سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دکتر حمید حسن‌پور

فصل دوم

تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه زمان

فهرست مطالب فصل

۲- ۱- مقدمه

۲- ۲- تحلیل سیستم‌های *LTI* با کمک کانولوشن در حوزه زمان

۲- ۳- ویژگی‌های سیستم‌های *LTI*

۲- ۴- تابع ویژه سیستم‌های *LTI*

۲- ۵- توصیف سیستم‌های *LTI* با معادلات دیفرانسیلی و تفاضلی

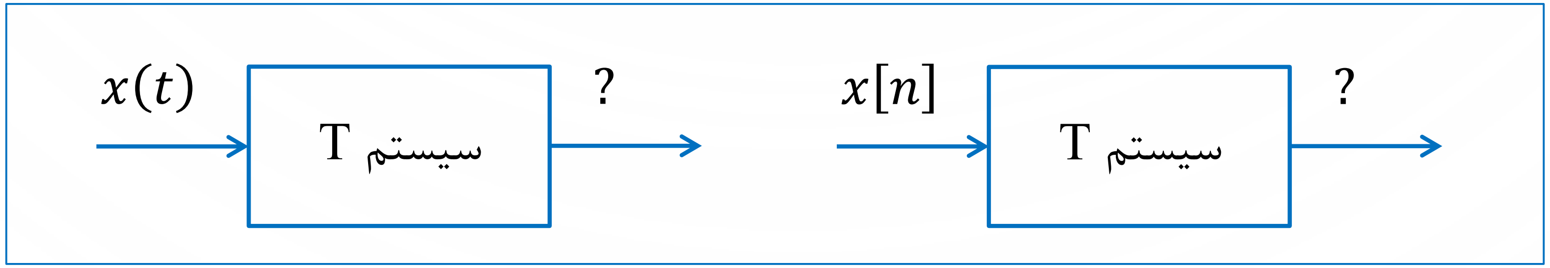
۲- ۶- کدهای *Matlab*

مقدمه

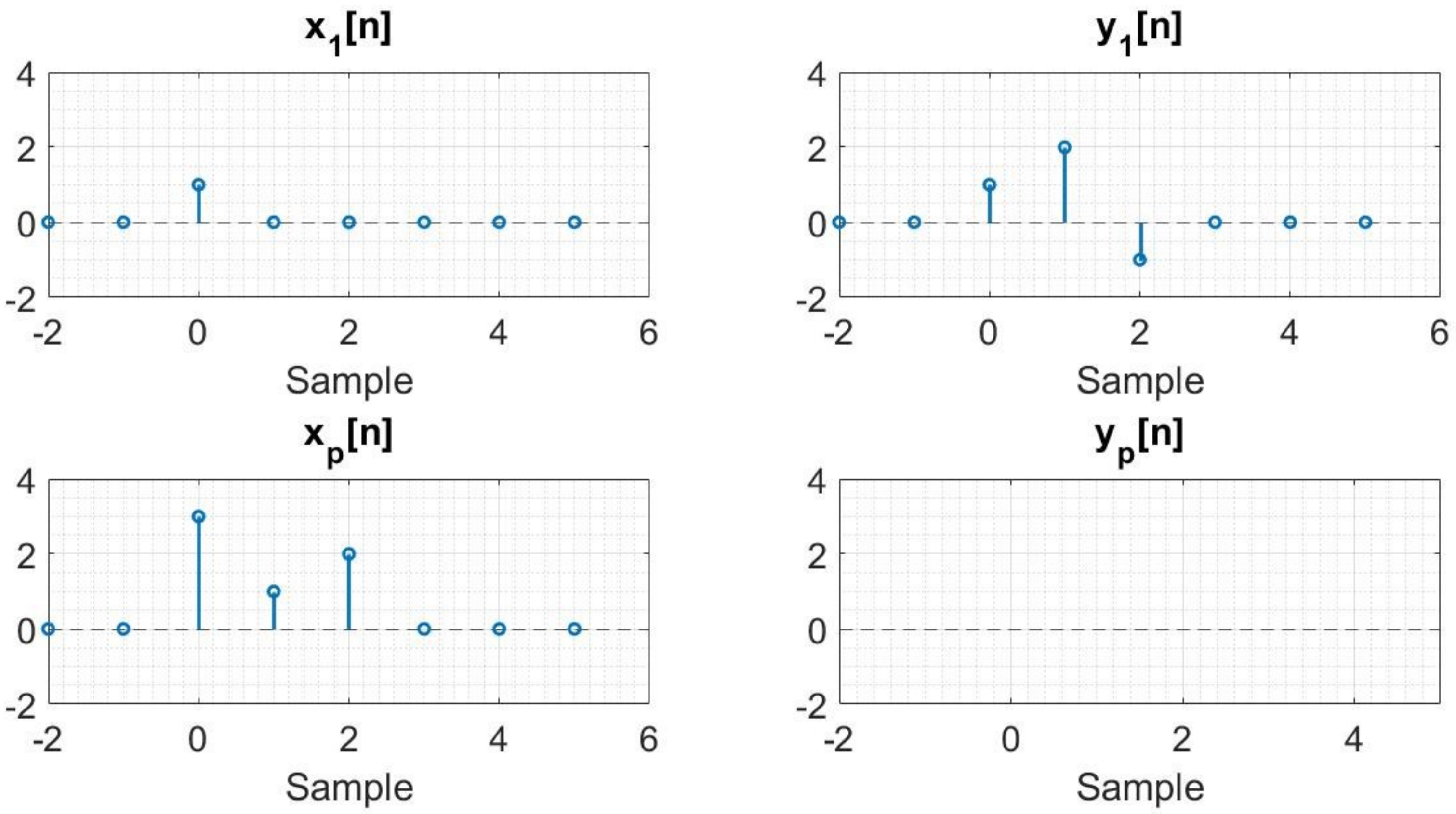
- بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان با دقت خوبی به صورت سیستم‌های LTI مدل‌سازی کرد.
- مسئله عمده در تجزیه و تحلیل یک سیستم پیدا کردن چگونگی خروجی سیستم با فرض معلوم بودن سیستم و ورودی آن است.
- برای حل این مسئله دو راه کلی وجود دارد که تحت عنوان تئوری کاربرد سیگنال به صورت زیر مطرح می‌شود.

۱- استفاده از انتگرال کانولوشن در حوزه زمان

۲- تجزیه و تحلیل در حوزه تبدیل



مثال: فرض کنید سیستم LTI به صورت $y[n] = T\{x[n]\}$ در اختیار دارید. خروجی این سیستم با ورودی $x_1[n]$ به صورت $y_1[n]$ است. خروجی سیستم نسبت به ورودی $x_p[n]$ را بیابید.



پاسخ مثال: می‌توان ورودی $x_p[n]$ را به صورت مجموعی از ورودی‌های مقیاس شده و انتقال داده شده از ورودی $x_1[n]$ نوشت:

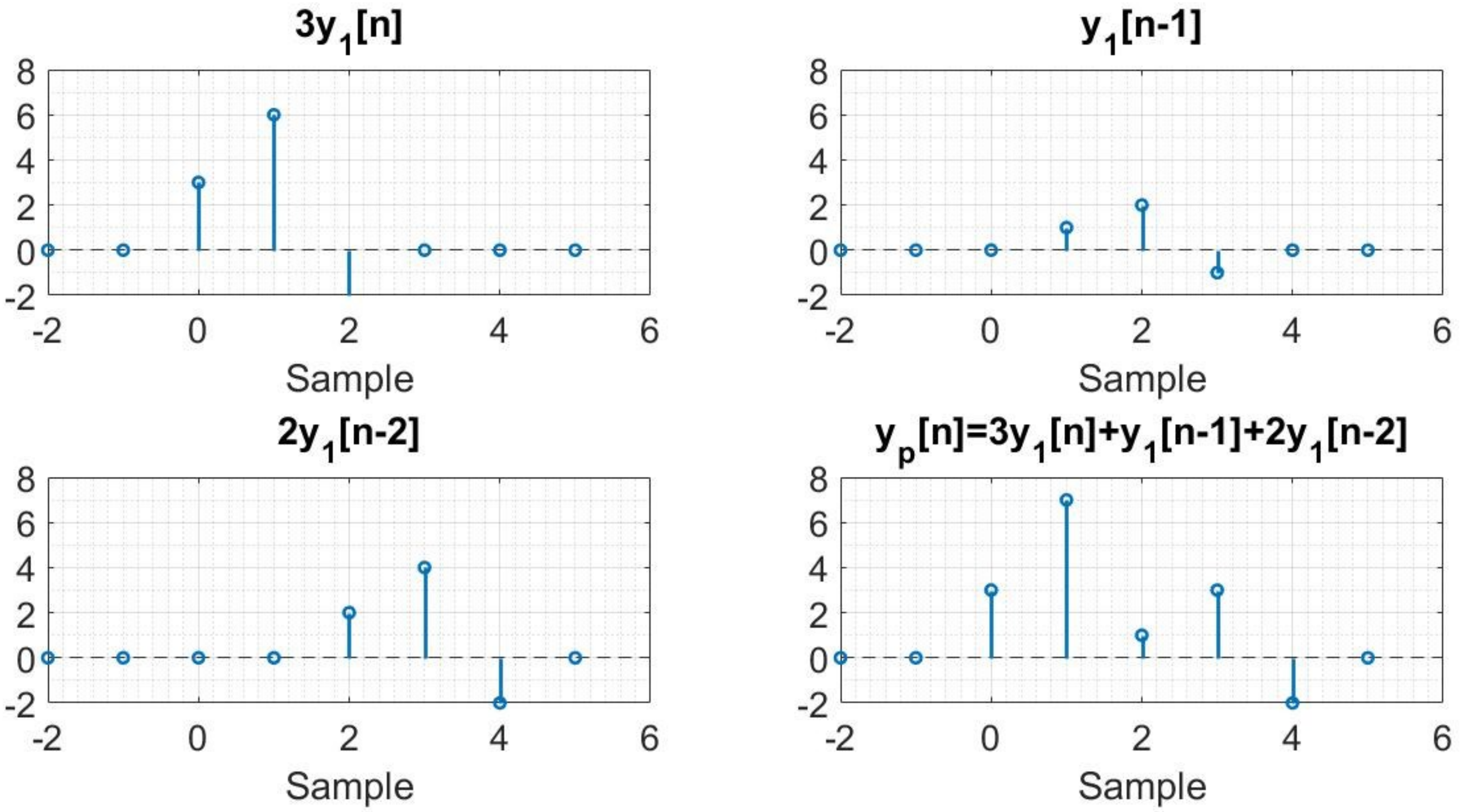
$$x_p[n] = 3x_1[n] + x_1[n-1] + 2x_1[n-2].$$

از آنجایی که سیستم **LTI** است، خروجی $y_p[n]$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$y_p[n] = T\{x_p[n]\} = T\{3x_1[n] + x_1[n-1] + 2x_1[n-2]\}$$
$$= 3T\{x_1[n]\} + T\{x_1[n-1]\} + 2T\{x_1[n-2]\} = 3y_1[n] + y_1[n-1] + 2y_2[n-2]$$

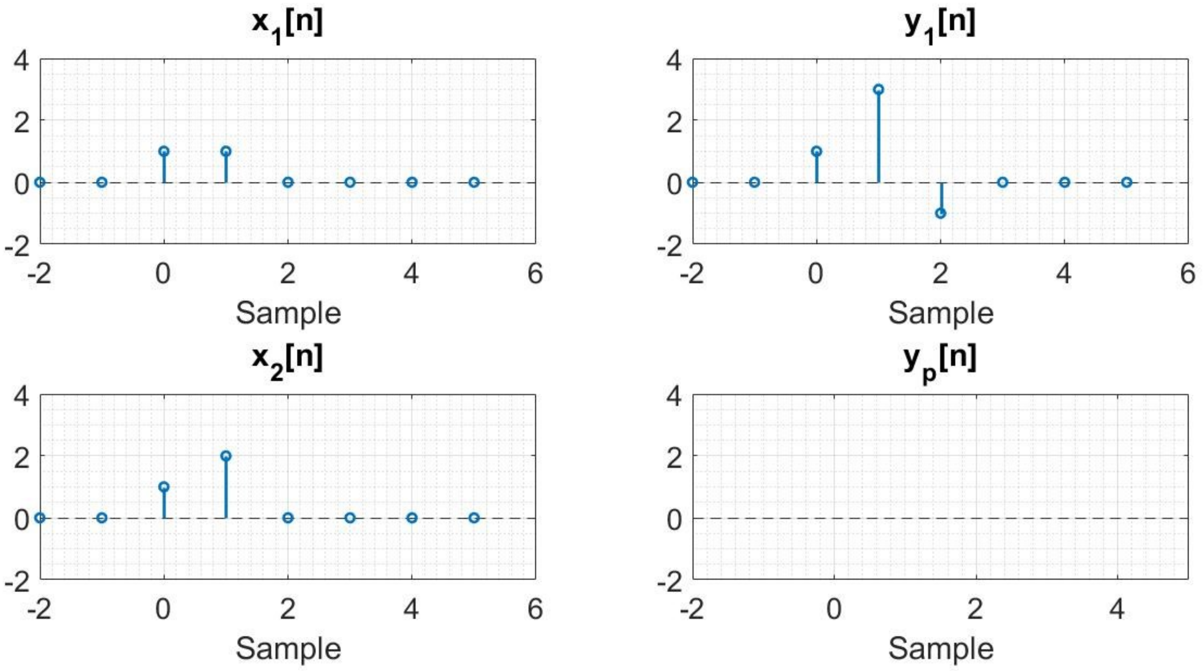
بنابراین برای محاسبه خروجی سیستم به ورودی $x_p[n]$ کافی است مقادیر خروجی‌های انتقال داده شده $y_1[n]$ را محاسبه کرده و سپس آن‌ها را با یکدیگر جمع زد.

ادامه مثال


3y_1[n]
y_1[n-1]
2y_1[n-2]
y_p[n]=3y_1[n]+y_1[n-1]+2y_1[n-2]
Sample
Sample
Sample
Sample

در سیستم‌های *LTI* پاسخ ورودی دلخواه سیستم از روی پاسخ سیستم به سایر ورودی‌ها قابل محاسبه است. این موضوع یک شرط دارد و آن هم این است که بتوان با کمک ورودی‌ها با خروجی معلوم، ورودی دلخواه را ساخت.

مثال: فرض کنید سیستم LTI به صورت $y[n] = T\{x[n]\}$ در اختیار دارید. خروجی این سیستم با ورودی $x_1[n]$ به صورت $y_1[n]$ است. خروجی سیستم نسبت به ورودی $x_2[n]$ را بیابید.



پاسخ: از آنجایی که نمی‌توان ورودی $x_2[n]$ را از روی ورودی $x_1[n]$ ساخت، بنابراین نمی‌توان خروجی $y_2[n]$ را به کمک داده‌های مسئله تعیین کرد.

- یکبار دیگر مثال ابتدای فصل را در نظر بگیرید.
- ویژگی ورودی معلوم در این مثال آن بود که فقط شامل یک مقدار غیرصفر بود و بنابراین به کمک آن می‌توان هر دنباله ورودی دلخواهی را ساخت.
- دنباله ضربه واحد چنین ویژگی‌ای را دارد.

