آشنایی با

تاریخ ریاضیات

جلد دوم

هاورد و. ایوز

ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

آشنایی با

تاریخ ریاضیات

جلد دوم

هاورد و. ایوز

ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

مرکز نشردانشگاهی، تهران

An Introduction to the History of Mathematics
Howard W. Eves
Fifth Edition
Saunders College Publishing, 1983

آشنایی با تاریخ ریاضیات
جلد دوم
تألیف هاورد و. ایوز
ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ دوم ۱۳۷۲ (با تجدیدنظر)
چاپ چهارم ۱۳۸۵
تعداد ۲۰۰۰
حروفچینی: هویزه
لیتوگرافی: نورحکمت
چاپ: نوبهار

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

Eves, Howard Whitley
ایوز، هوارد ویتلی، ۱۹۱۱ -
آشنایی با تاریخ ریاضیات / تألیف هاورد و. ایوز؛ ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل. — [ویرایش ۲]. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹ - ۱۳۸۱.
۲ ج. : مصور، نقشه، جدول، عکس، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۵۵۲. ریاضی، آمار، و کامپیوتر ۷۱. ۵۲)

ISBN 964-01-0552-X (ج. ۱)
ISBN 964-01-8125-0 (ج. ۲)
ISBN 964-01-8044-0 دوره

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: An introduction to the history of mathematics.
واژه‌نامه.
کتابنامه.
ج. ۲ (چاپ چهارم: ۱۳۸۵).
۱. ریاضیات — تاریخ. ۲. ریاضیات — مسائل، تمرینها و غیره. الف. وحیدی‌اصل، محمدقاسم، ۱۳۲۶ - ، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
QA۲۱/ ۵آ۹الف
۱۳۶۹
۵۱۰/۹
کتابخانهٔ ملی ایران
۲۷۹ - ۷۰م*

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار مترجم

پنج‌سال فاصله بین انتشار مجلدهای اول و دوم این کتاب، مدتی طولانی است؛ اما بخش عمده‌ای از این تأخیرطولانی، معلول انتشار ویرایش پنجم متن اصلی‌کتاب درسال ۱۳۶۰ است. ظاهراً مشی نویسندهٔ کتاب، انتشارآن درهرچند سال یک‌بار با تجدید نظر، و ویرایش جدید بوده است. وقتی ترجمهٔ کامل کتاب به‌فارسی انجام و حروفچینی مجلد اول آغازشد، مترجم از انتشار ویرایش پنجم مطلع گردید. چون تغییرات بخش اول درمقایسه با بخش دوم کمتربود، ترجمهٔ فارسی بخش اول به‌صورت مجلد اول به‌دست انتشارسپرده شده ولی درمورد بخش دوم مترجم، بنا به تعهدخود درقبال مرکزنشردانشگاهی برای تطبیق متن ترجمه باآخرین ویرایش‌کتاب ومنعکس‌کردن مطالب جدید برآن شد که بار دیگر ترجمه را به طور کامل بازبینی‌نماید. بویژه اینکه پیشرفتهای‌جدید، اعمال این بازبینی راضروری می‌نمود. مثلاً در ویرایش چهارم از «مسئلهٔ چهار رنگ» مشهور توپولوژی به‌عنوان یکی ازمسائل مهم «باز» یاد شده بود درحالی‌که در ویرایش پنجم پیرامون این مسئله که در سال ۱۹۷۸ میلادی پس از قریب صدسال راه حلی برای آن پیدا شد، بحثی به‌میان‌آمده است. و چنین شد که مترجم باردیگر ترجمه را با ویرایش پنجم مقابله، و حذف و اضافات وتغییرات درترتیب مطالب‌را درترجمه اعمال‌کرد. آقای‌دکترشفیعیها، ویراستارنکته‌سنج و فاضل کتاب هم باردیگر تمام‌کتاب را ویرایش‌کردند و سرانجام متن‌آماده چاپ‌گردید.

اما روال ترجمهٔ بخش دوم [مجلد حاضر] تقریباً مانند مجلد اول است؛ در عین پایبندی به‌امانت، روانی وسلاست جمله‌ها مدنظربوده است، ترجمهٔ عناوین‌کتابها درمتن و عناوین اصلی درپانوشت آمده‌اند. توضیحات مختصری، هرجاکه به‌نظرمترجم لازم‌آمده در داخل علامت [ ] درمتن یا پانوشت افزوده شده است. در نحوهٔ نوشتن اسامی کتابها و اشخاص و محلها به فارسی، از دایرةالمعارف فارسی به سرپرستی مرحوم دکتر مصاحب بهره‌گرفته شده است مگرآنکه خلاف آن صحیح تشخیص داده شده باشدکه این موارد عمدتاً حاصل بررسیهای ویراستار محترم بوده است.

به‌هردومجلد کتاب هویتهای مستقلی داده شده است‌ودرنتیجه جوابهای «مطالعه‌های مسئله‌ای»، واژه‌نامه‌های انگلیسی به‌فارسی و فارسی به‌انگلیسی و فهرست اعلام این جلد جداگانه درهمین‌کتاب آمده‌است وطبعاً در ویرایش جدید مجلد اول هم‌که درآیندهٔ نزدیک منتشر خواهد شد، این نکته مدنظر خواهد بود.

۹

سپیده دم ریاضیات جدید

۹-۱ قرن هفدهم

قرن هفدهم درتاریخ ریاضیات برجستگی خاصی دارد. دراوایل قرن، نپر اختراع لگاریتم خود را برملا ساخت، هاریوت[1] و اوترد به‌نمادگذاری و تدوین علامات جبری کمك کردند، گالیله علم دینامیك را پایه‌ریزی کرد، و کپلر قوانین حرکت سیاره‌ای خود را عرضه نمود. بعداً درهمین قرن، دزارگ[2] و پاسکال پهنهٔ جدیدی درهندسهٔ محض گشودند، هندسهٔ تحلیلی جدید با دکارت آغاز شد، فرما مبانی نظریهٔ نوین اعداد را پی‌ریزی کرد، و هویگنس به‌نظریهٔ احتمال و دیگر رشته‌ها کمکهای شایانی نمود. سپس در اواخر قرن بعد ازآنکه‌راه توسط سپاهی ازریاضیدانان قرن‌هفدهم هموار شده‌بود، اختراع دورانساز حسابان به‌دست نیوتن و لایبنیتز[3] صورت پذیرفت. بدین‌ترتیب، می‌بینیم که درطول قرن هفدهم عرصه‌های متعدد وپهناوری برای تحقیقات ریاضی گشوده شدند.

درنیروی محرکهٔ عمده‌ای که درقرن هفدهم به‌ریاضیات داده‌شد همهٔ پویشهای فکری سهیم بودند، واین‌امر بدون‌تردید تاحدزیادی نتیجهٔ پیشرفتهای سیاسی، اقتصادی، واجتماعی زمان بود. این قرن شاهد دستاوردهای بزرگ در تلاش به خاطر حقوق انسانی بود. ماشینهایی بسیار پیشرفته‌تر، از بازیچه‌های سرگرم‌کنندهٔ ایام هرون‌گرفته تا اشیایی که از لحاظ اقتصادی اهمیت روزافزونی داشتند، به‌خود دید وروح روبه‌رشد بین‌المللی گرایی

---

1. Harriot 2. Desargues 3. Leibniz

فکری و تردیدگرایی علمی‌را مشاهده‌کرد. جو مساعدتر سیاسی شمال اروپا، وغلبهٔ عمومی بر سرما و تاریکی ماههای طولانی زمستان از طریق پیشرفتهای مناسب در ایجاد گرما و روشنایی، احتمالاً ازدلایل عمدهٔ انتقال فعالیتهای ریاضی ازایتالیا به‌سمت شمال، به‌فرانسه وانگلستان درقرن هفدهم بود.

دراینجا لازم است به‌دومطلب‌که مطالعهٔ ما را ازتاریخ ریاضیات درقسمت دوم این کتاب به‌گفتاری تا حدودی نامتـوازن سوق می‌دهد، توجـه کنیم. اولین آنهـا این است که فعالیت ریاضی با چنان سرعتی شروع به‌رشد نهاد که در نتیجهٔ آن نامهای زیادی که ممکن بود در دورهٔ کم‌ثمرتری مورد توجه قرار گیرند اکنون باید حذف شوند. واقعیت دوم آن است کـه، با فرا رسیدن قرن هفدهم مقدار معتنابهی پژوهشهای ریاضی صورت گرفت‌که برای یك خوانندهٔ عادی قابل‌درك نیست، زیرا بدرستی‌ادعا شده است که‌تاریخ یك موضوع رابدون آگاهی ازخود موضوع نمی‌توان به‌طور صحیح فهمید.

دراین فصل وفصل آتی، ما آن قسمت از بسط ریاضیات درقرن هفدهم را که بدون آگاهی ازحسابان می‌تواند قابل‌فهم باشد، درنظرمی گیریم. فصل ۱۱ متضمن شرح کوتاهی است ازبسط حسابان از آغاز پیدایش آن دریونان باستان تازمانی که نیوتن و لایبنیتز و پیشینیان بلافصل آنان درنیمهٔ دوم قرن هفدهم سر و صورت بخشیدن به‌آن را وجههٔ همت خویش قرار دادند. در فصول نهایی کتاب انتقال به‌قرن بیستم مطرح می‌شود؛ این فصول آخرین، بنا به‌ضرورت باید خیلی کوتاه باشند، زیرا که ریاضیات این دوره تنها توسط خبرگان قابل فهم است.

۹-۲ نپر

بسیاری از زمینه‌ها، نظیرنجوم، دریانوردی، تجارت، مهندسی، وجنگ که محاسبات‌عددی درآنها حائز اهمیت‌اند، به‌طور روزافزونی نیاز داشتند که این محاسبات سریعتر و دقیقتر انجام شوند. این نیازهای افزاینده با چهار اختراع قابل توجه بر آورده شد: نمادگذاری هندی ـ عربی، کسرهای اعشاری، لگاریتمها، وماشینهای حسابگر جدید. اکنون زمان آن است که ازبین این ابزارهای زحمتکاه به‌سومین‌آنها، یعنی اختراع لگاریتم به‌دست جان‌نپر در اوایل قرن‌هفدهم بپردازیم. اختراع چهارم بعداً دربخش ۹-۱۵ مطالعه خواهدشد.

جـان نپر (۱۵۵۰-۱۶۱۷)، کـه وقتی پـدرش فقط ۱۶ سال داشت به‌دنیا آمد، قسمت‌اعظم این زندگی‌را درملك خانوادگی خودیعنی‌کاخ مرچیستون[1]، نزدیك‌ادینبورو[2]، اسکاتلند، گذرانیـد وعمدهٔ انرژی خود را در جدالهای سیاسی ومذهبی‌آن زمان صرف کرد. وی بشدت ضد کاتولیك و مدافع نیات جان ناکس[3] و جیمز I[4] بـود. در ۱۵۹۳،

1. Merchiston 2. Edinburgh
3. John Knox [۱۵۰۵-۱۵۷۲ مصلح مذهبی وسیاستمدار پروتستان اهل اسکاتلند]
4. James I [۱۵۶۶-۱۶۲۵ پادشاه انگلستان ۱۶۰۳-۱۶۲۵]

ادعانامهٔ تند و پرخوانندهای علیه کلیسای رم تحت عنوان کشف سادهای از کلیهٔ مکاشفات یوحنای قدیس منتشر، ودر آن سعی کرد ثابت کند کـه پـاپ ضد مسیح است، و خالـق مقدر ساخته است که دنیا در سالهای بین ۱۶۸۸ و ۱۷۰۰ به‌آخر برسد. کتاب ۲۱ بار به‌چاپ رسید، کـه حداقل ده‌بار آن در دوران حیات مؤلف بود، و نپر صادقانه باور داشت که شهرت وی دربین نسلهای بعد برمبنای این کتاب خواهد بود.

نپر همچنین پیشگویانه از پیدایش ماشینهای جهنمی جنگی گوناگونی نام برده که طرحها ونمودارهایی بانوشته‌هایش همراه بودند. وی پیشگویی کرد که درآینده آتشباری به‌وجود می‌آید که قادر به «پاکسازی میدانی به‌محیط چهارمایل ازهرموجود زنده‌ای بابیش ازیك پابلندی» خواهد بود و «ابزارهای دریانوردی زیر آب» وارابه‌ای با «پوزهٔ جانداری ساخته‌از آهن» به‌عرصه‌می‌آیند که «برهرسو مرگ‌می‌پراکنند». درجنگ جهانی‌اول این‌پیشگوییها بترتیب در وجود مسلسل، زیردریایی و تانك نظامی تحقق پیدا کردند.

شگفت‌آور نیست که نبوغ وقدرت تجسم نپر بعضیها را برآن داشت تا وی را از لحاظ فکری نامتعادل پندارند و برخی دیگر به‌او به‌عنوان رواج‌دهندهٔ سحر و جادو نگـاه کنند. داستانهای بسیار و احتمالاً بی‌پایه‌ای، در تأیید این نظریات گفته می‌شوند. زمانی وی اعلام کرد که خروس سیاه ذغالی او برای وی مشخص خواهد کرد کـه کدامیك از خدمتکارانش از او دزدی می‌کند. خدمتکاران یك به یك به اطاق تـاریکی فرستاده شده بودند، بااین دستورکه پشت خروس را نوازش کنند. بدون اطلاع خدمتکاران، نپر پشت خروس را به‌دودهٔ چراغ آغشته بود، و خدمتکار مجرم، دربیم از دست زدن به‌خروس، با دستهای تمیز بازگشته بود. مورد دیگری نیز وقتی بود که نپر ازدست کبوترهای همسایه که حبوبات اورا می‌خوردند، به‌تنگ آمد. وی تهدید کرد که در صورتی که همسایه‌اش جلوی پرواز این پرندگان را نگیرد، آنها را ضبط خواهدکرد. همسایه، بااین تصورکه گرفتن کبوترهایش عملاً غیرممکن است، به‌نپر گفت‌که وی مخیر است‌که اگرمی‌تواند آنها را بگیرد. روز بعد همسایه شگفت‌زده کبوترهای خود را تلوتلوخوران روی چمن

جان نپر

نپر مشاهده می‌کند که نپر باخونسردی آنها را در کیسه‌ای می‌ریخته است. نپر پرندگان را با پاشیدن نخودفرنگی‌های آلوده به‌شراب پیرامون چمن خود مست کرده بوده است.

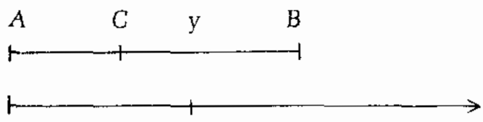
برای رهایی از مناقشات سیاسی و مذهبی، نپر خود را با مطالعهٔ ریاضیات و علوم سرگرم می‌کرد ونتیجه‌اش چهار ثمرهٔ نبوغ اوست که درتاریخ ریاضیات ثبت شده است. اینها عبارت‌اند از: (۱) اختراع لگاریتم؛ (۲) یادآورزیرکانه‌ای، موسوم به قاعدهٔ اجزاء مستدیر، برای به‌دست آوردن دوبارهٔ فرمولهایی که درحل‌مثلثهای قایم‌الزاویهٔ کروی به‌کار می‌روند؛ (۳) حداقل دو فرمول مثلثاتی از یك گروه چهارتایی معروف به مشابهات نپر[1]، که در حل مثلثهای غیرمشخص کروی مفیدند؛ و (۴) اختراع اسبابی، موسوم به میله‌های نپر[2]، یا استخوانهای نپر[3]، مفید در ضرب، تقسیم، واستخراج ریشه‌های دوم اعداد به‌طور مکانیکی. اکنون به اولین، و مهمترین، این چهار اختراع می‌پردازیم؛ برای بحثی از سه دیگر، نگاه کنید به‌مطالعه‌های مسئله‌ای ۹.۲ و ۹.۳.

۹-۳ لگاریتم

همچنانکه امروزه می‌دانیم، قدرت لگاریتم به عنوان یك ابزار محاسباتی در این حقیقت نهفته است که ضرب وتقسیم به‌کمك آن، به‌اعمال ساده‌تر جمع و تفریق تحویل می‌شوند. نشانه‌ای از این ایده در فرمول

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{۲},$$

که در زمان نپر کاملاً شناخته شده بوده پیداست، و کاملاً محتمل است که خط فکری نپر بااین فرمول شروع شده‌باشد؛ چه در غیر این صورت تعلیل محدودکردن لگاریتمها به لگاریتم سینوس زوایا توسط وی مشکل است. نپرحداقل به‌مدت بیست سال برروی‌نظریهٔ خودکارکرد، ومنشأ اندیشهٔ اوهرچه باشد، تعریف نهایی اوازلگاریتم چنین‌است. پاره‌خطی مانند AB ونیم‌خطی مانند DE، به‌صورتی که درشکل ۷۳ نشان داده شده، درنظربگیرید. فرض کنید‌که نقاط C و F، همزمان، بترتیب ازنقاط A و D ودر امتداد این خطوط، با سرعت اولیهٔ واحدی شروع به حرکت نمایند. فرض کنید C با سرعتی که از نظر عددی برابربافاصلهٔ CB است، حرکت کند، وسرعت حرکت F یکنواخت باشد. دراین‌صورت نپر DF را به‌عنوان لگاریتم CB تعریف می‌کند. یعنی، باقراردادن $DF = \mathrm{x}$ و $CB = \mathrm{y}$،



شکل ۷۳

1. Napier's analogies 2. Napier's rods 3. Napier's bones

$$x = \text{Nap log } y \cdot$$

برای احتراز از مزاحمت کسرها، نپر طول AB را $۱۰^۷$ اختیار کرد، زیرا بهترین جداول سینوسی که در دسترس وی بود تا هفت رقم اعشار بسط پیدا می‌کردند. از تعریف نپر، و از طریق استفاده از معلوماتی که در دسترس نپر نبود، چنین نتیجه می‌شود که*

$$\text{Nap log } y = ۱۰^۷ \log_{۱/e}\left(\frac{y}{۱۰^۷}\right),$$

لذا این بیان مکرر گفته شده که لگاریتمهای نپری لگاریتمهای طبیعی هستند در واقع بی‌اساس است. مشاهده می‌شود که لگاریتم نپری با افزایش عدد، کاهش می‌یابد، برخلاف آنچه درمورد لگاریتمهای طبیعی اتفاق می‌افتد.

بعلاوه آشکار می‌شود که، در دوره‌های مساوی متوالی از زمان، y مطابق یك تصاعد هندسی کاهش پیدا می‌کند در حالی کـه x مطابق یك تصاعد حسابی افزایش می‌یابد. بنابراین، اصل بنیانی دستگاه لگاریتمها، یعنی ارتباط بین یك تصاعد هندسی ویك تصاعد حسابی، را داریم. حال، برای مثال، نتیجه می‌شود که اگر $a/b = c/d$، آنگاه

$$\text{Nap log } a - \text{Nap log } b = \text{Nap log } c - \text{Nap log } d,$$

که یکی از نتایج متعددی است که به‌وسیلهٔ نپر برقرارشده‌است.

نپر بحث خود دربارهٔ لگاریتمها را در ۱۶۱۴ در رساله‌ای تحت عنوان شرح قانون شگفت انگیز لگاریتمها[1] منتشر کرد. این اثرحاوی جدولی است که لگاریتم سینوس‌زوایا را بـرای دقیقه‌های متوالی یك کمـان می‌دهد. رسالهٔ شرح علاقهٔ فوری و گسترده‌ای را

---

* نتیجه بااستفاده ازکمی حسابان بآسانی نشان‌داده می‌شود. مثلاً داریم $AC = ۱۰^۷ - y$، که از آن

$$C \text{ سرعت} = -dy/dt = y.$$

یعنی، $dy/y = -dt$، یا باانتگرالگیری، $\ln y = -t + C$. بامحاسبهٔ ثابت انتگرالگیری با جانشین کردن $t = ۰$، چنین پیدا می‌کنیم که $C = \ln ۱۰^۷$، که از آن

$$\ln y = -t + \ln ۱۰^۷.$$

حال

$$F \text{ سرعت} = dx/dt = ۱۰^۷,$$

به‌طوری که $x = ۱۰^۷ t$. بنابراین

$$\text{Nap log } y = x = ۱۰^۷ t = ۱۰^۷(\ln ۱۰^۷ - \ln y)$$
$$= ۱۰^۷ \ln(۱۰^۷/y) = ۱۰^۷ \log_{۱/e}(y/۱۰^۷).$$

1. Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio

برانگیخت، ودرسال بعد از انتشار آن هنری بریگز[1] (۱۵۶۱–۱۶۳۱)، استاد هندسه در کالج گرشام[2] درلندن، وبعداً استاد درآکسفورد، به‌ادینبورو سفرکرد تا مراتب احترام‌خود را به‌مخترع کبیر لگاریتمها اداکند. درضمن این ملاقات بودکه نپر وبریگز به‌این توافق رسیدندکه جداول درصورت چنان تبدیلی‌که لگاریتم ۱، ۰ ولگاریتم ۱۰ هر توان مناسبی از ۱۰ شود، مفیدترخواهد بود. بدین‌ترتیب لگاریتم امروزی **بریگزی**، یا **متعارفی**، تکوین یافت. این‌گونه لگاریتمها، که اساساً لگاریتمهای در مبنای ۱۰ می‌باشند، کارآیی برتر خودرا درمحاسبات عددی مرهون این حقیقت هستند که دستگاه شمار ما نیز در مبنای ۱۰ است. برای دستگاه شماری‌که پایهٔ دیگری مانند b داشته باشد، البته، به‌منظور محاسبات عددی، مناسبتر خواهد بودکه جداول لگاریتم نیز درمبنای b باشند.

بریگز همهٔ توان خود را در راه ساختن‌جدولی برپایهٔ طرح جدید وقف‌کرد، و در ۱۶۲۴ حساب لگاریتم[3] خود راکه شامل‌یك جدول ۱۴ رقمی از اعداد از ۱ تا ۲۰۰۰۰ و از ۹۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ بود، منتشرکرد. شکاف از ۲۰۰۰۰ تا ۹۰۰۰۰ بعداً، به‌کمك آدریان ولاك[4](۱۶۰۰–۱۶۶۶)، کتابفروش وناشرهلندی، پرشد. در۱۶۲۰، ادموندگانته[5] (۱۵۸۱–۱۶۲۶)، یکی ازهمکاران بریگز، یك جدول هفت رقمی‌از لگاریتمهای متعارفی سینوس و تانژانت زوایا برای فواصل‌قوسی یك دقیقه منتشر نمود. گانته بودکه واژه‌های کسینوس و کتانژانت را ابداع‌کرد؛ مهندسان وی را به‌خاطر«زنجیر گانته»اش می‌شناسند. بریگز و ولاك چهارجدول بنیادی لگاریتمها را منتشر نمودند، که تنها در همین اواخر وقتی، دربین ۱۹۲۴ و ۱۹۴۹ جداول جامع ۲۰ رقمی در انگلستان به‌عنوان جزئی از جشن سیصدمین سال‌کشف لگاریتم محاسبه شد،کنار گذاشته شدند.

کلمهٔ **لگاریتم** به‌معنی «عدد نسبت» است وتوسط نپر، بعدازآنکه بدواً ازاصطلاح عدد ساختگی استفاده‌کرد، اتخاذگردید. بریگز کلمهٔ مانتیس را،کـه کلمهٔ لاتینی متأخری از ریشهٔ اتروسکی است، معمول‌کرد،که در اصل به‌معنی «جمع» یا «پارسنگ» بوده‌و در قرن شانزدهم معنی«ضمیمه» را یافت. اصطلاح مفسر نیزتوسط بریگزپیشنهاد شد و به‌وسیلهٔ ولاك به‌کار رفت. عجیب است‌که درجداول اولیهٔ لگاریتمهای متعارفی رسم این بود کـه مانتیس را نیز مانند مفسر چاپ‌کنند، و از قرن هجدهم به‌بعدبودکه رسم‌فعلی‌چاپ مانتیسها بتنهایی، متداول گردید.

اختراع شگفت‌انگیز نپر درسرتاسر اروپا بگرمی‌مورد استقبال واقع شد. درنجوم، بویژه، زمان برای چنان اکتشافی بسیارآماده‌بود؛ بنابه اظهار لاپلاس، اختراع لگاریتمها «باکوتاه‌کردن زحمات، عمرمنجمین را دوبرابرکرد». بوناونتورا کاوالیری[6]، که دربارهٔ او سخن بیشتری درفصل ۱۱ داریم، تلاش زیادی برای متداول‌نمودن لگاریتمها درایتالیا به‌عمل‌آورد. خدمت‌مشابهی را یوهان‌کپلر در آلمان و ادموندوینگیت[7]درفرانسه‌انجام‌دادند.

---

1. Henry Briggs 2. Gresham 3. Arithmetica Logarithmica
4. Adriaen Vlacq 5. Edmund Gunter
6. Bonaventura Cavalieri 7. Edmund Wingate

در بخش ۹ـ۷ کپلر به‌طور کاملتری مـورد بحث قـرار خواهد گرفت؛ وینگیت، که سالهای زیادی را در فـرانسه گذرانده، به‌صورت برجسته‌ترین نویسندهٔ انگلیسی کتابهای درسی درحساب مقدماتی درآمد.

تنها رقیب نپر در پیشقدمی در اختراع لگاریتم یوبست بورگی[1] (۱۵۵۲-۱۶۳۲) ابزارساز سویسی بود. بورگی جدولـی از لگاریتمها را مستقل از نپر به‌تصور درآورده و آنرا ساخت ونتایج‌کارهای خود را در ۱۶۲۰، شش‌سال بعد از اینکه نپرکشف خود را به‌جهانیان اعلام‌کرده بود، منتشر نمود. گرچه هر دوی آنان ایدهٔ لگاریتم را مدتها قبل از انتشار در ذهن خود پرورانده بودند، عموماً اعتقاد براین است‌که این‌ایده اول‌بار به‌ذهن نپر راه یافته بوده‌است. روش نپر هندسی‌بود، درحالی‌که روش بورگی‌جبری بود. امروزه لگاریتم عموماً به‌عنوان یك نما تلقی می‌شود. مثلاً اگر $n=b^x$، x را لگاریتم n در پایهٔ b گوییم. از این تعریف، قوانین لگاریتم بلافاصله از قوانین نماها نتیجه می‌شوند. یکی از امور خلاف قاعدهٔ تاریخ ریاضیات، کشف لگاریتم پیش‌از به‌کار بردن نماهاست.

درسال ۱۹۷۱ نیکاراگوئه یك سری‌تمبرپستی دراکرام از«ده‌تا ازمهمترین‌فرمولهای ریاضی» دنیا منتشر نمود. طرح هرتمبر یك فرمول ویژهٔ ریاضی همراه با یك تصویر است و در پشت‌آن گفتار کوتاهی به‌زبان اسپانیایی در رابطه با اهمیت این فرمول آمده است. یکی از تمبرها به‌کشف لگاریتم به‌دست نپر اختصاص داده شده است. برای دانشمندان و ریاضیدانان باید اسباب خوشحالی باشدکه فرمولهای‌خود را این‌گونه مورد بزرگداشت ببینند، زیرا این‌فرمولها سهمی بس بیشتر ازکارهای شاهان و فرماندهان نظامی درپیشرفت بشریت داشته‌اند و تمبرهای پستی اغلب سیمای اینان را دربر دارد.*

سالها بود که محاسبه با لگاریتم در دروس ریاضی اواخر دبیرستان یا اوایل کالج درس داده می‌شد، وهمچنین طی‌سالها خط‌کش محاسبهٔ لگاریتمی، که درقاب چرمی‌زیبایی ازکمر آویخته می‌شد، نشان تمایـز دانشجویان مهندسی دانشگاهها بود. بـا این‌حال، امروزه با ظهور ماشین حسابهای جیبی کوچك جالـب و با قیمتهای رو به‌کاهش، کسی استفاده از جـدول لگاریتم یا خط‌کش محاسبه را در محاسبات عاقلانه نخواهد دانست. تدریس لگاریتم به‌عنوان یك‌وسیلهٔ محاسبه ازمدارس رخت برمی‌بندد، سازندگان مشهور خط‌کشهای محاسبهٔ دقیق به‌قطع تولید پرداخته‌اند، و کتابدستیهای جداول ریاضی مهم در فکرکنارگذاشتن‌جداول لگاریتم‌اند. محصولات اختراع بزرگ نپر نیز بدل به‌اشیائی درخور موزه‌ها شده‌اند.

---

1. Jobst Bürgi

* سایرفرمولهایی‌که درتمبرها طراحی‌شده‌اند عبارت‌اند از فرمول اساسی‌شمارش $1+1=2$، رابطهٔ‌فیثاغورس $a^2+b^2=c^2$، قانون ارشمیدسی اهرم $w_1d_1=w_2d_2$، قانون جاذبهٔ عمومی آیزك‌نیوتن، چهار معادلهٔ مشهور الکتریسیته و مغناطیس ج.ك. ماکسول (J.C.Maxwell)، معادلـهٔ گاز لودویـگ بولتسمان (Ludwig Boltzmann)، معادلـهٔ مـوشك کنستانتین تسیولکوفسکی (Konstantin Tsiolkovskii)، معادلهٔ جرم‌ـانرژی مشهور آلبرت اینیشتین $E=mc^2$، و معادلهٔ انقلابی موج‌ـمادهٔ لوئی دوبروی (Louis de Broglie).

مع‌هذا، تابع لگاریتمی به‌این دلیل‌ساده‌که تغییرات لگاریتمی و نمایی از اجزاء حیاتی‌طبیعت و آنالیزند، هرگز ازبین‌نخواهدرفت. درنتیجه، مطالعهٔ‌خواص‌تابع‌لگاریتمی و معکوس‌آن، تابع‌نمایی، همواره بخش مهمی ازآموزش ریاضی باقی‌خواهد ماند.

۹-۴ کرسیهای استادی ساویلی و لوکاسی

ازآنجا که ریاضیدانان برجستهٔ بسیاری صاحب کرسی ساویلی در آکسفورد یا صاحب کرسی لوکاسی درکیمبریج بوده‌اند، اشارهٔ‌کوتاهی به‌این‌کرسیها بجا خواهد بود.

سر هنری‌ساویل[1] زمانی سرپرست کالج مرتن[2] در آکسفورد، بعداً مدیر ایتن[3] شد، و در آکسفورد اصول اقلیدس را درس می‌داد. در ۱۶۱۹، وی دو کرسی استادی در آکسفورد دایر کرد، یکی در هندسه و یکی درنجوم. هنری‌بریگز اولین صاحب کرسی ساویلی هندسه درآکسفورد بود. قدیمی‌ترین‌کرسی استادی ریاضیات که دربریتانیای‌کبیر ایجاد شده‌بود،کرسیی درهندسه بودکه‌آن را سرتوماس‌گرشام[4] در ۱۵۹۶ درکالج‌گرشام در لندن دایرکرد. بریگز همچنین افتخار تصدی این‌کرسی را نیز برای اولین‌بار داشت. جان والیس، ادموندهالی، وسرکریستوفررن[5] صاحبان دیگرکرسیهای استادی ساویلی در قرن هفدهم بودند.

هنری‌لوکاس[6]، که در ۱۶۳۹-۱۶۴۰ نمایندهٔ کیمبریج در مجلس انگلستان بود، طبق وصیت منابعی را برای تأسیس یك‌کرسی استادی در اختیار دانشگاه قرار دادکه به‌نام او نامیده می‌شود. آیزك برو به‌عنوان اولین عهده‌دار این‌کرسی در ۱۶۶۴ انتخاب وشش‌سال بعد آیزك‌نیوتن جانشین او شد.

۹-۵ هاریوت و اوترد

تامس‌هاریوت[7] (۱۵۶۰-۱۶۲۱) ریاضیدان دیگری بودکه بخش‌عمدهٔ زندگـی خود را درقرن شانزدهم گذرانید ولی اثر برجستهٔ وی درقرن هفدهم‌منتشرشد. وی موردعلاقهٔ‌خاص امریکاییها است زیرا در ۱۵۸۵ توسط سر والتر رالی[8] به ینگه دنیا فرستاده شد تاجایی‌را که‌آن موقع ویرجینیا[9] نامیده می‌شد ولی اکنون کارولینای شمالی[10] است مساحی و نقشه‌برداری‌کند. به‌عنوان یـك ریاضیدان، هاریوت معمولاً مؤسس مکتب انگلیسی جبردانان تلقی می‌شود. اثر بزرگ‌او دراین‌زمینه، فنون تحلیلی‌حل معادلات جبری[11]، ده سال‌بعداز مرگ اوچاپ شد و عمدتاً به‌نظریهٔ معادلات می‌پردازد. این اثرکمك زیادی در پی‌ریزی

1. Sir Henry Savile 2. Merton 3. Eton
4. Sir Thomas Gresham 5. Sir Christopher Wren
6. Henry Lucas 7. Thomas Harriot 8. Sir Walter Raleigh
9. Virginia 10. North Carolina 11. Artis analyticae praxis

معیارهای فعلی کتابهای درسی دراین‌موضوع کرده‌است. کتاب فنون مشتمل است بر بحثی دربارهٔ معادلات درجهٔ اول، دوم، سوم، وچهارم، نوشتن معادلاتی بـا ریشه‌های مفروض، روابط بین ضرایب و ریشه‌های یك معادله، تبدیلهای معمولی یك معادله به‌معادلهٔ دیگری که بین ریشه‌های آن و ریشه‌های‌معادلهٔ اول‌رابطهٔ خاصی برقرار است، وحل‌عددی معادلات. قسمت‌زیادی ازاین مطالب را، البته، درآثار ویت می‌توان یافت، ولی‌کار هاریوت مطالعهٔ کاملتر و منظمتری است. هاریوت طرح ویت را در استفاده ازحروف مصوت برای‌مجهولها وحروف بی‌صدا برای مقادیر ثابت دنبال‌کرد، ولی وی حروف‌کوچك را به‌جای حروف بزرگ اختیارنمود. وی نمادگذاری ویت را برای توانها با نمایش $a^۲$ به‌جای aa ، $a^۳$ به‌جای aaa ، وغیره اصلاح کرد. وی همچنین اولین کسی بود که علامت $>$ و $<$ را به‌ترتیب برای «بزرگتر است از» و «کوچکتر است از» به‌کار برد، امـا این علامات را بلافاصله سایر نویسندگان نپذیرفتند.

نوآوریها وکشفیات متعدد دیگری، مانند یك هندسهٔ تحلیلی منسجم (قبل‌از انتشاریهٔ دکارت به‌سال۱۶۳۷)، این‌بیان‌که هرچند جمله‌ای درجهٔ n دارای n ریشه‌است، و «قاعدهٔ علامتهای دکارت» اشتباهاً به هاریوت‌نسبت داده می‌شود. بعضی از این‌اشتباهات درتعیین مؤلف ظاهراً به‌علت‌آن است‌که، نویسندگان‌بعدی، مطالبی به‌بعضی‌ازدستنوشته‌های محفوظ ماندهٔ هاریوت افـزوده‌اند. مثلاً، هشت جلد از دستنوشته‌های هاریوت در موزهٔ بریتانیا وجود دارد، اما قسمتی‌که با هندسهٔ تحلیلی سروکار دارد بنابرآنچه توسط د. ی. اسمیت[1] نشان داده شده، تحریفی است‌که به‌دست شخص دیگری صورت‌گرفته است.

هاریوت به‌عنوان یك منجم نیز، باکشف لکه‌هـای خورشیدی و بـا مشاهدهٔ اقمار مشتری به‌طور مستقل ازگالیله و تقریباً همزمان با او ممتاز بود.

ویلیام اوترد

(از مجموعهٔ دیوید اسمیت)

1. D. E. Smith

درهمان سال (۱۶۳۱) که اثر هاریوت درجبر بعد ازمرگ وی پدیدار شد، اولین چاپ کتاب عامه‌پسند راهنمای ریاضیات[1] ویلیام اوترد، اثری درباب حساب وجبر که کمك زیادی در اشاعهٔ دانش ریاضی در انگلستان کرد، ازچاپ درآمد. ویلیام اوترد (۱۵۷۴-۱۶۶۰) یکی از پرنفوذترین نویسندگان انگلیسی قرن هفدهم در ریاضیات بود، گرچه از لحاظ شغلی یك کشیش کلیسای پروتستانی بود، به‌شاگردانی که علاقه به ریاضیات داشتند، درس خصوصی مجانی می‌داد. ازجملهٔ این شاگردان جان والیس، کریستوفرن، و ست‌وارد[2] بودند، که بعدها، بترتیب، به‌عنوان ریاضیدان، معمار، و منجم شهرت یافتند. گفته‌اند که اوترد وقتی خبر بازگشت چارلز II را به‌قدرت شنید، از فرط شادی قالب‌تهی کرد. در این‌مورد اوگاستس د مورگن[3] خاطرنشان نمود که «من‌باب توجیه، باید اضافه کرد، که وی هشتاد وشش‌سال داشت.»

اوترد در نوشته‌هـای خود تأکید زیادی بر نمادهای ریاضی داشت و متجاوز از ۱۵۰ تای آنها را ارائه‌نمود. ازمیان اینهافقط سه‌تا به‌عصر حاضر راه‌یافته‌اند: خاج (×) برای‌ضرب، چهار نقطه (::) که در تناسب به‌کار می‌رود، وعلامت (∽) که غالباً برای بیان تفاوت بین دوچیز ازآن استفاده می‌کنیم. با این‌حال خاج به‌عنوان نمادی به‌نشانهٔ ضرب، بلافاصله موردپذیرش واقع نشد؛ زیرا، همان‌گونه‌که لایبنیتز به‌آن ایرادگرفته، خیلی به X شباهت دارد. اگرچه هاریوت در مواقعی نقطه (.) را برای ضرب به‌کار می‌برد، این نماد تازمانی‌که مورد قبول لایبنیتز قرار نگرفته بود، چندان مورد استفاده واقع‌نشد. لایبنیتز همچنین از طاق (⋂) ، نمادی‌که امروزه برای‌نشان دادن ضرب درنظریهٔ مجموعه‌ها به‌کارمی‌رود، برای ضرب استفاده‌کـرده است. نماد انگلیسی-امریکایی (÷) برای تقسیم نیز ریشه در قرن هفدهم دارد، کـه به‌صورت چاپ برای نخستین‌بـار در کتاب جبری توسط یوهان هاینریش ران[4] سویسی (۱۶۲۲-۱۶۷۶) آمده است. نماد مذکور، وقتی چندسال بعد این کتاب ترجمه شد، در انگلستان شناخته شد. این نماد تقسیم مدتها در برّ اروپا [اروپابدون انگلستان] برای نشان دادن تفریق مورد استفاده بود. علامتهای آشنای فعلـی، در هندسه، برای تشابه (∽) ، و برای تساوی مثلثها (≅) ، را مدیون لایبنیتز هستیم.

علاوه بر راهنمای ریاضیات، اوترد دوایر تناسب[5] (۱۶۳۲) ، و مثلثات[6] (۱۶۵۷) را منتشر نمود. اثر دوم به دلیل تلاش پیشگامانهٔ خود در معـرفی علایم اختصاری بـرای نامهای‌توابع مثلثاتی از اهمیت تاریخی برخوردار است. در اثر اول یك خط‌کش‌محاسبهٔ مدور شرح داده می‌شود. ولی، اوترد اولین کسی‌نبوده‌که یك خط‌کش‌محاسبه ازنوع مدور را به‌صورت چاپ‌شده توصیف‌کرده باشد. وتقدم در اختراع بین وی و ریچارد دلامین[7]، یکی از شاگردان او، جای بحث دارد. اما به‌نظر می‌رسد کـه بدون تردید اوترد مخترع

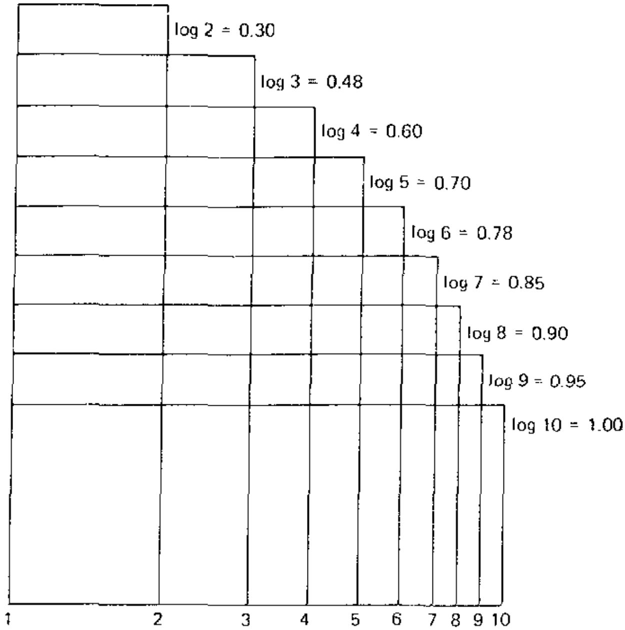
1. Clavis mathematicae
2. Seth Ward
3. Augustus De Morgan
4. Johann Heinrich Rahn
5. Circles of Proportion
6. Trigonometrie
7. Richard Delamain

Notæ seu symbola quibus in sequentibus utor:

Æquale =   Simile *Sim.*
Majus ⊏.   Proxime majus ▭.
Minus ⊐.   Proxime minus ▭.
Non majus ⊏.   Æquale vel minus ⊑.
Non minus ⊐.   Æquale vel majus ⊒.
Proportio, sive ratio æqualis ::
Major ratio ⊏:. Minor ratio ⊐: .
Continuè proportionales ∺.
Commensurabilia ⊓.
Incommensurabilia ⊓.
Commensurabilia potentiâ ⊓.
Incommensurabilia potentià ⊓.
Rationale, ῥητὸν, R, vel ℞.
Irrationale, ἄλογον, ℞.
Medium sive mediale m
Linea secta secundum extremam & mediam rationem } ς
Major ejus portio σ
Minor ejus portio τ.
Z est A + E.   ℨ est a + e.
X est A-E.   ꭓ est a-e

A 2   Z est

صفحه‌ای از راهنمای ریاضیات اوترد (۱۶۳۱)، که تعدادی از نمادهای ریاضی وی را نشان می‌دهد.

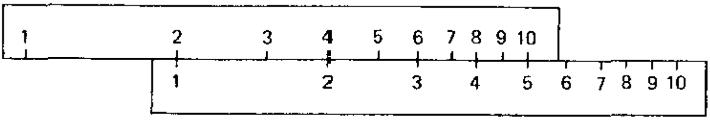


شکل ۷۴

خط‌کش محاسبهٔ مستقیم لگاریتمی، در ۱۶۲۲ بوده است. در ۱۶۲۰، گانته یک مقیاس لگاریتمی، یا خط مدرجی درست کرد که در آن فواصل با لگاریتمهای اعداد ثبت شده متناسب بودند (نگاه کنید به شکل ۷۴)، و ضرب و تقسیم را به‌طور مکانیکی با جمع و تفریق قطعات این مقیاس به‌کمك یك پرگار انجام می‌داد. فکر انجام این جمعها و تفریقها به‌کمك دومقیاس لگاریتمی مشابه، که یکی در امتداد دیگری، نظیر شکل ۷۵ حرکت کند، منسوب به اوترد است. گرچه اوترد نظیر این خط‌کش محاسبه را در سالهای جلوتر، حوالی ۱۶۲۲، اختراع کرد، شرح چاپی آن را تا سال ۱۶۳۲ به‌تعویق انداخت. عددیاب [شاخص] برای خط‌کش محاسبه توسط آیزك نیوتن در ۱۶۷۵ پیشنهاد شد، ولی تا تقریباً یك قرن بعد عملاً ساخته نشد. چندین خط‌کش محاسبه برای مقاصد خاص، مثلاً برای معاملات بازرگانی، برای اندازه‌گیری الوار، وغیره، در قرن هفدهم ابداع شدند. مقیاس لگاریتم لگاریتم در ۱۸۱۵ اختراع شد، و در ۱۸۵۰ بود که آمده‌مانایم[1] افسر ارتش فرانسه (۱۸۳۱-۱۹۰۶) خط‌کش محاسبهٔ مدرن را استانده نمود.

عقیده بر این است که مؤلف ضمیمهٔ مهم بی‌نام شانزده صفحه‌ای برای چاپ انگلیسی شرح نپر اثر ادوارد رایت[2]، اوترد بوده است. در اینجاست که اولین استفاده از خاج برای

1. Amédée Mannheim 2. Edward Wright



شکل ۷۵

ضرب، نخستین اختراع روش پایه‌ها در محاسبهٔ لگاریتمها (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۹.۱ (ج))، و نخستین جدول لگاریتمهای طبیعی ظاهر می‌شود. اوترد همچنین کتابی دربارهٔ کیل کردن[1] (علم محاسبهٔ ظرفیتهای چلیکها، بشکه‌ها) نوشت و یك کتاب از زبان فرانسوی دربارهٔ تفریحات ریاضی را ترجمه و منتشر نمود.

