محاسبات آماری پیشرفته

ترم اول سال تحصیلی ۹۳
جلسه چهارم: تولید تحققهایی از متغیرهای تصادفی

حسین باغیشنی

دانشگاه شاهرود

تولید اعداد تصادفی

برای تولید تحقق‌هایی از هر متغیر تصادفی، باید ابتدا اعدادی تصادفی تولید شوند

تولید اعداد تصادفی

برای تولید تحقق‌هایی از هر متغیر تصادفی، باید ابتدا اعدادی تصادفی تولید شوند

به طور کلی، با ابزار موجود، نمی‌توان اعداد کاملا تصادفی تولید کرد.

تولید اعداد تصادفی

برای تولید تحقق‌هایی از هر متغیر تصادفی، باید ابتدا اعدادی تصادفی تولید شوند

به طور کلی، با ابزار موجود، نمی‌توان اعداد کاملا تصادفی تولید کرد.

روش‌های مختلفی وجود دارند که به کمک آن‌ها (البته با امیدواری) اعدادی نزدیک به کاملا تصادفی تولید می‌شوند.

تولید اعداد تصادفی

برای تولید تحقق‌هایی از هر متغیر تصادفی، باید ابتدا اعدادی تصادفی تولید شوند

به طور کلی، با ابزار موجود، نمی‌توان اعداد کاملا تصادفی تولید کرد.

روش‌های مختلفی وجود دارند که به کمک آن‌ها (البته با امیدواری) اعدادی نزدیک به کاملا تصادفی تولید می‌شوند.

به چنین اعدادی، شبه‌تصادفی می‌گویند.

دنیای خیلی کوچک تولید اعداد شبه‌تصادفی

در دنیای تصادفی واقعی: نتیجه پرتاب n بار یک سکه، یک حالت از ۲^n حالت ممکن با احتمال ۲^{-n} است

دنیای خیلی کوچک تولید اعداد شبه‌تصادفی

در دنیای تصادفی واقعی: نتیجه پرتاب n بار یک سکه، یک حالت از ۲^n حالت ممکن با احتمال ۲^{-n} است

در دنیای واقعی (با استفاده از رایانه‌ها برای پرتاب n بار سکه): تعداد حالات ممکن محدود به $۲^{۳۲}$ است. زیرا

دنیای خیلی کوچک تولید اعداد شبه‌تصادفی

در دنیای تصادفی واقعی: نتیجه پرتاب n بار یک سکه، یک حالت از ۲^n حالت ممکن با احتمال ۲^{-n} است

در دنیای واقعی (با استفاده از رایانه‌ها برای پرتاب n بار سکه): تعداد حالات ممکن محدود به $۲^{۳۲}$ است. زیرا

اکثر تولیدکننده‌های اعداد شبه‌تصادفی بر پایه هسته‌های $(seed)$ ۳۲ بیتی هستند.

دنیای خیلی کوچک تولید اعداد شبه‌تصادفی

در دنیای تصادفی واقعی: نتیجه پرتاب n بار یک سکه، یک حالت از ۲^n حالت ممکن با احتمال ۲^{-n} است

در دنیای واقعی (با استفاده از رایانه‌ها برای پرتاب n بار سکه): تعداد حالات ممکن محدود به $۲^{۳۲}$ است. زیرا

اکثر تولیدکننده‌های اعداد شبه‌تصادفی بر پایه هسته‌های $(seed)$ ۳۲ بیتی هستند.

با مقایسه ۲^n و $۲^{۳۲}$ برای nهای بزرگ، می‌توان عملکرد ناپخته تولیدکننده‌های اعداد تصادفی را درک کرد.

دنیای خیلی کوچک تولید اعداد شبه‌تصادفی

در دنیای تصادفی واقعی: نتیجه پرتاب n بار یک سکه، یک حالت از ۲^n حالت ممکن با احتمال ۲^{-n} است

در دنیای واقعی (با استفاده از رایانه‌ها برای پرتاب n بار سکه): تعداد حالات ممکن محدود به $۲^{۳۲}$ است. زیرا

اکثر تولیدکننده‌های اعداد شبه‌تصادفی بر پایه هسته‌های $(seed)$ ۳۲ بیتی هستند.

با مقایسه ۲^n و $۲^{۳۲}$ برای nهای بزرگ، می‌توان عملکرد ناپخته تولیدکننده‌های اعداد تصادفی را درک کرد.

این شرایط در عمل خیلی هم بد نیست. زیرا معمولا علاقه‌مند به اطلاع از مقادیر دقیق بردار n بعدی نیستیم، بلکه به خلاصه‌ای از آن‌ها با بعدی خیلی کوچکتر، $d << ۲^{۳۲}$ نیاز داریم.

