۸

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ **قیمت سایه‌ای:**

- قیمت سایه‌ای عبارت است از ارزش نهایی منابع به کار رفته در تولید.

قیمت سایه‌ای منبع ام (با y_i نشان داده می‌شود) مبین آهنگ افزایش Z در اثر افزایش یک واحد به این منبع است (b_i) است.

- تصمیم گیرنده بر اساس قیمت سایه‌ای در می‌یابد که چنانچه یک واحد منبع از نوع ام فراهم کند، چه مقدار سود کل او افزایش می‌یابد.
- در روش سیمپلکس (مدل‌های استاندارد)، قیمت سایه‌ای هر منبع مورد نظر را می‌توان از طریق ضریب متغیر کمکی آن منبع در سطر صفر تابلوی بهینه به دست آورد.

۹

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ **قیمت سایه‌ای:**

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	RHS
Z_0	1	$^{14}/_3$	0	0	$^{1}/_3$	$^{7}/_3$	$^{3650}/_3$
X_2	0	$^{1}/_3$	1	0	$^{2}/_3$	$-^{1}/_3$	$^{400}/_3$
X_3	0	$^{4}/_3$	0	1	$-^{1}/_3$	$^{2}/_3$	$^{490}/_3$

قیمت سایه‌ای منبع نیروی کار (منبع اول) مساوی با $\frac{1}{3}$ و برای هر کیلوگرم مواد اولیه (منبع دوم) $\frac{7}{3}$ است (ضرایب S_1 و S_2 در سطر صفر (Z_0) تابلوی بهینه)

$$Z^* = \frac{1}{3} \times 430 \quad + \quad \frac{7}{3} \times 460 = \frac{3650}{3}$$

قیمت سایه‌ای منبع اول | مقدار منبع اول | قیمت سایه‌ای منبع دوم | مقدار منبع دوم

۱۰

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ قیمت سایه‌ای برای مدل‌های غیر استاندارد:

- مدل‌هایی از نوع Max با محدودیت‌های کوچکتر مساوی (≤) را به عنوان مدل استاندارد در نظر می‌گیرند.
- مدل‌های با محدودیت بزرگتر مساوی (≥) یا مساوی (=) به عنوان یک مدل غیر استاندارد برای استخراج قیمت سایه‌ای تلقی خواهد شد.

برای به دست آوردن قیمت سایه‌ای در مدل‌های غیر استاندارد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف: اگر تابع هدف از نوع Max و محدودیت بزرگتر مساوی باشد، مقدار قیمت سایه پس از حذف مقدار M از ضریب R در سطر صفر تابلوی بهینه به دست می‌آید.

ب: اگر تابع هدف از نوع Min و محدودیت بزرگتر مساوی باشد، مقدار قیمت سایه‌ای پس از حذف مقدار M از ضریب R در سطر صفر تابلوی بهینه و ضرب در (۱-) به دست می‌آید.

۱۱

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ قیمت سایه‌ای برای مدل‌های غیر استاندارد

مثال:

$$\text{Min } Z = ۱۰x_۱ + ۱۵x_۲$$
s.t:
$$x_۱ + ۵x_۲ \ge ۸$$
$$x_۱ + x_۲ \ge ۴$$
$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Max } (-Z) = -۱۰x_۱ - ۱۵x_۲ - MR_۱ - MR_۲$$
s.t:
$$x_۱ + ۵x_۲ - S_۱ + R_۱ = ۸$$
$$x_۱ + x_۲ - S_۲ + R_۲ = ۴$$
$$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, R_۱, R_۲ \ge ۰$$

۱۲

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ قیمت سایه‌ای برای مدل‌های غیر استاندارد

مثال:

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
Z_o	-1	0	0	$5/4$	$35/4$	$M-5/4$	$M-35/4$	-45
X_2	0	0	1	$-1/4$	$1/4$	$1/4$	$-1/4$	1
X_1	0	1	0	$1/4$	$-5/4$	$-1/4$	$5/4$	3

قیمت سایه‌ای منبع اول $= -\left(\cancel{M}-\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}$

قیمت سایه‌ای منبع دوم $= -\left(\cancel{M}-\frac{35}{4}\right)=\frac{35}{4}$

$$Z^* = \frac{5}{4}\times 8 \quad + \quad \frac{35}{4}\times 4 = 45$$

۱۳

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ سیمپلکس ثانویه

مساله ثانویه عبارت است از یک مساله برنامه‌ریزی خطی برای یافتن ارزش‌هایی (قیمت سایه‌ای) که ملاک ارزیابی منابع مورد استفاده است.