تحلیل سیستم‌های LTI با کمک کانولوشن در حوزه زمان

۲- ۲- ۱- پاسخ ضربه سیستم *LTI*

۲- ۲- ۲- انتگرال کانولوشن و جمع کانولوشن

۲- ۲- ۳- محاسبه کانولوشن به روش نمایش گرافیکی

۲- ۲- ۴- محاسبه جمع کانولوشن به روش چندجمله‌ای

۲- ۲- ۵- پاسخ ورودی دلخواه

۲- ۲- ۶- ویژگی‌های کانولوشن

۲- ۲- ۷- پاسخ پله سیستم

پاسخ ضربه سیستم LTI

- پاسخ ضربه یک سیستم LTI عبارت است از خروجی سیستم به ازای ورودی ضربه واحد ($\delta[n]$ یا $\delta(t)$) که به صورت $h[n]$ یا $h(t)$ نمایش داده می‌شود.

$$h(t) = T\{\delta(t)\}$$
$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

ادامه پاسخ ضربه سیستم LTI

در مثال ابتدای فصل خروجی سیستم به ازای ورودی $x_p[n]$ به صورت زیر محاسبه شد.

$$y_p[n] = 3y_1[n] + y_1[n-1] + 2y_1[n-2]$$

بنابراین خواهیم داشت.

$$y_p[n] = 3h_1[n] + h_1[n-1] + 2h_1[n-2]$$

ضرایب پاسخ ضربه همان مقادیر ورودی‌های سیستم هستند؛ به عبارت دیگر

$$y_p[n] = x[0]h_1[n] + x[1]h_1[n-1] + x[2]h_1[n-2]$$

به همین ترتیب، اگر بخواهیم نقاط صفر را در نظر بگیریم، خروجی سیستم به ازای ورودی $x[n]$ به صورت زیر است.

$$y[n] = T\{x[n]\} = \cdots + x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \cdots$$

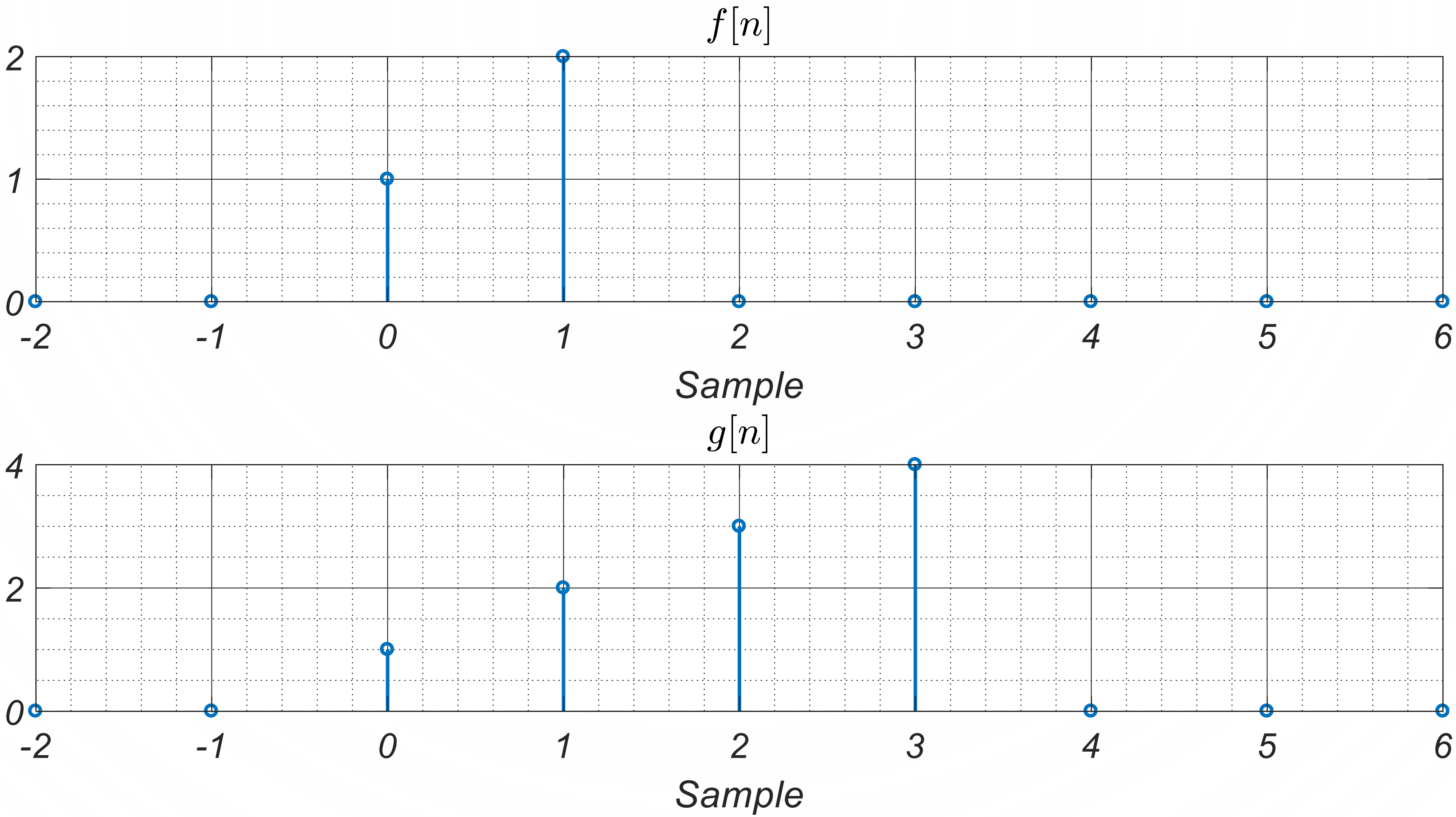
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

انتگرال کانولوشن و جمع کانولوشن

- عملگر جمع کانولوشن، عملگری ریاضی است که روی دو سیگنال زمان گسسته عمل می‌کند و نتیجه آن نیز یک سیگنال زمان گسسته است. اگر $f[n]$ و $g[n]$ دو سیگنال زمان گسسته باشند، کانولوشن $f[n]$ و $g[n]$ که به صورت $f[n] * g[n]$ نمایش داده می‌شود، از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]g[n-k]$$

مثال: کانولوشن بین دو سیگنال نشان داده شده را بیابید.



ادامه مثال

$$y[n]=f[n]*g[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]g[n-k]=\sum_{k=0}^{+1} f[k]g[n-k]$$

$$y[0]=f[n]*g[n]\Big|_{n=0}=\sum_{k=0}^{+1} f[k]g[-k]=f[0]g[0]+f[1]g[-1]=1*1=1$$

$$y[1]=f[n]*g[n]\Big|_{n=1}=\sum_{k=0}^{+1} f[k]g[1-k]=f[0]g[1]+f[1]g[0]=1*2+2*1=4$$

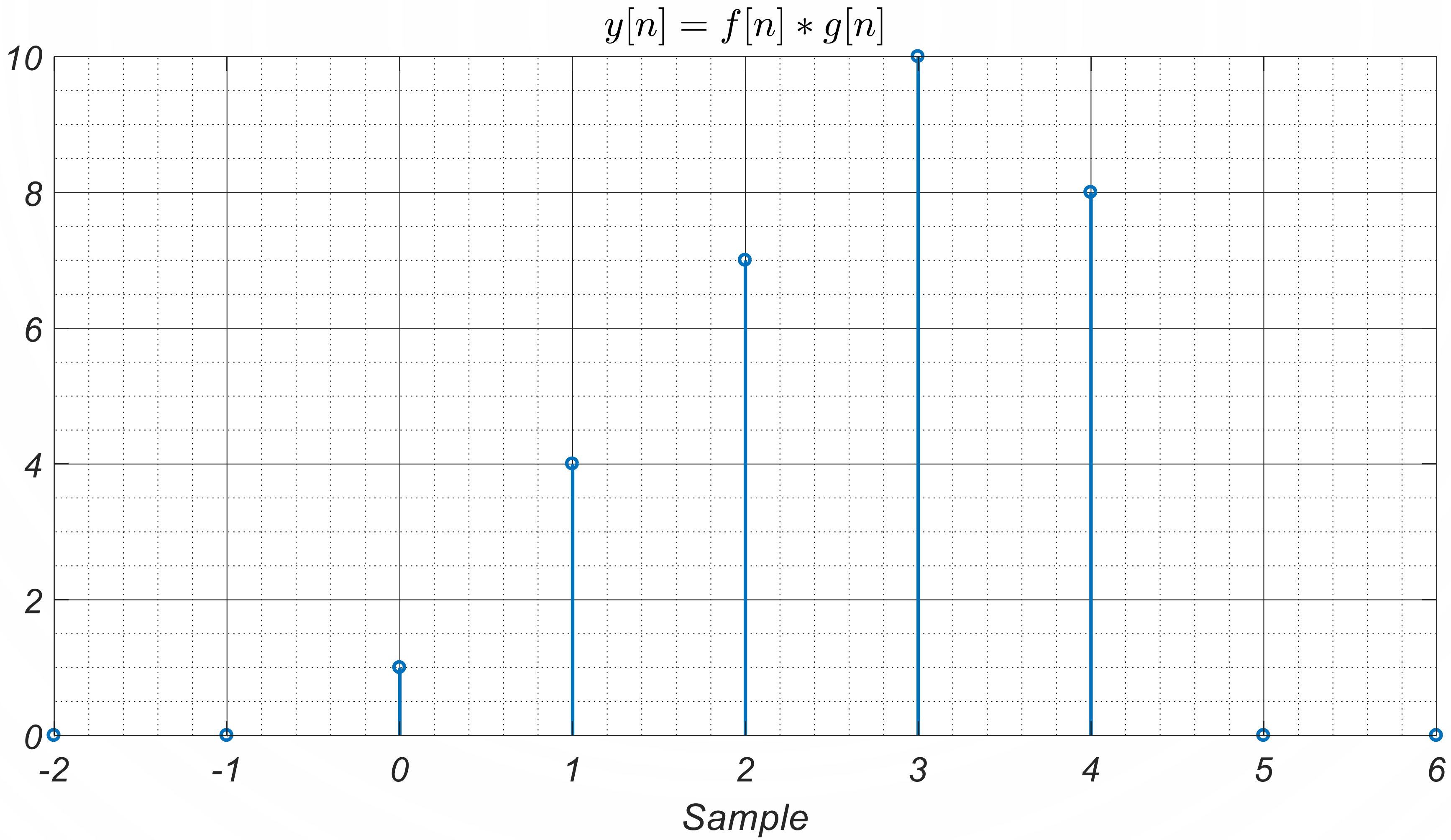
$$y[2]=f[n]*g[n]\Big|_{n=2}=\sum_{k=0}^{+1} f[k]g[2-k]=f[0]g[2]+f[1]g[1]=1*3+2*2=7$$

$$y[3]=f[n]*g[n]\Big|_{n=3}=\sum_{k=0}^{+1} f[k]g[3-k]=f[0]g[3]+f[1]g[2]=1*4+2*3=10$$

$$y[4]=f[n]*g[n]\Big|_{n=4}=\sum_{k=0}^{+1} f[k]g[4-k]=f[0]g[4]+f[1]g[3]=2*4=8$$

مقدار $y[n]$ برای سایر n ها صفر است.

ادامه مثال



انتگرال کانولوشن و جمع کانولوشن

- عملگر انتگرال کانولوشن، عملگری ریاضی است که روی دو سیگنال زمان پیوسته عمل می‌کند و نتیجه آن نیز یک سیگنال زمان پیوسته است. اگر $f(t)$ و $g(t)$ دو سیگنال زمان گسسته باشند، کانولوشن $f(t)$ و $g(t)$ که به صورت $f(t) * g(t)$ نمایش داده می‌شود، از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

مثال: کانولوشن بین دو سیگنال $f(t)=u(t)$ و $g(t)=e^{-at}u(t)$ را محاسبه نمایید.

پاسخ:

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{+\infty}e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

برای $t<0$ به خاطر وجود $u(\tau)$ حاصل انتگرال صفر است. برای $t\geq 0$ خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{\mathrm{t}}e^{-a(t-\tau)}d\tau=e^{-at}\int_{0}^{\mathrm{t}}e^{a\tau}d\tau=e^{-at}\left.\frac{e^{a\tau}}{a}\right|_{0}^{t}=\frac{e^{-at}}{a}(e^{at}-1)$$

بنابراین حاصل کانولوشن به صورت زیر خواهد بود:

$$f(t)*g(t)=\frac{e^{-at}}{a}(e^{at}-1)u(t)$$

محاسبه کانولوشن به روش نمایش گرافیکی

- معمولاً از این روش برای محاسبه کانولوشن بین دو سیگنال زمان پیوسته استفاده می‌شود.
- محاسبه کانولوشن بین دو سیگنال زمان گسسته نیز مشابه روش زمان پیوسته است.
- فرض کنید می‌خواهید کانولوشن بین دو سیگنال $f(t)$ و $g(t)$ را محاسبه نمایید. مراحل زیر را انجام دهید.

۱. هر دو سیگنال $f(t)$ و $g(t)$ را بر حسب متغیر τ بیان کنید؛ به عبارت دیگر $f(\tau)$ و $g(\tau)$ را محاسبه نمایید.

۲. معکوس سیگنال $g(\tau)$ را محاسبه نمایید؛ به عبارت دیگر $g(-\tau)$ را محاسبه نمایید.

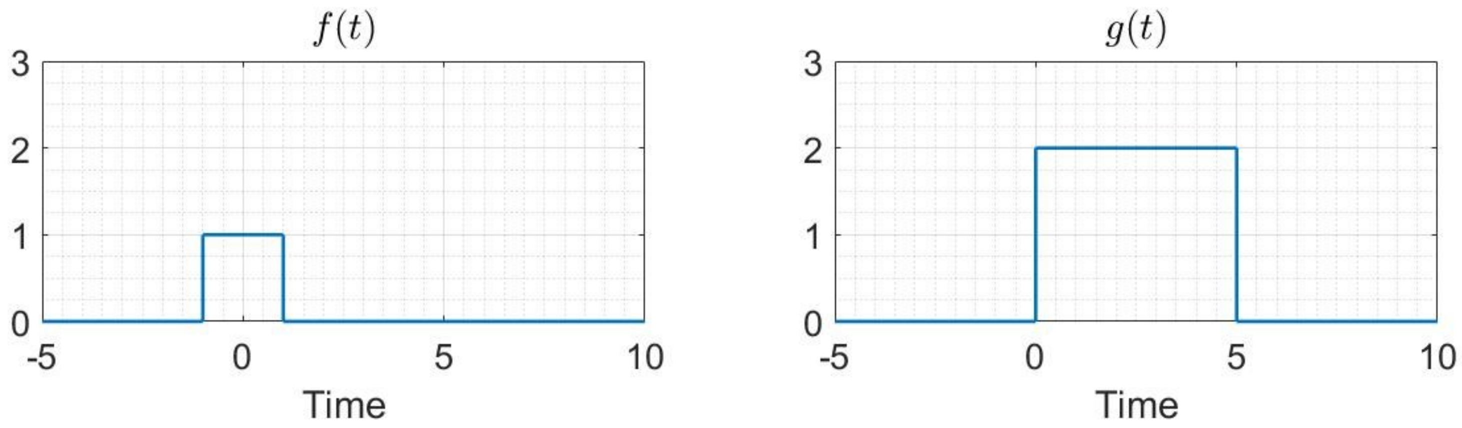
۳. سیگنال $g(-\tau)$ را به اندازه t به سمت چپ انتقال دهید؛ به عبارت دیگر $g(t-\tau)$ را محاسبه نمایید.

۴. با شروع t از $-\infty$ تا $+\infty$ هر زمان که دو تابع با هم برخورد کردند، انتگرال حاصل‌ضرب آن‌ها را پیدا کنید.

مثال: دو سیگنال نمایش داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.

الف: به کمک رابطه اصلی، کانولوشن بین آن‌ها را محاسبه نمایید.

ب: به کمک روش نمایش گرافیکی کانولوشن بین آن‌ها را محاسبه نمایید.



اادامه مثال

پاسخ الف: ابتدا ضابطه دو سیگنال را می‌نویسیم.

$$f(t) = u(t+1) - u(t-1)$$
$$g(t) = 2u(t) - 2u(t-5)$$

به کمک رابطه اصلی کانولوشن بین دو سیگنال به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(\tau+1) - u(\tau-1)\big)g(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^{+1} g(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_{-1}^{+1} 2\big(u(t-\tau) - u(t-\tau-5)\big)d\tau = 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau)d\tau - 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau-5)d\tau$$

اگر $t < -1$ باشد، حاصل انتگرال بالا صفر است زیرا $u(t-\tau)$ و $u(t-\tau-5)$ در این بازه صفر است.

اگر $-1 \le t < 1$ باشد، حاصل انتگرال به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f(t) * g(t) = 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau)d\tau - 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau-5)d\tau = 2\int_{-1}^{t} 1d\tau = 2\tau\Big|_{-1}^{t} = 2t+2$$

اگر $t \ge 1$ باشد، انتگرال به شکل زیر ساده می‌شود.

$$f(t) * g(t) = 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau)d\tau - 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau-5)d\tau = 2\int_{-1}^{+1} 1d\tau - 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau-5)d\tau$$
$$= 4 - 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau-5)d\tau$$

اگر $1 \le t < 4$ باشد، حاصل انتگرال به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f(t) * g(t) = 4 - 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau-5)d\tau = 4 - 0 = 4$$

اگر $4 \le t < 6$ باشد، حاصل انتگرال به صورت زیر است.

$$f(t) * g(t) = 4 - 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau-5)d\tau = 4 - 2\int_{-1}^{t-5} 1d\tau = 4 - 2t\Big|_{-1}^{t-5} = 4 - 2(t-5+1) = -2t + 12$$

اگر $t \ge 6$ باشد، حاصل انتگرال به صورت زیر است.

$$f(t) * g(t) = 4 - 2\int_{-1}^{+1} u(t-\tau-5)d\tau = 4 - 2\int_{-1}^{+1} 1d\tau = 4 - 4 = 0$$

بنابراین حاصل کانولوشن بین دو سیگنال در زیر آمده است.

