای نوسانی، خود بارها نوسان می‌کنند و مانند تابشگر امواج الکترومغناطیسی ثانوی عمل می‌کنند. بنابراین، در تعیین میدان کل در یک نقطه باید میدانهای امواج چشمه و نوسانگرهای باردار را به حساب آورد. در مورد میدانهای معمولی، که کوچکتر از میدانهای هستند که اکنون می‌توان با لیزرهای پراثرزی به دست آورد، فرض می‌شود میدان کل برهم‌نهی از میدانهای مؤلف باشد. اثرات پیچیده تمام سهمهای میکروسکوپی از بارهای ماده در میدان برآیند را می‌توان، برای مقاصد مشخصی، تنها با پارامترهای مادی ماکروسکوپی، ثابتهای اپتیکی ماده، توصیف کرد. در این فصل مخصوصاً نشان می‌دهیم چگونه ضریب شکست و ضریب جذب برای مواد رسانا (فلزات) و نارسانا (عایقها یا دی‌الکتریکها) را می‌توان توضیح داد. برای این کار از معادلات ماکسول و فنون ریاضی حساب بردارها استفاده می‌کنیم.

۱-۲۷ قطبیدگی محیط دی الکتریک

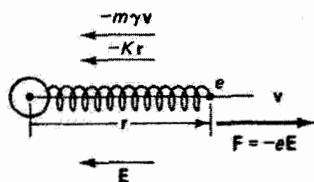
یک دی الکتریک ساده یعنی یک ماده نارسانا را که خواص آن هسانگرد هستند به عنوان الگو انتخاب می کنیم. منظور از نارسانا محیطی است که، برخلاف فلز، دارای بار آزاد نباشد. بارهای مثبت به هسته های اتمهای تشکیل دهنده محیط و بارهای منفی به الکترونهای مقید به این هسته ها مربوط اند. منظور از هسانگرد این است که خواص فیزیکی مورد نظر مستقل از راستا در محیط هستند، و در نتیجه می توانیم این ثابتهای فیزیکی را کمیتهای نرده ای در نظر بگیریم. اعمال میدان الکتریکی به این محیط باعث جابه جایی بار می شود که در آن توزیع بار منفی مقید به هسته ها در جهت مخالف میدان الکتریکی منتقل می شود. این انتقال می تواند در یک مولکول قطبی، مانند H_2O ، روی دهد زیرا این مولکول دارای دوقطبی الکتریکی دائمی است، یعنی مرکزهای مؤثر توزیعی بار مثبت و منفی آن بر هم منطبق نیستند. در این مورد، اعمال میدان الکتریکی سمستگیری جدیدی برای مولکولها به وجود می آورد که در آن، به طور متوسط، سر مثبت دوقطبی در جهت میدان قرار می گیرد. این تمایل به همسویی را حرکت گرمایی مولکولها خنثی می کند. انتقال در توزیع بار می تواند همچنین در مولکولهای ناقطبی، مانند O_2 ، روی دهد که در آنها توزیعی بار مثبت و منفی به طور عادی دارای مرکز مؤثر یکسانی هستند. اعمال میدان منجر به انتقال کوچک ابر الکترونی نسبت به هسته آن می شود و یک دوقطبی القایی به وجود می آورد. در هر یک از دو مورد، گشتاور دوقطبی p ناشی از هر اتم یا مولکول، چنانکه در شکل ۱-۲۷ الف نشان داده شده است، با حاصلضرب بار جابه جا شده q و فاصله مؤثر بین بارهای مثبت و منفی تعیین می شود، یا

$$p = -qr \quad (۱-۲۷)$$

جهت گشتاور دوقطبی از بار منفی به بار مثبت است. بزرگی گشتاور دوقطبی در یک ماده معین بستگی به این دارد که بار تحت تأثیر یک میدان الکتریکی معین تا چه اندازه آسان جابه جا شود. آنگاه،



(الف)



(ب)

شکل ۱-۲۷ دوقطبی الکتریکی بنیادی. (الف) همسویی با میدان. (ب) نیروی وارد بر دوقطبی که در راستای میدان الکتریکی است.

قطبیدگی P برای این محیط، بنابه تعریف، عبارت است از مجموع گشتاورهای دوقطبی در واحد حجم:

$$P = -Ner \quad (2-27)$$

که در آن N تعداد دوقطبیها در واحد حجم و e قدرمطلق بار الکترون است. الکترونها طوری رفتار می‌کنند که انگار نیروهای مقیدکننده آنها به هسته‌ها نیروهای کشسانی هستند که با قانون هوک داده می‌شوند، که در آن نیروی بازگرداننده متناسب با جابه‌جایی و در جهت مخالف آن است. هسته‌های سنگینتر را می‌توان ساکن گرفت، زیرا این هسته‌ها نمی‌توانند به تغییرات سریع میدان موج الکترومغناطیسی در ناحیه اپتیکی طیف پاسخ دهند. بنابراین، می‌توان از الگوی ساده‌ای استفاده کرد که در آن الکترونها با نیروهای فنرگونه به هسته ثابت مقید می‌شوند. اما در میدان الکتریکی متناوب، نوسانهای واداشته الکترونها مقدار مشخصی انرژی، شامل انرژی که الکترونها به نوبه خود تابش می‌کنند و انرژی برهم‌کنش با اتمهای مجاور که به صورت گرما ظاهر می‌شود، از تابش فرودی می‌گیرند. بنابراین، الگویی که برای الکترونها نوسان‌کننده به کار می‌رود یک نوسانگر هماهنگ میرا با نیروی اصطکاک متناسب با سرعت است. بدین ترتیب، قانون دوم نیوتون برای الکترون در الگوی شکل ۲۷-۱ ب منجر به معادله زیر می‌شود

$$-Kr - m\gamma \frac{dr}{dt} - eE = m \frac{d^2r}{dt^2} \quad (3-27)$$

که در آن K ثابت نیروی فنر مؤثر، m جرم الکترون، و γ یک ثابت اصطکاک با بعد عکس زمان است. توجه کنید که نیروی $(ev \times B)$ روی الکترون ناشی از میدان مغناطیسی تابش را نوشته‌ایم؛ در واقع، این نیرو در مقایسه با نیروی (eE) ناشی از میدان الکتریکی قابل چشمپوشی است. وقتی میدان اعمال شده E ثابت است، دوقطبیها نوسان نمی‌کنند و در نتیجه هم سرعت و هم شتاب الکترون صفر است. در این مورد خاص، معادله ۳-۲۷ به صورت زیر در می‌آید

$$-Kr = eE$$

و با حذف r با استفاده از معادله ۲-۲۷، قطبیدگی ایستایی با رابطه زیر داده می‌شود

$$P = \frac{Ne^2 E}{K} \quad (4-27)$$

اکنون فرض کنید E میدان یک موج هماهنگ است که وابستگی زمانی آن با $E = E_0 e^{-i\omega t}$ داده می‌شود و نوسانها با وابستگی مشابهی، یعنی $r = r_0 e^{-i\omega t}$ پاسخ می‌دهند. با جاگذاری

مشتق‌های $d\mathbf{r}/dt = -i\omega\mathbf{r}$ و $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -\omega^2\mathbf{r}$ در معادله ۲۷-۳، نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{r} = \frac{-e\mathbf{E}}{-m\omega^2 - im\omega\gamma + K} \quad (5-27)$$

که وقتی در معادله ۲۷-۲ جاگذاری کنیم قطبی‌دگی وابسته به زمان زیر را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{P} = \left(\frac{Ne^2}{-m\omega^2 - im\omega\gamma + K} \right) \mathbf{E} \quad (6-27)$$

توجه کنید که معادله ۲۷-۶ در مورد میدان \mathbf{E} ایستا، که با شرایط $\omega = 0$ و $\gamma = 0$ مشخص می‌شود، با معادله ۲۷-۴ توافق دارد. در تمام موارد دیگر، قطبی‌دگی تابعی از بسامد تابش ω است و چون ضریب \mathbf{E} مختلط است قطبی‌دگی می‌تواند، چنانکه خواهیم دید، فاز وابسته به بسامد نسبت به \mathbf{E} داشته باشد. میدان \mathbf{E} در معادله ۲۷-۶ باید نمایشگر میدان واقعی در دوقطبی در داخل محیط باشد. این میدان موضعی \mathbf{E}_{loc} برهم‌نهی میدان اعمال شده \mathbf{E}_{app} و میدان ناشی از تمام دوقطبیهای همسوی دیگر در محیط قطبی‌ده است. در کتابهای درسی الکتریسته و مغناطیس ثابت می‌کنند که سهم دوم برابر با $\mathbf{P}/3\epsilon_0$ است که در آن ϵ_0 گذردهی فضای آزاد است. بنابراین، داریم

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} + \mathbf{E}_{app} \quad (7-27)$$

اگر علامت \mathbf{E} را برای میدان اعمال شده به کار ببریم و معادله ۲۷-۷ را در معادله ۲۷-۶ بگذاریم، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{P} = \left(\frac{Ne^2}{-m\omega^2 - im\omega\gamma + K} \right) \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right) \quad (8-27)$$

در این معادله \mathbf{P} دو بار ظاهر شده است، اما می‌توانیم معادله را صریحاً برای \mathbf{P} حل کنیم. اگر مقدار پراتنژ اول معادله ۲۷-۸ را با F نشان دهیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{P} = \left(\frac{F}{1 - F/3\epsilon_0} \right) \mathbf{E} \quad (9-27)$$

بدین ترتیب، برای ضریب \mathbf{E} داریم

$$\frac{F}{1 - F/3\epsilon_0} = \frac{Ne^2/m}{(K/m - Ne^2/3m\epsilon_0) - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

با تعریف کمیت داخل پراتر به صورت ω_0^2 ، یعنی

$$\omega_0^2 \equiv \frac{K}{m} - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \epsilon_0} \quad (10-27)$$

معادله ۹-۲۷ به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E} \quad (11-27)$$

با قدرمطلق گرفتن از این رابطه، به دست می آوریم

$$|\mathbf{P}| = \frac{Ne^2/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} |\mathbf{E}|$$

واضح است که وقتی $\omega \rightarrow \omega_0$ ، بزرگی \mathbf{P} به طور قابل ملاحظه ای افزایش می یابد، و در نتیجه ω نمایشگر بسامد تشدید برای دو قطبیهای محیط است. معادله ۱۱-۲۷ به صورت معادله حرکت نوسانگر هماهنگ واداشته توأم با میرایی است. وقتی بسامد محرک به بسامد تشدید نوسانگر ω میل می کند، دامنه ارتعاشها بسیار بزرگ می شود و وقتی این بسامد از ω زیادتر می شود دامنه دوباره کاهش می یابد. در مورد محیط دی الکتریک، افزایش گشتاورهای دو قطبی در تشدید به یک قطبیدگی ماکسیمم بزرگ منجر می شود. معادله ۱۱-۲۷ همچنین یک انتقال فاز وابسته به بسامد بین میدان اعمال شده و قطبیدگی را نشان می دهد. دور از تشدید، می توانیم قرار دهیم $\gamma = 0$ ، که مربوط به میرایی قابل چشمپوشی است. بنابراین، به ازای $\omega \ll \omega_0$ ، \mathbf{P} و \mathbf{E} دارای علامت یکسانی هستند و دو قطبیهها هم فاز با میدان نوسان می کنند. اما فراتر از تشدید، وقتی $\omega \gg \omega_0$ ، \mathbf{P} و \mathbf{E} دارای علامتهای مخالف هستند که نشان دهنده اختلاف فاز 180° است. الکترونهاى آزاد به این نحو پاسخ می دهند. وقتی $\omega \cong \omega_0$ ، نزدیک تشدید، ارتعاشها بزرگ هستند. در این مورد، جمله میرایی در مخرج کسر معادله ۱۱-۲۷ قابل چشمپوشی نیست، و تقسیم بر i - که معادل ضرب در i است، انتقال فاز 90° بین \mathbf{P} و \mathbf{E} را نشان می دهد. اکنون می توان از وابستگی \mathbf{P} به \mathbf{E} ، که در معادله ۱۱-۲۷ داده شده است، برای یافتن شرایطی استفاده کرد که با آنها امواج تخت می توانند در دی الکتریک منتشر شوند. معادله موج اساسی برای امواج الکترومغناطیسی در دی الکتریک پیامدی از معادلات ماکسول است.

۲۷-۲ انتشار امواج نور در دی الکتریک

چهار معادلهٔ ماکسول را می‌توان به صورت کلی زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12-27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13-27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14-27)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \quad (15-27)$$

در این معادلات، ρ چگالی بار است که به طور کلی بارهای آزاد و مقید را در بر می‌گیرد و با $\rho = \rho_b + \rho_f$ نشان داده می‌شود. اما در دی الکتریک که $\rho_f = 0$. در درس الکتروسیسته و مغناطیس معمولاً ثابت می‌کنند که رابطهٔ چگالی بار مقید با قطبیدگی به صورت زیر است

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (16-27)$$

به همین ترتیب، کمیت \mathbf{J} نمایشگر چگالی جریان است و می‌تواند از بارهای آزاد و مقید ناشی شود که در نتیجه $\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_f$. در دی الکتریک که $\rho_f = 0$ داریم $\mathbf{J}_f = 0$. علاوه بر این، می‌توان نشان داد

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (17-27)$$

با این قیدها، چهار معادلهٔ ماکسول برای دی الکتریک به صورت زیر در می‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{-\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (18-27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (19-27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (20-27)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (21-27)$$

اکنون از دو طرف معادله ۲۷-۱۹ تاو می‌گیریم:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (22-27)$$

که در آن در آخرین مرحله ترتیب مشتق‌گیری نسبت به فضا و زمان را عوض کرده‌ایم. برای قسمت چپ معادله ۲۷-۲۲ می‌توان از اتحاد زیر استفاده کرد

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (23-27)$$

در دی‌الکتریک همگن، قطبش باعث ایجاد چگالی بار سطحی کلی می‌شود، در حالی‌که در چگالی بار داخلی $\rho_b = 0$ تغییری به‌وجود نمی‌آورد. چگالی بار داخلی به این دلیل صفر است که در هر سطح بسته داخلی هر مقدار بار که به علت میدان قطبیده به داخل سطح بسته حرکت می‌کند با مقدار بار مساوی که به بیرون سطح حرکت می‌کند موازنه می‌شود. چگالی بار سطحی به این دلیل ایجاد می‌شود که این موازنه در سطح امکانپذیر نیست. بنابراین، از معادله‌های ۲۷-۱۶ و ۲۷-۱۸ نتیجه می‌گیریم که $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ، و با جاگذاری بقیه معادله ۲۷-۲۳ در معادله ۲۷-۲۲، به‌دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (24-27)$$

برای قسمت راست این معادله می‌توانیم از معادله ماکسول ۲۷-۲۱ استفاده کنیم، و در نتیجه داریم

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (25-27)$$

آخرین جمله را می‌توان با استفاده از معادله ۲۷-۱۱ برحسب \mathbf{E} نوشت، و در نتیجه معادله ۲۷-۲۵ به‌صورت زیر در می‌آید

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{E} = \left[1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \right] \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (26-27)$$

برای موج هماهنگی که به‌صورت $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ بیان می‌شود، در مورد آن $\nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$ و $\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 = -\omega^2 \mathbf{E}$ از حل معادله ۲۷-۲۶ برای k^2 به‌دست می‌آوریم

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \right] \quad (27-27)$$

نتیجه می‌گیریم که تحلیل امواج تخت منتشرشونده در دی الکتریک همگن به‌طور کلی ایجاب می‌کند که ثابت انتشار k یک عدد مختلط باشد. این ثابت انتشار را برحسب قسمتهای حقیقی و انگاری به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\bar{k} = k_R + ik_I \quad (28-27)$$

و این صورت را در رابطه موج هماهنگ جاگذاری می‌کنیم:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(k_R z + ik_I z - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{-k_I z} e^{i(k_R z - \omega t)} \quad (29-27)$$

عامل نمایی برحسب k_I نمایشگر جذب وابسته به عمق برای موجی است که از هر لحاظ دیگر هماهنگ است، و k_I اندازه‌ای از تضعیف دامنه این موج است. با مجذور کردن قدرمطلق دو طرف معادله ۲۷-۲۹، رابطه توصیف‌کننده چگالی شار انرژی به‌دست می‌آید:

$$I = I_0 e^{-\alpha z}$$

که در آن $\alpha = 2k_I$ ضریب جذب محیط است. اگر ثابت انتشار مختلط باشد باید ضریب شکست نیز مختلط باشد، زیرا می‌توانیم بنویسیم

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \left(\frac{\omega}{c}\right) n \quad (30-27)$$

اگر ضریب شکست مختلط را برحسب قسمتهای حقیقی و انگاری به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\bar{n} = n_R + in_I \quad (31-27)$$

که در آن n_R ضریب شکست معمولی است و n_I را ضریب خاموشی می‌نامند، آنگاه از معادله‌های ۲۷-۲۸ و ۲۷-۳۰ نتیجه می‌گیریم

$$k_R + ik_I = \left(\frac{\omega}{c}\right) (n_R + in_I)$$

که روابط زیر را به‌دست می‌دهد

$$k_R = \left(\frac{\omega}{c}\right) n_R \quad (32-27)$$

و

$$k_I = \left(\frac{\omega}{c}\right) n_I \quad (۲۷-۳۳)$$

با نوشتن n^r به صورت

$$n^r = (n_R + in_I)^r = \left(\frac{ck}{\omega}\right)^r$$

و از ترکیب این معادله با معادله ۲۷-۲۷ داریم

$$(n_R + in_I)^r = 1 + \left(\frac{Ne^r}{m\epsilon_0}\right) \frac{1}{\omega_0^r - \omega^r - i\omega\gamma} \quad (۲۷-۳۴)$$

رابطه‌های مربوط به قسمتهای حقیقی و انگاری ضریب شکست را می‌توان با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و همچنین انگاری در معادله ۲۷-۳۴ به دست آورد. طرف چپ عبارت است از

$$(n_R + in_I)^r = (n_R^r - n_I^r) + i(2n_R n_I) \quad (۲۷-۳۵)$$

طرف راست را نیز می‌توان به صورت مجموع قسمتهای حقیقی و انگاری نوشت. ابتدا صورت و مخرج جمله مختلط را در همیوغ مخرج ضرب می‌کنیم، و پس از ساده کردن به دست می‌آوریم

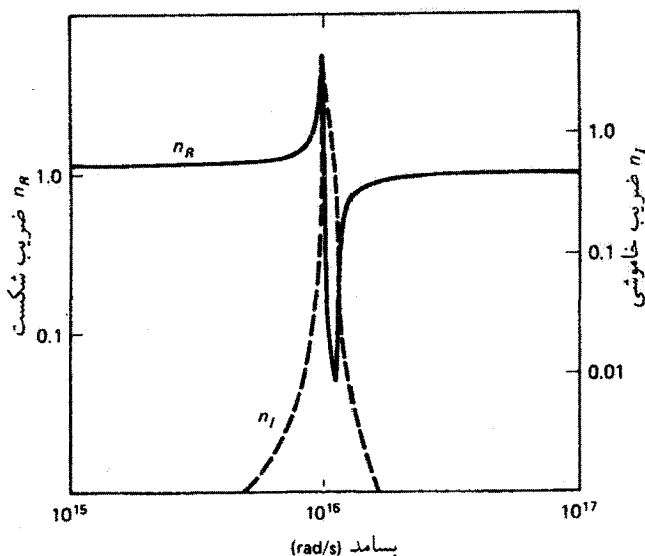
$$(n_R + in_I)^r = 1 + \left(\frac{Ne^r}{m\epsilon_0}\right) \left(\frac{\omega_0^r - \omega^r}{(\omega_0^r - \omega^r)^r + \omega^r \gamma^r} \right) + i \left(\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^r - \omega^r)^r + \omega^r \gamma^r} \right) \quad (۲۷-۳۶)$$

از مقایسه طرفهای راست معادله‌های ۲۷-۳۵ و ۲۷-۳۶ داریم

$$n_R^r - n_I^r = 1 + \frac{Ne^r}{m\epsilon_0} \left[\frac{\omega_0^r - \omega^r}{(\omega_0^r - \omega^r)^r + \gamma^r \omega^r} \right] \quad (۲۷-۳۷)$$

و

$$2n_I n_R = \frac{Ne^r}{m\epsilon_0} \left[\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^r - \omega^r)^r + \gamma^r \omega^r} \right] \quad (۲۷-۳۸)$$



شکل ۲-۲۷ بستگی ضریب شکست n_R و ضریب خاموشی n_I به بسامد زاویه‌ای برای دی الکتریک. مقادیر مفروض عبارت‌اند از $\omega_0 = 1 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ ، $\gamma = 10^{12} \text{ s}^{-1}$ ، و $N = 1 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

این معادله‌ها را می‌توان برای n_R و n_I همزمان حل کرد. وجود جرم m در مخرج این معادله‌ها نشان می‌دهد که نوسانهای الکترونی در تعیین ضریب شکست مهمتر از نوسانهای یونی هستند. اما قطبیدگی یونی می‌تواند در ناحیهٔ تشدید مهم باشد، که در آن مقدار بزرگ جملهٔ داخل کروشه مقدار کوچک ضریب حاوی جرم را جبران می‌کند.

