فصل اول:

اصل انرژی و بقای انرژی

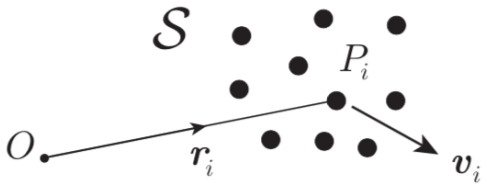
در این فصل اصل انرژی را برای سیستم های چند ذره ای مورد بررسی قرار خواهیم داد و نشان خواهیم داد که تحت شرایط خاصی می توان بقای انرژی را به دست آورد. اکنون می توان بقای انرژی را برای شمار زیادی از سیستم ها بکار گرفت.

نکته: برای سیستم های تنها با یک درجه آزادی رابطه بقای انرژی برای توصیف کامل حرکت سیستم کافی است.

فضای پیکربندی و درجات آزادی

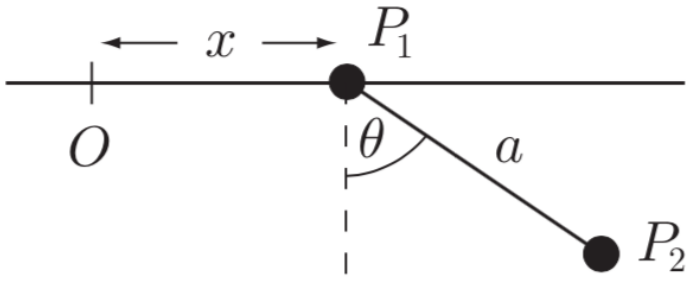
با توجه به شکل سیستم S چند ذره ای $P_1, P_2, \ldots, P_N$ با جرم های $m_1, m_2, \ldots, m_N$ را در نظر می گیریم.

فضای پیکربندی: از لحاظ هندسی به مجموعه بردار مکان $r_1, r_2, \ldots, r_N$ مربوط به ذرات فضای پیکربندی گفته می شود.



نکته: اگر سیستم مقید نباشد مکان مربوط به ذرات مستقل از هم می تواند انتخاب شود، در حالی که برای سیستم های مقید مکان ذرات از همدیگر مستقل نمی باشد و به هم وابسته هستند.

مثال: اگر ذره P_1 و P_2 مطابق شکل زیر با یک میله ای به طول a به یکدیگر متصل باشند در این صورت مکان ذره ۱ مستقل از مکان ذره ۲ نمی باشد و قید $|r_1 - r_2| = a$ میان بردارهای مکان دو ذره حاکم است.



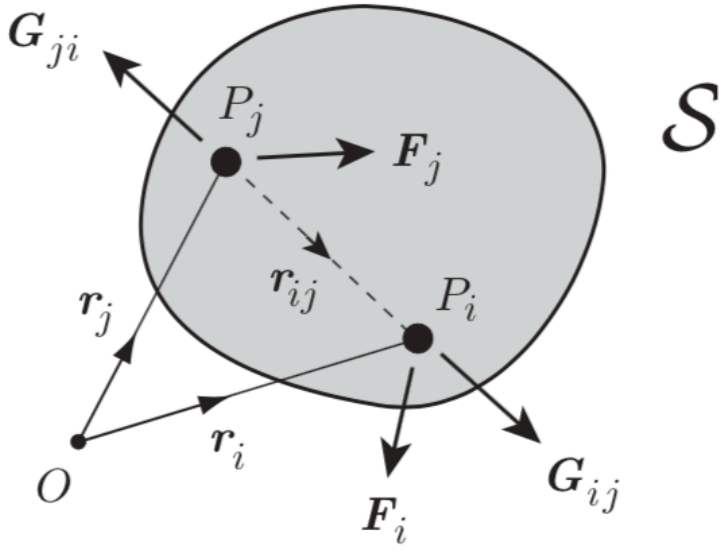
درجه آزادی: به تعداد متغیرهای اسکالری که شما برای توصیف فضای پیکر بندی به آن نیاز دارید. برای مثال اگر سیستم دارای قید نباشد شما مکان هر ذره P را با بردار r مشخص می کنید که هر بردای دارای سه مولفه اسکالر در سه راستای x, y, z است. بنابراین برای توصیف ذره شما سه درجه آزادی دارید. اکنون N ذره دارای $3N$ درجه آزادی است.