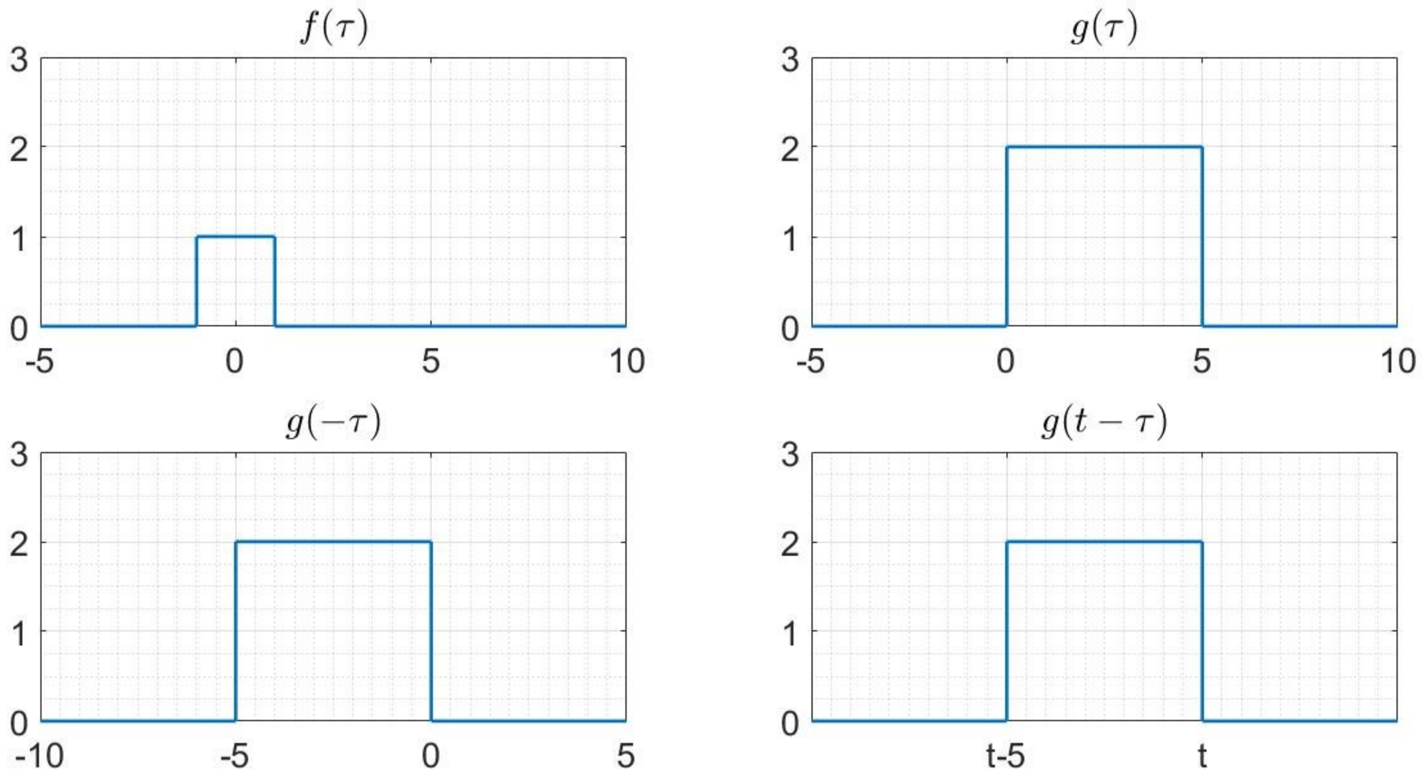
$$f(t) * g(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 2t + 2, & -1 \le t < 1 \\ 4, & 1 \le t < 4 \\ -2t + 12. & 4 \le t < 6 \\ 0, & t \ge 6 \end{cases}$$

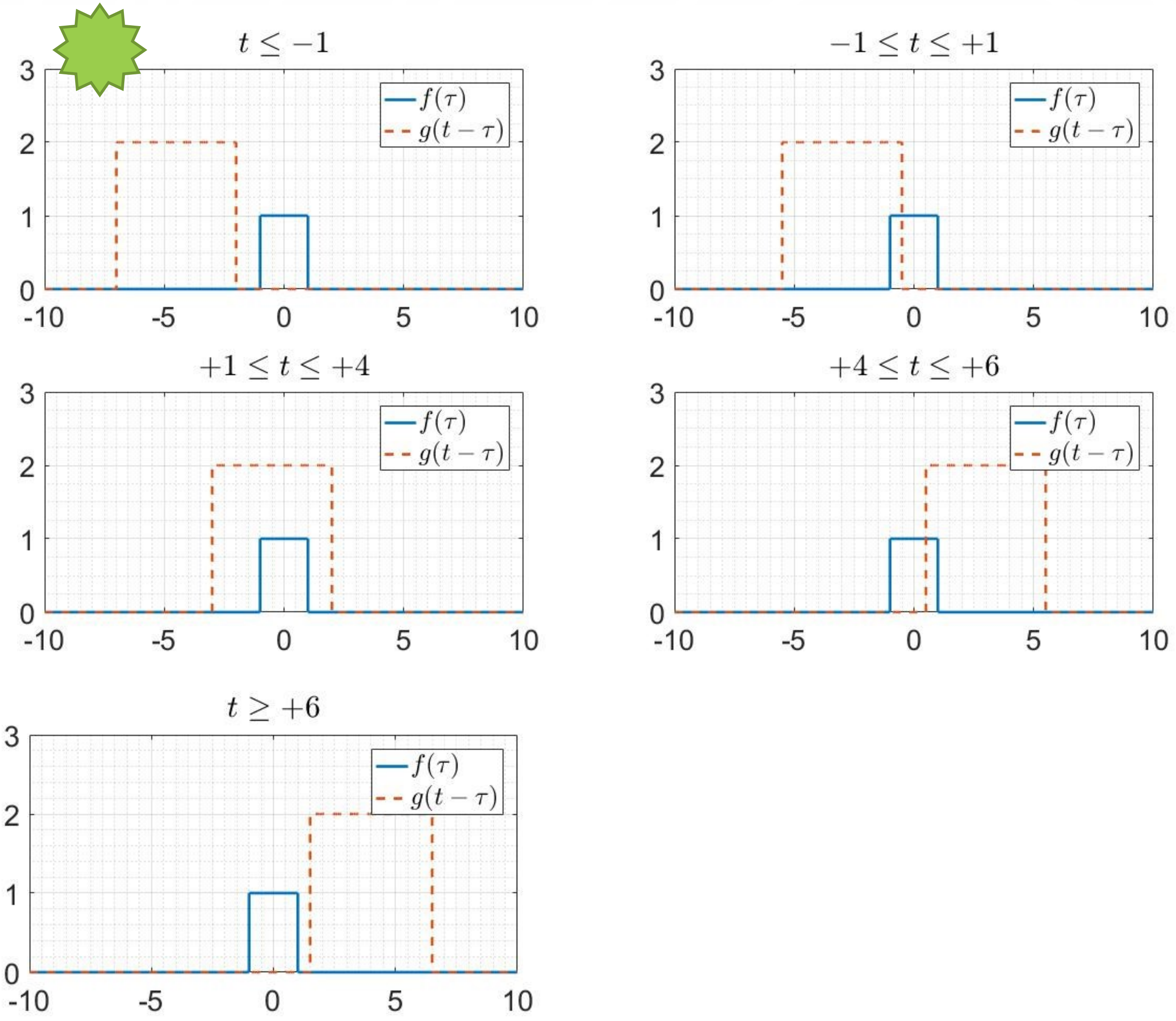
پاسخ ب:

مرحله ۱. هر دو سیگنال $f(t)$ و $g(t)$ بر حسب متغیر τ محاسبه می‌شود.

مرحله ۲. معکوس سیگنال $g(\tau)$ محاسبه می‌شود.

مرحله ۳. سیگنال $g(-\tau)$ به اندازه t به سمت چپ انتقال داده می‌شود.

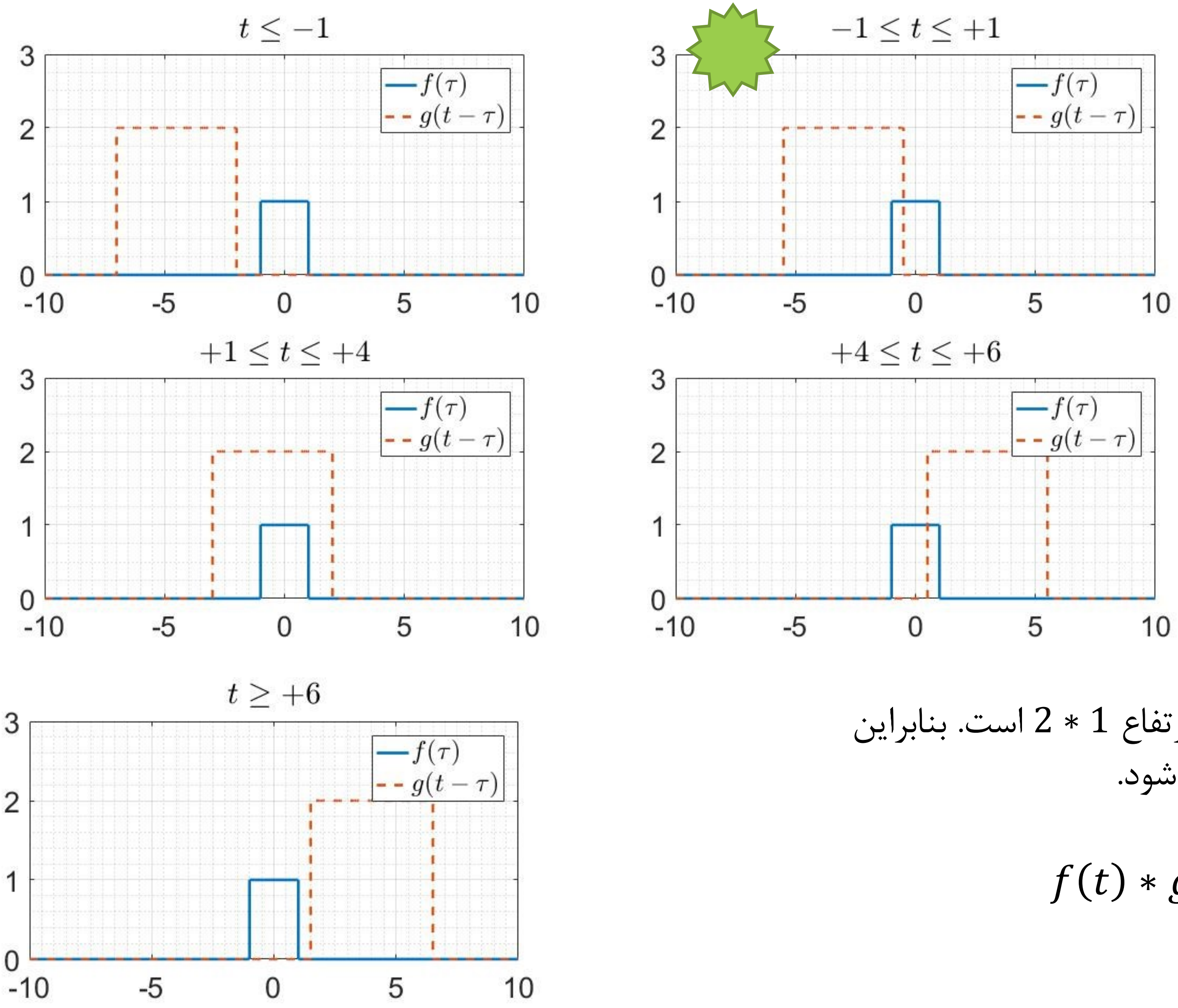




مرحله ۴. با شروع t از $-\infty$ تا $+\infty$ هر زمان که دو تابع با هم برخورد کردند، انتگرال حاصل‌ضرب آن‌ها محاسبه می‌گردد.

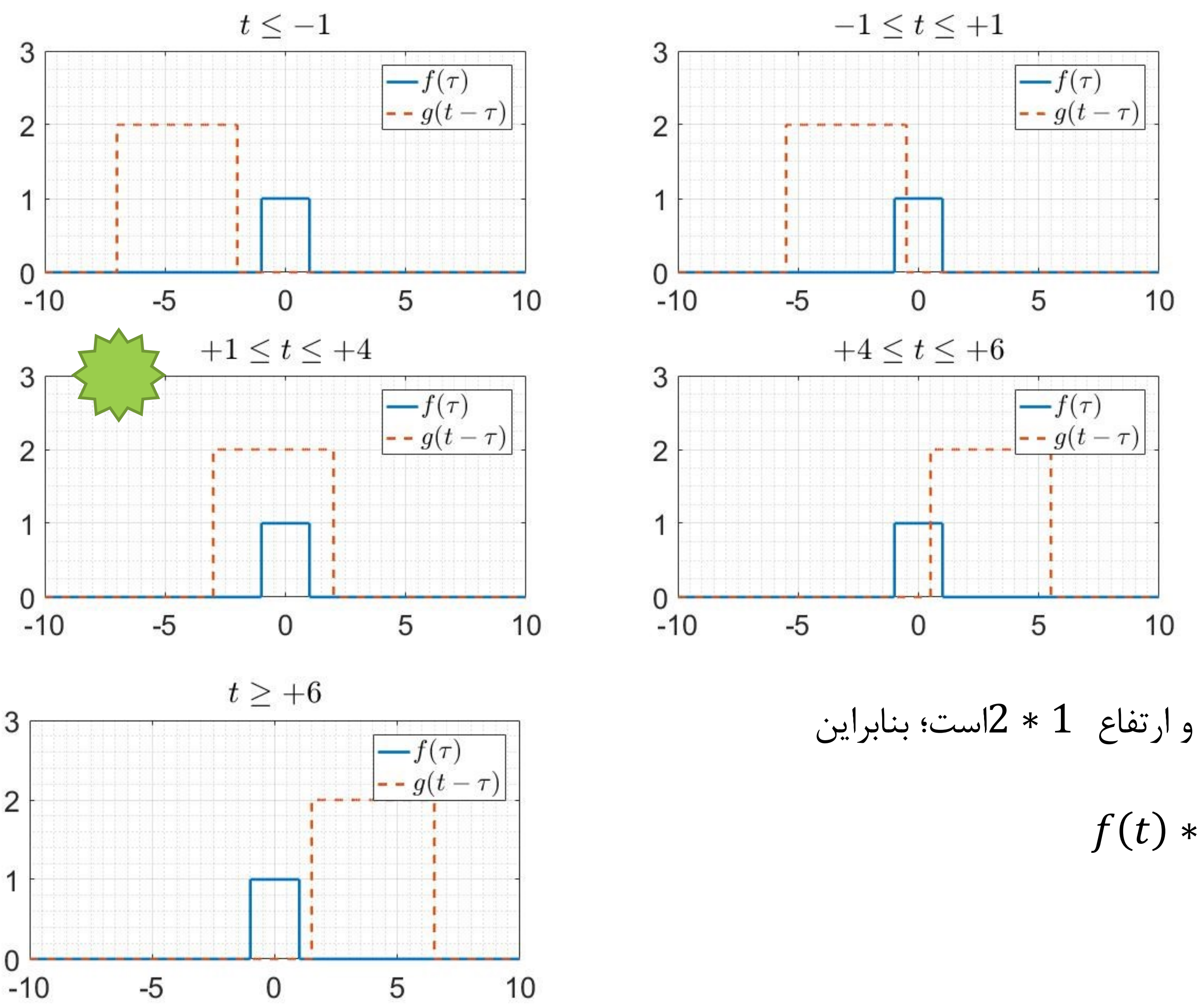
- اگر $t \leq -1$ باشد، دو سیگنال $f(\tau)$ و $g(t-\tau)$ با یکدیگر تداخل ندارد. بنابراین کانولوشن دو سیگنال در این بازه صفر است.

- اگر $-1 \leq t \leq 1$ باشد، دو سیگنال $f(\tau)$ و $g(t-\tau)$ با یکدیگر تداخل دارند.



حاصل‌ضرب این دو سیگنال مستطیلی با عرض $t-(-1)$ و ارتفاع $2*1$ است. بنابراین حاصل انتگرال (سطح این مستطیل) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f(t)*g(t) = 2*(t+1) = 2t+2$$

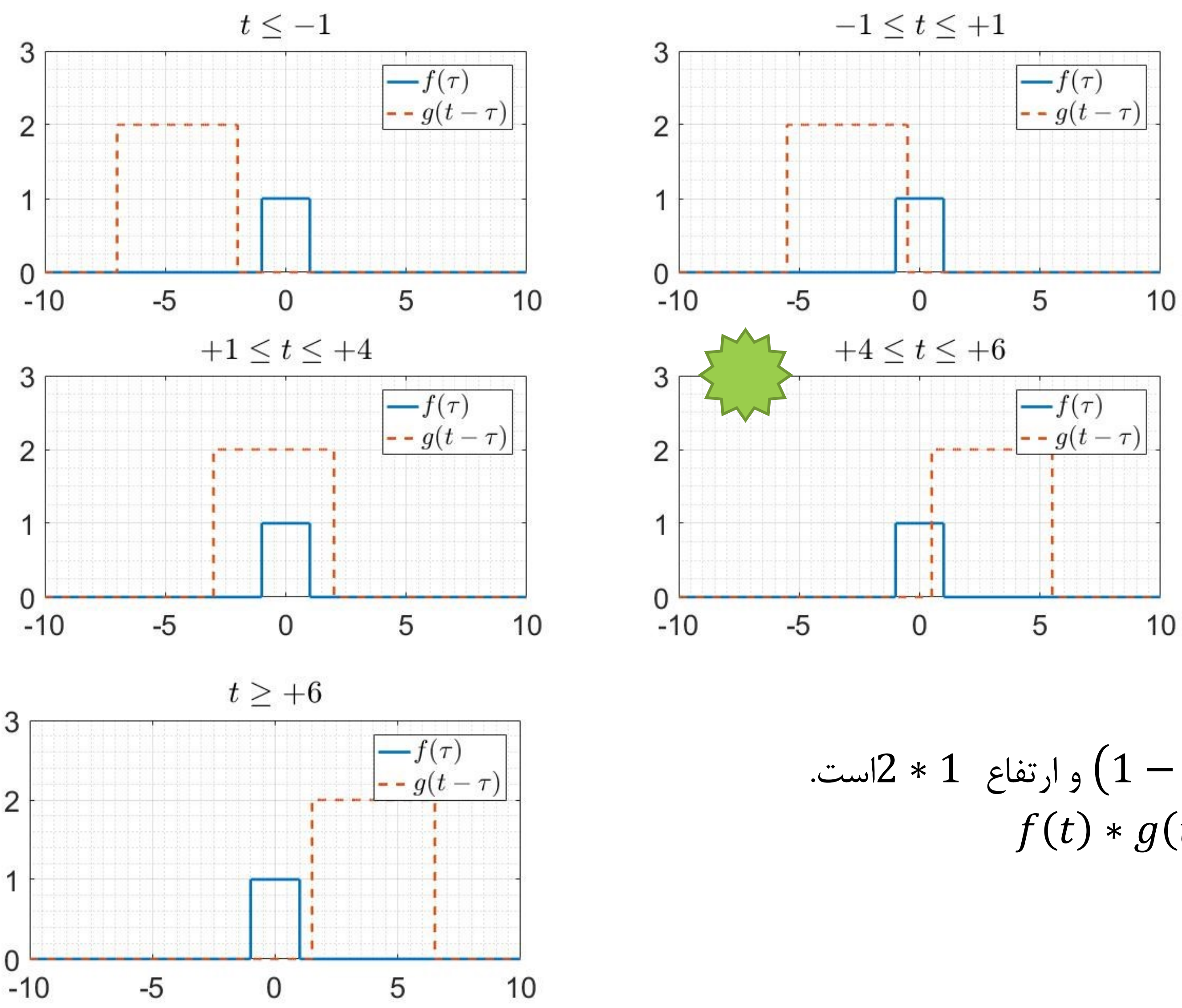


- اگر $-1 \le t \le 4$ باشد، دو سیگنال $f(\tau)$ و $g(t-\tau)$ کاملاً در داخل هم قرار می‌گیرند.