۹-۶ گالیله

دو منجم برجسته سهم قابل ملاحظه‌ای در اوایل قرن هفدهم در ریاضیات داشتند: گالیلئو گالیلئی [گالیله] ایتالیایی، و یوهان کپلر آلمانی.

گالیله، پسر نجیب‌زادهٔ فلورانسی تنگدست شده‌ای، در شهر پیسا در سال ۱۵۶۴ در روز مرگ میکل‌آنجلو، به دنیا آمد. در هفده سالگی والدینش او را برای تحصیل طب به دانشگاه پیسا فرستادند. یك روز، موقعی که در مراسمی در کلیسای جامع شهر پیسا شرکت داشت، حواسش متوجه چراغ بزرگ برنزی که از سقف بلند آویزان بود، گردید. چراغ را به یك طرف کشیده بودند که روشن کردنش آسانتر شود، و وقتی رهایش کردند، چراغ با دامنهٔ نوسانی که تدریجاً کاهش می‌یافت به نوسان درآمد. با استفاده از ضربان قلبش برای سنجش زمان، وی از کشف این مطلب که دورهٔ هر نوسان چراغ مستقل از اندازهٔ کمان نوسان است*، دچار تعجب شد. بعدها، به‌کمك آزمایشهایی، نشان داد که دورهٔ تاب‌خوردن یك پاندول نیز مستقل از وزن وزنهٔ پاندول است و در نتیجه فقط به طول پاندول بستگی دارد. گفته‌اند که علاقهٔ گالیله به علوم و ریاضیات براثر این مسئله برانگیخته شده و انگیزهٔ بیشتر این کار حضور تصادفی در یك درس در هندسه در دانشگاه بوده است. نتیجه آن بود که وی از والدینش اجازهٔ ترك تحصیل رشتهٔ پزشکی کرده و با به دست آوردن آن خود را به جای پزشکی وقف علوم و ریاضیات کرد. و اینها دو رشته‌ای بودند که او در آنها دارای استعداد طبیعی زیادی بود.

در بیست و پنج سالگی گالیله به سمت استادی ریاضیات در دانشگاه پیسا برگزیده شد و گفته‌اند که وقتی عهده‌دار این سمت بود آزمایشهایی را با استفاده از برج کج شدهٔ آنجا ترتیب داد. مطابق این گفته‌ها، وی در حضور جمعی از دانشجویان، استادان، و روحانیون، دو قطعه فلز را که یکی ده برابر دیگری وزن داشت، از فراز برج کج شدهٔ پیسا به پایین پرتاب کرد. این دو قطعه فلز عملاً در یك لحظه به‌زمین برخوردند و به این ترتیب گفتهٔ ارسطو را که

---

1. gauging

* این مطلب تنها به‌طور تقریبی درست است و تقریب در حالت کوچك بودن دامنهٔ نوسان بسیار نزدیك است.

اجسام سنگینتر سریعتر از اجسام سبکتر سقوط می‌کنند، نقض کردند. گالیله به‌کشف این قانون که فاصلهٔ سقوط یك جسم متناسب با مجذور زمان سقوط است، در مطابقت با فرمول آشنای $s = gt^2/2$، نایل آمد. اما حتی رؤیت آزمایشهای گالیله خللی در اعتقاد اساتید دیگر نسبت به تعلیمات ارسطو وارد نکرد. گستاخی گالیله در توهین به مقدسات با نقض تعلیمات ارسطو چنان بر مقامات دانشگاه گران آمد که آنها در آنجا زندگی را بر او تلخ کردند و در نتیجه او درسال ۱۵۹۱ از پست استادی خود استعفا داد. سال بعد پست استادی را در دانشگاه پادوا، که برای مقاصد علمی جو مناسبتری داشت، پذیرفت. گالیله در اینجا قریب به ۱۸ سال به آزمایشها و تعلیمات خود ادامه داد و شهرتش عالم گستر شد.

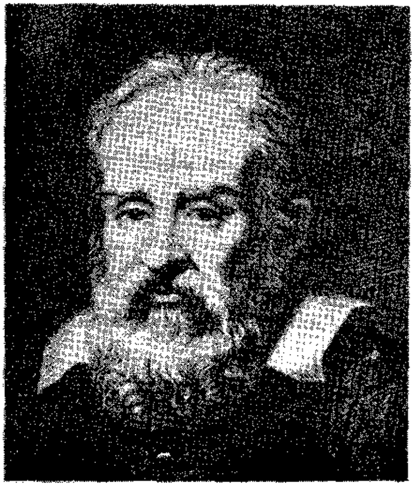
در حدود سال ۱۶۰۷، یك شاگرد عینکساز هلندی به نام هانس لیپرشی[1]، در حال بازی با تعدادی از عدسیهای عینك، دریافت که اگر دوعدسی را در فاصلهٔ مناسبی از هم نگهدارد، اشیایی که از درون این جفت عدسی مشاهده می‌شوند، بزرگ می‌شوند. شاگرد عینکساز، کشف خود را به اطلاع استادش رساند و او دوعدسی را در لوله‌ای قرار داده و این وسیله را به عنوان اسباب بازی در ویترین مغازه‌اش گذاشت. یك مقام دولتی این اسباب بازی را دید و آن را خرید و تقدیم شاهزاده مائوریس ناسائویی[2] کرد. شاهزاده مائوریس که فرماندهی قوای مسلح هلند متحده[3] را به عهده داشت، دریافت که می‌توان از این اسباب بازی به عنوان تلسکوپ در کارهای نظامی استفاده کرد.

خبر اختراع تلسکوپ قبل از سال ۱۶۰۹ به گالیله رسید و او بزودی تلسکوپی بمراتب بهتر از تلسکوپ لیپرشی ساخت. بنا به درخواستی که به‌عمل آمد، وی ابزارخودرا در ونیز به معرض امتحان گذاشت و در آنجا سناتورهای ونیزی توانستند که از فراز بلندترین کلیسای شهر، بادبانهای یك کشتی را دوساعت تمام زودتر از موقعی که به چشم بی‌سلاح قابل رؤیت باشد، مشاهده نمایند. گالیله مدل خود را تقدیم دوخ ونیز[4] کرد و او، مانند پرنس‌مائوریس، امکانات زیاد این وسیله را در عملیات دریایی ونظامی تشخیص داد، ومقرری گالیله به مقدار قابل ملاحظه‌ای افزایش یافت.

گالیله ضمن ادامهٔ کارخود چهار تلسکوپ دیگر، نامی که به ابزار او نهاده شد (از تلهٔ[5] یونانی، به‌معنی «دور» و اسکوپوس[6]، به معنی «نگریستن») ساخت که هریك قویتر از قبلی بود. با ساختن پنجمین تلسکوپ، که قدرت بزرگنمایی آن سی برابر بود، گالیله در شب هفتم ژانویه ۱۶۱۰، دو ستارهٔ کوچك را در شرق سیارهٔ مشتری و یکی را در غرب آن مشاهده کرد. شب بعد، وی با شگفتی هرسه ستاره را در غرب سیاره دید، و سه شب بعد وی دریافت که ستارهٔ کوچك دیگری حول مشتری در گردش است. اوچهار قمر روشن مشتری را کشف کرده بود و ارصاد وی تأیید کاملی براین نظریهٔ کوپرنیکی بود که اجسام کوچك برگرد اجسام بزرگتر در گردش‌اند. گالیله به‌کمك تلسکوپش، کلفهای خورشیدی، کوههای

---

1. Hans Lippershey
2. Maurice of Nassau
3. United Netherlands
4. Doge of Venice
5. tele
3. skopos



گالیلئو گالیلئی
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

ماه، (اهلهٔزهره) و حلقه‌های کیوان را رصدکرد. اما این کشفیات یك بار دیگر مخالفت مغرضانهٔ بسیاری از اصحاب کلیسا را، که اقتدار ارسطو را قبول داشتند، برانگیخت؛ ارسطو گفته بودکه خورشید بی‌عیب است و زمین، و درنتیجه بشر، مرکز عالم است. حتی یك روحانی کلیسا گالیله رامتهم کردکه چهار ستارهٔ ژوپیتررا در درون تلسکوپ خود جعل کرده است.

سرانجام درسال ۱۶۳۳، یك سال پس از منتشرکردن کتابی که نظریهٔ کوپرنیکی را تأییدمی‌کرد، گالیله برای حضور در مقابل هیأت تفتیش عقاید فراخوانده شد و درآنجا، این مرد پیر و بیمار، دراثر تهدید به شکنجه، مجبور شدکه یافته‌های علمی خود را باطل اعلام نماید. کتاب او در فهرست آثار ممنوعه قرار داده شد و دویست سال در این فهرست ماند. با گواهی دروغ علیه وجدان خود، زندگی دانشمند پیر درهم شکسته شد. به او اجازه داده شدکه به‌کارهای بی‌ضرر علمی‌اش ادامه دهد، اما کور شد و در ژانویهٔ ۱۶۴۲، درحالی‌که هنوز تحت نظر هیأت تفتیش عقاید و عملاً درخانه‌اش زندانی بود، درگذشت.*

بنا برحکایتی، وقتی که گالیله بعداز اعلام اجباری بطلان نظرش وتکذیب حرکت زمین به‌پاخاست، به‌آرامی زیرلب چنین زمزمه کرد: «با همهٔ این احوال زمین به‌دورخودمی‌چرخد.» این داستان صرفنظر از مبنای خود بدل به ضرب‌المثلی به‌این مضمون گشته است که حقیقت، هرچندهم در پوشاندن آن کوشش شود، سرانجام آشکار خواهد شد. سال ۱۶۴۲ که در گذارخود شاهد مرگ گالیله در اسارت بود، شاهد تولد آیزك نیوتن هم شد.

---

* در سال ۱۹۸۰، ۳۴۷ سال بعداز محکومیتش به‌وسیلهٔ کلیسا به‌دلیل استفاده ازتلسکوپ برای اثبات چرخش زمین به دور خورشید، واتیکان، بنا به خواستهٔ پاپ ژان‌پل II، شروع به‌تجدید‌نظر در محکومیت گالیله به عنوان رفض کرد.

روح علمی جدید را که هماهنگی بین تجربه و تئوری است، به گالیله مدیونیم. وی مکانیك اجسامی را که به‌طور آزاد سقوط می‌کنند تأسیس و بنیان دینامیك درحالت کلی را پی‌نهاد، شالوده‌ای که آیزك نیوتن بعداً توانست علوم را بر پایهٔ آن بنا نماید. وی اولین کسی بود که ماهیت سهموی‌داشتن مسیر یك پرتابه در خلأ را تشخیص داد و در قوانینی که متضمن شتابند، تأمل نمود. او اولین میکروسکوپ از نوع جدید و پرگار تقسیم (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۹ . ۶) را، که زمانی بسیار مورد توجه بود، اختراع کرد. آنچه از نظر تاریخی مهم است، اظهاراتی است که ازطرف گالیله عنوان شد و نشان‌می‌دهند که‌وی مفهوم هم‌ارزی دسته‌های نامتناهی را (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۹ . ۷) که‌نکته‌ای‌اساسی در نظریهٔ مجموعه‌های قرن نوزدهم کانتور بوده و درتوسعهٔ آنالیز جدید تأثیر زیادی‌داشته، درك کرده است. این اظهارات، و قسمت عمدهٔ نظریات گالیله در دینامیك، را در اثر مهم او، محاوره دربارهٔ دودانش جدید و اثبات ریاضی آنها[1] که در سال ۱۶۳۸ در لیدن[2] منتشرشد، می‌توان یافت. از گالیله نقل کرده‌اند که: «در پرسشهای علمی، مرجعیت هزاران نفر، ارزش استدلال خاضعانهٔ یك فرد را ندارد.»

به نظر می‌رسد که گالیله به معاصر مشهورخود، یوهان کپلر حسادت می‌ورزیده، زیرا گرچه‌کپلر هرسه‌قانون مهم حرکت سیاره‌ای خود را پیش از سال ۱۶۱۹ اعلام کرده‌بود، این قوانین کاملاً توسط گالیله نادیده گرفته شده‌اند.

گالیله سرتاسرعمرش فردی مذهبی وکاتولیکی‌معتقد بود. درنتیجه‌برای او اضطراب‌آور بود که نظراتی راکه مشاهدات و استدلالهایش به عنوان یك دانشمند وی را بناچار بدانها رهنمون شده بودند، به دلیل تعارض باکتب مقدس کلیسایی که او خود را عضو وفادارآن تلقی می‌کرد، در محکومیت ببیند. دانشمندان‌زیادی هرازچندگاه، خود رادراین موقعیت یافته‌اند. چنین‌واقعه‌ای به عنوان مثال دراواسط قرن نوزدهم درموقعی که‌مشکلاتی در آشتی‌دادن نظریهٔ تکامل داروین با نظر تورات در آفرینش موجودات زنده به وجود آمده‌بود، رخ داد.

نتیجه‌ای که‌گالیله به آن‌رسید این بود که‌کتاب مقدس‌کتابی درنجوم یازیست‌شناسی یاهر علم دیگری نبوده و هرگز چنین نخواهد بود. به‌طور خلاصه به‌نظر گالیله کتاب‌مقدس برای‌آن نوشته نشده است که حقایق علمی‌راکه خود مامی‌توانیم کشف‌کنیم، به‌ما بیاموزد. بلکه هدف آن این است که‌کتابی برای آشکار کردن حقایق معنوی که‌خود ماقادربه‌کشفشان نیستیم، باشد. ستیز بین علم‌وکتاب مقدس در این واقعیت نهفته است که این‌حقایق‌معنوی درکتاب مقدس به‌گونه‌ای‌ابراز شده‌اندکه برای مردمی که این‌حقایق برای‌آنان و ازطریق آنان‌آشکار شده، طبیعی باشند. اما این امر بوضوح صرفاً معلول موقعیت زمانی بوده و، بنابراین باید نادیده گرفته شود. یك دانشمند نباید از دریافت اینکه جهان‌کتاب مقدس به صورتی تصویر شده‌که برای عبریان قدیم طبیعی جلوه نماید، آشفته خاطر شود، و یك

---

1. Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze 2. Leyden

روحانی نباید از دریافت اینکه دانشمندی دنیا را مغایر با توصیفات کتاب مقدس تصویر نماید، آشفته خاطر گردد. نحوهٔ توصیف دنیا لازمهٔ هدف واقعی کتاب مقدس بوده و به‌هیچ عنوان با آموزشهای معنوی کتاب مقدس ناسازگاری ندارد.

۹-۷ کپلر

یوهان کپلر در ۱۵۷۱ نزدیک اشتوتگارت متولد و در دانشگاه توبینگن[1] با این نیت اولیه که یك کشیش لوتری شود، به‌تحصیل پرداخت. علاقهٔ عمیق وی در نجوم وی را به‌تغییر برنامه‌هایش راهبر شد. در ۱۵۹۴، در اوایل سنین بیست خود، سمت مدرسی در دانشگاه گراتس[2] در اطریش راپذیرفت. در ۱۵۹۹ دستیار تیکوبراهه[3] منجم مشهور ولی منازعه‌جوی دانمارکی-سوئدی شد، که به‌عنوان منجم دربار قیصر رودلف II به پراگ منتقل شده بود. به‌فاصلهٔ کوتاهی پس از آن، در ۱۶۰۱، براهه بناگهان درگذشت، و کپلر هم مقام و هم مجموعهٔ یافته‌های نجومی همکار ارشد خود در حرکت سیاره‌ها را به ارث برد.

این سخن را مکرر گفته‌اند که تقریباً هر مسئله را می‌توان با پرداختن مدام به آن و گذاشتن وقت کافی حل کرد. آن‌طور که تامس ادیسون[4] در بارهٔ اختراع گفته است که اختراع یك درصد الهام و نودونه‌درصد عرق ریختن است، حل مسئله یك درصد تفکر و نودونه‌درصد پشتکار است. شاید این امر در هیچ جای دیگر تاریخ علم آشکارتر از سماجت باورنکردنی کپلر در حل مسئلهٔ حرکت سیارات به دور خورشید بروز نکرده باشد. با اعتقاد کامل به‌نظریهٔ کوپرنیکی چرخش سیارات در مدارهایی حول خورشید مرکزی، کپلر با جدیت زیاد در صدد تعیین ماهیت و وضع این مدارها و چگونگی حرکت سیاره‌ها در مدارهای خود برآمد. بعد از تلاشهای زیادی که عمدتاً جنبهٔ تخیلی داشتند و زمانی انجام شدند که او داده‌های کمی برای تعیین صحت و سقم آنها در دست داشت، کپلر به تودهٔ عظیمی از رصدهای بسیار دقیق تیکوبراهه در حرکت سیاره‌ها دست یافت. مسئله بعداً به‌این‌صورت درآمد: به‌دست‌آوردن الگویی برای حرکت سیارات که دقیقاً با مجموعهٔ عظیم رصدهای براهه مطابقت کند. یادداشتهای براهه‌چنان قابل اعتماد بودند که هرجوابی که باموقعیتهای رصد شدهٔ براهه که حتی مقدار اندکی به قدر یك‌چهارم قطر ظاهری ماه متفاوت باشد، می‌بایست به عنوان جواب ناصحیح کنار گذاشته شود. بدین‌ترتیب کپلر نیاز بدان داشت که ابتدا به‌کمك تخیل جواب موجهی را حدس بزند و سپس با پشتکار پررنجی کوهی از محاسبات کسل‌کننده را بر دوش بکشد تا حدس خود را تأیید یا رد کند. وی صدها بار به‌کوششهای بی‌ثمری دست زد و محاسبات بسیار زیادی انجام داد و با شوق و بردباری کاهش ناپذیری به مدت بیست و یك سال کارکرد. سرانجام در سال ۱۶۰۹ توانست دو قانون اول خود و سپس ده سال بعد در ۱۶۱۹ سومین قانون، یعنی حرکت سیاره‌ای، را

---

1. Tübingen
2. Grätz
3. Tycho Brahe
4. Thomas Edison

یوهان کپلر
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

فرمولبندی کند.

کشف این قوانین حرکت سیاره‌ای از رویدادهای برجسته در تاریخ نجوم و ریاضیات است، زیرا در تلاش برای توجیه آنها آیزك نیوتن به ابداع مکانیك سماوی هدایت شد. سه قانون مزبور از این قرارند:

I. سیارات در حول خورشید بر مدار بیضی شکلی که خورشید در یکی از کانونهای آن واقع است، حرکت می‌کنند.

II. شعاع حاملی که یك سیاره را به خورشید وصل می‌کند در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی می‌پیماید.

III. مربع زمان یك گردش کامل سیاره‌ای برمدار خود با مکعب نیم محور اطول مسیر آن متناسب است.

کشف تجربی این قوانین از انبوه اطلاعاتی که براهه جمع آوری کرده بود، یکی از استثنایی‌ترین نتیجه گیریهایی است که تاکنون در علوم صورت گرفته است.

کسی نمی‌داند که بخشی مشخص از ریاضیات ناب کی کاربرد نامنتظری خواهد یافت. آن گونه که ویلیام وول[1] گفته است، «اگر یونانیان علم مقاطع مخروطی را بارور نکرده بودند، کپلر نمی‌توانست بر بطلمیوس برتری جوید.» بسیار جالب توجه است که ۱۸۰۰ سال بعد از آنکه یونانیان خواص قطوع مخروطی را صرفاً برای ارضای امیال روشنفکرانهٔ خود بسط داده بودند، چنین کاربرد عملی روشنی از آنها پیش بیاید. با غرور قابل تصدیقی، کپلر در مقدمهٔ کتاب همسازی جهانها[2]ی خود درسال ۱۶۱۹ چنین نگاشت: من کتابی برای معاصرین یا ــ بدون هیچ فرقی ــ برای نسل آینده می‌نویسم. شاید لازم

---

1. William Whewell 2. Harmony of the Worlds

باشد که کتاب من صدسال منتظر خواننده‌ای بماند. آیا خداوند ۶۰۰۰ سال منتظر نظاره‌گری نمانده است؟

کپلر یکی از پیشگامان درعلم حسابان بود. برای محاسبهٔ مساحتهایی که درقانون دوم حرکت سیاره‌ای وی دخالت داشتند، وی می‌بایست که به شکل خامی به‌حساب انتگرال تمسك جوید. وی همچنین، در هندسهٔ فضایی بشکه‌های شراب[1] ۱۶۱۵ خود، روشهای خام انتگرالگیری را برای یافتن حجمهای ۹۳ جسم حاصل از دوران قطعه‌های مقاطع مخروطی حول محوری واقع درصفحهٔ آنها به‌کار برد. ازجملهٔ این اجسام چنبره و دوجسمی هستندکه وی آنها را **سیب** و **لیمو** نامیده است که دوجسم اخیر آنهایی هستندکه از دوران دوکمان ازیك دایره که بترتیب بزرگتر وکوچکتر از نیمدایره‌هستند، درحول وترمشترکشان به‌دست می‌آیند. کپلر ازمشاهدهٔ روشهای بدمورد استفادهٔ کیل‌کنندگان شراب عصرخود به این موضوع علاقمندشد. چه‌بسا که‌کاوالیری، وقتی‌که بعداًتهذیب حساب بینهایت کوچکها را با روش تقسیم ناپذیرهای خود یك گام فراتر برد ازاین اثر کپلرمتأثرشده باشد. ما به‌بحث دربارهٔ همهٔ اینها درفصل ۱۱ بازخواهیم گشت.

کپلرسهم قابل‌ملاحظه‌ای درپیشبرد موضوع چندوجهیها دارد. وی‌ظاهراً اولین کس بود که یك **پادمنشور** (حاصل از دوران‌قاعدهٔ فوقانی یك منشور درصفحهٔ خود به‌طوری که رئوس آن با اضلاع قاعدهٔ پائین متناظر شوند، و سپس وصل رئوس دو قاعده به‌طور زیگزاگ)را تشخیص داد.وی همچنین چهارده وجهی مرکب‌منتظم، دوازده وجهی لوزوی منتظم، وسی‌وجهی لوزوی منتظم راکشف کرد.* دومین‌این چندوجهیها به‌صورت بلورهای لعل در طبیعت یافت می‌شوند. از چهار چندوجهی منتظم ستاره‌ای ممکن، دوتا را کپلر و دوتای‌دیگر را در۱۸۰۹ لوئی‌پوانسو[2] (۱۷۷۷-۱۸۵۹)، یکی‌ازپیشگامانی‌که درمکانیك هندسی‌کار می‌کرده، کشف کرده‌اند. چندوجهیهای ستاره‌ای کپلر-پوانسو مشابه‌های فضایی چندضلعیهای ستاره‌ای منتظم درصفحه(نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۵.۸) هستند. کپلرهمچنین توجه خود را به‌مسئلهٔ پرکردن صفحه‌با چندضلعیهای منتظم (که لزوماً همه مثل هم نیستند) وپرکردن فضا باچندوجهیهای منتظم(نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۹.۹) معطوف داشته‌است.

کپلرمسئلهٔ تعیین نوع قطوع مخروطی را که با معلوم بودن یك رأس، محور مار براین رأس، یك مماس دلخواه و نقطهٔ تماسش معین می‌شوند، حل کرد، و کلمهٔ کانون را در هندسهٔ مخروطات معمول نمود. وی مقدار تقریبی محیط یك بیضی با نیم‌قطرهای a و b رابا استفاده از فرمول $\pi(a+b)$ به‌دست آورد.وی‌همچنین یك‌باصطلاح **اصل پیوستگی** وضع کردکه اساساً وجود نقاط آرمانی‌ویك خط آرمانی دربینهایت یك صفحه راکه‌دارای بسیاری ازخواص‌نقاط وخطوط معمولی هستند، مسلم فرض‌می‌کند. بدین‌ترتیب وی‌توضیح

---

1. Stereometria doliorum vinorum

* الگوهای ساختمان برای این‌اجسام صلب را می‌توان در Miles C.Hartley, Patterns of polyhedrons ,rev. ed یافت.

2. Louis Poinsot

می‌دهد که یك خط را می‌توان در بینهایت بسته انگاشت، و دو خط موازی را باید در بینهایت متقاطع تلقی کرد، و یك سهمی را می‌توان حالت حدی یك بیضی یا یك هذلولی تلقی کرد که یکی از کانونهای آن به بینهایت رفته است . این مفهوم را در ۱۸۲۲ مهندس فرانسوی پونسله به‌هنگامی که سعی داشت تا یك توجیه «حقیقی» در هندسه برای انگاریهایی پیدا کند که درسایر جاها در ریاضیات پیش می‌آیند، تا حد زیادی تعمیم داد.

نوشته‌های کپلر اغلب آمیزه‌ای است از اندیشه‌های عرفانی و بسیار تخیلی که با دریافت واقعاً ژرفی از حقایق علمی ترکیب شده است . جای تأسف است که زندگی شخصی او بر اثر شماری از پیشامدهای ناگوار زندگی تحمل‌ناپذیر شده بود. پسر دلبندش از آبله‌مرد، زنش دیوانه شد و درگذشت، مادرش به‌جادوگری و خود او به بدعت‌گذاری متهم شدند، و مقرری وی همیشه به‌تعویق می‌افتاد. بنا به‌روایتی بخت حتی با ازدواج دوم او کمتر از ازدواج اول یار بود، با آنکه از سر احتیاط محاسن و معایب یازده دختر را قبل از انتخاب اشتباه‌آمیزش به‌دقت سنجیده بود. وی مجبور شد تا بر درآمد خود از راه طالع‌بینی بیفزاید، و در ۱۶۳۰ در سفری به‌منظور دریافت حقوق مدتها به‌عقب افتاده‌اش دار فانی را وداع گفت.

۹ــ۸ دزارگ

در ۱۶۳۹، نه‌سال بعد از مرگ کپلر، در پاریس رساله‌ای فوق‌العاده ابتکاری در بارهٔ مقاطع مخروطی منتشر شد که چندان مورد توجه قرار نگرفت*. این رساله را ژرار دزارگ[1]، مهندس، معمار، و افسر سابق ارتش فرانسه نوشته بود که در لیون[2] در ۱۵۹۳ به‌دنیا آمد و در همان شهر در حدود سال ۱۶۶۲ درگذشت. این مقاله آن‌چنان مورد بی‌اعتنایی ریاضیدانان دیگر قرار گرفت که بزودی به‌دست فراموشی سپرده شد و همهٔ نسخ منتشرهٔ آن از بین رفت. دو قرن بعد، که مهندس فرانسوی میشل شال[3] (۱۷۹۳ــ۱۸۸۰) تاریخ هندسهٔ خود را که هنوز هم کتابی استانده است نوشت ، هیچ وسیله‌ای برای ارزیابی کار دزارگ در دست نبود . با این‌حال شش‌سال بعد، در ۱۸۴۵، شال به‌یك نسخهٔ دستنویس رسالهٔ وی، که فیلیپ دولاهیر (۱۶۴۰ــ۱۷۱۸) شاگرد دزارگ تهیه کرده بود، برخورد، و از آن پس این اثر به‌صورت یکی از آثار کلاسیك در بسط اولیهٔ هندسهٔ تصویری ترکیبی درآمده است.

دلایل متعددی را می‌توان در توضیح نادیده گرفته شدن بدوی مجلد کوچك دزارگ اقامه کرد . این کتاب تحت‌الشعاع هندسهٔ تحلیلی روانتری که دوسال پیش از آن دکارت پایه‌ریزی کرده بود، قرار گرفت. هندسه‌دانان عموماً نیروی خود را در راه بسط این وسیلهٔ پرقدرت جدید یا به‌کاربردن بینهایت کوچکها در هندسه صرف می‌نمودند. گذشته از آن دزارگ سبك نگارش نامساعد و غیرمعمولی داشت و در حدود ۷۰ اصطلاح جدید که بسیاری از آنها ریشهٔ گیاهشناسی پیچیده‌ای داشتند، به‌کار برده بود، که از میان آنها تنها یکی، یعنی

---

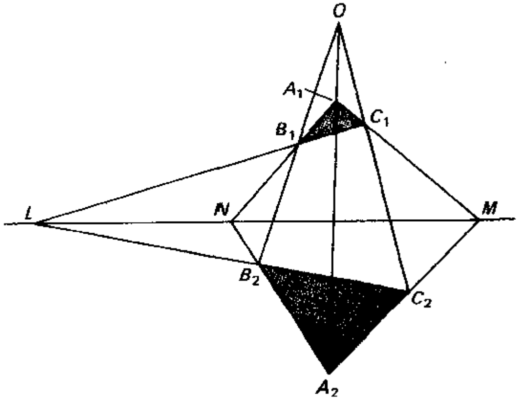
* Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan. (کوششی برای بحث در پیرامون موارد برخورد یك مخروط با یك صفحه.)

1. Gérard Desargues 2. Lyons 3. Michel Chasles

۱نولوسیون، به‌جا مانده است،وکاملاً عجیب آنکه، این‌یکی از آن جهت حفظ شد که‌بخشی از اصطلاحات‌فنی دزارگ‌بوده‌که منقد اثر وی‌جهت نقد واستهزای‌شدید انتخاب کرده‌بود.

دزارگ علاوه برآنچه‌که دربارهٔ مقاطع‌مخروطی نوشته،کتب دیگری نیز نگاشته‌که یکی ازآنها رساله‌ای است درباب اینکه چگونه می‌توان به کودکان خوب آوازخواندن راآموخت. اماکتاب کوچك وی دربارهٔ مقاطع‌مخروطی بودکه او را به‌عنوان عمده‌ترین نویسندهٔ قرن هفدهم در زمینهٔ هندسهٔ ترکیبی، متشخص می‌سازد. دراثر فوق با شروع از دکترین‌کپلر درباب پیوستگی، بسیاری ازقضایای اساسی در بارهٔ انولوسیون، تقسیمات توافقی، هومولوژی، قطب وقطبی، وپرسپکتیو‌ـمباحثی آشنا برای‌آنهاکه یکی‌از درسهای امروزی هندسهٔ تصویری راگرفته‌اندـ بسط داده شده است*. مطلب جالب‌آنکه مفهوم‌قطب وقطبی را می‌توان برای‌کره‌ها وبرخی سطوح درجه دوم تعمیم داد. احتمالاً دزارگ‌تنها ازوجود چند سطح درجه دوم اطلاع داشته و اغلب این سطوح احتمالاً تا شمارش کامل آنها توسط اویلر در ۱۷۴۸ ناشناخته بوده‌اند. در جای دیگری قضیهٔ اساسی دوـ مثلث دزارگ را می‌بینیم: اگر دومثلث، واقع دریك صفحه یا غیرواقع برآن، چنان قرارگرفته باشندکه خطوطی‌که رأسهای نظیر را به‌هم وصل می‌کنند متقارب باشند،آنگاه نقاط تلاقی زوج اضلاع متناظر هم‌خط‌اند، وبرعکس (نگاه‌کنید به‌شکل ۷۶).

دزارگ، درسنین بین سی‌وچهل و وقتی درپاریس می‌زیست، از طریق یك سلسله درسهای رایگان معاصرین خود را به‌طورقابل‌ملاحظه‌ای تحت تأثیر قرارداد. کارهای او موردتحسین دکارت قرار گرفت، وبلزپاسکال زمانی از دزارگ به‌عنوان منبع عمدهٔ الهام خود یادکرده است. لاهیر، بازحمت فراوان،کوشید تا نشان دهدکه کلیهٔ قضایای مقاطع‌ـ مخروطی‌آپولونیوس‌را می‌توان به‌وسیلهٔ روش تصویر مرکزی دزارگ از دایره استخراج



شکل ۷۶

* اینَ مطلب که‌برخی ازاین مفاهیم‌بر یونانیان باستان معلوم بوده است، درفصل ۶ خاطرنشان شده است.

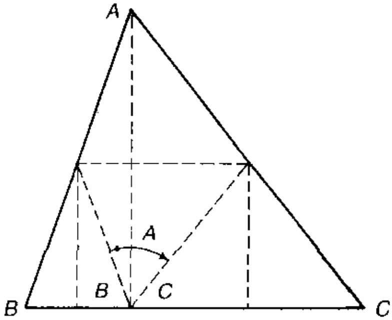
کرد. مع‌هذا علیرغم همهٔ اینها، هندسهٔ جدید در قرن هفدهم چندان نفوذی به‌دست نیاورد واین موضوع عملاً تا اوایل قرن نوزدهم، که توجه زیادی به آن مبذول شد و ریاضیدانانی مانند ژرگون، پونسله، بریانشون[1]، دوپن[2]، شال، واشتاینردرآن به‌پیشرفتهای بزرگی در آن نایل شدند، مسکوت ماند. گرچه انگیزهٔ دزارگ ممکن است نیازمعماران و طراحان به‌نظریهٔ پرسپکتیو بوده باشد، نویسندگان اخیراین موضوع را به خاطر زیبایی ذاتی آن مورد بسط قرار دادند.

۹ـ۹ پاسکال

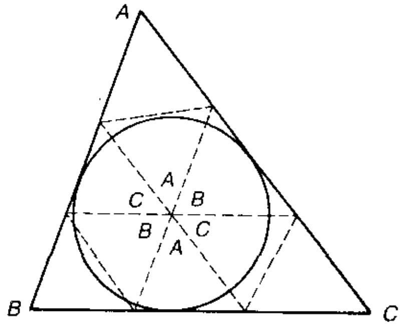
یکی ازمعدود معاصرین دزارگ که به اثر وی به‌دیدهٔ تحسین می‌نگریست، بلزپاسکال، یکی از نوابغ بلند پایهٔ ریاضی است. پاسکال در ۱۶۲۳ در ایالت فرانسوی اوورنی[3] متولد شد وخیلی زود توانایی شگفت‌انگیزی در ریاضیات ازخود نشان داد. داستانهای چندی از دستاوردهای دوران جوانی او را خواهرش ژیلبرتا[4]، که بعدها خانم پریه[5] شد، نقل کرده‌است. به‌علت ضعف جسمی، پسررا درخانه نگهداشتند تا ازتحلیل بنیه‌اش جلوگیری کنند. پدرش برآن شدکه تحصیلات فرزندش دربدو امر باید محدود به‌مطالعهٔ زبان شود وشامل ریاضیات نباشد. حذف ریاضیات از مطالعات او کنجکاوی پسر را برانگیخت، و وی ازمعلم سرخانهٔ خود دربارهٔ ماهیت هندسه استفسارکرد. معلمش به‌او گفت‌که هندسه، مطالعهٔ اشکال دقیقه وخواص اجزای مختلف آن است. توصیف معلمش از هندسه و دستور پدرش درنهی آن باعث تهییج اوشده از وقت بازی‌اش دست‌کشید وپنهانی، درعرض‌چند هفته، پیش خود بسیاری از خواص اشکال هندسی و بویژه این حقیقت را کـه مجموع زوایای مثلث‌یك نیم‌صفحه‌است، کشف کرد. دستاورد اخیربا عمل تاکردن یك مثلث‌کاغذی، شاید با تاکردن رئوس روی مرکز دایرهٔ محاطی، به‌طوری‌که در شکل۷۷ نشان داده‌شده، یا با تاکردن برپای ارتفاع آن، مطابق شکل ۷۸، حاصل‌شده‌بود. وقتی‌که پدرش روزی‌در جریان فعالیتهای‌هندسی‌اش به‌او برخورد، وی چنان ازتوانایی پسرش متأثرشدکه‌نسخه‌ای از اصول اقلیدس به‌وی داد وپسرجوان آن را با اشتیاق خواند وبسرعت برآن‌تسلط‌یافت.

درچهارده‌سالگی، پاسکال در گردهماییهای هفتگی گروهی از ریاضیدانان فرانسوی که سرانجام در ۱۶۶۶، آکادمی فرانسه از آن پدیدآمد، شرکت کرد. در شانزده‌سالگی مقاله‌ای دربارهٔ مقاطع مخروطی‌نوشت‌که دکارت باورنمی‌کرد اثرپاسکال باشد بلکه‌تصور می‌کردکه به پدر وی تعلق داشته باشد. درهجده یا نوزده سالگی اولین ماشین‌حساب را اختراع‌کرد واختراع آن بدان لحاظ بودکه پدرش‌را درممیزی‌حسابهای‌دولتی در روئن[6] یاری نماید. پاسکال بیش‌ازپنجاه ماشین‌حساب‌دیگر به‌وجودآوردکه برخی ازآنهاهمچنان در موزهٔ هنرها وپیشه‌ها[7] در پاریس نگهداری می‌شوند. در بیست‌ویك‌سالگی وی به کار

1. Brianchon 2. Dupin 3. Auvergne 4. Gilberta
5. Madame Périer 6. Rouen 7. Conservatoire des Arts et Métiers



شکل ۷۸



شکل ۷۷

توریچلی دربارهٔ فشارجوی علاقمند شد واستعدادهای خارق‌العادهٔ خود را درفیزیك به‌کار گرفت که نتیجهٔ آن این بود که اصل پاسکال در ئیدرودینامیك را امروزه هر دانش‌آموز دبیرستانی می‌داند. چندسال بعد، در ۱۶۴۸، وی دستنویس جامعی دربارهٔ مقاطع‌مخروطی نوشت که به‌چاپ نرسید.

این فعالیت اعجاب‌آور و پیشرس وی ناگهان در ۱۶۵۰ قطع شد. در این سال پاسکال، که ازضعف‌جسمانی در رنج‌بود، تصمیم‌گرفت از تحقیقات خود در ریاضیات وعلم دست‌بردارد وخود را وقف تأملات مذهبی نماید. ولی سه‌سال بعد به‌مدت‌کوتاهی به‌عالم ریاضیات بازگشت. دراین‌دوران مقالهٔ مثلث حسابی[1] خود را نوشت، آزمایشهای‌متعددی در بارهٔ فشار مایعات به عمل‌آورد و مکاتبه با فرما وی را در پی‌ریزی شالوده‌های نظریهٔ ریاضی احتمالات یاوری‌کرد. اما دراواخرسال ۱۶۵۴ آنچه راکه وی به‌دیدهٔ یك ندای

بلزپاسکال
(برادران براون)

1. Traité du triangle arithmétique

باطنی شدید مبنی بر ناخشنودی خداوند از تجدید فعالیتهایش بدان می‌نگریست، دریافت کرد. این ندای غیبی زمانی به‌او رسید که اسبهای رم‌کردهٔ کالسکهٔ حامل وی با دیوارهٔ پلی درنویی[1] تصادم کردند، وخود او فقط به‌دلیل پاره شدن معجزه‌آسای تسمه‌ها نجات یافت. از آن پس، مستظهر به‌نوشتهٔ این خاطره که برتکه پوستی آویخته بر سینه داشت، خود را به بازگشت به‌دامان تفکرات مذهبی موظف کرد.

تنها یك باردیگردر ۱۶۵۸، پاسکال به ریاضیات بازگشت. زمانی که به‌دندان‌درد مبتلا بود، چند اندیشهٔ هندسی به‌ذهن اوخطور کرد و دندان‌درد اوناگهان قطع شد. با تلقی این امر به‌نشانهٔ مشیت الهی، خاضعانه هم‌خود را به‌مدت ۸ روز شدیداً صرف بسط اندیشه‌های خودکرد وبدین‌ترتیب دراین زمان شرح نسبتاً کاملی از هندسهٔ منحنی سیکلوئید ارائه داد وتعدادی‌مسئله حل کرد که بعداً،وقتی به‌عنوان مسائل‌حریف آزمامطرح شدند، سایرریاضیدانان را دچار سردرگمی کرد. اثر مشهور نامه‌های ولایتی[2] و اندیشه‌ها[3]ی وی، که امروزه به‌عنوان الگویی برای ادبیات دوره‌های پیشین فرانسه‌خوانده‌می‌شوند، در اواخر زندگی کوتاه او به‌رشتهٔ تحریر درآمدند. درسال ۱۶۶۲ درسن ۳۹ سالگی درپاریس درگذشت.

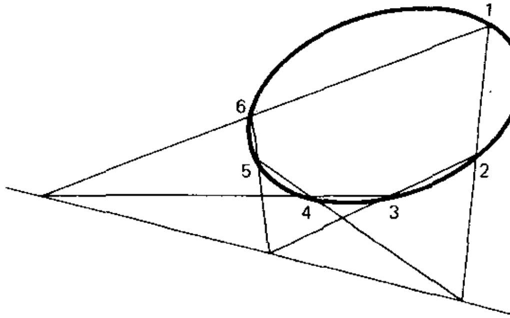
دراینجا اضافه‌می‌کنیم که پدروی، اتین پاسکال(۱۵۸۸–۱۶۴۰)نیزریاضیدان قابلی بود؛ لیماسون پاسکال به‌نام‌پدر اونامگذاری شده‌است(نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۷.۴ (ج)).

پاسکال را به‌عنوان یکی ازبزرگترین «چه‌ها که نمی‌شد»[4] ها درتاریخ ریاضیات برشمرده‌اند. باآن‌همه استعدادهای‌خارق‌العاده وآن‌همه‌شهود هندسی‌عمیق وی می‌توانست، تحت شرایط مساعدتری، آثارخیلی بیشتری خلق نماید. اما وضع جسمانی اوچنان بود که درقسمت عمدهٔ زندگی خود دچار دردهای جسمانی بود، واز عنفوان جوانی ازعذابهای روحی ناشی ازتخیلات مذهبی نیز در رنج بود.

دستنوشتهٔ پاسکال در بارهٔ مقاطع مخروطی مبتنی بر اثر دزارگ بود واکنون مفقود شده است، ولی دکارت و لایبنیتزآن را دیده‌اند. دراین اثرقضیهٔ مشهور **هگزاگرام‌رمزی**[5] پاسکال در هندسهٔ تصویری ظاهر گردید: اگر یك شش ضلعی در یك مقطع مخروطی محاط باشد، نقاط تلاقی سه‌زوج اضلاع متقابل آن همخط هستند، و بالعکس (نگاه‌کنید به‌شکل ۷۹). وی احتمالاً قضیه را، به‌سبك دزارگ، ابتدا با اثبات صحت آن برای یك دایره وسپس درمورد هرمقطع مخروطی به‌کمك تصویرکردن ثابت‌کرده است. گرچه‌این قضیه یکی از پربارترین قضایای موجود در تمامی هندسهٔ تصویری است (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲.۹)، احتمالاً نباید این داستان بارها گفته شده را که خود پاسکال متجاوز از ۴۰۰ نتیجه ازآن استخراج کرده، جدی بگیریم. این دستنوشته هرگزچاپ‌نشد، واحتمالاً هیچگاه کامل نگردید، ولی درسال ۱۶۴۰ پاسکال یك اعلامیهٔ تك‌صفحه‌ای، تحت عنوان مقاله‌ای دربارهٔ مقاطع‌مخروطی[6] چاپ‌وبعضی ازکشفیات خود را درآن اعلام‌نمود. تنها از وجود دونسخه ازاین جزوهٔ مشهوراطلاع در دست است، یکی درهانوور[7] درمیان

---

1. Neuilly 2. Provincial Letters 3. Pensées
4. might-have-been 5. mystic hexagram
6. Essay pour les coniques 7. Hanover



شکل ۷۹

مقالات لایبنیتز، ودیگری درکتابخانهٔ ملی[1] در پاریس. قضیهٔ « هگزاگرام رمزی » پاسکال درلم سوم این جزوه گنجانده شده‌است.

رسالهٔ مثلث حسابی پاسکال درسال ۱۶۵۳ نوشته شدولی‌تا سال ۱۶۶۵ چاپ‌نشد. وی «مثلث حسابی» خود را به‌صورتی‌که در شکل ۸۰ نشان داده شده، ساخت . هر عضو (درسطردوم یا یکی ازسطوربعدی) به‌صورت مجموع آن اعضایی ازسطرماقبل است که در بالا وسمت چپ عضو مورد نظر، قراردارند. مثلا، درسطرچهارم،

۳۵ = ۱۵ + ۱۰ + ۶ + ۳ + ۱.

این مثلث، که می‌تواند دارای هرمرتبه‌ای باشد، با رسم قطری به‌صورتی‌که درشکل نشان داده شده، به‌دست می‌آید . دانشجویان جبر مقدماتی تشخیص خواهند دادکه اعداد واقع برچنان قطری ضرایب متوالی در بسط دوجمله‌ای هستند. مثلاً ، اعداد واقع برقطر پنجم، یعنی ۱، ۴، ۶، ۴، ۱، ضرایب متوالی در بسط $(a+b)^4$اند . پیدا کردن ضرایب دوجمله‌ای یکی ازمواردی بودکه پاسکال مثلث خود را برای‌آن به‌کار گرفت. وی‌همچنین آن را، بخصوص دربحثهایش راجع به‌احتمال، برای پیداکردن تعداد ترکیبهای n شیء

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.	.	.	.	.	.	...