شکل ۲-۲۷ هم n_R و هم n_I را که از معادله‌های ۳۷-۲۷ و ۳۸-۲۷ به صورت تابع بسامد محرک ω محاسبه شده‌اند نشان می‌دهد. چنانکه می‌بینیم، جذب که با ضریب خاموشی توصیف می‌شود در بسامد تشدید ω قله پیدا می‌کند. ضریب شکست حقیقی، همچنانکه ω به سمت تشدید افزایش می‌یابد و از آن می‌گذرد، خیز و افت تندی پیدا می‌کند و پس از آن دوباره افزایش می‌یابد و در بسامدهای زیاد به مقدار $n_R = 1$ میل می‌کند. ناحیهٔ باریکی که در آن n_R با بسامد کاهش می‌یابد مغایر با پاشندگی معمولی محیطهای شفاف است و آن را ناحیهٔ پاشندگی غیرعادی می‌نامند. بسامد تشدیدی مانند ω برای دی الکتریک به معنی این است که احتمال جذب فوتونهای فرودی‌ای که بسامد ω دارند بسیار زیاد است. جذب یکی از این فوتونها متناظر با گذار $E_0 = \hbar\omega = hf$ در ساختار نوار انرژی ماده است. همچنانکه ω تغییر می‌کند، یک رشته بسامدهای تشدید مشخصهٔ ماده خواهیم داشت. اگر این تشدید به‌عنوان مثال در گسترهٔ مرئی بسامدها روی دهد، ماده قسمتی از طیف را جذب می‌کند و رنگی دیده می‌شود، در حالی که بقیه را

عبور می‌دهد. مواد شفاف مانند شیشه بسامدهای تشدیدشان تنها در ناحیه‌های فروسرخ و فرابنفش واقع شده‌اند. برحسب الگوی ساده شده‌ای که برای دی‌الکتریک توصیف کردیم، وجود بسامدهای تشدید متعدد را به این معنی تعبیر می‌کنیم که الکترونها درجه‌های آزادی مختلفی در پاسخ به میدان اعمال شده پیدا می‌کنند. برای اینکه این تعبیر را به‌طور صوری بیان کنند، معادله ۲۷-۳۴ را معمولاً با جمع‌زدن روی جمله‌های مربوط به بسامدهای تشدید ω_j به‌صورت زیر تعمیم می‌دهند

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \quad (27-39)$$

که در آن f_j ، که قدرت نوسانگر برای تشدید ω_j نامیده می‌شود، نمایشگر کسری از دوقطبیها است که این بسامد تشدید را دارند. بررسی دقیق این مسئله مستلزم کاربرد نظریه کوانتومی است.

معادله پاشیدگی. منظور از پاشیدگی تغییر ضریب شکست با بسامد است، که با معادله ۲۷-۳۹ توصیف می‌شود. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که پاشیدگی کوشی را، که با معادله ۶-۱۷ به‌عنوان یک فرمول تجربی معرفی شد، می‌توان از معادله ۲۷-۳۹ با چند فرض ساده‌کننده به‌دست آورد. فرض می‌کنیم تنها یک بسامد تشدید ω در فرابنفش داریم به‌طوری که بسامدهای ناحیه مرئی در نامساوی $\omega \ll \omega_0$ صدق می‌کنند. همچنین، با قرار دادن $\gamma = 0$ میرایی را قابل چشمپوشی می‌گیریم. چون تمام دوقطبیها دارای بسامد تشدید یکسانی هستند، $f = 1$ و معادله ۲۷-۳۹ به‌صورت زیر در می‌آید

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

توجه کنید که به‌ازای $\omega \ll \omega_0$ ، همچون در گازها، ضریب شکست تقریباً ثابت است. همچنانکه ω با افزایش به ω_0 نزدیک می‌شود، ضریب شکست، چنانکه در شکل ۲۷-۲ نشان داده شده است، به‌کندی افزایش می‌یابد. افزایش کند ضریب شکست با بسامد (کاهش با طول موج) مشخصه پاشیدگی عادی است.

برای به‌دست آوردن معادله پاشیدگی کوشی، ابتدا عامل بسامد را به‌صورت رشته دوجمله‌ای بسط می‌دهیم:

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} + \dots \right)$$

$$n^{\nu} = 1 + \frac{Ne^{\nu}}{m\epsilon_0\omega_0^{\nu}} \left(1 + \frac{\omega^{\nu}}{\omega_0^{\nu}} + \frac{\omega^{\nu}}{\omega_0^{\nu}} + \dots \right)$$

با استفاده از $\omega = 2\pi c/\lambda$ و نشان دادن عاملهای ثابت با A' ، B' ، C' ، ... می‌توانیم بنویسیم

$$n^{\nu} = A' + \frac{B'}{\lambda^2} + \frac{C'}{\lambda^4} + \dots$$

از دو طرف جذر می‌گیریم و چون A' از تمام جمله‌های مرتبه‌های بالاتر بزرگتر است، در طرف راست از بسط دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم. پس از دسته‌بندی مجدد ثابتها، به دست می‌آوریم

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

که همان رابطه کوشی است که قبلاً برای توصیف پاشیلگی عادی معرفی شد.

۳-۲۷ جریان رسانش در فلز

در فلزات، وجود الکترونهای "آزاد" که به هسته خاصی مقید نیستند بررسی کلی بالا برای دی‌الکتریکها را تغییر می‌دهد. اگر چه الکترونهای مقید نیز وجود دارند، پاسخ الکترونهای آزاد بر خواص الکتریکی و اپتیکی محیط حاکم است. بنابراین، در معادله ۳-۲۷ قرار می‌دهیم $K = 0$ و معادله حرکت به صورت زیر در می‌آید

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\gamma\mathbf{v} = -e\mathbf{E} \quad (40-27)$$

این معادله را می‌توان به آسانی برحسب چگالی جریان رسانش \mathbf{J} بیان کرد که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v} \quad (41-27)$$

که در آن \mathbf{J} در SI برحسب آمپر بر مترمربع است. بدین ترتیب، معادله ۴۰-۲۷ با جاگذاری \mathbf{v} از رابطه ۴۱-۲۷ به معادله زیر برای \mathbf{J} تبدیل می‌شود

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \gamma\mathbf{J} = \left(\frac{Ne^2}{m} \right) \mathbf{E} \quad (42-27)$$

در موردی که میدان اعمال شده موج هماهنگ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ باشد، انتظار داریم چگالی جریان با همین آهنگ تغییر کند و می‌نویسیم $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{-i\omega t}$. بنابراین، معادله ۲۷-۴۲ به صورت زیر در می‌آید

$$(-i\omega + \gamma)\mathbf{J} = \left(\frac{Ne^r}{m}\right)\mathbf{E} \quad (۴۳-۲۷)$$

در وضعیت ایستا یا DC که با $\omega = 0$ مشخص می‌شود، داریم

$$\mathbf{J} = \left(\frac{Ne^r}{m\gamma}\right)\mathbf{E} \quad (۴۴-۲۷)$$

در نتیجه، رسانندگی ایستایی σ که با قانون اهم

$$J = \sigma E \quad (۴۵-۲۷)$$

تعریف می‌شود با رابطه نظری زیر داده می‌شود

$$\sigma = \frac{Ne^r}{m\gamma} \quad (۴۶-۲۷)$$

چون معمولاً رسانندگی را اندازه‌گیری می‌کنند، معادله ۲۷-۴۳ را برحسب σ می‌نویسیم:

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\sigma}{1 - i\omega/\gamma}\right)\mathbf{E} \quad (۴۷-۲۷)$$

۲۷-۴ انتشار امواج نور در فلز

برای یک موج الکترومغناطیسی که در محیط رسانا منتشر می‌شود معادله‌های ماکسول ۲۷-۱۲ تا ۲۷-۱۵ صادق هستند. اگرچه در فلز بار آزاد وجود دارد، چگالی حجمی بار آزاد داخلی ρ_f صفر است. بار آزاد به اندازه‌ای حرکت می‌کند که در پاسخ به میدان اعمال شده سریعاً توزیع مجدد می‌یابد،

و در نتیجه چگالی بار موضعی ایجاد نمی‌شود. بنابراین، معادلات ماکسول مربوط عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (۴۸-۲۷)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۴۹-۲۷)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۵۰-۲۷)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \quad (۵۱-۲۷)$$

مانند سابق، داریم $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$ ، زیرا در اتحاد ۲۷-۲۳ باید قرار دهیم $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. بنابراین، با تاوگیری از معادله ۴۹-۲۷ به دست می‌آوریم

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right)$$

که در آن در آخرین مرحله از معادله ۵۱-۲۷ استفاده کرده‌ایم. با جاگذاری \mathbf{J} از معادله ۴۷-۲۷، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\sigma}{1 - i\omega/\gamma} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۵۲-۲۷)$$

برای امواج هماهنگ تختی که با $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ داده می‌شوند، با جاگذاری مشتق‌های فضایی و زمانی لازم در معادله ۵۲-۲۷ و پس از حل برای k^2 به دست می‌آوریم

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i \left(\frac{\sigma \omega \mu_0}{1 - i\omega/\gamma} \right) \quad (۵۳-۲۷)$$

که در آن تروایی خلأ μ_0 به علت استفاده از رابطه $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ ظاهر شده است. باز هم می‌بینیم که ثابت انتشار باید یک عدد مختلط باشد تا انتشار موج در فلز به طور مناسب توصیف شود.

۵-۲۷ عمق پوستی

قبل از پرداختن به مورد عامی که با معادله ۵۳-۲۷ توصیف می‌شود، مورد خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن بسامد ω تابش فرودی به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان رابطه زیر را یک

تقریب خوب بر معادله ۲۷-۵۳ گرفت

$$k^2 = i\omega\sigma\mu_0$$

با بیان i به صورت $e^{i\pi/2}$ و جذرگیری از دو طرف، به دست می آوریم

$$k = (1 + i) \left(\frac{\sigma\mu_0\omega}{2} \right)^{1/2} \quad (54-27)$$

اگر k را مانند سابق به صورت مختلط $\bar{k} = k_R + ik_I$ بنویسیم، می بینیم که ضرایب حقیقی و انگاری با رابطه زیر داده می شوند

$$k_R = k_I = \left(\frac{\sigma\mu_0\omega}{2} \right)^{1/2} \quad (55-27)$$

و برای ضرایب شکست حقیقی و انگاری داریم

$$n_R = \frac{c}{\omega} k_R = \left(\frac{c^2\sigma\mu_0}{2\omega} \right)^{1/2} = \left(\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (56-27)$$

و

$$n_I = \frac{c}{\omega} k_I = \left(\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (57-27)$$

اگر صورت مختلط k را در تابع موج هماهنگ تخت وارد کنیم، همچون در معادله ۲۷-۲۹ به دست می آوریم

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-k_I z} e^{i(k_R z - \omega t)}$$

عامل نمایی حقیقی $e^{-k_I z}$ توصیفگر جذب است. بنابراین، وقتی تابش تا عمق $z = 1/k_I$ نفوذ می کند، دامنه به $1/e$ مقداری که در سطح دارد کاهش می یابد. این فاصله خاص را با δ نشان می دهیم و عمق پوستی می نامیم. بنابراین،

$$\delta \equiv \frac{1}{k_I} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0\omega}} \quad (58-27)$$

بدیهی است که هر چه رسانا بهتر یعنی σ بزرگتر باشد δ کوچکتر است. به عنوان مثال، برای میکروموج ۳ سانتیمتری، عمق پوستی در مس، با رسانندگی $5.8 \times 10^7 / \Omega m$ ، تنها حدود $6.6 \times 10^{-5} \text{ cm}$ است.

۶-۲۷ بسامد پلازما

اکنون به مورد عام معادله ۲۷-۵۳ برمی گردیم و آن را بر حسب ضریب شکست مختلط می نویسیم:

$$n^2 = \left(\frac{c}{\omega k} \right)^2 = 1 + \frac{i\sigma c^2 \mu_0}{\omega(1 - i\omega/\gamma)}$$

که، با ضرب $i\gamma/i\gamma$ در جمله مختلط، به صورت زیر در می آید

$$n^2 = 1 - \frac{\mu_0 \sigma c^2 \gamma}{\omega^2 + i\omega\gamma} \quad (59-27)$$

صورت کسر در جمله دوم باید دارای ابعاد ω^2 باشد، و جذر آن را که با ω_p نشان می دهیم بسامد پلازما می نامند. بنابراین، با استفاده از معادله ۲۷-۴۶ و رابطه $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ داریم

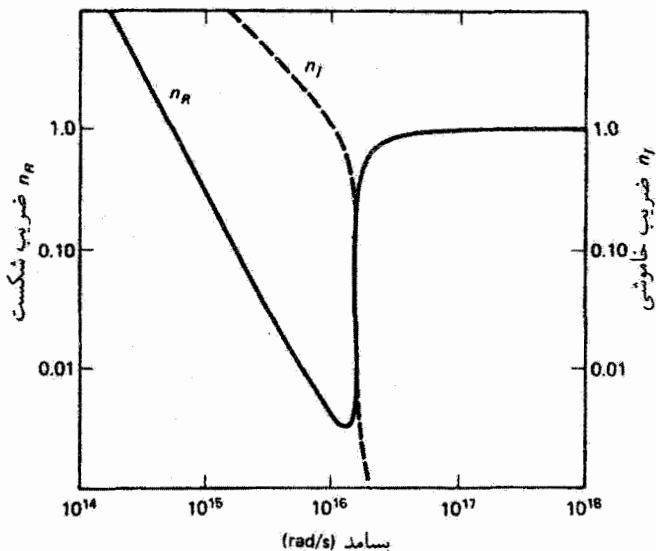
$$\omega_p^2 = \mu_0 c^2 \gamma \sigma = \mu_0 c^2 \gamma \left(\frac{Ne^2}{m\gamma} \right) = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \quad (60-27)$$

بسامد پلازما یک بسامد تشدید برای نوسانهای آزاد الکترونها حول مکان تعادل آنها است. با جاگذاری در معادله ۲۷-۵۹، به دست می آوریم

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \quad (61-27)$$

که نشان می دهد بسامد پلازما یک بسامد بحرانی است که مقدار آن تعیین کننده حقیقی یا مختلط بودن ضریب شکست است. این را می توان با چشمپوشی از جمله γ ، که برای بسامدهای به اندازه کافی زیاد ($\omega \gg \gamma$) موجه است، مشاهده کرد. در این مورد، معادله ۲۷-۶۱ به صورت زیر در می آید

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (62-27)$$



شکل ۳-۲۷ وابستگی ضریب شکست n_R و ضریب خاموشی n_I به بسامد زاویه‌ای برای مس. مقادیر مفروض عبارت‌اند از $\omega_p = 1.63 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ و $\gamma = 4.1 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$. نقطه تلاقی دو منحنی بر بسامد پلاسما منطبق است.

اکنون از این معادله دیده می‌شود که به ازای $\omega < \omega_p$ ضریب شکست فلز مختلط است و تابش تضعیف می‌شود، در حالی که به ازای $\omega > \omega_p$ ضریب شکست حقیقی است و فلز برای تابش شفاف است. با استفاده از معادله ۳-۲۷، می‌توان مانند سابق دو معادله به دست آورد که قسمتهای حقیقی و انگاری ضریب شکست از آنها محاسبه می‌شوند. در واقع، داریم

$$n^2 = (n_R + in_I)^2 = (n_R^2 - n_I^2) + i(2n_R n_I) = 1 - \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \right) \quad (۴۳-۲۷)$$

و با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و همچنین انگاری به دست می‌آوریم

$$n_R^2 - n_I^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \right) \quad (۴۴-۲۷)$$

$$2n_R n_I = \frac{\gamma}{\omega} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \right) \quad (۴۵-۲۷)$$

از حل همزمان این معادله‌ها، n_R و n_I به صورت توابعی از ω به دست می‌آیند. شکل ۳-۲۷ منحنیهای مربوط به n_R و n_I را به ازای مقادیر مفروض ω_p و γ برای مس نشان می‌دهد. این

منحنیها، چنانکه از معادله ۶۴-۲۷ واضح است، یکدیگر را در $\omega = (\omega_p^2 - \gamma^2)^{1/2}$ قطع می‌کنند. چون نوعاً $\gamma \gg \omega_p$ ، این تلاقی در $\omega \cong \omega_p$ روی می‌دهد، و ناحیه‌های شفاف و کدر (و بسیار بازتابنده) را از هم جدا می‌کند. بسامد پلاسما برای فلزات در ناحیه مرئی تا فرابنفش نزدیک قرار دارد، و در نتیجه فلزات برای تابش مرئی کدر و برای تابش فرابنفش در بسامدهای به اندازه کافی زیاد شفاف هستند.

بین عایق خوب و فلز خوب، که جداگانه بررسی کرده‌ایم، موادی مانند نیمرساناها وجود دارند که هیچ‌یک از این موارد حدی برای توضیح خواص اپتیکی آنها کافی نیست. خواص اپتیکی این نوع مواد سهمهای قابل ملاحظه‌ای هم از بارهای آزاد و هم از بارهای مقید دارند و در نتیجه باید هر دو نوع رفتار را در بررسی آنها به حساب آورد.

مسائل

۱-۲۷ به‌طور کلی، رابطه "ثابت الکتريکی" K ، ثابت دی‌الکتريک، با ضریب شکست به‌صورت زیر است

$$K = n^2$$

(الف) نشان دهید اگر K_R و K_I قسمتهای حقیقی و انگاری ثابت دی‌الکتريک باشند آنگاه

$$n_R = \left[\frac{K_R + (K_R^2 + K_I^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}$$

و

$$n_I = \left[\frac{-K_R + (K_R^2 + K_I^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}$$

(ب) n_I و n_R را برای دی‌الکتريک برحسب K_I ، در بسامدهای به اندازه کافی زیاد به‌طوری که $K_I = K_R$ ، به‌دست آورید.

۲-۲۷ نشان دهید در یک محیط تقریباً شفاف، رابطه ضریب خاموشی با رسانندگی و ضریب شکست به‌صورت زیر است

$$\alpha = \frac{3\sqrt{3}\sigma}{n_R}$$

۳-۲۷ یک برنامه رایانه‌ای برای محاسبه و یا ترسیم قسمتهای حقیقی و انگاری ضریب شکست یک دی‌الکتریک با معلوم گرفتن پارامتر اصطکاک γ ، بسامد تشدید ω و چگالی دوقطبی N بنویسید. برنامه خود را با استفاده از شکل ۲-۲۷ واریسی کنید.

۴-۲۷ فرض کنید آلومینیم به‌ازای هر اتم یک الکترون آزاد دارد و رسانندگی ایستایی آن $3.54 \times 10^7 / \Omega m$ است.

(الف) ثابت اصطکاک γ

(ب) بسامد پلاسما، و

(ج) قسمتهای حقیقی و انگاری ضریب شکست را در 550 nm به‌دست آورید.

۵-۲۷ نشان دهید معادله ۵۸-۲۷ برای عمق پوستی در بسامد کم یک تقریب مناسب به‌ازای $\omega \ll \omega_p$ و $\sigma / \epsilon_0 \ll \omega$ است.

۶-۲۷ عمق پوستی در مس را برای تابش (الف) 60 Hz و (ب) 3 m محاسبه کنید. ابتدا مطمئن شوید که تقریبهای مسئله ۵-۲۷ برقرارند. (برای مس: $\sigma = 5.76 \times 10^7 / \Omega m$).

۷-۲۷ عمق پوستی

(الف) آلومینیم با رسانندگی $3.54 \times 10^7 / \Omega m$ و

(ب) آب دریا با رسانندگی $4.3 / \Omega m$ را برای امواج رادیویی 60 kHz مقایسه کنید.

۸-۲۷ عمق پوستی یک موجبر نقره‌ای را برای میکروموج 10 سانتیمتری محاسبه کنید. رسانندگی نقره $3 \times 10^7 / \Omega m$ است. توضیح دهید چرا موجبر برنجی نقره‌اندود ارزانتر همین کارایی را دارد.

۹-۲۷ چگالی انرژی نور سرخ با طول موج 660 nm با عبور از 342 cm آب دریا به یک‌چهارم مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد.

(الف) ضریب جذب آب دریا را برای این نور سرخ به‌دست آورید.

(ب) در چه عمقی این نور سرخ به 1% چگالی انرژی اولیه خود کاهش می‌یابد.

۱۰-۲۷ یک برنامه رایانه‌ای برای محاسبه و یا ترسیم قسمتهای حقیقی و انگاری ضریب شکست یک فلز یا معلوم گرفتن پارامتر اصطکاک γ و بسامد پلاسما بنویسید. نتایج خود را با مقایسه با شکل ۳-۲۷ واریسی کنید.

۱۱-۲۷ مفاد نظری ثابتهای A ، B و C را که در معادله پاشیدگی کوشی به‌کار برده شده‌اند تعیین کنید.

- [1] Feynman; Richard P., Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1975. Ch. 31.
- [2] Sommerfeld, Arnold. *Optics*. New York: Academic Press, 1964. Ch. 3.
- [3] Javan, Ali. "The Optical Properties of Materials." *Scientific American* (Sept. 1967): 238.
- [4] Longhurst, R. S. *Geometrical and Physical Optics*, 2d ed. New York: John Wiley and Sons, 1967. Ch. 20.
- [5] Strong, John. *Concepts of Classical Optics*. San Francisco: W. H. Freeman and Company Publishers, 1958. Ch. 4.
- [6] Rossi, Bruno. *Optics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1957. Ch. 8.

برای مطالعه بیشتر

مقاله‌های اپتیک از ساینتیفیک آمریکا (به ترتیب زمانی)

- Kirkpatrick, Paul. "X-ray Microscope." (Mar. 1949): 44.
- Evans, Ralph M. "Seeing Light and Color." (Aug. 1949): 52.
- Wald, George. "Eye and Camera." (Aug. 1950): 32.
- Wilson, Albert G. "The Big Schmidt." (Dec. 1950): 34.
- Kelner, Albert. "Revival by Light." (May 1951): 22.
- Muller, Erwin W. "A New Microscope." (May 1952): 58.
- Ingalls, Albert G. "Ruling Engines." (June 1952): 45.
- James, T. H. "Photographic Development." (Nov. 1952): 30.
- LaMer, Victor K., and Milton Kerker. "Light Scattered by Particles." (Feb. 1953): 69.
- Waterman, Talbot H. "Polarized Light and Animal Navigation." (July 1955): 88.
- Rush, J. H. "The Speed of Light." (Aug. 1955): 62.
- Sperry, R. W. "The Eye and the Brain." (May 1956): 48.
- Milne, L. J., and M. J. Milne. "Electrical Events in Vision." (Dec. 1956): 113.
- Gordon, James P. "The Maser." (Dec. 1958): 42.
- Land, Edwin H. "Experiments in Color Vision." (May 1959): 84.
- Wald, George. "Life and Light." (Oct. 1959): 92.
- McClain, Edward, Jr. "The 600-Foot Radio Telescope." (Jan. 1960): 45.
- Bloom, Arnold L. "Optical Pumping." (Oct. 1960): 72.
- Kapany, Narinder S. "Fiber Optics." (Nov. 1960): 72.
- Arnon, Daniel. "The Role of Light in Photosynthesis." (Nov. 1960): 104.
- Butler, W. L., and R. J. Downs. "Light and Plant Development." (Dec. 1960): 56.
- Hess, Eckhard H. "Shadows and Depth Perception." (Mar. 1961): 138.
- Schawlow, Arthur L. "Optical Masers." (June 1961): 52.
- Pritchard, Roy M. "Stabilized Images on the Retina." (June 1961): 72.
- Evans, Ralph M. "Maxwell's Color Photograph." (Nov. 1961): 118.
- Wallach, Hans. "The Perception of Neutral Colors." (Jan. 1963): 107.
- Schawlow, Arthur L. "Advances in Optical Masers." (July 1963): 34.

