دانشکده ریاضی

امتحان میانترم درس ریاضی ۱- فنی هماهنگ

گروه آموزشی : **ریاضی**

نیمسال دوم **۱۳۹۶-۱۳۹۷** | نام مدرس: | نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی : | تاریخ : **۹۷/۲/۶** | وقت : **۹۰** دقیقه

سئوال ۱) **الف:** معادله‌ی $z^{5} - z^{4} + z^{3} - z^{2} + z - 1 = 0$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. (۱۰ نمره)

ب: مکان هندسی نقاطی را در دستگاه اعداد مختلط بیابید که در نامساوی زیر صدق کنند. (۱۰ نمره)

$$|z+i| \leq |z-i|$$

سئوال ۲) ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ را بیابید در صورتی که f و g به صورت زیر هستند. (۱۵ نمره)

$$f(x) = |2 - x| \qquad , \qquad g(x) = \begin{cases} x^{2}, & x > 0 \\ 1 - x, & x \leq 0 \end{cases}$$

سئوال ۳) حدود زیر را بیابید. (**توجه:** استفاده از هم‌ارزی و هوپیتال مجاز نیست.) (۲۰ نمره)

$$A = \lim_{x \to 0} (\tan x)^{2} \left[\frac{1}{x^{2}}\right] \qquad , \qquad B = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{1 - \sqrt[5]{x+1}}$$

سئوال ۴) تقریبی برای $A = 33^{\frac{1}{5}}$ به کمک مشتق بیابید. (۱۵ نمره)

سئوال ۵) نزدیکترین نقاط روی منحنی $y^{2} - x^{2} = 1$ تا نقطه‌ی $A = (-6,0)$ را بیابید. (۱۰ نمره)

موفق باشید.

جواب سئوال ۱ :

قسمت الف)

$$z^{5}-z^{4}+z^{3}-z^{2}+z-1=0 \Rightarrow (z+1)(z^{5}-z^{4}+z^{3}-z^{2}+z-1)=0$$

$$\Rightarrow z^{6}-1=0 \Rightarrow \quad z^{6}=1$$

معادله‌ی $z^{6}=1$ دارای ۶ ریشه‌ی $z_k=e^{\frac{2k\pi}{6}i}, k=0,1,\dots,5$ است که ریشه‌ی $z_3=-1$ مربوط به $z+1=0$ است و قابل قبول نیست.

قسمت ب)

فرض کنید $z=x+yi$

$$|z+i|=|x+yi+i|=|x+(y+1)i|=\sqrt{x^{2}+(y+1)^{2}},$$
$$|z-i|=|x+yi-i|=|x+(y-1)i|=\sqrt{x^{2}+(y-1)^{2}},$$
$$|z+i|\le|z-i| \Rightarrow \sqrt{x^{2}+(y+1)^{2}}\le\sqrt{x^{2}+(y-1)^{2}} \Rightarrow$$
$$2y\le-2y \Rightarrow y\le 0$$

جواب سئوال ۲:

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & x\ge 2\\ 2-x, & x<2\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}x^{2}, & x>0\\ 1-x, & x\le 0\end{cases}$$

بنابراین

$$f(g(x))=\begin{cases}g(x)-2, & g(x)\ge 2\\ 2-g(x), & g(x)<2\end{cases}$$

$$x>0 \Rightarrow g(x)=x^{2} \Rightarrow$$
$$\begin{cases}x^{2}\ge 2 \Rightarrow x\ge\sqrt{2} \text{ or } x\le-\sqrt{2} \Rightarrow x\ge\sqrt{2} \Rightarrow g(x)=x^{2}\ge 2\\ x^{2}<2 \Rightarrow -\sqrt{2}< x<\sqrt{2} \Rightarrow 0<x<\sqrt{2} \Rightarrow g(x)=x^{2}<2\end{cases}$$

$$x\le 0 \Rightarrow g(x)=1-x \Rightarrow$$
$$\begin{cases}1-x\ge 2 \Rightarrow x\le-1 \Rightarrow x\le-1 \Rightarrow g(x)=1-x\ge 2\\ 1-x<2 \Rightarrow -1< x \Rightarrow -1<x<0 \Rightarrow g(x)=1-x<2\end{cases}$$

$$f\big(g(x)\big)=\begin{cases}x^{2}-2, & x\ge\sqrt{2}\\ 2-x^{2}, & 0<x<\sqrt{2}\\ (1-x)-2, & x\le -1\\ 2-(1-x), & -1<x<0\end{cases}$$