شکل ۸۰

1. Bibliotheque Nationale

r به r به‌کار برد (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۳.۹ (ز))، که مقدار آن را بدرستی

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

اعلام کرد که در آن $n!$ نماد امروزی * ما برای حاصلضرب

$$n(n-۱)(n-۲)\cdots(۳)(۲)(۱)$$

است. روابط زیادی متضمن اعداد مثلث حسابی وجود دارند، که چندتای آنها را پاسکال پیدا کرده است (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۳.۹). پاسکال خالق مثلث حسابی نبود، زیرا چنان آرایه‌ای را چندین قرن جلوتر نویسندگان چینی عنوان کرده بودند (نگاه کنید به‌بخش ۷ ــ ۳). به‌خاطر بسط چندین خاصیت مثلث و به‌دلیل کاربردهایی که پاسکال ازاین خواص به‌عمل آورده، این آرایه به‌نام **مثلث پاسکال** شناخته می‌شود. در رسالهٔ پاسکال راجع به‌این‌مثلث یکی از قدیمیترین احکام قابل‌قبول‌روش‌استقرای ریاضی به‌چشم‌می‌خورد.

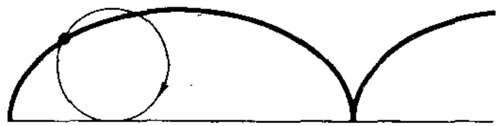
گرچه فلاسفهٔ یونانی‌عهدکهن بتفصیل درضرورت وامکان به‌بحث پرداخته‌اند، شاید گفتن این مطلب صحیح باشد که هیچگونه مطالعهٔ ریاضی در بارهٔ احتمال تا اواخر قرن پانزدهم و اوایل قرن شانزدهم به‌عمل نیامده بود، که در این زمان ریاضیدانان ایتالیایی دست به‌محاسبهٔ بختها در بعضی‌بازیهای قمار، مانند بختهای تاس، زدند. کاردان، همچنانکه دربخش ۸ــ۸ متذکرشدیم، راهنمای کوتاهی برای قمار نوشت که ضمن آن بعضی جنبه‌های احتمال ریاضی آمده است. اما عقیدهٔ کلی براین است که تنها یك مسئله هست که می‌توان آن را منشأ علم احتمال دانست و آن مسئلهٔ موسوم به **مسئلهٔ امتیازها**[1]ست. در این مسئله چگونگی تقسیم جایزهٔ یك بازی شانسی نیمه‌تمام بین‌دوبازیکن فرضی همقدرت، بادانستن امتیازهای دو بازیکن درموقع قطع بازی‌وتعداد امتیازهای لازم برای بردن بازی، خواسته می‌شود. پاچولی، درسومای خود به سال ۱۴۹۴، یکی ازاولین نویسندگانی بود که مسئلهٔ امتیازها را دراثری دربارهٔ ریاضیات مطرح کرد. این مسئله راکاردان وتارتاگلیا نیزمورد بحث قرارداده بودند. اما پیشرفت واقعی تا زمان مطرح شدن آن، در سال ۱۶۵۴، نزد پاسکال، توسط شوالیه دومره[2]، قمارباز توانا ومجربی که استدلال نظری او راجع به این مسئله با مشاهدات او تطبیق نمی‌کرد، صورت نگرفت. پاسکال به‌این مسئله علاقمند شد و طــی مراسله‌ای آن را به‌اطلاع فرما رساند. متعاقب این کار مکاتبات ارزنده‌ای بین این دومرد** شروع شد، که درطی آن هر یك از آنها مسئله را به‌طور صحیح ولی از دو راه

---

* نماد $n!$، که n فاکتوریل نامیده می‌شود، درسال ۱۸۰۸ توسط کریستین کرامپ [Christian Kramp] (۱۷۶۰ــ۱۸۲۶) ازاهالی استراسبورگ معرفی‌شد، که او این نماد را ازآن جهت انتخاب کرد که ازمشکلات چاپی ناشی‌ازکاربرد نماد قبلی جلوگیری کند. برای‌هماهنگی‌تعریف می‌کنیم $0!=1$

1. problem of the points 2. Chevalier de Méré

** این مکاتبات در D.E.Smith, A Source Book in Mathematics ظاهرمی‌شوند.



شکل ۸۱

متفاوت حل کردند. پاسکال حالت کلی مسئله را حل کرد و با استفاده از مثلث حسابی، نتایج متعددی به‌دست آورد. بنابراین چنین شد که پاسکال و فرما در مکاتبات خود شالودهٔ علم احتمال را پی ریختند.

آخرین کار ریاضی پاسکال اثری دربارهٔ **سیکلوئید** است، منحنیی که توسط نقطه‌ای واقع بر محیط یك دایره، هنگامی که دایره روی خط مستقیمی بدون اصطکاك می‌غلطد، رسم می‌شود (نگاه کنید به‌شکل ۸۱). این منحنی که خواص ریاضی و فیزیکی فراوانی دارد، نقش مهمی در بسط اولیهٔ روشهای حسابان بازی کرد. گالیله از اولین کسانی بود که به منحنی توجه کرد و زمانی توصیه کرد که آن را برای طاق پلها به‌کار برند. مدت زیادی طول نکشید که مساحت زیر یکی از طاقهای منحنی پیدا شد، و روشهایی برای رسم مماس بر منحنی کشف شدند. این اکتشافات ریاضیدانان را به بررسی مسائل مربوط به‌سطح وحجم دوارحاصل از دوران یك قوس سیکلوئیدی حول خطوط مختلف هدایت کرد. این گونه مسائل، و نیز مسائل دیگری راجع به‌مراکز هندسی اشکال حاصل، توسط پاسکال حل شدند، و بعضی از این نتایج را وی به‌عنوان مسائل حریف آزمایی برای دیگر ریاضیدانان منتشر کرد. راه‌حلهای پاسکال تحت تأثیر روش تقسیم‌ناپذیرهای مقدم برحسابان قرار گرفتند و معادل با محاسبهٔ تعدادی انتگرال معین بودند که در دروس حسابان امروزی پیش می‌آیند. سیکلوئید به قدری خواص جالب دارد، و چنان اختلافاتی پدید آورده است که آن را «هلن هندسه[1]» و «سیب نفاق[2]» نامیده‌اند.

پاسکال گاهی نوشته‌های خود را با نام مستعار لوئی دومونتال[3] یا آناگرام[4] [کلمه‌ای که از تغییر ترتیب حروف یك کلمه به‌دست می‌آید] آن، آمودتونویل[5] منتشر می‌کرد.

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۹ لگاریتمها

(الف) با استفاده از قواعد آشنای نماها، خواص مفید زیرین را برای لگاریتمها ثابت کنید:

---

1. the Helen of geometry 2. the apple of discord

[مطابق افسانه‌های یونانی، سیبی از طلا که جملهٔ «تقدیم به زیباترین» برآن نقش بسته بودو Athena، Hera، و Aphrodite مدعی آن بودند. این سیب توسط Paris به Aphrodite اهدا شد؛ درمقابل وی به paris در ربودن هلن یاوری کرد و بدین ترتیب جنگ تروا شروع شد.]

3. Lovis de Montalte 4. anagram 5. Amos Dettonville

۱. $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

۲. $\log_a(m/n) = \log_a m - \log_a n$

۳. $\log_a(m^r) = r \log_a m$

۴. $\log_a \sqrt[s]{m} = (\log_a m)/s$

(ب) نشان دهید که

۱. $\log_b N = \log_a N/\log_a b$ (با این فرمول می‌توانیم لگاریتم در پایهٔ b را، وقتی‌که یك جدول لگاریتم درمبنای a دراختیار داشته‌باشیم، حساب کنیم).

۲. $\log_N b = ۱/\log_b N$

۳. $\log_N b = \log_{۱/N}(۱/b)$

ج) از گرفتن جذر ۱۰، سپس جذر نتیجهٔ به‌دست آمده، و ادامهٔ این عمل به همین قیاس، می‌توان جدول زیر را ساخت:

$۱۰^{۱/۲} = ۳٫۱۶۲۲۸$	$۱۰^{۱/۲۵۶} = ۱٫۰۰۹۰۴$
$۱۰^{۱/۴} = ۱٫۷۷۸۲۸$	$۱۰^{۱/۵۱۲} = ۱٫۰۰۴۵۱$
$۱۰^{۱/۸} = ۱٫۳۳۳۵۲$	$۱۰^{۱/۱۰۲۴} = ۱٫۰۰۲۲۵$
$۱۰^{۱/۱۶} = ۱٫۱۵۴۷۸$	$۱۰^{۱/۲۰۴۸} = ۱٫۰۰۱۱۲$
$۱۰^{۱/۳۲} = ۱٫۰۷۴۶۱$	$۱۰^{۱/۴۰۹۶} = ۱٫۰۰۰۵۶$
$۱۰^{۱/۶۴} = ۱٫۰۳۶۶۳$	$۱۰^{۱/۸۱۹۲} = ۱٫۰۰۰۲۸$
$۱۰^{۱/۱۲۸} = ۱٫۰۱۸۱۵$	. . . .

با این جدول، می‌توانیم لگاریتم طبیعی‌هرعدد بین ۱ و ۱۰، وبدین‌ترتیب با جرح وتعدیل مفسر، لگاریتم هرعدد مثبت‌دلخواه راحساب کنیم. مثلاً، فرض کنید N عدد دلخواهی بین ۱ و ۱۰ باشد. N را بر بزرگترین عدد موجود درجدول که از N بزرگتر نیست، تقسیم کنید. فرض کنید که مقسوم‌علیه $۱۰^{۱/p_۱}$ و خارج‌قسمت $N_۱$ باشد. در این‌صورت $N = ۱۰^{۱/p_۱} N_۱$. با $N_۱$ به‌همین‌روال عمل کنید، وفرایند را ادامه دهید، تا

$$N = ۱۰^{۱/p_۱} ۱۰^{۱/p_۲} \dots ۱۰^{۱/p_n} N_n$$

به‌دست آید. فرض کنید که عمل‌را زمانی‌متوقف کنیم که تفاوت N_n و ۱، کسری باپیکرهای معنی‌دارفقط از رقم ششم اعشاری به‌بعد،باشد. دراین صورت، تا پنج پیکراعشاری‌داریم،

$$N = ۱۰^{۱/p_۱} ۱۰^{۱/p_۲} \dots ۱۰^{۱/p_n}$$

و

$$\log N = \frac{۱}{p_۱} + \frac{۱}{p_۲} + \dots + \frac{۱}{p_n}.$$

این شیوه به **روش ریشه‌ها** برای‌محاسبهٔ لگاریتمها موسوم است. $\log ۴٫۲۶$ و $\log ۵٫۰۰$

را با این شیوه حساب کنید.

۲.۹ نپر و مثلثات کروی

(الف) ده‌فرمول موجودند که درحل مثلثهای قائم‌الزاویهٔ کروی مفیدند. نیازی به حفظ کردن این فرمولها نیست، زیرا به‌دست آوردن مجدد آنها به کمك دوقاعده‌ای که نپر وضع کرده، آسان است. در شکل ۸۲ یك مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی رسم و به‌روال معمول حرف گذاری شده است. درطرف راست مثلث دایره‌ای دیده می‌شود که به‌پنج قسمت تقسیم شده وشامل همان حروف مثلث بجزحرف C است و به‌همان ترتیب نیز مرتب شده است. پاره‌خطهای کوتاه روی c ، B ، A به معنی متمم است (مثلاً $\bar{B}$ به‌معنی $90° - B$ است). کمیتهای زاویه‌ای a، b، $\bar{c}$ ، $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ **اجزاء مستدیر** نامیده می‌شوند. دراین دایره هر جزء مفروض با دوجزء مستدیر همجوار وبا دوجزء دیگرغیرهمجواراست. این جزء مفروض را **جزء میانی**، اجزاء همجـوار را **اجزاء مجاور**، و دو جزء غیرهمجوار را **اجزاء مقابل** می‌نامیم. قواعد نپر رامی‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

۱. سینوس هرجزء میانی با حاصلضرب کسینوسهای دوجزء مقابل برابراست.

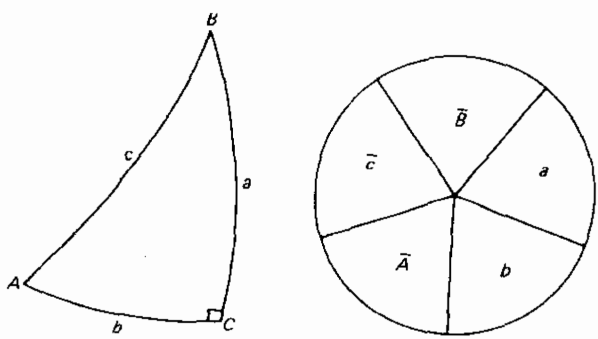
۲. سینوس هرجزء میانی با حاصلضرب تانژانتهای دوجزء مجاور برابر است.

با به‌کاربردن هریك ازاین قواعد درمورد هر یك از اجزاء مستدیر ده فرمول مورد استفاده درحل مثلثهای کروی قائم‌الزاویه را به‌دست آورید.

(ب) فرمولی که‌اضلاع a، b، c ازیك‌مثلث قائم‌الزاویهٔ‌کروی رابه‌هم ربط‌می‌دهد، **رابطهٔ فیثاغورسی** برای این مثلث نامیده می‌شود.

(ج) فرمولهای زیربه **نسبتهای نپر** مشهورند:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c},$$



شکل ۸۲

$$\frac{\cos\frac{۱}{۲}(A-B)}{\cos\frac{۱}{۲}(A+B)}=\frac{\tan\frac{۱}{۲}(a+b)}{\tan\frac{۱}{۲}c},$$

$$\frac{\sin\frac{۱}{۲}(a-b)}{\sin\frac{۱}{۲}(a+b)}=\frac{\tan\frac{۱}{۲}(A-B)}{\cot\frac{۱}{۲}C},$$

$$\frac{\cos\frac{۱}{۲}(a-b)}{\cos\frac{۱}{۲}(a+b)}=\frac{\tan\frac{۱}{۲}(A+B)}{\cot\frac{۱}{۲}C},$$

این فرمولها را، که مشابه قانون تانژانتها در هندسهٔ مسطحه‌اند، می‌توان برای حل مثلثهای غیر قائم‌الزاویه‌ای که اجزاء معلوم درآنها دوضلع و زاویهٔ بین آنها، یا دو زاویه و ضلع بین آنهاست، به‌کار برد.

۱. A، C، b را برای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که درآن $a=۱۲۵°۳۸'$، $c=۷۳°۲۴'$، و $B=۱۰۲°۱۶'$، پیدا کنید.

۲. A، B، c را برای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که درآن $a=۹۳°۸'$، $b=۴۶°۴'$، $C=۷۱°۶'$، پیدا کنید.

۳.۹ میله‌های نپر

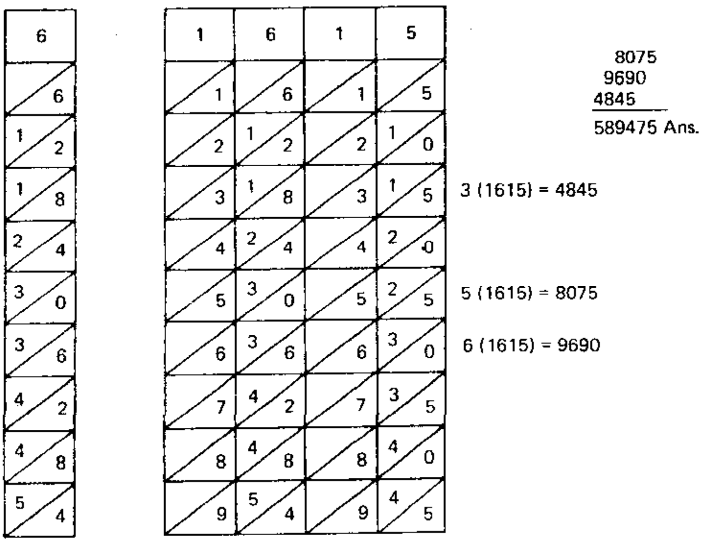
مشکلی که درضرب اعداد بزرگ به‌طور گسترده پیش می‌آمد، منجر به‌پیدایش طریقه‌های مکانیکی برای انجام این فرایند گردید. اختراع نپر، مشهور به **میله‌های نپر** یا **استخوانهای نپر** در زمان خود بسیار معروف بود، و توسط کاشف آن در اثری به‌نام مطالعهٔ چوبهای معجزه آسا[1]، منتشره در ۱۶۱۷، تشریح شد. این اختراع اصولاً همان روش شبکه، یا مشبکهٔ اعراب است که در بخش ۷-۵ توصیف کردیم، بجز آنکه دراین اختراع، این فرایند به کمك نوارهای مستطیلی استخوانی، فلزی، چوبی، یا مقوایی، که ازقبل آماده شده، انجام می‌شود. برای هریك از ارقام دهگانه، باید نوارهایی نظیر آنچه که در سمت چپ شکل ۸۳ برای

1. Rabdologiae

۶ نشان داده شده، دراختیارداشت که مضارب مختلف آن رقم را برخود داشته باشد. برای توصیف نحوهٔ استفاده ازاین‌نوارها درعمل‌ضرب، مثالی را که نپردر چوبهای معجزه‌آسا انتخاب کرده، یعنی ضرب ۱۶۱۵ در ۳۶۵ را برمی گزینیم. نوارهایی راکه درصدرآنها اعداد ۱، ۶، ۱، ۵ نوشته شده‌اند، به‌صورتی که درطرف راست شکل ۸۳ نشان داده شده کنارهم قراردهید. نتایج ضرب ۱۶۱۵ درارقام ۵، ۶، و ۳ ازعدد ۳۶۵ رادراین‌صورت می‌توان بآسانی به‌صورت ۸۰۷۵، ۹۶۹۰، و ۴۸۴۵ پیداکرد، تنها چند عمل جمع قطری سادهٔ دو رقم برای به‌دست آوردن این‌نتایج لازم‌اند. نتیجهٔ نهایی، بدان‌گونه که درشکل نشان داده شده، بایك عمل جمع حاصل می‌شود.

(الف) مجموعه‌ای از میله‌های نپر ساخته‌وچند عمل ضرب انجام دهید.

(ب) توضیح دهیدکه چگونه می‌توان از میله‌های نپر درتقسیم استفاده کرد.



شکل ۸۳

۴.۹ خط‌کش محاسبه

(الف) به‌کمك جداول، یك مقیاس لگاریتمی، تقریباً به‌طول ۱۰ اینچ به‌نام مقیاس D بسازید. از این مقیاس، همراه بایك جفت مقسم، برای انجام چند عمل ضرب و تقسیم استفاده کنید.

(ب) دومقیاس لگاریتمی، که مقیاسهای C و D نامیده خواهندشد، بااندازهٔمساوی بسازید. بالغزاندن C درامتداد D چند عمل ضرب و تقسیم انجام دهید (جهت راهنمایی رجوع کنید به‌قواعد لگاریتم (مطالعهٔ مسئله‌ای ۹.۱)).

(ج) یك مقیاس لگاریتمی با طولی برابر نصف مقیاس D ، مذکور دربالابسازید و

دوتا ازاین مقیاسهای کوتاه را که انتها به‌انتهای هم قرارداده شوند، A بنامید. نشان‌دهید که چگونه می‌توان از مقیاسهای A و D برای استخراج جذر استفاده کرد.

(د) چگونه می‌توان مقیاسی طراحی کرد کـه همراه با مقیاس D برای استخراج کعب به‌کار رود؟

(ه) مقیاسی درست نظیر مقیاسهای C و D در دو جهت مختلف بسازید، و آن را مقیاس CI (عکس C) بنامید. نشان دهیدکه چگونه می‌توان از مقیاسهای CI و D برای انجام عمل ضرب استفاده کرد. مزیت مقیاسهای CI و D بر مقیاسهای C و D برای این منظور چیست؟

۵.۹ سقوط آزاد اجسام

با فرض اینکه همهٔ اجسام باشتاب ثابت یکسان g سقوط می‌کنند، گالیله نشان‌دادکه فاصلهٔ dی سقوط یك جسم، با مربع زمان‌سقوط tی آن متناسب است. مراحل‌زیرین در استدلال گالیله را ثابت کنید.

(الف) اگر v سرعت سقوط درپایان زمان t باشد، آنگاه $v = gt$.

(ب) اگر v و t مربوط به‌یك جسم درحال سقوط و V و T مربوط به‌جسم در حال سقوط دیگری‌باشند، آنگاه $v/V = t/T$، ودر نتیجه مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌که طول‌ساقهایش ازلحاظ عددی برابر v و t است بامثلث قائم‌الزاویه‌ای‌که طول ساقهایش ازلحاظ عددی برابر V و T است، متشابه است.

(ج) چون سرعت بـه‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد، سرعت متوسط سقوط $v/۲$ است، در نتیجه $d = vt/۲ =$ مساحت مثلث قائم‌الزاویه با ساقهای v و t.

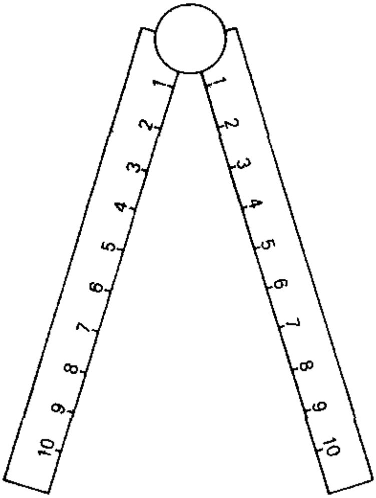
(د) $d/D = t^۲/T^۲$. همچنین نشان دهیدکه $d = gt^۲/۲$.

گالیله درستی این قانون آخری را با مشاهدهٔ زمانهای پایین آمدن اجسامی کـه برروی صفحه‌های شیب‌دار لغزانده می‌شوند، نشان داد.

۶.۹ پرگار تقسیم

درحدود ۱۵۷۹، گالیله **پرگار تقسیم** را تکمیل‌کرد؛ ابزاری‌که متجاوز از دوقرن به‌میزان زیادی مورد استقبال عامه بود. این ابزار متشکل از دو بازو است که در یك انتها توسط یك مفصل لولایی، به‌صورتی‌که درشکل۸۴ نشان داده شده، به‌هم متصل شده‌اند. در روی هر بازو مقیاس‌ساده‌ای که درجه‌بندی‌آن ازلولا شروع شده وصفرمقیاس برروی لولاست، قرار دارد. علاوه براین دومقیاس ساده، اغلب مقیاسهای دیگری به‌کار رفته‌اند که بعضی از آنها در زیر توصیف می‌شوند. مسائل زیادی را می‌توان بـلافاصله با استفاده از این مقیاسهای پرگار حل کرد، تنها نظریهٔ مثلثهای متشابه مورد نیاز است.

(الف) نشان دهیدکه چگونه پرگارتقسیم را می‌توان برای تقسیم پاره‌خط مفروضی



شکل ۸۴

به‌پنج قسمت مساوی به‌کار برد.

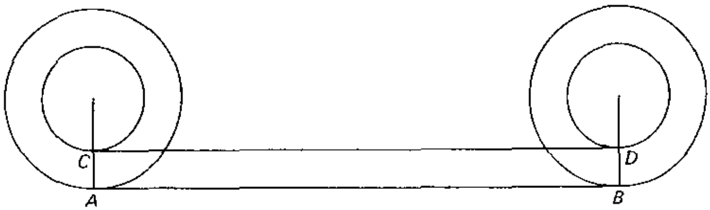
(ب) نشان دهید که چگونه پرگار تقسیم را می‌توان برای تغییر مقیاس در یك ترسیم به‌کار برد.

(ج) نشان دهید که چگونه می‌توان پرگارتقسیم رابرای یافتن جزء چهارم تناسب، x، بین سه مقدارمعلوم a، b، c (یعنی یافتن x به‌طوری‌که $a:b=c:x$) به‌کاربرد وازآنجا آن را درمسائل مربوط به‌تسعیرمورد استفاده قرار داد.

(د) گالیله استفاده ازپرگارتقسیم خود راازراه پیداکردن مقدار پولی که می‌بایست ۵سال پیش‌بانرخ ۶ درصد بهرهٔ سالانه به‌بهرهٔ مرکب گذاشته می‌شد تادرزمان موردبحث ۱۵۰ اسکودی شود، شرح داد. سعی‌کنید این مسئله را با پرگار تقسیم حل کنید.

ازجملهٔ مقیاسهای دیگری‌که اغلب بربازوهای پرگار تقسیم ظاهر می‌شدند، مقیاسی بود (خط مساحتها) که مطابق مربعهای اعداد مضبوطه درجه‌بندی می‌شد، وبرای پیداکردن مجذور و ریشهٔ دوم اعداد به‌کار می‌رفت. مقیاس دیگر(خط حجمها) مقیاسی بودکه مطابق با مکعبات اعداد مضبوطه درجه‌بندی می‌شد. مقیاس دیگری هم بود که وتر کمانهایی با درجات معین را برای دایره‌ای به‌شعاع واحد می‌داد، و مهندسین از آن بـه‌عنوان نقاله استفاده‌می‌کردند. مقیاس دیگری هم‌بود (به‌نام مقیاس فلزات) که شامل علایم رایج‌برای فلزات درقرون وسطی برای طلا، نقره، آهن، مس، وغیره بودکه مطابق باچگالیهای این فلزات فاصله‌بندی شده بودند و برای حل مسائلی از قبیل پیدا کردن قطر کره‌ای آهنین هموزن باکره‌ای مسین به‌کار می‌رفت.

دقت پرگار تقسیم نه به اندازهٔ دقت خط‌کش محاسبه است و نـه کار کردن با آن به‌سادگی کارکردن باخط‌کش محاسبه است.



شکل ۸۵

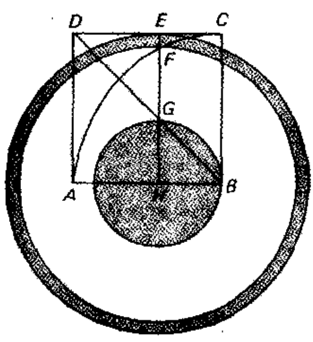
۷.۹ چند پارادوکس ساده از «محاوره دربارهٔ دو علم جدید» گالیله

دوپارادوکس هندسی زیر را که گالیله در اثر محاورهٔ خود به‌سال ۱۶۳۸ مورد بررسی قرار داده، توضیح دهید.

(الف) فرض کنید دایرهٔ بزرگ در شکل ۸۵ ضمن غلتیدن برخط مستقیمی از A تا B یك‌بار به‌دور خود چرخیده باشد، به‌طوری که AB برابر با محیط دایرهٔ بزرگ باشد. در این صورت دایرهٔ کوچك نیز، که بر روی دایرهٔ بزرگ نصب شده است، یك چرخش کامل به‌دور خود انجام داده است، به‌طوری که CD برابر با محیط دایرهٔ کوچك است. نتیجه می‌شود که دو دایره محیطهای برابر دارند!

این پارادوکس را قبلا ارسطو تشریح کرده بود، وازاین‌رو گاهی به‌آن **چرخ ارسطو**[1] اطلاق می‌شود.

(ب) فرض کنید $ABCD$ یك مربع و HE خط دلخواهی موازی با BC باشد که قطر BD را، همچنانکه درشکل ۸۶ نشان داده شده است، در G قطع می‌کند. فرض کنید دایرهٔ $B(C)$، HE را در F قطع کند، و سه دایرهٔ $H(G)$، $H(F)$، $H(E)$ را رسم کنید. ابتدا نشان دهیدکه مساحت دایرهٔ $H(G)$ برابر مساحت حلقهٔ بین دایره‌های $H(F)$ و $H(E)$ است. سپس H را به B میل دهید به طوری که، در حد، دایرهٔ $H(G)$ به‌نقطهٔ B بدل شود وحلقه مبدل به‌محیط $B(C)$ گردد. حال نتیجه می گیریم که نقطهٔ تنهای B برابر با همهٔ محیط $B(C)$ است!



شکل ۸۶

1. Aristotle's Wheel

(ج) این نکته در محاوره را که «عدهٔ مربعات ازعدهٔ کل اعداد کمتر نیست و عدهٔ کل اعداد کمتر ازعدهٔ مربعات نیست»، توضیح دهید.

۸۰۹ قوانین کپلر

(الف) وقتی‌ستاره‌ای بیشترین‌سرعت‌خودرا داراست درکجای‌مدارخود واقع‌است؟

(ب) قانون سوم کپلر را بااستفاده ازشکلهای امروزی زیر به‌طور تقریبی تحقیق کنید. (.A.U علامت اختصاری «**واحد نجومی**»، طول نیم‌قطر اطول مدارزمین است.)

سیاره	زمان برحسب‌سال	نیم قطر اطول
عطارد	۰٫۲۴۱	۰٫۳۸۷ A.U.
زهره	۰٫۶۱۵	۰٫۷۲۳ A.U.
زمین	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰ A.U.
مریخ	۱٫۸۸۱	۱٫۵۲۴ A.U.
مشتری	۱۱٫۸۶۲	۵٫۲۰۲ A.U.
کیوان	۲۹٫۴۵۷	۹٫۵۳۹ A.U.

(ج) دورهٔ گردش سیاره‌ای که دارای نیم‌قطر اطول .A.U ۱۰۰ است، چقدراست؟

(د) نیم قطر سیاره‌ای که دورهٔ گردش آن ۱۲۵ سال است، چقدر است؟

(ه) دوسیارهٔ فرضی‌حول خورشید درمدارات بیضوی با نیم‌قطرهای اطول‌یکسان حرکت می‌کنند. بااین‌حال نیم قطراقصریکی نصف دیگری است. دوره‌های گردش‌سیاره‌ها درمقایسه باهم چیست؟

(و) ماه در ۲۷٫۳ روز در یك مدار بیضوی بانیم قطر اطولی که ۶۰ برابر شعاع کرهٔ زمین است، یکبار حول کرهٔ زمین گردش می‌کند. دورهٔ یك ماهوارهٔ فرضی که خیلی نزدیك به‌سطح زمین در حال گردش است، چه خواهد بود؟

۹۰۹ موزائیکها

یك مسئلهٔ بسیار جالب موزائیکها، پوشاندن صفحه بـا چندضلعیهای منتظم مساوی است. فرض‌کنید که n عدهٔ اضلاع یك‌چنین چندضلعی باشد. دراین‌صورت زاویهٔ داخلی در هر رأس این چندضلعی $(n-۲)\ ۱۸۰^\circ/n$ است. این حکم را ثابت‌کنید.

(الف) اگر نگذاریم که رأسی‌از یك چندضلعی برضلع دیگری قرار گیرد، نشان‌دهید

که عدهٔ چندضلعیها در هررأس با $(n-۲)/۴+۲$ داده می‌شود، وبنابراین باید n مساوی ۳ یا ۴ یا ۶ باشد. ازجنبهٔ مثال موزائیکهایی بسازید.

(ب) اگر مصر باشیم کـه رأسی از یك چندضلعی برضلعی از دیگری قرار گیرد، نشان‌دهید که عدهٔ چندضلعیهایی که در چنین رأسی مجتمع می‌شوند با $(n-۲)/۲+۱$ داده می‌شود، و بنابراین باید n مساوی ۳ یا ۴ باشد. ازجنبهٔ مثال موزائیکهایی بسازید.

(ج) موزائیکهایی شامل موارد زیرین بسازید : (۱) مثلثهای متساوی‌الاضلاع بـا دو اندازهٔ مختلف، که هرضلع مثلث بزرگتر دوبرابر ضلع مثلث کوچکتر باشد و به‌طوری که اضلاع مثلثهای هم‌اندازه برروی هم نیفتند؛ (۲) مربعهایی با دواندازهٔ مختلف ، کـه ضلع مربع بزرگتر دوبرابر ضلع مـربع کوچکتر باشد و به‌طوری کـه اضلاع مربعهای کوچکتر برروی‌هم نیفتند؛ (۳) مثلثهای متساوی‌الاضـلاع مساوی و دوازده‌ضلعیهای منتظم مساوی؛ (۴) مثلثهای متساوی‌الاضلاع مساوی و شش‌ضلعیهای منتظم مساوی؛ (۵) مربعهای مساوی و هشت‌ضلعیهای منتظم مساوی.

(د) فرض‌کنید موزائیکی مرکب‌ازچندضلعیهای منتظم‌از سه‌نوع مختلف درهررأس داشته باشیم. اگر این سه‌نوع چندضلعی بترتیب p ، q ، r ضلع داشته‌باشند، نشان‌دهید که

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{r}=\frac{۱}{۲}\,.$$

یك جواب صحیح این معادله $p=۴$ ، $q=۶$ ، $r=۱۲$ است. موزائیکی از نوع مورد بحث، مرکب از مربعهای مساوی، شش ضلعیهای منتظم مساوی ، و دوازده ضلعیهای منتظم مساوی بسازید.

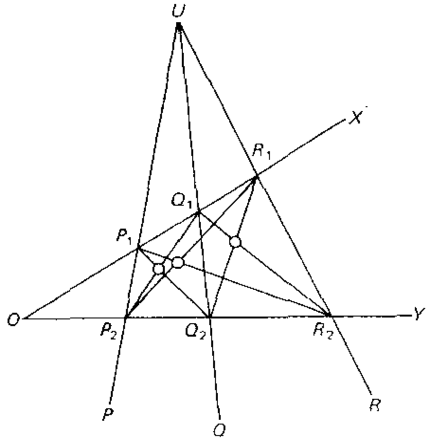
۹ـ۱۰ اثبات قضایا از طریق عمل تصویر

(الف) اگر l خط مفروضی درصفحهٔ مفروض π و O مرکـز مفروض تصویر (غیر واقع بر π) باشد، نشان دهیدکه چگونه می‌توان صفحه‌ای مانند π' پیدا کرد به‌طوری‌که تصویر l بر روی π' خط واقع دربینهایت π' باشد. (عمل انتخاب مرکز مناسبی بـرای تصویر و صفحهٔ تصویر π' به‌طوری کـه خط مفروضی از صفحهٔ مفروضی به‌خط واقع در بی‌نهایت π' تصویرشود، عمل «تصویر خط مفروضی به‌بینهایت» نامیده می‌شود.)

(ب) نشان دهیدکه در تصویر قسمت (الف) ، خط بینهایت در π به‌محل تلاقی π' با صفحهٔ مار بر O به‌موازات π ، تصویر خواهد شد.

(ج) فرض‌کنید UP ، UQ ، UR سه خط همرس همصفحه باشند که دوخط OX ، OY آنها را بترتیب در $P_۱$ ، $Q_۱$ ، $R_۱$ و $P_۲$ ، $Q_۲$ ، $R_۲$ قطع‌کرده‌اند (نگاه‌کنید به‌شکل ۸۷). ثابت کنید کـه نقاط تلاقی $Q_۱R_۲$ و $Q_۲R_۱$ ، $R_۱P_۲$ و $R_۲P_۱$ ، $P_۱Q_۲$ و $P_۲Q_۱$ همخط هستند.

(د) نشان دهیدکه اگر $A_۱B_۱C_۱$ و $A_۲B_۲C_۲$ مثلثهای‌همصفحه‌ای باشند به‌طوری‌که



شکل ۸۷

B_1C_1 و B_2C_2 در L ، C_1A_1 و C_2A_2 در M ، A_1B_1 و A_2B_2 در N تلاقی کنند که در آن L و M و N همخط هستند ، در این صورت A_1A_2 ، B_1B_2 ، C_1C_2 همرس‌اند. (این قسمت عکس‌حکم قضیهٔ دومثلث دزارگ است به‌صورتی‌که دربخش ۹ـ۸ داده شده است.)

(ه) نشان دهیدکه در تصویر موازی (تصویری‌که درآن مرکز تصویر در بینهایت باشد) یك بیضی را می‌توان همواره به‌یك دایره تصویر کرد.

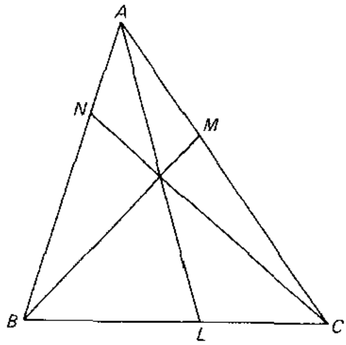
(و) درسال ۱۶۷۸ ، جیووانی‌سوا[1] از اهالی‌ایتالیا (حدود ۱۶۴۷ـ۱۷۳۶)کتابی منتشرکرد حاوی قضیهٔ زیر (نگاه‌کنید به شکل ۸۸)که اکنون به‌نام خود او مشهور است: سه خط که سه نقطهٔ L ، M ، N واقع براضلاع BC ، CA ، AB از یك مثلث ABC را به رأسهای متقابل وصل می‌کنند همرس‌اند، اگر و فقط اگر

$$\left(\frac{AN}{NB}\right)\left(\frac{BL}{LC}\right)\left(\frac{CM}{MA}\right)=+1 .$$

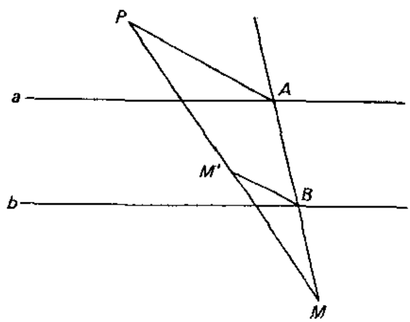
این قضیه، قضیهٔ ملازمی برای قضیهٔ منلائوس است‌که دربخش ۶ـ۵ بیان شد. با استفاده از قضیهٔ سوا ثابت‌کنیدکه خطوط واصل بین رأسهای یك مثلث و نقاط تماس اضلاع‌مقابل با دایرهٔ محاطی آن، همرس‌اند. سپس، به‌کمك قسمت (ه) ، ثابت‌کنیدکه خطوط واصل بین رأسهای یك مثلث و نقاط تماس اضلاع مقابل با بیضی محاط در آن، همرس‌اند.

(ز) لاهیر نگاشت جالب زیر ازصفحه بر خودآن را ابداع‌کرد (نگاه‌کنید به‌شکل ۸۹): دو خط موازی دلخواه مانند a و b رسم و نقطه‌ای مانند P در صفحهٔ آنها انتخاب

1. Giovanni Ceva



شکل ۸۸



شکل ۸۹

می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه دیگر M از صفحه خطی رسم می‌کنیم که a را در A و b را در B قطع کند. دراین‌صورت فصل‌مشترک MP با خطی که‌از B به‌موازات AP رسم‌می‌شود، نگاشت M' نقطهٔ M گرفته می‌شود. (۱) نشان دهید که M' به‌خط‌خاص MAB مار بر M که برای تعیین آن به‌کار رفته است، بستگی ندارد. (۲) نگاشت لاهیر را برای وضعیتی که در آن a و b لزوماً موازی نیستند تعمیم دهید.

۱۱.۹ «برهان» تجربی دوران شباب‌پاسکال

جزئیات «براهین» تجربی نشان داده شده در شکلهای ۷۷ و ۷۸ را تکمیل کنید.

۱۲.۹ قضیهٔ پاسکال

پیامدهای قضیهٔ «هگزاگرام رمزی» پاسکال متعدد و جذاب‌اند، ومیزان تحقیقاتی که صرف

این پیکربندی شده تقریباً باورنکردنی است. برای تشکیل یك شش‌ضلعی از ۶ نقطه بر یك مقطع مخروطی ۶۰ راه‌وجود دارد، و بنا بر قضیهٔ پاسکال، هریك‌از این شش‌ضلعیها یك خط پاسکال دارد. این۶۰ خط پاسکال سه به سه بر ۲۰ نقطه می‌گذرند، که به نقاط اشتاینر[1] موسوم‌اند و به‌نوبهٔ خود چهار به‌چهار بر ۱۵ خط موسوم به خطوط پلوکر[2] قرار دارند. خطوط پاسکال همچنین سه‌به‌سه درمجموعهٔ دیگری از نقاط، موسوم به نقاط‌کیرکمن[3] تلاقی می‌کنندکه تعداد آنها ۶۰ است. متناظر با هرنقطهٔ اشتاینر، سه‌نقطهٔ کیرکمن وجود دارند به‌طوری‌که هرچهارتا بریك خط، موسوم به خط کیلی[4]، واقع‌اند. تعداد خطوط کیلی ۲۰ است، و سه‌به‌سه از ۱۵ نقطه می‌گذرند که نقاط سمن[5] نامیده می‌شوند. توسیعها وخواص متعدد دیگری از این پیکربندی وجود دارند، و تعداد براهین مختلفی که برای خود قضیه «هگزاگرام رمزی» داده شده است، بسیار زیاد است. دراین مطالعهٔ مسئله‌ای، معدودی از نتایج متعدد قضیهٔ «هگزاگرام رمزی» راکه‌می‌توان‌ازانطباق‌بعضی‌ازاین‌شش‌نقطه بایکدیگر به‌دست‌آورد، بررسی‌خواهیم‌کرد. برای سهولت، این‌نقاط را ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ خواهیم نامید. دراین‌صورت قضیهٔ پاسکال می‌گویدکه محلهای برخورد زوج خطوط ۱۲، ۴۵؛ ۲۳، ۵۶؛ ۳۴، ۶۱ همخط‌اند اگر و فقط اگر این شش‌نقطه بر یك مقطع مخروطی واقع باشند.

(الف) اگر یك پنج‌ضلعی مانند ۱۲۳۴۵ در دایره‌ای محاط شده‌باشد، نشان دهید که زوج خطوط ۱۲، ۴۵؛ ۲۳، ۵۱؛ ۳۴ و مماس در ۱، در سه نقطهٔ همخط برخورد می‌کنند.

(ب) پنج نقطه مفروض‌اند، درهریك‌از آنها مماسی بر مقطع مخروطی مار بر این پنج نقطه رسم کنید.

(ج) با مفروض بودن چهارنقطه از یك مقطع مخروطی ومماسهای مرسوم بر آن در هر یك از این‌نقاط، نقاط دیگری از این مقطع مخروطی را به‌دست‌آورید.

(د) نشان دهیدکه نقاط تلاقی اضلاع مقابل یك چهارضلعی محاط در یك مقطع مخروطی، ونقاط تلاقی مماسهای مرسوم بر رأسهای مقابل‌آن چهارنقطه همخط‌اند.

(ه) نشان دهید که اگر مثلثی در یك مقطع مخروطی محاط باشد، دراین‌صورت مماسهای مرسوم در رئوس‌این مثلث، اضلاع مقابل را در سه‌نقطهٔ همخط تلاقی می‌کنند.

(و) سه نقطه از یك مقطع مخروطی و مماسهای مرسوم در دوتا ازآنها مفروض‌اند، مماس درنقطهٔ سوم را رسم کنید.

۱۳.۹ مثلث پاسکال

روابط زیر را ثابت کنید، همهٔ این روابط توسط پاسکال بسط یافته‌اند و متضمن اعداد مثلث حسابی هستند.

---

1. Steiner 2. Plücker 3. Kirkman
4. Cayley 5. Salmon

(الف) هرعضو(غیرواقع برسطر یا ستون‌اول) مثلث حسابی برابر است با مجموع عضوی‌که درست در بالای آن، و عضوی‌که درست در سمت چپ‌آن است.

(ب) هرعضو مفروض مثلث حسابی، منهای ۱ ، برابر است با مجموع کلیهٔ اعضای مثلث‌که بالای سطر و درسمت چپ ستون عضو مفروض قرار دارند.

(ج) عضو mام در سطر nام عبارت است از $(m+n-2)!/(m-1)!(n-1)!$، که در آن بنا بر تعریف، $0!=1$.

(د) عضو واقع در سطر mام و ستون nام برابر است بـا عضو واقع در سطر nام و ستون mام.

(ه) مجموع عضوهای واقع در امتداد هر قطر دوبرابرمجموع عضوهای واقع در امتداد قطر قبل ازآن است.

(و) مجموع اعضای واقع در امتداد قطر nام، 2^{n-1} است.

(ز) فرض‌کنید گـروهی از n شیء به ما داده شده باشد. هر مجموعهٔ rتایی از این اشیاء ، صرفنظر از ترتیب آنها ترکیب n شیء r به r ، نامیده می‌شود، ما علامت $C(n,r)$ را برای نشان دادن تعدادچنین‌ترکیبهایی به‌کار خواهیم برد. مثلاً ترکیبهای ۲ به۲ی چهار حرف a ، b ، c ، d عبارت‌اند از

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

که ازآنجا ، $C(4,2)=6$. درکتابهای جبر مدارس نشان داده می‌شودکه

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

نشان دهیدکـه $C(n,r)$ درمحل تلاقی قطر $(n+1)$ام و ستون $(r+1)$ام مثلث حسابی ظاهر می‌شود.