❑ مراحل نوشتن مساله ثانویه با توجه به مساله اولیه

۱- چنانچه مساله اولیه از نوع Max باشد، مساله ثانویه از نوع Min است.

۲- هر متغیر ثانویه (y_i) متناظر است با یک محدودیت در مساله اولیه. مثلا اگر مساله اولیه ۳ محدودیت داشته باشد، مساله ثانویه دارای سه متغیر y_1، y_2 و y_3 است.

۳- عناصر سمت راست (b_i) در مساله اولیه، ضرایب تابع هدف در مساله ثانویه را تشکیل می‌دهند.

۴- ضرایب محدودیت‌ها در مساله اولیه a_{ij} متناظر با a_{ji} در مساله ثانویه است.

۵- ارزش‌های C_j در مساله اولیه، مقادیر سمت راست مساله ثانویه را تشکیل می‌دهند.

۶- کلیه محدودیت‌ها در مساله Max اولیه به صورت $\leq$ است در حالیکه کلیه محدودیت‌ها در مساله Min ثانویه از نوع $\geq$ است.

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ سیمپلکس ثانویه

مساله ثانویه

$$Max\ Z = 3\ X_1 + 3\ X_2 + 5\ X_3$$

C_j

$$2\ X_1 + 2\ X_2 + 3\ X_3 \leq 430$$
$$3\ X_1 + 1\ X_2 + 2\ X_3 \leq 460$$

مساله اولیه

$$a_{ij} = a_{ji}$$

b_j

$$Min\ y = 430\ y_1 + 460\ y_2$$

$$2\ y_1 + 3\ y_2 \geq 3$$
$$2\ y_1 + 1\ y_2 \geq 3$$
$$3\ y_1 + 2\ y_2 \geq 5$$

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ سیمپلکس ثانویه

مثال:

$$Max\ Z = 5\ X_1 + 10\ X_2 + 8\ X_3$$

$S.t$

$$5\ X_1 + 3\ X_2 - X_3 \leq 100$$
$$\frac{1}{2}\ X_1 + \frac{3}{2}\ X_2 + 4\ X_3 \leq 120$$
$$2\ X_1 + 6\ X_3 \leq 90$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$Min\ y_0 = 100\ y_1 + 120\ y_2 + 90\ y_3$$

$S.t$

$$5\ y_1 + \frac{1}{2}\ y_2 + 2\ y_3 \geq 5$$
$$3\ y_1 + \frac{3}{2}\ y_2 \geq 10$$
$$-1\ y_1 + 4\ y_2 + 6\ y_3 \geq 8$$
$$y_1, y_3, y_3 \geq 0$$

۱۶

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ موارد خاص در فرم عمومی مساله اولیه و مساله ثانویه

در شرایط استاندارد تبدیل مساله اولیه به ثانویه، تابع هدف مساله اولیه از نوع Max و محدودیت‌ها از نوع کوچکتر مساوی (≤) است.

❑ وجود محدودیت مساوی (=)

$$Max\ z = C_1X_1 + C_2X_2$$

S.t

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \longrightarrow \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \geq b_1 \xrightarrow{\times(-1)} -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \leq -b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 \end{cases}$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

S.t

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1$$

$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \leq -b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

۱۷

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ موارد خاص در فرم عمومی مساله اولیه و مساله ثانویه

$$Max\ z = C_1X_1 + C_2X_2$$

S.t

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1$$

$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \leq -b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

حال متناظر با محدودیت اول متغیر y'_1 و متناظر با محدودیت دوم متغیر y''_1 ، و برای محدودیت سوم متغیر y_2 را به کار می‌بریم.

$$Min\ y_0 = b_1y'_1 - b_1y''_1 + b_2y_2$$

S.t

$$a_{11}y'_1 - a_{11}y''_1 + a_{21}y_2 \geq C_1$$

$$a_{12}y'_1 - a_{12}y''_1 + a_{22}y_2 \geq C_2$$

$$y'_1, y''_1, y_2 \geq 0$$

۱۸

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ موارد خاص در فرم عمومی مساله اولیه و مساله ثانویه

$$Min\ y_0 = b_1(y_1' - y_1'') + b_2y_2$$

S.t

$$a_{11}(y_1' - y_1'') + a_{21}y_2 \geq C_1$$

$$a_{12}(y_1' - y_1'') + a_{22}y_2 \geq C_2$$

$$y_1', y_1'', y_2 \geq 0$$

$$Min\ y_0 = b_1y_1' - b_1y_1'' + b_2y_2$$

S.t

$$a_{11}y_1' - a_{11}y_1'' + a_{21}y_2 \geq C_1$$

$$a_{12}y_1' - a_{12}y_1'' + a_{22}y_2 \geq C_2$$

$$y_1', y_1'', y_2 \geq 0$$

$$y_1 = y_1' - y_1''$$

$$Min\ y_0 = b_1y_1 + b_2y_2$$

S.t

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq C_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq C_2$$

y_1 آزاد در علامت، $y_2 \geq 0$

۱۹

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ موارد خاص در فرم عمومی مساله اولیه و مساله ثانویه