- Giordmaine, J. A. "The Interaction of Light with Light." (Apr. 1964): 38.
- Leith, Emmett N., and Juris Upatnieks. "Photography by Laser." (June 1965): 24.
- Miller, Stewart E. "Communication by Laser." (Jan. 1966): 19.
- Pimentel, George C. "Chemical Lasers." (Apr. 1966): 32.
- Rock, Irvin, and Charles Harris. "Vision and Touch." (May 1967): 96.
- Morehead, Fred F., Jr. "Light-Emitting Semiconductors." (May 1967): 108.
- Hubbard, Ruth, and Allen Kropf. "Molecular Isomers in Vision." (June 1967): 64.
- Lempicki, Alexander, and Harold Samelson. "Liquid Lasers." (June 1967): 80.
- Javan, Ali. "The Optical Properties of Materials." (Sept. 1967): 238.
- Pennington, Keith S. "Advances in Holography." (Feb. 1968): 40.
- Hartmann, Sven R. "Photon Echoes." (Apr. 1968): 32.
- Nelson, Donald F. "The Modulation of Laser Light." (June 1968): 17.
- Patel, C. K. N. "High-Power Carbon Dioxide Lasers." (Aug. 1968): 22.
- Feiberg, Gerald. "Light." (Sept. 1968): 50.
- Weisskopf, Victor F. "How Light Interacts with Matter." (Sept. 1968): 60.
- Connes, Pierre. "How Light is Analyzed." (Sept. 1968): 72.
- Smith, F. Dow. "How Images Are Formed." (Sept. 1968): 96.
- Jones, R. Clark. "How Images Are Detected." (Sept. 1968): 110.
- Schawlow, Arthur L. "Laser Light." (Sept. 1968): 120.
- Herriott, Donald R. "Applications of Laser Light." (Sept. 1968): 140.
- Oster, Gerald. "The Chemical Effects of Light." (Sept. 1968): 158.
- Hendricks, Sterling B. "How Light Interacts with Living Matter." (Sept. 1968): 174.
- Fitch, James Marston. "The Control of the Luminous Environment." (Sept. 1968): 190.
- Neisser, Ulric. "The Processes of Vision." (Sept. 1968): 204.
- Sorokin, Peter. "Organic Lasers." (Feb. 1969): 30.
- Michael, Charles R. "Retinal Processing of Visual Images." (May 1969): 104.
- Metherell, Alexander F. "Acoustical Holography." (Oct. 1969): 36.
- Vali, Victor. "Measuring Earth Strains by Laser." (Dec. 1969): 88.
- Berns, Michael H., and Donald E. Rounds. "Cell Surgery by Laser." (Feb. 1970): 98.
- Faller, James E., and E. Joseph Wampler. "The Lunar Laser Reflector." (Mar. 1970): 38.
- Drexhage, Karl H. "Monomolecular Layers and Light." (Mar. 1970): 108.
- Heilmeyer, George H. "Liquid Crystal Display Devices." (Apr. 1970): 100.
- Young, Richard W. "Visual Cells." (Oct. 1970): 80.
- Burbidge, E. Margaret, and C. R. Lynds. "The Absorption Lines of Quasi-Stellar Objects." (Dec. 1970): 22.
- Baumeister, Philip, and Gerald Pincus. "Optical Interference Coatings." (Dec. 1970): 58.
- Crewe, Albert V. "A High-Resolution Scanning Electron Microscope." (Apr. 1971): 26.
- Lubin, Moshe J., and Arthur P. Fraas. "Fusion by Lasers." (June 1971): 21.
- Panish, Morton B., and Izuo Hayashi. "A New Class of Diode Lasers." (July 1971): 32.
- Ingham, M. F. "The Spectrum of the Airglow." (Jan. 1972): 78.

- Ashkin, Arthur. "The Pressure of Laser Light." (Feb. 1972): 62.
- Kellermann, K. I. "Intercontinental Radio Astronomy." (Feb. 1972): 72.
- Busignies, Henri. "Communication Channels." (Sept. 1972): 98.
- Silfvast, William T. "Metal-Vapor Lasers." (Feb. 1973): 88.
- Cook, J. S. "Communication by Optical Fiber." (Nov. 1973): 28.
- Feld, M. S., and V. S. Letokhov. "Laser Spectroscopy." (Dec. 1973): 69.
- Tien, P. K. "Integrated Optics." (Apr. 1974): 28.
- Metelli, Fabio. "The Perception of Transparency." (Apr. 1974): 90.
- Emmett, John L., John Nuckolls, and Lowell Wood. "Fusion Power by Laser Implosion." (June 1974): 24.
- Campbell, Fergus W., and Lamberto Maffei. "Contrast and Spatial Frequency." (Nov. 1974): 106.
- Govindjee, and Rajni Govindjee. "The Absorption of Light in Photosynthesis." (Dec. 1974): 68.
- Wurtmann, Richard J. "The Effects of Light on the Human Body." (July 1975): 68.
- Beck, Jacob. "The Perception of Surface Color." (Aug. 1975): 62.
- Ross, John. "The Resources of Binocular Perception." (Mar. 1976): 80.
- Wehner, Rudiger. "Polarized Light Navigation by Insects." (July 1976): 106.
- Price, William H. "The Photographic Lens." (Aug. 1976): 72.
- Leith, Emmett N. "White-Light Holograms." (Oct. 1976): 80.
- Zare, Richard N. "Laser Separation of Isotopes." (Feb. 1977): 86.
- Nussenzveig, H. Moyses. "The Theory of the Rainbow." (Apr. 1977): 116.
- HorrIDGE, G. Adrian. "The Compound Eye of Insects." (July 1977): 108.
- Boyle, W. S. "Light-Wave Communications." (Aug. 1977): 40.
- Land, Edwin H. "The Retinex Theory of Color Vision." (Dec. 1977): 108.
- Dickinson, Dale F. "Cosmic Masers." (June 1978): 90.
- Spiller, Eberhard, and Ralph Feder. "The Optics of Long-Wavelength X Rays." (Nov. 1978): 70.
- Land, Michael F. "Animal Eyes with Mirror Optics." (Dec. 1978): 88.
- Yariv, Amnon. "Guided Wave Optics." (Jan. 1979): 64.
- Ronn, Avigdor M. "Laser Chemistry." (May 1979): 114.
- Quate, Calvin. "Acoustic Microscope." (Oct. 1979): 62.
- Nassau, Kurt. "The Causes of Color." (Oct. 1980): 124.
- Thomas, D. E. "Mirror Images." (Dec. 1980): 206.
- Yellott, John I., Jr. "Binocular Depth Inversion." (July 1981): 148.
- Tsipis, Kosta. "Laser Weapons." (Dec. 1981): 51.
- LaRocca, Aldo V. "Laser Applications in Manufacturing." (Mar. 1982): 94.
- Bahcall, J. N., and L. Spitzer, Jr. "The Space Telescope." (July 1982): 40.
- Abraham, Eitan, et al. "The Optical Computer." (Feb. 1983): 85.
- Poggio, Tomaso. "Vision by Man and Machine." (Apr. 1984): 106.

- Mandoli, Dina F., and Winslow R. Briggs. "Fiber Optics in Plants." (Aug. 1984): 90.
- Habing, Harm J., and Gerry Neugebauer. "The Infrared Sky." (Nov. 1984): 48.
- Tsang, W. T. "The C³ Laser." (Nov. 1984): 148.
- Brookner, Eli. "Phased-Array Radars." (Feb. 1985): 94.
- Shkunov, Vladimir V., and Boris Ya. Zel'dovich. "Optical Phase Conjugation." (Dec. 1985): 54.
- Pepper, David M. "Applications of Optical Phase Conjugation." (Jan. 1986): 74.
- Hoskin, Michael. "William Herschel and the Making of Modern Astronomy." (Feb. 1986): 106.
- Anderson, Dana Z. "Optical Gyroscopes." (Apr. 1986): 94.
- Ramachandran, Vilayanur S., and Stuart M. Anstis. "The Perception of Apparent Motion." (June 1986): 102.
- Craxton, R. Stephen, Robert L. McCrory, and John M. Soures. "Progress in Laser Fusion." (Aug. 1986): 68.
- Brou, Philippe, Thomas R. Sciascia, Lynette Linden, and Jerome Y. Lettvin. "The Colors of Things." (Sept. 1986): 84.
- Rowell, J. M. "Photonic Materials." (Oct. 1986): 146.
- Abu-Mostafa, Yaser S., and Demetri Psaltis. "Optical Neural Computers." (Mar. 1987): 88.
- Schnapf, Julie L., and Denis A. Baylor. "How Photoreceptor Cells Respond to Light." (Apr. 1987): 40.
- Winick, Herman. "Synchrotron Radiation." (Nov. 1987): 88.
- Livingstone, Margaret S. "Art, Illusion and the Visual System." (Jan. 1988): 78.
- Slusher, Richard E., and Bernard Yurke. "Squeezed Light." (May 1988): 50.
- Loretz, Jane F., and George H. Handelman. "How the Human Eye Focuses." (July 1988): 92.
- Letokhov, Vladilen S. "Detecting Individual Atoms and Molecules with Lasers." (Sept. 1988): 54.
- Nathans, Jeremy. "The Genes for Color Vision." (Feb. 1989): 42.
- Katzir, Abraham. "Optical Fibers in Medicine." (May 1989): 120.
- Bracewell, Ronald N. "The Fourier Transform." (June 1989): 86.
- Romer, Grant B., and Jeannette Delamoire. "The First Color Photographs." (Dec. 1989): 88.
- Pepper, David M., Jack Feinberg, and Nicolai V. Kukhtarev. "The Photorefractive Effect." (Oct. 1990): 62.
- Howells, Malcolm R., Janos Kirz, and William Sayre. "X-ray Microscopes." (Feb. 1991): 88.
- Winston, Roland. "Nonimaging Optics." (Mar. 1991): 76.
- Berns, Michael W. "Laser Surgery." (June 1991): 84.
- Robinson, Glen M., David M. Perry, and Richard W. Peterson. "Optical Interferometry of Surfaces." (July 1991): 66.
- Jewell, Jack L., James P. Harbison, and Axel Scherer. "Microlasers." (Nov. 1991): 86.
- Desurvire, Emmanuel. "Lightwave Communications: The Fifth Generation." (Jan. 1992): 114.

جواب مسائل برگزیده

فصل ۱

- ۱-۱ (الف) $m \times 10^{-22} \times 66$ (ب) 39 \AA
 ۲-۱ $W \times 10^{-17} \times 36$
 ۳-۱ 310 و 77 eV
 ۴-۱ 24 \AA ؛ 0.24 eV ؛ $27 \times 10^{-22} \text{ kg m/s}$
 ۹-۱ (الف) $10^{-18} \times 149$ (ب) $10^{-16} \times 45$ (ج) $10^{-16} \times 22$
 ۱۰-۱ $10^{17} \times 375$

فصل ۲

- ۱-۲ 10^{12} Hz (۳۹ تا ۷۹)
 ۲-۲ (الف) 2050 lm (ب) 398 W/sr ؛ 136 cd (ج) 10^5 W/m^2 ؛ 10^5 lm/m^2 (د) 995 W/m^2 ؛ 408 lx (ه) 195 W ؛ 803 lm ؛ 0.8
 ۳-۲ (الف) He-Cd حدود 3 بار روشنتر به نظر می‌رسد. (ب) حدود 2.4 mW
 ۴-۲ (الف) 900 cd (ب) $(\text{lx یا}) 85.4 \text{ lm/m}^2$
 ۵-۲ $155 : 1055$
 ۶-۲ 320 lx
 ۷-۲ (الف) $10^4 \text{ cd/m}^2 \times 17$ (ب) $2\pi L$
 ۸-۲ 97 lm ؛ 0.97
 ۱۱-۲ 5800 K
 ۱۲-۲ (الف) 4830 \mu m ؛ 0.4830 eV (ب) 756 W ؛ 0.756 eV

۴۶۲٫۵ nm؛ ۶۲۶۶ K ۱۳-۲

۶۱۰۵ K ۱۴-۲

فصل ۳

$$t = (\sum_i n_i x_i) / c \quad ۱-۳$$

$$۱٫۲۵(x^2 + y^2) + ۷۰(x^2 + y^2)^{1/2} - ۱۳۵x + ۸۰۰ = ۰ \quad ۲-۳$$

۴٫۰۰ mm ۳-۳

۴-۳ ۹۰ cm، در حالی که لبه بالایی آینه در ارتفاع میان فاصله چشم شخص و رأس سر واقع است

۵-۳ ۴۵° خارج می شود

۶-۳ بازتاب از سطح پایین: ۱۶۰

۱٫۵۵ ۷-۳

۱٫۱۵۳ cm ۸-۳

۸ cm ۹-۳

۱۰-۳ نور از حباب در سطح تخت هم مستقیماً و هم پس از بازتاب از آینه کروی شکسته می شود؛

۱۰ cm و ۳٫۳۳ cm

۷۵ cm؛ ۱۲٫۵ cm ۱۱-۳

۱۰ cm پشت سطح نزدیک: ۳× ۱۲-۳

۱۳-۳ الف) $f = n_1 R / (n_2 - n_1)$ (ب) $R > 0$ (کوز) و $R < 0$ (کاو)

۱۴-۳ الف) مرکز، ۴/۳ اندازه واقعی (ب) ۶٫۴ cm پشت شیشه، ۸/۷ اندازه واقعی

۱۵-۳ مجازی، معکوس، ۱۵ cm از دریچه، دو برابر اندازه شیء

۱۳٫۰ cm ۱۶-۳

-۲۰ cm یا +۲۰ cm ۱۷-۳

۱۸-۳ ۲۲٫۵ cm پشت عدسی؛ ۱٫۵۰ برابر اندازه واقعی

۱۹-۳ الف) ۶٫۷ cm- (ب) ۱۰ cm یا ۶۰ cm-

-۵۰ cm ۲۰-۳

۲۱-۳ ۳٫۳۳ mm جلو شیئی؛ مستقیم و بزرگتر از شیء

۲۲-۳ تصویر نهایی بین عدسی و آینه در f (۲۱/۳۴) از عدسی، مجازی، معکوس، و ۱/۱۷

اندازه اولیه

۲۳-۳ الف) ۳٫۳۳ cm، ۲× (ب) ۸٫۶۶۷ cm، ۲× (ج) ۷٫۳۷ cm، ۳۱۶×-

۱٫۶۳ ۲۴-۳

۲۵-۳ ۱۵° cm و ۶۰° cm معکوس

۲۶-۳ (الف) ۱۰، ۵، ۲۵- دیوپتر؛ ۱۲٫۵ دیوپتر (ب) $۸٫۳۳ \text{ m}^{-۱}$ ، $۴٫۱۷ \text{ m}^{-۱}$ ؛ ۲۴ cm

۳۰-۳ $f_1/f_2 = n/(n-1)$

۳۱-۳ در $s = s' = 2f$

۳۲-۳ (ب) $\sum_i (t_i \tan \theta_i)$

۳۳-۳ فرود بر وجه تخت: ۸ cm پشت عدسی؛ فرود بر وجه خمیده: ۵٫۳۳ cm پشت عدسی

۳۴-۳ $+۴۰ \text{ cm}$ ، $+۳۰ \text{ cm}$ ؛ -۳۰ cm ، -۴۰ cm

۳۵-۳ ۷٫۵ km

فصل ۴

۱-۴ $s = -۰٫۹۸ \text{ cm}$ ؛ $r = ۲٫۹۱ \text{ cm}$ ؛ $f_2 = ۴۶٫۶۶ \text{ cm}$ ؛ $f_1 = -۶۲٫۰۵ \text{ cm}$

۲-۴ (الف) $s = -۰٫۷۳ \text{ cm}$ ؛ $r = ۱٫۱۷ \text{ cm}$ ؛ $f_1 = ۱۴٫۰۶ \text{ cm} = -f_2$

(ب) ۸٫۹۲ cm سمت چپ مرکز عدسی

(ج) ۹٫۷۸ cm سمت چپ مرکز عدسی، با ۹٫۶٪ خطا

۳-۴ تصویر مستقیم و مجازی در ۶٫۶۷ cm سمت چپ رأس دوم، ارتفاع ۱٫۴ cm

۴-۴ $s = -۱٫۱۶ \text{ cm}$ ؛ $r = ۰٫۴۰۰ \text{ cm}$ ؛ $f_2 = ۱۵٫۳۱ \text{ cm}$ ؛ $f_1 = -۱۱٫۵۱ \text{ cm}$ ؛ $s =$

$h_i = -۱٫۱۸ \text{ cm}$ ؛ H_2 از $s_2 = ۱۸٫۹ \text{ cm}$ ؛ $w = ۲٫۶۴ \text{ cm}$ ؛ $v = ۴٫۲۰ \text{ cm}$

۵-۴ (الف) $v = ۱۰ \text{ cm} = -w$ ؛ $r = ۱۰ \text{ cm} = -s$ ؛ $f_1 = -۲۰٫۱۵ \text{ cm} = -f_2$

(ب) تصویر معکوس و حقیقی، ۶٫۱۳۸ cm از مرکز کره و $\times ۲٫۰۵$

۶-۴ (الف) $\alpha = -۵٫۷۳^\circ$ ؛ $y = ۱ \text{ cm}$

(ب) $D = ۲/۳$ ؛ $C = -۱/۱۰$ ؛ $B = ۱۰/۳ + ۲x/۳$ ؛ $A = ۱ - x/۱۰$

(ج) $x = ۱۰ \text{ cm}$

۸-۴ $s = -۲٫۱۷ \text{ cm}$ ؛ $r = -۰٫۸۳ \text{ cm}$ ؛ $q = +۲٫۱۷ \text{ cm}$ ؛ $p = -۴٫۱۷ \text{ cm}$

$f_2 = ۴٫۳۳ \text{ cm}$ ؛ $f_1 = -۳٫۳۳ \text{ cm}$

۹-۴ $r = -۱۰ \text{ cm}$ ؛ $q = +۱۰ \text{ cm}$ ؛ $p = -۳۰ \text{ cm}$ ؛ $f_2 = +۲۰ \text{ cm}$ ؛ $f_1 = -۲۰ \text{ cm}$

$s = -۱۰ \text{ cm}$

۱۰-۴ $p = -۱۸٫۳ \text{ cm}$ ؛ $q = +۱۸٫۷ \text{ cm}$ ؛ $f_2 = +۲۳٫۳ \text{ cm}$ ؛ $f_1 = -۱۶٫۷ \text{ cm}$

$s = -۴٫۶۷ \text{ cm}$ ؛ $r = -۱٫۶۷ \text{ cm}$

۱۱-۴ (الف) $A = -۱/۲$ ؛ $B = ۰$ ؛ $C = -۱/۱۰$ ؛ $D = -۲$ (ب) صفحه‌های ورودی و

خروجی در مکانهای شیء و تصویر همیوخ واقع می‌شوند؛ A با بزرگنمایی خطی یکی است.