عنوان مقاله

۱/۹ دلایل اوجگیری ریاضیات درقرن هفدهم.
۲/۹ نپر به‌عنوان نویسندهٔ داستانهای علمی‌تخیلی زمان خود.
۳/۹ موارد استفادهٔ میله‌های نپر و پرگار تقسیم گالیله.
۴/۹ تمبرهای فرمولی-علمی نیکاراگوئه مربوط به‌سال ۱۹۷۱.
۵/۹ دلایل انتخاب e برای پایهٔ لگاریتم و اندازهٔ رادیان برای زوایا.
۶/۹ هاریوت به‌عنوان پدر نظریهٔ نوین معادلات.
۷/۹ هاریوت درآمریکا.
۸/۹ نمادهای ریاضی اوترد.
۹/۹ اثرات زیان‌آور هیأت تفتیش عقاید.

۹/۱۰ آیا می‌توان علم و دین را سازش داد؟
۹/۱۱ کپلر و اصل پیوستگی.
۹/۱۲ نقش هنر در انگیزش بسط هندسهٔ تصویری.
۹/۱۳ مثلث پاسکال پیش از پاسکال.
۹/۱۴ تاریخچهٔ منحنی سیکلوئید.

کتابنامه

BARLOW, C. W. C., and G. H. BRYAN, *Elementary Mathematical Astronomy*. London: University Tutorial Press, 1923.

BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.

BISHOP, M. G., *Pascal, The Life of Genius*. New York: Reynal & Hitchcock, 1936.

BIXBY, WILLIAM, *The Universe of Galileo and Newton*. New York: Harper & Row, 1964.

BRASCH, F. F., ed., *Johann Kepler, 1571–1630. A Tercentenary Commemoration of his Life and Work*. Baltimore: Williams and Wilkins, 1931.

CAJORI, FLORIAN, *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments*. New York: McGraw-Hill, 1909.

———, *William Oughtred, A Great Seventeenth-Century Teacher of Mathematics*. Chicago: Open Court, 1916.

———, *A History of Mathematical Notation*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1929.

CASPAR, MAX, *Kepler*. Translated by C. Doris Hellman. New York: Abelard-Schuman, 1959.

COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.

———, *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.

COXETER, H. S. M., *Regular Polytopes*. New York: Pitman, 1949.

DAVID, F. N., *Games, Gods and Gambling*. New York: Hafner, 1962.

DRYER, J. L. E., *Tycho Brahe, A Picture of Scientific Life and Work in the Seventeenth Century*. London: A. & C. Black, 1890.

FAHIE, J. J., *Galileo, His Life and Work*. London: John Murray, 1903.

GADE, J. A., *The Life and Times of Tycho Brahe*. Princeton, N.J: Princeton University Press, 1947.

GALILEI, GALILEO, *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Translated by Henry Crew and Alfonso de Salvio, introd. by Antonio Favaro. New York: Macmillan, 1914. Reprinted by Dover.

———, *Discourses on the Two Chief Systems*. Ed. Stillman Drake. Berkeley, Calif: University of California Press, 1953.

———, *Discourses on the Two Chief Systems*. Ed. Giorgio de Santillana. Chicago: University of Chicago Press, 1953.

HACKER, S. G., *Arithmetical View Points*. Pullman, Wash: Mimeographed at Washington State College, 1948.

HARTLEY, MILES C., *Patterns of Polyhedrons*. Ann Arbor, Mich: privately printed, Edwards Bros., 1957.

HOOPER, ALFRED, *Makers of Mathematics*. New York: Random House, 1948.

IVINS, W. M., JR., *Art and Geometry*. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1946.

KNOTT, C. G., *Napier Tercentenary Memorial Volume*. London: Longmans, Green, 1915.

KOESTLER, ARTHUR, *The Watershed, a Life of Kepler*. New York: Doubleday, 1960.

KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.

MORTIMER, ERNEST, *Blaise Pascal: The Life and Work of a Realist*. New York: Harper and Brothers, 1959.

MUIR, JANE, *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd, Mead, 1961.

NORTHROP, E. P., *Riddles in Mathematics*. Princeton, N.J: D. Van Nostrand, 1944.

PEARCE, PETER, and SUSAN PEARCE, *Polyhedra Primer*. New York: D. Van Nostrand, 1978.

SMITH, D. E., *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.

SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. New York: Oxford University Press, 1925.

TODHUNTER, ISAAC, *A History of the Mathematical Theory of Probability, From the Time of Pascal to that of Laplace*. New York: Chelsea, 1949.

TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.

۱۰

هندسهٔ تحلیلی و
دیگر مباحث مقدم بر حسابان

۱۰-۱ هندسهٔ تحلیلی

در همان هنگام که دزارگ و پاسکال عرصهٔ جدید هندسهٔ تصویری را می گشودند، دکارت و فرما مفاهیم هندسهٔ تحلیلی را در ذهن می‌پروراندند. بین این‌دومبحث تمایزی اساسی وجود دارد، زیراکه اولی شاخه‌ای ازهندسه است درحالی که دومی‌روشی درهندسه‌است. برای‌دانشجوی ریاضیات‌مقدماتی ،کمتر تجربهٔ تحصیلی می‌توان‌سراغ‌یافت که‌تکان‌دهنده‌تر از آشنایی وی با این روش جدید و نیرومند در رویارویی با مسائل هندسی باشد. به‌یاد می‌آوریم که جوهر این اندیشه، وقتی در مورد صفحه به‌کار رود، ایجاد تناظری بین نقاط صفحه و زوجهای مرتب اعداد حقیقی است و بدین وسیله تناظری بین منحنیهای واقع در صفحه و معادلات دو متغیره امکان‌پذیر می‌گردد، به طوری‌که به ازای هر منحنی واقع در صفحه، معادلهٔ معینی مانند $f(x,y)=0$ وجود دارد، و به‌ازای هرمعادله، یك منحنی‌معین، یا مجموعه نقاطی‌معین، در صفحه وجود دارد. به طور مشابه بین خواص جبری و تحلیلی معادلهٔ $f(x,y)=0$ و خواص هندسی منحنی وابسته تناظری برقرار می‌شود. امر اثبات یك قضیه‌در هندسه، به‌طور داهیانه‌ای به اثبات قضیهٔ‌متناظری درجبر وآنالیز مبدل‌می‌شود.

در این باب که چه کسی هندسهٔ تحلیلی راکشف‌کرده است وحتی دربارهٔ اینکه چه زمانی را باید مبدأکشف آن دانست ، اختلاف نظر وجود دارد و این اختلاف نظر بدون توافق بر سر اینکه هندسهٔ تحلیلی متشکل از چه چیز است، برطرف نمی‌شود. دیده‌ایم که یونانیان باستان به‌میزان قابل توجهی جبر هندسی‌را دنبال‌می‌کردند. محقق است که‌مفهوم

مختصات را در دنیای قدیم مصریان و رومیان در مساحی و یونانیان در نقشه‌سازی مورد استفاده قرار می‌داده‌اند. آنچه بخصوص کفهٔ ترازو را به نفع یونانیان سنگین می‌کند، این حقیقت است که آپولونیوس قسمت اعظم هندسهٔ مقاطع مخروطی خود را از معادلهای هندسی برخی معادله‌های دکارتی این منحنیها استخراج کرده‌است، و این ایده‌ای است که به‌نظر می‌رسد بامنایخموس شروع شده باشد. همچنین، در بخش ۸ــ۴، ملاحظه کردیم که در قرن چهاردهم نیکول اورم با نمایش ترسیمی برخی‌قوانین از طریق قرار دادن متغیر وابسته (عرض) در مقابل متغیر مستقل (طول) نظیرش، موقعی‌که به متغیر اخیر نموهای کوچکی داده می‌شد، جنبهٔ دیگری از هندسهٔ تحلیلی را پیش‌نگری کرده است. هواداران این نظرکه اورم مخترع هندسهٔ تحلیلی‌است وجود دستاوردهایی نظیراولین معادلهٔ صریح خط راست و تعمیم برخی مفاهیم این موضوع را در ابعاد بالاترشاهد می‌آورند. یك‌قرن بعد ازآنکه‌کتاب اورم نوشته شد، این‌کتاب به چندین چاپ رسید، و به این‌ترتیب‌ممکن است ریاضیدانان‌آتی را تحت تأثیر قرار داده باشد.

نظریات فوق در بارهٔ هندسهٔ تحلیلی ظاهراً باعث مشتبه شدن آن با یك یا برخی جنبه‌های هندسهٔ تحلیلی می‌شود. جوهر حقیقی این موضوع درانتقال دادن مطالعات‌هندسی به مطالعات جبری‌نظیر، نهفته است. قبل‌ازآنکه هندسهٔ تحلیلی‌این‌توانایی‌رابیابد،می‌بایست منتظر بسط فرایندها و نمادگرایی جبری بماند. از این رو به حقیقت‌بسیارنزدیکترخواهیم بودکه با اکثر مورخین هم‌آواز شویم‌که به نظر آنها سهم بزرگی‌که در قرن هفدهم دو ریاضیدان فرانسوی یعنی رنه دکارت و پیر دوفرما در بسط هندسهٔ تحلیلی داشته‌اند، لااقل مبدأ اصلی روح نوین حاکم‌براین موضوع است. تا قبل‌ازتکانی‌که‌توسط‌این‌دو ریاضیدان به هندسهٔ تحلیلی داده شود،آن را به‌شکلی‌که امروزه با آن آشنا هستیم، نمی‌یابیم.

۱۰ــ۲ دکارت

رنه دکارت در۱۵۹۶نزدیك تور[1] پا به‌عرصهٔ وجودگذاشت. وقتی‌هشت‌ساله بود، به‌مدرسهٔ یسوعی‌درلافلش[2]فرستاده‌شد. درآنجا بودکه‌او(ابتدا به‌دلیل‌ضعف‌جسمی)عادت‌مادام‌العمری ماندن در رختخواب تانزدیکیهای ظهر راپیداکرد. دکارت‌بعدها این‌ساعات‌تفکراستراحت صبحگاهی را خلاقترین دورهٔزندگی‌اش می‌دانست. در ۱۶۱۲، دکارت مدرسه راترك‌کرد و بلافاصله به پاریس‌رفت و در آنجا، با مرسن[3] و میدورژ [4] (نگاه‌کنید به بخش۱۵ــ۶) مدتی را صرف مطالعهٔ ریاضیات کرد. در ۱۶۱۷، با پیوستن به ارتش پرنس موریس اهل اورانژ، دورهٔ چند سالهٔ خود در خدمت نظام را آغازکرد. بعد از ترك خدمت نظام چهار یا پنج سال را به سفر در آلمان، دانمارك، هلند، سویس، و ایتالیا پرداخت. بعداز اسکان مجدد برای دو سه سال در پاریس، و دنبال‌کردن مطالعات ریاضی و تأملات فلسفی و اشتغال به ساختن ادوات نورشناختی، برای مدتی‌کوتاه تصمیم به مهاجرت به‌هلندگرفت

1. Tours   2. La Fléche   3. Mersenne   4. Mydorge

و در این موقع این کشور دراوج قدرت خود بود. مدت ۲۰ سال در آنجا زندگی و وقت خود را وقف فلسفه، ریاضیات، و علوم کرد. در ۱۶۴۹، با اکراه به‌دعوت ملکه کریستینا به سوئد رفت. چند ماه بعد به ذات‌الریه مبتلا شد و دراوایل ۱۶۵۰ در استکهلم درگذشت.

در طول ۲۰ سال اقامتش در هلند بود که دکارت رسائل خود را بــه رشتهٔ تحریر درآورد. چهارسال اول‌را صرف نوشتن جهان[1]، که توصیفی از جهان ازدیدگاه فیزیك‌بود، کرد ولی چون از محکومیت گالیله توسط کلیسا اطلاع یافت، جانب احتیاط را برگزید و ناتمام آن را رهاکرد و به نوشتن یك رسالهٔ فلسفی در بارهٔ علم کلی تحت عنوان گفتار در روش درست راه‌بردن عقل‌وطلب حقیقت در علوم[2] روی‌آورد؛ به‌این رساله سه ضمیمه تحت عناوین نورشناختی[3]، کائنات جو[4]، و هندسه الحاق شده است. گفتار، همراه با ضمایم در ۱۶۳۷ چاپ شدو در آخرین ضمیمه است که نوشتهٔ دکارت در بارهٔ هندسهٔ تحلیلی ظاهــر می‌شود. در ۱۶۴۱، دکارت رساله‌ای تحت عنوان تأملات[5] را منتشر نمود که به‌توضیح‌مفصل دیدگاههای‌مطروحه درگفتار اختصاص داده شده است، و در ۱۶۴۴، اصول فلسفهٔ[6] خودرا انتشارداد، که شامل برخی قوانین‌نادرست دربارهٔ طبیعت و نظریهٔ کیهانشناسی ناسازگاری ازگردشارهاست.

هندسه، سومین ضمیمهٔ مشهورگفتار حدود ۱۰۰ صفحه ازکل اثر را اشغال می‌کند، و خود به‌سه بخش تقسیم شده است. بخش اول‌شامل توضیحی ازبرخی‌اصول‌هندسهٔ‌جبری و حاکی از پیشرفت واقعی نسبت به‌کار یونانیان است. در نظر یونانیان یك‌متغیر با طول یك پاره خط، حاصلضرب دو متغیر بـا مساحت یك مستطیل، و حاصلضرب سه متغیر با حجم یك مکعب مستطیل متناظر بود. یونانیان نمی‌توانستند فراتر از این بروند. در نظر دکارت، از دیگر سو، x^2 دلالت بر یك مساحت نمی‌کرد و بلکه دال بر جزء چهارم در تناسب $1:x = x:x^2$ بود، و ازاین‌رو با طول مناسبی قابل نمایش بود که با معلوم بودن x بآسانی قابل ساختن است. بدین ترتیب، با استفاده از پاره‌خطی به‌عنوان واحد طول، می‌توانیم هرتوانی‌ازیك متغیر، یاحاصلضرب هرتعدادی از متغیرها را به صورت یك‌طول نشان دهیم، و طول مزبور را، وقتی مقادیر متغیرها معین شده باشند، عملاً با ابزارهای اقلیدسی بسازیم. با این عمل حسابیدن هندسه، دکارت در اولین قسمت هندسه، x را بر روی یك محور مفروض و سپس طولی مانند y را که زاویهٔ ثابتی با این محور می‌سازد، جدا می‌کند، و به ساختن نقاطی که xها و yهای آنها در رابطهٔ‌مفروضی صدق می‌کنند (نگاه‌کنید به شکل ۹۰) دست می‌زند. برای مثال، اگر رابطهٔ $y = x^2$ را داشته باشیم، آن‌گاه به ازای هر مقدار x قادر به ساختن y متناظــر به عنوان جزء چهارم تناسب بالا خواهیم بود. دکارت علاقــهٔ خاصی در به دست آوردن این روابط برای منحنی‌هایی که به‌طور سینماتیکی‌تعریف می‌شوند، نشان می‌دهد. به عنوان‌کاربردی از روش خود، دکارت

---

1. Le monde 2. Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences 3. La dioptrique 4. Les météores 5. Meditationes 6. Principia philosophiae

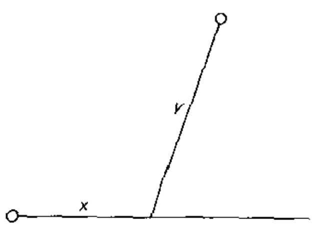
رنه دکارت
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

مسئلهٔ زیر را مورد بحث قرار می‌دهد: اگر p_1، ...، p_m، p_{m+1}، ...، p_{m+n} طولهای $m+n$ پاره خط رسم شده از نقطه‌ای مانند P بر $m+n$ خط مفروض باشند، و با این خطوط زوایای مفروضی بسازند، و اگر

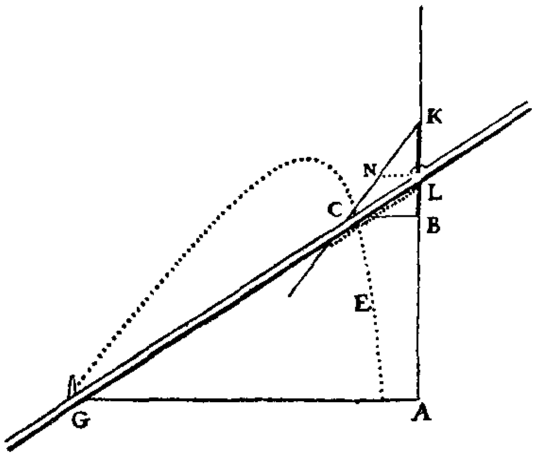
$$p_1 p_2 \cdots p_m = k p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{m+n},$$

که در آن k ثابت است، مکان هندسی P را پیدا کنید. یونانیان باستان این مسئله را در حالتهایی که n و m بیشتر از ۲ نباشند، حل کردند (نگاه کنید به بخش ۶-۹)، ولی مسئله در حالت کلی به صورت یك معما باقی مانده بود. دکارت بسادگی نشان می‌دهد که حالتهای بالاتر مسئله به مکانهای هندسی از درجات بالاتر از ۲ منتهی می‌شود، ودر موارد معینی وی عملاً قادر به پیدا کردن نقاط مکان هندسی با ابزارهای اقلیدسی است (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۲.۱۵ (الف)). این امر که هندسهٔ تحلیلی دکارت قادر به مقابله با این مسئلهٔ کلی است بخوبی قدرت این روش جدید را تأیید می‌کند. گفته می‌شود که تلاش دکارت برای حل این مسئله الهامبخش وی در ابداع هندسهٔ تحلیلی بوده است.

قسمت دوم هندسه، در بین سایر مطالب، به دسته‌بندیی از منحنیها، که اینك منسوخ



شکل ۹۰



Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

S f tipliant

شده، و نیز به روش جالبی از ساختن مماس بر منحنیها، پرداخته است. روش رسم مماسها به صورت زیر است (نگاه کنید به شکل ۹۱) . فرض کنید که معادلهٔ منحنی مفروض $f\ (x,y)=۰$ باشد و $(x_۱,y_۱)$ مختصات نقطهٔ P از منحنی که می‌خواهیم در آن نقطه مماسی بر آن رسم کنیم. فرض کنید Q ، به مختصات $(x_۲,۰)$، نقطه‌ای بر محور xها باشد. در این صورت معادلهٔ دایرهٔ به مرکز Q و مار بر P

$$(x-x_۲)^۲+y^۲=(x_۱-x_۲)^۲+y_۱{}^۲$$

است. از حذف y بین این معادله و معادلهٔ $f(x,y)=۰$، معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آوریم که طولهای نقاط تقاطع دایره با منحنی مفروض را می‌دهد. اکنون $x_۲$ را چنان تعیین می کنیم که این معادله برحسب x دارای یك زوج ریشهٔ برابر با $x_۱$ باشد. این شرط Q را به عنوان محل تلاقی محور x ها و قائم بر منحنی در نقطهٔ P مشخص می کند ، زیرا دایره اینك در نقطهٔ P بر منحنی مفروض مماس است. به محض اینکه این دایره رسم شود، بآسانی می‌توانیم مماس مطلوب را رسم کنیم .به عنوان مثالی از این روش، ساختن مماسی بر سهمی $y^۲=۴x$ را در نقطهٔ $(۱,۲)$ در نظر بگیرید. در اینجا داریم

$$(x-x_۲)^۲+y^۲=(۱-x_۲)^۲+۴.$$

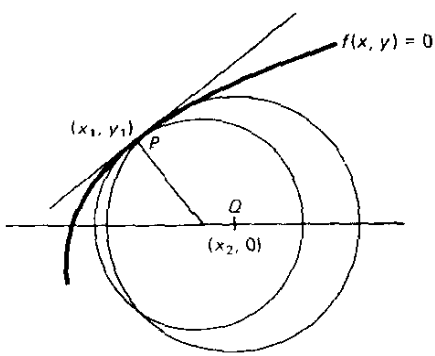
از حذف y بین این معادله و معادلهٔ سهمی نتیجه می‌شود که

$$(x-x_۲)^۲+۴x=(۱-x_۲)^۲+۴,$$

یا

$$x^۲+۲x(۲-x_۲)+(۲x_۲-۵)=۰.$$

شرط اینکه این معادلهٔ درجه دوم دو ریشهٔ برابر داشته باشد این است که مبین آن مساوی صفر باشد، یعنی



شکل ۹۱

$$(۲-x_۲)^۲-(۲x_۲-۵)=۰,$$

یا

$$x_۲=۳.$$

اکنون دایرهٔ به مرکز (۳،۰) و مار بر نقطهٔ (۱،۲) از منحنی رامی‌توان‌رسم کرد، ومماس مطلوب سرانجام ساخته می‌شود. این روش ترسیم مماسها را دکارت در مورد تعـدادی از منحنیهای مختلف، از جمله مماس بریکی از مرغانه‌های درجه چهارم که نام دکارت بر آن گذاشته شده‌است*، به‌کار برده است. در اینجا یك روال کلی داریم که دقیقاً به مامی گوید برای حل مسئلهٔ خود چگونه عمل کنیم، ولی باید تصدیق کرد که درحالات پیچیده‌تر اعمال جبری مورد نیازکاملاً دست وپا گیر می‌شوند. این یك نقص کاملاً شناخته شدهٔهندسهٔ تحلیلی مقدماتی است. اغلب می‌دانیم چه باید بکنیم اما توانایی انجام آن را ازلحاظ‌فنی نداریم. البته، روشهای خیلی بهتری برای یافتن مماسهای بر منحنیها وجود دارند.

در سومین قسمت هندسه به حل معادلات‌درجات بالاتر از دو پرداخته شده است. از قاعده‌ای که اکنون آن را **قاعدهٔ علامات دکارت** می‌نامیم برای تعیین حدود عدهٔ ریشه‌های مثبت و منفی چند جمله‌ای استفاده شده است (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۳.۱۰). دکارت در هندسهٔ خود به کار بردن حروف اول الفبا را برای نشان دادن مقادیر معلوم، و حروف آخر را برای نشان‌دادن مقادیر مجهول‌معمول کرده است. وی همچنین نظام‌امروزی‌اندیسها (نظیر $a^۳$، $a^۴$، وغیره) رامعرفی کرد، که بسیار بهبودیافته‌تر ازروش ویت درمشخص کردن توانهاست، و او همچنین تشخیص‌داد که یك حرف می‌تواند معرف هر کمیتی، مثبت‌یا منفی باشد. در اینجا همچنین برای اولین‌بار به‌استفاده از **روش‌ضرایب نامعین** برمی‌خوریم. مثلاً، در مثال پاراگراف پیشین، از صفر گذاردن مبین برای تعیین مقدار $x_۲$ به‌طوری‌که هر دو ریشهٔ معادلهٔ زیر برابر ۱ باشند، استفاده کرده‌ایم

$$x^۲+۲x(۲-x_۲)+(۲x_۲-۵)=۰.$$

به عنوان مثالی از روش ضرایب نامعین می‌توانیم این مطلب را با بیان‌اینکه اتحاد

$$x^۲+۲(۲-x_۲)x+(۲x_۲-۵)\equiv(x-۱)^۲\equiv x^۲-۲x+۱,$$

برقرار باشد، به انجام برسانیم، که از آن ، با متحد قراردادن ضرایب توانهای مشابه x، باید داشته باشیم

$$۲x_۲-۵=۱ \quad و \quad ۲(۲-x_۲)=-۲$$

---

* یك **مرغانهٔ دکارتی** مکان هندسی نقطه‌ای است که فواصل‌آن، $r_۱$ و $r_۲$، از دو نقطهٔ ثابت در رابطهٔ $r_۱+mr_۲=a$ صدق کنند، که m و a درآن مقادیر ثابتی هستند. مقاطع‌مخروطی‌مرکزی به عنوان حالتهای خاصی از این مکان به شمار می‌روند.

که از هریك از اینها ۳ = x_2 نتیجه‌می‌شود.

کتاب هندسه به هیچ‌وجه بسط منظم روش تحلیلی نیست، و خواننده بایدقسمت‌اعظم این روش را از تعدادی حکم که به‌طور پراکنده‌اینجاو آنجا بیان شده، برای‌خوداستخراج کند. در متن‌کتاب ۳۲ شکل وجود دارد، ولی در هیچیك از آنهاصریحاً سخنی‌ازمحورهای مختصات به میان نیامده است. این اثر عمداً به طور مغلق نوشته شده‌و لذا بسیار مشکل بوده که به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گیرد. در ۱۶۴۹ ترجمهٔ لاتینی‌آن با یادداشتهای توضیحی‌ف. دوبون [1] منتشرشدکه ازسوی فرانس‌وان سکوتن [2] پسرهمراه‌بانقد و یراستاری شده بود. این ترجمه، و چاپ ۱۶۵۹– ۱۶۶۱ تجدیدنظر شدهٔ آن، انتشار وسیعی‌داشت. یك‌قرن و اندی بعداین‌موضوع شکل آشنای امروزی‌خودراکه درکتابهای‌درسی‌دانشگاهی دیده می‌شود، پیدا کرد. کلمات مختصات، طول ،وعرض که امروزه به معنی فنی آنها در هندسهٔ تحلیلی مورد استفاده قرار می گیرد، از جانب لایبنیتز درسال ۱۶۹۲ وارد موضوع شده است.

داستانهای‌چندی در تبیین بارقه های فکری‌که دکارت را به تفکر درهندسهٔ تحلیلی واداشت، وجود دارد. بنابریکی‌از این داستانها، این بارقه در رؤیا به ذهنش راه‌یافت.در شب عید سن مارتن [3] ، دهم نوامبر ۱۶۱۶، هنگام اقامت در جایگاه زمستانی ارتش در سواحل دانوب، دکارت‌سه مرتبه خواب روشن ومعنی‌دار دیدکه به‌قول‌او مسیرزندگی‌اش را تغییر دادند.این‌خوابها، به گفتهٔ او، باآشکارکردن«دانشی باشکوه» و«کشفی‌حیرت‌آور» هدف زندگی‌وی را روشن و تلاشهای آیندهٔ اورا معین‌کردند . دکارت هرگز بصراحت روشن نکرد که این دانش باشکوه و این‌کشف حیرت‌آور چه بوده‌ولی‌برخی براین‌باورند که منظور هندسهٔ تحلیلی، یاکاربرد جبر درهندسه و بدین ترتیب تحویل همهٔ علوم به‌هندسه بوده‌است . هشت سال بعد وی برخی از این اندیشه‌ها را در کتاب گفتار خود بتفصیل شرح داد.

داستان دیگری‌که شاید همردیف حکایت‌آیزك نیوتن وافتادن سیب از درخت‌باشد، این‌است‌که اولین‌اندیشه ازمشاهدهٔ مگسی‌که درمجاورت سقف‌نزدیك به‌گوشه‌ای ازاطاقش درحال‌خزیدن بود، به ذهن او خطورکرد. وی دریافت‌که مسیر مگس‌بادانستن‌رابطه‌ای که فواصل‌مگس‌را از دو دیوار مجاور به هم مربوط می کند، قابل بیان است. گرچه در اعتبار داستان اخیرجای تردیداست، ولی ارزش آموزشی زیادی دارد.

از دو ضمیمهٔ دیگر کتاب گفتار، یکی به‌نورشناسی و دیگری به توضیح پدیده‌های گوناگون هواشناسی، یاجوی، ازجمله رنگین‌کمان، اختصاص دارد.

ازمیان سایرکارهای ریاضی منسوب به‌دکارت، اعلام رابطهٔ $v-e+f=2$ برای اولین‌بار است که درآن v تعداد رئوس، e تعداد یالها، و f تعداد وجوه یك چند وجهی محدب است (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲۰۳). وی اولین‌کسی بودکه منحنی موسوم به **فولیوم** [چینهٔ] **دکارت**، منحنی درجهٔ سوم گره‌داری که در اغلب کتابهای‌حسابان دیده

---

1. F.de Beaune 2. Frans van Schooten 3. St. Martin

می‌شود ، را مورد بحث قرار داد، ولی تصویر منحنی را به‌طور کامل رسم نکرد . او طی مراسلاتش سهمیهای درجات بالاتر $(y^n = px,\ n > ۲)$ را مطمح نظر قرار داد وساختمان بسیار زیبائی ازمماس برسیکلوئید را عرضه کرد.

۱۰-۳ فرما

در همان اوان که دکارت پایه‌های هندسهٔ تحلیلی جدید را پی‌ریزی می‌کرد، این موضوع توجه نابغهٔ ریاضی فرانسوی دیگریعنی پیردوفرما را هم به‌خود مشغول کرده بود. داعیهٔ فرما درباب حق تقدمش متکی برنامه‌ای است که وی، درسال ۱۶۳۶، به روبروال[1] نوشته ودر آن متذکر شده است کـه اندیشه‌هـای نویسنده در این باره در آن زمان سابقهٔ هفت ساله داشته است. شرح جزئیات این‌امر در رسالهٔ مدخل مکانهای مسطحه و فضایی[2]، که پس‌از مرگش منتشر شد، آمده است. دراین اثر معادلهٔ کلی خط و دایره وبحثی دربارهٔ هذلولی، بیضی، وسهمی به‌چشم می‌خورد. دراثری راجع به‌مماسها وتربیعها، که قبل ازسال ۱۶۳۷ کامل شده بود، فرما منحنیهای جدید زیادی را به‌طور تحلیلی تعریف کرده است. درحالی که دکارت معدودی منحنی جدید را، که با حرکت مکانیکی تولید می‌شوند ، مطرح کرد، فرما منحنیهای جدید زیادی را ارائه داد کـه به کمك معادلات جبری تعـریف می‌شوند. منحنیهای $x^m y^n = a$ ، $y^n = ax^m$ ، و $r^n = a\theta$ هنوزهم به **هذلولیها، سهمیها، ومارپیچهای فرما** مشهورند. فرما، ازجمله، منحنی‌درجهٔ سومی‌رانیزکه بعدها به‌**جادوگر آنیزی**[3] معروف شد، طرح کرده است . این نامگذاری به‌یاد ماریا کئتانا آنیزی[4] (۱۷۱۸—۱۷۹۹) ، زنی جامع درچندین فن وشهره به‌عنوان ریاضیدان، زبانشناس، فیلسوف، وخوابگرد است. مثلا، درجایی که دکارت تا حد زیادی از یك مکان هندسی آغاز و معادلهٔ آن را پیدا می‌کرده، فرما از معادله شروع و سپس مکان هندسی را مطالعه می‌کرده است. اینها دو جنبهٔ معکوس از اصل بنیادی هندسهٔ تحلیلی را تشکیل می‌دهند. آثارفرما بانمادگذاری ویت نوشته شده ولذا درمقایسه باعلامتگذاری جدیدتر دکارت قدیمی‌جلوه می‌کند.

خبر ظاهراً موثقی دردست است که فرما دربومون دولومانی[5]، نزدیك تولوز[6]، در ۱۷ اوت ۱۶۰۱ به‌دنیا آمد. می‌دانیم که او درکاستر[7] یا در تولوز در ۱۲ ژانویهٔ ۱۶۶۵ درگذشت. سنگ قبر اوکه بدواً درکلیسای اوگوستین[8] درتولوز بود وبعداً به‌موزهٔ محلی منتقل شد، تاریخ مرگ فوق وسن فرما را در بدو مرگ که پنجاه وهفت سال بوده،می‌دهد. به‌دلیل‌این‌اطلاعات متناقض، تاریخ تولدومرگ فرما معمولاً به‌صورت (۱۶۰۱؟—۱۶۶۵) ثبت می‌شود. در واقع به‌دلایل متعدد، تاریخ ولادت فرما به‌صورتی که نویسندگان مختلف

---

1. Roberval 2. Isogoge ad locus planos et solidos
3. Witch of Agnesi 4. Maria Gaetana Agnesi
5. Beaumont de Lomagne 6. Toulouse
7. Castres 8. Augustines

داده‌اند، از ۱۵۹۰ تا ۱۶۰۸ تغییر می‌کند.

فرما پسر یك تاجر چرم بود و تحصیلات مقدماتی را در زادگاه خود انجام داد. در ۳۰سالگی به‌عضویت پارلمان محلی درتولوز درآمد و وظایف خودرا درآنجا بافروتنی ودقت زیاد انجام‌داد. وی که حقوقدانی‌متواضع و گوشه‌گیر بود، قسمت‌اعظم‌ساعات‌فراغت خود را وقف مطالعهٔ ریاضیات‌می‌کرد. گرچه دردوران‌حیات خودمطالب کمی‌را‌منتشر‌کرد، ولی‌با ریاضیدانان‌برجستهٔ زیادی که‌با اوهمزمان بودند، مکاتبهٔ‌علمی‌داشت وازاین راه تاحد زیادی معاصران خود را تحت تأثیر قرارداد. شاخه‌های ریاضی‌که وی موجب غنای آنها شده، به‌قدری‌متعددندوسهم وی درآنها به‌قدری اهمیت داردکه بزرگترین ریاضیدان قرن هفدهم فرانسه نامیده شده‌است.

ازکارهای متنوع فرما در ریاضیات، برجسته‌تر از همه تأسیس نظریهٔ نوین اعداد است. دراین زمینه ، فرما شهود و توانایی خارق‌العاده‌ای داشت. شاید ترجمهٔ لاتینی علم حساب دیوفانتوس، که در ۱۶۲۱ توسط باشه دومزیریاك انجام شده بود، موجب شده‌است که اولین‌بار توجه اوبه‌نظریهٔ اعداد معطوف گردد. اغلب افادات اودراین زمینه به‌صورت اظهاراتی درحاشیهٔ نسخه‌ای ازاثر باشه آمده است. در ۱۶۷۰، پنج سال پس ازمرگش، این یادداشتها درضمن چاپ جدیدی از علم حساب، کـه متأسفانه چاپ آن با بی‌مبالاتی صورت گرفته بود ، به‌وسیلهٔ پسر فـرما، کلمنت ساموئل[1]، منتشر شد. بعدها درست بودن اغلب قضایای ثابت نشده‌ای‌که فرما اعلام‌کرده بود، به‌ثبوت رسیدند. مثالهای زیـر مفاد تحقیقات فرما را آشکار می‌کنند.

۱. اگر p عددی اول و a نسبت‌به p اول باشد،آنگاه $a^{p-1}-1$ بر p قابل‌قسمت است . مثلاً، اگر $p=5$ و $a=2$، آنگاه $a^{p-1}-1=15=(3)(5)$. این قضیه، که

پیر دو فرما
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

1. Clément-Samuel

به **قضیهٔ کوچك فرما**مشهور است، بدون برهان در نامه‌ای از فرما به فرنیکل دوبسی[1]، به تاریخ ۱۸ اکتبر ۱۶۴۰ داده شده بود. اولین برهان چاپ شدهٔ آن را اویلر درسال ۱۷۳۶ داد (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰ . ۵).

۲. هر عدد اول فرد را می‌توان فقط و فقط به‌یك طریق به‌صورت تفاضل دو مربع نشان داد. فرما برهان ساده‌ای برای آن آورده است. اگر p یك عدد اول فرد باشد، آنگاه بسادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$p=\left(\frac{p+۱}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{p-۱}{۲}\right)^{۲}.$$

ازطرف‌دیگر، اگر $p=x^{۲}-y^{۲}$، آنگاه $p=(x+y)(x-y)$. اما چون p اول‌است تنهاعوامل آن p و ۱ هستند. بنابراین $x+y=p$ و $x-y=۱$ ، یا $x=(p+۱)/۲$ و $y=(p-۱)/۲$.

۳. هرعدداول به‌صورت $۴n+۱$ را می‌توان به‌صورت مجموع دومربع نشان داد.مثلاً، $۵=۴+۱$، $۱۳=۹+۴$، $۱۷=۱۶+۱$، $۲۹=۲۵+۴$. این قضیه را اولین‌بار در نامه‌ای به‌تاریخ ۲۵ دسامبرسال ۱۶۴۰ فرما برای مرسن‌فرستاد. اولین برهان چاپ‌شدهٔ آن را اویلر در ۱۷۵۴ داد، که علاوه‌برآن، موفق‌شدکه منحصر به‌فرد بودن این‌نمایش‌را ثابت کند.

۴. یك عدد اول به‌صورت $۴n+۱$ وتر فقط یك مثلث قائم‌الزاویه به‌اضلاع صحیح، مربع آن وتر دو مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع صحیح، و مکعب آن وتر سه مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع صحیح است و قس‌علیهذا . مثلاً $۵=۴(۱)+۱$ را در نظر بگیرید. حال $۵^{۲}=۳^{۲}+۴^{۲}$؛ $۲۵^{۲}=۱۵^{۲}+۲۰^{۲}=۷^{۲}+۲۴^{۲}$؛ و $۱۲۵^{۲}=۷۵^{۲}+۱۰۰^{۲}=۳۵^{۲}+۱۲۰^{۲}=۴۴^{۲}+۱۱۷^{۲}$.

۵. هر عدد صحیح نامنفی را می‌توان به‌صورت مجموع چهار مربع یا کمتر از چهار مربع نشان داد. این قضیهٔ مشکل را لاگرانژ درسال ۱۷۷۰ ثابت‌کرد.

۶. در یك مثلث قائم‌الزاویه به‌اضلاع صحیح مساحت نمی‌تواند یك مجذور کامل باشد. این قضیه نیز بعداً به‌وسیلهٔ لاگرانژ اثبات شد.

۷. معادلهٔ $x^{۲}+۲=y^{۳}$ تنها یك جواب در اعداد صحیح، و معادلهٔ $x^{۲}+۴=y^{۳}$ تنها دوجواب در اعداد صحیح دارد. فرما این مسئله را به‌عنوان یك مسئلهٔ حریف‌آزما برای ریاضیدانان انگلیسی فرستاد. جوابهای معادلهٔ اول $x=۵$، $y=۳$، وجوابهای معادلهٔ‌دوم $x=۲$، $y=۲$ و $x=۱۱$، $y=۵$ هستند.

۸. اعداد صحیح مثبتی مانند x و y و z وجود ندارندکه درتساوی $x^{۴}+y^{۴}=z^{۲}$ صدق کنند.

۹. اعداد صحیح مثبتی مانند x، y، z، n وجود ندارندکه به‌ازای $n>۲$ در تساوی $x^{n}+y^{n}=z^{n}$ صدق کنند. این حدس‌مشهور به‌**آخرین «قضیهٔ» فرما** مشهوراست. این‌قضیه

---

1. Frénicle de Bessy

را فرما درحاشیهٔ نسخه‌ای ازکتاب دیو فانتوس تـرجمهٔ باشه در کنار مسئلهٔ ۸ مقالهٔ دوم چنین بیان کرد: «تجزیهٔ یك مربع مفروض به‌مجموع دو مربع». حاشیه‌ای کـه فرما برآن نوشت بدین‌قراراست: «تجزیهٔ یك مکعب به‌مجموع دومکعب، یك توان چهارم به‌مجموع دو توان چهارم، یا به‌طورکلی هرتوان دلخواه به‌مجموع دو توان با قوه‌های همانند ولی بزرگتر از دو غیر ممکن است، و من یقیناً برهان تحسین‌آمیزی برای آن یافته‌ام، اما این حاشیه تنگتر ازآن است‌که گنجایش درج آن را داشته باشد.» این امرکه‌آیا فرما براستی برهان موجهی برای این‌مسئله دراختیار داشته یا نه، تاابد به‌صورت یك معما باقی‌خواهد ماند. بسیاری ازبرجسته‌ترین ریاضیدانان از زمان خود او به بعد مهارت خود را در این مسئله آزموده‌اند، اما این حدس درحالت کلی همچنان لاینحل مانده است. برهانی ازفرما برای حالت $n=۴$ در جای دیگری وجود دارد، و اویلر برهانی را (کـه بعداً به‌دست دیگران تکمیل‌شد) برای $n=۳$ ارائه داد. درحدود ۱۸۲۵، لژاندر و دیریکله برهانهای مستقلی برای حالت $n=۵$ دادند، و در ۱۸۳۹، لامه[1] قضیه را بـرای $n=۷$ ثابت‌کـرد. پیشرفتهای بسیار مهمی درمطالعهٔ این مسئله توسط ریاضیدان آلمانی، ا. کومر[2] (۱۸۱۰–۱۸۹۳) حاصل شد. در۱۸۴۳، کومر برهان خودرا تسلیم دیریکله‌کرد، که دیریکله‌وجود خطایی را دراستدلال او متذکرشد. کومر سپس بانیرویی تازه به‌مسئله روی‌آور شد، وچند سال بعد، بعد از کشف موضوع مهمی وابسته به آن در جبرعالی به نـام نظریهٔ ایده‌آلها، شرایط بسیار کلیی برای امتناع روابط فرما استخراج کرد. تقریباً کلیهٔ پیشرفتهای بعدی در این مسئله براساس تحقیقات کومر استوار است. اکنون معلوم شده است کـه آخرین «قضیهٔ» فرما محققاً برای‌$n<۱۰۰۰۰۰$*، و برای‌بسیاری از مقادیر دیگر n درست است. در ۱۹۰۸، ریاضیدان آلمانی، پل ولفسکهل[3] ۱۰۰۰۰۰ مـارك در اختیار آکادمی علوم گوتینگن قرارداد تابه‌عنوان جایزه برای اولین حل‌کامل «قضیه» اعطا شود. بااین‌کار سیلی از براهین ادعایی ازسوی افراد عادی جویای نام و پول به‌آکادمی سرازیر شد، و از آن زمان به‌بعد این‌مسئله‌تقریباً به‌همان‌اندازهٔ تثلیث‌یك زاویهٔ دلخواه‌وتربیع‌یك‌دایره‌آماتورها را به‌خود مشغول داشته است. آخرین «قضیهٔ» فرما این وجه‌تمایزخاص را هم داراست‌که مسئله‌ای ریاضی است که بیشترین تعداد براهین نادرست برای آن به‌چاپ‌رسیده‌است.

۱۰. فرما حدس زدکه $f(n)=۲^{۲^n}+۱$ به‌ازای هرعدد صحیح نامنفی عددی‌است اول. نادرست‌بودن این‌حدس وقتی‌که اویلر نشان داد $f(۵)$ عددی است مرکب، ثابت‌شد.

در ۱۸۷۹، در کتابخانهٔ لیدن، در بین دستنوشته‌های کریستیان هویگنس، مقاله‌ای ازفرما پیدا شد،که در آن فرما از یك روش کلی صحبت می‌کند که امکان دارد وی اغلب اکتشافات خود را به‌کمك آن انجام داده باشد. این روش به **روش‌نزول‌نامتناهی** معروف است و بویژه در اثبات نتایجی کـه جنبهٔ نفی حکمـی را دارند، مفید است. این روش

---

1. Lamé 2. E.Kummer

* این امر درسالهای اخیر به‌کمك کامپیوترهای پرسرعت الکترونیکی انجام شده است.

3. Wolfskehl

اجمالاً از این قرار است. برای اثبات امتناع رابطهٔ معینی‌که اعداد صحیح مثبت را به‌هم مربوط می‌کند، فرض‌کنیدکه برعکس، مجموعهٔ‌خاصی از اعداد صحیح مثبت در این‌رابطه صدق می‌کنند. با این فرض، نشان دهید که این رابطه برای مجموعهٔ دیگری ازاعداد مثبت کوچکتر نیز برقرار است. سپس، با کاربرد مجددی، این رابطه باید باز به‌ازای مجموعهٔ دیگری ازاعداد کوچکتر از قبل، برقرار باشد، و همین‌طور الی غیرالنهایه. چون اعداد صحیح مثبت را نمی‌توان ازنظر کمی به‌طور نامتناهی کاهش داد، نتیجه می‌شودکه فرض ابتدایی بیجا ودر نتیجه رابطهٔ آغازین غیرممکن است. برای روشن‌کردن این روش، آن را برای اثبات تازه‌ای از ناگویا بودن $\sqrt{۲}$ به‌کار می‌بریم. فرض کنید $\sqrt{۲}=a/b$، که درآن a و b اعداد صحیح مثبت‌اند. اما

$$\sqrt{۲}+۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱},$$

و از آنجا

$$\frac{a}{b}+۱=\frac{۱}{\frac{a}{b}-۱}=\frac{b}{a-b},$$

و

$$\sqrt{۲}=\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}-۱=\frac{۲b-a}{a-b}=\frac{a_۱}{b_۱}$$

اما، چون $۲>\sqrt{۲}>۱$، بعد ازقرار دادن a/b به‌جای $\sqrt{۲}$ و سپس ضرب طرفین در b، داریم $b<a<۲b$. اما، چون $a<۲b$، نتیجه می‌شود که $۰<۲b-a=a_۱$. و چون $b<a$، نتیجه می‌شودکه $a_۱=۲b-a<a$. بنابراین $a_۱$ عدد صحیح مثبتی کوچکتر از a است. باتکرار این‌رویه، نتیجه می‌گیریم‌که $\sqrt{۲}=a_۲/b_۲$، که در آن $a_۲$ عدد صحیح مثبتی کوچکتر از $a_۱$ است. این عمل را می‌توان به‌طور نامتناهی ادامه داد. چون اعداد مثبت را نمی‌توان ازنظرکمی به‌طور نامتناهی کاهش داد نتیجه می‌شودکه $\sqrt{۲}$ نمی‌تواند گویا باشد.