اعداد شبه‌تصادفی

در این درس، فرض می‌کنیم اعداد شبه‌تصادفی در دسترس هستند.

اعداد شبه‌تصادفی

در این درس، فرض می‌کنیم اعداد شبه‌تصادفی در دسترس هستند.

اعداد شبه‌تصادفی مورد نظر با دستور $runif()$ در R تولید می‌شوند.

نمونه‌گیری از یک جامعه متناهی

برای تولید یک نمونه از یک جامعه متناهی، می‌توان از دستور *sample* استفاده کرد

```
> # tose some coins
> sample(0:1, size=10, replace=TRUE)
 [1] 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0
 > # choose some lottery numbers
 > sample(1:100, size=6, replace=FALSE)
[1] 53 33 12 91  3 89
> # sample from a multinomial distribution
> x <- sample(1:3, size = 100, replace = TRUE,
prob = c(.2, .3, .5))
> table(x)
x
 1  2  3
18 40 42
```

تولید از توزیع‌های احتمال معمول

در R دستوراتی مرتبط با توزیع‌های احتمالی معروف وجود دارد.

تولید از توزیع‌های احتمال معمول

در R دستوراتی مرتبط با توزیع‌های احتمالی معروف وجود دارد.

برای هر توزیع (گسسته یا پیوسته)، توابعی مرتبط با:

- تابع (چگالی) احتمال، $d?$

تولید از توزیع‌های احتمال معمول

در R دستوراتی مرتبط با توزیع‌های احتمالی معروف وجود دارد.

برای هر توزیع (گسسته یا پیوسته)، توابعی مرتبط با:

- تابع (چگالی) احتمال، $d?$
- تابع توزیع تجمعی، $p?$

تولید از توزیع‌های احتمال معمول

در R دستوراتی مرتبط با توزیع‌های احتمالی معروف وجود دارد.

برای هر توزیع (گسسته یا پیوسته)، توابعی مرتبط با:

- تابع (چگالی) احتمال، $d?$
- تابع توزیع تجمعی، $p?$
- تابع چندک، $q?$

تولید از توزیع‌های احتمال معمول

در R دستوراتی مرتبط با توزیع‌های احتمالی معروف وجود دارد.

برای هر توزیع (گسسته یا پیوسته)، توابعی مرتبط با:

- تابع (چگالی) احتمال، $d?$
- تابع توزیع تجمعی، $p?$
- تابع چندک، $q?$
- تولید اعداد تصادفی، $r?$

وجود دارند. به عنوان مثال برای توزیع دوجمله‌ای

```
dbinom(x, size, prob, log=FALSE)
pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rbinom(n, size, prob)
```

برای هر توزیع، یک نام اختصاری در نظر گرفته شده است که با این حروف ترکیب می‌شود.

برای هر توزیع، یک نام اختصاری در نظر گرفته شده است که با این حروف ترکیب می‌شود.

برای اطلاع از نام‌های اختصاری مرتبط با هر توزیع، به منبع **مقدمه‌ای بر** R که قبلاً معرفی کرده‌ایم، مراجعه کنید.

برای هر توزیع، یک نام اختصاری در نظر گرفته شده است که با این حروف ترکیب می‌شود.

برای اطلاع از نام‌های اختصاری مرتبط با هر توزیع، به منبع **مقدمه‌ای بر** R که قبلاً معرفی کرده‌ایم، مراجعه کنید.

دقت کنید برای توزیع‌هایی مثل گاما، که می‌توان دو شکل متفاوت پارامتری برای آن در نظر گرفت، با مشخص کردن پارامتر $rate$ یا $scale$ نوع شکل پارامتری مورد نظر خود را به R توضیح می‌دهید.

```
rgamma(n, shape, rate = 1, scale = 1/rate)
```

با وجود آن که برای تولید متغیرهای تصادفی در R به طور گسترده توابعی وجود دارند، اما در موارد زیادی با توزیع‌هایی مواجه می‌شویم که فرم تابع چگالی (احتمال) آن‌ها آشنا نیست یا اصلاً فرم بسته‌ای برای آن‌ها وجود ندارد.

روش‌های تولید متغیرهای تصادفی

با وجود آن که برای تولید متغیرهای تصادفی در R به طور گسترده توابعی وجود دارند، اما در موارد زیادی با توزیع‌هایی مواجه می‌شویم که فرم تابع چگالی (احتمال) آن‌ها آشنا نیست یا اصلاً فرم بسته‌ای برای آن‌ها وجود ندارد.

