دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

امتحان پایان ترم درس ریاضی ۱- فنی هماهنگ

گروه آموزشی : ریاضی

نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶

نام مدرس:

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

تاریخ : ۱۳۹۶/۱۰/۱۶

وقت : ۱۳۵ دقیقه

سوال ۱) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی های $f(x)=x^{2}+1$ و $g(x)=x+1$ را حول خط $x=2$ بیابید. (۲۰ نمره)

سوال ۲) انتگرال نامعین $\int \frac{\sin x}{1-4\cos^{2} x}dx$ را بدست آورید. (۲۰ نمره)

سوال ۳) انتگرال نامعین $\int \sqrt{2x-x^{2}}dx$ را بدست آورید. (۱۵ نمره)

سوال ۴) مطلوبست محاسبه مساحت محدود به نمودار تابع $f(x)=\ln(1+x^{2})$ و محور xها در فاصله $0 \le x \le 1$. (۱۵ نمره)

سوال ۵) طول منحنی $f(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{\cos t}\, dt$ را در بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ بدست آورید. (۱۵ نمره)

سوال ۶) الف: همگرایی یا واگرایی سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}-1}{3^{n}+1}$ را بررسی کنید. (۱۰ نمره)

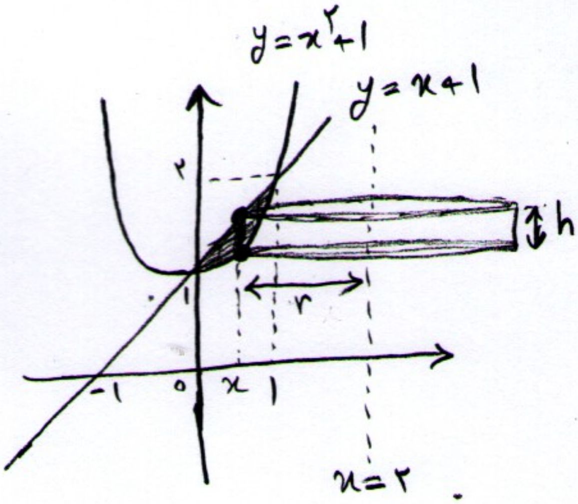
ب: چهارجمله اول ناصفر سری مکلورن تابع $f(x)=x^{5}\cos(x^{2})$ را بیابید. (۱۰ نمره)

سوال ۷) شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{6^{n}}(3x-1)^{n}$ را بیابید. (۱۵ نمره)

موفق باشید.

①

روش اول : پوسته استوانه‌ای



$$h=(x+1)-(x^2+1)=x-x^2$$

$$r=2-x$$

$$V=\int_0^1 2\pi r h\,dx=\int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2)\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx$$

$$=2\pi\left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right)\Big]_0^1=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

روش دوم : قرص مستدیر

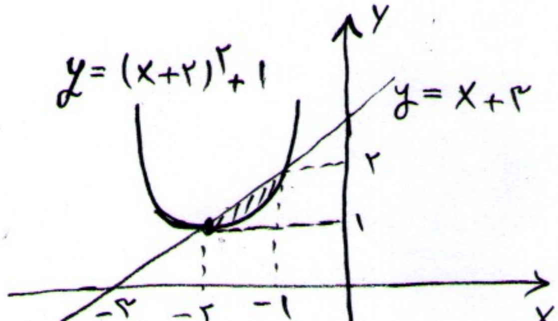
$$\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+1=X+3 \\ y=x^2+1=(X+2)^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=y-3 \\ X=\sqrt{y-1}-2 \end{cases}$$

$$V_1=\int_1^2 \pi r^2 dy=\int_1^2 \pi(y-3)^2 dy=\frac{\pi}{3}(y-3)^3\Big]_1^2=7\frac{\pi}{3}$$

$$V_2=\int_1^2 \pi r^2 dy=\int_1^2 \pi\left(\sqrt{y-1}-2\right)^2 dy=\int_1^2 \pi\left(y-1+4-4\sqrt{y-1}\right)dy$$

$$=\pi\left(\frac{y^2}{2}+3y-\frac{8}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big]_1^2=11\frac{\pi}{6}$$

$$V=V_1-V_2=7\frac{\pi}{3}-11\frac{\pi}{6}=\frac{14-11}{6}\pi=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$