قبلاً دربخش ۹ـ۹، خاطرنشان‌کردیم که مکاتبات بین پاسکال و فرما اساس علم احتمال را پی‌ریزی‌کرد. متذکر می‌شویم‌که باصطلاح **مسئلهٔ امتیازها** بودکه آغازگر این مطلب گردید: «نحوهٔ تقسیم جایزه دربازی نیمه‌تمام مانده‌ای بین دوبازیکن، به‌فرض‌داشتن مهارت یکسان، با معلوم بودن امتیازهای دوبازیکن درموقع قطع بازی و تعداد امتیازات لازم برای برنده شدن را، تعیین‌کنید.» فرما به‌بحث در حالتی پرداخت که A، یکی از بازیکنها، برای برنده شدن ۲ امتیاز و B، بازیکن دیگر ۳ امتیاز می‌خواست. در اینجا جواب فرما را برای این‌حالت خاص می‌آوریم. چون‌آشکار است‌که چهار بازی دیگر نتیجه را معین خواهدکرد، اگر a معرف بازیی باشدکه در آن A برنده می‌شود و b

معرف بازیی باشدکه درآن B برنده می‌شود، و۱۶ تبدیل‌دوحرف a و b را ۴ به ۴ ، در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{cccc} aaaa & aaab & abba & bbab \\ baaa & bbaa & abab & babb \\ abaa & baba & aabb & abbb \\ aaba & baab & bbba & bbbb \end{array}$$

حالتهایی‌که درآن a دوبار یا بیشترظاهرمی‌شود، مساعد برای A است؛۱۱ تا از این‌حالتها وجود دارند. حالتهایی‌که درآن b سه بار یا بیشترظاهرمی‌شودمساعدبرای B است؛ تعداد آنها ۵ است. بنابراین باید جایزه به‌نسبت ۱۱:۵ تقسیم شود. درحالت کلی‌که برای‌برنده شدن، A به m امتیاز، و B به n امتیاز نیاز دارد، $۲^{m+n-۱}$ جایگشت ممکن دوحرف a و b را $m+n-۱$ به $m+n-۱$ می‌نویسیم. دراین‌صورت عدد α ، تعداد حالتهایی راکه درآن a ، mبار یا بیشتر و عدد β ، تعداد حالتهایی کـه درآن b ، nبار یا بیشتر ظاهـر می‌شود، به‌دست می‌آوریم. بنابراین باید جایزه را به‌نسبت $\alpha:\beta$ تقسیم‌کرد.

پاسکال مسئلهٔ امتیازها را با سودبردن از «مثلث حسابی» مذکور دربخش ۹ــ۹ حل کرد. با فرض‌اینکه $C(n,r)$ معرف‌تعدادترکیبهای n شیء r به r باشد (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۳.۹ (ز))، بآسانی می‌توان نشان دادکه اعداد واقع در امتداد قطرپنجم «مثلث حسابی»، بترتیب، عبارت‌اند از

$$C(۴,۴)=۱,\ C(۴,۳)=۴,\ C(۴,۲)=۶,\ C(۴,۱)=۴,\ C(۴,۰)=۱\ .$$

چون، با مراجعه به مسئلهٔ امتیازهـا در حالت خاص بالا، $C(۴,۴)$ تعداد راههای به‌دست آوردن ۴ تا a ، $C(۴,۳)$ تعداد راههای به‌دست‌آوردن ۳ تا a است و قس‌علیهذا، نتیجه می‌شودکه جواب مسئله به‌صورت زیر است

$$[C(۴,۴)+C(۴,۳)+C(۴,۲)]:[C(۴,۱)+C(۴,۰)]=(۱+۴+۶): (۴+۱)=۱۱:۵$$

درحالت‌کلی‌که A به m امتیاز و B به n امتیاز برای برنده شدن نیاز دارند، می‌توان‌قطر $(m+n)$م، آرایهٔ حسابی پاسکال را اختیار کرد. پس‌ازآن عدد α ، مجموع n عدد اول روی این قطـر و عدد β ، مجموع m عددآخر روی قطر محاسبه می‌شود. دراین‌صورت جایزه را باید به‌نسبت $\alpha:\beta$ تقسیم‌کرد.

پاسکال و فرما، در مراسلات تاریخی خود درسال ۱۶۵۴ ، روی مسائل دیگری در ارتباط با مسئلهٔ امتیازها، نظیر تقسیم جایزه درحالت وجود بیش‌از دوبازیکـن یا وجود دو بازیکن‌غیرهمقدرت تأمل‌کردند. این‌کار پاسکال و فرما سبب به‌راه‌افتادن نظریهٔ‌ریاضی احتمال شد. درسال ۱۶۵۷ کریستیان هویگنس (۱۶۹۵ــ۱۶۲۹) اولین رسالهٔ صوری‌در بارهٔ احتمال را، برمبنای مکاتبات پاسکال‌ـفرما نگاشت. این، بهترین شرح این‌موضوع تـا

پیش از فن حدس زدن[1] یاکوب برنولی[2] بودکه در ۱۷۱۳، پس ازمرگ برنولی منتشر شد و چاپ مجددی از رسالهٔ قبلی هویگنس را در بر داشت. بعد از این کوششهای پیشاهنگانه، مشاهده می‌شودکه موضوع رامردانی‌چون آبراهام دموآور[3](۱۶۶۷-۱۷۵۴)، دانیل[4] برنولی (۱۷۰۰-۱۷۸۲)، لئونهارت‌اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، ژوزف‌لوئی‌لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳)، پیرسیمون لاپلاس (۱۷۴۹-۱۸۲۷) وجمعی دیگر به‌پیش برده‌اند.

جای تأمل، و تا حدی تعجب، است که ریاضیدانان به بسط شاخه‌ای از علم، یعنی نظریهٔ ریاضی احتمال نایل شده‌اند که به‌تأسیس قوانینی منطقی که می‌توان آنها را در موقعیتهایی با جنبهٔ کاملاً تصادفی به‌کاربرد پرداخته است. این علم به‌هیچوجه غیرعملی نیست و گواه این امر آزمایشهای انجام‌شده درآزمایشگاههای بزرگ، وجود شرکتهای بیمهٔ معتبر، و علم‌سازوکار بازرگانیهای عمده وجنگ هستند.

ما درفصل آتی (بخش ۱۱-۷) به فرما بازمی‌گردیم و درآنجا استفادهٔ اواز بینهایت کوچکها درهندسه-بخصوص‌کارگیری او ازآنها درمسائل‌مربوط به ماکزیموم ومینیموم- را بررسی می‌کنیم که او را به‌عنوان پیشگام‌بزرگ حساب دیفرانسیل مشخص کرده‌است.

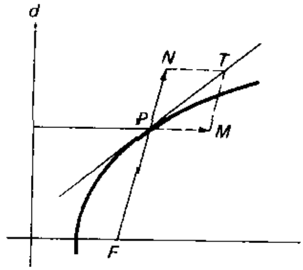
۱۰-۴ روبروال و توریچلی

این بخش را به ژیل‌پرسون دو روبروال[5] واوانجلیستاتوریچلی[6]، یکی فرانسوی و دیگری ایتالیایی اختصاص می‌دهیم که معاصر هم بودند، هردو هندسه‌دان و فیزیکدان برجسته بودند، سلیقه و استعداد مشابهی در ریاضیات داشتند و در نزاعهای مربوط به حق‌تقدم در کشف باهم درگیرشدند.

ژیل پرسون، که فردی ستیزه‌جو بود، در روبروال، نزدیك بووه[7] درسال ۱۶۰۲ به‌دنیا آمد و درسال ۱۶۷۵ درپاریس درگذشت. وی‌نام دو روبروال راکه عنوان‌تیولداری است، بی‌آنکه واجد شرط باشد، برخودنهاد. مکاتبات گستردهٔ او به‌عنوان واسطه‌ای در رد وبدل‌کردن اندیشه‌های ریاضی‌درآن روزهاکه هنوزمجلات علمی منتشرنمی‌شد سودمند افتاد. وی به‌خاطر روش‌خود در رسم‌مماسها وکشفیاتش‌در زمینهٔ منحنیهای مسطحهٔ درجات بالا شهرت‌یافت. وی یك منحنی‌را حاصل‌حرکت نقطه‌ای که حرکتش ترکیبی ازدوحرکت معلوم است، تلقی‌کرد. دراین‌صورت برآیند بردارهای سرعت دوحرکت معلوم خط مماس برمنحنی را به‌دست می‌دهد. مثلاً، در مورد سهمی، می‌توانیم دوحرکت را چنان‌بگیریم که نیروی آن یکی مبدأش بر کانون و دیگری مبدأش بر هادی است. چون فواصل نقطهٔ متحرك ازکانون و هادی همیشه باهم برابرند، بردارهای سرعت دوحرکت نیز باید ازنظر کمی برابر باشند. نتیجه می‌شودکه مماس دریك نقطه برسهمی زاویهٔ بین‌شعاع حامل این نقطه و عمود وارد از این نقطه برهادی را نصف می‌کند (نگاه‌کنید به شکل ۹۲).

---

1. Ars Conjectandi   2. Jacob Bernoulli   3. Abraham De Moivre
4. Daniel   5. Gilles Persone de Roberval   6. Evangelista Torricelli
7. Beauvais



شکل ۹۲

این فکرمماسها موردتوجه توریچلی نیز واقع شده‌بود و درپی آن بحثی‌درپیرامون اینکه حق‌تقدم ازآن‌کیست، درگرفت. روبروال‌همچنین‌مدعی‌ابداع روش‌تقسیم‌ناپذیرهای پیش‌ازحسابان کاوالیری (که دربخش ۱۱-۶ مورد بحث قرار گرفته) و تربیع سیکلوئید پیش از توریچلی بود. این موارد مربوط به حق‌تقدم را نمی‌توان بآسانی رفع و رجوع کرد، زیرا روبروال در افشای کشفیات خود پیوسته‌کندی نشان می‌داد. کندی نشان دادن او را این حقیقت روشن می‌کندکه وی به‌مدت‌۴۰ سال، ازسال ۱۶۳۴، متصدی یك‌کرسی استادی درکولژ رواپال[1] بود . این‌کرسی خودبه‌خود هرسه‌سال یك بار بلامتصدی می‌شد که تصدی‌آن می‌بایست ازطریق گـذرانیدن یك مسابقهٔ ریاضی در یك رقابت آزاد ، که سؤالات‌آن را متصدی مستعفی‌طرح می‌کرد، انجام‌می‌شد. برای حفظ‌پست‌خود، روبروال کشفیاتش را پیش خود نگاه می‌داشت تا سؤالهایی برای مسابقه طرح کند کـه وی قادر به جواب دادن به‌آنها باشد ولی‌برای رقبایش مشکل باشد. درهربار، روبروال باموفقیت روش‌تقسیم‌ناپذیرها را برای یافتن برخی‌مساحتها، احجام، ومراکز هندسی‌به‌کار می‌گرفت. علی‌رغم موفقیتهایش درهندسه، علاقهٔ اصلی او به‌فیزیك بود.

اوانجلیستا توریچلی که روحی‌حساس‌داشت، نزدیك فائنزا[2] درایتالیا، درسال۱۶۰۸، به‌دنیا آمد ودرسال۱۶۴۷ درفلورانس درگذشت. وی برای مدت‌کوتاهی، در اواخرعمر گالیله شاگرد او بود. گرچه چهل وچهارسال ازگالیله جوانتر بود، تنها پنج‌سال پس از استادخود زیست و در سی‌ونه‌سالگی، پانزده سال پیش‌از پاسکال درگذشت. بنابرداستانی که شایدبیش‌از اندازه پرسوز وگداز باشد، توریچلی در اثر بیم و اندوه ناشی از اتهام سرقت ادبی‌که روبروال به‌او زد، درگذشت.

قبلاً دیده‌ایم‌که‌گالیله ارزش سیکلوئید را درشکل زیبایی که به‌طاقها در معماری می‌دهند، می‌دانست. وی همچنین، در ۱۵۹۹، سعی کردکه مساحت یك طاق منحنی را بـا برابرگرفتن یك سردر سیکلوئیدشکل با یك سردر مستدیری به‌اندازهٔ دایرهٔ مولدآن،تعیین کند. وی‌بغلط نتیجه‌گرفت‌که مساحت زیر یك طاق خیلی نزدیك به سه‌برابر مساحت‌دایره

1. Collège Royale 2. Faenza

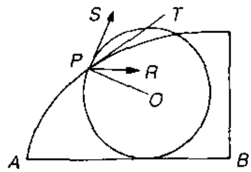
اوانجلیستا توریچلی
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

است ولی با آن برابر نیست. اولین برهان ریاضی چاپ شده را که این‌مساحت دقیقاً سه برابر دایرهٔ مولدآن است درسال ۱۶۴۴ شاگردش توریچلی، با استفاده از روش‌بینهایت کوچکها، داد. توریچلی همچنین روشی برای رسم‌مماس بر سیکلوئید درهرنقطهٔ مفروض آن منتشر کرد. وی هیچ‌اشاره‌ای به‌اینکه روبروال هم‌مساحت و هم‌مماس‌را به‌دست‌آورده، نکرد و درنتیجهٔ آن روبروال درسال ۱۶۴۶ برآشفته از این‌موضوع، درنامه‌ای توریچلی را به سرقت ادبی متهم‌کرد. اینك روشن است‌که تقدم درکشف ازآن روبروال ولی تقدم در انتشار ازآن‌توریچلی است‌که احتمالاً به‌طور مستقل‌هر دونتیجه را مجدداً کشف کرده بوده‌است.

برای یافتن مماس، هر دو روش ترکیب حرکتها را کــه در بالا در رابطه با رسم مماس‌برسهمی توصیف شد، به‌کار گرفتند. درمورد سیکلوئید، نقطه‌ای مانند P برمنحنی را می‌توان تحت دوحرکت برابر دانست‌که یکی انتقال و یکی دوران است. موقعی‌که دایرهٔ مولد در امتداد خط پایهٔ AB می‌غلطد (نگاه کنید به شکل ۹۳)، نقطهٔ P به‌طور افقی‌پیش می‌رود درحالی که هم‌زمان با آن حول O، مرکز دایره، می‌چرخد. بنابراین باید بردار افقی PR ماربر P را، به‌عنوان مؤلفهٔ انتقال، و بردار PS را که مماس بر دایرهٔ مولـد است، به‌عنوان مؤلفهٔ دوران رسم‌کرد. مادام‌که دو بردار کمیت برابر دارند،مماس‌مطلوب برسیکلوئید در امتداد PT، منصف زاویهٔ RPS که بین دو بردار تشکیل می‌شود، قرار دارد.

فرما مسئلهٔ تعیین نقطه‌ای درصفحهٔ یك مثلث را که مجموع فواصل آن از سه رأس مینیموم‌باشد، برای‌توریچلی مطرح‌کرد. راه‌حل توریچلی درسال ۱۶۵۹ توسط شاگردش ویویانی[1] به‌چاپ رسید. این‌نقطه،که امروزه **مرکز همزاویه‌ای** مثلث نامیده می‌شود،اولین نقطهٔ مهم یك مثلث بودکه از زمان ریاضیات‌یونان‌باستان به‌بعدکشف شده‌بود. تحلیل‌ساده

1. Viviani



شکل ۹۳

و زیبایی از مسئله بعداً توسط یاکوب اشتاینر[1] داده شد*. درسال ۱۶۴۰، توریچلی طول قوس شاخه‌ای از مارپیچ لگاریتمی را پیدا کرد. دکارت نیز طول‌قوس این منحنی را دو سال‌جلوتر محاسبه‌کرده‌بود و اولین‌منحنی بعد از دایره بودکه طول‌قوسش‌حساب شده‌بود.

در ۱۶۴۱، توریچلی متوجه شدکه یك مساحت نامتناهی، موقعی کـه حول محوری در صفحه‌اش دوران داده شود، می‌تواند گاهی جسم دواری بـا حجم متناهی تولیدکند. به‌عنوان مثال، مساحت محصور بین‌هذلولی $xy=k^2$ وخط $x=b$ $(b>0)$ و محورxها نامتناهی‌است، درحالی که‌حجم جسم‌دوارحاصل‌از دوران این سطح‌حول محور xها متناهی است. مع‌هذا توریچلی اولین‌کسی نبودکـه متوجهٔ این امر ظاهراً خلاف‌قاعده شده‌باشد.

توریچلی به‌خاطر مهمش در فیزیك شهـرت بیشتری دارد و در این زمینه، نظریهٔ فشارسنج را بسط داد و در رابطه با سؤالاتی نظیر مقدار شتاب ناشی از گرانش، نظریهٔ پرتابه‌ها، وحرکت مایعات کارکرد.

۱۰-۵ هویگنس

نابغهٔ بزرگ هلندی،کریستیان هویگنس، زندگی بی‌حادثه‌ولی‌بسیار پربار داشت. وی در سال ۱۶۲۹ درلاهه متولدشد ودرلیدن پیش فرانس‌وان سخوتن پسر درس خواند. در سال ۱۶۵۱، وقتی ۲۲سال داشت، مقاله‌ای به‌چاپ رساندکه درآن اشتباهات سن‌ونسان را در اثرش دربارهٔ تربیع دایره‌گوشزدکرد. به‌دنبال آن هویگنس رسالاتی دربارهٔ تربیع مقاطع مخروطی و پیرایش مثلثاتی اسنل از روش کـلاسیك محاسبهٔ π نوشت (نگاه‌کنید به بخش ۴-۸). درسال ۱۶۵۴، او و برادرش روش جـدیدی برای ساییدن و صیقل‌دادن عدسیها یافتند، و درنتیجه هویگنس قـادر به‌یافتن پاسخ برخی سؤالات در نجوم ارصادی، نظیر ماهیت حلقه‌هـای‌کیوان شد. کار هویگنس در نجوم او را، درچند سال بعد، به اختراع ساعت پاندولی راهبری‌کرد، شاید برای اینکه وسایل دقیقتری برای اندازه‌گیری زمـان در اختیار داشته‌باشد.

---

1. Jacob Steiner

* مثلاً نگاه‌کنید به

R. A. Johnson, *Modern Geometry*, pp. 218–25,

و

Richard Courant and H. E. Robbins *What is Mathematics*? pp.354–61

کریستیان هویگنس
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

همچنانکه در بخش ۱۰-۳متذکر شدیم، هویگنس درسال ۱۶۵۷اولین رسالهٔ صوری در بارهٔ احتمال را ، بر مبنای مکاتبات پاسکال-فرما نگاشت. هویگنس مسائل جالب و غیر مقدماتی بسیاری را حل کرد و مفهوم مهم «امید ریاضی» رامعرفی کرد: اگر p معرف احتمال آن باشدکه شخصی برندهٔ مبلغ معین s شود، در اینصورت sp **امید ریاضی** اوخواهد بود. هویگنس از جمله نشان دادکه اگر p احتمال برد مبلغی برابر a، q احتمال‌برد مبلغی برابر b برای کسی باشد، آنگاه وی می‌تواند امید برد $ap+bq$ را داشته باشد.

پاسکال در کتاب اندیشه‌ها ، یا تفکراتی در بارهٔ مذهب و سایر موضوعات که هشت سال بعد از مرگش چاپ شد، به طور موجه‌نمایی مفهوم امید ریاضی را به‌کارگرفت. وی استدلال کردکه چون ارزش‌سعادت‌ابدی باید نامتناهی‌باشد، دراین‌صورت حتی‌اگراحتمال اینکه تضمین سعادت از راه مذهب بسیار کــوچك باشد ، امید (که با حاصلضرب این دو اندازه‌گرفته می‌شود) تنهاکافی است‌که مذهبی بودن را برخوردار از ارزش‌کند.

درسال۱۶۶۵، هویگنس برای استفاده از مقرریی‌که از سوی لویی چهاردهم به او پیشنهاد شده بود ، به پاریس نقل مکان‌کرد. در پاریس، درسال ۱۶۶۸، مقاله‌ای به‌انجمن سلطنتی لندن فرستادکه در آن به‌طور تجربی نشان داده شده بودکه‌مجموع اندازهٔ‌حرکت دو جسم در یك امتداد معین قبل و بعد از تصادم با یکدیگر یکی است .

در ۱۶۷۳، در پاریس، بزرگترین اثرهویگنس، ساعت نوسانی[1] منتشر شد.این‌اثر در پنج قسمت، یا فصل است. در اولین قسمت به ساعت آونگی پرداخته شده‌که مؤلف‌در ۱۶۵۶ اختراع کرده بود . دومین قسمت به بحث در بارهٔ اجسامی اختصاص دارد که در خلأ سقوط آزاد دارند، و بر روی یك صفحهٔ شیب‌دار هموار می‌لغزند، یادرامتدادمنحنی همواری‌حرکت می‌کنند. خاصیت همزمانی یك‌سیکلوئید وارون-که یك ذرهٔوزین درروی یك‌کمان سیکلوئیدی وارون از هر نقطه ازکمان که‌حرکت به پایین را شروع‌کند درزمان واحدی به ته آن‌می‌رسد- دراینجا نشان‌داده‌شده است. درقسمت‌سوم‌گسترده‌ها وگسترنده‌ها

1. Horologium Oscillatorium

بررسی می‌شوند. گستردهٔ یك منحنی‌مستوی، پوش قائمهای بر منحنی است، و هرمنحنی که منحنی‌مفروض گستردهٔ آن باشد، گسترندهٔ آن‌منحنی‌مفروض نامیده‌می‌شود. به‌عنوان کاربردهایی از نظریهٔ عام‌خود، هویگنس گستردهٔ سهمی و سیکلوئید را پیدا می‌کند. برای حالت نخست یك‌سهمی ازدرجهٔ ۲/۳ و برای‌حالت دوم‌سیکلوئید دیگری به‌همان اندازه به‌دست‌می‌آورد. درقسمت‌چهارم ساعت، مطالعهٔ آونگ مرکب همراه‌با این برهان‌که مرکز نوسان و نقطهٔ تعلیق رامی‌توان باهم‌عوض کرد، دیده می‌شود. در آخرین‌قسمت‌این اثر، به‌نظریهٔ ساعتهاپرداخته‌شده است. دراینجا به‌تشریح‌آونگ سیکلوئیدی برمی‌خوریم (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ‌مسئله‌ای ۷.۱۰)، که در آن دورهٔ نوسان مستقل از بزرگی یا کوچکی دامنهٔ نوسان است، چیزی که در مورد دامنهٔ نوسان یك‌آونگ ساده فقط تقریباً درست است. آخرین قسمت با ۱۳ قضیهٔ مربوط به نیروی گریز از مرکز در حرکت دورانی خاتمه می‌یابد، که در آن، از جمله، این‌حقیقت آشنا ثابت می‌شود که درحرکت دورانی یکنواخت مقدار نیروی گریز از مرکز با مربع سرعت خطی تناسب مستقیم و با شعاع دایره نسبت معکوس دارد. در سال ۱۶۷۵، تحت نظارت هویگنس، اولین ساعتی‌که با فنرمویی تنظیم می‌شد، ساخته شد؛ این‌ساعت به‌لویی‌چهاردهم اهدا شد.

هویگنس درسال ۱۶۸۱ به هلند بازگشت. عدسیهایی با طول‌کانونی بسیار بزرگ ساخت، و عدسیهای بیرنگ برای تلسکوپها را اختراع کرد. در ۱۶۸۹، از انگلستان دیدارکرد و با آیزك نیوتن، که‌کار وی را بسیار ستود، آشنا گردید. به‌فاصلهٔ‌کوتاهی پس‌از بازگشت به‌هلند، درسال‌بعد رساله‌ای درشرح‌نظریهٔ‌موجی‌نورمنتشرکرد، وبراساس‌این‌نظریه توانست‌قوانین‌انعکاس وانکسار را به‌طور هندسی‌استخراج‌کند، و پدیدهٔ‌انکسارمضاعف را توضیح دهد. از سوی دیگر، نیوتن از نظریهٔ گسیلی بودن نور طرفداری‌کرد، و شخصیت برجستهٔ او موجب شدکه دانشمندان معاصر وی این‌نظریه را بر نظریهٔ‌موجی ترجیح دهند.

هویگنس چند رسالهٔ کم اهمیت‌ترهم نوشت. طول قوس سیسوئید دیوکلس را حساب کرد. به تحقیق پیرامون هندسهٔ منحنی زنجیری (شکلی که یك زنجیر کاملاً قابل انعطاف تمدید ناپذیر با چگالی خطی یکنواخت که از دو تکیه‌گاه غیر واقع بر یك خط عمودی آویزان شده باشد، به خود می‌گیرد) پرداخت، در بارهٔ منحنی لگاریتمی مطالبی نگاشت، قاعدهٔ فرمابرای ماکزیموم ومینیموم را، به‌صورت امروزی برای‌چندجمله‌ایها، بیان کرد، وکاربردهای متعددی از ریاضیات را در فیزیك عرضه‌کرد.

نظیراغلب براهینی‌که ازسوی نیوتن‌آورده شده، استدلالهای هویگنس تقریباً به‌طور کامل، به‌روشهای هندسهٔ یونانی، با تأکید فراوان بر دقت، صورت‌گرفته است. باخواندن آثار او نمی‌توان تشخیص دادکه او با روشهای قدرتمند نوین هندسهٔ تحلیلی و حسابان آشنا بوده است. هویگنس در شهر زادگاه خود در ۱۶۹۵ درگذشت.

۶-۱۰ برخی ریاضیدانان فرانسوی و ایتالیایی‌قرن هفدهم

ریاضیدانان‌کم‌اهمیت‌تری درقرن هفدهم وجود داشتندکه بایدکار آنان، ولو باختصار، ذکر

شود. ما دراین بخش و در دو بخش آتی به این‌کارمی‌پردازیم، و اینان رابرحسب‌نواحی جغرافیایی مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

از اولین پیروان قابل ذکر دیوفانتوس در اروپا، یکی باشه دو مزیریاك (۱۵۸۱- ۱۶۳۸) است. اثر دلپذیر وکلاسیك او تحت عنوان مسائل مطبوع و لذت بخش[1]،که در ۱۶۱۲، و دوباره، به‌صورت حجیمتر، در ۱۶۲۴ منتشر شد،شامل حیله‌های‌متعددی‌درحساب و سؤالاتی است که عملاً در همهٔ مجموعه‌های معماها و تفریحات ریاضی که بعداً به‌چاپ رسیده‌اند،آمده‌اند. در سال۱۶۲۱، وی ویرایشی از متن یونانی علم حساب دیوفانتوس‌را، همراه با ترجمهٔ لاتینی آن به انضمام یادداشتهایی برآن منتشرکرد. در نسخه‌ای از این‌اثر بودکه فرما حواشی معروف خود را نگاشت.

نظریهٔ اعداددان دیگری‌که نویسندهٔ کثیرالتألیفی در بسیاری از زمینه‌ها بود ، راهب فرقهٔ مینیم[2] مارن مرسن (۱۵۸۸-۱۶۴۸) است. وی مدام با بزرگترین ریاضیدانان عصر خود درمکاتبه بود. وی، درآن روزهای پیش ازپیدایش‌مجلات‌علمی، به‌طورتحسین‌آمیزی به عنوان مرکز مبادلهٔاندیشه‌های ریاضی خدمت‌کرد. آثار بسیاری از ریاضیدانان یونانی راویرایش‌کرد و مطالبی در بارهٔ موضوعات گوناگون نگاشت. شهرت وی‌بویژه‌در رابطه با باصطلاح **اعداد اول مرسن** ، یا اعداداولی به‌صورت 2^p-1 است ،که‌آنها رادر دوسه‌جا دراثرش اندیشه‌های فیزیکی-ریاضی[3] مربوط به‌سال۱۶۴۴مورد بحث‌قرارداد. ارتباط‌بین اعداداول‌مرسن واعدادتام دربخش۳-۳ خاطرنشان‌شد. عدداول مرسن برای $p=۴۲۵۳$ اولین عدد اول شناخته‌شده‌ای است‌که دربسط اعشاری‌آن بیش‌از۱۰۰۰رقم‌موجود است.

کلود میدورژ (۱۵۸۵-۱۶۴۷)، از دوستان دکارت، هندسه‌دان و فیزیکدان بود . اوآثاری در زمینهٔ اپتیك و یك مطالعهٔ ترکیبی از مقاطع مخروطی راکه درآن بسیاری از براهین مطول آپولونیوس‌را ساده‌کرده بود، منتشرکرد. وی دستنوشتهٔ جالبی شامل‌صورتها و جوابهای متجاوز ازهزار مسئلهٔ هندسی از خود به‌جا گذاشت‌وتفریحات‌ریاضی[4]عامه‌پسند لورشون[5] را ویرایش‌کرد.

قبلاً، دربخش۹-۸، اشاره‌ای به‌کار فیلیپ‌دولاهیر(۱۶۴۰-۱۷۱۸) کرده‌ایم. وی‌را، که‌نقاش، معمار،منجم، و ریاضیدان بوده است، مردی با نبوغ در زمینه‌های‌مختلف توصیف کرده‌اند. علاوه برکتابش در بارهٔ مقاطع مخروطی‌که قبلاً وصف شد، در بـارهٔ روشهای نموداری ، انواع گوناگون منحنیهای مستوی از درجات بالا، و مربعهای جادویی مطالبی نوشت . وی نقشه‌هایی از زمین رابه طریقهٔ **تصویرکروی** ساخت ،که درآن‌مرکز تصویر، برخلاف تصویر گنجنگاشتی بطلمیوس (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ‌مسئله‌ای ۱۰.۶) نه درقطب‌کره بلکه‌برامتداد شعاع ماربرقطب و به فاصلهٔ $r\sin 45^\circ$ در خارج‌کره واقع است.

وینچنسو ویویانی[6] (۱۶۲۲-۱۷۰۳)، یکی دیگراز شاگردان گالیله، که‌هم به‌فیزیك

---

1. Problèmes plaisants et délectables
2. Minimite
3. Cogitata physico - mathematica
4. Rècrèations mathèmatiques
5. Leurechon
6. Vincenzo Viviani

و هم به هندسه‌علاقه داشت، درزمرهٔ ریاضیدانان‌کم‌اهمیت‌تر ایتالیایی است که باید‌در‌اینجا ذکرشوند. وی مردی‌بود که درطول حیاتش‌سخت مورد‌تجلیل‌قرار گرفت. در میان‌کارهای هندسی‌اش یکی تعیین مماس بر سیکلوئید بود، ولی چند تنی این مسئله را قبلاً حل کرده بودند. درسال ۱۶۹۲، وی مسئلهٔ زیر را مطرح‌نمود، که جلب توجه زیادی کرد : یك گنبد نیمکره‌ای دارای چهار پنجرهٔ مساوی با چنان اندازه‌ای است که بقیهٔ مساحت را می‌توان تربیع نمود ؛ نشان دهید که این‌کار چگونه ممکن‌است. جوابهای صحیحی ازسوی عده‌ای از ریاضیدانان برجستهٔ معاصر وی داده شد. ویویانی مسئلهٔ تثلیث زاویه را با استفاده از یك هذلولی متساوی‌القطرین‌حل کرد.

لازم است از خانوادهٔ کاسینی هم، که چندین عضوآن کارهای برجسته‌ای در نجوم انجام دادند واستفادهٔ استادانه‌ای از ریاضیات دراین زمینه به‌عمل‌آوردند، ذکری به‌میان آید. **منحنی کاسینی**، که مکان هندسی نقطه‌ای است که حاصلضرب فواصل آن از دوکانون ثابت مقداری ثابت است، توسط جیووانی دومنیکوکاسینی[1] (۱۶۲۵ - ۱۷۱۲)در۱۶۸۰ دررابطه باموضوعی دربارهٔ حرکتهای نسبی زمین وخورشید مورد مطالعه قرارگرفت. در خانواده‌ای ازمنحنیهای هم کانون کاسینی‌لمنیسکات هشت شکل [هشت انگلیسی] برنولی را می‌توان یافت، حقیقتی که تاپایان قرن هجدهم موردتوجه قرارنگرفت. منحنیهای‌کاسینی را می‌توان به‌عنوان مقاطع یك چنبره باصفحاتی موازی بامحور چنبره پیداکرد. جیووانی کاسینی به‌عنوان استاد نجوم دربولونیا به‌کارپرداخت، ولی درسال ۱۶۶۹ از طرف لوئی چهاردهم به پاریس دعوت شد و در آنجا، در سال ۱۶۷۱، اولین منجم دربار فرانسه شد. چون به‌تبعیت کشور فرانسه درآمد و دومین فرزندش، ژاك[2] کاسینی (۱۶۷۷-۱۷۵۶) درفرانسه متولد شد، این شاخهٔ خانوادهٔ کاسینی اززمرهٔ ایتالیائیها بیرون‌آمدند. در ۱۷۱۲ ژاك به‌عنوان منجم دربارجانشین پدرشد، وسزار فرانسوا[3] کاسینی، پسر ژاك، به‌نوبهٔ‌خود در۱۷۵۶ به‌عنوان منجم دربارجانشین‌پدرشد وجای اورا یکی‌ازفرزندانش، ژاك‌دومینیك[4] کاسینی (۱۷۴۸-۱۸۴۵) گرفت. همهٔ آنان، به‌اعتلای سنت خانواده درایفای سهم به‌عالم علم کوشیدند.

۱۰-۷ برخی ریاضیدانان آلمان و ایالات سفلی در قرن هفدهم

پیشرفت موفقیت‌آمیزی که آلمان درطول قرن شانزدهم درریاضیات داشت، درقرن‌هفدهم ادامه نیافت. جنگ سی‌ساله (۱۶۱۸-۱۶۴۸) وناآرامی بعد از آن درکشورهای تیوتنی این قرن را برای پیشرفت معنوی در آنجا نامساعد کرد. کپلر و لایبنیتز تنها ریاضیدانان درجهٔ اول این دوره به‌شمار می‌آیند وتنها ریاضیدان با اهمیت کمتری که در اینجا ذکر خواهیم‌کرد، اهرنفرید والتر فون چیرنهاوزن[5] (۱۶۵۱-۱۷۰۸) است. چیرنهاوزن وقت

1. Giovanni Domenico Cassini
2. Jacques
3. Cèsar - Francois Cassini
4. Jacques Dominique
5. Ehrenfried Walther von Tschirnhausen

زیادی را وقف ریاضیات و فیزیك کرد، رد خودرا درمطالعهٔ منحنیها و نظریهٔ معادلات به‌جا گذاشت. در ۱۶۸۲، **منحنیهای محرق** را معرفی و مطالعه کـرد، چنین منحنیی پوش اشعهٔ نورانی، ساطع شده از یك منبع نقطه‌ای پس از انعکاس نسبت به‌یك منحنی مفروض‌است. مـارپیچ سینوسی خاص $a=r\cos^{3}(\theta/3)$، به **معادلهٔ درجه سوم چیرنهاوزن** معروف است. مارپیچ سینوسی کلی $r^{n}=a\cos n\theta$، که در آن n گویاست، توسط کالین ماکلورن[1] در ۱۷۱۸ موردمطالعه قرارگرفت (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۸.۱۰). درنظریهٔ‌معادلات، چیرنهاوزن بویژه به‌خاطر تبدیلی که یك معادلهٔ چند جمله‌ای درجهٔ nم برحسب x را به‌یك معادلهٔ چند جمله‌ای درجهٔ nم برحسب y تبدیل می‌کند که در آن ضرایب y^{n-1} و y^{n-2} هردوصفرند، مشهوراست. بعداً، درسال ۱۸۳۴، ج. ب. جرارد یك تبدیل چیرنهاوزن پیدا کردکه یك معادلهٔ چند جمله‌ای برحسب x را به‌یك معادلهٔ چند جمله‌ای برحسب y تبدیل می‌کندکه درآن ضرایب y^{n-1}، y^{n-2}، y^{n-3} همه صفرند. کاربرد این تبدیل درمورد یك معادلهٔ درجهٔ پنجم را قبلاً، درسال ۱۷۸۶، ا. س. برینگ[2] داده بود و در حل غیر جبری معادلهٔ درجهٔ پنجم به‌کمك توابع بیضوی حائز اهمیت است.

علیرغم دوره‌های پرآشوب، ناحیهٔ جغرافیایی که اینك ممالك سفلی نامیده می‌شود، تعدادی ریاضیدان کم اهمیت‌ترا در قرن هفدهم پدید آورد. از ویلبرورد اسنل (۱۵۸۰ یا ۱۵۸۱–۱۶۲۶) قبلاً در رابطه با کارش در مساحی دایره یاد شده‌است. وی اعجوبه‌ای بود، وگفته‌اند که قبل از ۱۲ سالگی با آثار ریاضی استاندهٔ زمان خودآشنا شده بوده‌است. نام **لوکسودروم**[3]، برای مسیری بر کره که زوایای ثابتی بامدارها می‌سازد، به‌اسنل منسوب است، و وی یکی ازاولین کسانی است که درخواص مثلثهای قطبی کروی تحقیق کرده‌است. مثلثهای اخیررا اولین‌بار ویت مورد بحث قرارداده است.

آلبرژیرار[4] (۱۵۹۵–۱۶۳۲) نیز، که به نظر می‌رسد عمدتاً در هلند زیسته باشد، به‌هندسهٔ کروی و مثلثات پرداخت. در سال ۱۶۲۶، رساله‌ای در مثلثات منتشر نمود که حاوی اولین مورداستفاده ازعلائم اختصاری sin، tan، sec، به‌نشانهٔ سینوس، تانژانت، سکانت است. وی عبارتی را برای یك مثلث کروی برحسب زیادتی کرویِ آن* ارائه‌داد. ژیرار همچنین جبردانی باتوانایی قابل ملاحظه بود. او آثار سیمون استوین را ویرایش کرد.

گرگوار دو سن‌ونسان (۱۵۸۴–۱۶۶۷) از نام‌آورانی‌است‌که در قرن هفدهم در تربیع دایره کار کرده است. وی از روشهای مقدم بـراختراع حسابان در مسائل مختلف تربیع استفاده می‌کرد.

فرانس وان سخوتن پسر (۱۶۱۵–۱۶۶۰ یا ۱۶۶۱)، یك استاد ریاضی بودکه دو چاپ هندسهٔ دکارت به‌زبان لاتین را ویرایش کرد، و به‌هویگنس، هود، واسلوزه ریاضی

---

1. Colin Maclaurin　　2. E.S. Bring
3. Loxodrome　　4. Albert Girard

* تفاضل زوایای یك مثلث کروی و °۱۸۰.ـم.

آموخت. وی دربارهٔ پرسپکتیو مقالاتی نوشت و آثار ویت را ویرایش کرد. پدر وی، فرانس وان سخوتن پدر، و برادر ناتنی‌اش، پتروس وان سخوتن، نیز استاد ریاضی بودند.

یوهان هود[1] (۱۷۰۴-۱۶۳۳) شهردار آمستردام بود. مقالاتی دربارهٔ ماکزیموم و مینیموم و نظریهٔ معادلات نوشت. درموضوع اخیر، وی قاعدهٔ ماهرانه‌ای برای پیدا کردن حاصلضرب ریشه‌های یك چند جمله‌ای دادکه معادل با روش امروزی آن است، که در آن ریشه‌های بزرگترین عامل مشترك چند جمله‌ای ومشتق آن را پیدا می‌کنیم.

رنه فرانسوا والتر دو اسلوزه[2] (۱۶۸۵-۱۶۲۲)، که از روحانیون کلیسا بود، رسالات متعددی در ریاضیات نوشت. وی مارپیچها، نقاط عطف، و پیداکردن واسطه‌های هندسی را مورد بحث قرارداد. خانوادهٔ منحنیهای $y^n=k(a-x)^p x^m$، که در آن توانها اعداد صحیح مثبتی‌هستند، به‌یاد او، **مرواریدهای اسلوزه**[3] نامیده می‌شوند.

سخن را با نیکولاس مرکاتور[4] (حدود ۱۶۲۰-۱۶۸۷) خاتمه می‌دهیم که در هولشتاین[5]، که درآن زمان بخشی‌از دانمارك بود، به‌دنیا آمد، اما قسمت‌اعظم زندگی‌خود را درانگلستان به‌سر برد. وی اصول اقلیدس‌را ویرایش کرد، دربارهٔ مثلثات، نجوم، محاسبهٔ لگاریتمها، وکیهان‌نگاری مطالبی نوشت. سری

$$\ln(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots,$$

که به‌طورمستقل توسط سن ونسان کشف شد، گاهی **سری مرکاتور** نامیده می‌شود. این‌سری به‌ازای $-۱<x\leqslant ۱$ همگراست، و می‌توان آن را به‌طور رضایتبخشی برای محاسبهٔ لگاریتمها به‌کار گرفت (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۱۰). نگاشت مشهوری از کره که به **تصویرمرکاتور** معروف‌است ودرآن لوکسودرومها به‌صورت‌خطوط راست‌ظاهرمی‌شوند، به‌نیکولاس‌مرکاتور منسوب نیست بلکه به‌گراردوس‌مرکاتور[6] (۱۵۹۴-۱۵۱۲) منسوب است.

۱۰-۸ برخی ریاضیدانان انگلیسی قرن هفدهم

بریتانیای کبیر هم سهم خودرا از ریاضیدانان کهتر در قرن هفدهم داشت. قبلاً در جای دیگری ویلیام، ویسکونت برونکر[7] (۱۶۸۴-۱۶۲۰) را ذکر کرده‌ایم. وی یکی از بنیانگذاران واولین رئیس انجمن‌سلطنتی لندن بود، و با والیس، فرما، ودیگرریاضیدانان برجسته ارتباط داشت. وی دربارهٔ محاسبهٔ طول قوس سهمی وسیکلوئید مطالبی نوشت، و دراستفاده از سریهای نامتناهی برای بیان کمیتهایی که نمی‌توانست آنها را به‌طریقی‌دیگر تعیین کند، تردیدی به‌خود راه نمی‌داد. مثلاً ثابت کرد که مساحت محصور بین هذلولی

---

1. Johann Hudde
2. René Francois Walter de Sluze
3. pearls of Sluze
4. *Nicolaus Mercator*
5. *Holstein*
6. Gerhardus Mercator
7. William, Viscount Brouncker

متساوی‌القطرین $xy=۱$، محور x ها، ودوخط $x=۱$ و $x=۲$ برابر است با

$$\frac{۱}{(۱)(۲)}+\frac{۱}{(۳)(۴)}+\frac{۱}{(۵)(۶)}+\cdots$$

و یا با

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots.$$

برونکراولین‌نویسندهٔ انگلیسی بودکه به‌تحقیق و استفاده ازخواص‌کسور مسلسل پرداخت. دربخش ۴ــ۸، کسر مسلسل جالب او را دربسط $۴/\pi$ داده‌ایم.

به‌ریاضیدان‌اسکاتلندی، جیمز گریگوری (۱۶۳۸ــ۱۶۷۵)، نیز درجای دیگر اشاره شده است (بخش ۴ــ۸) . وی بترتیب در ۱۶۶۸ و ۱۶۷۴ ، به استادی ریـاضیات در دانشگاههای سنت اندروز[1] و ادینبورو[2] رسید. وی به‌همان اندازه به فیزیك هم علاقه‌مند بود وکتابی درباب اپتیك منتشرکردکه درآن تلسکوپ انعکاسی‌که اکنون به‌نام او شهرت دارد ، تشریح شده است . در ریاضیات، او $\arc \tan x$ ، $\tan x$، و $\operatorname{arc} \sec x$ را به‌صورت سریهای نامتناهی‌بسط داد (۱۶۶۷) و ازاولین‌کسانی بودکه بین‌سریهای‌همگرا و واگرا تمایز قایل شد. وی برهانی‌استادانه ولی غیرمقنع ازامتناع تربیع دایرهٔ اقلیدسی را ارائه داد. سری

$$\operatorname{arc}\tan x=x-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۵}}{۵}-\frac{x^{۷}}{۷}+\cdots,$$

که نقش عظیمی در محاسبهٔ π دارد، به‌نام او مشهور است. وی در سنین جوانی، به‌فاصلهٔ کوتاهی پس از آنکه از خستگی بصری ناشی از ارصادهای نجومی‌اش نابینا شده بود؛ درگذشت. جالب‌است که برادرزادهٔ او، دیویدگریگوری (۱۶۶۱ــ۱۷۰۸) هم از۱۶۸۴ تا۱۶۹۱ درادینبورو به‌مقام‌استادی رسید، وبعدازآن به‌استادی ساویلی نجوم‌درآکسفورد منصوب شد. اونیز به‌اپتیك علاقه‌مند بود ودربارهٔ این موضوع ونیز هندسه ونظریهٔ نیوتن آثاری دارد.