برای تولید متغیرهای تصادفی از توزیع‌های معمول و غیرمعمول، روش‌های مختلفی وجود دارند، که در این جا به چند روش از آن‌ها می‌پردازیم.

- روش تبدیل معکوس

روش‌های تولید متغیرهای تصادفی

با وجود آن که برای تولید متغیرهای تصادفی در R به طور گسترده توابعی وجود دارند، اما در موارد زیادی با توزیع‌هایی مواجه می‌شویم که فرم تابع چگالی (احتمال) آن‌ها آشنا نیست یا اصلاً فرم بسته‌ای برای آن‌ها وجود ندارد.

برای تولید متغیرهای تصادفی از توزیع‌های معمول و غیرمعمول، روش‌های مختلفی وجود دارند، که در این جا به چند روش از آن‌ها می‌پردازیم.

- روش تبدیل معکوس
- روش پذیرش– رد

روش‌های تولید متغیرهای تصادفی

با وجود آن که برای تولید متغیرهای تصادفی در R به طور گسترده توابعی وجود دارند، اما در موارد زیادی با توزیع‌هایی مواجه می‌شویم که فرم تابع چگالی (احتمال) آن‌ها آشنا نیست یا اصلاً فرم بسته‌ای برای آن‌ها وجود ندارد.

برای تولید متغیرهای تصادفی از توزیع‌های معمول و غیرمعمول، روش‌های مختلفی وجود دارند، که در این جا به چند روش از آن‌ها می‌پردازیم.

- روش تبدیل معکوس
- روش پذیرش- رد
- روش‌های تبدیل

با وجود آن که برای تولید متغیرهای تصادفی در R به طور گسترده توابعی وجود دارند، اما در موارد زیادی با توزیع‌هایی مواجه می‌شویم که فرم تابع چگالی (احتمال) آن‌ها آشنا نیست یا اصلاً فرم بسته‌ای برای آن‌ها وجود ندارد.

برای تولید متغیرهای تصادفی از توزیع‌های معمول و غیرمعمول، روش‌های مختلفی وجود دارند، که در این جا به چند روش از آن‌ها می‌پردازیم.

- روش تبدیل معکوس
- روش پذیرش ـ رد
- روش‌های تبدیل
- تولید از توزیع‌های آمیخته

روش‌های تولید متغیرهای تصادفی

با وجود آن که برای تولید متغیرهای تصادفی در R به طور گسترده توابعی وجود دارند، اما در موارد زیادی با توزیع‌هایی مواجه می‌شویم که فرم تابع چگالی (احتمال) آن‌ها آشنا نیست یا اصلاً فرم بسته‌ای برای آن‌ها وجود ندارد.

برای تولید متغیرهای تصادفی از توزیع‌های معمول و غیرمعمول، روش‌های مختلفی وجود دارند، که در این جا به چند روش از آن‌ها می‌پردازیم.

- روش تبدیل معکوس
- روش پذیرش–رد
- روش‌های تبدیل
- تولید از توزیع‌های آمیخته
- تولید از توزیع‌های چندمتغیره

روش تبدیل معکوس

تبدیل انتگرال احتمال. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F_X(x)$ باشد، آنگاه $U = F_X(X) \sim U(0,1)$.
با استفاده از این قضیه، می‌توان متغیرهای تصادفی را تولید کرد. تبدیل معکوس را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x : F_X(x) = u\}, \ 0 < u < 1.$$

اگر $U \sim U(0,1)$، آنگاه برای هر $x \in \Re$،

$$P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(\inf\{t : F_X(t) = U\} \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x),$$

بنابراین $F_X^{-1}(U)$ با X هم‌توزیع است. پس برای تولید تحقق از X باید

- تابع معکوس $F_X^{-1}(u)$ را محاسبه کنید

روش تبدیل معکوس

تبدیل انتگرال احتمال. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F_X(x)$ باشد، آنگاه $U = F_X(X) \sim U(۰, ۱)$.
با استفاده از این قضیه، می‌توان متغیرهای تصادفی را تولید کرد. تبدیل معکوس را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$F_X^{-۱}(u) = \inf\{x : F_X(x) = u\}, \ ۰ < u < ۱.$$

اگر $U \sim U(۰, ۱)$، آنگاه برای هر $x \in \Re$،

$$P(F_X^{-۱}(U) \leq x) = P(\inf\{t : F_X(t) = U\} \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x),$$