۱۲-۴ الف) $s = -10$, $r = 10$, $f_2 = +15$, $f_1 = -15$, $q = +5$, $p = -5$ همه بر حسب cm (ب) 5 cm پشت گوی

۱۳-۴ الف) عناصر ماتریس دستگاه: $A = 16/15$, $B = 2/3$, $C = -1/150$, $D = 14/15$

(ب) همه بر حسب cm $f_2 = 150$, $f_1 = -150$, $r = s = 10$, $q = 160$, $p = -140$

۱۴-۴ الف) $A = 0.9764$, $B = 0.9676$, $C = 0.009182$, $D = 1.033$
 (ب) $f_1 = 1089$ cm, $f_2 = -1089$ cm, $p = 112.5$ cm, $q = -106.3$ cm
 $r = 362$ cm, $s = 257$ cm
 (ج) -100 cm

۱۵-۴ الف) $A = 2/3 - s'/6$, $B = 25/3 + 2 - ss'/6 + s'$, $C = -1/6$, $D = -s/6 + 1$

(ب) $m = 2/3 - s'/6$; $s' = 6 \frac{f}{v}$ cm (ج) $s' = (4s + 12)/(s - 6)$; $m = -0.429$

(د) $s' = 4$ cm منطبق بر صفحه کانونی دوم؛ $s = 6$ cm منطبق بر صفحه کانونی اول

۱۶-۴ $A = 0.93935$, $B = 22.2212$, $C = -0.009284$, $D = 0.8448$
 $r = v = 1672$ mm, $s = w = -653$ mm, $p = -9099$ mm
 $q = 1018$ mm, $f_1 = -f_2 = -10771$ mm؛ صفحه فیلم در فاصله $q = 1012$ mm پشت سطح آخرین عدسی است.

$$B = \frac{nt}{n_L}, A = \frac{n - n_L}{n_L R_1} t + 1 \quad 17-4$$

$$C = \frac{n_L - n'}{n' R_2} - \frac{n_L - n}{n' R_1} - \frac{(n_L - n)(n_L - n')}{n' n_L} \frac{t}{R_1 R_2}$$

$$D = \frac{n}{n'} + \left(\frac{n_L - n'}{n' R_2} \right) \frac{nt}{n_L}$$

۲۱-۴ برای $\alpha = 0^\circ$, $s' = 3180$ cm و $\alpha' = -23.51^\circ$ ؛ برای $\alpha = -20^\circ$
 $s' = 16710.4$ cm و $\alpha' = 67.81^\circ$

۲۲-۴ $s' = -49525$ cm, $\alpha' = 3.271^\circ$, $Q = 2912$

۲۳-۴ برای $h = 1$ mm, $s' = 9820$ mm, $h = 5$ mm؛ برای $\alpha' = -0.567^\circ$
 $s' = 10245$ mm, $\alpha' = -2.723^\circ$

فصل ۵

- ۲-۵ $s' = 0, +8, +1474 \text{ cm}$ (د)
- ۳-۵ $b_z = +3791 \text{ mm}; b_y = +1722 \text{ mm}; a = +0.954 \text{ mm}$
- ۵-۵ $b_z = 379 \text{ mm}; b_y = 0.49 \text{ mm}; a = 0.15 \text{ mm}$
- ۶-۵ (الف) 0.296 mm (ب) 0.21 mm
- ۷-۵ (الف) 0.60 mm (ب) 1.2 mm
- ۸-۵ $b_y = 0.15 \text{ mm}; b_z = 1.48 \text{ mm}$
- ۹-۵ $b_z = 0.974 \text{ mm}$ (در $h = 1 \text{ cm}$)، 3.84 mm (در $h = 2 \text{ cm}$)، 8.44 mm (در $h = 3 \text{ cm}$)، 14.53 mm (در $h = 4 \text{ cm}$) و 21.81 mm (در $h = 5 \text{ cm}$)
- ۱۰-۵ $b_y = 0.970 \text{ mm}; b_z = 1.82 \text{ cm}$
- ۱۲-۵ برای $\sigma = 0.7$ ، $r_1 = 17.65$ و $r_2 = -100 \text{ cm}$ برای $\sigma = 3$ ، $r_1 = 7.50$ و $r_2 = 150 \text{ cm}$
- ۱۳-۵ $r_2 = -3375 \text{ cm}$ ، $r_1 = 1862 \text{ cm}$
- ۱۴-۵ $\sigma = +0.714$ سی بهینه، نزدیکتر به $+1$ تا به -1
- ۱۵-۵ (الف) $+0.714$ (ب) 17.5 cm ؛ $r_1 = 17.5 \text{ cm}$ ؛ $r_2 = -105 \text{ cm}$ (ج) -0.714 ، با عدسی وارونه
- ۱۶-۵ (الف) 0.8 (ب) 16.7 cm ؛ $r_1 = 16.7 \text{ cm}$ ؛ $r_2 = -150 \text{ cm}$ (ج) -0.8 ، با عدسی وارونه
- ۱۷-۵ $+20$ و -20
- ۱۸-۵ همان جوابها
- ۱۹-۵ -17.7 cm
- ۲۰-۵ (الف) $R = 15.7 \text{ cm}$ (ب) $f_t = -3.476 \text{ cm}$
- ۲۱-۵ $r_{11} = 8.5168 \text{ cm}$ ؛ $r_{22} = -434.89 \text{ cm}$ ؛ $f_D = 20.0000 \text{ cm}$
- ۲۲-۵ (الف) $r_{11} = 3.4535 \text{ cm}$ ؛ $r_{22} = -12.6576 \text{ cm}$ ؛ $f_C = 20.0096 \text{ cm}$ ؛ $f_F = 20.0096 \text{ cm}$
- (ب) $f_D = 5.0000 \text{ cm}$ ؛ $f_C = 5.0026 \text{ cm}$ ؛ $f_F = 5.0026 \text{ cm}$
- (ج) $P_{1D} = 0.3695 \text{ cm}^{-1}$ ؛ $P_{2D} = -0.1695 \text{ cm}^{-1}$ ؛ $\Delta_{1D} = 0.1802$
- (د) $\Delta_{2D} = 0.3928$ بله
- ۲۳-۵ (الف) $r_{11} = -5.2415 \text{ cm}$ ؛ $r_{22} = 53.1840 \text{ cm}$ (ب) $f_{1D} = -4.5770 \text{ cm}$
- (ج) $f_{2D} = 8.4399 \text{ cm}$ ؛ $f_D = -10.0000 \text{ cm}$ ؛ $f_C = -10.0050 \text{ cm}$ ؛ $f_F = -10.0050 \text{ cm}$

فصل ۶

۱-۶ مردمک ورودی مانع روزنه‌ای است؛ مردمک خروجی 3.33 cm جلو عدسی، با گشودگی 3.33 cm ؛ تصویر 10 cm پشت عدسی، معکوس و به طول 2 cm .

۲-۶ مردمک خروجی مانع روزنه‌ای است؛ مردمک ورودی 4.29 cm پشت عدسی، با گشودگی 3.43 cm ؛ تصویر 10.5 cm پشت عدسی، معکوس و به طول 3 cm .

۳-۶ مردمک ورودی مانع روزنه‌ای است؛ مردمک خروجی 12 cm جلو عدسی، با گشودگی 6 cm ؛ تصویر 10.5 cm پشت عدسی، معکوس و به طول 1.5 cm .

۴-۶ (ب) 20 cm سمت راست L_2 (ج) هر دو در L_1 (د) 8.57 cm پشت L_2 و با قطر $\frac{4}{7} \text{ cm}$ (ه) مانع میدانی در A ، دریچه ورودی در صفحه شیء با قطر 1 cm ، دریچه خروجی در صفحه تصویر با قطر 1 cm (و) 2.86°
 ۵۳' ۶-۶

۷-۶ (الف) کران: $A = 1.511$ ، $B = 4240 \text{ nm}^2$ ، $n_D = 1.523$ ؛ فلینت: $A = 1.677$ ، $n_D = 1.715$ ، $B = 13190 \text{ nm}^2$ ؛ فلینت: $1.6146 \times 10^{-5} \text{ nm}^{-1}$ ؛ فلینت: 1.99 \AA ، 3.110 \AA ؛ کران: (ج) $1.290 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$ ؛ فلینت: 1.961 \AA ، 9.675 \AA ؛ کران: (ب) 1.555 ، $A = 1.6205$ ، $B = 60737 \text{ nm}^2$ ؛ 1.12 m (د) $4.297 \times 10^{-5} \text{ nm}^{-1}$
 ۱۹۰۹ ۹-۶

۲۰-۶ 1.599° ، $2.16'$
 ۱۱-۶ 4.37° ، 4.82°

۱۲-۶ (الف) $1 \times 10^2 \text{ W/m}^2$ ، $M_e = 1 \times 10^2 \text{ W/m}^2$ ، $I_e = 3.98 \text{ W/sr}$ ، $L_e = 1.59 \times 10^2 \text{ W/m}^2 \text{ sr}$ ؛ (ب) $7.81 \times 10^{-5} \text{ W}$ (ج) 18 W/m^2
 ۱۴-۶ 5.7 cm

۱۵-۶ (الف) 53.3 cm ، $f = 53.3 \text{ cm}$ ، 13.33 cm ، 1.86 cm (ب) -100 cm ؛ $s = -40 \text{ cm}$ ؛ $t = 5.3$ ، 7.0 ft
 ۱۶-۶ $1.7 \times 10^7 \text{ lx}$

۱۸-۶ (الف) 90° (ب) 5.45 cm ، $3 \times$
 ۱۹-۶ (الف) 27.8 mm (ب) $f/3.1$ ، $f/5.4$ ، $f/9.4$ (ج) 1.6° ، 9.26 ، 5.35 mm (د) 0.3 ، 0.09 ، 0.27 s

۲۱-۶ (الف) 2.8 cm (ب) $10 \times$
 ۲۲-۶ (الف) $320 \times$ (ب) 5.16 cm
 ۲۳-۶ (الف) $46.7 \times$ (ب) 8.68 cm

۵ cm ۲۴-۶

۱۴٫۹ cm ۲۵-۶

۲۶-۶ (الف) $7 \times$ (ب) ۲ cm (ج) ۵ mm (د) ۲٫۳ cm (ه) ۳۳۷ ft

۲۷-۶ (ب) $7٫۵۰ \times$ ؛ $۸٫۷۰ \times$

۱٫۰۵ cm ۲۸-۶

۲۹-۶ (الف) ۸ cm، $3 \times$ (ب) ۰٫۷۳۸ cm، $۲٫۶ \times$

۳۰-۶ ۱٫۲۵ cm دور از شیئی

۳۱-۶ (الف) $۱۲٫۵ \times$ (ب) $۱۵ \times$ (ج) ۱۳ cm، ۳ mm (د) $۳٫۸^\circ$

۳۳-۶ ۲٫۵ ft -؛ $۱۸۰ \times$

فصل ۷

۱-۷ $D + ۴۱٫۶$

۲-۷ (الف) ۸٫۳۳ mm؛ $D + ۱۲^\circ$ (ب) ۴۲٫۸۶ mm؛ $۴۲٫۳۳ D +$ (ج) ۴۳٫۶۵ mm از صفحه

بنیادی دوم خود، یا ۴۲٫۳۸ mm از سطح دوم خود؛ $D + ۲۲٫۹$

۳-۷ (الف) ۲۲٫۳۴ mm از قرنیه (ب) ۲۱٫۶۰ mm از قرنیه

۴-۷ (الف) $A = ۰٫۷۵۸۴۶^\circ$ ، $B = ۵٫۱۰۵^\circ$ ، $C = -۰٫۵۰۱۱^\circ$ ، $D = ۰٫۶۵۱۸^\circ$

(ب) نقاط کانونی ۱۳٫۰۱ mm در جلو و ۲۲٫۳۴ mm در پشت قرنیه هستند؛ نقاط بنیادی

۱٫۹۶ mm و ۲٫۳۸ mm در پشت قرنیه هستند.

۵-۷ اندازه‌های حروف بزرگ عبارت‌اند از ۱٫۳۰۹ in. برای $۲۰^\circ/۳۰۰$ ؛ ۰٫۴۳۶ in. برای $۲۰^\circ/۱۰۰$ ؛

۰٫۲۶۲ in. برای $۲۰^\circ/۶۰$ ؛ ۰٫۸۷ in. برای $۲۰^\circ/۲۰$ ؛ ۰٫۶۵ in. برای $۲۰^\circ/۱۵$. جزئیات حرف

عبارت‌اند از $۱/۵$ اندازه حرف بزرگ در هر مورد.

۶-۷ (الف) $D + ۳٫۲$ (ب) بله

۷-۷ $D - ۲٫۰$ ؛ ۲٫۱۴ cm

۸-۷ (الف) یون آرگون؛ YAG دوگانه (ب) CO_2 (ج) YAG؛ Nd؛ سرخ کریتون

۹-۷ (الف) نزدیک‌بین؛ آستیگماتیسم (ب) نزدیک‌بین (ج) دوربین (د) دوربین؛ آستیگماتیسم

۱۰-۷ (الف) شیشه نور $۱۰٫۶ \mu\text{m}$ را جذب می‌کند. (ب) $10^{-2} \text{ rad} \times ۴٫۴$ (ج) $۱۴٫۵ \mu\text{m}$

(د) $3 \times 10^6 \text{ W/cm}^2$

۱۱-۷ (الف) 10^6 W (ب) $5 \mu\text{m}$ (ج) 10^{12} W/cm^2 ؛ $۵٫۱ \times$

۱۲-۷ (الف) $10^{-2} \text{ W/cm}^2 \times ۱٫۰۴$ (ب) ۷۸۳ W/cm^2 (ج) ۷۵۰۰۰

۱۳-۷ (الف) ۲۱ J/cm^2 ؛ $۰٫۲۱$ (ب) ۴٫۶

فصل ۸

$$۳,۱۸ \times ۱۰^{۱۰} \text{ W/cm}^2 \quad ۱-۸$$

$$y = \frac{۴}{(x + ۲,۵t)^2 + ۲} \quad \text{(الف) } ۲-۸$$

۳-۸ (الف) (۱) و (۲) نمایشگر موج متحرک اند، زیرا در معادله موج صدق می کنند؛ به بیان ساده تر،

اگر $w = z + vt$ ، آنها توابعی از w هستند: $y = A \sin^2(۴\pi w)$ و $y = Aw^2$ (ب) (۱)

$v = ۱ \text{ m/s}$ در جهت $-z$ ؛ (۲) $v = ۱ \text{ m/s}$ در جهت $+x$

۴-۸ ۱۰ m/s در جهت $+x$

$$\psi = ۲ \sin[(۲\pi/۵)(z + ۵t/۳)] \quad \text{(ب)} \quad \psi = ۲ \sin ۲\pi(z/۵ + t/۳) \quad \text{(الف) } ۵-۸$$

$$\psi = ۲ \exp[۲\pi i(z/۵ + t/۳)] \quad \text{(ج)}$$

$$y = ۵ \sin[(\pi/۲۵)(x + ۸)] \quad \text{(ب)} \quad y = ۵ \sin(\pi x/۲۵) \quad \text{(الف) } ۶-۸$$

$$۱ \text{ ms} \quad \text{(ه)} \quad ۶۲۸۳ \text{ s}^{-۱} \quad \text{(د)} \quad ۶۲۸,۳ \text{ cm}^{-۱} \quad \text{(ج)} \quad ۱۰۰۰ \text{ Hz} \quad \text{(ب)} \quad ۰,۱ \text{ cm} \quad \text{(الف) } ۷-۸$$

$$۱۰ \text{ cm/s} \quad \text{(و)} \quad ۱۰ \text{ cm} \quad \text{(ز)}$$

۸-۸ (الف) $+۱$ در راستای y (ب) $-C/B$ در راستای x (ج) C در راستای z

$$y = ۱۵ \sin(kx + \pi/۳) \quad ۹-۸$$

۱۰-۸ (ب) $۰,۰, ۶۰, ۹۰, ۱۸۰, ۲۷۰$ (ج) از هر یک ۹۰ کم کنید.

$$A \sin[(۲\pi/\lambda)(\sqrt{۲}x \pm vt)] \quad \text{(ب)} \quad A \sin[(۲\pi/\lambda)(z - vt)] \quad \text{(الف) } ۱۱-۸$$

$$A \sin\{(۲\pi/\lambda)[(\sqrt{۳}/۳)(x + y + z) \pm vt]\} \quad \text{(ج)}$$

$$B = ۳,۴۳ \times ۱۰^{-۶} \text{ T}; E = ۱۰۲۸ \text{ V/m} \quad ۱۵-۸$$

$$۱۹,۸۸ \text{ W/m}^2 \quad \text{(ب)} \quad ۵ \times ۱۰^{-۷} \text{ T} \quad \text{(الف) } ۱۶-۸$$

$$۴,۷۶ \times ۱۰^{۲۱} \text{ m}^2 \text{ s} \quad \text{(ب)} \quad ۳,۳۷ \times ۱۰^{-۶} \text{ T}, ۱,۰۱ \times ۱۰^{۲} \text{ V/m} \quad \text{(الف) } ۱۷-۸$$

(ج) $E = ۱۰۱۰ \sin ۲\pi(۱,۴۳ \times ۱۰^۶ r + ۴,۲۸ \times ۱۰^{۱۴} t)$ بر حسب r ، بر حسب t ، بر حسب s

$$۲,۵۷۷ \text{ V/m}, ۸,۷۵ \times ۱۰^{-۲} \text{ W/m}^2 \quad \text{(الف) } ۱۸-۸$$

$$۰,۴۱۰ \text{ T}, ۱,۲۳ \times ۱۰^۸ \text{ V/m}, ۲ \times ۱۰^{۱۲} \text{ W/m}^2 \quad \text{(ب)}$$

$$v = ۰,۱۶۸c \quad ۲۱-۸$$

$$v = -۰,۹۱۷c \quad ۲۲-۸$$

$$۲\Delta\lambda = ۰,۱۲\text{Å} \quad ۲۳-۸$$

فصل ۹

۱-۹ (الف) موجها در راستای x در جهتهای مخالف، $E_۱$ به راست و $E_۲$ به چپ، با سرعت

یکسان $۴/۳ \text{ m/s}$ حرکت می کنند. (ب) $t = ۳/۴ \text{ s}$ (ج) $x = ۱ \text{ m}$

$$E_R = ۸,۵۳ \sin(\omega t + ۰,۲\pi) \quad \text{ب) } ۲-۹$$

$$E_R = ۶,۰۸ \sin(۲\pi t + ۱,۱۳) \quad ۳-۹$$

$$y = ۱۱,۶ \sin(\omega t + ۰,۴۰۲\pi) \quad ۴-۹$$

$$E = ۱,۷۱ \sin(\pi t + ۴,۵۷) \quad ۵-۹$$

$$۰,۲ \text{ V/m} \quad \text{ب) } ۲ \text{ V/m} \quad \text{الف) } ۶-۹$$

$$\psi(t) = ۲,۴۸ \sin(۲۰t + ۰,۸\pi) \quad ۷-۹$$

$$v_g < v_p \quad \text{ب) } v_g = v_p [1 - (\omega/n)(dn/d\omega)] \quad \text{الف) } ۸-۹$$

$$c/۱,۵۶ \quad ۹-۹$$

$$v_g = c/۱,۷۳; v_p = c/۱,۵ \quad ۱۰-۹$$

$$v_g = A = \text{const.} \quad ۱۲-۹$$

$$۲(v/c)v_0 \quad ۱۴-۹$$

$$T: ۰ \text{ cm/s}; ۰,۷۸۵ \text{ cm}; ۱,۵۷ \text{ cm}; ۱۴ \text{ cm} \quad ۱۵-۹$$

$$۱۰ \text{ cm} \quad \text{الف) } ۱,۵ \text{ cm}; ۲۵ \text{ Hz}; ۲۰ \text{ cm}; ۵ \text{ m/s}; \text{جهتهای مخالف} \quad \text{ب) } ۱۰ \text{ cm} \quad ۱۶-۹$$

$$۷,۴۰ \times ۱۰^۲ \text{ cm/s}^۲; ۰ \text{ cm/s}; -۳ \text{ cm} \quad \text{ج) } ۱۷-۹$$

فصل ۱۰

$$۱۱۹۴۵ \quad \text{الف) } ۱۱۹۴۵ \text{ و } ۲۱۲۳۵ \text{ W/m}^۲ \quad \text{ب) } ۱۸۷۲۳ \text{ W/m}^۲ \quad \text{ج) } ۵۱۹۰۳ \text{ W/m}^۲ \quad ۱-۱۰$$

$$۰,۹۶ \quad \text{د) } ۲-۱۰$$

$$۰,۰۸۶ \quad ۲-۱۰$$

$$۳,۷۳/۱; ۰,۰۸ \quad ۳-۱۰$$

$$۱۳,۹, ۴,۰۰, ۲,۵۵, ۱,۷۸ \quad ۴-۱۰$$

۵-۱۰ فریزهای تداخل آینه لویده بصورت موازی با شکاف و با فاصله ۲۷۳ mm از یکدیگر

تولید می‌شوند. تابیدگی نقش با $(۱۱۵y) \sin^۲$ داده می‌شود که در آن y از سطح آینه

برحسب cm سنجیده می‌شود.

$$۵۰۹ \text{ nm} \quad ۶-۱۰$$

$$۵۱۴,۵ \text{ nm} \quad ۷-۱۰$$

۸-۱۰ برای به دست آوردن باریکه‌های همدوس؛ ۵۶۰ nm

$$۱۵۰ \text{ nm} \quad \text{الف) } ۸۳,۳ \text{ cm} \quad \text{ب) } ۸۳,۳ \text{ فریز} \quad \text{ج) } ۱۵۰ \text{ nm} \quad ۹-۱۰$$

$$۴۵۵ \text{ nm}, ۵۵۶ \text{ nm} \quad ۱۰-۱۰$$

$$۲۰,۳; ۱۱-۱۰$$

$$۱۲-۱۰ \quad ۶'۵''$$

$$۱۳-۱۰ \quad ۳۵'۴۰''$$

$$۱۴-۱۰ \quad ۱۰^{-۵} \times ۹.۰۹ \text{ cm}; \text{ به ترتیب، مرتبه های ۴ و ۳}$$

$$۱۵-۱۰ \quad ۴۹۸ \text{ nm}$$

$$۱۶-۱۰ \quad ۱۰۳ \text{ nm}; ۱.۳۳$$

$$۱۷-۱۰ \quad \text{(الف)} ۲.۷۸\% \text{ (ب)} ۸۹.۳ \text{ nm (ج)} ۱\%$$

۱۸-۱۰ حباب آب‌سایون تحت گرانی به شکل گوه در می‌آید؛ زاویه گوه $۱'۱۴''$ است.

$$۱۹-۱۰ \quad ۱۵$$

$$۲۰-۱۰ \quad ۱۰^{-۲} \times ۱.۱۶ \text{ cm}$$

$$۲۱-۱۰ \quad ۱۸۴; ۱.۰۹ \text{ mm}$$

$$۲۳-۱۰ \quad ۳ \text{ m}$$

$$۲۵-۱۰ \quad ۲.۸۷ \times ۱۰^{-۲} \text{ cm}; ۲.۳۹ \text{ mm}; ۶.۰۳۵ \text{ nm}$$

$$۲۶-۱۰ \quad ۹۲۸ \text{ nm}$$

فصل ۱۱

$$۱-۱۱ \quad ۴۳۶ \text{ nm}$$

۲-۱۱ یک آینه گوه‌ای با زاویه ۱۷۲° در ۰° با تصویر آینه دیگر، که در تقسیمگر باریکه بازتاب یافته است، می‌سازد. فریزهای فیزو تولید می‌شوند.

