



امتحان میان‌ترم درس: ریاضی عمومی ۱ فنی

نیمسال (اول / ~~کوم~~) ۱۳۹۸ - ۱۳۹۷

توجه:

با مداد به سوالات پاسخ ندهید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱ - الف) مقادیر a و b را طوری بیابید که i و $-i$ دو جواب برای معادله‌ی زیر باشند: (۱۰ نمره)

$$az^2 + bz + 1 = 0$$

ب) معادله‌ی زیر را در \mathbb{C} حل کنید: (۱۰ نمره)

$$1 + z^2 = z + z^3$$

سوال ۲ - ضابطه‌ی تابع معکوس $f(x)$ را بیابید که: (۱۰ نمره)

$$f(x) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$$

سوال ۳ - حدود زیر را محاسبه کنید (استفاده از هم‌ارزی و هوپیتال مجاز نیست): (هر مورد ۱۰ نمره)

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 3x})$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(4x) \sqrt{1 - \cos(4x)}}{x^2 + x^3}$$

سوال ۴ - معادله خط مماس بر منحنی $y = y(x)$ را در نقطه $A = (0, 0)$ بیابید در صورتی که: (۱۵ نمره)

$$y^2 + \sin(x - y) = y \tan(x)$$

سوال ۵ - نمودار تابع زیر را رسم کنید: (۱۵ نمره)

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{(x - 3)^2}$$

موفق و سربلند باشید.

جواب سوال ۱:

قسمت الف)

$$\begin{aligned} z = i &\Rightarrow ai^{\wedge} + bi + 1 = 0 \Rightarrow a + bi + 1 = 0 \\ z = -i &\Rightarrow a(-i)^{\wedge} + b(-i) + 1 = 0 \Rightarrow a - bi + 1 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a + bi + 1 = 0 \\ a - bi + 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

قسمت ب)

راه حل اول:

$$\begin{aligned} 1 + z^{\wedge} = z + z^{\wedge} &\Rightarrow 1 + z^{\wedge} = z(1 + z^{\wedge}) \Rightarrow (1 + z^{\wedge})(z - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 \\ 1 + z^{\wedge} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} 1 + z^{\wedge} = z + z^{\wedge} &\Rightarrow 1 - z + z^{\wedge} - z^{\wedge} = 0 \Rightarrow (1 + z)(1 - z + z^{\wedge} - z^{\wedge}) = 0 \\ &\Rightarrow 1 - z^{\wedge} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases} \end{aligned}$$

مجموعه جواب های قابل قبول $\{1, i, -i\}$

جواب سوال ۲:

$$y = \frac{e^{\wedge x} - e^{-\wedge x}}{e^{\wedge x} + e^{-\wedge x}} \Rightarrow y(e^{\wedge x} + e^{-\wedge x}) = e^{\wedge x} - e^{-\wedge x} \xrightarrow{\times e^{\wedge x}} y(e^{\wedge x} + 1) = e^{\wedge x} - 1$$

$$\Rightarrow ye^{\wedge x} - e^{\wedge x} = -1 - y \Rightarrow e^{\wedge x} = \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow x = \frac{1}{\wedge} \ln \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\wedge} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

جواب سوال ۳:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^{\wedge} - \wedge x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^{\wedge} - \wedge x}) \times \frac{x - \sqrt{x^{\wedge} - \wedge x}}{x - \sqrt{x^{\wedge} - \wedge x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\wedge} - (x^{\wedge} - \wedge x)}{x - \sqrt{x^{\wedge} (1 - \frac{\wedge}{x})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\wedge x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\wedge x}{\wedge x} = \frac{\wedge}{\wedge}$$

راه حل اول:

$$B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) \sqrt{1 - \cos(\sqrt{x})}}{x^2 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) \sqrt{1 - \cos(\sqrt{x})}}{x^2 + x^3} \times \frac{\sqrt{1 + \cos(\sqrt{x})}}{\sqrt{1 + \cos(\sqrt{x})}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) \sqrt{1 - (\cos(\sqrt{x}))^2}}{(x^2 + x^3) \sqrt{1 + \cos(\sqrt{x})}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) \sqrt{(\sin(\sqrt{x}))^2}}{(x^2 + x^3) \sqrt{1 + \cos(\sqrt{x})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) |\sin(\sqrt{x})|}{(x^2 + x^3) \sqrt{1 + \cos(\sqrt{x})}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) \sin(\sqrt{x})}{(x^2 + x^3) \sqrt{1 + \cos(\sqrt{x})}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\tan(\sqrt{x}) \sin(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})(\sqrt{x})} \times 16x^2}{x^2(1+x)\sqrt{1 + \cos(\sqrt{x})}} = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

راه حل دوم: استفاده از اتحاد زیر

$$1 - \cos(\sqrt{x}) = 2(\sin(\frac{\sqrt{x}}{2}))^2$$

جواب سوال ۴:

$$\begin{aligned} y^2 + \sin(x - y) = y \tan(x) &\Rightarrow 2yy' + (1 - y') \cos(x - y) = y' \tan(x) + y(1 + \tan^2(x)) \\ \xrightarrow{x=y=0} (1 - y') \cos(0) = 0 &\Rightarrow y' = 1 \\ y = x &\text{ معادله خط مماس:} \end{aligned}$$

جواب سوال ۵:

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

از آنجایی که $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ خط $x = 3$ یک مجانب قائم تابع $f(x)$ است.

از آنجایی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +1$ خط $y = +1$ یک مجانب افقی تابع $f(x)$ است.

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2+3)}{(x-3)^4} = \frac{2(x-3)(-3x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2(-3x-3)}{(x-3)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\circ	$+$	$-$
$f(x)$	$+1$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	$+1$

$\frac{1}{4}$
min