بنابراین $F_X^{-۱}(U)$ با X هم‌توزیع است. پس برای تولید تحقق از X باید

- تابع معکوس $F_X^{-۱}(u)$ را محاسبه کنید
- یک مشاهده از توزیع $U(۰, ۱)$ تولید کنید

روش تبدیل معکوس

تبدیل انتگرال احتمال. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F_X(x)$ باشد، آنگاه $U = F_X(X) \sim U(۰,۱)$.
با استفاده از این قضیه، می‌توان متغیرهای تصادفی را تولید کرد. تبدیل معکوس را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$F_X^{-۱}(u) = \inf\{x : F_X(x) = u\}, \quad ۰ < u < ۱.$$

اگر $U \sim U(۰,۱)$، آنگاه برای هر $x \in \Re$،

$$P(F_X^{-۱}(U) \leq x) = P(\inf\{t : F_X(t) = U\} \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x),$$

بنابراین $F_X^{-۱}(U)$ با X هم‌توزیع است. پس برای تولید تحققی از X باید

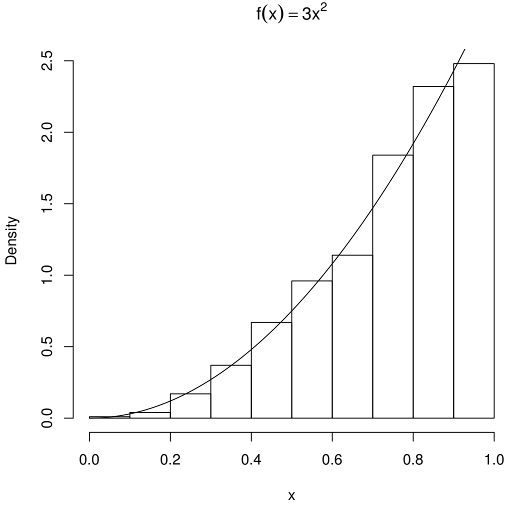
- تابع معکوس $F_X^{-۱}(u)$ را محاسبه کنید
- یک مشاهده از توزیع $U(۰,۱)$ تولید کنید
- مشاهده متغیر به صورت $x = F_X^{-۱}(u)$ خواهد بود

مثال: حالت پیوسته

$$f_X(x) = ۳x^۲,\ ۰ < x < ۱.$$
$$F_X(x) = x^۳ \longrightarrow F_X^{-۱}(u) = u^{۱/۳}.$$

```
> n <- 1000
> u <- runif(n)
> x <- u^(1/3)
> # density histogram of sample
> # main = expression(f(x)==3*x^2)
> hist(x, prob = TRUE, main = bquote(f(x)==3*x^2))
> y <- seq(0, 1, .01)
> lines(y, 3*y^2)     #density curve f(x)
```

تمرین. برای توزیع نمایی با میانگین ۲، یک نمونه ۱۰۰۰ تایی تولید کرده و با دستور *rexp* مقایسه کنید


$f(x) = 3x^2$
Density
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x

مثال: حالت گسسته

این روش برای توزیع‌های گسسته هم قابل استفاده است.

مثال: حالت گسسته

این روش برای توزیع‌های گسسته هم قابل استفاده است.
اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد و $\cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots$ نقاط ناپیوستگی تابع توزیع $F_X(x)$ باشند، آنگاه تبدیل معکوس زمانی که $F_X(x_{i-1}) < u \leq F_X(x_i)$ عبارتست از $F_X^{-1}(u) = x_i$. بنابراین

- از توزیع یکنواخت استاندارد، یک مشاهده تولید کنید

مثال: حالت گسسته

این روش برای توزیع‌های گسسته هم قابل استفاده است.
اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد و $\cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots$ نقاط ناپیوستگی تابع توزیع $F_X(x)$ باشند، آنگاه تبدیل معکوس زمانی که $F_X(x_{i-1}) < u \leq F_X(x_i)$ عبارتست از $F_X^{-1}(u) = x_i$. بنابراین

- از توزیع یکنواخت استاندارد، یک مشاهده تولید کنید
- هر گاه $F(x_{i-1}) < u \leq F(x_i)$، مقدار x_i را به عنوان مشاهده تولیدشده برگردانید

مثال: حالت گسسته

این روش برای توزیع‌های گسسته هم قابل استفاده است.
اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد و $\cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots$ نقاط ناپیوستگی تابع توزیع $F_X(x)$ باشند، آنگاه تبدیل معکوس زمانی که $F_X(x_{i-1}) < u \leq F_X(x_i)$ عبارتست از $F_X^{-1}(u) = x_i$. بنابراین