$$۳-۱۱ \quad ۲۳۷۵ \mu\text{m}$$

$$۴-۱۱ \quad \text{(الف)} ۸۰۰۰۰ \text{ (ب)} ۷۹۹۹۴$$

$$۵-۱۱ \quad \text{(الف)} n = 1 + N\lambda/2L \text{ (ب)} ۱۵۳$$

$$۶-۱۱ \quad \text{(الف)} ۱۱.۲^\circ \text{ (ب)} ۴۵.۹^\circ$$

$$۷-۱۱ \quad ۷۹.۱ \text{ nm یا } \lambda/۸$$

$$۸-۱۱ \quad \text{(الف)} ۹۸۰ \text{ V/m} \text{ (ب)} ۳۰^\circ \text{ (ج)} ۰.۲۸; t' = ۰.۹۲۱۶$$

$$\text{(د)} ۲۵۳, ۲۷۴ \text{ V/m}; ۱۹.۸; ۷.۷; ۶.۷\%; ۰.۴۱\%; ۰.۹۰۳ \text{ (ه)} ۰.۹۰۳ \text{ V/m}; ۷۰.۸; ۸۵\%; ۰.۵۲\%$$

$$\text{(و)} ۲۵۸ \text{ nm}$$

$$۱۰-۱۱ \quad \text{(الف)} ۴۸۲۶۰ \text{ (ب)} ۱۰.۱۳ \text{ cm}$$

$$۱۱-۱۱ \quad \text{(الف)} ۳.۹۹۶ \times ۱۰^۶ \text{ (ب)} ۳.۱۶ \times ۱۰^۶ \text{ (ج)} ۳.۱۸ \text{ mm} \text{ (د)} ۶.۲۹ \text{ \AA} \text{ (ه)} ۰.۰۰۲ \text{ \AA}$$

$$۱۲-۱۱ \quad \text{(الف)} ۳۲۹۶۷۰ \text{ (ب)} ۳۶۱ \text{ (ج)} ۰.۸ \times ۱۰^۶$$

$$۱۳-۱۱ \quad ۲.۱۸ \text{ cm}$$

۱۶-۱۱

۰٫۱۶۱ mm ۱۵-۱۱

۱۶-۱۱ (الف) ۳۶۰° (ب) ۱۸۰° (ج) ۲

۰٫۴۷؛ ۱ ۱۷-۱۱

فصل ۱۲

$$f(x) = (4/\pi)[\sin kx + (1/3)\sin 3kx + (1/5)\sin 5kx + \dots] \quad ۱-۱۲$$

$$f(t) = \frac{E_0}{\pi} + \frac{E_0}{2} \cos \omega t + \frac{2E_0}{3\pi} \cos 2\omega t - \frac{2E_0}{15\pi} \cos 4\pi t + \dots \quad ۲-۱۲$$

$$g(\omega) = \frac{\sigma h}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\sigma^2 \omega^2)/2} \quad ۳-۱۲$$

اگر پهنای اولی σ باشد پهنای دومی $1/\sigma$ خواهد بود. بنابراین، وقتی تابع گاوسی اولیه باریک می‌شود طیف پهن می‌شود، و برعکس.

$$u = \omega \tau_0 / 2 \quad \text{که در آن } |g(\omega)|^2 = (A^2 \tau_0^2 / 4\pi^2) (\sin u / u)^2 \quad ۴-۱۲$$

۵-۱۲ طول همدوسی صافی نوار باریک به اندازه یک مرتبه بزرگی بهتر است: $3.48 \times 10^{-5} \text{ m}$

۶-۱۲ 3 cm ؛ 10^{10} Hz ؛ 0.13 nm ؛ 0.13 nm

۷-۱۲ 0.243 mm ؛ 0.243 mm

۸-۱۲ (الف) 0.138 nm ؛ 0.138 nm (ب) 1 ns ؛ 1 ns

۹-۱۲ 2.5 mm ؛ 2.5 mm

۱۰-۱۲ $2.08 \times 10^{-12} \text{ s}$ ؛ 0.625 cm ؛ 0.625 cm

۱۱-۱۲ 0.144 cm ؛ 0.144 cm

۱۲-۱۲ $3 \times 10^2 \text{ Hz}$ ؛ $4 \times 10^{-7} \text{ \AA}$ ؛ $4 \times 10^{-7} \text{ \AA}$

۱۳-۱۲ (الف) $2.08 \times 10^{-12} \text{ s}$ ؛ 0.625 cm ؛ 0.625 cm (ب) 0.36 ؛ 0.36 (ج) 0.53 ؛ 0.53

۱۴-۱۲ $1.0 \times 10^{-2} \text{ cm}$ ؛ $1.0 \times 10^{-2} \text{ cm}$ ؛ $1.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$ ؛ $1.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$ ؛ $1.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$ ؛ $1.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$

۱۵-۱۲ (ب) 2.55 ؛ 2.55

۱۷-۱۲ 0.63 ؛ 0.998 ؛ 0.63 ؛ 0.998

۱۸-۱۲ 15.95 cm ؛ 0.686 ؛ 0.937 ؛ 15.95 cm ؛ 0.686 ؛ 0.937

۱۹-۱۲ (الف) 0.0 ؛ 0.0 ؛ 0.596 cm ؛ 0.596 cm (ب) 0.895 mm ؛ 0.895 mm

فصل ۱۳

۲-۱۳ (ب) 0.866 ؛ 0.866

۴-۱۳ $1.82 \mu\text{m}$ ؛ $1.82 \mu\text{m}$

۶۳٫۳ m/s ۵-۱۳

$۱٫۸ \times ۱۰^{۱۰}$ bits ۷-۱۳

۴۳۳ nm (الف) ۲۵۰ nm (ب) ۵۰۰ nm (ج) ۸-۱۳

۳۸۰ nm (الف) ۳۶۵ nm (ب) ۳۸۰ nm (ج) ۹-۱۳

۱۰-۱۳ ۳۶۵ nm؛ مؤلفه‌های آبی به فرابنفش منتقل می‌شوند و به نظر نمی‌آیند

۶۳۳۰ × (ب) ۱٫۸۸ × (الف) ۱۱-۱۳

فصل ۱۴

۲-۱۴ (الف) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$: قطبیده خطی در -۴۵°

(ب) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: قطبیده خطی در $+۴۵^\circ$

(ج) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$: قطبیده بیضوی راست در $+۴۵^\circ$

(د) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$: قطبیده دایره‌ای چپ

۳-۱۴ (الف) قطبیده خطی در راستای x ، که در جهت $+z$ با دامنه $۲E_0$ حرکت می‌کند.

(ب) قطبیده خطی در $۱۰۳٫۱^\circ$ نسبت به محور x ، که با دامنه $۵E_0$ در جهت $+z$ حرکت می‌کند.

(ج) قطبیده دایره‌ای راست، که با دامنه $۵E_0$ در جهت $-z$ حرکت می‌کند.

۴-۱۴ ۷۵°

۵-۱۴ نور قطبیده دایره‌ای راست

۶-۱۴ (الف) $\mathbf{E} = E_0(\sqrt{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})e^{i(kx - \omega t)}$ (ب) $\mathbf{E} = E_0(\mathbf{y}\mathbf{k} - i\mathbf{i})e^{i(ky - \omega t)}$

(ج) $\mathbf{E} = kE_0 \exp\{i[(x + y)k/\sqrt{2} - \omega t]\}$

۷-۱۴ (الف) $C = 0, m\pi$ (ب) $C = 0, (m + 1/2)\pi$ (ج) $A = \pm C, (m + 1/2)\pi$

$B = 0$

۹-۱۴ (الف) قطبیده خطی، $\alpha = ۱۸٫۴^\circ$ ، $A = \sqrt{10}$ (ب) قطبیده دایره‌ای راست، $A = ۱$

(ج) قطبیده بیضوی راست، نیم‌محور بزرگ مساوی ۵ در راستای محور y ، نیم‌محور کوچک مساوی

۴ در راستای محور x ، (د) قطبیده خطی، افقی، $A = 5$ (ه) قطبیده دایره‌ای چپ، $A = 2$ (و)
 قطبیده خطی، $A = \sqrt{13}$ ، $\alpha = 56^\circ 30'$ ، $\varepsilon = -7^\circ$ ، $\alpha = -7^\circ$ ، $\varepsilon = 53^\circ 10'$ (ز) قطبیده بیضوی چپ،
 $E_{o_y} = 1^\circ$ ، $E_{o_x} = 2$

۱۴-۱۰ قطبیده بیضوی راست، متقارن با محورهای x و y ، $E_{o_x}/E_{o_y} = \sqrt{3}$
 ۱۴-۱۳ نور قطبیده دایره‌ای راست

۱۴-۱۴ هیچ نوری خارج نمی‌شود

۱۴-۱۵ (الف) قطبیده بیضوی راست، محور بزرگ در راستای محور x (ب) قطبیده خطی قائم
 ۱۴-۱۶ (الف) قطبیده خطی در $\pm 45^\circ$ (ب) قطبیده بیضوی

$$\begin{bmatrix} 1 & -z \\ z & 1 \end{bmatrix} \quad 17-14$$

۱۴-۲۰ (الف) قطبش بیضوی با زاویه میل $-25^\circ 9' 7''$

$$\frac{1}{\sqrt{13}} \left[\begin{array}{c} 2 \\ \frac{3}{2} + \frac{z\sqrt{3}}{2} \end{array} \right]$$

(ب) قطبش بیضوی با زاویه میل $49^\circ 30' 3''$ ، یا چرخیده به اندازه $3^\circ 0'$:

$$\frac{1}{\sqrt{34,475}} \left[\begin{array}{c} 2,6519 \\ -0,6651 + i(5,1962) \end{array} \right]$$

۱۴-۲۱ (الف) قطبیده بیضوی با نیم‌محورهای E_{o_x} و E_{o_y} موازی با محورهای مختصات

(ب) قطبیده بیضوی با محورهای اصلی در 45° نسبت به محورهای مختصات

(ج) قطبیده دایره‌ای، به مرکز مبدأ و شعاع E_o

(د) قطبیده خطی با شیب E_{o_y}/E_{o_x}

$$I = I_o (2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \quad 22-14$$

فصل ۱۵

۱۵-۱ ۲۸٫۱٪

۱۵-۲ $67,5^\circ$ ؛ $22,5^\circ$

$$3-15 \text{ (الف) } I_0 \{ \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta \sin^2 \theta \}$$

(ب) $4525 I_0$ در مقابل $5 I_0$ ؛ $351 I_0$ در مقابل $375 I_0$ ؛ هر دو $25 I_0$ ؛ $475 I_0$ در مقابل 0

$$4-15 \text{ (الف) } 633 \text{ mm}$$

5-15 (الف) شکست یگانه، تأخیر فاز، هر قطبشی ممکن است (ب) شکست یگانه، بدون تأخیر فاز، ناقطبیده (ج) مانند (الف) (د) شکست دوگانه، بدون تأخیر فاز در هر باریکه تفکیک شده، هر باریکه قطبیده خطی (ه) موردهای (الف) و (ج)

$$6-15 \text{ (الف) با اختلاف } 121 \text{ mm} \text{ (ب) } 15 \text{ mm}$$

$$7-15 \text{ (ب) } 33\%$$

$$8-15 \text{ (الف) } 162 \text{ mm}$$

$$9-15 \text{ (الف) } 200$$

$$10-15 \text{ (الف) } 005$$

$$11-15 \text{ (الف) } 53, 120 \text{ (ب) } 11, 50$$

12-15 (الف) آمیخته‌ای از نور ناقطبیده و قطبیده دایره‌ای (ب) نور قطبیده بیضوی

$$13-15 \text{ (الف) } 56, 20 \text{ (ب) } 33, 80$$

$$14-15 \text{ (الف) } 05 \text{ g/ml} \text{ (ب) حدود } 46$$

$$15-15 \text{ (الف) } 200 \text{ mm} \text{ (ب) } 50$$

$$16-15 \text{ (الف) } 10^{-5} \text{ cm} \times 8, 57 \text{ (ب) سبز}$$

$$18-15 \text{ (الف) } 0091 \text{ (ب) } 15 \mu\text{m} \text{ (ج) } 12 \text{ (د) } 15 \mu\text{m}$$

$$19-15 \text{ (الف) } 15 \times 10^{-4}$$

$$20-15 \text{ (الف) } 36, 8 \mu\text{m} \text{ (ب) } 18, 4 \mu\text{m}$$

$$21-15 \text{ (الف) } 14, 70$$

$$22-15 \text{ (الف) } 14, 8\% \text{ (ب) } 2, 03\% \text{ نسبت به } I_0 \text{ (ج) } 92$$

$$23-15 \text{ (الف) } I_0 \sin^2(2\theta)$$

$$24-15 \text{ (الف) } 42, 50 \text{ (ب) } 60$$

فصل ۱۶

$$1-16 \text{ (الف) } 218 \text{ cm} \text{ (ب) } 218 \text{ cm}$$

$$2-16 \text{ (الف) } 90$$

$$3-16 \text{ (الف) } 135 \text{ mm} \text{ (ب) } 139$$

۴-۱۶ ۴۹۶ nm

۵-۱۶ ۰٫۷۷۵، ۰٫۴۴، ۰٫۲۱۲۵، ۰٫۱۲۵، ۰٫۰۵۵ μm

۶-۱۶ (الف) ۱۵°، (ب) ۰٫۶۷۸، ۰٫۱۶۶، ۰٫۰۴۶۱، ۰٫۰۰۶۱

۷-۱۶ ۱٫۶۸ × ۱۰^{-۲} cm؛ ۲٫۷۵ × ۱۰^{-۲} cm

۸-۱۶ ۸٫۴ × ۱۰^{-۲} cm

۹-۱۶ قطر ۹۷۲۵ km؛ ۲٫۶۹ × ۱۰^{-۱۱} W/m^۲

۱۰-۱۶ ۵٫۲ m

۱۱-۱۶ ۸٫۵ km

۱۲-۱۶ ۲۶۵ m؛ ۷۵٫۷

۱۳-۱۶ (الف) ۰٫۴۰۰ mm، (ب) ۰٫۸۱۰۶، ۰٫۴۰۵۳، ۰٫۰۹۰۰۶

۱۴-۱۶ (ب) ۲٫۱۰ mm

۱۵-۱۶ (ب) ۲۰

۱۸-۱۶ ۰٫۸۷۵، ۰٫۵۷۳، ۰٫۲۵۵، ۰٫۰۵۴۷، ۰٫۰۰۵

$$I = I_0 \frac{\sin^2(1.151y) \sin^2(0.575x)}{0.438x^2y^2} \quad \text{(الف) } ۲۰-۱۶$$

(ب) ۵٫۴۶ mm در راستای x؛ ۲٫۷۳ mm در راستای y

(ج) ۰٫۸۹۵ در راستای x؛ ۰٫۶۲۹ در راستای y

(د) ۰٫۰۰۵

۲۱-۱۶ (الف) ۹۰°، (ب) ۱۱٫۵°، (ج) ۵٫۷°

۲۲-۱۶ $\Delta\theta = (\lambda/D)(1/\cos\theta)$

۲۳-۱۶ (ب) ۴٫۷٪، ۱٫۸٪، ۰٫۸۴٪، به ترتیب برای m = ۱، ۲، ۳

۲۴-۱۶ $\theta_{1/2} = ۳۰^\circ$ ؛ m = ۰

۲۵-۱۶ (الف) ۱۲۰°، (ب) $I_p = (1/9)I_{max}$ ، (ج) $I_p = I_{max}$ ، (د) $I_p = 3I_{av}$

فصل ۱۷

۱-۱۷ ۱۳۰۱۸'

۲-۱۷ (الف) ۰٫۸۲۳°/nm، ۰٫۴۶۴ nm/mm، (ب) ۶۳۰۰۰

۳-۱۷ (الف) ۸٫۶۶'، (ب) ۶۱۲٫۵ nm، (یا) ۵۸۷٫۵ nm، (ج) ۴۸؛ ۴۸

۴-۱۷ ۹۸۷؛ ۴۹۴

- ۱۷-۵ (الف) 700 nm ، 360 nm (ب) 57.1° ، 25.6° (ج) 35° nm و 175 nm برای شیشه کزاون؛ 180 nm و 90 nm برای کوارتز
 ۱۷-۶ 120000 ؛ 69 \AA ر
 ۱۷-۷ (الف) مرتبه سوم (ب) هر پهنایی کمتر از باریکه نور
 ۱۷-۸ (الف) در هر مورد 21.8 cm (ب) در هر مورد ۹ (ج) به ترتیب 21.8 cm ، 4.37 cm و 0.29 cm
 ۱۷-۹ (الف) cm /شیار 875° (ب) 18.89° (ج) 37.77° (د) درجه/ 788 nm
 ۱۷-۱۰ (الف) 7000 (ب) 18 mm ر
 ۱۷-۱۱ (الف) 5.7° تا $11.5^\circ +$ (ب) 100000 (ج) $10 \text{ \AA}/\text{mm}$ (د) 1 m
 ۱۷-۱۲ حدود cm /شیار 5000
 ۱۷-۱۳ (الف) $16 \mu\text{m}$ ر (ب) $18.4 \text{ \AA}/\text{mm}$
 ۱۷-۱۴ (الف) 11.5° (ب) 11.8°
 ۱۷-۱۵ mm /شیار 355° ؛ آن را کاهش می دهد
 ۱۷-۱۶ (الف) 3647 (ب) mm /شیار 1200 (ج) 3.4 mm
 ۱۷-۱۷ (الف) 557 تا 318 (ب) 960 (ج) 388800 ؛ 14 \AA ر، (د) $41^\circ/\text{nm}$ ر، (ه) 5.5 \AA ر

فصل ۱۸

- ۱۸-۱ نزدیک، نزدیک، دور
 ۱۸-۲ ماکسیممها: 409 ، 136 ، 81.8 cm ؛ مینیممها: 204 ، 102 ، 68 cm
 ۱۸-۳ (الف) 1.88 و 3.26 mm (ب) 2.66 و 3.76 mm
 ۱۸-۴ (الف) 346 ر، (ب) 833 (ج) 20 cm ، 6.67 cm ، 4 cm
 ۱۸-۶ (الف) 2 cm ر، (ب) 2500
 ۱۸-۷ (الف) $4 \times$ (ب) بسیار نزدیک به صفر (ج) 5 ؛ 6
 ۱۸-۸ 0.012 ر
 ۱۸-۹ (الف) $1/100$ (ب) 5.31 cm
 ۱۸-۱۰ 1.05 ، 1.48 ، 1.82 mm
 ۱۸-۱۲ 1.97 mm شعاع؛ صفر
 ۱۸-۱۳ 14.8 cm
 ۱۸-۱۴ (الف) $0.66 I_u$ ر، (ب) $0.53 I_u$
 ۱۸-۱۵ (الف) $0.119 I_u$ ر، (ب) $0.23 I_u$ ر

۱۶-۱۸ (الف) $18I_u$ ر. (ب) $538I_u$ ر.

۱۷-۱۸ $19I_u$ ؛ $86I_u$ ر.

۱۸-۱۸ $55I_u$ ر.

۱۹-۱۸ ۲۱٪

۲۰-۱۸ (ب) 145 mm ر. (ج) $645I_u$ ر.

۲۱-۱۸ $19 \mu\text{m}$

فصل ۱۹

۲-۱۹ (الف) $102, 122, 184$ ر. (ب) 0.84 ر.

۴-۱۹ (الف) 2.81 ر. (ب) 3.17 ٪ (ج) 4.26 ٪

۵-۱۹ 32.3 ٪

۶-۱۹ $25 \mu\text{m}$ ر. ZrO_2

۷-۱۹ (الف) 859 \AA از Al_2O_3 ، 1058 از Na_3AlF_6 ؛ 0.003 ر. (ب) 15.6 ٪

۸-۱۹ (الف) 227 nm و 370 nm (ب) 10 ٪ (ج) 1.2 ٪

۱۲-۱۹ برای مثال، از سطح به پایه: $\text{MgF}_2 (n = 1.35)$ ، $\text{SiO}_2 (n = 1.5)$ ، $\text{ZnS} (n = 2.2)$

۱۳-۱۹ (الف) 1.1 ٪ (ب) 98.4 ٪ (ج) 99.99 ٪

۱۴-۱۹ 99.96 ٪

۱۵-۱۹ 2.24

فصل ۲۰

۲-۲۰ $28^\circ 56'$ ، $61^\circ 04'$

۳-۲۰ $\theta_c = 32.9^\circ$ ، $\theta_p = 61.5^\circ$ ، $\theta'_p = 28.5^\circ$

۴-۲۰ 1.272

۹-۲۰ (الف) 2.55 ر. (ب) 233 ر. (ج) 4.26 ٪ (د) 1.26 ٪

۱۰-۲۰ (الف) 2.01 ٪، 2.10 ٪، 5.23 ٪، 100 ٪ (ب) 2.01 ٪، 1.91 ٪، 274 ر.، 100 ٪

۱۱-۲۰ (الف) TM: $\theta_p = 67^\circ 33'$ ، بدون θ_c ؛ TE: بدون θ_p ، بدون θ_c

(ب) TM: $22^\circ 27'$ ، $\theta_p = 24^\circ 24'$ ، بدون θ_c ؛ TE: بدون θ_p ، بدون θ_c

۱۲-۲۰ (الف) 13.85 ٪، $R = 86.15$ ٪، $T = 13.85$ ٪ (ب) 6.2 ٪، $R = 93.8$ ٪، $T = 6.2$ ٪

۱۴-۲۰ (الف) 43.3° ، $\theta_c = 55.6^\circ$ ، $\theta_p = 34.4^\circ$

(ب) $T = 96.53$ ٪، $R = 3.47$ ٪؛ $T = 8.21$ ٪، $R = 91.79$ ٪

$$T = ٪۹۹٫۳۳, R = ٪۰٫۶۷; T = ٪۹۶٫۵۳, R = ٪۳٫۴۷ \text{ (ج)}$$

$$۰۰, ۲۷٫۹۰, ۴۱٫۰۰, ۵۰, ۱۸۰۰, ۱۸۰۰ \text{ (د)}$$

$$۸۲٫۳۰ \text{ و } ۹۷٫۰۰ \text{ (ب) } ۵۹^{\circ}۵۱'$$

$$٪۱۰۰, ٪۶۵٫۷, ٪۴۵٫۴, ٪۳۴٫۵, ٪۲۹٫۳ \text{ (الف)}$$

$$٪۱۰۰, ٪۵٫۴, ٪۱۴٫۹, ٪۲۴٫۲, ٪۲۹٫۳ \text{ (ب)}$$

$$٪۶۹٫۵, ٪۸۰٫۱, ٪۸۲٫۵ \text{ (ب) } ٪۹۰٫۹, ٪۸۴٫۷, ٪۸۲٫۵ \text{ (الف)}$$

$$۴۱ \text{ nm (ب) } ۰٫۱۱۳ \text{ nm}^{-۱} \text{ (الف)}$$

$$۲۰-۲۰ \text{ (الف) } ۱۶۴ \mu\text{m} \text{ (ب) } ۰٫۱ \times ۱۰^{-۶}$$

فصل ۲۱

$$N_2/N_1 = ۱٫۲ \times ۱۰^{-۳۲} \text{ ۲-۲۱}$$

$$۱٫۳۰ \times ۱۰^{-۱۵} \text{ J/m}^2\text{-Hz} \text{ ۴-۲۱}$$

۶-۲۱ $۰٫۳۱۸ \text{ eV}$: گسیل خود به خودی حدود ۳۱۴ بار بزرگتر از گسیل القایی است. این نباید

دور از انتظار باشد زیرا هرگاه $h\nu \gg kT$ نسبت محاسبه شده بزرگتر از ۱ است.