حاصل‌ضرب بین دو سیگنال مستطیلی با عرض $1-(-1)$ و ارتفاع $1 * 2$است؛ بنابراین مساحت آن ۴ است.

$$f(t) * g(t) = \big(1-(-1)\big) * 2 = 4$$

- اگر $4 \le t \le 6$ باشد، دو سیگنال $f(\tau)$ و $g(t-\tau)$ با هم تداخل دارند.

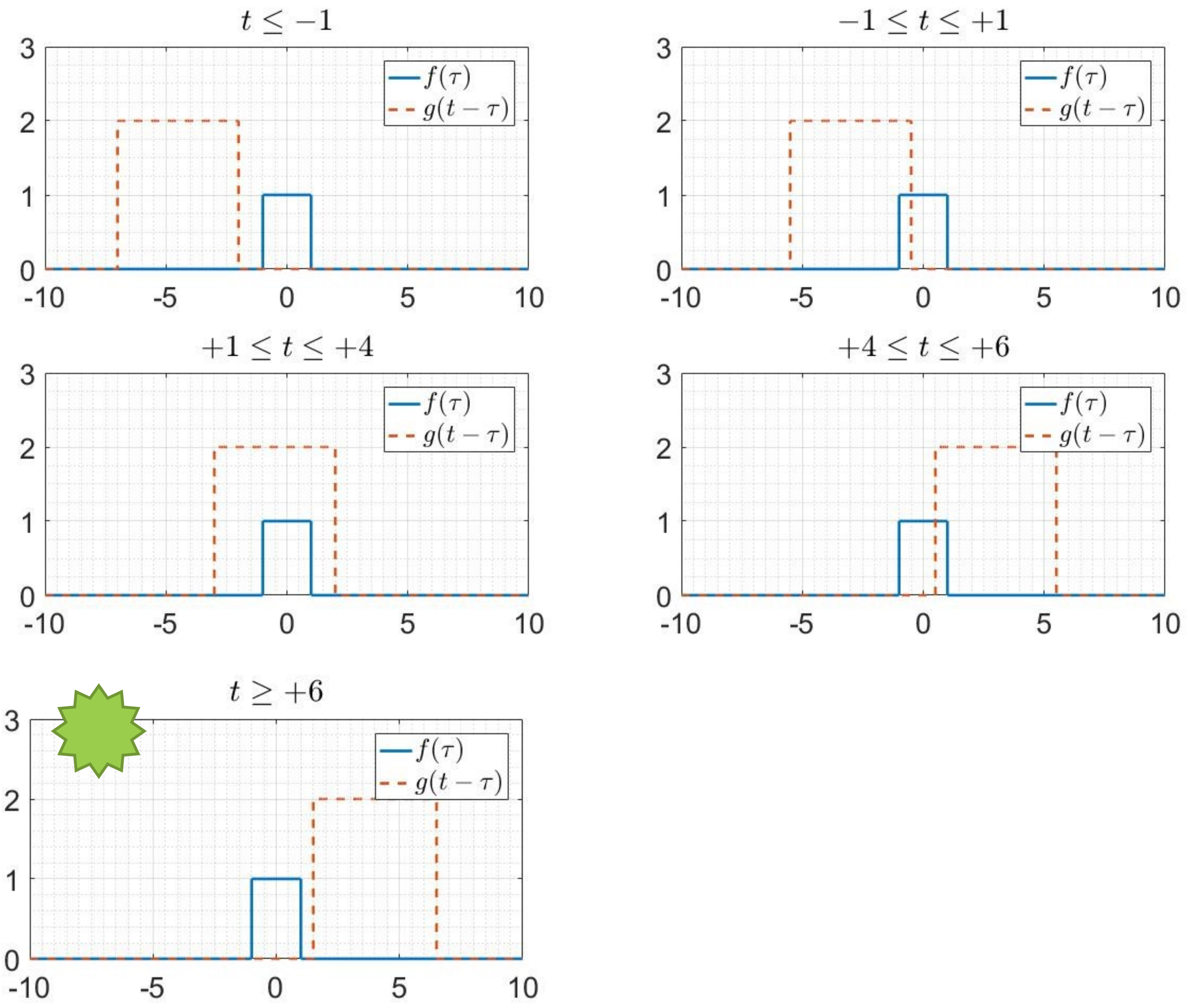


حاصل‌ضرب بین دو سیگنال مستطیلی با عرض $\big(1-(t-5)\big)$ و ارتفاع $1*2$است.

$$f(t)*g(t) = \big(1-(t-5)\big)*2 = 12-2t$$

ادامه مثال

- نهایتاً اگر $t \geq 6$ باشد، دو سیگنال $f(\tau)$ و $g(t-\tau)$ با هم تداخل ندارند؛ بنابراین حاصل کانولوشن در این بازه صفر است.



ادامه مثال

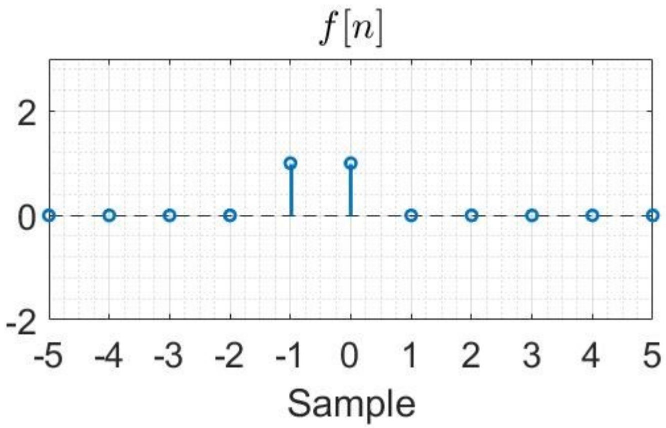
حاصل کانولوشن بین دو سیگنال در زیر آمده است.

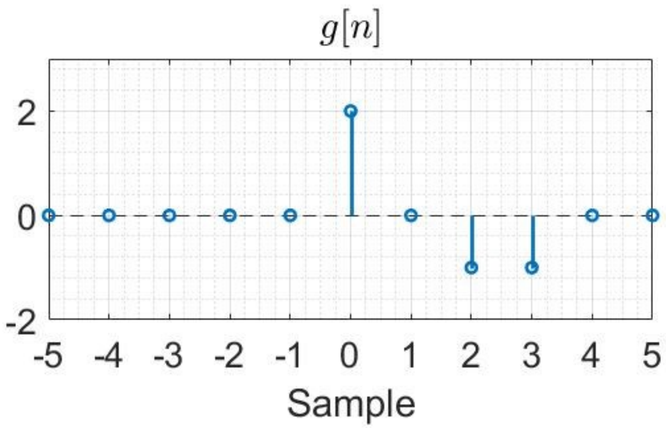
$$f(t) * g(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 2t + 2, & -1 \le t < 1 \\ 4, & 1 \le t < 4 \\ -2t + 12. & 4 \le t < 6 \\ 0, & t \ge 6 \end{cases}$$

مثال: دو سیگنال نمایش داده شده در شکل را در نظر بگیرید.

الف: به کمک رابطه اصلی کانولوشن بین آن‌ها را محاسبه نمایید.

ب: به کمک روش نمایش گرافیکی کانولوشن بین آن‌ها را محاسبه نمایید.





پاسخ الف: ابتدا ضابطه دو سیگنال را می‌نویسیم.

$$f[n] = \delta[n+1] + \delta[n]$$

$$g[n] = 2\delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

به کمک رابطه اصلی کانولوشن بین دو سیگنال به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\delta[k+1] + \delta[k])g[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k]g[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k+1]g[n-k] = g[n] + g[n+1]$$

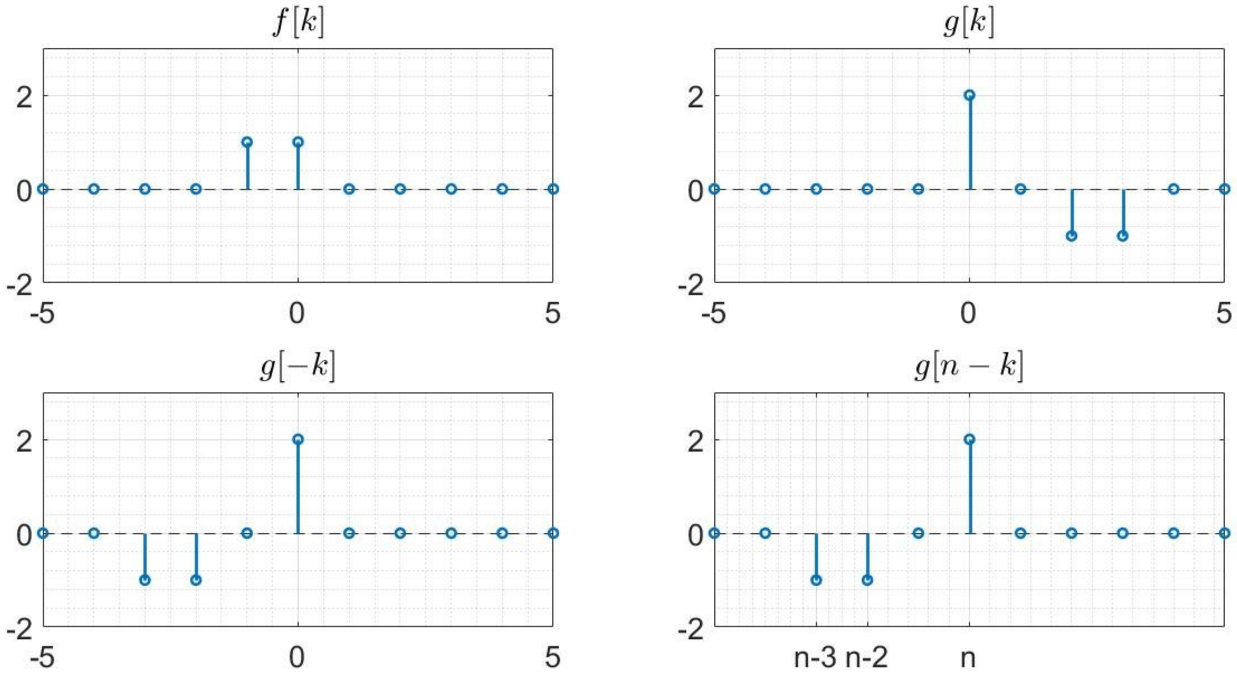
$$= (2\delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-3]) + (2\delta[n+1] - \delta[n-1] - \delta[n-2])$$

$$= 2\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$$

- **پاسخ ب:**

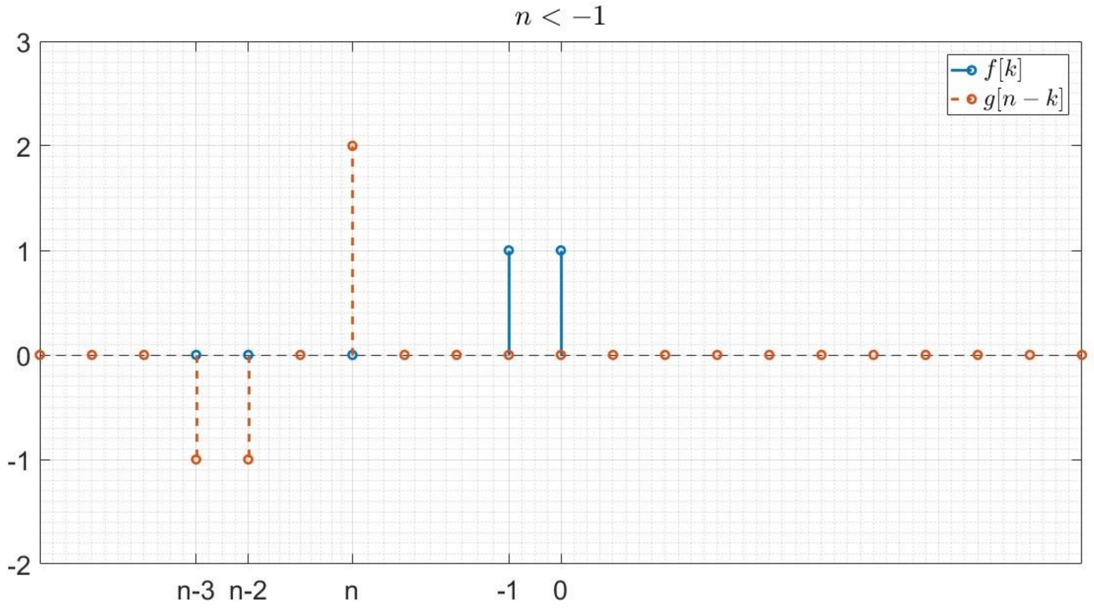
مرحله ۱. هر دو سیگنال $f[n]$ و $g[n]$ بر حسب متغیر k محاسبه می‌شود.

مرحله ۲ و ۳. سیگنال $g[n-k]$ و $g[-k]$محاسبه می‌شود.



- مرحله ۴. با شروع n از $-\infty$ تا $+\infty$ هر زمان که دو تابع با هم برخورد کردند، مجموع حاصل‌ضرب آن‌ها محاسبه می‌شود.

- اگر $n < -1$ باشد، دو سیگنال $f[k]$ و $g[n-k]$ با یکدیگر تداخل ندارد. بنابراین کانولوشن دو سیگنال در این بازه صفراست.



ادامه مثال

شکل برای $n = -1,0,1,2,3$ در شکل زیر نشان داده شده است.

بنابراین کانولوشن برای این نقاط به صورت زیر محاسبه می‌شود.