گفته شده است که اگر آتش‌سوزی بــزرگ لندن[3] در سال۱۶۶۶ نمی‌بود ، سرـ کریستوفررن (۱۶۳۲ــ۱۷۲۳) به‌جای اینکه به‌عنوان معمارمشهور شود به‌عنوان‌ریاضیدان شهرت می‌یافت. وی از ۱۶۶۱ تا ۱۶۷۳ استاد ساویلی نجوم درآکسفورد و برای مدتی رئیس انجمن سلطنتی بود. دربارهٔ قوانین برخــورد اجسام ، دربارهٔ موضوعات مرتبط با اپتیك، مقاومت مایعات، ومباحث دیگر در فیزیك ریاضی ومکانیك سماوی مقالاتی نوشت. کشف دو دستگاه مولد در روی هذلولوی یکپارچه در۱۶۶۹ به‌او منسوب شده است. وی

1. St. Andrews 2. Edinburgh 3. London's Great Fire

کریستوفررن
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

اولین کسی بود (۱۶۵۸) که نشان داد طول هرقوس از یك سیکلوئید هشت برابر شعاع دایرهٔ مولدآن است. ولی‌بعد از آتش‌سوزی بزرگ، رن‌چنان نقش برجسته‌ای در بازسازی کلیسای جامع سنت پل وحدود ۵۰ کلیسا یا بیشتر وساختمانهای عمومی به‌عهده گرفت که شهرت او به‌عنوان معمار شهرتش را به‌عنوان ریاضیدان تحت‌الشعاع قرار داد.

شایدلازم‌باشدکه‌از رابرت‌هوك[1] (۱۶۳۵–۱۷۰۳) وادموندهالی(۱۶۵۶–۱۷۴۲) هم ذکری به‌میان آید، گرچه این‌دو درموضوعات وابسته به‌ریاضیات ونه‌خودآن به‌شهرت رسیدند. هوك تقریباً به‌مدت ۴۰ سال استاد هندسه در کالج گرشام بود. هر دانشجوی فیزیك مقدماتی بااو به‌خاطر قانونی که تنش وکشش را در یك نخ کشسان کشیده شده به‌هم ربط می‌دهد، آشناست. وی‌آونگ کانونی‌را اختراع کرد. برای یافتن قانون‌نیرویی (که بعداً توسط نیوتن ثابت‌شدکه قانون عکس مجذوراست) که تحت آن سیارات به‌دور خورشید می‌چرخند، دست به‌تلاش زد. او و هویگنس هردو ساعتی را طراحی کردند که توسط یك فنرتعادل تنظیم می‌شد. هالی جانشین والیس به‌عنوان استادساویلی هندسه وبعد منجم دربار شد. وی به‌طور حدسی مقالهٔ VIII گمشدهٔ مقاطع مخروطی آپولونیوس را بازسازی کرد وآثار متعددی از یونانیان باستان را ویرایش نمود، وبرخی ازآنها را از عربی ترجمه‌کرد درحالی‌که حتی‌کلمه‌ای از این زبان‌را نمی‌دانست. وی یك جدول مرگ ومیر هم از نوعی که امروزه در بازرگانی بیمهٔ عمر جنبهٔ اساسی دارد، گردآوری کرد. معهذاکارخلاق عمدهٔ او، باکیفیتی‌عالی، درنجوم است. اودربرخورد بادیگر فضلاهمانقدر مهربان وسخی بودکه هوك حسود و زودرنج بود. قسمت اعظم‌کار او درقرن هجدهم انجام شده است.

1. Robert Hooke

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱.۱۰ جبر هندسی

(الف) با قطعه خط واحد مفروض و قطعه‌خطی به‌طول x، به کمك خط‌کش و پرگار قطعه خطهایی به‌طولهای $x^۲$، $x^۳$، $x^۴$، . . .، بسازید.

(ب) با قطعه خط واحد مفروض و قطعه خطهایی به طولهای x، y، z، قطعه خطهایی به‌طولهای xy و xyz بسازید.

(ج) قطعه خط واحدی مفروض است. نشان دهید کـه، اگر $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای‌هایی برحسب x باشند که ضرایب آنها با قطعه خطهای مفروضی نمایش داده‌شده‌اند، می‌توانیم متناظر با هـر قطعه خطی کـه برای x انتخاب می‌شود، قطعه خطـی به طول $y=f(x)/g(x)$ بسازیم.

(د) معادلهٔ درجه دوم $x^۲-gx+h=۰$، $g>۰$، $h>۰$ مفروض است. بر قطعه خطی به‌طول g نیمدایره‌ای مانند C به‌همین قطر رسم کنید، وسپس خطی به‌موازات قطر C به‌فاصلهٔ $\sqrt{h}$ ازآن رسم کنید تا C را در نقطه‌ای مانند P قطع کند. از P عمودی بر قطر C وارد کنید، این عمود قطر را به‌دوقسمت r و s تقسیم می‌کند. نشان دهید که r و s معرف ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض هستند. معادلهٔ $x^۲-۷x+۱۲=۰$ را با این روش حل کنید.

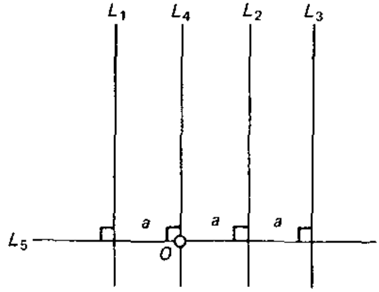
(ه) معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+gx-h=۰$، $g>۰$، $h>۰$ مفروض است. بر قطعه‌خطی به‌طول g به‌همین‌قطر دایره‌ای مانند C رسم کنید، وسپس مماسی بر C رسم و بر آن ازنقطهٔ تماس طولی برابر $\sqrt{h}$ جدا کنید. از انتهای دیگر خط مماس، قاطع مار بر مرکز C را رسم کنید. با نشان دادن تمام قاطع با r و قطعهٔ خارجی آن با s نشان دهید که $-r$ و s معرف ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض هستند. معادلهٔ $x^۲+۴x-۲۱=۰$ را با این روش حل کنید.

۲.۱۰ «هندسهٔ» دکارت

(الف) پنج خط $L_۱$، . . .، $L_۵$ که نحوهٔ قرار گرفتن آنها نظیر شکل ۹۴ است، مفروض‌اند. فرض کنید p_i معرف فاصلهٔ نقطه‌ای مانند P ازخط L_i باشد. با اختیار $L_۵$ و $L_۴$ به‌عنوان محورهای x و y، معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای مانند P راکه حرکت آن به‌طوری است که

$$p_۱p_۲p_۳=ap_۴p_۵,$$

پیدا کنید.



شکل ۹۴

(این مکان هندسی یك منحنی درجهٔ سوم است که نیوتن آن را **سهمی دکارتی** نامیدو گاهی **یك منحنی سه‌دندانه** هم نامیده شده‌است و بکرات درهندسه دیده می‌شود.)

(ب) نشان‌دهیدکه با ابزارهای اقلیدسی‌می‌توان هرچند نقطه راکه بخواهیم برروی مکان هندسی (الف) بسازیم.

(ج) چهارخط‌دلخواه L_1 ، L_2 ، L_3، وL_4 مفروض‌اند. فاصلهٔ‌نقطه‌ای‌مانند P ازخط L_i را با p_i نمایش‌می‌دهیم. نشان دهیدکه مکان هندسی P به‌طوری که $p_1p_2=kp_3p_4$، یك مقطع مخروطی است.

(د) روش دکارت را در رسم‌مماسی دریك نقطهٔ کلی‌سهمی $y^2=2mx$ به‌کاربرید، ونشان دهیدکه این‌کار به‌این حقیقت منجرمی‌شودکه تحت قائم (تصویرقطعه‌ای ازقائم که بین منحنی و محور سهمی قرار دارد برروی محور سهمی) دارای طول ثابتی است برابر با نصف لاتوس رکتوم [ضلع قائم] سهمی.

۳.۱۰ قاعدهٔ علامات دکارت

(الف) اگر c_1، c_2، ....، c_m، m عدد حقیقی غیرصفر دلخواه باشند، واگر دوجملهٔ متوالی‌این دنباله دارای‌علامتهای‌مخالف باشند،گوییم که‌این‌دوجمله‌نمایش یك‌واریاسیون است. به‌کمك این مفهوم می‌توانیم **قاعدهٔ علامات دکارت** را به‌صورت زیر بیان کنیم. برهان مربوط به‌آن‌را می‌توان‌درهر کتاب درسی که‌راجع به‌معادلات نوشته شده باشد، پیداکرد: فرض کنید $f(x)=0$ یك معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد که برحسب قوای نزولی x مرتب شده است. تعداد ریشه‌های مثبت و حقیقی معادله حداکثر برابر تعداد واریاسیونهای ضرایب $f(x)$است واختلاف‌بین این دو ، عددی‌است زوج. تعداد ریشه‌های منفی حقیقی آن حداکثر برابراست با تعداد واریاسیونهای ضرایب $f(-x)$ واختلاف بین این دونیزعددی است زوج. یك ریشهٔ حقیقی مکرر از مرتبهٔ m، به عنوان m ریشه به‌حساب می‌آید. ماهیت ریشه‌های معادلات زیر را به‌کمك قاعدهٔ علامات دکارت بررسی کنید:

۱. $x^9+3x^8-5x^3+4x+6=0$ ،

۲. $2x^7-3x^4-x^3-5=0$ ،
۳. $3x^4+10x^2+5x-4=0$.

(ب) نشان دهید که اگر n زوج باشد، معادلهٔ $x^n-1=0$ دقیقاً دارای دو ریشهٔ حقیقی است، و اگر n فرد باشد فقط دارای یك ریشهٔ حقیقی است.

(ج) نشان دهید که $x^5+x^2+1=0$ دارای چهار ریشهٔ موهومی است.

(د) ثابت کنید که اگر p و q حقیقی باشند، و $q\neq 0$، معادلهٔ $x^3+px+q=0$ وقتی p مثبت است دارای دو ریشهٔ موهومی است.

(ه) ثابت کنید که اگر ریشه‌های یك معادلهٔ چندجمله‌ای همه مثبت باشند، علامتهای ضرایب متناوباً مثبت ومنفی‌اند.

۴.۱۰ مسائلی از دکارت

(الف) نمودار فولیوم دکارت را رسم کنید،

$$x^3+y^3=3axy.$$

خط $x+y+a=0$ یك مجانب آن است.

(ب) معادلهٔ قطبی مربوط به‌فولیوم دکارت را پیدا کنید.

(ج) قراردهید $y=tx$ ویك‌نمایش پارامتری ازفولیوم دکارت‌را برحسب پارامتر t پیدا کنید. دامنهٔ تغییرات t راکه منجربه‌حلقه، بازوی پایینی، وبازوی‌بالایی آن می‌شود، پیدا کنید.

(د) معادلهٔ دکارتی فولیوم دکارت را وقتی‌که گره آن به‌عنوان مبدأ و محور تقارن منحنی به‌عنوان محور xها اختیارشود، پیدا کنید.

(ه) راه‌حل دکارت ازیك معادلهٔ درجهٔ چهارم ملخص روش ضرایب نامعین رابه‌کار می‌برد. به‌عنوان یك مثال، معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$x^4-2x^2+8x-3=0$$

را درنظربگیرید. طرف چپ معادله‌را برابربا حاصلضرب دوعامل درجه دوم به‌صورتهای x^2+kx+h و x^2-kx+m قراردهید. ازمتحد قراردادن‌ضرایب متناظر در دوطرف معادله، سه رابطه‌که k، h، m را به هم مربوط می‌کنند، به‌دست‌آورید. h و m را از سه رابطه حذف‌کنید تا معادلهٔ درجهٔ ششمی برحسب k که می‌تواند به‌عنوان یك معادلهٔ درجهٔ سوم برحسب k^2 تلقی‌شود، به‌دست آید. بدین‌ترتیب، حل معادلهٔ درجهٔ چهارم اصلی به‌حل یك معادلهٔ درجهٔ سوم وابسته‌ای تحویل می‌شود. با دانستن اینکه یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم برحسب k^2، $k^2=4$ است، چهار ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ چهارم اصلی را به‌دست آورید.

۵.۱۰ قضایای فرما

درحدود سال ۱۷۰۶، اویلر مسئلهٔ تعیین عدهٔ اعداد صحیح مثبت کوچکتر از عدد صحیح مثبت مفروض n و اول نسبت به n را مطرح و حل کرد. این عدد را امروزه معمولاً با $\phi(n)$ نشان می‌دهند، و **تابعϕاویلر** n نامیده می‌شود (گاهی نیز **نشانگر** n نامیده‌می‌شود). مثلاً، اگر $n=۴۲$، معلوم می‌شود که ۱۲عدد صحیح ۱، ۵، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۵، ۲۹، ۳۱، ۳۷، و ۴۱ تنها اعداد صحیح مثبت‌کوچکتر از ۴۲ و اول نسبت به آن هستند. بنابراین $\phi(۴۲)=۱۲$.

(الف) $\phi(n)$ را به‌ازای $n=۲, ۳, \cdots, ۱۲$ پیدا کنید. جدولی که مقادیر $\phi(n)$ را به‌ازای همهٔ مقادیـر $n\leqslant ۱۰۰۰۰$ می‌دهد توسط ج. و. ل. گلیشر (۱۸۴۸–۱۹۲۸) محاسبه شده است.

(ب) اگر p اول باشد، نشان دهید که $\phi(p)=p-۱$ و $\phi(p^a)=p^a(۱-۱/p)$.

(ج) می‌توان نشان داد که اگر $n=ab$، که در آن a و b متباین هستند، آنگاه $\phi(n)=\phi(a)\phi(b)$. بااستفاده‌ازاین‌حقیقت $\phi(۴۲)$ را از نتایج‌قسمت(الف) محاسبه‌کنید، و همچنین نشان دهید که اگر $n=p_۱^{a_۱}p_۲^{a_۲}\cdots p_r^{a_r}$، که در آن $p_۱$، $p_۲$، $\cdots$، p_r اعداد اول‌اند، آنگاه

$$\phi(n)=n(۱-۱/p_۱)(۱-۱/p_۲)\cdots(۱-۱/p_r)\cdot$$

ازاین فرمول برای محاسبهٔ $\phi(۳۶۰)$ استفاده‌کنید.

(د) اویلر نشان داد که اگر a عدد صحیـح مثبت دلخواهی اول نسبت به n باشد، آنگاه $a^{\phi(n)}-۱$ بر n بخشپذیراست. نشان دهید که قضیهٔ کوچك فرماحالت خاصی از این حکم است.

(ه) نشان دهید که برای اثبات‌آخرین «قضیهٔ» فرماکافی‌است‌که تنها توانهای اول $p>۲$ درنظرگرفته شوند.

(و) با پذیرش‌آخرین«قضیهٔ» فرما نشان دهید‌که منحنی $x^n+y^n=۱$، که درآن n عدد صحیح مثبتی بزرگتراز ۲ است، شامل هیچ نقطه‌ای با مختصات گویا بجز نقاطی‌که درآنها منحنی از محورهای مختصات عبورمی‌کند، نیست.

(ز) باقبول مقولهٔ (۶) بخش ۱۰–۳ (که دریك مثلث قائم‌الزاویه با اعداد صحیح، مساحت نمی‌تواند یك‌مجذور کامل باشد)، نشان دهید که معادلهٔ $x^۴-y^۴=z^۲$ دارای جوابهای صحیح مثبتی مانند x و y و z نیست، و لذا آخرین قضیهٔ فرما را در حالـت $n=۴$ ثابت‌کنید.

۶.۱۰ مسئلهٔ امتیازها

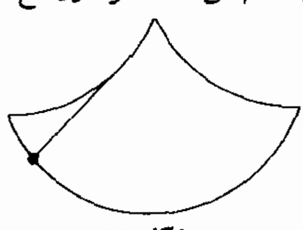
نحوهٔ تقسیم جایزه در یك بـازی شانسی بین دو بازیکن همقدرت A و B را پیدا کنید به‌شرطی که

(الف) A ، ۱ امتیاز دیگرمی‌خواهد تا برنده شود و B ، ۴ امتیاز دیگر می‌خواهد تا برنده شود. از روش فرما استفاده کنید.
(ب) A، ۳ امتیاز دیگرمی‌خواهدتا برنده شود و B، ۴امتیاز دیگرمی‌خواهد تا برنده شود. از روش پاسکال استفاده کنید.

۷۰۱۰ مسائلی از هویگنس

(الف) بازیکنی درصورت آوردن یك شش با یك تاس برندهٔ ۳۰۰ دلارخواهدشد. امید ریاضی برد او چقدراست؟
(ب) فرض کنید که بازیکنی در صورت آوردن شش با یك تاس، برندهٔ ۳۰۰ دلار می‌شود ولی درصورت آوردن یك‌پنج، برندهٔ ۶۰۰ دلارمی‌شود. امید ریاضی برد اوچیست؟
در زیرچند مسئلهٔ احتمال که به‌وسیلهٔ هویگنس حل شده است، آورده می‌شود:
۱. A و B یك درمیان بایك جفت تاس معمولی تاس می‌ریزند. A در صورتی که قبل ازاینکه B یك ۷ بیاورد ۶ بیاورد برنده می‌شود، و B درصورتی که قبل ازآنکه A، ۶ بیاورد ۷ بیاورد، برنده می‌شود. اگر A بازی را شروع کند، آنگاه شانس برنده شدن او به‌شانس برنده شدن B مثل ۳۰ به ۳۱ است.
۲. A و B هریك ۱۲ مهره برمی‌دارندو با ۳ تاس به‌صورت زیربازی می‌کنند: اگر ۱۱ بیاید، A یك مهره به B می‌دهد؛ اگر ۱۴ بیاید، B یك مهره به A می‌دهد؛ وکسی که اولین بار همهٔ مهره‌ها را به‌دست می‌آورد، برنده می‌شود. دراین صورت شانس A به B مثل عدد ۲۴۴۱۴۰۶۲۵ است به‌عدد ۲۸۲۴۲۹۵۳۶۴۸۱.
۳. A و B با دوتاس‌بازی می‌کنند، اگر ۷ بیاید، A برنده می‌شود؛ اگر ۱۰ بیاید، B برنده می‌شود؛ اگر هرعدد دیگری ظاهرشود بازی مساوی است. دراین صورت‌شانس برنده شدن A به B مثل ۱۳ به ۱۱ است.
(ج) با استفاده ازخاصیت همزمانی سیکلوئید، واین‌حقیقت که‌گستردهٔ یك سیکلوئید، سیکلوئید دیگری با همان اندازه است، نشان دهید که آونگی که مقید به‌نوسان بین دو قوس متوالی یك سیکلوئید وارون باشد (نگاه کنید به شکل ۹۵) باید با دامنهٔ ثابتی نوسان نماید.

(د) توپی به‌طوریکنواخت درانتهای یك‌نخ دایره‌وار، درحال تاب‌خوردن است و درهر دقیقه یك گردش کامل انجام می‌دهد. اگر طول نخ دو برابر و دورهٔ گردش نصف



شکل ۹۵

شود، نیروی گریز از مرکز درمقایسه با وضعیت اول چه وضعی پیدا می‌کند؟

۸.۱۰ منحنیهای مسطح از درجات بالا

(الف) دریك دستگاه مختصات دکارتی قائم نقاط$(-a,۰)$ و $(a,۰)$ راکانونهای منحنی کاسینی و $k^۲$ را مقدار ثابت حاصلضرب فواصل یك نقطهٔ آن از دوکانون بگیرید ومعادلهٔ دکارتی منحنی را پیداکنید.

(ب) نشان دهیدکه معادلهٔ قطبی مربوط به‌منحنی فوق چنین است:

$$r^۴-۲r^۲a^۲ \cos ۲\theta+a^۴=k^۴.$$

توجه‌کنیدکه اگر $k=a$، منحنی به‌صورت **لمنیسکات برنولی** بامعادلهٔ زیربه‌دست‌می‌آید:

$$r^۲=۲a^۲ \cos ۲\theta.$$

(ج) نشان دهیدکه لمنیسکات برنولی، سیسوئید (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۴۰۴) دایره‌ای به‌شعاع $a/۲$ وخودآن است، برای‌قطبی‌مانند O به‌فاصلهٔ $a\sqrt{۲}/۲$ واحدازمرکزآن.

(د) هذلولی‌متساوی‌الساقین $xy=k^۲$ را به‌دقت رسم‌کنید و چند عضو از خانوادهٔ دوایری راکه مراکزشان براین هذلولی واقع و ازمبدأ می‌گذرند، رسم کنید. پوش این خانوادهٔ دوایر، لمنیسکات برنولی است.

(ه) با استفاده از این‌حقیقت‌که قائم در یك نقطه برلمنیسکات برنولی در (ب) با شعاع حامل این‌نقطه زاویه‌ای‌برابر ۲θ می‌سازد، نشان دهیدکه چگونه می‌توان مماسهای براین لمنیسکات را رسم‌کرد.

(و) نشان دهید که منحنیهای زیر حالات خاص مارپیچ سینوسی $r^n=a\cos n\theta$ به‌ازای مقادیرگویای مختلف n هستند.

منحنی	n
هذلولی متساوی‌القطرین	-۲
خط مستقیم	-۱
سهمی	$-۱/۲$
منحنی درجهٔ سوم چیرنهاوزن	$-۱/۳$
کاردیوئید	$۱/۲$
دایره	۱
لمنیسکات برنولی	۲

(ز) اپی‌سیکلوئیدمسیرنقطه‌ای است از یك دایره که روی دایرهٔ مبنای ثابتی و در خارج آن می‌غلطد. منحنی‌محرق دایره‌ای‌برای یك‌منبع نوری دربینهایت، یك‌اپی‌سیکلوئید

با دونقطهٔ بازگشت است که دایرهٔ مبنای آن با دایرهٔ مفروض هم‌مرکز و شعاع آن نصف شعاع دایرهٔ مفروض است. اپی‌سیکلوئیدی با دو نقطهٔ بازگشت یك نفروئید [منحنی کلیه شکل] نامیده می‌شود. منحنی‌محرق یك دایره برای یك منبع نوری واقع برمحیط یك‌دایره اپی‌سیکلوئیدی با یك نقطهٔ بازگشت است که دایرهٔ مبنای آن با دایرهٔ مفروض هم‌مرکز و شعاع آن یك‌سوم شعاع دایرهٔ مفروض است. اپی‌سیکلوئیدی با یك نقطهٔ بازگشت یك **کاردیوئیداست**. یاکوب برنولی، درسال ۱۶۹۲، نشان دادکه منحنی‌محرق یك کاردیوئید، وقتی‌که منبع نوری درنقطهٔ بازگشت کاردیوئید باشد، یك‌نفروئید است. منحنی محرق یك دایره را می‌توان به‌صورت منحنیهای روشنی‌که برسطح قهوه دریك فنجان تشکیل‌می‌شود، یا برروی میز در داخل‌حلقهٔ‌یك دستمال سفرهٔ مدور مشاهده‌کرد. به‌مشاهدهٔ چندمنحنی‌محرق یك دایره، با استفاده ازیك فنجان مایع ویك منبع نوری متحرك، بپردازید.

۹.۱۰ چند مسئلهٔ سرگرم‌کننده ازباشه

در زیر چند مسئلهٔ سرگرم‌کننده را می‌آوریم که درکتاب مسائلی مطبوع ولذتبخش باشه یافت می‌شود. اینها ، و مسائل دیگری از باشه را می‌توان در مقالات‌وتفریحات ریاضی [1] بال[2]ـ کاکستر[3] نیز پیداکرد.

(الف) (۱) ازشخصی‌بخواهیدکه پنهانی‌عددی‌را درنظربگیرد، وسپس ازاو بخواهید که‌آن را سه‌برابرکند. (۲) سؤال‌کنیدکه حاصلضرب زوج یا فرد است. درصورت زوج بودن، ازاو بخواهیدکه نصف آن را اختیارکند. درصورت فردبودن آن از او بخواهید که به‌آن ۱ را اضافه ونصف‌آن را اختیار کند. (۳) به او بگویید تا نتیجهٔ (۲) را در ۳ ضرب کند ، و به شما بگوید که قسمت صحیح این عدد بر ۹ ، که مثلاً آن را با n نشان می‌دهید، چیست. (۴) دراین‌صورت عدد اصلی انتخاب شده $۲n$ یا $۲n+۱$ است بسته به اینکه نتیجهٔ مرحلهٔ (۱) زوج یا فرد باشد، این مطلب را ثابت‌کنید.

(ب) ازشخصی‌بخواهیدکه پنهانی‌عددی کوچکتر از ۶۰درنظر بگیرد، وباقیمانده‌های تقسیم آن بر۳، بر۴، و بر۵، را مثلاً به‌صورت‌اعداد a، b، و c اعلام‌نماید. دراین‌صورت عددانتخاب شده باقیماندهٔ تقسیم $۴۰a+۴۵b+۳۶c$ بر ۶۰ خواهد بود. این مطلب را ثابت‌کنید.

(ج) به A بگوییدکه پنهانی هرتعدادی، بیشتراز ۵، ازبین‌تعدادی مهره را انتخاب کند وبه B بگویید سه‌برابر آن را انتخاب‌کند. از A بخواهید که ۵ مهره به B بدهد، و سپس از B بخواهیدکه ۳ برابرمهره‌هایی راکه برای A باقی مانده است به A منتقل‌کند. اکنون می‌توانید به B بگویید که او ۳۰ مهره دارد. توضیح دهید که چرا چنین است و مطلب را به‌حالتی تعمیم دهیدکه درآن به‌جای ۳ و ۵، p و q گذاشته شوند.

(د) A پنهانی یکی از دو عدد را انتخاب می‌کند، که یکی از آنها فرد و دیگری

---

1. Mathematical Recreations and Essays 2. Ball 3. Coxeter

زوج است، وعدد دیگربه B داده می‌شود. از A بخواهید که عدد خودش را دوبرابر کند، و از B بخواهید که عدد خود را سه‌برابر کند. مجموع دو حاصلضرب را بپرسید. اگر مجموع زوج باشد، دراین‌صورت A عدد فرد را انتخاب کرده است؛ درغیراین‌صورت A عدد زوج را انتخاب کرده‌است. این را توضیح دهید.

(ه) ازکسی بخواهید که ساعتی، مثلاً m، را درنظر بگیرد، و سپس انگشت خودرا برروی عددی که نشان‌دهندهٔ ساعت دیگری، مثلاً n، است قرار دهد. اگر، با شروع از عددی که انگشت برآن قرار دارد، وی به‌طورمتوالی ضربات آهسته‌ای برروی شماره‌های روی ساعت، در جهت عکس حرکت عقربه‌های آن بزند، و در همان حال ضربات را به صورت m، $m+1$، وغیره بشمارد، تا به شمارهٔ $n+12$ برسد، در این صورت آخرین عددی که برآن ضربه نواخته شده است، ساعتی خواهد بود که در ابتدا او آن را درنظر گرفته است. این را ثابت کنید.

۱۰.۱۰ مقداری هندسه

(الف) با روش روبروال، نشان دهید که مماس‌وقائم برنقطه‌ای ازیك مقطع‌مخروطی مرکزی زاویه‌های بین شعاع‌های حامل واصل به‌این نقطه را نصف می‌کنند.

(ب) بنابر تعریف یك درجهٔ کروی مساحتی است از کره معادل با $(1/720)$ م سطح کل آن. نشان دهید که مساحت یك هلال به‌زاویهٔ n° برابربا $2n$ درجهٔ کروی‌است.

(ج) نشان دهید که مساحت یك مثلث کروی، برحسب درجهٔ کروی، برابربا زیادتی کروی آن است.

(د) نشان دهید که مساحت A ازیك مثلث کروی به‌زیادتی کروی E با

$$A=\frac{\pi r^2 E}{180^\circ}$$

داده می‌شودکه درآن r شعاع کره است.

(ه) مساحت یك مثلث سه قائمه بر روی کره‌ای به‌قطر ۲۸ اینچ را پیداکنید.

(و) نشان دهید (به کمك حساب دیفرانسیل) که مساحت محصور بین هذلولی $xy=6$، خط $x=2$، ومحور xها نامتناهی است. از طرف دیگر، نشان دهید که حجم حاصل از دوران این سطح حول محور xها متناهی است.

این‌مسئله مایهٔ پارادوکس رنگ زیرمی‌شود. چون‌مساحت‌فوق نامتناهی است،مقداری نامتناهی‌رنگ برای رنگامیزی سطح لازم است. با این‌حال، چون‌حجم فوق متناهی‌است، تنها مقداری‌متناهی رنگ برای پرکردن حجم لازم است. اما این حجم سطح موردنظررا دربرمی‌گیرد. این پارادوکس را توضیح دهید.

۱۱.۱۰ محاسبهٔ لگاریتمها به‌وسیلهٔ سریها

سری مرکاتور

$$\ln(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\dots$$

به‌ازای $-۱<x\leqslant ۱$ همگراست. با گذاشتن $-x$ به‌جای x نتیجه می‌شود که سری

$$\ln(۱-x)=-x-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}-\dots$$

باید به‌ازای $-۱\leqslant x<۱$ همگرا باشد. چون یك سری که جملات آن تفاضل جملات متناظر دوسری مفروض باشدمطمئناً به‌ازای همهٔ مقادیر x که برای‌آن هر دوسری مفروض همگرا هستند، همگراست، نتیجه می‌شود که به‌ازای $-۱<x<۱$،

$$\ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)=\ln(۱+x)-\ln(۱-x)$$
$$=۲\left(x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}+\frac{x^۷}{۷}+\dots\right).$$

اگر قرار دهیم $x=۱/(۲N+۱)$، مشاهده‌می‌کنیم که به‌ازای‌هر N مثبت، $-۱<x<۱$، و $(۱+x)/(۱-x)=(N+۱)/N$. با گذاشتن آن درآخرین‌معادله

$$\ln(N+۱)=\ln N+۲\left[\frac{۱}{۲N+۱}+\frac{۱}{۳(۲N+۱)^۳}+\frac{۱}{۵(۲N+۱)^۵}+\dots\right]$$

را به‌دست می‌آوریم، این سری، به‌ازای همهٔ مقادیرمثبت N بسرعت همگراست.

(الف) با قراردادن $N=۱$، $\ln ۲$ را تا چهار رقم اعشار حساب کنید.

(ب) $\ln ۳$ را تا چهار رقم اعشارحساب کنید.

(ج) $\ln ۴$ را تا چهار رقم اعشارحساب کنید.

عنوان مقاله

۱/۱۰ فن تبدیل کردن‌ـحل کردن‌ـ بر گردا ندن.

۲/۱۰ هندسهٔ تحلیلی به‌عنوان‌موردی‌از حد‌اعلای فن تبدیل کردن‌ـحل کردن‌ـ بر گرداندن.

۳/۱۰ هندسهٔ تحلیلی به‌عنوان روشی برای کشف.

۴/۱۰ چه‌کسی هندسهٔ تحلیلی را اختراع کرد.

۵/۱۰ بزرگترین ریاضیدان فرانسوی قرن هفدهم.

۶/۱۰ پنج ریاضیدان مهم فرانسوی قرن هفدهم.

۱۰/۷ روش نزول نامتناهی فرما.
۱۰/۸ منشأ نظریهٔ ریاضی احتمال.
۱۰/۹ امر خلاف قاعدهٔ تولیدحجم دوار متناهی ازسطحی نامتناهی.
۱۰/۱۰ روش روبروال-توریچلی در رسم مماسها.
۱۰/۱۱ آونگ ثانیه‌شمار کامل هویگنس.
۱۰/۱۲ مرکز همزاویه‌ای مثلث.
۱۰/۱۳ قضایای سوا وکوماندینو.
۱۰/۱۴ اولین دومنحنی مسطحه از درجات بالاکه کاربرد عملی یافتند.
۱۰/۱۵ خانوادهٔ برجستهٔ کاسینی.

کتابنامه

ADAMS, O. S., *A Study of Map Projections in General*. Washington: Coast and Geodetic Survey, Special Publication No. 60, Department of Commerce, 1919.

———, and C. H. DEETZ, *Elements of Map Projection, With Applications to Map and Chart Construction*. Washington: Coast and Geodetic Survey, Special Publication No. 68, Department of Commerce, 1938.

ARCHIBALD, R. C., *Mathematical Table Makers*. New York: *Scripta Mathematica*, Yeshiva University, 1948.

AUBREY, JOHN, *Brief Lives*. New York: Oxford University Press, 1898.

BALL, W. W. R., and H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed. New York: Macmillan, 1939.

BELL, A. E., *Christian [sic] Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*. London: Edward Arnold, 1948.

BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.

———, *The Last Problem*. New York: Simon and Schuster, 1961.

BOYER, C. B., *History of Analytic Geometry*. New York: *Scripta Mathematica*, Yeshiva University, 1956.

———, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.

CONKWRIGHT, N. B., *Introduction to the Theory of Equations*. Boston: Ginn, 1941.

COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.

———, *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York: Oxford University Press, 1947.

———, *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.

COURANT, RICHARD, and HERBERT ROBBINS, *What is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1941.

DAVID, F. N., *Games, Gods and Gambling*. New York: Hafner, 1962.

DESCARTES, RENÉ, *The Geometry of René Descartes*. Translated by D. E. Smith and Marcia L. Latham. New York: Dover, 1954.

HACKER, S. G., *Arithmetical View Points*. Pullman, Wash.: Mimeographed at Washington State College, 1948.

HALDANE, ELIZABETH S., *Descartes: His Life and Times*. New York: E. P. Dutton, 1905.

JOHNSON, R. A., *Modern Geometry*. Boston: Houghton Mifflin, 1929. Reprinted by Dover.

KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.

MAHONEY, M. S., *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665*. Princeton, N.J: Princeton University Press, 1972.

MERRIMAN, MANSFIELD, *The Solution of Equations*. 4th ed. New York: John Wiley, 1906.

MILLER, G. A., *Historical Introduction to Mathematical Literature*. New York: Macmillan, 1916.

MUIR, JANE, *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd,

Mead, 1961.
ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
SMITH, D. E., *History of Modern Mathematics*. 4th ed. New York: John Wiley, 1906.
———, *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.
SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. New York: Oxford University Press, 1925.
SUMMERSON, JOHN, *Sir Christopher Wren*. No. 9 in a series of *Brief Lives*. New York: Macmillan 1953.
TODHUNTER, ISAAC, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. New York: Chelsea, 1949.
TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.
WILLIAMSON, BENJAMIN, *An Elementary Treatise on the Differential Calculus*. London: Longmans, Green & Co., 1899.
WINGER, R. M., *An Introduction to Projective Geometry*. Boston: D. C. Heath, 1923.
YATES, R. C., *A Handbook on Curves and Their Properties*. Ann Arbor, Mich: J. W. Edwards, 1947.

۱۱

حسابان و مفاهیم وابسته به آن

۱-۱۱ مقدمه

دیده‌ایم که زمینه‌های جدید و دامنه‌دار زیادی در تحقیقات ریاضی در قرن‌هفدهم گشوده شدند، که این دوره را به‌صورت دورهٔ پرباری‌در بسط ریاضیات در آوردند. بی‌چون‌وچرا مهمترین دستاورد ریاضی این دوره ابداع حسابان، در اواخر قرن، توسط آیزك نیوتن و گوتفرید ویلهلم لایبنیتز بود. با این ابداع، ریاضیات خلاق به‌طور کلی به‌درجهٔ پیشرفته‌ای می‌رسد و تاریخ ریاضیات ابتدایی اساساً با آن پایان می‌یابد. فصل حاضر به‌شرح کوتاهی‌ازمبادی و بسط مفاهیم مهم‌حسابان اختصاص می‌یابد، مفاهیمی که چنان‌کاربرد وسیعی دارند وچنان تأثیری بر دنیای جدید داشته‌اند که شاید گفتنش درست باشدکه‌بدون آگاهی‌از آنها انسان بزحمت می‌تواند ادعای داشتن تحصیلات درست و حسابی راداشته باشد.

جالب توجه است که، برخلاف ترتیب متداول در ارائهٔ مطالب در دروس‌مقدماتی دانشگاهی فعلی، که با مشتقگیری شروع و بعداً به انتگرالگیری می‌پردازیم، مفاهیم‌حساب انتگرال از لحاظ تاریخی قبل‌ازمفاهیم‌حساب‌دیفرانسیل به‌وجود آمده‌اند. مفهوم‌انتگرالگیری ابتدا درنقشی که دریك‌فرایندمجموعیابی در رابطه با یافتن بعضی مساحات، احجام، وطول قوسها داشت، پدیدار شد. بعدها، مشتقگیری در رابطه بامسائل‌مربوط به مماس برمنحنیها و سؤالاتی در بارهٔ ماکزیموم و مینیموم توابع به وجود آمد. و حتی خیلی بعد از آن بود که ارتباط انتگرالگیری با مشتقگیری به عنوان اعمال معکوس یکدیگر مورد توجه قرار گرفت.

گرچه قسمت عمدهٔ گفتار ما به قرن هفدهم مربوط می‌شود، لازم است جهت آغاز مطلب به یونان باستان و قرن پنجم پیش از میلاد باز گردیم.

۱۱-۲ پارادوکسهای زنون

آیا باید پذیرفت که کمیتی بینهایت بار تقسیم‌پذیر است یا اینکه این کمیت از عدهٔ بسیار زیادی اجزای اتمی تقسیم‌ناپذیر تشکیل شده است؟ فرض اول به‌نظر بسیاری منطقی‌تر جلوه می‌کند، اما مفید بودن فرض دوم در پیدایش کشفیات بسیاری موجب می‌شود که نامعقول بودن ظاهری آن تا حدی از بین برود. شواهدی در دست است که در یونان باستان، مکاتب استدلال ریاضی برمبنای هریك از دو فرض بالا به‌وجود آمده است.

برخی از اشکالهای منطقی که با هریك از دو فرض پیش می‌آیند به‌طور شگفت‌انگیزی در قرن پنجم ق. م. به‌کمك چهار پارادوکس ابداعی فیلسوف الیایی، زنون (حدود ۴۵۰ ق. م.)، آشکار شدند. این پارادوکسها، که تأثیر شگرفی در ریاضیات داشتند، بیان می‌کنند که خواه فرض کنیم کمیتی بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است یا از عدهٔ بسیار زیادی اجزای اتمی ساخته‌شده است، حرکت غیرممکن است. ما ماهیت این پارادوکسها را با دو پارادوکس زیر روشن می‌کنیم.

دیکوتومی: اگر پاره‌خط مستقیمی بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد، آنگاه حرکت غیر ممکن است، زیرا برای پیمودن طول پاره‌خط ابتدا لازم است که به نقطهٔ وسط پاره‌خط برسیم، و برای این کار لازم است که به نقطهٔ واقع بر یك چهارم پاره‌خط برسیم، و برای این کار باید ابتدا به نقطهٔ یك هشتم برسیم، و همینطور تا غیرالنهایه. نتیجه می‌شود که حرکت را حتی نمی‌توان شروع کرد.

تیر: اگر زمان متشکل از لحظه‌های ریز تقسیم‌ناپذیر باشد، آنگاه یك تیر در حال حرکت همیشه در یك جاست، زیرا در هر لحظه تیر در یك وضعیت ثابت است. چون این مطلب در مورد هر لحظه درست است نتیجه می‌شود که تیر اصلاً حرکت نمی‌کند.

توجیه‌های زیادی از پارادوکسهای زنون به عمل آمده است و نشان دادن این امر مشکل نیست که این پارادوکسها با این باورهای شهودی که مجموع تعداد بینهایتی از کمیتهای مثبت، کمیتی بسیار بزرگ است، حتی اگر هر یك از کمیتها فوق‌العاده کوچك باشد ($\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i=\infty$)، و این که مجموع عده‌ای از کمیتهای متناهی یا نامتناهی با بعدصفر، صفر است ($n\times 0=0$ و $\infty\times 0=0$)، در تضاد قرار دارند. انگیزهٔ واقعی این پارادوکسها هرچه که باشد، اثر آنها حذف بینهایت کوچکها از هندسهٔ برهانی یونانی بود.

۱۱-۳ روش افنای ائودوکسوس

اولین مسائلی که در تاریخ حسابان پیش می‌آیند، به محاسبهٔ مساحتها، احجام، و طول قوسها

مربوط‌اند ، و در مطالعهٔ آنها به شواهدی از دو فرض قابل‌قسمت‌بودن‌کمیتها که در بالا به آن اشاره کردیم، برمی‌خوریم.

یکی از قدیمی‌ترین‌کارهای مهم در زمینهٔ مسئلهٔ تربیع دایره کار آنتیفون سوفسطایی[1] (حدود ۴۳۰ ق. م.) است،که یکی از معاصرین سقراط بود. گفته‌اندکه آنتیفون این فکر را قوت بخشیده است که با متوالیاً دوبرابر کردن عدهٔ اضلاع یك چند ضلعی محاط در یك دایره، اختلاف‌مساحت بین دایره و چند ضلعی درنهایت ازبین خواهد رفت. چون‌می‌توان مربعی از نظر مساحت برابر با چند ضلعی مفروضی ساخت، در این صورت ساختن‌مربعی برابر با یك دایره میسرخواهد بود. این‌استدلال به دلیل‌اینکه اصل‌تقسیم‌پذیر بودن نامحدود کمیتها را نقض می‌کرد، واینکه به موجب اصل فوق ، در فرایندآنتیفون همهٔ مساحت‌دایره به‌کار نمی‌رود، بلافاصله موردانتقادقرار گرفت. با این حال،اظهار جسورانهٔ آنتیفون‌نطفهٔ **روش افنای** مشهور یونانیان را دربرداشت.

روش افنا معمولاً به ائودوکسوس (حدود ۳۷۵ ق.م.) منسوب می‌شود و شایدبتوان آن را پاسخ مکتب افلاطونی به پارادوکسهای زنون محسوب کرد . در این روش تقسیم‌پذیر بودن نامتناهی کمیتها پذیرفته می‌شود. پایهٔ‌آن گزارهٔ زیر است : اگر ازکمیت‌دلخواهی کمیتی ناکمتر از نصف آن‌کسر شود، از باقیمانده قسمت دیگری‌که از نصف آن‌کمترنیست برداشته شود واین عمل به همین قیاس ادامه یابد، در نهایت‌کمیتی باقی می‌ماندکه از هر کمیت مفروضی از همان جنس‌کمتر خواهد بود. می‌خواهیم روش افنا را برای اثبات اینکه اگر A_1 و A_2 مساحت دو دایره به قطرهای d_1 و d_2 باشند،آنگاه

$$A_1:A_2=d_1^2:d_2^2,$$

به‌کار بریم.

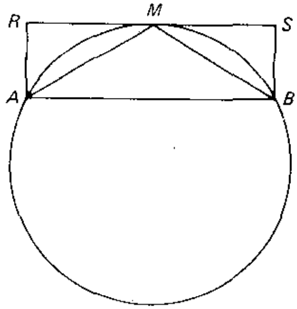
ابتدا، به‌کمك گزارهٔ اساسی فوق ، نشان می‌دهیم‌که تفاضل بین مساحت یك دایره‌و یك چندضلعی منتظم محاطی‌را می‌توان تا هراندازهٔ مورد نظر کوچك‌کرد. فرض‌کنید AB، در شکل ۹۶،ضلعی ازیك چندضلعی منتظم محاطی باشد، و فرض‌کنید M نقطهٔ وسط قوس AB باشد. چون‌مساحت‌مثلث AMB نصف مساحت مستطیل $ARSB$ وبنا براین‌بزرگتر از نصف مساحت قطعهٔ دایرهٔ AMB است ، نتیجه می‌شودکه با دوبرابرکردن تعداد اضلاع چند ضلعی منتظم به‌مساحت چند ضلعی مقداری بیش از نصف تفاضل مساحتهای دایره و چند ضلعی افزوده می‌شود. در نتیجه، بادوبرابرکردن تعداد اضلاع به‌قدرکافی، می‌توانیم تفاضل مساحات بین دایره‌و چندضلعی را از هر مساحت معین، هراندازه‌کوچك،کوچکتر نماییم.