۷-۲۱ (الف) جدول ۱-۲۱ را ببینید. (ب) پهنای خط حدود ده میلیون بار کوچکتر است

$$۴۰ \text{ km} \text{ ۸-۲۱}$$

$$۰٫۸۰ \text{ mrad} \text{ ۹-۲۱}$$

$$۲٫۵ \times ۱۰^۵ \text{ W/m}^2\text{-sr-Hz} \text{ (ب) ۱۱-۲۱}$$

$$۱۲٫۷ \text{ MW/m}^2 \text{ (ج) } ۱۰ \mu\text{m} \text{ (ب) } ۱۰^{-۴} \text{ rad (الف) ۱۲-۲۱}$$

$$۲۰ \text{ W (ب) } ۱ \text{ W (الف) ۱۳-۲۱}$$

$$٪۴۹, ٪۵۵, ٪۷۰, ٪۷۶ \text{ (ب) } ۰٫۵۲۵ \mu\text{m}, ۰٫۵۸۵ \mu\text{m}, ۰٫۷۵ \mu\text{m}, ۰٫۸۱ \mu\text{m} \text{ (الف) ۱۴-۲۱}$$

$$٪۱٫۲۶ \text{ (ب) } ۳۱٫۵ \text{ W (الف) ۱۵-۲۱}$$

فصل ۲۲

$$۵۰ \text{ m} - i(۱٫۲۴ \text{ m}) \text{ (ب) برای هریک تقریباً } -i(۱٫۲۴ \text{ m}) \text{ (الف) ۳-۲۲}$$

$$w_{۵۰} = ۲۰٫۱۵ \times ۱۰^{-۳} \text{ m}; R_{۵۰} = ۵۰٫۰۳ \text{ m} \text{ (الف) ۴-۲۲}$$

$$\geq ۶۴٫۶ \text{ m (ه) } ۰٫۴ \text{ mrad (د) } ۰٫۵۱ \text{ mm (ج) } ۰٫۵۱ \text{ mm (ب) مرکزکاوایک (الف) ۵-۲۲}$$

$$۲۴۵ \mu\text{W/cm}^2 \text{ (و)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۰٫۵۳۱۲۵ & ۱ \end{bmatrix} \text{ (ب) ۶-۲۲}$$

۷-۲۲ (الف) ۱٫۸۸ m (ب) ۱٫۸۸ m

۸-۲۲ (الف) $-i\pi w_1^2/\lambda$ (ب) ۰٫۴۳۸ mm (ج) $-۰٫۹۵۲i$

$$\frac{AC\tilde{q}_1\tilde{q}_1^* + BD + AD\tilde{q}_1^* + BC\tilde{q}_1}{A^2\tilde{q}_1\tilde{q}_1^* + B^2} = \frac{1}{R(\ell)} + i\frac{\lambda}{\pi w_1^2(\ell)} \quad (د)$$

$w_1(\ell) \cong ۰٫۵۴ \text{ mm}$; $\ell \cong ۶ \text{ cm}$ (ه)

۹-۲۲ (الف) $w_{0r} = ۰٫۵۴۳ \text{ mm}$; $z_r = ۰٫۰۶۶۳ \text{ m}$

۱۰-۲۲ (الف) ۱٫۴۶ m $Z_{FF} \gg$ (ب) ۰٫۳۷۱ mrad

(ج) $w_{دوری} = ۱٫۱۳ \text{ cm}$; $w_{خوبی} = ۱٫۱۳ \text{ cm}$ (د) $z_r \cong ۰٫۱ \text{ m}$

$w_{0r} \cong ۱٫۸۱ \times ۱۰^{-۷} \text{ m}$

۱۴-۲۲ (الف) ۱٫۴۶ m ; (ب) ۵٫۸۳ m ; (ج) ۱۳٫۱۲ m ; (د) ۳۶٫۴۵ m

فصل ۲۳

۱-۲۳ $۳٫۱۸ \times ۱۰^{۱۰} \text{ W/cm}^2$

۲-۲۳ (الف) ۰٫۷ mm (ب) $D' = ۱۰۱ \mu\text{m}$ قطر در لبه $۱۱۱ \mu\text{m}$

۴-۲۳ (الف) $۱٫۴ \times ۱۰^{۱۵} \text{ W/m}^2$ (ب) $۱٫۳۵ \times ۱۰^۸ \text{ V/m}$

۵-۲۳ (الف) $۴ \times ۱۰^۹ \text{ Hz}$ ، یا پهنای نوار مجرا (ب) $۱۰^۶$

۶-۲۳ (الف) ۱۸۱ m (ب) $۲٫۴۲ \times ۱۰^۲ \text{ V/m}$

۷-۲۳ (ب) $R_{NHZ} = ۳۷۱ \text{ m}$

۸-۲۳ (ب) $R_{NHZ} = ۲۹٫۹ \text{ m}$

فصل ۲۴

۱-۲۴ ۶۷۲

۲-۲۴ ۵۰ میلیون

۳-۲۴ (ب) ۱۲۸۴

۴-۲۴ (الف) $۶۸٫۱^\circ$ (ب) $۰٫۵۶۷$ (ج) $۳۴٫۵^\circ$

۵-۲۴ (الف) ۰٫۶۴ (ب) $۷۹٫۵^\circ$ (ج) ۳۲۸۱

۶-۲۴ (ج) $۴۳۲ \mu\text{m}$; $۴۲۹ \mu\text{m}$; $۱۰٫۰۷ \text{ m}$

۷-۲۴ ۱۵۹

۸-۲۴ $۱۰٫۲ \mu\text{m}$

۹-۲۴ و ۱۲، با احتساب هردو قطبش

- ۱۰-۲۴ -۷۰ db/km
 ۱۱-۲۴ ۰.۸۰ mV
 ۱۲-۲۴ $۱۰ \text{ km} ; ۳.۳۳ \text{ km}$
 ۱۳-۲۴ ۰.۱۳۶ db/km
 ۱۴-۲۴ (ب) $-۱۰ \text{ db} , -۶.۰۲ \text{ db} , -۱.۲۵ \text{ db}$
 ۱۵-۲۴ (الف) $۱.۰۰۶۹ \text{ km} ; ۱ \text{ km}$ (ب) $۴.۹۰۰ \mu\text{s} ; ۴.۸۶۷ \mu\text{s}$
 ۱۶-۲۴ $۲.۳۲ \text{ MHz} ; ۴۳۱ \text{ ns}$
 ۱۷-۲۴ ۷۷.۲ ns
 ۱۸-۲۴ ۱۴.۶ ns/km
 ۲۰-۲۴ $۱/۱۴۶ ; ۴۵۷ \text{ ps}$
 ۲۱-۲۴ ۲۵ MHz
 ۲۲-۲۴ (الف) ۴ ns (ب) ۰.۴ ns
 ۲۳-۲۴ ۴۸.۹ ns
 ۲۴-۲۴ (ب) $۳.۹ \text{ ps/km} ; ۴.۳ \text{ ps/km}$
 ۲۵-۲۴ (الف) $۵.۰۵ \text{ ns} ; ۱.۰۷۵ \text{ ns} ; ۰.۷۵ \text{ ns}$ (ب) ۵.۰۵ ns

فصل ۲۵

- ۱-۲۵ (الف) ۰.۶۳۳ ، ۱.۸۹۸ ، ۳.۱۶۴ mm (ب) ۰.۵ mm (ج) ۱۲.۵۷ ، ۳۷.۷۰ و
 دور/mm ۶۲.۸۳ (د) $\frac{1}{9} : \frac{1}{15}$
 ۲-۲۵ (الف) حاصلضرب آنها است
 ۳-۲۵ (ج) ۳۲.۸% ؛ ۰.۴۸
 ۴-۲۵ (الف) ۵ واحد دامنه (ج) $۲۵[1 + \sin(ay)]^2$
 ۷-۲۵ $(\pi A^2/\omega) \cos(\omega\tau)$
 ۸-۲۵ (الف) ۱۸.۳ kHz (ب) ۱۷.۲ Hz
 ۹-۲۵ (الف) ۰.۴ \AA (ب) ۰.۱ \AA
 ۱۰-۲۵ (الف) $۱۰^{-2} \text{ cm} \times ۲.۸۶$ (ب) ۵.۵۹ nm (ج) ۲۲۴ nm (د) $s/\text{خوانش}$ ۰.۸
 ۱۱-۲۵ (الف) ۳.۶ cm^{-1} (ب) ۲۴۵۰ (ج) ۰.۹۳ mm/s

فصل ۲۶

- ۱-۲۶ ω ، ۳ω
 ۲-۲۶ $۳\omega_1$ ، $۳\omega_2$ ، ω_2 ، $۲\omega_1 + \omega_2$ ، $۲\omega_1 - \omega_2$ ، ω_1 ، $۲\omega_2 + \omega_1$ ، $۲\omega_2 - \omega_1$ ، ω_2 ، ω_1

$$\omega_2 \pm \omega_3, \omega_1 \pm \omega_3, \omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2, 2\omega_1, 0 \quad 3-26$$

$$5-26 \quad (الف) \quad 5983 \text{ nm} \quad (ب) \quad 0.46 \text{ r}.$$

$$6-26 \quad V_{HW} = 9.84 \text{ kV}; \text{ مستقل از طول است}$$

$$7-26 \quad \pi/2; 7.9 \times 10^{-6}$$

$$8-26 \quad (الف) \quad \Phi = 2\pi, 4\pi, \dots; V = 2V_{HW}, 4V_{HW}, \dots$$

$$(ب) \quad \text{در } I = I_{max}, V = 0; \text{ در } I = 0, V = V_{HW}$$

$$9-26 \quad \Phi_r / \Phi_{بزرگ} = (r/K)(n_o^2 / \lambda_o VL)$$

$$10-26 \quad 3.47 \text{ m}; \text{ غیر عملی}$$

$$12-26 \quad \text{موج صوت } 150 \text{ nm} \text{ پیش می‌افتد، که برای } \lambda = 500 \text{ nm} \text{ عبارت است از } \lambda/33.$$

بنابراین، موج فراصوتی نسبت به باریکه نور عملاً ایستا به نظر می‌رسد.

$$13-26 \quad (د) \quad 67$$

$$14-26 \quad 221 \text{ MHz}$$

$$16-26 \quad 2.97$$

$$17-26 \quad \text{برای طول } 5 \text{ cm} \text{ جریان } 31.8 \text{ A} \text{ است.}$$

$$18-26 \quad (الف) \quad 0.647 \text{ min/G cm} \quad (ب) \quad 0.956 \text{ min/G cm}$$

$$19-26 \quad 14.10; 0.712 \mu\text{m}^{-1}$$

فصل ۲۷

$$1-27 \quad (ب) \quad n_R = 1.99\sqrt{K_I}; n_I = 0.455\sqrt{K_I}$$

$$4-27 \quad (الف) \quad 4.80 \times 10^{12} \text{ s}^{-1} \quad (ب) \quad 3.8 \times 10^{16} \text{ s}^{-1} \quad (ج) \quad 2.92$$

$$6-27 \quad (الف) \quad 856 \text{ cm} \quad (ب) \quad 6.63 \mu\text{m}$$

$$7-27 \quad (الف) \quad 35 \text{ mm} \quad (ب) \quad 1 \text{ m}$$

$$8-27 \quad 1.7 \mu\text{m}$$

$$9-27 \quad (الف) \quad 405 \text{ m}^{-1} \quad (ب) \quad 11.4 \text{ m}$$

$$11-27 \quad B = 2(\pi c/\omega_o)^2 (\alpha + 1)^{-1/2}; A = (1 + \alpha)^{1/2}$$

$$C = 2(\pi c/\omega_o)^2 \alpha (3\alpha + 4) (\alpha + 1)^{-2/2}; \alpha = Ne^2 / m\epsilon_o \omega_o^2 \text{ که در آن}$$

نمایه

- آب سیاه ۲۳۳
 آب مروارید ۲۳۳، ۲۳۶
 آرایه پاشن-رونکه ۵۲۳، ۵۲۶
 آزمایش
 ~ دوشکافی (یانگ) ۶، ۳۷۷-۳۷۶
 ~ دیوسون و گرمر ۸
 ~ مایکلسون-مورلی ۷
 آستیگماتیسم چشم ۲۳۱-۲۳۰
 آشکارسازهای تابش اپتیکی ۴۱-۳۵
 آشکاربذیری ۴۰
 آلگوریتم کولی-توکی ۷۷۳
 آمیختگی بسامد ۷۸۶-۷۸۴
 آهنگ بیت ۷۲۳
 آینه
 ~ تخت ۵۴-۵۳
 ~ دی الکتریک ۳۰۹، ۵۷۹
 ~ فرنل ۳۰۵-۳۰۳
 ~ کروی ۶۸-۶۲
 ~ لوید ۳۰۳
 ~ همیوخ فاز ۸۱۱-۸۰۳
 ابیراهی(های)
 ~ پرتوی ۱۲۷-۱۲۶
 ~ رنگی ۱۲۶، ۱۵۲-۱۴۶
 ~ طولی و عرضی ۱۵۱
 ~ زایدل ۱۲۶، ۱۳۴
 ابیراهی کروی در ~ ۶۲، ۱۳۸-۱۳۱
 ~ در آستیگماتیسم ۱۴۳-۱۴۰
 ~ در انحنای میدان ۱۴۳-۱۴۰
 ~ در کوما ۱۳۹-۱۳۸
 ~ در واپیچش ۱۳۴، ۱۴۶-۱۴۴
 ~ مکروی ۶۲، ۱۳۸-۱۳۱، ۱۸۵، ۲۰۶-۲۰۵
 ~ مرتبه سه ۱۲۶
 ~ موجی ۱۲۷-۱۲۶
 اپتیک
 ~ تاری ۷۴۴-۷۱۹
 ~ در مخابرات ۷۲۳-۷۲۰
 غلاف در ~ ۷۲۶-۷۲۴
 مدوله‌ساز در ~ ۷۲۱
 ~ غیرخطی ۲۷۲، ۸۱۱-۷۷۷
 آمیختگی بسامد در ~ ۷۸۵-۷۸۴
 اثر یوکلز در ~ ۷۹۲-۷۸۶
 اثر فزاده در ~ ۷۹۷-۷۹۶
 اثر کر در ~ ۷۹۵-۷۹۲
 تولید هماهنگ دوم در ~ ۷۸۲-۷۷۹

- ~ ساکن ۲۷۸-۲۸۰
 ~ گذرا ۶۰۴-۶۰۵
 ~ هماهنگ ۲۴۹-۲۵۳
 انتشار لیزر در دستگاه ماتریس قطبش ۶۷۳-۶۷۴
 انتگرال پراش فرنل-کیرشهوف ۵۲۹-۵۳۱
 انتگرالهای فرنل ۵۴۸
 انحراف مینیم ۱۶۷-۱۶۸
 انحناي میدان ۱۴۳، ۱۳۴، ۱۴۰-۱۴۳
 انواع تداخل فریز ۳۱۲-۳۱۳
 باریکه
 انبساطگر ~ ۶۴۷-۶۴۶
 پهنای ~ ۶۶۰
 پهن شدگی ~ ۴۷۶-۴۷۵، ۴۶۱-۴۳۶
 تقسیمگر ~ ۳۲۵
 کمر ~ ۶۳۹-۶۳۷، ۶۷۰-۶۶۵
 ~ گاوسی ۶۳۹، ۶۶۰-۶۵۴
 اندازه لکه ~ ۶۷۰-۶۶۵
 جواب ~ ۶۶۸-۶۶۰
 شعاع مختلط انحناي ~ ۶۷۰-۶۶۳
 ~ کروی ۶۶۵-۶۶۴، ۶۷۲
 متمرکز کردن ~ ۶۸۲-۶۸۱
 ~ مرتبه بالاتر ۶۸۹-۶۸۳
 موازی کردن ~ ۶۷۷
 ~ مرتبه بالاتر ۶۸۹-۶۸۳
 ~ هرمیت-گاوسی ۶۵۴، ۶۸۹-۶۸۶
 ~ TEM ۶۴۶، ۶۶۰
 بازتاب
 ~ آینه‌ای ۵۳
 ~ و پخشی ۵۳
 ~ از فلزات ۶۰۹-۶۰۸
 ~ خارجی ۳۰۷-۳۰۵، ۶۰۱-۵۹۴
 خلاصه فرمولهای ~ ۷۷
- ~ گاوسی ۶۳
 اتلاف فرنل ۷۳۱
 اثر آکوستو-اپتیکی ۷۹۸-۸۰۳
 ~ در اپتیک غیرخطی ۷۹۸-۸۰۳
 ~ در تخلیه‌گر کاواک ۸۰۳-۸۰۲
 ~ در پراکندگی بریلوئن ۷۹۸
 ~ در مدولاسیون نور ۸۰۳-۸۰۲
 ~ در نظام براگ ۷۹۹
 ~ در نظام رامان-نات ۷۹۹، ۸۰۲
 اثر پوکلز ۷۹۲-۷۸۶
 ~ در تخلیه‌گر کاواک ۷۹۲
 ~ در کلید Q ۷۹۲-۷۹۱
 ~ در ولتاژ نیم موج ۷۸۷
 اثر دوپلر ۲۶۴-۲۶۳، ۲۶۸
 در نور ۷۱۱، ۸۰۱، ۸۱۲
 اثر فاراده ۷۹۸-۷۹۵
 جدول ثابت ورده در ~ ۷۹۷-۷۹۶
 ~ در منزویگر اپتیکی ۷۹۷
 اثر فوتوالکتریک ۸
 اثر فوتولتایی ۳۹-۳۸
 اصل
 ~ باینه ۵۵۷، ۵۶۲
 ~ برگشت‌پذیری ۵۲
 ~ برهم‌نهی ۲۷۱-۲۷۰
 ~ فرما ۵۲-۵۰، ۵۸، ۱۳۱-۱۲۸
 ~ مکملیت ۸
 ~ هایزنبرگ ۱۱
 ~ هویگنس ۴۶، ۵۰
 ~ فرنل ۴۶۸
 اعداد مختلط ۲۵۵-۲۵۴
 الکترودینامیک کوانتومی ۵، ۱۲
 امواج

- ~ داخلی ۵۹۴-۶۰۱، ۳۰۷
 ~ و خارجی ۳۰۵-۳۲۰،
 ۵۹۴-۶۰۱
 ~ داخلی کلی ۵۹۷، ۵۷
 ~ بازداشته ۶۰۴-۶۰۵، ۶۰۴، ۶۰۵
 ~ در تار نوری ۷۲۴-۷۲۶
 ~ در سطح کروی ۶۲-۶۸
 قانون ~ ۵۹۰، ۵۰، ۴۵
 بازتابگر پخشنده ۵۳، ۱۹
 بازتابندگی ۶۰۱، ۵۹۵-۵۹۶، ۵۷۰-۵۸۳، ۳۳۶،
 ۶۰۴
 بازسازی هولوگرام ۳۹۳-۳۹۴، ۳۸۸-۳۸۹
 بردار(های)
 ~ پوینتینگ، ۵۶۴، ۲۶۹ S
 ~ جونز ۴۰۶-۴۱۸
 خلاصه ~ ۴۱۷
 صورت بهنجار ~ ۴۰۹
 برش شعاعی قرنیه ۲۳۴-۲۳۵
 برش کپسول خلفی ۲۴۳، ۲۳۶-۲۴۰
 بزرگنمایی
 ~ آینه کروی ۶۴-۶۷
 ~ تلسکوپ ۲۰۱-۲۰۲
 ~ چشمی ۱۹۲، ۱۸۷
 ~ خطی ۷۱-۷۲، ۶۸، ۵۵
 خلاصه ~ ۷۸
 ~ زاویه‌ای ۱۸۷
 ~ تلسکوپ ۲۰۱-۲۰۲
 ~ چشمی ۱۸۷، ۱۹۲
 ~ میکروسکوپ ۱۹۴
 ~ سطح شکست کروی ۶۹-۷۰
 ~ عدسیهای نازک ۷۶-۷۷
 ~ میکروسکوپ ۱۹۴
 ~ هولوگرامی ۳۹۹
 بسامد
 ~ پلاسما ۸۳۱
 ~ زاویه‌ای ۲۵۱
 ~ زنش ۲۸۲
 ~ فضایی ۷۵۶، ۷۵۲، ۳۶۳
 ~ زاویه‌ای ۷۵۴
 بولومترها ۳۵
 یادکرننگ ۱۹۷
 پاشخندگی آشکارساز ۴۰
 پاشندگی
 ~ تار رنگی ۷۳۸-۷۴۲
 ~ توری پراش ۵۰۸-۵۰۹
 ~ در تار نوری ۷۳۸-۷۴۳
 ~ در تولید هماهنگ ۷۸۲
 ~ ماده ۷۳۸-۷۴۳
 ~ موجبر ۷۴۲-۷۴۳
 پاشندگی
 ~ بهنجار ۴۴۳، ۱۷۰
 ~ چرخشی ۷۹۶، ۴۵۴
 ~ خطی ۵۰۹
 ~ زاویه‌ای ۵۰۹
 ~ غیرعادی ۸۲۵، ۴۴۳
 ~ منشور ۱۶۹-۱۷۲، ۱۶۶
 پراش ۶۴۷، ۴۵
 توری ~ ۷۶۷، ۵۰۴-۵۲۴، ۴۹۲-۴۹۸
 ~ میدان دور ۶۶۷، ۶۳۹، ۴۷۷، ۴۶۸
 ~ میدان نزدیک ۶۶۷، ۴۶۸
 پراش از تک شکاف ۴۶۹-۴۸۷
 پهن شدگی باریکه در ~ ۴۷۹-۴۸۰
 تابیدگی ~ میدان دور ۴۷۲
 تفکیک در ~ ۴۸۳-۴۸۶