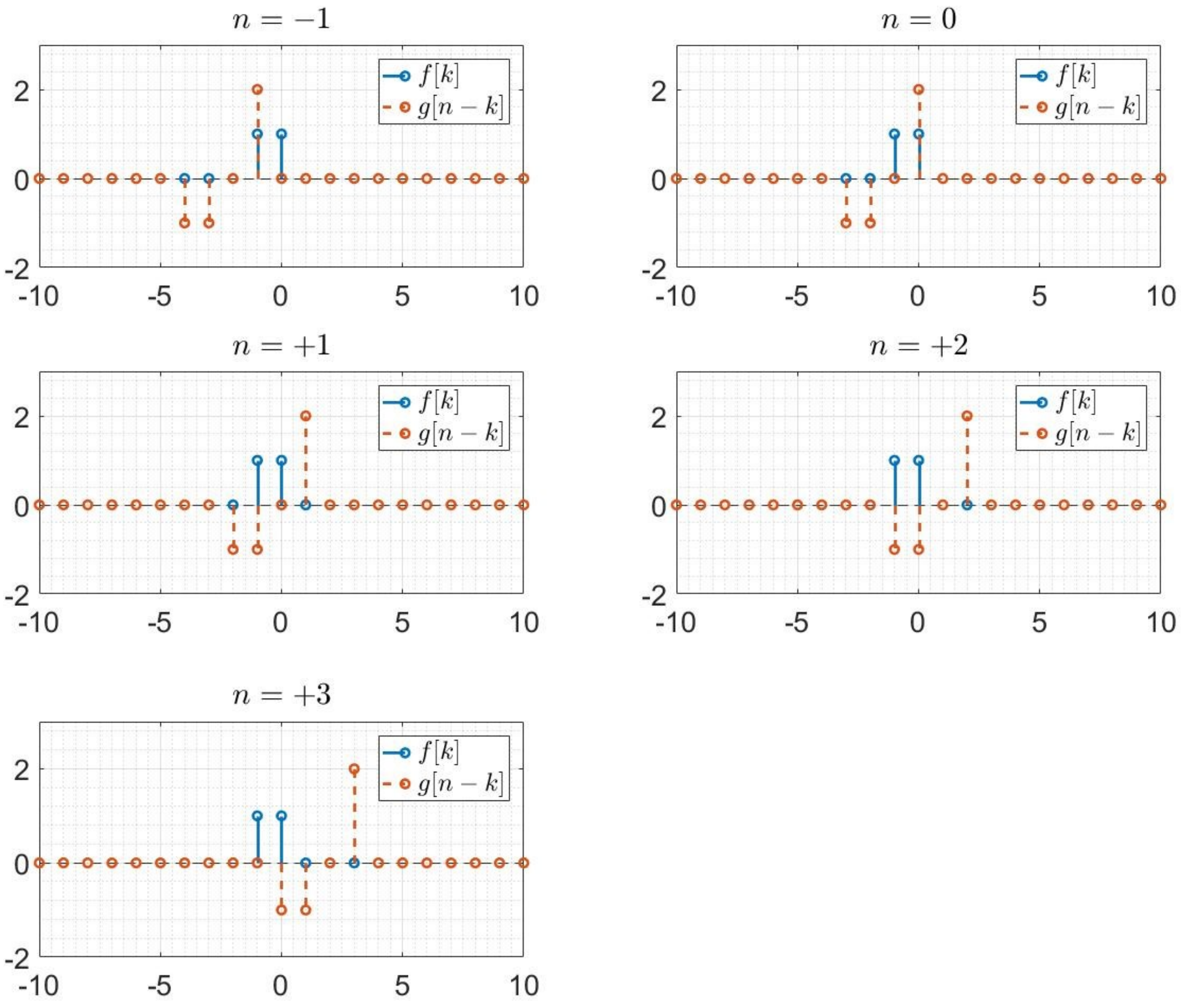
$$f[n] * g[n]\Big|_{n=-1} = 2 * 1 = 2$$

$$f[n] * g[n]\Big|_{n=0} = 2 * 1 = 2$$

$$f[n] * g[n]\Big|_{n=1} = -1 * 1 = -1$$

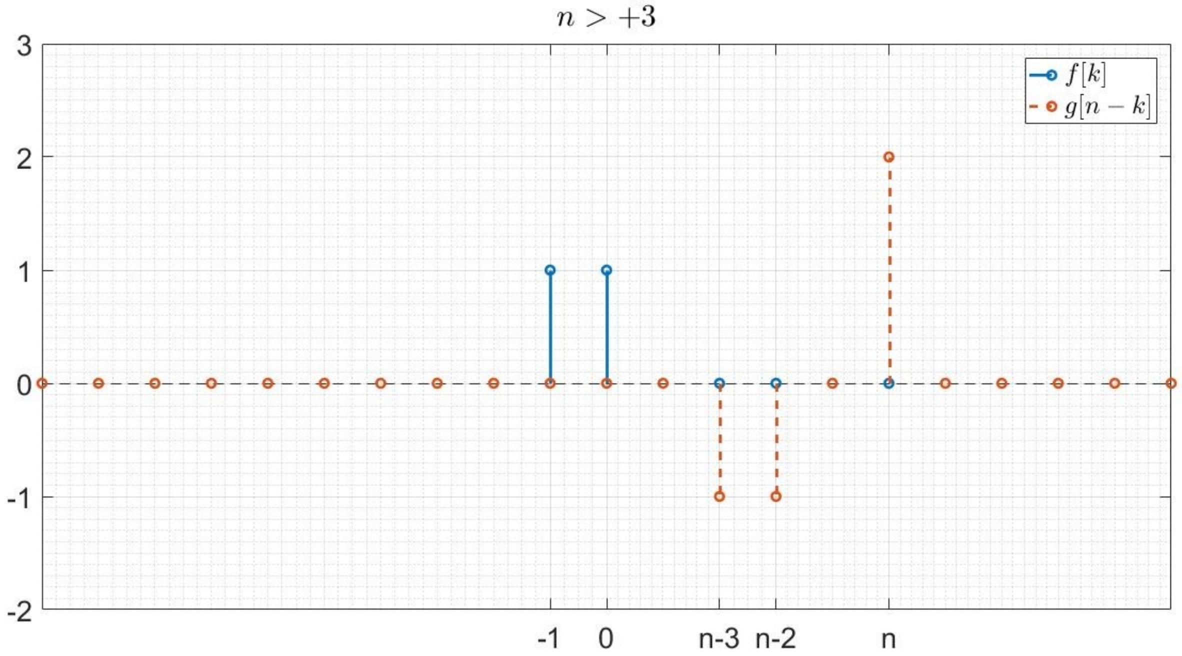
$$f[n] * g[n]\Big|_{n=2} = (-1 * 1) + (-1 * 1) = -2$$

$$f[n] * g[n]\Big|_{n=3} = -1 * 1 = -1$$



ادامه مثال

- نهایتاً اگر $n > 3$ باشد، دو سیگنال $f[k]$ و $g[n-k]$ با یکدیگر تداخل ندارد.



بنابراین حاصل کانولوشن بین دو سیگنال در زیر آمده است.

$$f[n] * g[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$$

محاسبه جمع کانولوشن به روش چندجمله‌ای

- در این بخش روش دیگری برای محاسبه کانولوشن بین دو سیگنال زمان گسسته محدود آورده شده است. در اینجا، محدود بودن به این معنا است که تعداد عناصر غیرصفر سیگنال‌ها قابل شمارش است.

۱- برای محاسبه کانولوشن بین دو سیگنال $f[n]$ و $g[n]$ ابتدا هر دو سیگنال را به صورت چندجمله‌ای به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Poly\{x, f[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]x^k \qquad Poly\{x, g[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]x^k$$

۲- حاصل‌ضرب بین دو چندجمله‌ای $Poly\{x,f[n]\}$ و $Poly\{x,g[n]\}$ را محاسبه می‌نماییم.

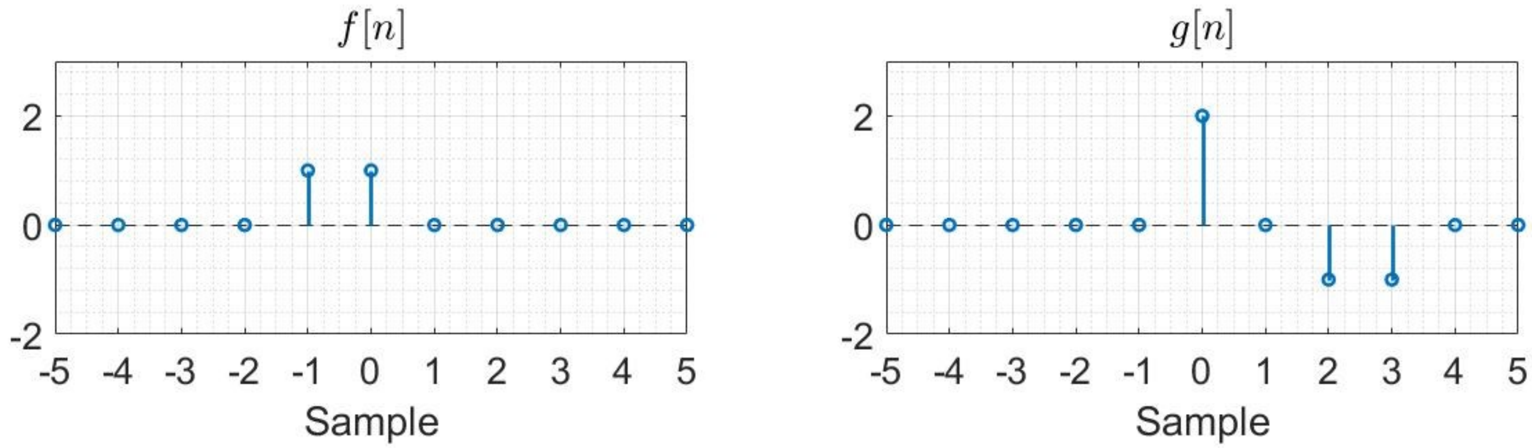
$$P(x) = Poly\{x, f[n]\}. Poly\{x, g[n]\}$$

۳- کانولوشن بین دو سیگنال $f[n]$ و $g[n]$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} coef\{k, P(x)\}\delta[k]$$

که در آن $coef\{k,P(x)\}$ ضریب x^k در چندجمله‌ای $P(x)$ را محاسبه می‌کند.

مثال: کانولوشن دو سیگنال زمان گسسته موجود در شکل زیر را به کمک چندجمله‌ای‌ها محاسبه نمایید.



ادامه مثال

پاسخ: ابتدا ضابطه دو سیگنال را می‌نویسیم.

$$f[n] = \delta[n+1] + \delta[n]$$

$$g[n] = 2\delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

سپس چندجمله‌ای‌های متناظر با دو سیگنال را محاسبه می‌کنیم.

$$Poly\{x, f[n]\} = x^{-1} + 1$$

$$Poly\{x, g[n]\} = 2 - x^2 - x^3$$

حال حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای را محاسبه می‌نماییم.

$$P(x) = Poly\{x, f[n]\}.Poly\{x, g[n]\} = (x^{-1} + 1)(2 - x^2 - x^3)$$

$$= (2x^{-1} - x - x^2) + (2 - x^2 - x^3) = 2x^{-1} + 2 - x - 2x^2 - x^3$$

در این مرحله کانولوشن بین دو سیگنال از روی ضرایب $P(x)$ محاسبه می‌شود.

$$f[n] * g[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$$

محاسبه جمع کانولوشن به روش چندجمله‌ای

- گاهی در محاسبه کانولوشن موقعیت زمانی عناصر غیرصفر اهمیتی ندارد، برای همین منظور فقط توالی عناصر سیگنال‌ها مشخص می‌شود. به طور مثال، مثال قبل ممکن است به صورت کانولوشن بین دو سیگنال $f=\{1,1\}$ و $g=\{2,0,-1,-3\}$ مطرح شود. در چنین مواردی موقعیت زمانی هر دو سیگنال را از صفر یا یک شروع می‌کنیم.

مثال: کانولوشن بین دو سیگنال $f = \{2,0,0,0,1\}$ و $g = \{1,2,0,1\}$ را محاسبه نمایید.

پاسخ: موقعیت زمانی هر دو سیگنال را از یک شروع می‌کنیم.

$$Poly\{x, f\} = 2x + x^5$$

$$Poly\{x, g\} = x + 2x^2 + x^4$$

$$P(x) = (2x + x^5)(x + 2x^2 + x^4) = (2x^2 + 4x^3 + 2x^5) + (x^6 + 2x^7 + x^9)$$

$$= 2x^2 + 4x^3 + 2x^5 + x^6 + 2x^7 + x^9$$

$$f * g = \{2,4,0,2,1,2,0,1\}$$

محاسبه جمع کانولوشن به روش چندجمله‌ای

- فرض کنید تعداد عناصر غیر صفر سیگنال $f[n]$ محدود است و عناصر غیرصفر در محدوده $L_f \leq n \leq U_f$ قرار دارد. لزوماً همه عناصر این بازه غیر صفر نیست. همچنین فرض کنید تعداد عناصر غیر صفر سیگنال $g[n]$ محدود است و عناصر غیرصفر در محدوده $L_g \leq n \leq U_g$ قرار دارد. لزوماً همه عناصر این بازه غیر صفر نیست.

$$f[n] = \sum_{k=L_f}^{U_f} f[k]\delta[n-k] \qquad g[n] = \sum_{k=L_g}^{U_g} g[k]\delta[n-k]$$

- چندجمله‌ای‌های متناظر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Poly\{x, f[n]\} = \sum_{k=L_f}^{U_f} f[k]x^k \qquad Poly\{x, g[n]\} = \sum_{k=L_g}^{U_g} g[k]x^k$$

- حاصل‌ضرب بین دو چندجمله‌ای $Poly\{x,f[n]\}$ و $Poly\{x,g[n]\}$به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(x) = Poly\{x, f[n]\}.Poly\{x, g[n]\} = \left(\sum_{k=L_f}^{U_f} f[k]x^k\right)\left(\sum_{k=L_g}^{U_g} g[k]x^k\right)$$

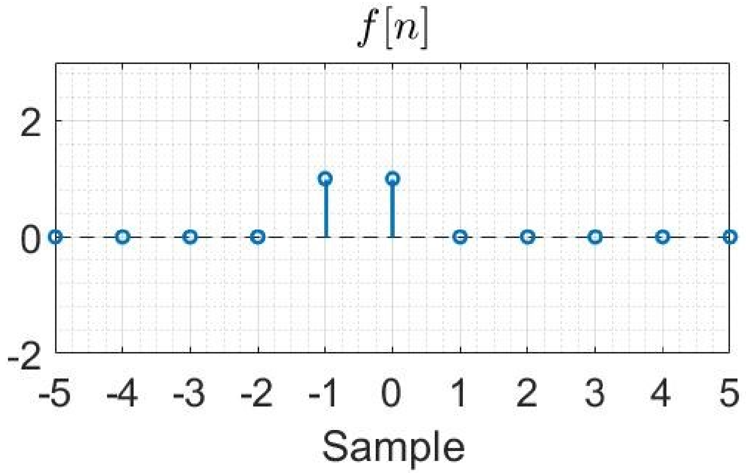
محاسبه جمع کانولوشن به روش چندجمله‌ای(ادامه)

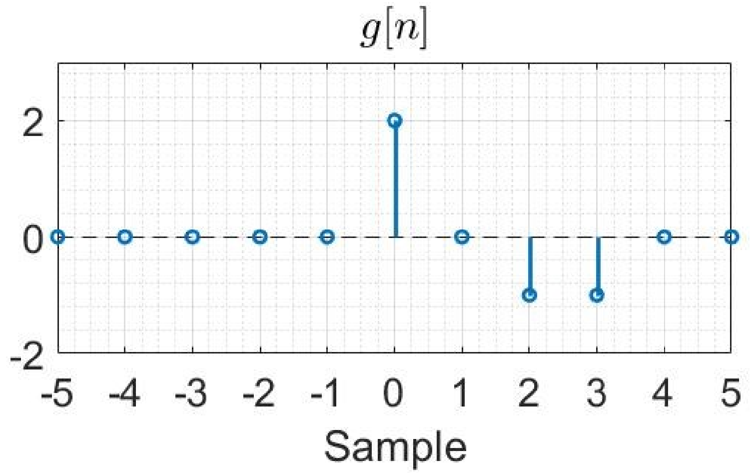
- کوچک‌ترین توان این چندجمله‌ای $L_f + L_g$، و بزرگ‌ترین توان این چندجمله‌ای $U_f + U_g$ است.

  این توان‌ها بازه اعداد غیرصفر (نه لزوماً همگی غیرصفر) کانولوشن بین دو سیگنال را مشخص می‌کند.

$$P(x) = Poly\{x, f[n]\}.Poly\{x, g[n]\} = \left(\sum_{k=L_f}^{U_f} f[k]x^k\right)\left(\sum_{k=L_g}^{U_g} g[k]x^k\right)$$

• مثال: کانولوشن دو سیگنال زمان گسسته موجود در شکل زیر را به کمک چندجمله‌ای‌ها محاسبه نمایید.





ادامه مثال

پاسخ: ابتدا توالی عناصر غیر صفر دو سیگنال را می‌نویسیم.

$$f = \{1,1\}$$

$$g = \{2,0,-1,-1\}$$

سپس چندجمله‌ای‌های متناظر با دو سیگنال را محاسبه می‌کنیم.

$$Poly\{x,f\} = x + x^2$$

$$Poly\{x,g\} = 2x - x^3 - x^4$$

حال حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای را محاسبه می‌نماییم.

$$P(x) = (x + x^2)(2x - x^3 - x^4) = (2x^2 - x^4 - x^5) + (2x^3 - x^5 - x^6)$$

$$= 2x^2 + 2x^3 - x^4 - 2x^5 - x^6$$

$$f * g = \{2,2,-1,-2,-1\}$$

از روی این دنباله می‌توان چندجمله‌ای با موقعیت زمانی را به دست آورد. کوچک‌ترین توان $L_f + L_g = -1 + 0 = -1$ است؛ بنابراین داریم:

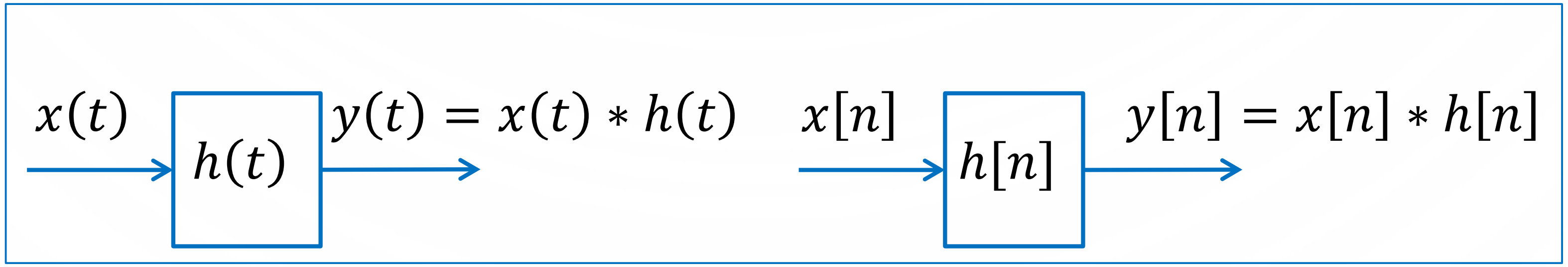
$$f[n] * g[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$$

پاسخ ورودی دلخواه

- اگر $x(t)$ (یا $x[n]$) ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ (یا $h[n]$) باشد، خروجی سیستم به صورت کانولوشن ورودی سیستم و پاسخ ضربه تعریف می‌شود.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$



مثال: سیستم LTI به صورت $y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ را در نظر بگیرید.

الف: خروجی این سیستم را به ازای ورودی $x(t) = e^{-at}u(t)$ را به کمک رابطه اصلی سیستم محاسبه نمایید.

ب: پاسخ ضربه این سیستم را محاسبه نمایید.

ج: خروجی این سیستم به ازای ورودی $x(t) = e^{-at}u(t)$ را با کمک پاسخ ضربه محاسبه نمایید.