- از توزیع یکنواخت استاندارد، یک مشاهده تولید کنید
- هر گاه $F(x_{i-1}) < u \leq F(x_i)$، مقدار x_i را به عنوان مشاهده تولیدشده برگردانید

دقت کنید که محاسبه $F(x_{i-1}) < u \leq F(x_i)$ برای بعضی از توزیع‌ها می‌تواند خیلی مشکل باشد

توزیع برنولی

فرض کنید $X \sim Ber(p = ۰/۴)$. بنابراین $F_X(۰) = f(۰) = ۱ - p$ و $F_X(۱) = ۱$.
بنابراین اگر $u > ۰/۶$، آنگاه $F_X^{-۱}(u) = ۱$ و زمانی که $u \leq ۰/۶$، $F_X^{-۱}(u) = ۰$

```
> n <- 1000
> p <- 0.4
> u <- runif(n)
> x <- as.integer(u > 0.6)    #(u > 0.6) is a logical vector
> ####
> mean(x)
[1] 0.399
>     var(x)
[1] 0.240039
> ## rbinom(n, size = 1, prob = p)
> ## sample(c(0,1), size = n, replace = TRUE, prob = c(.6,.4))
```

در اینجا گشتاورهای نمونه و توزیع واقعی با هم مقایسه شده‌اند. میانگین توزیع همان p است و واریانس $p(۱ - p) = ۰/۲۴$.

توزیع هندسی

$$f(x) = pq^x,\ x = ۰, ۱, ۲, \cdots$$

به طوری که $p = \frac{۱}{۴}$ و $q = ۱ - p$.
در نقاط ناپیوستگی $x = ۰, ۱, ۲, \cdots$، $F(x) = ۱ - q^{x+۱}$. بنابراین باید نامساوی زیر را حل کنیم:

$$۱ - q^x < u \leq ۱ - q^{x+۱}.$$

نتیجه می‌شود:

$$x < \frac{\log(۱ - u)}{\log(q)} \leq x + ۱.$$

بنابراین پاسخ عبارتست از

$$x + ۱ = \lceil \frac{\log(۱ - u)}{\log(q)} \rceil,$$

که در آن، $\lceil t \rceil$ کوچکترین عدد صحیحی است که از t کوچکتر نیست.

```
> n <- 1000
> p <- 0.25
> u <- runif(n)
> k <- ceiling(log(1-u) / log(1-p)) - 1
> # more efficient
> # k <- floor(log(u) / log(1-p))
```

دقت کنید که U و $1 - U$ هم‌توزیع هستند.

```
> n <- 1000
> p <- 0.25
> u <- runif(n)
> k <- ceiling(log(1-u) / log(1-p)) - 1
> # more efficient
> # k <- floor(log(u) / log(1-p))
```

دقت کنید که U و $۱ - U$ هم‌توزیع هستند.

دقت کنید چون حل نامساوی ذکرشده برای توزیع هندسی ساده بود، با روش تبدیل معکوس به راحتی می‌توان از این توزیع نمونه تولید کرد.

موارد مشکل‌تر

روشی مشابه برای توزیع پواسون پیچیده‌تر است چون که برای x نمی‌توان از نامساوی ذکرشده یک فرمول سرراست پیدا کرد

روش پایه برای تولید یک متغیر پواسون با پارامتر λ، تولید و ذخیره تابع توزیع با استفاده از یک فرمول بازگشتی به شکل زیر است:

$$f(x+۱) = \frac{\lambda f(x)}{x+۱}, \quad F(x+۱) = F(x) + f(x+۱).$$

در این حالت، یک متغیر یکنواخت استاندارد تولید می‌شود و در بردار مقادیر تابع توزیع به دنبال مشاهده‌ای می‌گردیم که نامساوی $F(x-۱) < u \leq F(x)$ برای آن برقرار باشد.

توزیع لگاریتمی

این مثال، توضیحات مرتبط با توزیع پواسون را تشریح می‌کند. دقت کنید که برای توزیع لگاریتمی، تابعی در R وجود ندارد.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{a\theta^x}{x}, \; x = ۱, ۲, \cdots$$

که در آن، $۰ < \theta < ۱$ و $a = (-\log(۱ - \theta))^{-۱}$.