(۲)

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$$

$$\int \frac{\sin x}{1-4\cos^2 x} dx = \int \frac{-du}{1-4u^2} = \int \left(\frac{A}{1-2u} + \frac{B}{1+2u} \right) du$$

$$\frac{-1}{1-4u^2} = \frac{(2A-2B)u + (A+B)}{1-4u^2} \Rightarrow \begin{cases} A+B = -1 \\ 2A-2B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{\sin x}{1-4\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-2u} + \frac{1}{1+2u} \right) du$$

$$= \frac{1}{4} \ln(1-2u) - \frac{1}{4} \ln(1+2u) + C$$

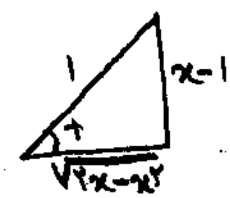
$$= \frac{1}{4} \ln(1-2\cos x) - \frac{1}{4} \ln(1+2\cos x) + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1-2\cos x}{1+2\cos x} \right) + C. \quad \blacksquare$$

---

(۳)

$$I = \int \sqrt{2x-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-(x-1)^2} \, dx$$



$$x-1 = \sin t \Rightarrow dx = \cos t \, dt$$

$$I = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \, (\cos t \, dt) = \int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t) + C = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-1}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C. \quad \blacksquare$$

---

(٤)

$$S = \int_0^1 \underbrace{\ln(1+x^2)}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = uv\Big]_0^1 - \int_0^1 v \, du = x \ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \ln 2 - 2\left(x - \tan^{-1}(x)\right)\Big]_0^1$$

$$= \ln 2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \quad \blacksquare$$

۵

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{2}$$

---

۶ الف) روش اول: آزمون مقایسه برای سری های مثبت

$$0<\frac{2^n-1}{3^n+1}<\frac{2^n-1}{3^n}=\frac{2^n}{3^n}-\frac{1}{3^n}<\frac{2^n}{3^n}\quad ;\quad n\geq 1$$

$$\text{همگرا}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2\ \Rightarrow\ \text{همگرا}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n+1}$$

روش دوم: آزمون نسبت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}+1}\right)\Big/\left(\frac{2^n-1}{3^n+1}\right)=\frac{2}{3}<1$$

$$\Rightarrow\ \text{همگرا}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n+1}$$

روش سوم: آزمون مقایسه حدی

$$a_n=\frac{2^n-1}{3^n+1},\quad b_n=\frac{2^n}{3^n}\quad ;\quad n=1,2,\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{3^n+1}\right)\Big/\left(\frac{2^n}{3^n}\right)=1\quad \text{و}\quad \text{همگرا}\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

$$\Longrightarrow\ \text{همگرا}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n+1}$$

ب)

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\cos(x^2)=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\cdots$$

$$x^5\cos(x^2)=x^5-\frac{x^9}{2!}+\frac{x^{13}}{4!}-\frac{x^{17}}{6!}+\cdots$$

(7) روش اول :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{6^n}(3x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{n+1}{2^n}, \quad x_0 = \frac{1}{3}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2^n}\right)\Big/\left(\frac{n+2}{2^{n+1}}\right) = 2 \quad \text{شعاع همگرایی}$$

$$\begin{cases} x = x_0 - R = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n \quad \text{واگرا} \\ x = x_0 + R = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \quad \text{واگرا} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{بازه همگرایی} = (x_0 - R, x_0 + R) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

روش دوم :

$$f_n(x) = \frac{n+1}{6^n}(3x-1)^n \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{(n+2)}{6^{n+1}}(3x-1)^{n+1}\right)\Big/\left(\frac{n+1}{6^n}(3x-1)^n\right)\right| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\frac{|3x-1|}{6} < 1 \Rightarrow |3x-1| < 6$$

$$\Rightarrow -6 < 3x-1 < 6 \Rightarrow -\frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \quad \text{واگرا} \\ x = -\frac{5}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n \quad \text{واگرا} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{بازه همگرایی} = \left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right) \text{ و } \text{شعاع همگرایی } R = \frac{\frac{7}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)}{2} = \boxed{2}$$