پاسخ قسمت الف:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-a\tau}u(t)d\tau=\int_{0}^{t} e^{-a\tau}d\tau$$

اگر $t<0$ باشد، خروجی سیستم صفر است. در غیر اینصورت

$$y(t)=\int_{0}^{t} e^{-a\tau}d\tau=\left.\frac{e^{-a\tau}}{-a}\right|_{0}^{t}=\frac{1}{-a}\left(e^{-at}-1\right)=\frac{1-e^{-at}}{a}\Rightarrow y(t)=\frac{1-e^{-at}}{a}u(t)$$

پاسخ قسمت ب:

$$h(t)=T\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

پاسخ قسمت ج:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{+\infty} e^{-a\tau}u(t-\tau)d\tau$$

اگر $t<0$ باشد، خروجی سیستم صفر است. در غیر اینصورت

$$y(t)=\int_{0}^{t} e^{-a\tau}d\tau=\left.\frac{e^{-a\tau}}{-a}\right|_{0}^{t}=\frac{1}{-a}\left(e^{-at}-1\right)=\frac{1-e^{-at}}{a}$$

بنابراین خروجی به صورت زیر است.

$$y(t)=\frac{1-e^{-at}}{a}u(t)$$

مثال: سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-at}u(t), a>0$ را در نظر بگیرید. خروجی این سیستم به ازای ورودی $x(t)=e^{at}u(-t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{a\tau}u(-\tau)e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau=e^{-at}\int_{-\infty}^{0}e^{2a\tau}u(t-\tau)d\tau$$

اگر $t\geq 0$ باشد داریم:

$$y(t)=e^{-at}\int_{-\infty}^{0}e^{2a\tau}d\tau=e^{-at}\frac{1}{2a}\left.e^{2a\tau}\right|_{-\infty}^{0}=e^{-at}\frac{1}{2a}$$

اگر $t<0$ باشد داریم:

$$y(t)=e^{-at}\int_{-\infty}^{0}e^{2a\tau}u(t-\tau)d\tau=e^{-at}\int_{-\infty}^{t}e^{2a\tau}d\tau=e^{-at}\frac{1}{2a}\left.e^{2a\tau}\right|_{-\infty}^{t}=e^{at}\frac{1}{2a}$$

می‌توان خروجی $y(t)$ را به صورت زیر نشان داد.

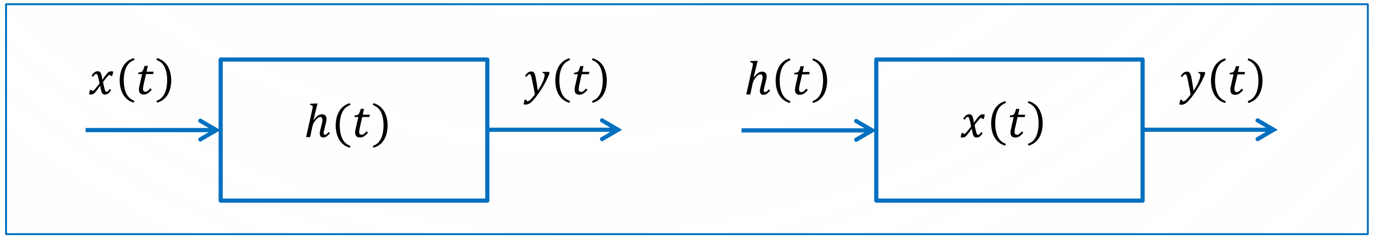
$$y(t)=\frac{1}{2a}e^{-a|t|}, a>0$$

ویژگی‌های کانولوشن

ویژگی ۱– جابه‌جایی پذیری

$$f[n] * g[n] = g[n] * f[n] \qquad f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

خاصیت فوق بیان می‌دارد که نقش‌های سیگنال ورودی و پاسخ ضربه در یک سیستم قابلیت جابه‌جایی دارند.



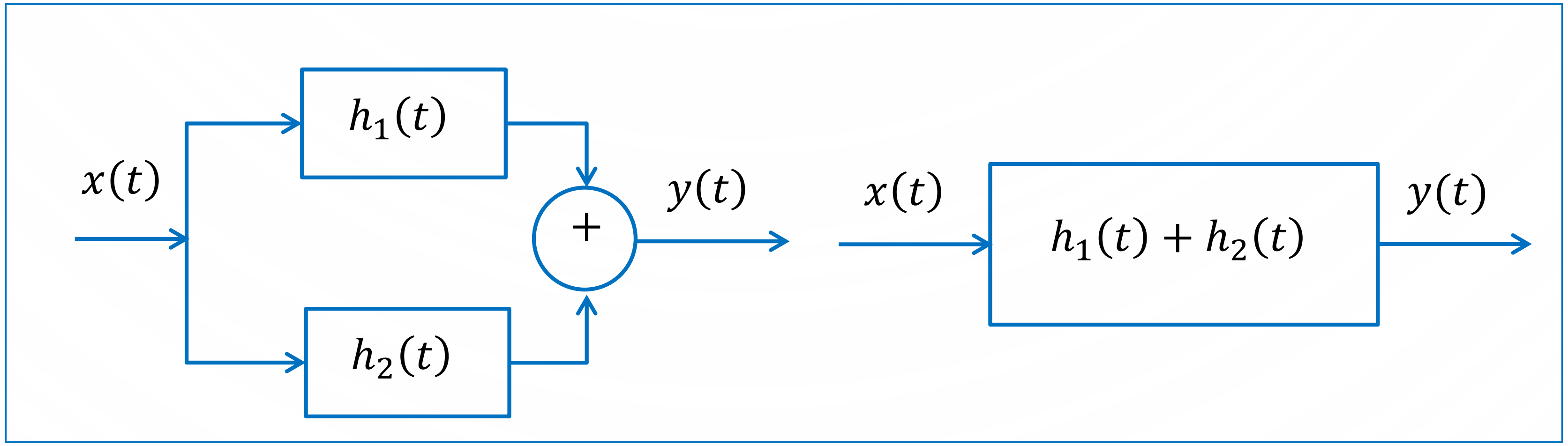
ویژگی‌های کانولوشن

ویژگی ۲- توزیع‌پذیری

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * \big(h_1(t) + h_2(t)\big) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

این ویژگی بیان می‌دارد که ترکیب موازی سیستم‌های LTI معادل تک سیستمی است که پاسخ ضربه‌اش مجموع پاسخ ضربه‌های سیستم‌ها در حالت موازی است.



ویژگی‌های کانولوشن

ویژگی ۳- شرکت‌پذیری

$$x(t) * \left(h_1(t) * h_2(t)\right) = \left(x(t) * h_1(t)\right) * h_2(t)$$

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

از همین رو در کانولوشن‌های پشت سر هم نیازی به پرانتزگذاری وجود ندارد، و می‌توان آن‌ها را به صورت $x(t) * h_1(t) * h_2(t)$ و $x[n] * h_1[n] * h_2[n]$ نوشت.

این ویژگی بیان می‌دارد که هر ترکیب سری چند سیستم LTI را می‌توان با یک سیستم جایگزین کرد، بطوریکه پاسخ ضربه تک سیستم، معادل کانولوشن پاسخ ضربه‌های سیستم‌های سری است.

مثال : حاصل هر یک از عبارت‌های ریاضی زیر را محاسبه نمایید.

$I_1\colon\ x(t) * \delta(t)$

$I_2\colon\ x[n] * \delta[n]$

$I_3\colon\ x(t) * \delta(t - t_0)$

$I_4\colon\ x[n] * \delta[n - n_0]$

$I_5\colon\ x(t) * u(t)$

$I_6\colon\ x[n] * u[n]$

$I_7\colon\ x(t) * u(t - t_0)$

$I_8\colon\ x[n] * u[n - n_0]$

ادامه مثال

- **پاسخ I_1** : حالت زمان پیوسته

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(\tau)\Big|_{\tau=t} = x(t)$$

- **پاسخ I_2** : حالت زمان گسسته

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]$$

- **پاسخ** I_3: حالت زمان پیوسته

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau = x(\tau)\Big|_{\tau=t-t_0} = x(t-t_0)$$

- **پاسخ** I_4: حالت زمان گسسته

$$x[n] * \delta[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-n_0-k] = x[n-n_0]$$

ادامه مثال

- **پاسخ I_5** : حالت زمان پیوسته

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

- **پاسخ I_6** : حالت زمان گسسته

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

- **پاسخ I_7** : حالت زمان پیوسته

$$x(t) * u(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-t_0-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$$

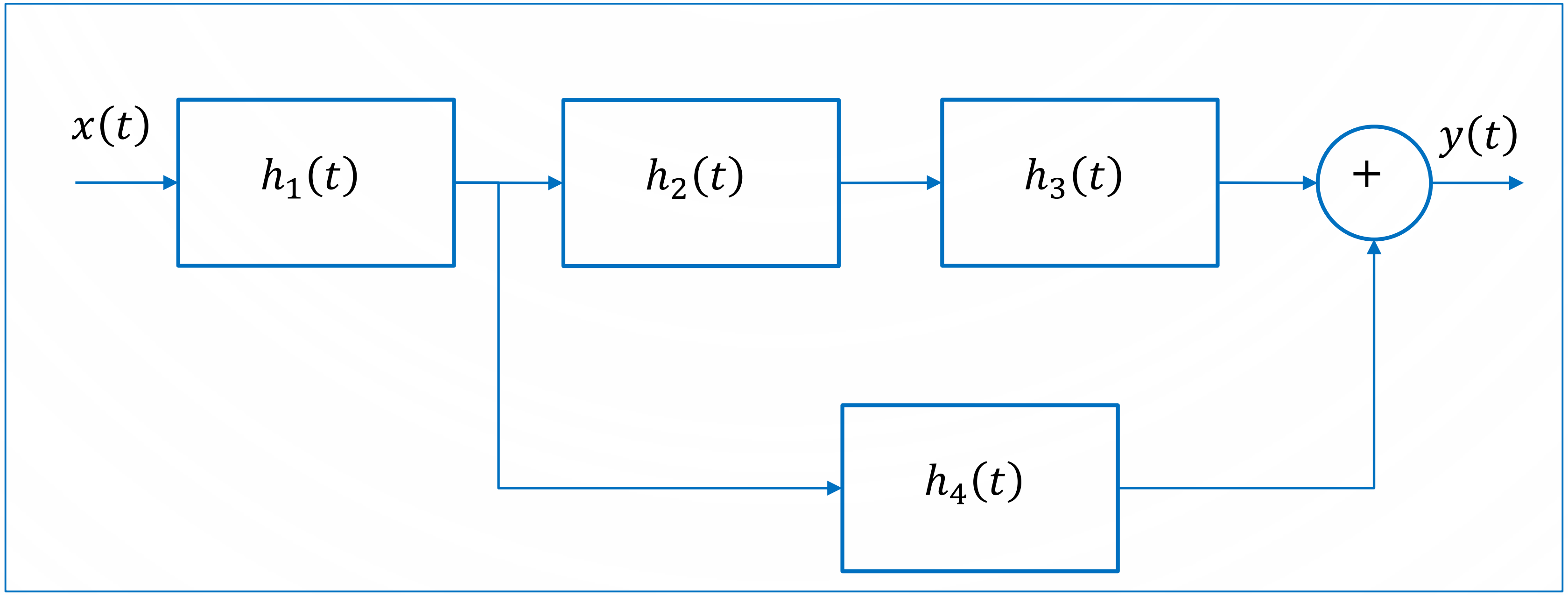
- **پاسخ I_8** : حالت زمان گسسته

$$x[n] * u[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-n_0-k] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

مثال: فرض کنید سیستمی از زیرسیستم‌هایی تشکیل شده است. اگر نحوه چینش زیرسیستم‌ها به نحوی باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است، پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

$h_1(t) = e^{-t}u(t) \qquad h_2(t) = u(t)$

$h_3(t) = e^{-3t}u(t) \qquad h_4(t) = e^{-3t}u(t)$



ادامه مثال

پاسخ: پاسخ ضربه سیستم را می‌توان به صورت زیر مدل کرد.

$$h(t) = h_1(t) * \left(h_2(t) * h_3(t) + h_4(t)\right)$$

در ابتدا بخش $h_2(t) * h_3(t)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$h_2(t) * h_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-3\tau}u(t-\tau)d\tau$$

اگر $t < 0$ باشد، حاصل کانولوشن صفر است. در غیر اینصورت

$$h_2(t) * h_3(t) = \int_{0}^{+\infty} e^{-3\tau}u(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-3\tau}d\tau = -\frac{1}{3}e^{-3\tau}\Big|_{0}^{t} = -\frac{1}{3}(e^{-3t}-1) = \frac{1}{3}(1-e^{-3t})$$

بنابراین داریم:

$$h_2(t) * h_3(t) = \frac{1}{3}(1-e^{-3t})u(t)$$

در این مرحله بخش $h_2(t) * h_3(t) + h_4(t)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$h_2(t) * h_3(t) + h_4(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) + e^{-3t}u(t) = \frac{1}{3}u(t) + \frac{2}{3}e^{-3t}u(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر است:

$$h(t) = h_1(t) * \left(h_2(t) * h_3(t) + h_4(t)\right) = \left(e^{-t}u(t)\right) * \left(\frac{1}{3}u(t) + \frac{2}{3}e^{-3t}u(t)\right)$$

$$= \left(e^{-t}u(t)\right) * \left(\frac{1}{3}u(t)\right) + \left(e^{-t}u(t)\right) * \left(\frac{2}{3}e^{-3t}u(t)\right) = I_1 + I_2$$

به صورت مجزا دو کانولوشن $I_1 = \left(e^{-t}u(t)\right) * \left(\frac{1}{3}u(t)\right)$ و $I_2 = \left(e^{-t}u(t)\right) * \left(\frac{2}{3}e^{-3t}u(t)\right)$ را محاسبه می‌نماییم.

$$I_1 = \left(e^{-t}u(t)\right) * \left(\frac{1}{3}u(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)\frac{1}{3}u(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau}\frac{1}{3}u(t-\tau)d\tau$$

اگر $t < 0$ باشد، حاصل کانولوشن صفر است. در غیر اینصورت

$$I_1 = \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau}\frac{1}{3}u(t-\tau)d\tau = \frac{1}{3}\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau = -\frac{1}{3}e^{-\tau}\Big|_0^t = -\frac{1}{3}(e^{-t}-1) = \frac{1}{3}(1-e^{-t})$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{3}(1-e^{-t})u(t)}$$

$$I_2 = \left(e^{-t}u(t)\right) * \left(\frac{2}{3}e^{-3t}u(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)\frac{2}{3}e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau = \frac{2}{3}\int_{0}^{+\infty} e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

اگر $t < 0$ باشد، حاصل کانولوشن صفر است. در غیر اینصورت

$$I_2 = \frac{2}{3}\int_{0}^{t} e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau = \frac{2}{3}e^{-3t}\int_{0}^{t} e^{2\tau}d\tau = \frac{2}{3}e^{-3t}\left(\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^t\right) = \frac{1}{3}e^{-3t}(e^{2t}-1) = \frac{1}{3}(e^{-t}-e^{-3t})$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{3}(e^{-t}-e^{-3t})u(t)}$$

بنابراین پاسخ ضربه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$h(t) = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}(1 - e^{-t})u(t) + \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-3t})u(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t)$$

پاسخ پله سیستم

- پاسخ پله یک سیستم LTI عبارت است از خروجی سیستم به ازای ورودی پله واحد ($u[n]$ یا $u(t)$) که به صورت $s[n]$ یا $s(t)$ نمایش داده می‌شود.

$$s(t) = T\{u(t)\} \qquad\qquad s[n] = T\{u[n]\}$$

- برای محاسبه خروجی سیستم به ازای ورودی پله واحد، کافی است پله واحد را با پاسخ ضربه سیستم کانوالو کرد.

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

ادامه پاسخ پله

- برای سیستم‌های LTI زمان پیوسته می‌توان با مشتق از پاسخ پله به پاسخ ضربه رسید.

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

- برای سیستم‌های LTI زمان گسسته می‌توان با تفاضل محدود از پاسخ پله به پاسخ ضربه رسید.

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

مثال: سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید. پاسخ پله این سیستم را بیابید.

$$h[n]=a^n u[n], 0<a<1$$

پاسخ:

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]a^{n-k}u[n-k]=\sum_{k=0}^{+\infty} a^{n-k}u[n-k]$$

اگر $n<0$ باشد خروجی حاصل‌جمع صفر است. در غیر اینصورت

$$s[n]=\sum_{k=0}^{+\infty} a^{n-k}u[n-k]=\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}=a^n\sum_{k=0}^{n} a^{-k}=a^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a}\right)^k=a^n\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{a}}\right)=\frac{a^n-\left(\frac{1}{a}\right)}{1-\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

بنابراین پاسخ پله به صورت روبرو است. $$s[n]=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

مثال: فرض کنید پاسخ پله یک سیستم LTI به صورت $s(t) = \frac{1}{2}t^2u(t)$ است. پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = u(t-2) + \delta(t-5)$ را بیابید.

پاسخ: از آنجایی که سیستم LTI است، داریم:

$$y(t) = T\{x(t)\} = s(t-2) + h(t-5)$$

برای محاسبه پاسخ ضربه از پاسخ پله مشتق می‌گیریم.

$$h(t) = tu(t) + \frac{1}{2}t^2\delta(t) = tu(t)$$

بنابراین خروجی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$y(t) = \frac{1}{2}(t-2)^2u(t-2) + (t-5)u(t-5)$$

ویژگی‌های سیستم‌های LTI

۲- ۳- ۱- حافظه‌دار و بدون حافظه بودن

۲- ۳- ۲- علّی و غیرعلّی بودن

۲- ۳- ۳- پایداری

حافظه‌دار و بدون حافظه بودن سیستم LTI

- همانطور که قبلاً بیان شد، سیستم بی حافظه سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد.
- پاسخ ضربه یک سیستم LTI به مفهوم اعمال ورودی ضربه به سیستم و محاسبه خروجی است؛ بنابراین پاسخ ضربه یک سیستم LTI بدون حافظه فقط در لحظه صفر مقدار دارد.
- یک سیستم LTI بدون حافظه است اگر و تنها اگر رابطه $h(t) = 0, t \neq 0$ (یا $h[n] = 0, n \neq 0$) برقرار باشد.