$$f(x + ۱) = \frac{\theta^x}{x + ۱} f(x).$$

با این روابط، برای xهای بزرگ، محاسبات از دقت کافی برخوردار نیستند. یک راه حل استفاده از

$$\exp(\log a + x \log \theta - \log x),$$

است.

```r
rlogarithmic <- function(n, theta) {
        #returns a random logarithmic(theta) sample size n
        u <- runif(n)
        #set the initial length of cdf vector
        N <- ceiling(-16 / log10(theta))
        k <- 1:N
        a <- -1/log(1-theta)
        fk <- exp(log(a) + k * log(theta) - log(k))
        Fk <- cumsum(fk)
        x <- integer(n)
        for (i in 1:n) {
            x[i] <- as.integer(sum(u[i] > Fk)) #F^{-1}(u)-1
            while (x[i] == N) {
                #if x==N we need to extend the cdf
                #very unlikely because N is large
                logf <- log(a) + (N+1)*log(theta) - log(N+1)
                fk <- c(fk, exp(logf))
                Fk <- c(Fk, Fk[N] + fk[N+1])
                N <- N + 1
                x[i] <- as.integer(sum(u[i] > Fk))
            }
        }
        x + 1
    }
```

```
> n <- 1000
> theta <- 0.5
> x <- rlogarithmic(n, theta)
> # compute density of logarithmic(theta) for comparison
> k <- sort(unique(x))
> p <- -1 / log(1 - theta) * theta^k / k
> se <- sqrt(p*(1-p)/n)   # standard error
> round(rbind(table(x)/n, p, se),3)
       1     2     3     4     5     6     8     9
   0.713 0.194 0.060 0.019 0.009 0.002 0.001 0.002
p  0.721 0.180 0.060 0.023 0.009 0.004 0.001 0.000
se 0.014 0.012 0.008 0.005 0.003 0.002 0.001 0.001
```

روش پذیرش_رد

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با توابع (چگالی) احتمال به ترتیب f و g باشند.
همچنین ثابت c وجود داشته باشد به طوری که، برای تمام xهایی که $f(x) > 0$ داشته باشیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c.$$

در این حالت می‌توان از روش پذیرش_رد (یا روش رد)، برای تولید متغیر X استفاده کرد.

1. یافتن یک متغیر تصادفی Y با تابع احتمال g که رابطه $f(x)/g(x) \leq c$، برای تمام xهایی که $f(x) > 0$، برقرار باشد.

روش پذیرش_رد

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با توابع (چگالی) احتمال به ترتیب f و g باشند.
همچنین ثابت c وجود داشته باشد به طوری که، برای تمام xهایی که $f(x) > ۰$ داشته باشیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c.$$

در این حالت می‌توان از روش پذیرش_رد (یا روش رد)، برای تولید متغیر X استفاده کرد.

۱. یافتن یک متغیر تصادفی Y با تابع احتمال g که رابطه $c \geq f(x)/g(x)$، برای تمام xهایی که $f(x) > ۰$، برقرار باشد.
۲. متغیر Y را تولید کنید

روش پذیرش-رد

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با توابع (چگالی) احتمال به ترتیب f و g باشند.
همچنین ثابت c وجود داشته باشد به طوری که، برای تمام xهایی که $f(x) > ۰$ داشته باشیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c.$$

در این حالت می‌توان از روش پذیرش-رد (یا روش رد)، برای تولید متغیر X استفاده کرد.

۱. یافتن یک متغیر تصادفی Y با تابع احتمال g که رابطه $f(x)/g(x) \leq c$، برای تمام xهایی که $f(x) > ۰$، برقرار باشد.
۲. متغیر Y را تولید کنید
۳. یک متغیر تصادفی U از یکنواخت استاندارد تولید کنید

روش پذیرش‌ـرد

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با توابع (چگالی) احتمال به ترتیب f و g باشند.
همچنین ثابت c وجود داشته باشد به طوری که، برای تمام xهایی که $f(x) > ۰$ داشته باشیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c.$$

در این حالت می‌توان از روش پذیرش‌ـرد (یا روش رد)، برای تولید متغیر X استفاده کرد.

۱. یافتن یک متغیر تصادفی Y با تابع احتمال g که رابطه $f(x)/g(x) \leq c$، برای تمام xهایی که $f(x) > ۰$، برقرار باشد.
۲. متغیر Y را تولید کنید
۳. یک متغیر تصادفی U از یکنواخت استاندارد تولید کنید
۴. اگر $u < f(y)/(cg(y))$، y را بپذیر و قرار بده $x = y$. در غیر این صورت y را رد کن و از مرحله ۲ شروع به تکرار کن

در مرحله ۴،

$$P(Accept|Y) = P(U < \frac{f(Y)}{cg(Y)}|Y) = \frac{f(Y)}{cg(Y)}.$$

بنابراین برای هر تکرار، احتمال پذیرش کل برابر است با

$$\sum_y P(Accept|y)P(Y=y) = \sum_y \frac{f(y)}{cg(y)}g(y) = \frac{۱}{c},$$

و تعداد تکرارها تا پذیرش یک نمونه دارای توزیع هندسی با میانگین c است.