حال به قضیهٔ خود بازمی‌گردیم، و فرض می‌کنیم‌که به جای تساوی داشته‌باشیم

$$A_1:A_2>d_1^2:d_2^2.$$

---

1. Antiphon the Sophist



شکل ۹۶

در این صورت می‌توانیم در دایرهٔ اول چندضلعی منتظمی محاط کنیم که تفاوت مساحت آن P_1 با A_1 به قدری کوچك باشد که

$$P_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2.$$

فرض کنید P_2 چندضلعی منتظمی متشابه با P_1، ولی محاط در دایرهٔ دوم باشد. در این صورت، بنا بر قضیهٔ معروف در بارهٔ چند ضلعیهای متشابه،

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2.$$

نتیجه می‌شود که $P_1 : A_2 > P_1 : P_2$، یا $P_2 > A_2$، که غیر ممکن است، زیرا مساحت یك چندضلعی منتظم نمی‌تواند از مساحت دایرهٔ محیطی آن بیشتر باشد. به‌طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم که

$$A_1 : A_2 < d_1^2 : d_2^2$$

غیرممکن است. در نتیجه، به‌موجب این مراحل برهان خلف مضاعف، قضیه ثابت می‌شود. بنابراین، اگر A مساحت و d قطر یك دایره باشد، داریم $A = kd^2$، که در آن k (که در واقع $\pi/4$ است) مقداری است ثابت که برای کلیهٔ دایره‌ها یکی است.

ارشمیدس مدعی بود که دموکریتوس[1] (حدود ۴۱۰ ق.م.) گفته است حجم هرمی که قاعدهٔ آن چندضلعی دلخواهی باشد یك‌سوم حجم منشوری با همان قاعده و ارتفاع است. در بارهٔ دموکریتوس اطلاع کمی در دست است، اما معلوم نیست که او توانسته باشد برهان دقیقی برای این قضیه ارائه نماید. چون هرمنشور را می‌توان به‌صورت مجموع منشورهایی که قاعدهٔ همهٔ آنها مثلث باشد، قطعه‌قطعه کرد، و منشوری از این نوع را می‌توان به‌نوبهٔ خود به سه هرم مثلث‌القاعده تقطیع کرد که دو به دو قاعده‌های معادل و ارتفاعهای یکسان داشته باشند، نتیجه می‌شود که گره مسئلهٔ دموکریتوس، نشان دادن این امر است که دوهرم

1. Democritus

با ارتفاعهای مساوی و قاعده‌های معادل حجمهای برابر دارند. برهانی برای آن را بعداً ائودوکسوس، با استفاده از روش افنا، داده است.

در این صورت، دموکریتوس چگونه می‌توانسته به این نتیجهٔ اخیر دست یافته باشد؟ پلوتارك کلیدی در اختیار ما می‌گذارد. وی مواجه‌شدن دموکریتوس را با یك مسئلهٔ بغرنج، وقتی که یك مخروط را متشکل از بینهایت مقطع عرضی مستوی به‌موازات قاعده تلقی کرده، نقل می‌کند. اگر دو مقطع «مجاور» به یك اندازه باشند، جسم یك استوانه خواهد بود نه یك مخروط. از طرف دیگر، اگر دو مقطع «مجاور» مساحتهای مختلف داشته باشند، سطح جسم مفروض به یك سلسله از پله‌های کوچك تقسیم خواهد شد، که مطمئناً چنین چیزی در بین نیست. در اینجا فرضی راجع به تقسیم‌پذیر بودن کمیتها داریم که نسبت به دو فرضی که قبلاً بررسی شده‌اند تا حدی جنبهٔ بینابینی دارد، زیرا در اینجا فرض می‌کنیم که حجم مخروط بینهایت‌بار تقسیم‌پذیر، یعنی قابل تقسیم به بینهایت مقطع اتمی مستوی است، اما این فرض را هم می‌کنیم که این مقاطع قابل‌شمارش‌اند بدین‌معنی که اگر یکی از آنها را در نظر بگیریم مقطعی دیگر در کنار آن قرار دارد. دموکریتوس احتمالاً چنین استدلال کرده است که اگر دو هرم با قاعده‌های معادل و ارتفاعهای برابر را صفحات موازی با قاعده قطع کنند و این صفحات ارتفاعها را به یك نسبت قطع نمایند، در این صورت مقاطع متناظر تشکیل شده معادل هستند. بنابراین هرمها شامل تعدادی نامتناهی ولی متساوی از مقاطع مستوی معادل هستند، و بنابراین باید حجمهای برابر داشته باشند. این می‌تواند موردی از روش تقسیم‌ناپذیرهای کاوالیری باشد، که در زیر در بخش ۱۱-۶ بررسی می‌شود.

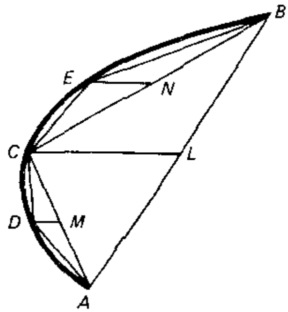
اما از مردم باستان ارشمیدس بود که زیباترین کاربردهای روش افنا را عملی کرد، و همو بود که به انتگرالگیری واقعی از همه نزدیکتر شد. به‌عنوان یکی از قدیمی‌ترین مثالها، تربیع وی از یك قطعهٔ سهموی را در نظر بگیرید. فرض کنید C، D، E نقاطی واقع بر قطعهٔ سهموی باشند (نگاه کنید به شکل ۹۷) که از رسم LC، MD، NE به‌موازات محور سهمی از نقاط L، M، N، وسطهای AB، CA، CB، به‌دست می‌آیند. با استفاده از خواص هندسی سهمی، ارشمیدس نشان می‌دهد که

$$\Delta CDA+\Delta CEB=\frac{\Delta ACB}{۴}.$$

با کاربردهای مکرر این ایده، نتیجه می‌شود که مساحت قطعهٔ سهموی توسط

$$\begin{aligned}\Delta ABC&+\frac{\Delta ABC}{۴}+\frac{\Delta ABC}{۴^{۲}}+\frac{\Delta ABC}{۴^{۳}}+\cdots\\&=\Delta ABC\left(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴^{۲}}+\frac{۱}{۴^{۳}}+\cdots\right)\\&=\frac{۴}{۳}\Delta ABC\end{aligned}$$

داده می‌شود.



شکل ۹۷

ما در اینجا کار را با گرفتن حد مجموع یك تصاعدهندسی مختصر کرده‌ایم؛ ارشمیدس ابزار برهان خلف مضاعف مربوط به روش افنا را به خدمت می‌گیرد.

ارشمیدس درمطالعه‌اش از بعضی مساحتها و احجام، بهمعادلهای عده‌ای ازانتگرالهای معین که درکتابهای حسابان مقدماتی دیده می‌شود، دست یافت.

۱۱–۴ روش تعادل ارشمیدس

روش افنا روش دقیق ولی بی‌باری است. به عبارت دیگر، وقتی فرمولی را بدانیم، روش افنا می‌تواند وسیلهٔ زیبایی برای اثبات آن باشد، ولی این روش قابلیتی درکشف اولیهٔ نتیجه ندارد. ازاین لحاظ، روش افنا بسیار شبیه به فرایند استقراء ریاضی است. پس ارشمیدس فرمولهایی راکه با آن همه خوبی به روش افنا، ثابت کرده چگونه کشف کرده است؟

پرسش بالا سرانجام در ۱۹۰۶، باکشف نسخه‌ای از مقالهٔ روش ارشمیدس، که از مدتها پیش مفقود و خطاب به اراتستن نوشته شده بود، توسط هایبرگ درقسطنطنیه پاسخ داده شد. این دستنویس بر روی یك پالیمپ سست (نگاه کنید به بخش ۱–۸) قرارداشت؛ یعنی، در قرن دهم بر روی کاغذ پارچه‌ای نوشته شده بود، سپس بعدها، در قرن سیزدهم، شسته شده و مجدداً برای نوشتن یك متن مذهبی مورد استفاده قرار گرفته بود. خوشبختانه، قسمت اعظم متن اولیه از زیر نوشتهٔ بعدی قابل احیا بود.

ایدهٔ اصلی روش ارشمیدس چنین است. برای یافتن مساحت یا حجم مطلوب، آن را از راه بریدن به صورت تعداد زیادی نوارهای باریك مستوی موازی، یا لایه‌های موازی باریك، درآورید، و این قطعه‌ها را (به‌طور ذهنی) دریك سر اهرم مفروض چنان آویزان کنیدکه با شکلی که گنجایش و مرکز هندسی آن معلوم باشد، در حالت تعادل قرار گیرد. ما برای روشن کردن این روش آن را برای یافتن فرمول حجم کره به‌کار می‌بریم.

فرض کنید r شعاع کره باشد. کره را طوری قرار دهیدکه قطر قطبی آن در امتداد محور افقی xها قرار گیرد وقطب شمال N در مبدأ باشد (نگاه کنید به‌شکل ۹۸). استوانه و مخروط دوار حاصل از دوران مستطیل $NABS$ و مثلث NCS درحول محور xها را

بسازید. حال از سه جسم قاچهای عمودی باریکی (فرض کنید که این قاچها استوانه‌های هموار‌ی‌هستند) به‌فاصلهٔ x از N وضخامت Δx ببرید. حجمهای این‌قاچها تقریباً عبارتنداز:

$$\pi x(۲r-x)\Delta x : \text{کره}$$

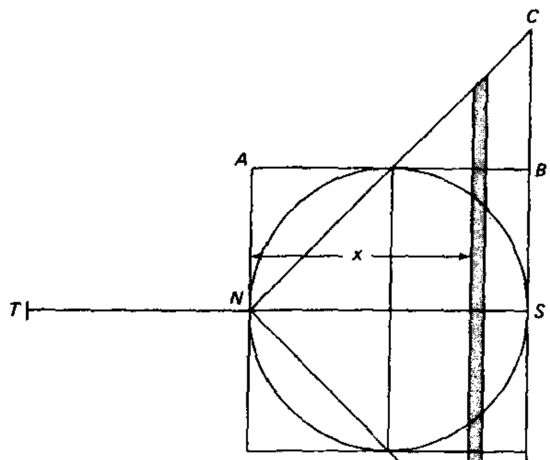
$$\pi r^۲\Delta x : \text{استوانه}$$

$$\pi x^۲\Delta x. : \text{مخروط}$$

قاچهای کره و مخروط را درنقطهٔ T ، $TN=۲r$ ، آویزان می‌کنیم. مجموع گشتاور* های آنها درحول N عبارت است از

$$[\pi x(۲r-x)\Delta x+\pi x^۲\Delta x]۲r=۴\pi r^۲x\Delta x.$$

ملاحظه می‌کنیم که‌این‌مجموع، چهار برابر گشتاور قاچ بریده‌شده از استوانه‌است وقتی که این قاچ در همانجا که هست بماند. با افزودن تعداد زیادی از این قاچها برهم رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.



شکل ۹۸

* گشتاور یك حجم حول‌یك نقطه حاصلضرب حجم درفاصلهٔ بین‌نقطه ومرکزهندسی حجم است.

$$۲r[\text{حجم کره}+\text{حجم مخروط}]=۴r\,[\text{حجم استوانه}],$$

یا

$$۲r[\text{حجم کره}+\frac{۸\pi r^۳}{۳}]=۸\pi r^۴,$$

یا

$$\text{حجم کره}=\frac{۴\pi r^۳}{۳}.$$

در روش گفته شده است کـه این طریقه، طریقهٔ ارشمیدس درکشف فرمول‌حجم کره بوده است. ولی شعور ریاضی او بداو اجازه نمی‌داده است که چنین روشی را به‌عنوان یـك برهان بپذیرد، و ازاین‌رو برهان دقیقی را به‌کمك روش افنا تدارك دیده است. در روش تعادل، ثمربخش‌بودن این فکر سست‌بنیاد راکه یك‌کمیت، ترکیبی از عدهٔ زیادی اجزای اتمی‌تلقی‌شود، مشاهده می کنیم. نیازی به گفتن نیست که، با روش‌امروزی حدگیری، روش تعادل ارشمیدس را می‌توان به‌صورت‌کاملاً دقیقی که اساساً همان انتگرالگیری امروزی است، درآورد.

۱۱-۵ مقدمات انتگرالگیری در اروپای غربی

نظریهٔ انتگرال بعد از دستاوردهای قابل‌ملاحظهٔ ارشمیدس، تا دوران جدید چندان دنبال نشد. درحدود ۱۴۵۰ بودکه‌آثار ارشمیدس ازطریق ترجمهٔ نسخه‌ای از نوشته‌هایش‌کـه درقرن نهم صورت گرفته‌بود و در قسطنطنیه پیدا شد، به‌اروپای غربی رسید . این ترجمه را رگیومونتانوس مورد تجدیدنظر قرار داد و در ۱۵۴۰ به‌چاپ رسانید. چند سال بعد ترجمهٔ دومی از آن منتشر شد. اما تنها در اوایل قرن هفدهم است که می‌بینیم اندیشه‌های ارشمیدس بسط بیشتری می‌یابند.

دوتن از اولین‌نویسندگان‌اعصارجدید که روشهایی قابل‌مقایسه‌با روشهای‌ارشمیدس را به‌کارمی‌بردند مهندس‌فلاندری[1] سیمون‌استوین(۱۵۴۸-۱۶۲۰) و ریاضیدان‌ایتالیایی لوکا والریو[2] (حدود۱۵۵۲-۱۶۱۸) بودند. هر یك‌از اینها سعی‌کردندکه‌از برهان‌خلف مضاعف روش افنا، با گذار مستقیم به‌حد، عمدتاً نظیرکاری‌که ما درپایان بخش ۱۱-۳ در بررسی‌خود ازقطعهٔ سهموی‌انجام دادیم، احترازکنند. استوین درکار خود درهیدروستاتیك ازچنین روشی‌استفاده‌کردکه طی‌آن نیروی‌فشار مایع بر یك سد مستطیلی را از راه‌تقسیم سد به نوارهای افقی باریك و سپس‌چرخاندن این نوارها درحول لبه‌های پائینی وبالایی تا آنکه اینها به‌موازات یك صفحهٔ افقی درآیند ، پیداکرد . این اساساً روشی است که آن را امروزه درکتابهای درسی مقدماتی درحسابان به‌کار می‌بریم.

---

1. Flemish 2. Luca Valerio

از اولین اروپائیان جدیدکه ایدهٔ بینهایت کوچکهـا را در رابطه با انتگرالگیری به‌کار برد، باید علی‌الخصوص یادی از یوهان کپلر کـرد. قبلاً متذکر شده‌ایم (در بخش ۹ـ۷) که کپلر می‌بایست به‌یك روش انتگرالگیری متوسل‌شود تا مساحات مطروحه درقانون دوم حرکت سیاره‌ای و نیز احجام موردبررسی در رساله‌اش راجع به‌گنجایش بشکه‌های شراب را پیداکند. اما کپلر، نظیر دیگرهمعصران خود، چندان حوصله‌ای برای دقت‌زیاد در روش افنا نداشت، وبه‌خیال‌صرفه‌جویی در وقت و زحمت شیوه‌هایی راکه ارشمیدس صرفاًرهگشا می‌پنداشت، بسادگی قبول کرد. مثلاً کپلر محیط دایره را به‌صورت‌یك‌چندضلعی منتظم درنظر می‌گرفت‌که دارای بینهایت ضلع است. اگر هر یك از این‌اضلاع پایهٔ‌مثلثی اختیارشودکه رأس‌آن در مرکز دایره‌است، دراین‌صورت مساحت دایره به‌تعداد بینهایتی از مثلثهای باریك تقسیم شده است کـه همه ارتفاعی برابر با شعاع دایره دارند. چـون مساحت هر یك از این مثلثهای باریك برابر با نصف حاصلضرب پایه در ارتفاع است،از آنجا مساحت دایره برابر با نصف حاصلضرب محیط‌آن درشعاع آن می‌شود. همچنین‌حجم یك‌کره متشکل از تعداد بینهایتی از مخروطهای باریکی گرفته شدکه همهٔ آنها رأسی در مرکـز کره دارند. نتیجه می‌شود که حجم کره برابر یك سوم حاصلضرب سطح آن در شعاعش‌می‌شود. با اینکه این‌روشها از دیدگاه دقت ریاضی قابل ایرادند، نتایج صحیحی را به‌روالی بسیار ساده به‌بار می‌آورند. حتی‌امروزه هم می‌بینیم که فیزیکدانها و مهندسین چنین روشهای «اتمی» را مرتباً درپرداختن به‌مسائل ریاضی به‌کار می‌برند و بررسی دقیق «حد» را به‌عهدهٔ ریاضیدانان حرفه‌ای مـی‌گذارند*. و هندسه‌دانان اغلب به‌مفاهیم مناسب نقاط «متوالی» و منحنیها و سطوح «متوالی» در خانواده‌های یك پارامتری از چنین‌نقاط، منحنیها، و سطوح متوسل می‌شوند.**

۱۱ـ۶ روش تقسیم‌ناپذیرهای کاوالیری

بوناونتورا کاوالیری در ۱۵۹۸ در میلان به‌دنیاآمد ، در سنین پایین یك یسوعا*** شد ،

---

* «مثلاً، تا آنجاکه فقط دیفرانسیلهای مرتبهٔاول مطرح‌است، قسمت کوچکی‌ازمنحنی‌را می‌توان مستقیم وبخشی از یك سطح را درمجاورت یك‌نقطه مستوی دانست؛ طی یك مدت‌زمان‌کوتاه dt، یك ذره را می‌توان دارای سرعت ثابت‌تلقی وچنین فرض کردکه یك فرایندفیزیکی با آهنگ ثابتی رخ می‌دهد».ــ ه. ب. فیلیپس (H. B. Phillips) ، معادلات دیفرانسیل ، چـاپ سوم، صفحهٔ ۲۸ [متن انگلیسی].

** «به‌عبارت دیگر، مشخصهٔ یك سطح(ازخانواده‌ای ازسطوح یك پارامتری) منحنیی‌است‌که درآن سطحی‌تالی برآن،آن را قطع‌می‌کند».ــ ا. پ. لین [E.P.Lane]،هندسهٔدیفرانسیل‌متری منحنیها و سطوح [Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces] ، ص ۸۱ [متن‌انگلیسی].

*** و نه‌یك یسوعی، که اغلب بغلط گفته می‌شود. [یسوعا (Jesuat) عضو یك نظام مذهبی‌است که در ۱۳۶۷ کولومبینی آن‌راپایه‌گذاری کردودر۱۶۶۸پاپ کلمنت‌نهم‌آن‌رابرانداخت.ـم.]

بوناونتورا کاوالیری
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

زیرنظر گالیله درس‌خواند، و از سال ۱۶۲۹ تا زمان‌مرگش، در ۱۶۴۷، در دانشگاه بولونا استاد ریاضیات بود. وی یکی از مؤثرترین ریاضیدانان عصرخود بود و آثار چندی در زمینه‌های ریاضیات، اپتیک، ونجوم نگاشت. رواج بموقع لگاریتم در ایتالیا عمدتاً مدیون اوست. اما بزرگترین سهم او رساله‌ای است، هندسهٔ تقسیم ناپذیرها[1]، که به‌صورت اولیه خود در ۱۶۳۵ منتشرشد و به **روش تقسیم ناپذیرها** اختصاص داده شده‌بود. گرچه می‌توان رد این روش را درکارهای دموکریتوس (حدود ۴۱۰ ق.م.) و ارشمیدس (حدود ۲۱۲ـــ ۲۸۷ ق.م.) پی‌گرفت، ولی بسیار محتمل است که تلاشهای کپلر در یافتن برخی مساحتها و احجام بودکه محرك کاوالیری شد.

رسالهٔ کاوالیری مطول است و به‌وضوح نوشته نشده است، و دانستن اینکه منظور او از «تقسیم‌ناپذیر» دقیقاً چیست، مشکل است. به‌نظرمی‌رسدکه یك تقسیم‌ناپذیر در یك قطعهٔ مستوی مفروض وتری از آن قطعه‌باشد، و یك تقسیم‌ناپذیر در یك جسم صلب مفروض یك مقطع مستوی آن جسم است. یك قطعهٔ مستوی متشکل ازمجموعهٔ بینهایتی از وترهای موازی، و یك جسم صلب متشکل ازمجموعهٔ بینهایتی ازمقاطع مستوی موازی تلقی می‌شود. براین مبنا ،کاوالیری استدلال می‌کند که اگر هر یك از اعضای مجموعهٔ وترهای موازی قطعهٔ مستوی مفروضی را در امتداد محورش بلغزانیم، به‌طوری‌که دوسر وترها همچنان یك مرز پیوسته را بپیمایند، دراین‌صورت مساحت قطعهٔ مستوی‌جدیدی که بدین ترتیب تشکیل‌می‌شود با مساحت قطعهٔ مستوی اصلی برابر است. لغزاندن مشابه مقاطع مستوی یك جسم مفروض، جسم صلب دیگری را به‌دست می‌دهدکه حجم آن با حجم جسم اصلی برابر است. این نتایج، وقتی‌اندکی تعمیم داده شوند، اصول‌موسوم به اصول کاوالیری را به‌دست می‌دهند:

۱. اگر دو قطعهٔ مستوی بین یك‌جفت خط موازی قرار گیرند، و اگر دو قطعه خطی

1. Geometria indivisibilibus

که توسط آنها بر روی هر خطی به‌موازات خطوط دربردارنده جدا می‌شود، طولهای برابر داشته باشند، آنگاه مساحتهای قطعه‌های مستوی برابرند.

۲. اگر دو جسم صلب بین یك جفت صفحهٔ موازی قرار گیرند، و اگر دو مقطع جدا شده‌توسط‌آنها بر روی هرصفحه به‌موازات صفحات دربردارنده مساحتهای برابر داشته‌باشند، آنگاه حجم دو جسم صلب باهم برابرند.

اصول کاوالیری ابزار ارزنده‌ای در محاسبهٔ مساحتها و حجمهاست و پایهٔ شهودی آنها را می‌توان بآسانی به‌کمك حساب‌نوین انتگرال تدقیق کرد. با پذیرش اینکه این اصول از لحاظ شهودی روشن‌اند، می‌توان مسائل بسیاری را درمساحی که معمولاً نیاز به‌فنون پیشرفتهٔ حسابان دارند، حل کرد.

استفاده از اصول کاوالیری‌را ابتدا با به‌کارگرفتن‌آنها درحالت مسطحه، در یافتن مساحت یك بیضی با نیم‌قطرهای a و b، و سپس درحالت فضایی در یافتن حجم کره‌ای به‌شعاع r تشریح می‌کنیم.

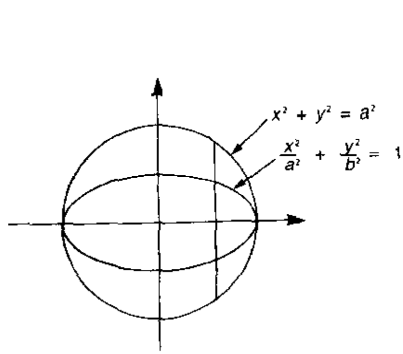
بیضی و دایرهٔ

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱,\ a>b,\ \text{و}\ x^۲+y^۲=a^۲,$$

راکه در دستگاه مختصات متعامدی، مطابق شکل ۹۹، رسم شده‌اند درنظر گیرید. با حل هریك از دو معادلهٔ فوق برحسب y معادلات زیر را به‌دست می‌آوریم

$$y=\frac{b}{a}(a^۲-x^۲)^{۱/۲}\ ,\ \ y=(a^۲-x^۲)^{۱/۲}.$$

از این روابط نتیجه می‌شود کــه نسبت عرضهای نظیر بیضی و دایره برابر b/a است. بنابراین نتیجه می‌شودکه وترهای قائم بیضی و دایره نیز به‌همین نسبت هستند و لذا، بنابر اصل اول کاوالیری، مساحتهای بیضی و دایره به‌همین نسبت هستند. نتیجه می‌گیریم که



شکل ۹۹

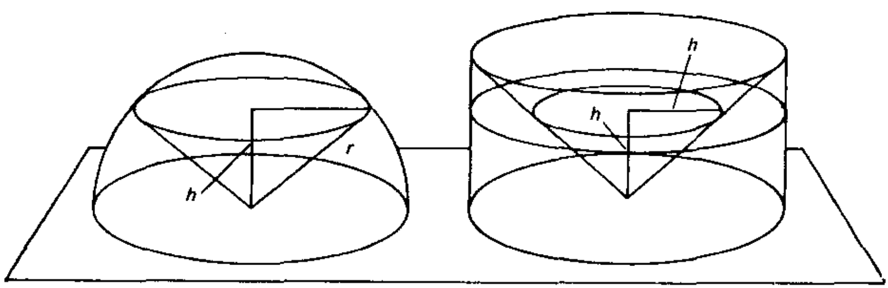
$$\text{(مساحت دایره)}\,\frac{b}{a} = \text{مساحت بیضی}$$
$$= \frac{b}{a}(\pi a^{2}) = \pi ab.$$

این روش اساساً روشی بود که کپلر آن را در یافتن مساحت یك بیضی با نیم‌قطرهای a و b به‌کار گرفت.

حال فرمول آشنای حجم یك کره به شعاع r را به‌دست می‌آوریم. در شکل ۱۰۰ نیم‌کره‌ای به شعاع r در طرف چپ و استوانه‌ای به‌شعاع r و ارتفاع r در سمت راست قرار دارد که مخروطی به‌قاعدهٔ بالایی استوانه و به رأس مرکز قاعدهٔ پایینی استوانه از آن برداشته شده‌است. نیم‌کره و استوانهٔ توکنده در روی یك صفحهٔ مشترك قرارگرفته‌اند. حال هر دو جسم را با صفحه‌ای به موازات صفحهٔ قاعده و به‌فاصلهٔ h از آن قطع می‌کنیم. این صفحه یکی از اجسام را در یك مقطع مستدیر و دیگری را در یك مقطع تاجی، یا حلقوی شکل، قطع می‌کند. بنابر هندسهٔ مقدماتی، بآسانی نشان می‌دهیم که هر یك از این دو مقطع مساحتی برابر با $\pi(r^{2} - h^{2})$ دارد. بنابر اصل کاوالیری، نتیجه می‌شود که دو جسم حجم برابر دارند. بنابراین حجم V یك‌کره چنین است،

$$V = 2\,\text{(حجم مخروط − حجم استوانه)}$$
$$= 2\left(\pi r^{3} - \frac{\pi r^{3}}{3}\right) = \frac{4\pi r^{3}}{3}.$$

پذیرفتن و استفادهٔ دائم از اصل کاوالیری استخراج بسیاری از فرمولهایی راکه در هندسهٔ فضایی دبیرستانی پیش‌می‌آیند، ساده می‌کند. این‌روش از سوی عده‌ای از مؤلفان کتب درسی قبول و به دلایل آموزشی ازآن طرفداری شده است. مثلاً، برای استخراج فرمول‌آشنای حجم چهار وجهی $(V = Bh/3)$، قسمت مشکل ابتداآن است که نشان‌دهیم در هر دوچهار وجهی که قاعده‌های آنها معادل و ارتفاعهای وارد بر این قاعده‌ها برابر باشند حجمهاشان برابرند. دشواری ذاتی موجود در اینجا، در تمام بررسیهای هندسهٔ



شکل ۱۰۰

فضایی از اصول اقلیدس به بعد منعکس شده‌است.

تصور مبهمی که کاوالیری از تقسیم‌ناپذیرها، به‌عنوان نوعی اجزای اتمی یك‌جسم داشت، بحث‌زیادی برانگیخت‌وانتقادهای جدی ازسوی برخی‌محصلین این‌رشته، بخصوص پل گولدین سویسی را، متوجه‌کاوالیری کرد. کاوالیری براین امید واهی‌که این ایرادات را مرتفع نماید، مطالعهٔ خود را طرحریزی مجددی کرد. ریاضیدان فرانسوی روبروال با توانایی این روش را موردبحث قرار داد ومدعی شدکه این‌مفهوم را مستقلاً خود ابداع کرده است. روش تقسیم‌ناپذیرها، یا روندی بسیار شبیه به‌آن را به‌طورمؤثری توریچلی، فرما، پاسکال، سن‌ـ‌ونسان، برو، و دیگران به‌کار برده‌اند. در ضمن‌کار این مردان ، نتایجی حاصل شده است‌که با انتگرالگیری عباراتی نظیر x^n ، $\sin\theta$، $\sin^2\theta$، و $\theta\sin\theta$ هم‌ارز هستند.

۱۱-۷ آغاز مشتقگیری

می‌توان گفت‌که ریشهٔ مشتقگیری در مسئلهٔ رسم مماس برمنحنی‌ها و پیدا کردن مقادیر ماکزیموم ومینیموم توابع‌است. گرچه این مسائل به‌یونانیان‌عهدباستان بازمی‌گردد، گفتن این مطلب موجه به‌نظر می‌رسدکه فرما به‌طورقطع درسال ۱۶۲۹ با اندیشه‌های خود به پیشواز روش مشتقگیری رفته‌است.

کپلرملاحظه‌کرده بودکه نمویك تابع درهمسایگی یك مقدار ماکزیموم یا مینیموم معمولی به‌طور صرفنظرکردنی‌کوچك می‌شود . فرما این حقیقت را به‌روندی برای تعیین این ماکزیموم یا مینیموم برگردانید. این روش را باختصار بررسی می‌کنیم. اگر $f(x)$ یك ماکزیموم یا مینیموم معمولی در x داشته باشد، و e مقداربسیارکوچکی باشد، آنگاه مقدار $f(x-e)$ تقریباً با $f(x)$ برابر است . بنابراین ، من‌باب آزمایش قرار می‌دهیم $f(x-e)=f(x)$ وسپس برابری را با گرفتن مقدارصفر برای e برقرار می‌کنیم. در این‌صورت ریشه‌های معادلهٔ حاصل آن مقادیری از x راکه به‌ازای آنها $f(x)$ دارای یك ماکزیموم یا مینیموم است، به‌ما می‌دهد.

روش بالا را با درنظرگرفتن اولین مثال فرماـ‌تقسیم‌کمیتی به‌دوقسمت به‌طوری‌که حاصلضرب آنها ماکزیموم‌شودـ تشریح می‌کنیم. فرما ازنمادگذاری ویت استفاده‌کردکه درآن مقادیرثابت با حروف بزرگ بی‌صدا ومتغیرها با حروف بزرگ مصوت نشان‌داده می‌شوند. به‌تبع این نمادگذاری،کمیت مفروض را با B وقسمتهای مورد نظر را با A و $B-A$ نشان می‌دهیم. با تشکیل

$$(A-E)[B-(A-E)]$$

و برابر قراردادن آن با $A(B-A)$ داریم

$$A(B-A)=(A-E)(B-A+E)$$

یا

$$۲AE - BE - E^۲ = ۰ .$$

بعد از تقسیم بر E، به‌دست می‌آوریم

$$۲A - B - E = ۰ .$$

حال با قراردادن $E = ۰$ رابطهٔ $۲A = B$ را به‌دست می‌آوریم، و بنابراین تقسیم مطلوب را می‌یابیم.

گرچه منطق گفتار فرما چندان رضایتبخش نیست، دیده می‌شود که روش او معادل با نوشتن

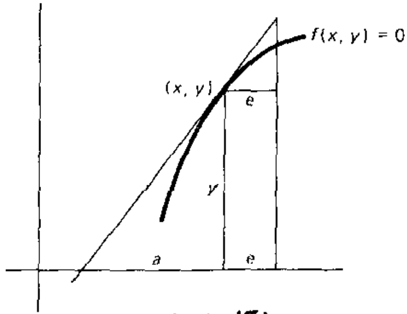
$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ۰,$$

یعنی قراردادن مشتق $f(x)$ برابر با صفر است. این روش متداول برای یافتن ماکزیموم یا مینیموم معمولی تابعی مانند $f(x)$ است، وگاهی در کتابهای مقدماتی کنونی **روش فرما** نامیده می‌شود. ولی فرما نمی‌دانست که صفرشدن مشتق $f(x)$ تنها یك شرط لازم ونه‌کافی برای یك ماکزیموم یا مینیموم معمولی است. همچنین روش فرما تمایزی بین مقدار ماکزیموم یا مینیموم نمی‌گذارد.

فرما همچنین یك روش کلی برای یافتن مماس در نقطه‌ای از یك منحنی که‌مختصات دکارتی آن معلوم باشد، ابداع کرد. ایدهٔ او یافتن **تحت‌مماس** این نقطه، یعنی، قطعه‌ای بر روی محور xها بین پای عمود رسم شده از نقطهٔ تماس برمحور xها و محل تلاقی خط مماس بامحور xهاست. دراین روش ازاین ایده استفاده می‌شود که مماس وضعیت حدی قاطعی است که دونقطهٔ تلاقی آن با منحنی برهم منطبق می‌شوند. با استفاده از نمادگذاری نوین این‌روش به‌صورت زیراست. فرض کنید که معادلهٔ منحنی (نگاه‌کنید به‌شکل ۱۰۱)، $f(x,y) = ۰$ باشد، وفرض کنید که مطلوب تعیین تحت‌مماس a برمنحنی در نقطهٔ (x,y) باشد. از روی مثلثهای متشابه بآسانی مختصات یك نقطهٔ مجاوربه نقطهٔ تماس را به‌صورت $[x+e, y(۱+e/a)]$ پیدا می‌کنیم. چنین تلقی می‌شود که این نقطه نیز من باب آزمایش برمنحنی قراردارد، که ازآن نتیجه می‌شود

$$f\left[x+e, y\left(۱+\frac{e}{a}\right)\right] = ۰.$$

این تساوی سپس با گذاشتن مقدار صفر به جای e تصحیح می‌شود. سپس معادلهٔ حاصل را نسبت به تحت‌مماس a برحسب مختصات x و y نقطهٔ تماس، حل می‌کنیم. البته، این کار معادل است با قراردادن



شکل ۱۰۱

$$a = -y\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x},$$

که یك فرمول کلی است که بعداً در آثار اسلوزه ظاهرشد. بدین طریق فرما مماسهای بر بیضی، سیکلوئید، سیسوئید، کونکوئید، کوادراتریکس، وفولیوم دکارت را پیداکرد. این روش را با یافتن تحت‌مماس دریك نقطهٔ کلی برفولیوم‌دکارت

$$x^3 + y^3 = nxy$$

روشن می‌کنیم. دراینجا داریم

$$(x+e)^3 + y^3\left(1+\frac{e}{a}\right)^3 - ny(x+e)\left(1+\frac{e}{a}\right) = 0,$$

یا

$$e\left(3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{nxy}{a} - ny\right) + e^2\left(3x + \frac{3y^3}{a^2} - \frac{ny}{a}\right) + e^3\left(1+\frac{y^3}{a^3}\right) = 0.$$

حال، با تقسیم بر e وسپس قراردادن $e = 0$، به‌دست می‌آوریم،

$$a = -\frac{3y^3 - nxy}{3x^2 - ny}\cdot$$

۱۱-۸ والیس و برو

از اساتید بلافصل قبل از آیزك‌نیوتن درانگلیس جان‌والیس و آیزك برو بودند.

جان‌والیس، که در ۱۶۱۶ به‌دنیا آمد، یکی ازتواناترین و خلاقترین ریاضیدانان عصرخود بود. وی ازنویسندگان کثیرالتألیف ومتبحر درچند زمینه بود وگفته‌اندکه اویکی از اولین‌کسانی بود که دستگاهی برای تعلیم ناشنوایان ابداع‌کرد. در ۱۶۴۹، وی به استادی ساویلی هندسه درآکسفورد منصوب شد، منصبی که وی به‌مدت ۵۴ سال تا زمان مرگش‌در۱۷۰۳ عهده‌دارآن بود. کار او درآنالیز تأثیر زیادی درآماده‌کردن زمینه‌برای

معاصر بزرگش، آیزك نیوتن، داشته‌است.

والیس یکی از اولین کسانی بود که مقاطع مخروطی را به‌عنوان منحنیهای درجهٔ دوم ونه مقطعهائی ازیك مخروط ، مورد بحث قرارداد . در ۱۶۵۶ کتاب‌حساب بینهایت کوچکهای او (که به اوترد اهدا شده بود) منتشرشد ـ کتابی که ، علیرغم برخی معایب منطقی، به‌عنوان رسالهٔ استانده‌ای برای چندین سال باقی ماند. دراین اثر، روشهای دکارت وکاوالیری به صورت منظمی در آمده وبسط یافته و چندین نتیجهٔ قابل توجه از حالتهای خاص استنتاج شده‌اند. مثلاً ، ادعا می‌شود که فرمول

$$\int_{\circ}^{\backslash} x^m dx = \frac{\backslash}{m+\backslash}$$

که به‌صورت امروزی نوشته شده و در آن m عدد صحیح مثبتی است ، حتی وقتی که m کسری یا منفی ولی مخالف ۱ ــ باشد، برقرار است. والیس اولین کسی بود که اهمیت توانهای صفر، منفی، وکسری را به‌طورکامل توضیح داد ، و نماد امروزی (∞) را برای بینهایت معرفی کرد.

والیس ، با پیدا کردن عبارتی برای مساحت ربعی از دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ ، که $\pi/۴$ است،درصدد تعیین π برآمد.این کارمعادل بامحاسبهٔ مقدار $\int_۰^۱(۱-x^۲)^{۱/۲}dx$ است، که والیس به‌علت آشنانبودن با قضیهٔ دوجمله‌ای کلی‌مستقیماً قادربه‌انجام آن نبود. بنابراین وی $\int_۰^۱(۱-x^۲)^۰dx$ ، $\int_۰^۱(۱-x^۲)^۱dx$ ، $\int_۰^۱(۱-x^۲)^۲dx$ ، وغیره را محاسبه‌کردو دنبالهٔ ۱، ۲/۳، ۸/۱۵، ۱۶/۳۵، ... را به‌دست‌آورد. وی سپس‌مسئلهٔ پیداکردن قاعده‌ای را که به‌ازای $n=۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$ دنبالهٔ بالا را بدهد ، مطمح نظر قرار داد . مقدار درونیابی‌شدهٔ این قاعده به‌ازای $n=۱/۲$ بود که والیس آن را می‌خواست. با روندی طولانی وپیچیده، وی سرانجام به عبارت حاصلضربی برای $\pi/۲$ که در بخش ۴ـ۸ داده

جان‌والیس
(کتابخانهٔ کنگره)

شده، رسید . ریاضیدانان عصر او اغلب به‌فرایندهای درونیابی برای محاسبهٔ کمیتهایی که مستقیماً قادر به‌محاسبهٔ آن نبودند، متوسل می‌شدند.

والیس کارهای دیگری هم در ریاضیات انجام داد. وی ریاضیدانی بود که به‌حل سؤالات حریف آزمای پاسکال دربارهٔ سیکلوئید (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۹.۹) از همه نزدیکتر شد. می‌توان تاحدی استدلال کرد که وی معادلی برای فرمول

$$ds=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}\right]^{1/2}dx$$

دربارهٔ طول عنصری ازقوس منحنی به‌دست آورد. اثر وی تحت عنوان رساله‌ای در جبر، تاریخچه وکاربرد آن[1]، که در۱۶۷۳ نوشته شده ولی در۱۶۸۵ به‌زبان انگلیسی ودر۱۶۹۳ به‌زبان لاتین منتشرشده بود، اولین‌تلاش‌جدی در تاریخ ریاضی، درانگلستان تلقی‌می‌شود. دراین اثر است که به‌اولین کوشش برای ارائهٔ تعبیر نموداری ریشه‌های مختلط یك‌معادلهٔ حقیقی برمی‌خوریم. والیس بخشهایی از آثار عده‌ای از ریاضیدانان بزرگ یونانی را ویرایش‌کرد ودربارهٔ موضوعات فیزیکی گوناگون مطالبی‌نوشت. وی‌یکی ازبنیانگذاران انجمن‌سلطنتی بود وچند سالی به‌عنوان کارشناس رمز در دستگاه حکومتی کارکرد.

در حالی که کار عمدهٔ والیس در بسط حسابان در نظریهٔ انتگرالگیری است، شاید مهمترین کار اساسی آیزك برو در ارتباط با نظریهٔ مشتقگیری باشد.

آیزك برو در ۱۶۳۰ چشم به‌جهان گشود. به‌روایتی‌وی درایام تحصیلات ابتدایی بقدری بازیگوش بوده است‌که گویا پدرش دعا می‌کرده است‌که اگرخداوند می‌خواهد یکی از فرزندان اورا بگیرد وی باطیب‌خاطر حاضراست‌آیزك را ببخشد. برو تحصیلات خودرا در کیمبریج به‌اتمام رسانید ودر ادب یونانی یکی‌ازبهترین فضلای عصرخودشد. وی مردی باتواناییهای علمی‌بالایی بودودر ریاضیات، فیزیك، نجوم، و الاهیات مسیحی احاطهٔ‌کامل‌داشت. داستانهای جذابی‌ازقدرت جسمی، شجاعت، بذله گویی، و وظیفه‌شناسی مفرط او گفته شده است. اواولین‌کسی بودکه کرسی لوکاسی را درکیمبریج تصاحب‌کرد، و با علو طبع در سال ۱۶۶۹ به‌نفع شاگرد عالیمقامش آیزك نیوتن از این منصب‌کناره گرفت. برو ازاولین‌کسانی بودکه استعدادهای فوق‌العادهٔ نیوتن را تشخیص ومورد‌تأیید قرار داد. او در ۱۶۷۷ در کیمبریج درگذشت.

مهمترین اثر ریاضی برو دروس نورشناسی و هندسه[2] اوست‌که درسال کناره‌گیری ازکرسی‌اش درکیمبریج منتشر شد. درپیشگفتار این رساله مراتب سپاسگزاری خود رااز نیوتن به‌خاطر برخی‌مطالب کتاب، احتمالاً قسمتهایی که به‌نورشناسی مربوط است،اعلام می‌دارد. دراین‌کتاب‌است‌که به‌رهیافت بسیارنزدیکی به‌فرایندنوین مشتقگیری برمی‌خوریم که درآن ازاصطلاح مثلث دیفرانسیل کــه در کتابهای درسی امــروزی با آن مواجــه

---

1. De algebra tractatus, historicus & practicus
2. Lectiones opticae et geometricae

آیزك برو
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

می‌شویم، استفاده شده‌است. فرض کنیدیافتن مماسی‌در نقطه‌ای مانند P، برمنحنی‌مفروضی که درشکل ۱۵۲ نشان داده شده، مورد نظر باشد. فرض کنید Q یك نقطهٔ مجاور برمنحنی‌باشد. دراین‌صورت مثلثهای PTM و PQR باتقریب خیلی‌نزدیکی متشابه‌اند، و برو استدلال می‌کند که وقتی مثلث کوچك بی‌نهایت کوچك می‌شود، داریم

$$\frac{RP}{QR}+\frac{MP}{TM}.$$

قرارمی‌دهیم $QR=e$ و $RP=a$. دراین‌صورت اگر x و y مختصات P باشند، مختصات Q، $x-e$ و $y-a$ خواهد شد. باقرار دادن این مقادیر درمعادلهٔ منحنی وصرفنظر کردن از توانهای دوم وبالاتر e و a، نسبت a/e را پیدا می‌کنیم. در این صورت داریم

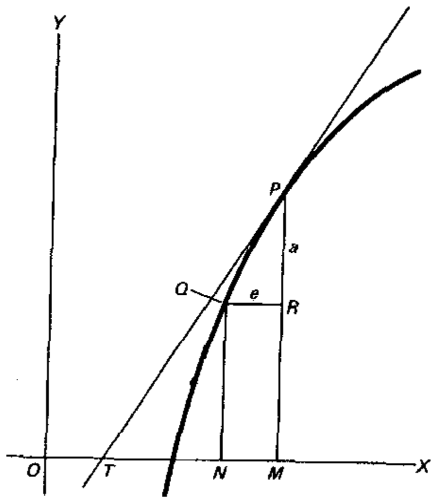
$$OT=OM-TM=OM-MP\left(\frac{QR}{RP}\right)=x-y\left(\frac{e}{a}\right),$$

و خط مماس تعیین می‌شود. برو این روش رسم مماسها را در مورد منحنیهای زیر به‌کار برده است: (الف) $x^2(x^2+y^2)=r^2y^2$ (**منحنی کاپا**)، (ب) $x^3+y^3=r^3$ (حالت خاص منحنی لامه)، (ج) $x^3+y^3=rxy$ (**فولیوم دکارت**) که‌برو آن را (**منحنی بادامی**[1] نامیده‌است)، (د) $y=(r-x)\tan \pi x/2r$ (**کوادراتریکس**)، (ه) $y=r\tan \pi x/2r$ (**یك منحنی تانژانتی**). به‌عنوان مثال، این روش را در مورد منحنی (ب) به‌کار می‌بریم. دراینجا داریم

$$(x-e)^3+(y-a)^3=r^3,$$

یا

1. la glande



شکل ۱۰۲

$$x^۳-۳x^۲e+۳xe^۲-e^۳+y^۳-۳y^۲a+۳ya^۲-a^۳=r^۳.$$

باصرفنظر کردن از توانهای دوم و بالاتر e و a، واستفاده ازاین حقیقت که $r^۳=y^۳+x^۳$،
این رابطه به‌صورت

$$۳x^۲e+۳y^۲a=۰\ ,$$

ساده می‌شود که از آن

$$\frac{a}{e}=-\frac{x^۲}{y^۲}$$

به‌دست می‌آید. البته نسبت a/e، همان dy/dx امروزی است، و روش برو راکه درآن جای سؤال است، می‌توان بآسانی بااستفاده از نظریهٔ حدود به‌صورت دقیقی درآورد.