علّی و غیرعلّی بودن سیستم LTI

- سیستم علّی به سیستمی گفته می‌شود که پاسخ آن به یک ورودی، فقط به ورودی و ورودی‌های گذشته سیستم بستگی داشته باشد.

- یک سیستم LTI علی است اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد.

$$h(t) = 0, t < 0$$

$$h[n] = 0, n < 0$$

پایداری سیستم LTI

همانطور که قبلاً بیان شد، یک سیستم زمان پیوسته پایدار است اگر به ازای هر ورودی محدود، خروجی سیستم محدود باشد.

برای پایداری یک سیستم زمان پیوسته LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ باید رابطه زیر برای آن صادق باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty$$

برای پایداری یک سیستم زمان گسسته LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ باید رابطه زیر برای آن صادق باشد.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty$$

مثال: پایداری سیستم $h(t) = e^{-t}u(2-t)$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\tau}u(2-\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{2} e^{-\tau} d\tau \to +\infty$$

بنابراین این سیستم ناپایدار است، چون انتگرال اندازه پاسخ ضربه آن محدود نیست.

مثال: تحت چه شرایطی سیستم $h[n] = a^n u[n]$ پایدار است.

پاسخ:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|a^k u[k]\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|a^k\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k$$

اگر $|a| \geq 1$ باشد سیستم ناپایدار است زیرا مجموع اندازه پاسخ ضربه نامحدود است. در غیر اینصورت سیستم پایدار است زیرا

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|}$$

تابع ویژه سیستم‌های LTI

۲- ۴- ۱- تابع ویژه سیستم‌های *LTI* زمان گسسته

۲- ۴- ۲- تابع ویژه سیستم‌های *LTI* زمان پیوسته

تابع ویژه سیستم‌های LTI

تابع غیر صفر $x(.)$(یا $x[.]$) تابع ویژه **عملگر خطی** $T\{.\}$ است اگر

$$T\{x[.]\} = \lambda x[.] \qquad\qquad T\{x(.)\} = \lambda x(.)$$

که در آن λ عددی اسکالر و مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x(.)$ (یا $x[.]$) است.

رابطه بالا را می‌توان به این صورت تفسیر کرد که می‌توان به جای اعمال عملگر خطی $T\{.\}$(یا $T\{x[.]\}$) بر روی تابع $x(.)$ (یا $x[.]$)، حاصل‌ضرب اسکالر $\lambda x(.)$(یا $\lambda x[.]$) را محاسبه نمود.

در بسیاری از موارد محاسبه این ضرب اسکالر سریع‌تر از محاسبه عملگر است؛ بنابراین تجزیه مقادیر ویژه را می‌توان روشی بسیار مؤثر و قوی در تبدیل پیچیدگی به سادگی دانست.

تابع ویژه سیستم‌های LTI زمان گسسته

تابع ویژه یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت $x[n] = z^n$ تعریف می‌شود.

در این رابطه z یک متغیر مختلط است. برای آنکه $x[n] = z^n$ تابع ویژه یک سیستم **LTI** باشد، باید در رابطه زیر صدق کند:

$$T\{z^n\} = \lambda z^n$$

مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x[n] = z^n$ برای سیستم‌های **LTI** به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

مثال: مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x[n] = z^n$ را برای سیستم‌های LTI زمان گسسته بیابید. در این رابطه z یک متغیر مختلط است.

پاسخ: فرض کنید خروجی سیستم نسبت به ورودی $x[n] = z^n$ به صورت $y[n] = T\{z^n\}$ باشد. برای آنکه $x[n] = z^n$ تابع ویژه سیستم T باشد، باید در رابطه $T\{z^n\} = \lambda z^n$ صدق کند. از آنجایی که سیستم T یک سیستم تغییرناپذیر با زمان است، برای هر عدد صحیح n_0 داریم:

$$T\{z^{n+n_0}\} = y[n+n_0]$$

با توجه به خطی بودن سیستم T خواهیم داشت:

$$T\{z^{n+n_0}\} = T\{z^n z^{n_0}\} = z^{n_0}T\{z^n\} = z^{n_0}y[n]$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$y[n+n_0] = z^{n_0}y[n]$$

با فرض $n = 0$ خواهیم داشت:

$$y[n_0] = y[0]z^{n_0}$$

از آنجایی که n_0 می‌تواند هر عدد صحیح دلخواهی باشد، می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y[n] = y[0]z^n$$

بنابراین مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x[n] = z^n$ به صورت $\lambda = y[0]$ تعریف می‌شود.

- مقدار ویژه متناظر در مثال قبل به صورت $\lambda = y[0]$ محاسبه شد که با $H(z)$ برابر است؛ زیرا

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k}$$

$$\overset{n=0}{\Longrightarrow} y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} = H(z)$$

مثال: به کمک کانولوشن در حوزه زمان، نشان دهید z^n تابع ویژه برای سیستم‌های LTI زمان گسسته است. در این رابطه z یک متغیر مختلط است.

پاسخ:

$$y[n] = T\{z^n\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}z^n = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}\right)z^n = H(z)z^n = \lambda z^n$$

که در آن $H(z)$ مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x[n] = z^n$ برای سیستم‌های LTI است. $H(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

- نتایج به دست آمده در این بخش، زمینه چینی خوبی برای تبدیل z و تبدیل فوریه گسسته است.
- به عنوان یک نکته می‌توان در نظر داشت که اگر بتوانیم یک ورودی دلخواه را به صورت مجموعی از تابع ویژه z^n و انتقال‌های آن در بیاوریم، آنگاه محاسبه خروجی شبکه نسبت به ورودی مد نظر به راحتی با چند ضرب اسکالر انجام می‌شود.

تابع ویژه سیستم‌های LTI زمان پیوسته

- تابع ویژه یک سیستم LTI زمان پیوسته به صورت $x(t) = e^{st}$ تعریف می‌شود. در این رابطه s یک متغیر مختلط است.
- برای آنکه $x(t) = e^{st}$ تابع ویژه یک سیستم LTI باشد، باید در رابطه زیر صدق کند.

$$T\{e^{st}\} = \lambda e^{st}$$

- مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x(t) = e^{st}$ برای سیستم‌های LTI به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

مثال: مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x(t) = e^{st}$ را برای سیستم‌های LTI زمان پیوسته بیابید. در این رابطه s یک متغیر مختلط است.

پاسخ: فرض کنید خروجی سیستم نسبت به ورودی $x(t) = e^{st}$ به صورت $y(t) = T\{e^{st}\}$ باشد.

برای آنکه $x(t) = e^{st}$ تابع ویژه سیستم T باشد، باید در رابطه $T\{e^{st}\} = \lambda e^{st}$ صدق کند. از آنجایی که سیستم T یک سیستم تغییرناپذیر با زمان است، برای هر عدد حقیقی n_0 داریم:

$$T\{e^{s(t+t_0)}\} = y(t+t_0)$$

با توجه به خطی بودن سیستم T خواهیم داشت:

$$T\{e^{s(t+t_0)}\} = T\{e^{st}e^{st_0}\} = e^{st_0}T\{e^{st}\} = e^{st_0}y(t)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$y(t+t_0) = e^{st_0}y(t)$$

با فرض $t = 0$ خواهیم داشت:

$$y(t_0) = y(0)e^{st_0}$$

از آنجایی که t_0 می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواهی باشد، می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y(t) = y(0)e^{st}$$

بنابراین مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x(t) = e^{st}$ به صورت $\lambda = y(0)$ تعریف می‌شود.

- مقدار ویژه متناظر در مثال قبل به صورت $\lambda = y(0)$ محاسبه شد که با $H(s)$ برابر است؛ زیرا

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

$$\overset{t=0}{\Longrightarrow} y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s)$$

مثال: به کمک کانولوشن در حوزه زمان، نشان دهید e^{st} تابع ویژه برای سیستم‌های LTI زمان پیوسته است. در این رابطه s یک متغیر مختلط است.

پاسخ:

$$y[n]=T\{e^{st}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)e^{st}$$

$$=H(s)e^{st}=\lambda e^{st}$$

که در آن $H(s)$ مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x(t)=e^{st}$ برای سیستم‌های LTI است. $H(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- نتایج به دست آمده در این بخش، زمینه چینی خوبی برای تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه پیوسته است.
- به عنوان یک نکته می‌توان در نظر داشت که اگر بتوانیم یک ورودی دلخواه را به صورت مجموعی از تابع ویژه e^{st} و انتقال‌های آن در بیاوریم، آنگاه محاسبه خروجی شبکه نسبت به ورودی مد نظر به راحتی با چند ضرب اسکالر انجام می‌شود.

مثال: به کمک کانولوشن در حوزه زمان، نشان دهید $e^{j\omega t}$ تابع ویژه برای سیستم‌های LTI زمان پیوسته است.

پاسخ:

$$y[n] = T\{e^{j\omega t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)e^{j\omega t} = H(\omega)e^{j\omega t} = \lambda e^{j\omega t}$$

که در آن $H(\omega)$ مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x(t) = e^{j\omega t}$ برای سیستم‌های LTI زمان پیوسته است. $H(\omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

مثال: سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$$

الف: پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

ب: نشان دهید e^{st} تابع ویژه این سیستم است. مقدار ویژه متناظر را بیابید. در این رابطه s یک متغیر مختلط است.

ج: مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه e^{st} را با کمک $H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ بیابید.

پاسخ الف:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau$$

اگر $t < 0$ باشد، حاصل صفر است. در غیر اینصورت

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau = e^{-(t-\tau)}\Big|_{\tau=0} = e^{-t}$$

بنابراین پاسخ ضربه به صورت زیر خواهد بود.

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

پاسخ ب:

برای آنکه $x(t) = e^{st}$ تابع ویژه سیستم T باشد، باید در رابطه $T\{e^{st}\} = \lambda e^{st}$ صدق کند.

$$y(t) = T\{e^{st}\} = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} e^{s\tau} d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{(s+1)\tau} d\tau = e^{-t} \frac{1}{s+1} e^{(s+1)\tau} \Big|_{-\infty}^{t}$$

$$= e^{-t} \frac{1}{s+1} \left(e^{(s+1)t} - \lim_{\tau \to -\infty} e^{(s+1)\tau} \right) = e^{-t} \frac{1}{s+1} \left(e^{(s+1)t} - 0 \right) = \frac{1}{s+1} e^{st}$$

شرط درست بودن رابطه بالا $Re(s) > -1$ است؛ زیرا فقط در حالتی انتگرال بالا مقدار دارد که $\lim_{\tau \to -\infty} e^{(s+1)\tau}$ مقداری محدود داشته باشد که فقط در حالتی رخ می‌دهد که ضریب τ عددی مثبت باشد. مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x(t) = e^{st}$ به صورت $\lambda = \frac{1}{s+1}$ تعریف می‌شود.

پاسخ ج:

$$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}u(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\int_{0}^{+\infty}e^{-\tau}e^{-s\tau}d\tau$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-(s+1)\tau}d\tau=\frac{-1}{s+1}e^{-(s+1)\tau}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{-1}{s+1}(0-1)=\frac{1}{s+1}$$

شرط درست بودن رابطه بالا $Re(s)>-1$ است؛ بنابراین مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $x(t)=e^{st}$ به صورت $\lambda=\frac{1}{s+1}$ تعریف می‌شود.

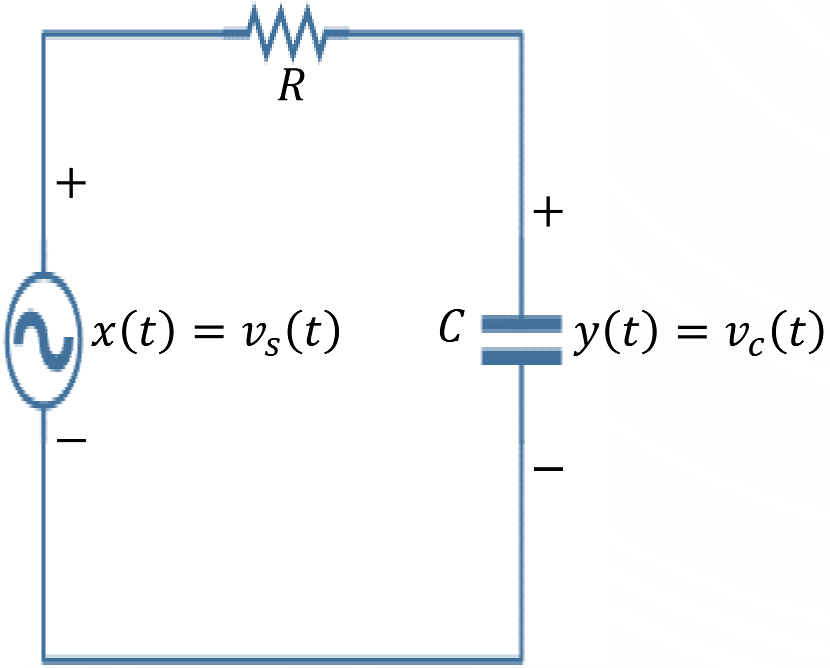
توصیف سیستم‌های LTI با معادلات دیفرانسیلی

یک معادله دیفرانسیلی مرتبه N با ضرایب ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

که در آن a_k و b_k ضرایب حقیقی ثابت هستند و لزوماً $a_N \neq 0$. گاهی رابطه بین ورودی و خروجی یک سیستم زمان پیوسته با یک معادله دیفرانسیلی مشخص می‌شود.

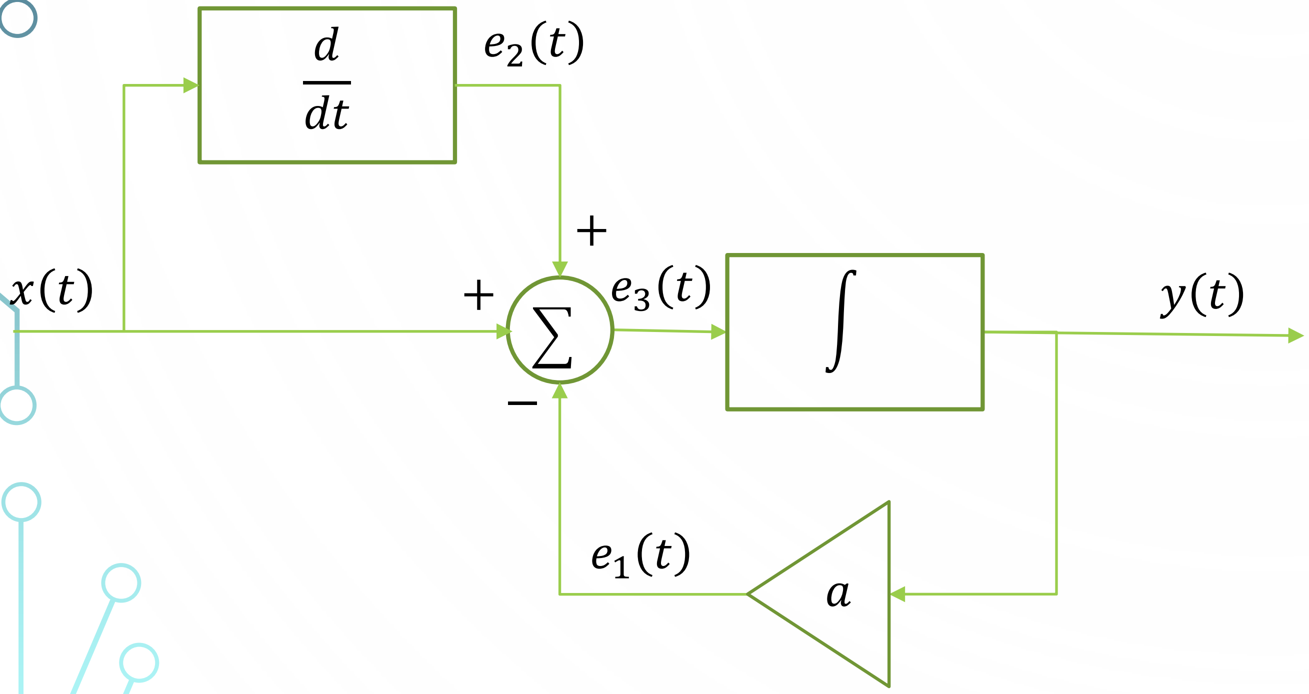
یک مثال از توصیف سیستم‌های LTI با معادلات دیفرانسیلی



- فرض کنید ولتاژ منبع تغذیه، همان ورودی سیستم باشد؛ به عبارت دیگر $x(t) = v_s(t)$.
- همچنین فرض کنید خروجی سیستم به صورت اختلاف پتانسیل دو سر خازن تعریف شود؛ به عبارت دیگر $y(t) = v_c(t)$.
- رابطه بین ورودی و خروجی این سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

مثال: رابطه بین ورودی و خروجی سیستم زیر را به کمک یک معادله دیفرانسیلی مشخص نمایید.