در مرحله ۴،

$$P(Accept|Y) = P(U < \frac{f(Y)}{cg(Y)}|Y) = \frac{f(Y)}{cg(Y)}.$$

بنابراین برای هر تکرار، احتمال پذیرش کل برابر است با

$$\sum_y P(Accept|y)P(Y=y) = \sum_y \frac{f(y)}{cg(y)}g(y) = \frac{1}{c},$$

و تعداد تکرارها تا پذیرش یک نمونه دارای توزیع هندسی با میانگین c است.
بنابراین برای تولید هر نمونه از X، c تکرار، به طور متوسط، لازم است. در نتیجه برای کارایی روش، باید c کوچک و تولید از Y ساده باشد.

در مرحله ۴،

$$P(Accept|Y) = P(U < \frac{f(Y)}{cg(Y)}|Y) = \frac{f(Y)}{cg(Y)}.$$

بنابراین برای هر تکرار، احتمال پذیرش کل برابر است با

$$\sum_y P(Accept|y)P(Y=y) = \sum_y \frac{f(y)}{cg(y)}g(y) = \frac{1}{c},$$

و تعداد تکرارها تا پذیرش یک نمونه دارای توزیع هندسی با میانگین c است.
بنابراین برای تولید هر نمونه از X، c تکرار، به طور متوسط، لازم است. در نتیجه برای کارایی روش، باید c کوچک و تولید از Y ساده باشد.
سوال: آیا نمونه پذیرش‌شده با روش رد، با X هم‌توزیع است؟

$$P(k|Accept) = \frac{P(Accept|k)g(k)}{P(Accept)} = \frac{[f(k)/(cg(k)]g(k)}{1/c} = f(k).$$

توزیع بتا

تابع چگالی $Beta(۲,۲)$ به صورت $f(x) = ۶x(۱-x), \; ۰ < x < ۱$ است. فرض کنید $g(x)$ یکنواخت استاندارد باشد.

$$\forall ۰ < x < ۱; \; \frac{f(x)}{g(x)} \leq ۶ \longrightarrow c = ۶.$$

یک متغیر x پذیرفته می‌شود اگر

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{۶x(۱-x)}{۶(۱)} = x(۱-x) > u.$$

به طور متوسط برای تولید یک نمونه به حجم ۱۰۰۰، نیاز به $cn = ۶۰۰۰$ تکرار (که برابر تولید ۱۲۰۰۰ عدد تصادفی است) داریم.

```
n <- 1000
    k <- 0      #counter for accepted
    j <- 0      #iterations
    y <- numeric(n)

    while (k < n) {
        u <- runif(1)
        j <- j + 1
        x <- runif(1)  #random variate from g
        if (x * (1-x) > u) {
            #we accept x
            k <- k + 1
            y[k] <- x
        }
    }

>    j
[1] 5921
```

```
>     p <- seq(.1, .9, .1)
>     Qhat <- quantile(y, p)   # quantiles of sample
>     Q <- qbeta(p, 2, 2)      # theoretical quantiles
>     se <- sqrt(p * (1-p) / (n * dbeta(Q, 2, 2)^2))
>     round(rbind(Qhat, Q, se), 3)
       10%   20%   30%   40%   50%   60%   70%   80%   90%
Qhat 0.193 0.287 0.373 0.450 0.516 0.577 0.629 0.701 0.788
Q    0.196 0.287 0.363 0.433 0.500 0.567 0.637 0.713 0.804
se   0.010 0.010 0.010 0.011 0.011 0.011 0.010 0.010 0.010
```

برای بهتر شدن دقت، باید حجم نمونه را افزایش داد

```
> round(rbind(Qhat, Q, se), 3)
       10%   20%   30%   40%   50%   60%   70%   80%   90%
Qhat 0.198 0.292 0.370 0.439 0.504 0.573 0.641 0.719 0.804
Q    0.196 0.287 0.363 0.433 0.500 0.567 0.637 0.713 0.804
se   0.003 0.003 0.003 0.003 0.003 0.003 0.003 0.003 0.003
```

روش تبدیل

سایر روش‌های تبدیل (به غیر از تبدیل معکوس احتمال) را نیز می‌توان برای تولید متغیرهای تصادفی به کار برد