نکته: حضور قید در سیستم درجات آزادی را کاهش می دهد. برای نمونه در شکل بالا اگر دو ذره آزاد (بدون قید) بودند شما نیاز به ۶ درجه آزادی برای توصیف آنها داشتید و با وارد کردن قید مثلا حرکت ذره P_1 تنها در جهت x شما از تعداد کل درجات آزادی ۲ عدد کم کردید از طرفی اگر فرض شود ذره P_2 نیز مجاز به نوسان در صفحه $x-y$ باشد ۱ درجه آزادی دیگر نیز از تعداد کل کاسته خواهد شد. از سوی دیکر قید $|r_1 - r_2| = a$ نیز یک درجه آزادی دیگر از سیستم کاهش می دهد پس داریم، $DOF = 6 - 2 - 1 - 1 = 2$ یعنی برای توصیف این سیستم نیاز به دو متغیر اسکالر x و θ است.
نکته: تعداد درجه آزادی برابر با تعداد معادلات مستقل برای توصیف حرکت یک سیستم هستند. برای مثال برای توصیف حرکت سیستم بالا تنها نیاز به دو معادله مستقل است.

تمرین: ۱- برای توصیف یک پاندلم ساده که تنها در صفحه $x-y$ نوسان می کند، نیاز به چند درجه آزادی است؟ ۲- لغزش یک ذره در یک پوسته نیم کره؟

اصل انرژی: بار دیگر سیستم چند ذره ای S در نظر بگیرید، ممکن است به تعدادی از این ذرات نیروی خارجی F_i وارد شود، علاوه بر آن ممکن است ذرات سیستم به یکدیگر نیز نیروی داخلی G_{ij} را وارد کنند. همان طور که در شکل پیداست نیروهای داخلی G_{ji} که از ذره P_j به ذره P_i وارد می شود که در امتداد خط واصل میان دو ذره و در جهت مخالف با نیرود داخلی G_{ij} است که از طرف ذره P_i به P_j وارد می شود. بنابراین

$$\boldsymbol{G}_{ji} = -\boldsymbol{G}_{ij}, \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{G}_{ij} \parallel (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j). \tag{9.1}$$



بنابراین طبق قانون دوم نیوتن، معادله حرکت برای ذره P_i با رابطه زیر داده می شود.

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{G}_{ij}, \tag{9.2}$$

با ضرب داخلی دو طرف معادله در بردار سرعت داریم

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{G}_{ij} \right\} \cdot \boldsymbol{v}_i, \tag{9.3}$$

اکنون با گرفتن انتگرال از طرفین در بازه زمانی $[t_{\mathscr{A}}, t_{\mathscr{B}}]$ اصل انرژی برای سیستم های چند ذره ای با رابطه زیر داده می شود.

$$T_{\mathcal{B}} - T_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \, dt + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{G}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i \, dt \tag{9.4}$$

بقای انرژی

سیستم های غیر مقید: زمانی که سیستم بدون هیچ گونه قیدی باشد تمام نیروها اعمال شده به سیستم به طور مستقیم قابل تشخیص هستند. اگر فرض کنیم نیروهای خارجی وارد بر چنین سیستمی نیروهای پایستار باشند یعنی $F_i = - \bigtriangledown \phi_i$ که در آن ϕ_i تابع انرژی پتانسیل از نیروی F_i است. در این صورت معادله اول قسمت سمت راست معادله (۹.۴) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \, dt = \sum_{i=1}^{N} (\phi_i(\boldsymbol{r}_{\mathcal{A}}) - \phi_i(\boldsymbol{r}_{\mathcal{B}})) = \Phi(\mathcal{A}) - \Phi(\mathcal{B}),$$

که در این رابطه به علت عدم وجود هرگونه قیدی می توان پتاسیل ها را به طور مستقل نوشت.

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \phi_1(\boldsymbol{r}_1) + \phi_2(\boldsymbol{r}_2) + \cdots + \phi_N(\boldsymbol{r}_N)$$

مثال: اگر تمام ذرات سیستم S تحت نیروی یکنواخت گرانش قرار گیرید در این صورت نیروی که به ذره P_i نیروی گرانش $F_i = -m_i g k$ است و به علت پاستار بودن نیروی گرانش، انرژی پتانسیل گرانشی با رابطه $\phi_i = m_i g z_i$ داده می شود. (توجه تمام ذرات در جهت z جهت دهی کرده اند.) در این صورت انرژی پتاسیل کل با رابطه زیر محاسبه خواهد شد.

$$\Phi = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \cdots + m_N g z_N.$$

تمرین: رابطه بالا را با استفاده از رابطه مربوط به مختصات مرکز جرم باز نویسی کنید؟

