نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی: **ریاضی**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

تاریخ: **۱۳۹۷/۳/۱۹**

امتحان پایان ترم درس : **ریاضی عمومی ۱ فنی**

نیمسال (**~~اول~~** / **دوم**) **۱۳۹۷- ۱۳۹۶**

توجه :

با مداد به سوالات پاسخ ندهید. استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱ – خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\int_{0}^{2x}\sqrt{e^t+\sin(e^t-1)}\,dt$ را در $x=0$ بیابید. (۱۵ نمره)

سوال ۲ – انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید. (۲۵ نمره)

الف) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^3+x^2}$ ب) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

سوال ۳ – حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به منحنی $f(x)=\sqrt{x}\,e^x$ و خط $y=0$ در فاصله‌ی $0\le x\le 1$ حول خط $y=0$ را بیابید. (۱۵ نمره)

سوال ۴ – طول قوس منحنی پارامتری $\begin{cases} x=e^t\sin(t) \\ y=e^t\cos(t)\end{cases}$ را در فاصله‌ی $0\le t\le 1$ محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

سوال ۵ – همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^4+1}\,dx$ را بررسی کنید. (۱۵ نمره)

سوال ۶ – شعاع و بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{4^n\times(n^3+8)}$ را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

سوال ۷ – پنج جمله‌ی غیرصفر اول سری مکلورن تابع $f(x)=(x^2+1)\sin(2x)$ را بنویسید. (۱۵ نمره)

موفق و سربلند باشید.

جواب سوال ۱:

$$f(0)=\int_0^0 \sqrt{e^t+\sin(e^t-1)}\,dt=0,\qquad f'(x)=2\sqrt{e^{2x}+\sin(e^{2x}-1)}\ \Rightarrow\ f'(0)=2\ \ \Rightarrow y=2x$$

جواب سوال ۲ (الف):

$$\frac{2x+1}{x^3+x^2}=\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x^2}=\frac{Ax(x+1)+Bx^2+C(x+1)}{(x+1)x^2}$$

$$\Rightarrow 2x+1=Ax(x+1)+Bx^2+C(x+1)\quad\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow 1=C\\ x=-1\Rightarrow -1=B\\ x=1\Rightarrow 3=2A-1+2\Rightarrow A=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \int\frac{2x+1}{x^3+x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\ln x-\ln(x+1)-\frac{1}{x}+c$$

جواب سوال ۲ (ب):

$$u=e^x\Rightarrow du=e^x dx,\qquad \int\frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\sin^{-1}u+c=\sin^{-1}e^x+c$$

جواب سوال ۳:

$$V=\int_0^1 \pi f^2(x)dx=\pi\int_0^1 xe^{2x}dx=\pi\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\right)\Big]_0^1=\pi\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}(e^2+1)$$

$$\begin{cases}dv=e^{2x}dx\\ u=x\end{cases}\ \Rightarrow\begin{cases}v=\frac{1}{2}e^{2x}\\ du=dx\end{cases}\ \Rightarrow\ \int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

جواب سوال ۴:

$$\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}=\sqrt{(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t\cos t-e^t\sin t)^2}=\sqrt{2(e^t\sin t)^2+2(e^t\cos t)^2}$$

$$=\sqrt{2e^{2t}}=\sqrt{2}e^t$$

$$l=\int_0^1\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\ dt=\int_0^1\sqrt{2}e^t\,dt=\sqrt{2}e^t\Big]_0^1=\sqrt{2}(e-1)$$

جواب سوال ۵:

$$0\le\int_1^\infty\frac{(\sin x)^2}{x^4+1}dx\le\int_1^\infty\frac{1}{x^4+1}dx\le\int_1^\infty\frac{1}{x^4}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x^4}dx=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{3x^3}\Big]_1^t=\frac{1}{3}$$

بنابراین $\int_1^\infty\frac{(\sin x)^2}{x^4+1}dx$ همگراست.

جواب سوال ۶:

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(2x-1)^n}{4^n(n^3+8)}=\sum_{n=0}^\infty\frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{4^n(n^3+8)}=\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{2^n(n^3+8)}\ \Rightarrow$$

$$k=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}((n+1)^3+8)}}{\frac{1}{2^n(n^3+8)}}\right|=\frac{1}{2}\ \Rightarrow R=2,\qquad x_0=\frac{1}{2}$$

$$x = x_\circ + R = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(۲x-۱)^n}{۴^n(n^۳+۸)} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۴^n}{۴^n(n^۳+۸)} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{(n^۳+۸)}$$
$$x = x_\circ - R = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(۲x-۱)^n}{۴^n(n^۳+۸)} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۴)^n}{۴^n(n^۳+۸)} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(n^۳+۸)}$$

از آنجایی که سری برای $x = \frac{۵}{۲}$ و $x = -\frac{۳}{۲}$ همگراست بازه همگرایی $\left[-\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}\right]$ است.

جواب سوال ۷:

می‌دانیم $\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \frac{x^۹}{۹!} - \cdots$، بنابراین $\sin(۲x) = ۲x - \frac{(۲x)^۳}{۳!} + \frac{(۲x)^۵}{۵!} - \frac{(۲x)^۷}{۷!} + \frac{(۲x)^۹}{۹!} - \cdots$ و در نتیجه

$$(x^۲+۱)\sin(۲x) = (x^۲+۱)\left(۲x - \frac{(۲x)^۳}{۳!} + \frac{(۲x)^۵}{۵!} - \frac{(۲x)^۷}{۷!} + \frac{(۲x)^۹}{۹!} - \cdots\right) =$$
$$۲x - \frac{۲^۳x^۳}{۳!} + \frac{۲^۵x^۵}{۵!} - \frac{۲^۷x^۷}{۷!} + \frac{۲^۹x^۹}{۹!} - \cdots + ۲x^۳ - \frac{۲^۳x^۵}{۳!} + \frac{۲^۵x^۷}{۵!} - \frac{۲^۷x^۹}{۷!} + \cdots =$$
$$۲x - \left(\frac{۲^۳}{۳!} - ۲\right)x^۳ + \left(\frac{۲^۵}{۵!} - \frac{۲^۳}{۳!}\right)x^۵ - \left(\frac{۲^۷}{۷!} - \frac{۲^۵}{۵!}\right)x^۷ + \left(\frac{۲^۹}{۹!} - \frac{۲^۷}{۷!}\right)x^۹ - \cdots$$