- ~ فرنل در میدان نزدیک ۵۵۴-۵۵۶
 گشودگی دایره‌ای و مستطیلی در ~
 ۴۷۷-۴۸۳
 ماکسیم مرکزی در ~ ۴۷۵
 پراش شکاف دوگانه ۴۷۸-۴۹۲
 تابیدگی در ~ ۳۹۰-۳۹۱
 مرتبه‌های حذف شده در ~ ۴۹۱-۴۹۲
 پراش فرانوهوفر ۴۶۸، ۵۲۸
 ~ از تک‌شکاف ۴۶۹-۴۷۵
 ~ از گشودگی دایره‌ای ۴۸۰-۴۸۲
 ~ از گشودگی مستطیلی ۴۷۷-۴۷۹
 توری برای ~ ۴۹۲-۴۹۸
 ~ در شکاف چندگانه ۴۹۲-۴۹۸
 ~ در شکاف دوگانه ۴۸۷-۴۹۲
 معیار ~ ۴۶۸، ۴۷۷، ۴۸۸
 ~ و تبدیل فوریه ۷۵۱-۷۵۵
 پراش فرنل ۴۶۸، ۵۲۸
 ~ از تک‌شکاف ۵۵۴-۵۵۶
 ~ از گشودگی دایره ۵۲۴-۵۴۳
 ~ از گشودگی مستطیلی ۵۴۳-۵۵۷
 ~ از لبه راست ۵۵۱-۵۵۳
 اصل باینه در ~ ۵۵۷
 تخته منطقه ~ ۵۳۹-۵۴۱
 ~ جنبه کورنو ۵۴۳-۵۵۷
 معیار ~ ۵۳۳
 پراکندگی ۴۳۹-۴۴۲
 ~ بریلوئن ۷۹۸
 ~ ریلی ۴۴۰، ۷۳۱
 ~ می ۴۴۱-۴۴۰
 پرتو(های)
- ~ همبستگی هموسی ۳۷۰
 تابندگی ۱۷
 ~ لیزر ۶۴۳
- ~ عمده ۱۶۰
 ~، جدول ۱۶۵
 ~ غیرعادی ۴۵۰-۴۴۸، ۷۸۳، ۷۹۳
 ~ متناظر ۱۱۳
 ~ نصف‌النهاری ۱۱۳
 ~ هم‌مدت ۵۸
 پشته پریازتابندگی ۵۸۳-۵۷۹
 پوشش پادبازتاب ۳۰۷، ۵۷۷-۵۷۲
 پهنای
 ~ خط طبعی ۳۶۷-۳۶۶
 ~ خط طیفی ۶۳۴-۶۳۳
 جدول مقایسه ~ ۶۳۴
 ~ نوار ۷۲۳، ۷۴۰
 پیرچشمی ۲۲۲
 پیزوالکتریک ۷۸۶، ۷۹۸
 پیکسل ۳۹
 تاباننده نرنست ۲۸-۲۷
 تابش
 ~ جسم سیاه ۲۷-۲۴، ۴۲، ۶۲۰-۶۱۶
 ~ خورشیدی ۲۸
 ~ سنجی ۲۱-۱۶
 تابع
 ~ ابری ۳۴۵، ۷۶۶
 ~ بسل ۴۸۲-۴۸۱
 ~ پخش نقطه‌ای ۷۶۶
 ~ تبدیل فاز ۷۶۹-۷۶۸
 ~ تبدیل مدولاسیون ۷۶۹-۷۶۸
 ~ تراگسیل ۷۵۶، ۷۶۱
 ~ سینک ۳۶۶-۳۶۵، ۴۷۳-۴۷۲، ۷۸۲
 ~ همبستگی هموسی ۳۷۰
- ~ پیرامحوری ۵۶، ۹۳، ۱۲۶
 ~ عادی ۴۵۰-۴۴۸، ۷۸۳، ۷۹۳

- تاییدگی ۱۸-۱۷، ۲۳ ~ از تک شکاف ۴۷۲، ۵۵۶-۵۵۴
- ~ از چشمه کاتوره‌ای و همدوس ۲۷۷
- ~ از شکاف دوگانه ۴۹۱-۴۹۰
- ~ چند باریکه‌ای ۳۴۱-۳۴۰
- ~ در تداخل نگاشت ۷۷۳-۷۶۹
- ~ در توری پراش ۴۹۵-۴۹۴
- ~ در جنبه کورنو ۵۵۰
- ~ در گشودگی دایره‌ای ۴۸۱
- ~ دوباریکه‌ای ۲۹۷-۲۹۱
- ~ دوربین ۱۸۳-۱۸۲
- ~ نور قطبیده ۴۳۳
- ~ هولوگرام ۳۹۲
- تار نوری
- اپتیک انتشار ~ ۷۲۶-۷۲۴
- پهنای نوار ~ ۷۲۳، ۷۴۰
- ~ تخت (تخته‌ای) ۷۲۸
- ~ تک مدی ۷۲۷، ۷۳۰
- جدول مشخصات ~ ۷۲۶
- جفت‌شدگی مد در ~ ۷۳۱، ۷۳۶
- ~ چندمدی ۷۲۸-۷۲۷
- ~ ضریب پله‌ای ۷۲۷، ۷۳۷-۷۳۶
- ~ ضریب تدریجی ۷۲۷، ۷۲۷-۷۳۶
- مدهای ~ ۷۲۹-۷۲۷
- وایپجشهای ~ ۷۲۴، ۷۴۴-۷۳۴
- تاخیر فاز ۴۱۸، ۴۲۲-۴۲۳، ۷۸۷-۷۸۶، ۷۹۳
- تباين در تداخل فریزها ۲۹۵
- تباين فریز ۲۹۵، ۳۴۵، ۳۷۴، ۳۸۰، ۳۸۴، ۳۹۰
- تبدیل انتگرال فوریه ۳۶۵-۳۶۲، ۷۵۱
- تبدیل فوریه ۳۶۶-۳۶۲
- ~ تند ۷۷۳
- طیف‌نمایی ~ ۷۷۳-۷۶۹
- ~ گسسته ۷۷۱
- تحلیل طیف ۷۶۰-۷۵۵، ۷۶۹
- تخته
- ~ ربع‌موج ۴۱۹، ۴۲۶-۴۲۳، ۴۴۷
- ~ نیم‌موج ۴۱۹، ۴۲۵-۴۲۴، ۴۴۷
- ۴۶۰-۴۵۹، ۷۸۸-۷۸۷
- ~ گابور ۳۸۹-۳۸۸، ۴۰۲
- ~ منقطه فرنل ۳۸۹، ۴۰۱-۳۹۷
- ۵۴۱-۵۳۹
- تخلیه‌گر کاواک ۷۹۲
- تداخل
- ~ چشمه‌های مجازی ۳۰۵-۳۰۳
- ~ چندباریکه‌ای ۳۴۲-۳۳۷
- ~ در تداخل سنخ فابری-پرو ۳۵۳-۳۴۲
- ~ در تداخل سنخ مایکلسون ۳۳۴-۳۲۶
- ۳۷۷-۳۷۶
- ~ در تداخل نگاشت ۳۴۴، ۷۷۲-۷۶۹
- ~ در حلقه‌های نیوتون ۳۱۷-۳۱۴
- ~ در شیئی میکروسکوپ ۳۲۰-۳۱۷
- ~ در لایه دی‌الکتریک ۳۱۰-۳۰۵
- ~ دوباریکه‌ای ۲۹۷-۲۹۰
- ~ دوشکافی ۳۰۳-۲۹۷
- ~ سازنده ۲۹۰، ۲۹۴، ۳۰۰-۲۹۷، ۳۱۱
- ~ لایه چندلایه‌ای ۳۰۹-۳۰۸
- ~ ویرانگر ۲۹۰، ۲۹۴، ۳۰۰-۲۹۷، ۳۱۱
- تداخل سنخ(های)
- ~ توپمن‌گرین ۳۳۶-۳۳۴
- طبقه‌بندی ~ ۳۲۶-۳۲۵
- ~ فابری-پرو ۳۵۳-۳۴۱
- تشدیدگر ~ ۶۲۴، ۶۳۱-۶۳۰
- ~ ماخ-زندر ۳۳۵
- ~ مایکلسون ۳۳۴-۳۲۶، ۳۷۷-۳۷۶

- تلسکوپ ۲۰۷-۱۹۹
 ~ اشعیت ۲۰۷-۲۰۶
 ~ بازتابی ۲۰۶-۲۰۳
 بزرگنمایی زاویه‌ای ~ ۲۰۱-۲۰۰
 تفکیک در ~ ۴۸۴-۴۸۳
 چشم آسودگی ~ ۲۰۳-۲۰۱
 دوربین رؤیت ~ ۲۰۳-۲۰۲
 ~ کاتادیوتریک ۱۹۹، ۲۰۶
 ~ کاسگرینی ۲۰۵-۲۰۴، ۲۱۴
 ~ گالیله‌ای ۲۰۱-۲۰۰
 ~ گریگوری ۲۰۵-۲۰۴
 ~ نجومی ۲۰۰-۱۹۹، ۲۱۳
 ~ نیوتونی ۲۰۴، ۲۱۴
 ~ هیل ۲۰۵
 توافق چشم ۲۲۲
 توان
 ~ یاشندگی ۱۴۷، ۱۷۲، ۲۸۷
 ~ شکست ۷۹
 ~ هم‌ارز نوفه ۴۰
 توان تفکیک
 ~ توری ۵۱۲-۵۱۰
 ~ چشم ۲۲۵-۲۲۴
 ~ در اپتیک تاری ۷۲۰
 ~ رنگی منشور ۱۷۴-۱۷۳
 ~ طیف‌نگار فوریه ۷۶۹
 ~ فابری-پرو ۳۵۰-۳۴۶
 ~ منشور ۱۷۴-۱۷۳
 توری
 ~ بازتابی ۵۱۳-۵۱۲
 بدل ~ ۵۱۸
 ~ پلکانی ۵۱۷، ۵۲۰، ۵۲۷
 ثابت ~ ۵۰۹
- طیف‌نمایی تبدیل فوریه‌ای در ~
 ۷۷۲-۷۶۹
 ~ نجومی ۳۸۲-۳۸۱
 ~ نجومی ۳۸۲-۳۸۱
 تراگسیلندگی ۳۳۶، ۳۴۴، ۳۴۶، ۳۹۰، ۵۹۵،
 ۶۰۴، ۷۵۶، ۷۹۰
 ترموکوبل ۳۶
 ترمیستور ۳۶
 تشخیص نقش ۷۵۱، ۷۶۲
 تشدیدگر لیزر ۶۶۲-۶۲۱، ۶۲۴، ۶۳۱-۶۳۰
 تشکیل تصویر ۶۰-۵۸
 تصفیه فضایی ۷۵۰، ۷۶۱-۷۵۸
 تصویر
 ~ حقیقی ۵۵، ۷۶، ۳۸۹، ۳۹۴
 ~ مجازی ۵۶-۵۵، ۷۶، ۳۸۹، ۳۹۴
 تصویرسازی داده‌های اپتیکی ۷۶۷-۷۵۰
 تابع پخش نقطه‌ای در ~ ۷۶۶
 تابع تبدیل در ~ ۷۶۹-۷۶۸
 تحلیل طیف در ~ ۷۵۸-۷۵۵
 تشخیص نقش در ~ ۷۵۰، ۷۶۲
 همبستگی در ~ ۷۶۵-۷۶۱
 هم‌تافتگی در ~ ۷۶۷-۷۶۵
 تطابق چشم ۲۲۲
 تغییر فاز در بازتاب ۳۰۳، ۳۰۵، ۳۱۰، ۳۳۷،
 ۶۰۱-۵۹۷
 تفکیک
 ~ چشم ۲۲۵-۲۲۴، ۴۸۷-۴۸۶
 ~ در تلسکوپ ۳۸۴-۳۸۳
 ~ عدسی ۴۸۳-۳۸۵
 ~ میکروسکوپ ۴۸۷-۴۸۶
 تقویت پارامتری ۷۸۵
 تک‌فامگر ۵۲۲

جدول کمیته‌های تابش‌سنجی ۱۷
 جدول کمیته‌های نورسنجی ۱۷
 جسم خاکستری ۲۷
 جفت تحلیلگر قطبیده ۴۳۳
 چپگردان ۴۵۲
 چشم
 ~ آسودگی ۱۹۲، ۲۰۱
 ~ آستیگماتیسم ۲۳۰-۲۳۱
 پاسخ ~ به انرژی تابشی ۲۲-۲۳
 تفکیک ~ ۲۲۴-۲۲۵
 تیزبینی ~ ۲۲۴-۲۲۵
 دوربینی ~ ۲۲۹-۲۳۰
 ساختمان ~ ۲۱۷-۲۱۸
 عدسی ~ ۲۳۶، ۲۱۷-۲۱۸
 لیزر درمانی ~ ۲۴۰، ۲۲۳-۲۴۰
 نزدیک‌بینی ~ ۲۲۶-۲۲۸
 ~ نموداری ۲۲۰
 چشمی
 ابیراهی ~ ۱۸۹
 بزرگنمایی زاویه‌ای ~ ۱۹۲، ۱۸۷
 ~ رامسدن ۲۱۳، ۱۸۹-۱۹۳
 ~ کلنر ۱۹۱
 ~ هویگنس ۱۸۹-۱۹۰
 چشمه(های)
 ~ التهایبی ۲۷-۲۸
 ~ پلانکی ۲۶
 ~ تابش اپتیکی ۲۷-۳۵
 ~ همدوس ۶۴۵، ۲۷۷
 چگالی
 ~ اپتیکی ۷۷۴، ۳۸۸
 ~ جریان ۸۲۷-۸۲۸، ۸۲۱
 چنبره کورنو ۵۴۳-۵۵۶

~ داخلی (هولوگرافیک) ۵۱۸-۵۲۰
 ~ سینوسی ۷۵۸-۷۵۹
 ~ در وضعیت لیتر ۵۲۱، ۵۱۶
 ~ طیف‌سنج ۵۲۱-۵۲۳
 ~ عبوری ۵۱۲
 ~ کاو ۵۱۳
 ~ هولوگرافیک ۵۱۹، ۳۸۹-۳۹۰
 توری پراش ۵۰۴-۵۲۴، ۴۹۲-۴۹۸
 ابزار ~ ۵۲۰-۵۲۲
 انواع ~ ۵۱۲-۵۱۳
 بازده ~ ۵۱۴
 پاشیدگی در ~ ۵۰۹-۵۱۰
 تابیدگی در ~ ۴۹۴-۴۹۵
 ~ تداخلی ۵۱۸-۵۲۰
 توان تفکیک ~ ۵۰۹-۵۱۲
 ~ کاو ۵۱۳
 گستره طیفی آزاد ~ ۵۰۷-۵۰۸
 معادله ~ ۵۰۴-۵۰۵، ۴۹۶
 ~ هولوگرافیک ۵۱۹
 توزیع بولتزمن ۶۲۴، ۶۱۹
 تولید هماهنگ دوم ۷۷۹-۷۸۲
 تیزبینی ۴۸۷، ۲۲۵-۲۲۴
 ثابت
 ~ اپتیکی ۸۱۶، ۶۰۷
 ~ انتشار ۲۵۰
 ~ پلانک ۲۵، ۸
 ~ خورشیدی ۲۶۸، ۲۸
 ~ دی‌الکتریک ۸۳۳، ۲۷۸
 جبرانگر سولی-بابینه ۴۴۷
 جبهه موج ۲۵۶
 بازسازی ~ ۳۹۰، ۳۸۰
 جدول شیشه‌های اپتیکی ۱۵۰

- چندجمله‌ایهای هرمیت ۶۸۸-۶۸۴
چندگسلی ۷۰۷
حلقه‌های نیوتون ۶، ۳۱۷-۳۱۴
خلاصه ماتریسهای جونز ۴۲۲
خود همبستگی ۷۶۳، ۷۷۴
دایره(های)
~ رولاند ۵۵۲
~ کمترین تاری ۱۸۴
~ کومایی ۱۳۹-۱۳۸
درجه همدوسی ۳۷۴-۳۷۰، ۳۸۰
درخشانی ۱۷، ۲۴
درخشایی ۱۷
دریچه
~ پروستر ۴۳۹-۴۳۸
~ خروجی ۱۶۴
~ جدول ۱۶۵
~ ورودی ۱۶۴
~ جدول ۱۶۵
دستگاه اپتیکی آپلاتنیک ۱۴۰
دگرنامی ۷۷۲
دمای رنگ ۲۷
دمنده لیزر ۶۲۲-۶۲۱
دوتایی پادرنگ ۱۵۲-۱۴۷
دوربین
~ تماشای تئاتر ۲۰۲-۲۰۱
~ رؤیت نلسکویی ۲۰۳-۲۰۲
~ عکاسی ۱۷۹-۱۷۸
تاییدگی در ~ ۱۸۳-۱۸۲
روزنه ~ ۱۸۰-۱۷۹
طراحی عدسیهای ~ ۱۸۶-۱۸۵
عمق میدان ~ ۱۸۵-۱۸۴
- گشودگی نسبی (عدد f) ~
۱۸۳-۱۸۲
نوردهی ~ ۱۸۲
~ ۳۵ میلیمتری ۱۸۶
دوربینی ۲۳۰-۲۲۹
دوشکافی یانگ ۳۰۳-۲۹۷
دوشکستی ۴۴۸-۴۴۲
~ دایره‌ای ۴۵۷، ۷۹۵
دوفامی ۴۳۶-۴۳۲
دوگانگی موج-ذره ۸۰۵
دو منشور فرنل ۳۰۵
دید
~ برجسته‌نما ۲۲۴-۲۲۳
~ تاریک ۲۲، ۲۲۲
~ و روشن ۲۲، ۲۲۲
~ دوچشمی ۲۲۳
~ روشن ۲۲، ۲۲۲
لیزر درمانی ~ ۲۴۰-۲۳۳، ۷۰۳
~ ناقص ۲۳۳-۲۲۶
دید(ی)
~ بهمنی ۳۸، ۷۲۳
~ گسیلنده نور ۳۴، ۷۲۲
لیزر ~ ۳۴، ۷۲۲، ۷۴۱
~ LED ۳۴، ۷۲۲، ۷۴۱
~ PIN ۷۲۳
ذخیره‌سازی
~ هولوگرافیک داده ۴۰۱-۴۰۰
~ هولوگرام ۴۰۱-۴۰۰
ذره‌بین ساده ۱۸۸-۱۸۷
راستگردان ۴۵۲
راه نوری ۶۰
ردیابی پرتو ۱۱۳

