دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی: ریاضی امتحان درس: ریاضی ۱ - فنی (هماهنگ) نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶ نام مدرس:

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: تاریخ: ۹۶/۹/۹ وقت: ۹۰ دقیقه

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

استفاده از تلفن همراه ممنوع است.

۱- الف: معادله $z^6+z^3+1=0$ را حل کنید. (۱۰ نمره)

ب: عدد $A=(1+\frac{1-i}{1+i})^4$ را به ساده ترین حالت ممکن بنویسید. (۵ نمره)

۲- ضابطه ترکیب $f\circ g$ دو تابع زیر را بیابید. (۱۵ نمره)

$$f(x)=|2-x|,\quad g(x)=\begin{cases}3-x^2, & x<0\\ -x+3, & x\geq 0\end{cases}$$

۳- حدود زیر را بدون استفاده از هوپیتال و هم ارزی بیابید. (۲۰ نمره)

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x},\qquad B=\lim_{x\to 1}(1-x)\cot(\pi x)$$

۴- فرض کنید $f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x}}$. مقدار $f(83)$ را با استفاده از دیفرانسیل تقریب بزنید. (۱۰ نمره)

۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1x+3}$ را رسم کنید. (۲۰ نمره)

موفق باشید.

Scanned by CamScanner

جواب سوالات امتحان میان‌ترم ریاضی ۱ (فنی) - ۹۶،۹،۹

حل ۱) الف:

روش اول:

$$z^6+z^3+1=0,\quad \omega=z^3 \Rightarrow \omega^2+\omega+1=0 \Rightarrow \omega=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^3=\omega=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z=e^{i\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)/3}$$

$k=0,1,2$ داده ؛

روش دوم:

$$z^6+z^3+1=0 \Rightarrow z^9-1=(z^3-1)(z^6+z^3+1)=0$$

$$\begin{cases} z^9-1=0 \Rightarrow z=1,\ e^{i\left(\frac{2\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{4\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{6\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{8\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{10\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{12\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{14\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{16\pi}{9}\right)} \\ z^3-1=0 \Rightarrow z=1,\ e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)},\ e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^6+z^3+1=0 \Rightarrow z=e^{i\left(\frac{2\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{4\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{8\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{10\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{14\pi}{9}\right)},\ e^{i\left(\frac{16\pi}{9}\right)}$$

ب:

$$A=\left(1+\frac{1-i}{1+i}\right)^4=\left(\frac{2}{1+i}\right)^4=\left(\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^4$$

$$=(1-i)^4=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4=4e^{-i\pi}=-4$$

Scanned by CamScanner

حل ۲

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2-g(x), & g(x)\le 2 \\ g(x)-2, & g(x)>2 \end{cases}$$

۱) $x<0,\ g(x)=3-x^2\le 2 \Rightarrow x<0,\ x^2\ge 1 \Rightarrow x<0,\ (x\ge 1 \text{ ی } x\le -1) \Rightarrow x\le -1$

۲) $x<0,\ g(x)=3-x^2>2 \Rightarrow x<0,\ x^2<1 \Rightarrow x<0,\ -1<x<1 \Rightarrow -1<x<0$

۳) $x\ge 0,\ g(x)=-x+3\le 2 \Rightarrow x\ge 0,\ x\ge 1 \Rightarrow x\ge 1$

۴) $x\ge 0,\ g(x)=-x+3>2 \Rightarrow x\ge 0,\ x<1 \Rightarrow 0\le x<1$

$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} 2-(3-x^2), & x\le -1 \\ (3-x^2)-2, & -1<x<0 \\ (-x+3)-2, & 0\le x<1 \\ 2-(-x+3), & x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow (f\circ g)(x) = \begin{cases} -1+x^2, & x\le -1 \\ 1-x^2, & -1<x<0 \\ 1-x, & 0\le x<1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$$

حل ۳

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{|3x-1|-|3x+1|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(3x-1)-(3x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{6x}{x}\right) = -6$$

$$B = \lim_{x\to 1} (1-x)\cot(\pi x) = \lim_{t\to 0} (+t)\cot(\pi(1-t)) = \lim_{t\to 0} (+t)\cot(\pi-\pi t)$$

$$= -\lim_{t\to 0} (+t)\cot(\pi t) = -\lim_{t\to 0} \frac{+t}{\tan(\pi t)} = -\frac{1}{\pi}$$

Scanned by CamScanner

حل ۴)

$$f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x}},\quad h=2,\quad a=81$$

$$f'(x)=\frac{(1+\sqrt{x})-x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f(a)=f(81)=\frac{81}{1+9}=8{,}1\ ,\quad f'(81)=\frac{2+9}{2(1+9)^2}=\frac{11}{2}\times\frac{1}{100}=0{,}055$$

$$f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)h \Rightarrow f(83)\simeq f(81)+f'(81)\times h$$

$$f(83)\simeq 8{,}1+0{,}055\times 2=8{,}21$$

حل ۵)

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-4x+3},\quad D_f=\mathbb{R}-\{1,3\}$$

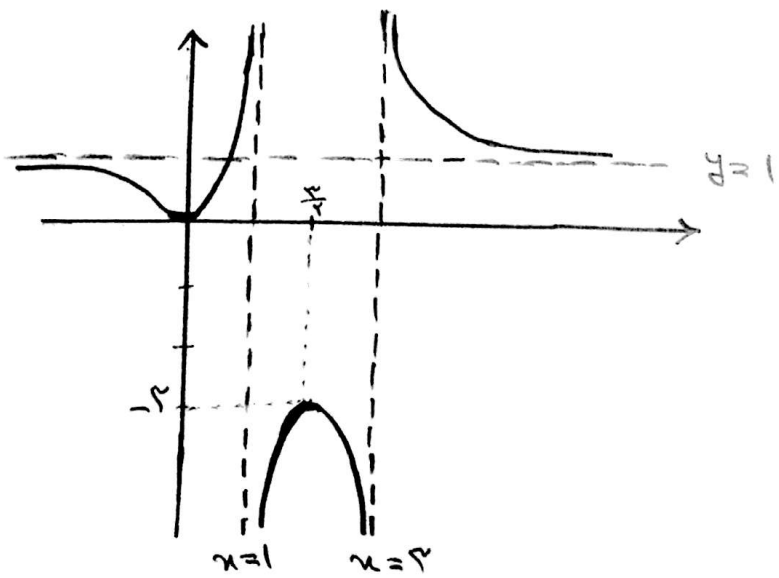
مجانب قائم $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=3$

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-4x+3}=1 \Rightarrow y=1$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4x+3)-x^2(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -4x^2+6x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{3}{2}$$

x	0		1		$\frac{3}{2}$		3
f'	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	max	$\searrow$



Scanned by CamScanner