جواب سئوال ۳:

$$A = \lim_{x\to ۰} (\tan x)^{۲} \left[\frac{۱}{x^{۲}}\right]$$

داریم $\frac{۱}{x^{۲}} - ۱ < \left[\frac{۱}{x^{۲}}\right] \le \frac{۱}{x^{۲}}$ از آنجایی که $(\tan x)^{۲} > ۰$ داریم

$$(\tan x)^{۲}(\frac{۱}{x^{۲}} - ۱) < (\tan x)^{۲} \left[\frac{۱}{x^{۲}}\right] \le (\tan x)^{۲} \frac{۱}{x^{۲}}$$

می‌دانیم $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ بنابراین

$$\lim_{x\to ۰} (\tan x)^{۲} \left(\frac{۱}{x^{۲}} - ۱\right) = \lim_{x\to ۰} \left(\frac{(\tan x)^{۲}}{x^{۲}} - (\tan x)^{۲}\right)$$
$$= \lim_{x\to ۰} \left(\frac{(\sin x)^{۲}}{(\cos x)^{۲} x^{۲}} - (\tan x)^{۲}\right) = ۱$$

و $\lim_{x\to ۰}(\tan x)^{۲} \frac{۱}{x^{۲}} = \frac{(\sin x)^{۲}}{(\cos x)^{۲} x^{۲}} = ۱$ در نتیجه بنا به قضیه‌ی فشار $A = ۱$.

$$B = \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \sqrt[۳]{x + ۱}}{۱ - \sqrt[۵]{x + ۱}}$$

قرار می‌دهیم $x + ۱ = t^{۱۵}$. بنابراین وقتی $x \to ۰$ آنگاه $t \to ۱$.

$$B = \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \sqrt[۳]{x+۱}}{۱ - \sqrt[۵]{x+۱}} = \lim_{t\to ۱} \frac{۱ - t^{۵}}{۱ - t^{۳}} = \lim_{t\to ۱} \frac{(۱-t)(t^{۴}+t^{۳}+t^{۲}+t+۱)}{(۱-t)(t^{۲}+t+۱)} = \frac{۵}{۳}$$

جواب سئوال ۴)

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$
$$a = ۳۲\,, h = ۱,\ f(x) = x^{\frac{۱}{۵}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{۱}{۵} x^{\frac{-۴}{۵}}\ ,$$

بنابراین $۳۳^{\frac{۱}{۵}} = f(۳۳) \approx f(۳۲) + f'(۳۲) \times ۱ = ۲ + \frac{۱}{۵} ۳۲^{\frac{-۴}{۵}} = ۲ + \frac{۱}{۸۰} = ۲/۰۱۲۵$

جواب سئوال ۵:

فرض کنید نقطه‌ی $B = (x, y)$ واقع بر نمودار منحنی داده شده نزدیکترین فاصله را تا A دارد.

$$l = \sqrt{(x+۶)^{۲} + (y - ۰)^{۲}} = \sqrt{(x+۶)^{۲} + x^{۲} + ۱} \Longrightarrow l' = \frac{۲(x+۶) + ۲x}{۲\sqrt{(x+۶)^{۲} + x^{۲} + ۱}}$$

$$l' = ۰ \Longrightarrow x = -۳$$

نقاط مورد نظر $(-۳, \sqrt{۱۰})$ و $(-۳, -\sqrt{۱۰})$ هستند.