شعاع مختلط انحنا ۶۶۳

شکست

خلاصه فرمولهای ~ ۷۷

~ در آینه تخت ۵۵-۵۶

~ در سطح تخت ۵۵-۵۷

~ در سطح کروی ۶۸-۷۲

~ در عدسیهای ضخیم ۸۸-۹۳

~ در عدسیهای نازک ۷۲-۸۱

~ دوگانه ۶، ۴۴۳، ۴۴۸-۴۵۰

قانون ~ اسنل ۴۵، ۴۹، ۵۸-۵۵

ماتریس ~ ۹۵-۹۶

شکل لیسازو ۴۱۱-۴۱۰

شیء

~ آناستیگمات ۱۴۳

~ غوطه‌ور در روغن ۱۹۶

~ مجازی ۷۲، ۷۶

صافی

~ عبور نوار ۵۸۲

~ واندرلوگت ۷۶۳

صفحة فرود ۴۵

ضریب

~ الکترو-اپتیکی ۷۸۶

جدول ~ ۷۸۸

~ اینشتین ۶۲۱-۶۱۶

~ بازتاب ۳۰۷، ۳۳۷-۳۳۶، ۵۹۶-۵۹۲

۶۰۲

~ تمایل ۵۲۹، ۵۳۳

~ جذب ۴۳۷، ۴۰۸، ۷۳۳-۸۲۳

~ جور کردن فاز ۷۸۳

~ خاموشی ۶۰۹-۶۰۸، ۸۲۳، ۸۳۳-۸۳۰

~ درخشندگی ۲۲-۲۳

~ ریزی ۳۴۵

جدول معادلات ~ ۱۱۷

نرم‌افزار ~ ۱۱۳

رسانندگی ۶۰۶-۶۰۷، ۸۲۹-۸۲۸

رشته فوریه ۲۴۹، ۳۶۲-۳۵۹، ۷۵۶

روابط استوکس ۳۳۶

روزنه دوربین ۱۸۰-۱۷۹

ریزی ۳۵۱-۳۵۲

ضریب ~ ۳۴۵-۳۵۰

زاویه

~ بحرانی ۵۷، ۵۹۶-۵۹۵

~ در تارنوری ۷۲۵-۷۲۴، ۷۲۹

~ پروستر ۴۳۳-۴۳۲

~ فاز ۲۵۲

~ فرور توری ۵۱۵

~ قطبیده ۴۳۷، ۵۹۵

سایه‌زنی ۱۶۳

سرعت

~ فاز ۲۸۵-۲۸۰

~ گروه ۲۸۵-۲۸۰

سطح

~ پیتروال ۱۴۳

~ دکارتی ۶۲-۵۹

~ لامبرتی ۲۰، ۲۱۰، ۶۴۲

سنجه ۳۴۲، ۳۵۳

شبکه ۲۱۶

شدت ۱۸-۱۷

شرط

~ براگ ۳۹۷، ۷۹۹

~ سینوسی آبه ۱۳۹

~ مرزی برای E و B ۵۶۶، ۵۹۰

~ همدوسی ۲۹۴-۲۹۳، ۳۵۸، ۳۶۸

~ توری ۵۱۸-۵۲۰

- ~ شکل کادینگتون ۱۳۷، ۱۴۰
 ~ صفحه توری در پیوند $p - n$ ۳۸-۳۹
 ~ عبور ۳۳۶، ۵۹۳-۵۹۴، ۶۰۳
 ~ فیلم توری ۵۰۹
 ضریب شکست ۴۹
 اندازه‌گیری ~ گاز ۳۳۰-۳۳۲
 جدول ~ مواد ۴۴۵
 ~ چشم ۲۲۱-۲۱۸
 ~ در تابع بسامد ۱۷۰، ۴۴۲، ۸۲۶-۸۲۵،
 ۸۳۱-۸۳۲
 ~ در تار نوری ۷۲۶-۷۲۴
 ~ کوارتز برحسب طول موج ۴۵۰
 ~ مختلط ۴۴۳، ۶۸۰-۶۰۶، ۸۲۴-۸۲۳،
 ۸۳۰-۸۳۳
 ~ منشور ۱۷۰-۱۶۹
 ~ نسبی ۳۰۷، ۵۹۲
 طول عمر تابش خودبه‌خودی ۶۱۸
 طول موج
 ~ دوبروی ۸
 ~ فرانیهوفر ۱۵۱-۱۴۸، ۱۷۱
 طول همدوسی در بلور غیرخطی ۷۸۳-۷۸۲
 طیف
 ~ الکترومغناطیسی ۱۶-۱۴
 ~ توان ۳۶۵
 ~ نگاشت ۷۶۹
 طیف‌سنج
 ~ چرنی-ترنر ۵۲۲
 ~ منشوری ۱۷۳-۱۷۲
 طیف‌نگار
 ~ چرنی-ترنر ۵۲۲
 ~ وادزورث ۵۲۳
 عدد
 ~ آبه ۱۷۲
 ~ موج ۲۵۱
 ~ f ۱۸۳-۱۸۲، ۶۸۳
 عدسی(های)
 ~ بزرگ زاویه ۱۸۱
 ~ پتروال ۱۸۶
 ~ پروتور ۱۲۳
 تبدیل فوریه ~ ۷۵۵
 ~ تسار ۱۸۶-۱۸۵
 تفکیک در ~ ۴۸۵-۴۸۳
 ~ چشم ۲۲۱-۲۱۸، ۲۳۶
 ~ دوربین عکاسی ۱۸۷-۱۸۱
 ~ دورنما (تله‌فوتو) ۱۸۱
 ~ ذره‌بین ساده ۱۸۸-۱۸۷
 ~ سه‌تایی کوک ۱۲۲، ۱۸۶
 ~ ضخیم ۹۳-۸۸
 نقطه‌های بنیادی در ~ ۸۹
 طراحی ~ ۱۸۶-۱۸۵
 ~ عکاسی پروتور ۱۲۳
 گشودگی نسبی ~ ۱۸۳-۱۸۲
 ~ منظره رایید ۱۱۹-۱۱۸
 ~ نازک ۸۱-۷۲
 بزرگنمایی خطی در ~ ۵۵، ۶۷،
 ۷۱-۷۰
 ترکیب ~ ۸۱-۷۹، ۱۱۱-۱۱۰،
 ۱۴۷-۱۵۲
 توان شکست در ~ ۸۰-۷۹
 خلاصه فرمولهای ~ ۷۷
 روش آبه برای تعیین فاصله کانونی
 ~ ۸۶
 ماتریس ~ ۱۰۱-۹۷
 معادله عدسی‌سازان در ~ ۷۴، ۱۳۶

- فلوئورسانی ۶۳۲
 فوتودیود ۳۸-۳۹
 فوتون ۸۰۰-۸۰۱، ۶۱۶-۶۱۷، ۸-۱۱
 فوتونفزونگر ۷۲۳، ۳۵
 فونون ۸۰۰
 قانون
- ~ استفان-بولتزمن ۴۲، ۲۶
 ~ اسنل ۵۹۰، ۴۳۷، ۵۵-۵۸، ۴۹، ۴۵
 ~ انتشار ABCD در لیزر ۶۷۴-۶۷۵
 ~ اهم ۶۰۶
 ~ جابه‌جایی وین ۴۲، ۲۵
 ~ عکس مجذور ۱۸
 ~ عمومی انتشار لیزری ۶۷۳-۶۷۴
 ~ کسینوسی لامبرت ۱۹
 ~ مالوس ۴۳۲
 قرارداد علامتی تشکیل تصویر ۶۹، ۶۴
 قرص ایری ۶۳۸، ۴۸۳-۴۸۵
 قرینه ۲۳۱-۲۳۷، ۲۲۰، ۲۱۷
 قضیه
- ~ دیریکله ۳۵۹
 ~ نمونه‌گیری ۷۷۱-۷۷۲، ۷۲۳
 ~ وان‌سیتر-تسرنیکه ۳۷۹
 قطبش
- ~ بیضوی ۴۲۶، ۴۱۳-۴۱۵، ۴۰۵
 ~ جبرانگر ۴۴۷
 چرخشگر ۴۲۴، ۴۲۰-۴۲۱
 ~ چرخش ویژه ۴۵۲
 ~ دایره‌ای ۴۱۲، ۴۰۵، ۴۲۳-۴۲۵
 ۷۹۵، ۵۹۸، ۴۵۴-۴۵۶
 ~ ماتریس دستگاه ۴۲۶
 قطبش اپتیکی
- ~ از راه بازتاب ۴۳۶-۴۳۹
- معادله نیوتونی ~ ۸۱
 عمق
- ~ پوستی ۸۲۹
 ~ میدان ۱۸۴-۱۸۵، ۱۸۰
 عملگر لاپلاسی ۶۵۵، ۲۵۸
 فاز موج ۲۷۲-۲۷۳، ۲۵۲
 فازور ۵۴۳-۵۴۵، ۵۳۶، ۴۹۸، ۲۷۳-۲۷۴
 فاصله پرش ۷۲۶
 فاصله کانونی
- ~ آینه کروی ۶۵
 ~ دستگاه ۱۱۰، ۸۹
 روش آبه برای تعیین ~ ۸۶
 روش بسل برای تعیین ~ ۸۶
 ~ سطح شکست ۸۴-۸۵
 ~ عدسیهای نازک ۷۴
 فرمول
- ~ اویلر ۳۶۲، ۲۵۴
 ~ پاشیدگی کوشی ۸۲۶، ۱۷۵، ۱۷۰
 ~ عدسی‌سازان ۱۳۶، ۷۴
 فروزش توری پراش ۵۱۴-۵۱۸، ۵۱۱
 فریز(های)
- ~ جایگزیده ۳۳۵، ۳۳۳، ۳۱۳-۳۱۴
 ~ فیزو ۳۱۷، ۳۱۲-۳۱۴
 ~ ناجایگزیده ۴۳۳، ۳۱۲، ۲۰۳
 ~ هایدینگر ۳۱۳
 ~ همشیب ۳۴۴، ۳۳۳، ۳۱۳
 ~ همضخامت ۳۳۳-۳۳۴، ۳۱۳-۳۱۴
 فعالیت نوری ۴۵۲-۴۵۳
 اندازه‌گیری ~ ۴۵۲-۴۵۳
 ~ در پاشیدگی چرخشی ۴۵۴
 ~ در چرخش ۴۵۲-۴۵۳
 ~ کوآرتز ۴۵۲-۴۵۳

گسیلندگی ۱۷

گشودگی

~ عددی ۱۹۶، ۴۸۶

~ در تار نوری ۷۲۶، ۷۳۱-۷۳۰

~ مستطیلی ۴۷۹-۴۷۷

~ مکملی ۵۵۹

~ نسبی ۱۸۳-۱۸۲-۶۸۳

لامپ

~ تخلیه ۳۱

~ تنگستن ۳۰-۲۹

~ قوس جیوه‌ای ۳۱، ۶۴۴

~ قوس جیوه‌زنون ۳۳-۳۲

~ قوس دوتریم

~ قوس زنون ۳۱

~ قوس سدیم ۳۱

~ قوس کربن ۳۱

لایه(های)

اندازه‌گیری ضخامت ~ ۳۲۰-۳۱۷

~ با بارتانندگی زیاد ۳۵۲، ۵۷۲، ۵۷۹-۵۸۳

~ پادبازتاب ۳۰۷، ۵۷۲-۵۷۷

تداخل در ~ ۳۰۶-۳۰۵

جدول ضریب شکست ~ ۵۷۶

~ چندگانه ۳۰۹، ۵۸۳-۵۶۳

دی‌الکتریک ~ ۳۲۰-۳۰۵

~ چندگانه ۵۸۳-۵۶۳

لکهٔ یواسون ۵۳۹-۵۳۸

لیدار ۷۱۲-۷۱۰

لیزر(ی)

~ اکسایمر ۷۰۲-۷۰۱

انتشار ~ ۶۸۳-۶۷۱

اندازهٔ لکهٔ ~ ۶۷۰-۶۴۵

پردازش اطلاعات با ~ ۷۰۸-۷۰۷

~ از راه پراکندگی ۴۴۲-۴۳۹

~ بردارهای جونز ۴۱۷

~ بیضوی ۴۰۵، ۴۱۳-۴۱۶، ۴۲۶

جدول ~ ماتریسهای جونز ۴۲۲

~ جزئی ۴۰۵

~ خطی ۴۰۵، ۴۰۹-۴۰۸، ۴۲۲-۴۱۸

~ دایره‌ای ۴۱۲، ۴۰۵، ۴۲۳-۴۲۲، ۷۹۵

دو شکستی در ~ ۴۴۶-۴۴۲

~ دوquam ۴۳۶-۴۳۲

شکست دوگانه در ~ ۴۵۰-۴۴۸

فعالیت نوری در ~ ۴۵۸-۴۵۲

نورکشسانی در ~ ۴۶۰-۴۵۸

~ ماتریس دستگاه ۴۲۶

قطبشگر

~ چندلایه‌ای ۴۳۹-۴۳۸

~ خطی ۴۰۸-۴۰۷، ۴۲۳-۴۱۸

قطبیدگی الکتریکی p ۷۸۱-۷۸۰، ۸۲۱-۸۱۷

قطعات بار-جفت‌شدگی ۴۰-۳۹

کدری ۷۷۴

کلسیت ۴۵۲-۴۴۳، ۴۵۹

کلید Q ۷۹۲-۷۹۱

کوارتز ۴۴۶-۴۴۵، ۴۵۳-۴۵۰

کوانتوم ۷

کوما ۱۳۴، ۱۳۹-۱۳۸

گداخت لیزر-القایی ۷۰۴-۷۰۳

گرایندگی ۷۹

گسترهٔ ریلی ۶۷۸-۶۷۷

گستره طیفی آزاد

~ توری ۵۰۸-۵۰۷

~ فابری-پرو ۳۵۳-۳۵۰

گسیل القایی ۶۲۱-۶۱۴، ۶۳۰-۶۲۸

گسیلمندی ۲۶

- تار نوری در ~ ۷۲۲
- جدول انواع و پارامترهای ~ ۶۴۸-۶۵۰
- جدول کاربردهای ~ ۶۹۶
- چشم درمانی با ~ ۷۰۳، ۲۳۳-۲۴۰
- ~ در پزشکی، جدول ۷۰۱-۷۰۳
- ~ دیدی ۳۴، ۶۴۸-۶۴۹، ۷۴۱، ۷۲۲
- طرز کار ~ ۶۳۰-۶۲۵
- عناصر اساسی ~ ۶۲۵-۶۲۱
- گسیل القایی ~ ۶۲۱-۶۱۴
- مخابرات ~ ۷۰۵-۷۰۲
- مدهای ~ ۶۲۵
- مشخصات باریکه ~ ۶۸۹-۶۵۴
- نظریه تابش اینشتین در ~ ۶۲۱-۶۱۵
- ~ نئودیمیم-شیشه ۶۲۵-۶۲۵، ۶۴۱، ۶۴۹، ۷۰۵
- ~ نشون-هلیسم ۶۳۴، ۶۴۴-۶۴۰، ۶۴۹، ۷۰۵
- ۶۷۶-۶۷۵، ۶۸۰، ۷۰۲
- ~ یاقوتی ۶۲۳
- ~ یون-آرگون ۷۰۲-۷۰۱
- ~ CO_2 ۶۲۳، ۶۴۹-۶۴۸، ۶۹۷
- ~ ۷۰۳-۷۱۲، ۷۱۱
- ~ NOVA ۷۰۵
- ~ Nd : YAG ۶۲۳، ۶۴۹-۶۴۸، ۶۹۷
- ~ ۷۰۳-۷۱۳، ۷۱۱
- لوح دید اسنان ۲۲۶-۲۲۵
- لوزی فرنل ۵۹۸
- لوله نور ۷۲۰-۷۱۹
- ماتریس(های)
- ~ انتقال ۹۴
- ~ تبدیل ۵۶۹-۵۶۴، ۵۷۴، ۵۸۰
- ~ جونز ۴۲۷-۴۱۸
- ~ شکست ۹۵-۹۶
- ~ عدسی ۱۰۱-۹۷
- ماتریس تبدیل پرتو ۹۴
- خلاصه‌ای از ~ ۱۰۰
- خلاصه‌ای از ~ دستگاه ۱۰۶-۱۰۱
- مانع روزنه‌ای ۱۵۷
- ~، جدول ۱۶۵
- مانع میدانی ۱۶۴
- ماکسیممهای اصلی ۴۹۶-۴۹۴، ۵۰۶
- ماکسیممهای فرعی ۴۹۴
- محور اپتیک ۴۵۲-۴۴۴
- محور عبور ۴۳۳
- مخروطهای چشم ۲۱۸، ۲۲۳، ۷۲۰
- (مد(های)
- ~ گاوسی لیزر ۶۲۵، ۶۵۵-۶۵۴
- ~ مجاز در تار نوری ۷۳۰-۷۲۷
- ~ مرتبه بالاتر باریکه لیزری ۶۵۴، ۶۸۸-۶۸۳
- ~ TEM ۶۲۴، ۶۶۰-۶۵۹
- مدولاسیون نور ۸۰۳-۷۸۵
- مدوله‌سازی
- ~ بسامد ۷۲۲
- ~ دامنه ۷۲۲
- ~ رقمی ۷۲۲
- مرئیت فریز ۲۹۵
- مرتب‌های حذف‌شده ۴۹۲-۴۹۱
- مردمک
- ~ خروجی ۱۵۹
- ~ ورودی ۱۵۹
- ~، جدول ۱۶۵
- مزیت ژاکینو ۷۶۹
- مزیت فلزه ۷۶۹
- مشخصات لیزر
- ~، تکامی ۶۳۳-۶۳۲

- طیف‌سنج ~ ۱۷۲-۱۷۳
 ~ قائم ۱۷۸
 ~ قطبیده ۴۵۱-۴۵۲
 ~ گلان-هوا ۴۵۱-۴۵۲، ۷۹۲
 ~ ولاستن ۴۵۱
 ~ یورو ۱۷۸
 منطقه فرنل ۵۳۴-۵۳۵
 منطقه نیم‌دوره ۵۳۴-۵۳۵
 موج
 ~ الکترومغناطیسی ۲۵۹-۲۶۳
 ~ تخت ۶۵۵-۶۵۶، ۲۵۶-۲۵۸
 ~ کروی ۶۵۶-۶۵۸، ۲۵۸-۲۵۹
 مؤلفه الکتریکی عرضی و مغناطیسی ۴۳۶،
 ۵۸۸-۶۰۱
 مولکول دوقطبی ۸۱۷
 میدان دید ۱۶۲-۱۶۵
 میکروسکوپ ۱۹۳-۱۹۹
 انواع شیئی ~ ۱۹۶-۱۹۷
 بزرگنمایی ~ ۱۹۴
 تداخل در شیئی ~ ۳۱۷-۳۲۰
 تفکیک ~ ۴۸۶-۴۸۷
 گشودگی عددی ~ ۱۹۶
 میلتابه ۲۹، ۲۷
 میله‌های چشم ۲۱۸، ۲۲۳، ۲۲۰
 نرده رونچی ۷۵۵-۷۵۶
 نزدیک‌بینی ۲۲۹-۲۳۶، ۲۳۴
 نظریه نرده‌ای ۲۷۱
 نقاط
 ~ اصلی ۸۹، ۱۱۰-۱۰۶
 ~ بنیادی ۸۹، ۱۱۳-۱۰۶
 موقعیت ~، جدول ۱۰۹
 ~ چشم ۲۲۰
- ~، تمرکزپذیری ۶۴۸-۶۴۴
 ~، شدت ۶۴۴-۶۴۱
 ~، همدوسی ۶۳۶-۶۳۴
 ~، یکسوئی ۶۴۰-۶۳۶
 معادلات فرنل ۷، ۵۸۷
 ~ برای دی‌الکتریک ۵۹۳
 ~ برای فلز ۸۰
 معادلات ماکسول ۷، ۵۶۴، ۸۲۲-۸۲۱، ۸۲۹
 معادله موج ۲۴۹-۲۴۶
 ~ الکترومغناطیسی ۲۶۰-۲۵۹، ۶۵۵
 ~ تخت ۲۵۸-۲۵۶، ۶۵۵
 ~ ساکن ۲۸۰-۲۷۸
 ~ کروی ۲۵۹-۲۵۸، ۶۵۸-۶۵۶
 ~ مختلط ۲۵۵
 ~ هماهنگ ۲۵۳-۲۴۹
 معادله نیوتونی عدسیهای نازک ۸۱
 معیار ریلی ۱۷۵، ۳۴۷، ۴۸۵-۴۸۳، ۵۱۱
 معیار نیکسی ۷۷۲-۷۷۳
 مکانیک کوانتومی ۷-۹، ۲۸۵، ۳۶۷
 منحنی پاسخ CIE ۲۲
 منزیوگر ایتیکی ۷۹۷
 منشور
 انحراف زاویه‌ای ~ ۱۶۹-۱۶۵
 انحراف مینیمم ~ ۱۶۸-۱۶۷
 ~ پادرنگ ۱۷۶
 پاشیدگی ~ ۱۶۶، ۱۷۱-۱۷۰
 ~ پلین-بروکا ۱۷۷-۱۷۶
 توان تفکیک ~ ۱۷۴-۱۷۳
 ~ دید مستقیم ۱۷۶
 ~ زکن ۴۵۱
 ~ سرنامونت ۴۵۱
 طرح ~ ۱۷۹-۱۷۶

- ~ دور چشم ۲۲۶
 ~ کور ۲۱۹
 ~ گرهی ۱۰۶-۱۱۰، ۹۰
 موقعیت ~، جدول ۱۰۹
 ~ نزدیک چشم ۲۲۶، ۱۸۷
 ~ همیوخ ۵۸
 نقش داغ لیزر ۶۶۸-۶۶۰
 نور خورشید ۲۷-۲۸
 نوردهی فیلم ۱۸۲
 نورسنجی ۲۱-۲۴
 نورکشسانی ۴۵۸-۴۶۰
 نوسانگر دوقطبی ۷۱۸-۷۲۱، ۷۸۱، ۴۳۷-۴۴۲
 ~ القایی ۸۱۷
 بسامد تشدید در ~ ۸۲۰
 گشتاور ~ ۸۱۷
 نوبه آشکارساز ۲۰
 نمودار پرتو
 ~ آینه کروی ۶۴-۶۷
 ~ دستگاه اپتیکی ۱۰۶-۱۰۷، ۸۹
 ~ عدسیهای نازک ۷۵
 نمونه دی الکتریک ۸۱۶-۸۱۷
 نیمرخ میدان الکتریکی در مد باریکه لیزر
 ۶۵۸-۶۶۰
 واپیچش
 ~ بالشتکی ۱۴۴-۱۴۶
 ~ بشکهای ۱۴۴-۱۴۶
 ~ در تار نوری ۷۳۴-۷۴۴، ۷۲۲
 ~ مدی ۷۳۴-۷۳۵
 وارونی جمعیت ۶۲۸-۶۲۹، ۶۲۱
 ورقه H پلاروید ۴۳۵-۴۳۶
 ولتاژ نیم موج
 ~ در اثر گیر ۷۹۲
 ~ در سلول یوکلز ۷۸۸
 همبستگی ۷۶۱-۷۶۵، ۷۵۰
 همبستگی ۷۶۵-۷۶۷، ۷۵۰
 همدوسی ۳۵۸
 تابع همبستگی ~ ۳۷۰
 ~ جزئی ۳۶۸-۳۷۶، ۳۵۸
 خلاصه روابط ~ ۳۷۴
 درجه ~ ۳۷۰-۳۷۴
 ~ زمانی ۳۷۶، ۳۶۶-۳۶۷، ۳۵۸
 ۶۳۴-۶۳۶
 ~ طولی ۳۵۸
 ~ و زمانی ۳۳۶، ۳۶۶
 ~ فضایی ۶۳۴-۶۳۶، ۳۷۶-۳۸۲، ۳۵۸
 پهنای ~ ۳۷۸
 ~ لیزر ۶۳۴-۶۳۶
 همیوخ سازی فاز اپتیکی ۸۰۳-۸۱۱
 آمیختگی چار-موج در ~ ۸۰۷
 ~ در تار نوری ۸۰۹-۸۱۰
 ~ در گداخت هسته‌ای ۸۰۹-۸۱۰
 ~ غیرخطی ۸۰۳-۸۱۱
 نشانه‌گیری و هدفیابی در ~ ۸۰۹-۸۱۰
 هولوگرافی زمان واقعی در ~ ۸۰۶-۸۰۷
 هولوگرام
 بازسازی ~ ۳۹۳
 ~ توری ۳۸۹
 ~ چشمه نقطه‌ای ۳۸۸-۳۹۰
 ~ حجمی ۴۰۳، ۳۹۶-۳۹۷
 ~ رنگین کمانی ۳۹۶
 ~ زمان واقعی ۸۰۷-۸۰۸
 ~ فراصوتی ۳۹۹-۴۰۰
 ~ نور سفید (رنگین کمانی) ۳۹۶-۳۹۷
 ~ و اندرلوگت (جفت شده) ۷۶۵