1. $Z \sim N(۰, ۱) \longrightarrow V = Z^{۲} \sim \chi^{۲}(۱)$

روش تبدیل

سایر روش‌های تبدیل (به غیر از تبدیل معکوس احتمال) را نیز می‌توان برای تولید متغیرهای تصادفی به کار برد

1. $Z \sim N(0,1) \longrightarrow V = Z^2 \sim \chi^2(1)$
2. $U \sim \chi^2(m),\ V \sim \chi^2(n) \longrightarrow F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n)$

روش تبدیل

سایر روش‌های تبدیل (به غیر از تبدیل معکوس احتمال) را نیز می‌توان برای تولید متغیرهای تصادفی به کار برد

1. $Z \sim N(۰,۱) \longrightarrow V = Z^۲ \sim \chi^۲(۱)$
2. $U \sim \chi^۲(m), V \sim \chi^۲(n) \longrightarrow F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n)$
3. $U, V \sim U(۰,۱) \longrightarrow Z_۱ = \sqrt{-۲\log U}\cos(۲\pi V), Z_۲ = \sqrt{-۲\log V}\sin(۲\pi U) \sim N(۰,۱)$

سایر روش‌های تبدیل (به غیر از تبدیل معکوس احتمال) را نیز می‌توان برای تولید متغیرهای تصادفی به کار برد

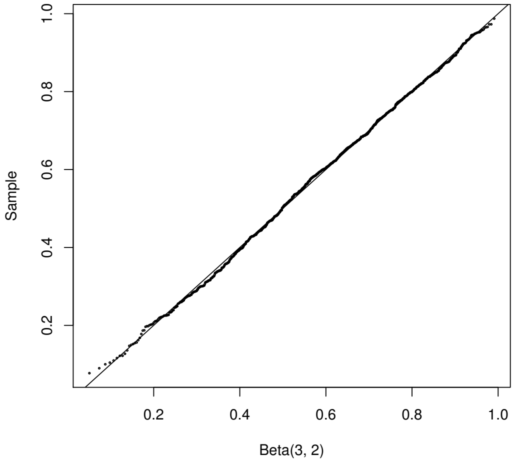
1. $Z \sim N(0,1) \longrightarrow V = Z^2 \sim \chi^2(1)$
2. $U \sim \chi^2(m), V \sim \chi^2(n) \longrightarrow F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n)$
3. $U, V \sim U(0,1) \longrightarrow Z_1 = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V), Z_2 = \sqrt{-2\log V}\sin(2\pi U) \sim N(0,1)$
4. $U, V \sim U(0,1) \longrightarrow X = \lfloor 1 + \frac{\log V}{\log(1-(1-\theta)^U)} \rfloor \sim logarithmic(\theta)$

در بالا نماد $\lfloor t \rfloor$ قسمت صحیح t را نشان می‌دهد.

توزیع بتا

$$U \sim Gamma(r, \lambda),\ V \sim Gamma(s, \lambda) \longrightarrow X = \frac{U}{U+V} \sim Beta(r, s)$$

```
> n <- 1000
> a <- 3
> b <- 2
> u <- rgamma(n, shape=a, rate=1)
> v <- rgamma(n, shape=b, rate=1)
> x <- u / (u + v)
> q <- qbeta(ppoints(n), a, b)
> qqplot(q, x, cex=0.25, xlab="Beta(3, 2)", ylab="Sample")
> abline(0, 1)
```



Sample
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Beta(3, 2)

```
> n <- 1000
> theta <- 0.5
> u <- runif(n)  #generate logarithmic sample
> v <- runif(n)
> x <- floor(1 + log(v) / log(1 - (1 - theta)^u))
> k <- 1:max(x)  #calc. logarithmic probs.
> p <- -1 / log(1 - theta) * theta^k / k
> se <- sqrt(p*(1-p)/n)
> p.hat <- tabulate(x)/n
> print(round(rbind(p.hat, p, se), 3))
       [,1]  [,2]  [,3]  [,4]  [,5]  [,6]  [,7]  [,8]  [,9]
p.hat 0.729 0.171 0.062 0.029 0.005 0.003 0.000 0.000 0.001
p     0.721 0.180 0.060 0.023 0.009 0.004 0.002 0.001 0.000
se    0.014 0.012 0.008 0.005 0.003 0.002 0.001 0.001 0.001
```

توزیع لگاریتمی

```
rlogarithmic <- function(n, theta) {
        stopifnot(all(theta > 0 & theta < 1))
        th <- rep(theta, length=n)
        u <- runif(n)
        v <- runif(n)
        x <- floor(1 + log(v) / log(1 - (1 - th)^u))
        return(x)
    }
```