پاسخ: خروجی این سیستم به صورت زیر است.

$$I_1:\ y(t)=\int_{-\infty}^{t} e_3(\tau)d\tau \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt}=e_3(t)$$

همچنین $e_3(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$I_2:\ e_3(t)=x(t)-e_1(t)+e_2(t)$$

هر کدام از $e_1(t)$ و $e_2(t)$ را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$e_1(t)=ay(t)$$

$$e_2(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

بنابراین با کمک رابطه I_1 و I_2 داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)-ay(t)+\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

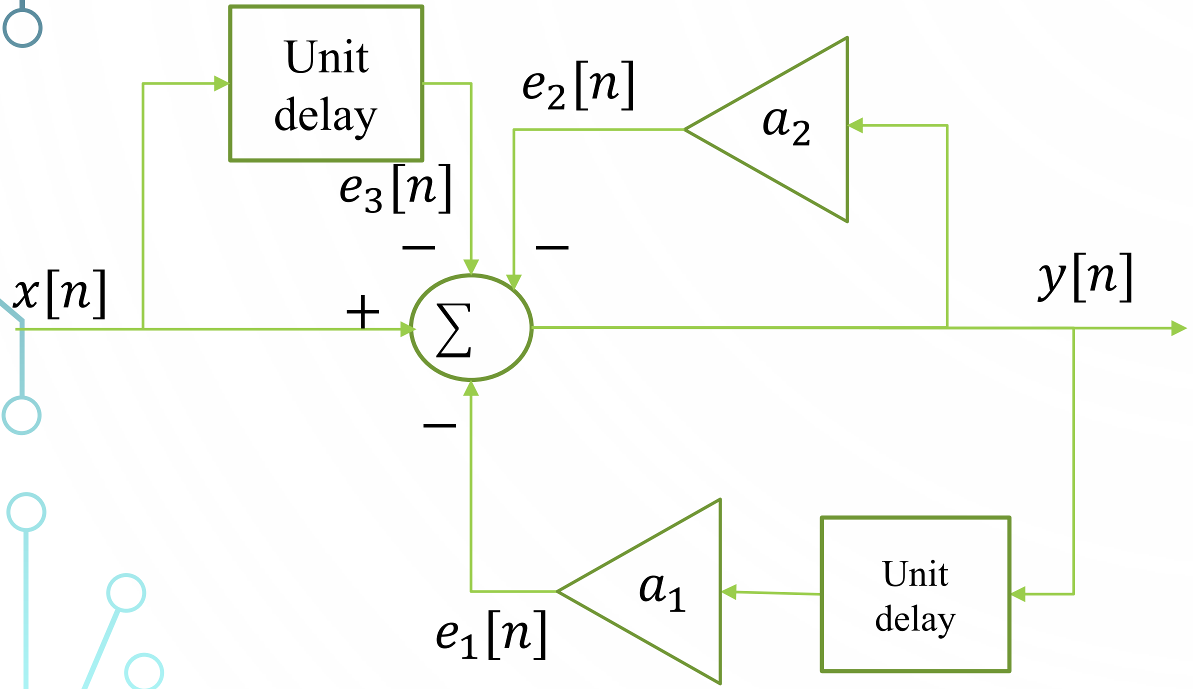
توصیف سیستم‌های LTI با معادلات تفاضلی

- یک معادله تفاضلی مرتبه N با ضرایب ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- که در آن a_k و b_k ضرایب حقیقی ثابت هستند و لزوماً $a_N \neq 0$. گاهی رابطه بین ورودی و خروجی یک سیستم زمان پیوسته با یک معادله تفاضلی مشخص می‌شود.

مثال: رابطه بین ورودی و خروجی سیستم زیر را به کمک یک معادله تفاضلی مشخص نمایید.



پاسخ:

$$y[n] = x[n] - e_1[n] - e_2[n] - e_3[n]$$

$$\xRightarrow{e_1[n]=a_1y[n-1]} y[n] = x[n] - a_1y[n-1] - e_2[n] - e_3[n]$$

$$\xRightarrow{e_2[n]=a_2y[n]} y[n] = x[n] - a_1y[n-1] - a_2y[n] - e_3[n]$$

$$\xRightarrow{e_3[n]=x[n-1]} y[n] = x[n] - a_1y[n-1] - a_2y[n] - x[n-1]$$

بنابراین

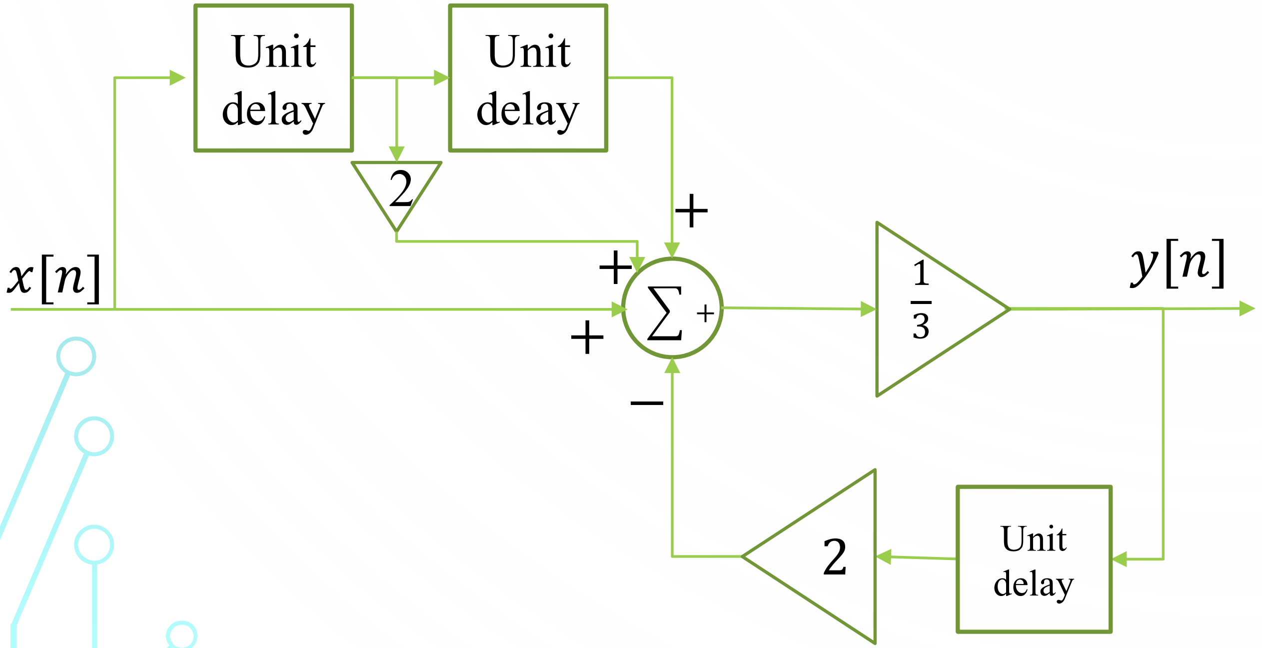
$$a_1y[n-1] + (1+a_2)y[n] = x[n] - x[n-1]$$

مثال: نمودار بلوکی سیستم توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را رسم نمایید.

$$3y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

پاسخ: ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم.

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] - 2y[n-1])$$



- حل معادله دیفرانسیلی و تفاضلی در **حوزه زمان** از تمرکز این درس خارج است و صرف معرفی در این بخش آورده شده است.
- در فصل‌های بعدی این معادلات در حوزه‌های دیگر حل خواهد شد.

کدهای MATLAB

۲- ۶- ۱- دستور *conv*

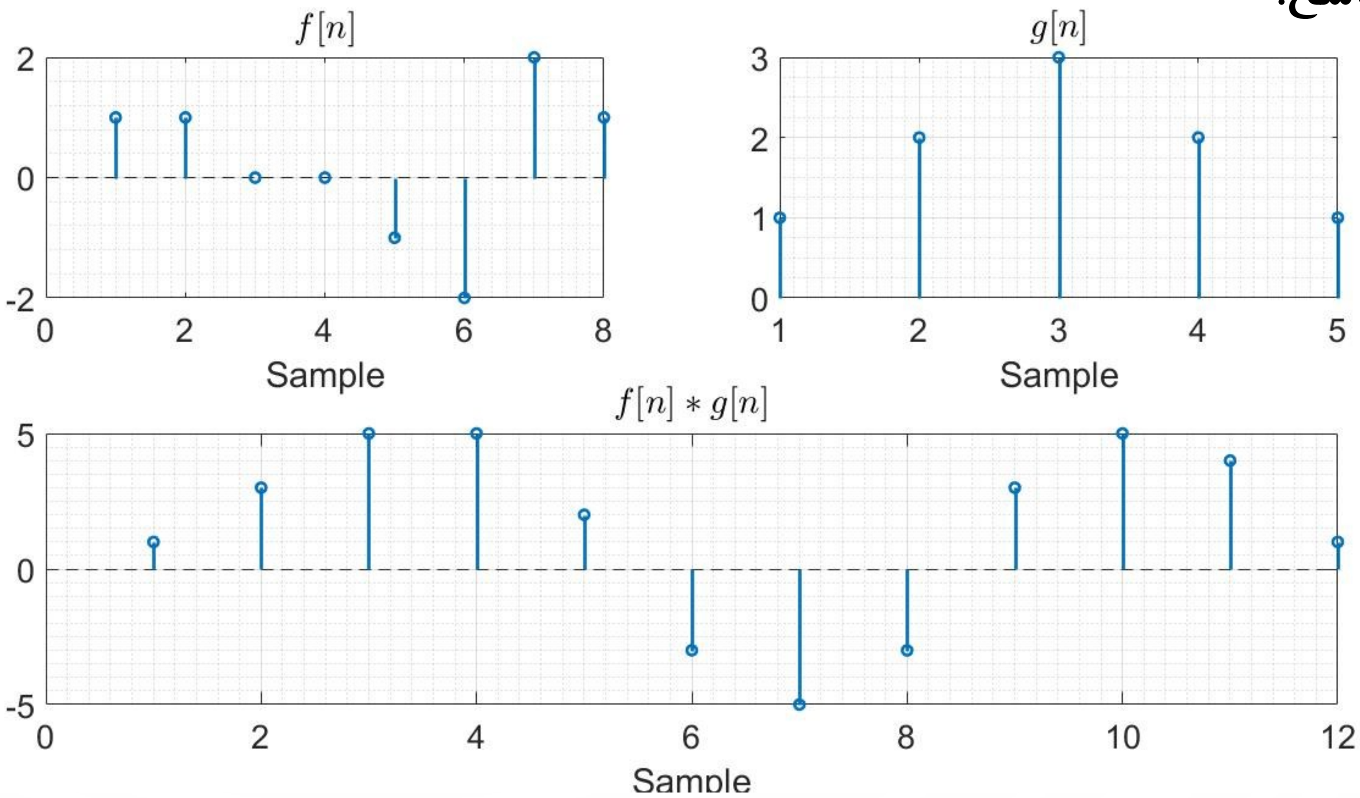
دستور CONV

- برای محاسبه کانولوشن بین دو سیگنال بدون توجه به موقعیت زمانی عناصر غیرصفر از دستور conv می‌توان استفاده کرد.

مثال: برنامه‌ای بنویسید که کانولوشن بین دو سیگنال $f = \{1,1,0,0,-1,-2,2,1\}$ و $g = \{1,2,3,2,1\}$ را محاسبه و نمایش دهد.

پاسخ:

```
>> f=[1,1,0,0,-1,-2,2,1];
>> g=[1,2,3,2,1];
>> fg=conv(f,g);
>> figure;
>> subplot(2,2,1);
>> SS_rep_dt(1:length(f),f);
>> title('$f[n]$','Interpreter','latex');
>> subplot(2,2,2);
>> SS_rep_dt(1:length(g),g);
>> title('$g[n]$','Interpreter','latex');
>> subplot(2,2,[3 4]);
>> SS_rep_dt(1:length(fg),fg);
>> title('$f[n]*g[n]$','Interpreter','latex');
```



دقت کنید در این مثال اندیس‌های محورهای افقی اهمیتی ندارد و فقط صرف خالی نبودن از یک شماره گذاری شده است.

مثال: برنامه‌ای بنویسید تا کانولوشن بین دو سیگنال زیر را محاسبه و نمایش دهد.

$$f[n] = 2\delta[n+2] - 3\delta[n] + \delta[n-1]$$

$$g[n] = 2\delta[n-1] + 5\delta[n-5]$$

پاسخ: در این مثال دقت کنید که پس از محاسبه کانولوشن، باید موقعیت زمانی آن را اصلاح کرد. موقعیت زمانی اولیه کانولوشن این دو سیگنال $L_f + L_g = -2 + 1 = -1$ است. همچنین موقعیت زمانی نقطه پایانی کانولوشن این دو سیگنال $U_f + U_g = 1 + 5 = 6$ است.

معمولاً زمانی که کدها طولانی هستند و نیاز به ذخیره آن‌ها وجود دارد، به جای استفاده از خط فرمان، از **m-file** استفاده می‌شود و کدها در **m-file** نوشته می‌شود.

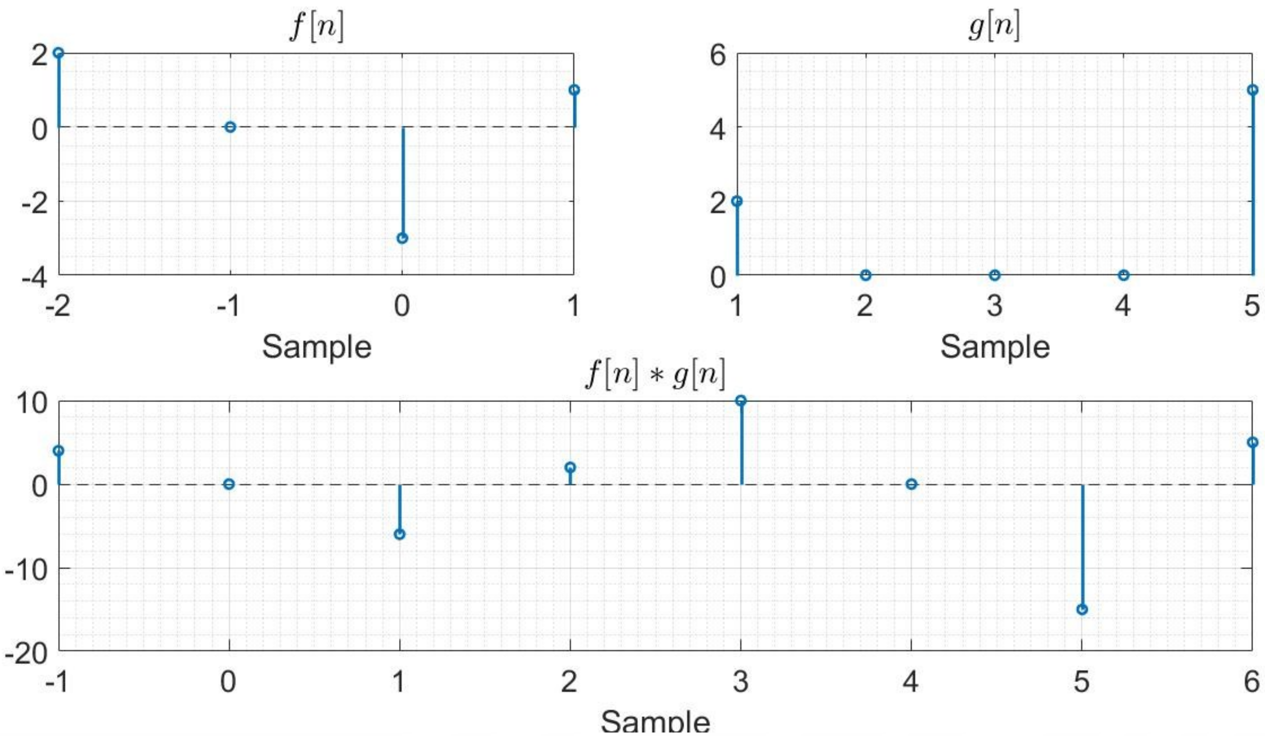
ادامه مثال

```
clc; clear; close all;
f=[2,0,-3,1];
n_f=-2:1;

g=[2,0,0,0,5];
n_g=1:5;

fg=conv(f,g);
n_fg=n_f(1)+n_g(1):n_f(end)+n_g(end);

figure;
subplot(2,2,1);
SS_rep_dt(n_f,f);
title('$f[n]$','Interpreter','latex');
subplot(2,2,2);
SS_rep_dt(n_g,g);
title('$g[n]$','Interpreter','latex');
subplot(2,2,[3 4]);
SS_rep_dt(n_fg,fg);
title('$f[n]*g[n]$','Interpreter','latex');
```



مثال: کانولوشن بین دو سیگنال زیر را بیابید.

$$f(t) = u(t+1) - u(t-1)$$

$$g(t) = 2u(t) - 2u(t-5)$$

پاسخ: دستور conv در Matlab جمع کانولوشن را محاسبه می‌نماید. در مورد سیگنال‌های پیوسته باید انتگرال کانولوشن محاسبه شود. بدین منظور کافی است، کانولوشن بین دو سیگنال را در فاصله زمانی بین هر دو عنصر پشت سر هم ضرب کنیم.

```
clc; clear; close all;
step_size=0.001;
t_f=-2:step_size:2;
f=SS_u(t_f+1)-SS_u(t_f-1);

t_g=-1:step_size:6;
g=2*SS_u(t_g)-2*SS_u(t_g-5);

fg=step_size*conv(f,g);
n_fg=t_f(1)+t_g(1):step_size:t_f(end)+t_g(end);

figure;
subplot(2,2,1);
SS_rep_ct(t_f,f);
title('$f[n]$','Interpreter','latex');
subplot(2,2,2);
SS_rep_ct(t_g,g);
title('$g[n]$','Interpreter','latex');
subplot(2,2,[3 4]);
SS_rep_ct(n_fg,fg);
title('$f[n]*g[n]$','Interpreter','latex');
```