لازم به ذکر است که اگر $W(D)$ دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد، آنگاه تعداد پارامترها در جواب عمومی دستگاه برابر با بیشترین توان D در $W(D)$ است، مشروط بر اینکه $W(D) \neq ٠$ باشد.

فصل ۵: تبدیل لاپلاس

تعاریف: اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[٠,\infty)$ تعریف شده و s عدد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ را با $F(s)$ و یا $\mathcal{L}\{f(x)\}$ نمایش داده و به صورت انتگرال زیر(در صورت وجود) تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_٠^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(x)$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ را تبدیل معکوس (وارون) لاپلاس تابع $F(s)$ نامیده و آن را با $\mathcal{L}^{-١}\{F(s)\}$ نشان می‌دهیم.

اگر c عدد حقیقی نامنفی باشد، تابع $u_c(x) = \begin{cases} ٠, & ٠ \leq x < c \\ ١, & x \geq c \end{cases}$ را تابع پله‌ای واحد و یا تابع هِوی‌ساید می‌نامیم. در برخی منابع تابع پله‌ای واحد را به صورت $u(x) = h(x) = \begin{cases} ٠, & x < ٠ \\ ١, & x \geq ٠ \end{cases}$ تعریف نموده و به کمک آن تساوی $u_c(x) = u(x-c)$ را داریم.

کانولوشِن یا پیچش دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با نماد $(f*g)(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f*g)(x) = \int_٠^x f(x-t)g(t)dt = \int_٠^x g(x-t)f(t)dt$$

با فرض آنکه $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$، $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$، n عددی طبیعی، c و α اعداد حقیقی نامنفی و $c_١$ و $c_٢$ ثابت‌هایی حقیقی باشند، روابط زیر را داریم:

$\mathcal{L}\{c_١ f(x) + c_٢ g(x)\} = c_١\mathcal{L}\{f(x)\} + c_٢\mathcal{L}\{g(x)\}$		$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+١}}, \quad s > ٠$	$\mathcal{L}\{x^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+١)}{s^{\alpha+١}}, \quad s > ٠$
$\mathcal{L}^{-١}\{c_١F(s) + c_٢G(s)\} = c_١\mathcal{L}^{-١}\{F(s)\} + c_٢\mathcal{L}^{-١}\{G(s)\}$		$\mathcal{L}\{\sin\alpha x\} = \frac{\alpha}{s^٢+\alpha^٢}, \quad \lvert s\rvert < \alpha$	$\mathcal{L}\{\sinh\alpha x\} = \frac{\alpha}{s^٢-\alpha^٢}, \lvert s\rvert > \alpha$
$\mathcal{L}\{e^{\alpha x}f(x)\} = F(s-\alpha), \quad s > \alpha$		$\mathcal{L}\{\cos\alpha x\} = \frac{s}{s^٢+\alpha^٢}, \lvert s\rvert < \alpha$	$\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{١}{٢}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > ٠$
$\mathcal{L}\{u_c(x)f(x-c)\} = e^{-cs}F(s), \quad s > ٠$		$\mathcal{L}\{\cosh\alpha x\} = \frac{s}{s^٢-\alpha^٢}, \lvert s\rvert > \alpha$	$\mathcal{L}\{f*g\} = F(s)G(s)$
$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{y\} - s^{n-١}y(٠) - \cdots - y^{(n-١)}(٠)$		$\mathcal{L}\{y''\} = s^٢\mathcal{L}\{y\} - sy(٠) - y'(٠)$	$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(٠)$
$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \frac{١}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty F(t)dt$	$\mathcal{L}\left\{\int_٠^x f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$	$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-١)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$

نکته ۵-۱: جهت محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابع چندضابطه‌ای همچون $f(x) = \begin{cases} f_٠(x), & ٠ \leq x < c_٠ \\ f_١(x), & c_٠ \leq x \leq c_١ \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \geq c_n \end{cases}$، از تابع پله‌ای واحد به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(١ - u_{c_٠}(x)\right)f_٠(x) + \left(u_{c_٠}(x) - u_{c_١}(x)\right)f_١(x) + \left(u_{c_١}(x) - u_{c_٢}(x)\right)f_٢(x) + \cdots + u_{c_n}(x)f_n(x)$$

$$= f_٠(x) + \left(f_١(x) - f_٠(x)\right)u_{c_٠}(x) + \left(f_٢(x) - f_١(x)\right)u_{c_١}(x) + u_{c_n}(x)f_n(x)$$

نکتهٔ ۵-۲: جهت محاسبهٔ تبدیل معکوس توابع می‌توان از تکنیک‌های انتگرال‌گیری، بویژه روش تجزیهٔ کسرها استفاده نمود.

نکتهٔ ۵-۳(حل معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه به‌کمک تبدیل لاپلاس):

۱. ابتدا با فرض آنکه $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$ است، از معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

۲. با جایگذاری شرایط اوّلیه، مقدار تابع $Y(s)$ را محاسبه می‌کنیم.

۳. از آنجا که $\boxed{y(x) = \mathcal{L}^{-١}\{Y(s)\}}$ است، با محاسبهٔ تبدیل معکوس لاپلاس تابع $Y(s)$، جواب معادله حاصل می‌شود.