قائده کلی

به ازای هر محدودیت مساوی در مساله اولیه، یک متغیر آزاد در علامت در مساله ثانویه وجود دارد

مسأله ثانویه	مسأله اولیه
$Min\ y_0 = ۲۰ y_1 + ۲۴ y_2 + ۱۰ y_3$	$Max\ Z = ۵ x_1 + ۱۰ x_2$
s.t:	s.t:
$۸ y_1 + y_2 + ۲ y_3 \geq ۵$	$۸ x_1 + ۴ x_2 \leq ۲۰$
$۴ y_1 + ۸ y_2 + ۳ y_3 \geq ۱۰$	$x_1 + ۸ x_2 = ۲۴$
$y_1, y_3 \geq ۰$	$۲ x_1 + ۳ x_2 \leq ۱۰$
y_2 آزاد در علامت	$x_1, x_2 \geq ۰$

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ موارد خاص در فرم عمومی مساله اولیه و مساله ثانویه

❑ تابع هدف Min

الف: اگر مساله اولیه از نوع Min باشد، مساله ثانویه از نوع Max خواهد بود.

ب: همه محدودیت‌های مساله اولیه باید از نوع بزرگتر مساوی (≥) باشد، در این صورت همه محدودیت‌های مساله ثانویه از نوع کوچکتر مساوی (≤) خواهد بود.

مسأله اولیه

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t:}& \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

تبدیل محدودیت →

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t:}& \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &\ge -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ موارد خاص در فرم عمومی مساله اولیه و مساله ثانویه

❑ تابع هدف Min

مساله اولیه

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t:}& \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &\ge -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

مساله ثانویه

$$\begin{aligned} \text{Max } y_0 &= -6y_1 + y_2 \\ \text{s.t:}& \\ -2y_1 + 2y_2 &\le 1 \\ 3y_1 + 3y_2 &\le 2 \\ -y_1 + y_2 &\le 1 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

۱

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ حل مساله برنامه ریزی خطی به روش Dual Simplex

$$Min\ Z = 12X_1 + 5X_2$$

$S.t$

$$4X_1 + 2X_2 \geq 80$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 90$$

$$Max\ \ -Z + 12X_1 + 5X_2 = 0$$

$S.t$

$$-4X_1 - 2X_2 \leq -80 \longrightarrow -4X_1 - 2X_2 + S_1 \leq -80$$

$$-2X_1 - 3X_2 \leq -90 \longrightarrow -2X_1 - 3X_2 + S_2 \leq -90$$

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_o	-1	12	5	0	0	0
S_1	0	-4	-2	1	0	-80
S_2	0	-2	-3	0	1	-90

۱

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ حل مساله برنامه ریزی خطی به روش Dual Simplex

۱- ابتدا سطری که سمت راست آن منفی‌تر است را انتخاب می‌کنیم.

۲- در مرحله بعد اعداد سطر صفر را به قدر مطلق اعداد منفی سطر لولا تقسیم کرده، کمترین مقدار مثبت نشان دهنده ستون لولا (متغیر ورودی) خواهد بود.

۳- این روش تا جایی ادامه پیدا می‌کند که در سمت راست تابلو مقدار منفی وجود نداشته باشد.

ستون لولا

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	
Z_o	-1	12	5	0	0	0	
S_1	0	-4	-2	1	0	-80	
S_2	0	-2	-3	0	1	-90	سطرلولا

۱

حل مساله برنامه‌ریزی خطی : مساله ثانویه

❖ حل مساله برنامه ریزی خطی به روش Dual Simplex

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_o	-1	$\frac{26}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	-150
S_1	0	$\frac{-8}{3}$	0	1	$\frac{-2}{3}$	-20
X_2	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	30
Z_o	-1	2	0	$\frac{5}{2}$	0	-200
S_2	0	4	0	$\frac{-3}{2}$	1	30
X_2	0	2	1	$\frac{-1}{2}$	0	40

تابلوی بهینه