اکنون قصد داریم مشابه قسمت قبل برای نیروهای خارجی، رابطه ی مشابه ای را برای نیروهای داخلی به دست آوریم.
نکته: اگر بزرگی نیروی داخلی G_{ij} تنها به فاصله بین دو ذره r_{ij} بستگی داشته باشد در این صورت نیروی پایستار نامیده می شود. (مانند نیروی گرانش وارد شده از سیارات گوناگون در منظومه شمسی).
حال اگر نیرو داخلی پایستار باشد بنابراین داریم:

$$\boldsymbol{G}_{ij} = h_{ij}(r_{ij})\,\hat{\boldsymbol{r}}_{ij} \tag{9.5}$$

که در رابطه بالا h_{ij} نیروی دافعه میان دو ذره و نیز بردار یکه با رابطه زیر تعریف می شود.

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \qquad r_{ij} = |\boldsymbol{r}_{ij}| \qquad \hat{\boldsymbol{r}}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij}/r_{ij}. \tag{9.6}$$

در این صورت داریم.

$$\boldsymbol{G}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{G}_{ji} \cdot \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{G}_{ij} \cdot (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) = h_{ij}(r_{ij})\,\hat{\boldsymbol{r}}_{ij} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt} = \left(\frac{h_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}}\right) \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt}$$

$$= h_{ij}(r_{ij})\,\frac{dr_{ij}}{dt},$$

در رابطه بالا از رابطه $r_{ij} \cdot \dot{r}_{ij} = r_{ij} r_{ij}$ استفاده شده است. اکنون کارانجام شده توسط نیروی داخلی G_{ji} با

$$\int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} h_{ij}(r_{ij}) \frac{dr_{ij}}{dt} dt = \int_{r_{ij}(\mathcal{A})}^{r_{ij}(\mathcal{B})} h_{ij}(r_{ij}) dr_{ij} = H_{ij}(r_{ij}(\mathcal{A})) - H_{ij}(r_{ij}(\mathcal{B})),$$

به دست می آید. بنابراین کار کل انجام شده توسط تمام نیروهای داخلی با رابطه زیر داده می شود.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{G}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i \, dt = \Psi(\mathcal{A}) - \Psi(\mathcal{B}),$$

که

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} H_{ij}(r_{ij})$$

انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای داخلی است.

تمرین: اگر سیستمی متشکل از سه ذره باردار با بارهای e_1, e_2, e_3 باشد که در سه راس مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته اند. در این صورت انرژی پتانسیل کل چقدر است؟ نیروی وارد بر ذرات باردار نیروی الکترواستاتیک است. ($h_{ij} = \frac{e_i e_j}{r_{ij}}$)

اکنون با تعریف پتانسیل کل به صورت $V = \Phi + \Psi$، معادله پایستگی به صورت $T + V = E$ تعریف می شود.

مثال: اگر فرض کنید ستاره ای پر جرمی به جرم M توسط دو جسم دیگر با جرم های m_1 و m_2 چرخانیده می شود. در این صورت معادله پایستگی این سیستم را به دست آورید؟

به علت بزرگ بودن جرم ستاره می توان آن را تقریبا ثابت و در مبدا O در نظر گرفت در ان صورت نیروی که این ستاره به دو جسم دیگر وارد می کند را به عنوان نیروهای خارجی و نیز نیروهایی که این دو جسم به هم وارد می کنند را به عنوان نیروی داخلی در نظر می گیریم.

نکته: سیستم مذکور را می توان به عنوان یک سیستم دو ذره ای در نظر گرفت.

در این صورت انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی به صورت

$$\Phi = -\frac{M m_1 G}{r_1} - \frac{M m_2 G}{r_2},$$

همچنین نیروی داخلی بین دو جسم با رابطه $h_{ij} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r_{12}}$ داده می شود. بنابراین انرژی پتانسیل مربوط به نیروی داخلی به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$H_{12} = -\int h_{12}(r_{12})\, dr_{12} = \int \frac{m_1 m_2 G}{(r_{12})^2}\, dr_{12} = -\frac{m_1 m_2 G}{r_{12}},$$

نهایتا معادله پایستگی با رابطه زیر نوشته می شود.

$$\tfrac{1}{2}m_1 |\boldsymbol{v}_1|^2 + \tfrac{1}{2}m_2 |\boldsymbol{v}_2|^2 - MG\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \frac{m_1 m_2 G}{r_{12}} = E,$$

نکته: به علت اینکه درجات آزادی این سیستم ۶ است بنابراین معادله پایستگی به تنهایی برای توصیف تحول سیستم کافی نیست.