برو را عموماً اولین کسی می‌دانند که معکوس‌هم بودن اعمال مشتقگیری و انتگرالگیری را به‌طورکامل تشخیص داده است؛ گرچه شواهدضعیفی حکم برخلاف آن دارند. این کشف مهم همان باصطلاح **قضیهٔ اساسی حسابان** است و ظاهراً درکتاب دروس برو بیان وثابت شده‌است.

گرچه برو قسمت عمدهٔ اواخر عمرش را وقف الاهیات کرد، در ۱۶۷۵، ویرایش (و شرحی) از چهار مقالهٔ اول مقاطع مخروطی وآثار باقیماندهٔ ارشمیدس و تئودوسیوس را منتشر کرد.

دراین‌مرحله ازبسط حساب دیفرانسیل وانتگرال، انتگرالهای متعددی محاسبه‌شدند،

حجم بسیاری از اجسام، مساحات اشکال و طول قوسهای زیادی به‌دست آمدند، یک فرایند مشتق‌گیری به‌مرحلهٔ کمال رسید، و مماسهای منحنی‌های متعددی رسم شدند، مفهوم حد وارد اذهان شد، و قضیهٔ اساسی تشخیص داده شد. پس دیگر چه مانده بود که باید انجام می‌شد؟ هنوز کار ایجاد یک نمادگرایی کلی بامجموعهٔ منظمی از قواعد صوری تحلیلی، ونیز بسط مجددی از مبانی این‌موضوع، باقی‌مانده بود. دقیقاً اولین اینها، یعنی ابداع یک حسابان مناسب و عملی بود، که توسط نیوتن و لایبنیتز، که مستقل از هم کار می‌کردند، تدارک دیده شد. بسط مجدد مفاهیم اساسی برمبنای دقیق وقابل قبولی باید درانتظارکاربرد فعالانهٔ این موضوع می‌ماند واین کار توسط آنالیزدان بزرگ فرانسوی اوگوستن لوئی کوشی (۱۷۸۹–۱۸۵۷) و جانشینان وی در قرن نوزدهم انجام پذیرفت. این داستان در فصل بعد خواهد آمد.

۹-۱۱ نیوتن

آیزک نیوتن در روستای وولزتورپ[1] در روز کریسمس، در سال ۱۶۴۲، سال درگذشت گالیله به‌دنیا آمد. پدر او، که قبل‌از تولد آیزک درگذشته بود، یک کشاورز بود، ودرابتدا بنا برآن بودکه پسر نیز زندگی خود را وقف کشاورزی کند. ولی پسرک مهارت و شوق زیادی درابداع مدلهای مکانیکی هوشمندانه در انجام آزمایشها از خود نشان داد. مثلاً، وی یک آسیاب بازیچه برای آردکردن گندم ساخت که نیروی محرکهٔ آن را یک موش فراهم می‌کرد، و یک ساعت چوبی ساخت که با آب کار می‌کرد. نتیجه آن شد که دورهٔ تحصیل‌او را تمدیدکردند، و، وقتی۱۸ساله بود، اجازهٔ ورودبه‌کالج ترینیتی[2]،درکیمبریج یافت. دراین مرحله ازتحصیلاتش بودکه، به‌کمک‌کتابی دربارهٔ احکام نجوم که از بازار مکارهٔ استوربریج[3] گیرآورده بود، توجه او به‌ریاضیات جلب شد. درنتیجه، ابتدا اصول اقلیدس را خواند،که آن را بسیار بدیهی یافت، وسپس هندسهٔ دکارت را مطالعه کرد،که کمی آن را مشکل یافت. وی همچنین‌کلاویس اوترد، آثارکپلر و ویت، و حساب بینهایت کوچکهای والیس را مطالعه‌کرد. وی ازخواندن ریاضیات، به‌خلق‌آن روی‌آورد وبزودی، در ۱۶۶۵، وقتی ۲۳ سال داشت، تعمیم قضیهٔ دوجمله‌ای عمومی را به‌دست‌آورد و روش فلوکسیونها[4]، نامی که وی به‌آنچه امروزه تحت عنوان حساب دیفرانسیل شناخته می‌شود، داده بود، را ابداع‌کرد. دراین سال، وقسمتی از سال‌بعد، دانشگاه به‌دلیل شیوع بیماری طاعون تعطیل بود، ونیوتن درمولدش زندگی می‌کرد. در این مدت وی حسابان خود را به‌درجه‌ای بسط دادکه می‌توانست مماس وشعاع انحناء دریک نقطه ازمنحنی را پیداکند. وی همچنین به‌مسائل مختلف فیزیکی علاقمند شد،آزمایشهای خود را درزمینهٔ نورشناختی انجام داد، ومبانی اصلی نظریهٔ گرانش خودرا پی‌ریزی کرد.

---

1. Woolsthorpe
2. Trinity College
3. Stourbridge Fair
4. fluxions

آیزك نیوتن
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

نیوتن در ۱۶۶۷ به‌کیمبریج بازگشت و به‌مدت دوسال عمدتاً سرگرم تحقیقات در نورشناسی شد. درسال ۱۶۶۹، برو از استادی لوکاسی به‌نفع نیوتن استعفا کرد، و نیوتن تدریس ۱۸ سالهٔ دانشگاهی خود را آغازکرد. اولین درسهای او، که دربارهٔ نورشناسی بود، بعداً طی مقاله‌ای به انجمن سلطنتی ارسال شدو بحث و علاقهٔ زیادی را برانگیخت. نظریهٔ رنگهای وی و برخی نتایج که از آزمایشهایش در نورشناسی به‌دست آورده بود، بشدت ازسوی بعضی‌از دانشمندان مورد حمله قرارگرفت. مجادلات بعدازآن چنان براو ناگوارآمدکه وی‌سوگندخورد دیگرچیزی درزمینهٔ‌علم به‌چاپ‌نرساند. بیزاری فوق‌العادهٔ او ازمجادله،که تاسرحد بیماری پیش می‌رفت، اثرمهمی درتاریخ ریاضیات داشت، زیرا نتیجه آن بود که همهٔ یافته‌های او تا چند سال پس از کشف آنها، چاپ نشده ماند. این تعویق در انتشار بعدها منجر به‌مشاجرات رسوایی با لایبنیتز برسر تقدم درکشف حسابان شد. به‌دلیل این مشاجره بودکه ریاضیدانان انگلیسی، به‌پشتیبانی‌نیوتن به‌عنوان رهبرشان، رابطهٔ خود را باپیشرفتهای برّ اروپا قطع کردند، و پیشرفت ریاضی در انگلستان عملاً به‌مدت یك قرن دچار عقب‌ماندگی شد.

نیوتن به‌کار خود درزمینهٔ نورشناسی ادامه داد، ودر ۱۶۷۵ کار خود را در نظریهٔ گسیلش، یا ذره‌ای نور به‌انجمن سلطنتی ارسال کرد. شهرت او و پرداخت استادانهٔ این نظریه موجب پذیرش آن ازسوی عامه گشت، و باید چندین سال می‌گذشت تا بهتر بودن فرض نظریهٔ موجی درتحقیقات، به‌ثبوت برسد. خطابه‌های‌درسی‌نیوتن از۱۶۷۳تا۱۶۸۳ به‌جبر و نظریهٔ معادلات اختصاص داشت. دراین دوره، درسال ۱۶۷۹، بودکه وی صحت نظریهٔ گرانش* خودرا بااستفاده ازاندازه‌گیری‌جدیدی ازشعاع زمین دررابطه باحرکت‌ماه

---

* هردو ذره درعالم یکدیگررا بانیرویی جذب می‌کنندکه با حاصلضرب جرمهای آنها نسبت مستقیم وبامربع فواصل بین آنها نسبت معکوس دارد.

معلوم کرد. وی همچنین سازگاری قانون گرانش خودرا باقوانین حرکت سیاره‌ای کپلر، با این فرض که خورشید و سیارات را می‌توان به‌صورت اجرام وزین تلقی کرد، ثابت نمود. اما این کشفیات مهم به‌اطلاع کسی نرسید، تااینکه پنج سال بعد، در ۱۶۸۴، هالی برای بحث درقانون نیرویی که سبب حرکت سیاره‌ها دریك مدار بیضوی‌حول‌ماه می‌شود، برای دیدن نیوتن به‌کیمبریج آمد. بدین‌ترتیب بابرانگیخته شدن مجدد علاقه‌اش به‌مکانیك سماوی، نیوتن اقدام به‌استخراج بسیاری از قضایا کردکه مبانی اصلی اولین‌کتاب اصول اورا تشکیل می‌دادند. بعداً، وقتی هالی دستنوشته‌های‌نیوتن رادید به‌اهمیت فوق‌العادهٔ آنها پی‌برد، واز مؤلف قول‌گرفت‌که نتایج خودرا به‌انجمن سلطنتی بفرستد. نیوتن چنین‌کرد، وتقریباً درهمان ایام وی سرانجام مسئله‌ای راکه سالها ذهن اورابه‌خود مشغول داشته بود، حل‌کرد. آن مسئله این بودکه جسمی‌کروی‌که چگالی‌آن درهرنقطه به‌فاصلهٔ آن ازمرکز کره بستگی دارد، یك ذرهٔ خارجی را طوری جذب می‌کند کــه گویی همهٔ جرم آن در مرکزش متمرکز شده است. این قضیه توجیه وی‌را ازقوانین حرکت سیاره‌ای کامل‌کرد، زیرا انحراف جزئی خورشید وستاره‌ها از کــرویت واقعی در اینجا قابل صرفنظرکردن است. نیوتن اینك باجدیت تمام بر روی نظریه‌اش کار می‌کرد و با تلاش فکری عظیمی اولین مقالهٔ اصول را پیش ازتابستان ۱۶۸۵ نوشت. یك سال بعد دومین مقاله کامل شد و مقالهٔ سوم را آغاز کرد. اتهامات حسودانهٔ هوك، و رنجشی‌که ازپی‌آن در نیوتن حاصل شد، تقریباً منجر به‌دست‌کشیدن از مقالهٔ سوم شد، اما سرانجام هالی نیوتن را برای پایان دادن به‌این‌کار تشویق‌کرد. رسالهٔ‌کامل، تحت عنوان اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی[1]، به‌هزینهٔ هالی، در اواسط سال ۱۶۸۷ به‌چاپ رسید وبلافاصله در سرتاسر اروپا تأثیر زیادی‌به‌جا گذاشت.

درسال۱۶۸۹، نیوتن به‌نمایندگی دانشگاه درپارلمان انتخاب شد. درسال۱۶۹۲، وی به‌بیماری عجیبی دچار شد که به‌مدت دوسال ادامه داشت وبه‌شکل اختلال حواس در اوظاهر شده بود. قسمت اعظم اواخر عمرش وقف شیمی، کیمیاگری، والاهیات مسیحی شد. درحقیقت، حتی‌درمراحل پیشین زندگی‌اش هم وی احتمالاً همان‌اندازه وقت صرف این مشغله‌ها می‌کردکه صرف ریاضیات وفلسفهٔ طبیعی. گر چه کار خلاق او در ریاضیات عملاً دچار وقفه شد، ولی‌توانائیهای‌خارق‌العادهٔ‌خودرا از دست‌نداد، زیرا مسائل‌حریف‌آزمای متعددی راکه به‌اوتسلیم می‌شد وکاملاً ماوراء توانائیهای دیگرریاضیدانان‌انگلیس بود، بااستادی تمام حل می‌کرد. درسال ۱۶۹۶، وی به‌سمت ناظر ضرابخانه منصوب شد ودر ۱۶۹۹ به‌ریاست ضرابخانه ترفیع مقام یافت. درسال ۱۷۰۳ به‌عنوان رئیس انجمن سلطنتی انتخاب وهرساله تازمان مرگش به‌همین سمت برگزیده شد وددر۱۷۰۵ لقب‌نایت [شهسوار] به‌او داده شد. آخرین قسمت زندگی اوبه‌خاطر مجادلهٔ اسفبارش با لایبنیتز با تیره‌کامی‌توأم بود. درسال ۱۷۲۷ پس‌ازیك بیماری طولانی ورنج‌آور درسن ۸۴سالگی

1.Philosophiae naturalis principia mathematica

درگذشت ودر وستمینستر ابی[1] به‌خاك سپرده شد.

همچنانکه دربالا متذکر شدیم، کلیهٔ آثار مهم منتشر شدهٔ نیوتن، بجز اصول، سالها بعد ازآنکه مؤلف مطالب آنها را کشف کرده بود به‌چاپ رسیدند، و تقریباً انتشارهمهٔ آنها در نهایت به‌علت فشار دوستانش انجام گرفته‌است. تاریخ این آثار، به‌ترتیب زمان انتشار آنها، چنین است: اصول، ۱۶۸۷؛ نورشناسی[2]، با دوضمیمه دربارهٔ منحنیهای درجهٔ سوم[3] وتربیع وراستش منحنیها به‌کمك سریهای نامتناهی[4]، سال ۱۷۰۴؛ حساب‌عمومی[5]، ۱۷۰۷؛ تحلیل از راه سریها ، فلوکسیونهـا و جز آن[6] و روش بینهایت کوچکها[7] ، ۱۷۱۱ ؛ دروس نورشناختی[8]، ۱۷۲۹ ؛ و روش فلوکسیونها و سریهای نامتناهی[9]، ترجمه از متن لاتین آن توسط ج. کولسون[10] ، ۱۷۳۶ . باید به دو نامهٔ مهم اشاره شود کـه نیوتن در ۱۶۷۶ به ه. اولدنبورگ[11]، دبیر انجمن سلطنتی نوشته ودرآن نیوتن برخی روشهای ریاضی خود را شرح می‌دهد.

درنامه‌اش به اولدنبورگ است که نیوتن استنتاج قضیهٔ دوجمله‌ای‌تعمیم‌یافته را شرح می‌دهد وآن را به‌صورت

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-۲n}{۲n}BQ+\frac{m-۲n}{۳n}CQ+\cdots,$$

بیان‌می‌کندکه‌درآن A معرف جملهٔ‌اول، یعنی $P^{m/n}$، B معرف‌جملهٔ‌دوم، یعنی $(m/n)AQ$، C معرف جملهٔ سوم، وقس علی‌هذا است. درست بودن بسط دو جمله‌ای، تحت شرایط مناسبی، به‌ازای کلیه مقادیرمختلط توان، متجاوز بر ۱۵۰ سال‌بعدتوسط ریاضیدان نروژی ن.ه. آبل (۱۸۰۲-۱۸۲۹) به ثبوت رسید.

کشف مهمتری راکه نیوتن‌تقریباً مقارن با این زمان انجام داد روش فلوکسیونهای او بود، که مطالب اساسی آن را درسال ۱۶۶۹ به‌اطلاع آیزك برو رسانید. در این کار، نیوتن یك منحنی را مولود حرکت پیوستهٔ یك نقطه می‌انگارد. بااین تصور طول وعرض نقطهٔ مولد، درحالت‌کلی، کمیتهایی درحال‌تغییرند. اوکمیت‌متغیررا یك **فلوئنت**[12] (کمیت در حال جریان) و نرخ تغییر را **فلوکسیون** فلوئنت می‌نامد. اگر یك فلوئنت، نظیر عرض نقطهٔ مولد منحنی، را با y نشان دهیم، دراین‌صورت فلوکسیون فلوئنت با $\dot{y}$ نمایش داده می‌شود. بانمادگذاری امروزی ملاحظه می‌کنیم‌که این فلوکسیون با dy/dt، که در آن t نمایش زمان است، معادل است. علیرغم واردشدن زمان درهندسه، می‌توان بااین فرض که کمیتی، مثلاً طول نقطهٔ متحرك، به‌طور ثابت افزایش می‌یابد ، از مفهوم زمان احتراز

---

1. Westminister Abbey 2. Opticks 3. Cubic Curves
4. Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series 5. Arithmetica universalis
6. Analysis per Series, Fluxiones, etc. 7. Methodus differentialis
8. Lectiones opticae 9. The Method of Fluxions and Infinite Series 10. J. Colson 11. H. Oldenburg 12. fluent

کرد. این نرخ افزایش ثابت یك فلوئنت **فلوکسیون‌اصلی**، نامیده می‌شود و فلوکسیون هر فلوئنت دیگررا می‌توان بااین فلوکسیون اصلی مقایسه کرد. فلوکسیون $\dot{y}$ با $\ddot{y}$ نشان داده می‌شود و در مورد فلوکسیونهای مراتب بالا به همین ترتیب عمل می‌شود. از سوی دیگر، فلوئنت y با نماد y که مربع کوچکی به‌دورآن کشیده شده، یاگاهی با $\acute{y}$ نشان داده می‌شود. نیوتن مفهوم دیگری را نیز معرفی می‌کند، که‌آن را **گشتاور** فلوئنت می‌نامد؛ این کمیت بی‌نهایت کوچکی است که فلوئنتی مانند x در یك فاصلهٔ بی‌نهایت کوچك o افزایش می‌یابد. بنابراین گشتاور فلوئنت x با حاصلضرب $\dot{x}o$ داده می‌شود. نیوتن خاطرنشان می‌کندکه، درهرمسئله، می‌توان ازهمهٔ جملاتی‌که مضارب توانهای دوم‌وبالاتر o هستند، صرفنظر کرد، و بدین ترتیب معادله‌ای بین مختصات x و y نقطهٔ مولد یك منحنی و فلوکسیونهای $\dot{x}$ و $\dot{y}$ آن به‌دست آورد. به‌عنوان مثال وی معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳-ax^۲+axy-y^۳=۰$ را درنظرمی‌گیرد. باگذاشتن $x+\dot{x}o$ به‌جای x و$y+\dot{y}o$ به‌جای y، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&x^۳+۳x^۲(\dot{x}o)+۳x(\dot{x}o)^۲+(\dot{x}o)^۳\\&-ax^۲-۲ax(\dot{x}o)-a(\dot{x}o)^۲\\&+axy+ay(\dot{x}o)+a(\dot{x}o)(\dot{y}o)+ax(\dot{y}o)\\&-y^۳-۳y^۲(\dot{y}o)-۳y(\dot{y}o)^۲-(\dot{y}o)^۳=۰.\end{aligned}$$

حال، بااستفاده ازاین‌حقیقت‌که $x^۳-ax^۲+axy-y^۳=۰$، وتقسیم جملات باقیمانده بر o، و سپس حذف کلیهٔ جملاتی که شامل توانهای دوم وبالاتر o هستند، رابطهٔ زیر را پیدا می‌کنیم

$$۳x^۲\dot{x}-۲ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-۳y^۲\dot{y}=۰.$$

نیوتن دونوع مسئله را درنظرمی‌گیرد. درنوع اول، رابطه‌ای بین‌چند فلوئنت به‌ما داده می‌شود، واز ما خواسته می‌شود رابطه‌ای بین فلوئنتها وفلوکسیونهای آنها پیداکنیم. این‌کاری است‌که دربالا آن را انجام دادیم. درمسائل‌نوع دوم، رابطه‌ای بین‌چندفلوئنت و فلوکسیونهای آنها داده می‌شود، واز ما خواسته می‌شودکه رابطه‌ای صرفاً بین فلوئنتها پیدا کنیم. این مسئله، عکس مسئلهٔ اول ومعادل باحل یك معادلهٔ دیفرانسیل است. ایدهٔ‌کنار گذاشتن جملات شامل‌توانهای دوم وبالاتر o را بعداً نیوتن بااستفاده ازمفاهیم ابتدایی‌حد توجیه‌کرد. نیوتن این روش فلوکسیون خودرا درجاهای متعدد وبه‌طرز جالبی به‌کاربرد. وی ماکزیموم و مینیموم مماس بر منحنیها، انحنای منحنیها، نقاط عطف، و تحدب و تقعر منحنیها را تعیین کرد و نظریهٔ خود را در محاسبهٔ مساحات زیر منحنیها وطول قوس آنها به‌کار برد. در انتگرالگیری برخی معادلات دیفرانسیل وی توانایی فوق‌العاده‌ای از خود نشان داد. این اثر همچنین متضمن روشی است (که صورت پیراستهٔ آن اکنون به‌روش نیوتن‌معروف می‌باشد) برای تقریب زدن مقادیر ریشه‌های حقیقی یك معادلهٔ عددی جبری

یا غیر جبری.

حساب عمومی متضمن مواد اصلی دروس نیوتن از ۱۶۷۳ تا ۱۶۸۳ است. در آن نتایج متعدد مهمی در نظریهٔ معادلات، نظیر این حقیقت که ریشه‌های موهومی یك چندجمله‌ای حقیقی باید به صورت مزدوج باشند، قواعدی برای پیداکردن کران بالایی برای ریشه‌های یك چندجمله‌ای حقیقی، فرمول او برای بیان مجموع توانهای nم ریشه‌های چندجمله‌ای برحسب ضرایب چندجمله‌ای، توسیعی از قاعدهٔ علامات دکارت برای یافتن تعداد ریشه‌های موهومی یك چند جمله‌ای حقیقی، وچیزهای متعدد دیگری دیده می‌شود.

منحنیهای درجه سوم، که به عنوان ضمیمه‌ای بر اثر نیوتن دربارهٔ نورشناسی ظاهر شد، به تحقیق در خواص منحنیهای درجهٔ سوم به کمك هندسهٔ تحلیلی می‌پردازد. نیوتن در دسته بندی خود از منحنیهای درجهٔ سوم از ۷۸ شکل ممکنی که منحنیهای درجه‌سوم به‌خود می گیرند ۷۲ تارا برمی‌شمارد. بسیاری از قضایای او بدون اثبات بیان شده‌اند. جالبترین ومبهوت‌کننده‌ترین آنها، این ادعای اوست که همان گونه که مقاطع مخروطی را می‌توان از تصاویر مرکزی یك دایره به دست آورد، همهٔ منحنیهای درجهٔ سوم را هم می‌توان از تصاویر مرکزی منحنیهای

$$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$$

به دست آورد. این قضیه به‌صورت معمایی باقی ماند تا اینکه در ۱۷۳۱ برهانی برای آن پیدا شد.

البته مهمترین اثر نیوتن کتاب اصول اوست، که‌در آن برای اولین بار یك دستگاه دینامیکی کامل و یك صورتبندی ریاضی از پدیده‌های اصلی زمینی و سماوی حرکت ظاهر می‌شود. این اثر به‌صورت پرنفوذترین و تحسین برانگیزنده‌ترین اثر در تاریخ علم درآمد. جالب است که قضایای آن، گرچه احتمالاً به روشهای فلوکسیونی ثابت شده‌اند، همه به استادی تمام به کمك هندسهٔ کلاسیك یونانی، که اینجاو آنجا از بعضی مفاهیم ساده راجع به حدود نیز یاری گرفته‌شده‌است، اثبات گردیده‌اند. تا قبل از به‌وجود آمدن نظریهٔ نسبیت، کل فیزیك و نجوم بر فرض دستگاه مختصات ممتازی متکی بود، که از سوی نیوتن اتخاذ شده بود. در اصول قضایای زیادی راجع به منحنیهای مسطحهٔ درجات بالاتر، براهینی بـرای قضایای جذاب هندسی نظیر دو موردی که در زیر داده می‌شود، دیده می‌شود.

۱. مکان هندسی مراکز همهٔ مقاطع مخروطی مماس بر اضلاع یك چهار ضلعی خطی است (**خط نیوتن**) مار بر اوساط قطرهای آن.

۲. اگر نقطه‌ای مانند P که در امتداد خط مستقیمی حرکت می‌کند به دو نقطهٔ ثابت O و O' وصل شود، واگر خطوط OQ و $O'Q$ زوایای ثابتی باخطوط OP و $O'P$ بسازند، آنگاه مکان هندسی Q یك مقطع مخروطی است.

نیوتن هرگز درحل هیچ یك ازمسائل گوناگون‌وحریف آزمایی که‌درمیان ریاضیدانان عصر خودش مطرح بوده اظهار عجز نکرده است. یکی از مسائلی که لایبنیتز طرح کرده

مسئلهٔ یافتن مسیرهای قائم یك خانوادهٔ منحنی است که نیوتن آن را حل کرده است.

نیوتن آزمایشگری ماهر و تحلیلگری عالی بود، به‌طور قطع همه او را در زمرهٔ بزرگترین ریاضیدانانی می‌دانند که تاکنون جهان به خود دیده است. در بصیرت درمسائل فیزیکی و توانایی در مطالعهٔ ریاضی آنها احتمالاً هیچکس بر او برتری نگرفته است. عظمت او بارها ازسوی داوران توانایی‌مورد تصدیق قرار گرفته‌است. مثلاً ستایش بزرگ‌منشانه‌ای که لایبنیتز از او به عمل‌آورده است از آن جمله است «اگر ریاضیات را از آغازجهان تا عصر نیوتن در نظر گیریم،آنچه اوکرده بیش از نیم آن است». واین سخن ازلاگرانژ است که نیوتن بزرگترین نابغه‌ای بوده‌که در جهان زیسته‌است، و نیز خوشبخت‌ترین آنان، زیرا تنها یك‌بار می‌توان‌دستگاه جهان را تأسیس کرد. پاپ‌دستاوردهای اورابا این‌جملات شاعرانه بیان‌کرده است،

طبیعت و قوانین طبیعت در ظلمت نهفته بودند؛
ذات باری فرمود «نیوتن به‌وجود آید» و همه‌چیز روشن شد.[1]

درمقابل این‌ستایشها، ارزیابی خاضعانهٔ خود نیوتن ازکارهایش‌چنین است:«نمی‌دانم دنیا به من به‌چه دیده‌ای می‌نگرد؛ اما من خود را چون کودکی می‌بینم که در ساحل دریا سرگرم بازی است،گهگاه یافتن سنگریزه‌ای صافتر یا صدفی‌زیباتر توجهم راجلب‌می‌کند، در حالی‌که اقیانوس پهناور حقایق در مقابلم کشف ناشده‌گسترده است.» در سخاوت طبع وی نسبت به پیشینیانش یك بارگفته است که اگر افق دید اوگسترده‌تر از دیگران است، صرفاً به خاطر آن است که بر دوش غولان ایستاده است.

گفته‌اندکه نیوتن اغلب در روز، ۱۸ یا ۱۹ ساعت‌راصرف نوشتن می‌کرده، و نیز ازقدرت‌تمرکز ذهنی‌نیرومندی‌برخوردار بوده‌است. داستانهای‌خوشمزه‌واحتمالاً مشکوکی در تأیید حواسپرتی او هنگامی‌که غرق تفکر بوده،گفته شده است.

مثلاً، این داستان راگفته‌اندکه روزی که ضیافت شامی به دوستان داده بود، میز را برای آوردن یك‌بطری‌شراب ترك گفت، وبه علت اشتغال فکری آن را فراموش‌کرد، ردا برتن نمود، و ازکلیسا سردرآورد.

درموردی دیگر دوست‌نیوتن، دکتر استوکلی[2] به‌منزل وی برای شام جوجه دعوت داشت. نیوتن هنگام آمدن او موقتاً از منزل بیرون‌رفته، ولی‌میز.راقبلاً چیده‌وجوجه‌پخته را درظرفی زیرسرپوشی نهاده‌بود. ماندن نیوتن درخارج ازمنزل،که قرارشام رافراموش کرده بود، بیش‌از حد به‌درازاکشید و دکتر استوکلی‌سرانجام سرپوش غذا رابرداشته و به‌تناول‌جوجه‌پرداخت، و سپس‌استخوانها را درظرف سرپوشیده‌قرار داد. بعداًوقتی‌بالاخره نیوتن پیدایش شد به دوست خود خوشامدگفت، و ضمن نشستن او نیز سرپوش‌رابرداشت و با تهمانده‌ها روبه رو شد وگفت «خدای من، من فراموش‌کرده‌ام‌که قبلاً شام‌خورده‌ایم.»

---

1. Nature and Nature's laws lay hid in night; God said, 'Let Newton be,' and all was light 2. Dr. Stukeley

و بالاخره یك‌بار وقتی که روزی سوار بر اسب از گرانتام[1] به منزل‌می‌رفت،از اسب پایین آمد تا حیوان را از تپهٔ اسپیتل‌گیت[2]،که درست درکنار شهر قرار داشت، بالا ببرد. بی‌آنکه متوجه شود، در سربالایی تپه، اسب به پایین لغزید و تنها دهنهٔ خالـی در دست ارباب باقی ماند، نیوتن وقتی از این حقیقت آگاه شد که ، در بالای تپه، مجدداً در صدد جست‌زدن بر زین برآمده بود.

۱۱ـ۱۰ لایبنیتز

گوتفرید ویلهلم‌لایبنیتز، بزرگترین‌نابغهٔ جامع‌قرن هفدهم، و رقیب نیوتن درابداع‌حسابان، در لایپزیگ[3] ، در ۱۶۴۶ متولد شد. از آنجا که در سنین کودکی خواندن زبانهای لاتین ویونانی‌را نزدخود فراگرفته‌بود،قبل‌از ۲۰ سالگی، برمعارف‌عادی‌موجود درکتابهای درسی، در زمینهٔ ریاضیات، فلسفه، الاهیات، و حقوق تسلط یافت . با همهٔ جوانی به خلق اولین‌ایده‌های‌خصیصه‌های‌کلی[4] پرداخت،که متضمن ریاضیات جامعی‌بودکه بعداً درقالب منطق‌علامتی جورج‌بول[5](۱۸۱۵ـ۱۸۶۴) شکوفا شد، وبعدآ،در۱۹۱۰، درقالب اثرعظیم پرینسیپیاماتماتیکا [اصول‌ریاضیات][6] وایتهد و راسل درآمد. وقتی، ظاهراً به‌دلیل‌جوانیش، از اعطای دکترای حقوق در دانشگاه لایپزیگ به او خودداری شد ، به‌نورنبرگ رفت. درآنجا مقالهٔ درخشانی دربارهٔ تدریس‌حقوق به‌روش‌تاریخی‌نوشت وآن را به‌برگزینندهٔ[7] ماینتس[8] اهداکرد. این‌کار موجب شدکه این برگزیننده وی را درکمیسیونی برای تدوین مجدد بعضی قوانین‌انتخاب کند. باقی زندگی‌لایبنیتز از این‌زمان به‌بعد درخدمات سیاسی، ابتدا در خدمت برگزینندهٔ ماینتس و سپس، تقریباً از حدود ۱۶۷۶ تا زمان مرگش، در خدمت دوك‌برونسویك[9] در هانوور[10] صرف شد.

درسال۱۶۷۲،طی‌یك مأموریت سیاسی‌درپاریس،لایبنیتز با هویگنس، که درآن‌موقع در آنجا اقامت داشت، دیدارکرد، ودیپلمات جوان با جلب رضایت این عالم به‌فراگرفتن ریاضیات در نزد وی پرداخت. درسال‌بعد لایبنیتز به یك مأموریت سیاسی به‌لندن فرستاده شد و در آنجا با اولدنبورگ و دیگران‌آشنا شد و در همانجاماشین حساب ابداعی‌خود را در انجمن سلطنتی به معرض نمایش‌گذاشت. قبل از ترك‌پاریس‌برای احرازمقام پرسود کتابداری دوك برونسویك،لایبنیتز قضیهٔ اساسی‌حسابان راکشف‌کرد، قسمت‌اعظم‌نمادهای خود را درحسابان به‌وجودآورد، وتعدادی‌ازفرمولهای‌مقدماتی‌مشتق گیری‌را استخراج‌کرد.

---

1. Grantham 2. Spittlegate 3. Leipzig
4. Characteristica generalis 5. George Boole
6. Principia mathematica

۷. برگزیننده یا الکتور (elector) ، عنوان برخی از امرای نواحی جزء امپراطوری مقدس روم، که امپراطور را انتخاب می‌کردند.ـم.

8. Mainz 9. Duke of Brunswick 10. Hanover

گوتفرید ویلهلم لایبنیتز
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

انتصاب لایبنیتز درخدمت برگزینندهٔ هانوور به اوفراغت لازم رابرای دنبال‌کردن مطالعات دلخواهش داد و درنتیجه وی بعد از خودکوهی از مقالات‌در انواع‌موضوعات به‌جا گذاشت. وی بویژه زبانشناس توانایی بود،که شهرتی به عنوان عالم‌زبان‌سانسکریت کسب کرد، و نوشته‌های او در فلسفه او را در ردیف ممتازی در این زمینه قرار داد. او طرحهای متنوع بزرگی در سر داشت که بی‌حاصل از کار درآمدند، از آن جمله اتحاد مجدد کلیساهای پروتستان و کاتولیك، وبعداً، دو فرقهٔ پروتستان زمان خود بود. در۱۶۸۲ وی و اوتومنکه[1] مجله‌ای به‌نام آکتا اِرودیتوروم[2] [اعمال دانشوران] را تأسیس کردند،که او سردبیر آن شد. بیشتر مقاله‌های او در بارهٔ مکانیك،که عمدتاً دردورهٔ دهساله‌از۱۶۸۲ تا ۱۶۹۲ نوشته شده، در این مجله ظاهر شدند. این مجله، در بسّر اروپا رواج بسیاری داشت. در سال ۱۷۰۰، لایبنیتز آکادمی علوم برلین را تأسیس کرد، و در صدد تأسیس آکادمیهای مشابهی در درسدن[3]، وین، و سن پترزبورگ درآمد.

هفت سال آخر عمر لایبنیتز به خاطر مشاجره‌ای با سعایت دیگران بین او و نیوتن بر سر اینکه او حسابان را مستقل ازنیوتن ابداع کرده است، به تلخی سپری شد. درسال ۱۷۱۴، مخدوم او اولین پادشاه آلمانی انگلیس شد، و لایبنیتز در هانوور، به فراموشی سپرده شد. می گویندکه دوسال بعد، در ۱۷۱۶، وقتی از دنیا رفت، تنها کسی که در تشییع جنازهٔ او شرکت کرد، منشی باوفایش بود.

لایبنیتز در جستجوی خود برای خصیصه‌های کلی به طرحهایی جهت یك نظریه در منطق ریاضی و یك روش علامتی باقواعد صوری که لزوم‌فکرکردن را ازبین‌می برد،راهبر شد. گرچه این رؤیا فقط امروزه به مرحلهٔ تحقق محسوسی رسیده است، لایبنیتز، درقالب علامتگذاری کنونی، خواص اصلی‌جمع، ضرب، و نقیض منطقی را بیان کرده بود،مجموعهٔ تهی و احتوای مجموعه‌ها را مطالعه‌کرده بود، و متوجهٔ شباهتهای برخی خواص احتوای مجموعه‌ها و استلزام گزاره‌ها شده‌بود (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۱۱).

---

1. Otto Mencke 2. Acta eruditorum 3. Dresden

لایبنیتز حسابان خود را زمانی بین سالهای ۱۶۷۳ و ۱۶۷۶ اختراع کرد. در ۲۹ اکتبر ۱۶۷۵ بودکه برای اولین بار علامت امروزی انتگرال را، به صورت S کشیده‌ای که از اولین حرف کلمهٔ لاتین سوما[1] (مجموع) گرفته شده، برای نشان دادن مجموع تقسیم‌ناپذیرهای کاوالیری به‌کار برد. چند هفته بعد او دیفرانسیلها ومشتقها، وهمچنین انتگرالهایی نظیر $\int ydx$ و $\int ydy$ رابه‌صورتی نوشت، که ما امروزه می‌نویسیم. اولین‌مقالهٔ چاپ‌شدهٔ او در حساب دیفرانسیل تا سال ۱۶۸۴ ظاهر نشد. در این‌مقاله وی dx را به عنوان بازهٔ متناهی دلخواهی معرفی می‌کند و سپس dy را با تناسب زیر تعریف می‌کند

$$dy : dx = y : \text{تحت مماس} \, .$$

بسیاری از قواعد مقدماتی مشتقگیری را، که یك دانشجو در اوایل یك درس مقدماتی در حسابان می‌آموزد، لایبنیتز استخراج کرده است. قاعدهٔ یافتن‌مشتق nم حاصلضرب دوتابع (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۶.۱۱) هنوز هم **قاعدهٔ‌لایبنیتز** نامیده می‌شود.

لایبنیتز احساسی قوی نسبت به صورتهای ریاضی داشت و نسبت بــه توانائیهای نمادگرایی در صورتی که با حسن‌تدبیر وضع‌شوند، حساس‌بود. نمادگذاری‌اودرحسابان فرجام بسیار خوبی‌داشت، وبدون تردید ساده‌تر وانعطاف‌پذیرترازنمادگذاری‌فلوکسیونی نیوتن بود. گرچه ریاضیدانان انگلیسی به مدت زیادی به نمادگذاری رهبرشان اصــرار ورزیدند. در قرن نوزدهم بودکه «انجمن تحلیلی»، نامی که یکی از مؤسسین آن، چارلز بابیج[2]، به‌آن داد، درکیمبریج به منظورحمایت از «اصول d-گرایی[3] خالص در مقابـل نقطه‌گرایی[4] دانشگاه» تشکیل‌شد. باید خاطر نشان‌کنیم که فلسفهٔ‌عقل گرای d-گرایی مورد قبول بسیاری از دانشمندان زمان بود.

معمولاً گفته می‌شودکه نظریهٔ دترمینانهارا لایبنیتز، در سال ۱۶۹۳، هنگامی‌که این فرمها را در رابطه با دستگاههای معادلات خطی همزمان در نظرگرفت، پدیدآورده است، گرچه اندیشهٔ مشابهی را ده سال پیش از او در ژاپن سکی‌کووا[5] داشته است. تعمیم قضیهٔ دو جمله‌ای به قضیهٔ چند جمله‌ای، که به بسط

$$(a+b+\cdots+n)^r$$

مربوط می‌شود، به لایبنیتز منسوب است. وی همچنین تلاش زیادی برای‌پایه‌گذاری‌نظریهٔ پوشهاکرد و دایرهٔ بوسان را تعریف نمود و اهمیت آن را در مطالعهٔ منحنیها نشان‌داد.

ما در اینجا وارد بحث در باب مشاجرهٔ اسفبار نیوتن-لایبنیتز نخواهیم شد. عقیدهٔ عمومی امروزه براین است‌که هریك از آنها حسابان را مستقل‌از دیگری کشف کرده‌است. با آنکه‌کشف نیوتن زودتر انجام شده، لایبنیتز زودتر به انتشار نتایج پرداخته است. اگر

---

1. Summa 2. Charles Babbage
3. d-ism [هواداری از نماد d برای دیفرانسیل که لایبنیتز آن را به‌کار برده بود]
4. dot-age [هواداری از نماد نقطه‌ای که نیوتن واضع آن بود]
5. Seki kōwa

مارکی دولوپیتال
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

لایبنیتز ریاضیدانی به ژرفای نیوتن نبوده، ولی شاید وسعت اطلاعات اوبیشتر بوده‌است، ودرهمان حال که به‌عنوان آنالیزدان و فیزیك ـ ریاضیدان از رقیب انگلیسی خود پایینتر بوده است، احتمالاً تخیل ریاضی نافذتری داشته و فراست برتری در درك صورتهای ریاضی داشته است. جدالی که نتیجهٔ تفتین دیگران بود، منجر بـه آن شدکه ریاضیدانان بریتانیایی بر پیشرفتهای اروپا چشم فروپوشند و این بیشتر به زیان ریاضیدانان انگلیسی تمام شد.

بعد از نیوتن و لایبنیتز برای مدتی شالوده‌های حسابان در پردهٔ ابهام باقی ماندو چندان به آن اعتنا نشد،زیرا قابلیت کاربرد استثنایی این موضوع بودکه‌توجه اولین‌محققین را به خود جلب کرد. تا سال ۱۷۰۰، قسمت اعظم حسابان دانشگاهی، همراه با بخشهایی از موضوعات پیشرفته‌تر، نظیرحساب تغییرات، پی‌ریزی شده بود. اولین کتاب درسی در این موضوع در ۱۶۹۶، نوشتهٔ مارکی دولوپیتال[1] (۱۶۶۱-۱۷۰۴) هنگامی منتشر شد که وی، تحت یك توافق غیر عادی، دروس استاد خود، یوهان برنولی، را انتشار داد. در این کتاب قاعدهٔ موسوم به قاعدهٔ هوپیتال برای یافتن مقدار حدی یك کسرکه صورت‌و مخرج آن باهم به صفر میل می کنند، دیده می‌شود.

لایبنیتز فردی عمیقاً خوش‌بین‌بود. وی امیدوار بودکه نه‌تنها فرقه‌های مذهبی متضاد‌اندیش زمان خود را دریك کلیسای جهانی واحد متحدکند، بلکه وی تصور می‌کرد راهی برای به‌مسیحیت درآوردن سراسرچین به‌وسیلهٔ آنچه فکر می کرد تصویر خلقت درحساب دودویی است، داشته باشد. چون می‌توان یك را نشانهٔ خدا وهیچ را نشانهٔ صفر دانست، وی پنداشت که خداوند همه چیز را ازهیچ آفرید همچنانکه درحساب دودویی کلیهٔ اعداد

1. Marquis de l'Hospital

به‌وسیلهٔ یك‌وصفر بیان می‌شوند. این اندیشه چنان باعث خوشحالی لایبنیتز شد که وی آن‌را طی مراسله‌ای به‌ژزوئیت گریمالدی، رئیس‌هیأت ریاضی چین[1]، اعلام کرد، با این امید که این اندیشه باعث گرویدن امپراطورحاکم چین (که دلبستگی خاصی به‌علم داشت)، و در نتیجه تمام‌چین، به‌مسیحیت‌شود. به‌عنوان مورد دیگری از پندارهای‌مذهبی‌لایبنیتز، می‌توان اظهارنظر او را دربارهٔ اعداد موهومی مثال‌زد که آنها را نظیر روح‌القدس درکتب مقدس مسیحیت می‌دانست_نوعی موجود دو زیست که درنیمه‌راه بین وجود وعدم قراردارد.

ما شرح خود ازلایبنیتز را با این‌تمجید اختتامیه براستعداد یگانهٔ او به‌پایان می‌بریم. اندیشهٔ ریاضی‌را دوحوزهٔ وسیع‌ومتضاد است؛ ریاضیات پیوسته و ریاضیات گسسته. لایبنیتز تنها شخصی درتاریخ ریاضیات است که هردوجنبهٔ اندیشه را درحدی عالی دارا بود.

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱.۱۱ روش‌افنا

(الف) با فرض باصطلاح **اصل ارشمیدس**: اگر دو کمیت همجنس داده شده باشند، آنگاه می‌توانیم مضربی ازکمیت کوچکتر پیداکنیم‌که ازکمیت بزرگتر بیشترباشد. گزارهٔاصلی روش‌افنا را ثابت‌کنید: اگرازکمیت دلخواهی‌جزئی‌ناکمتر ازنصف‌آن‌کسرشود، ازباقیمانده قسمت دیگری‌که ازنصف‌آن کمترنیست، برداشته شود، واین‌عمل به‌همین قیاس ادامه یابد، درنهایت‌کمیتی باقی می‌ماندکه ازهرکمیت مفروض ازهمان جنس کمتر خواهد بود. (اصل ارشمیدس درتعریف چهارم مقالهٔ V اصول اقلیدس تلویحاً آورده شده است، وقضیهٔ اصلی روش افنا به‌صورت قضیهٔ ۱ مقالهٔ X اصول دیده می‌شود.)

(ب) به‌کمك‌گزارهٔ اصلی روش افنا، نشان دهیدکه تفاضل بین مساحات یك دایره‌و یك چندضلعی منتظم محیطی را می‌توان تا هرمیزان دلخواه‌کوچك‌کرد.

۲.۱۱ روش تعادل

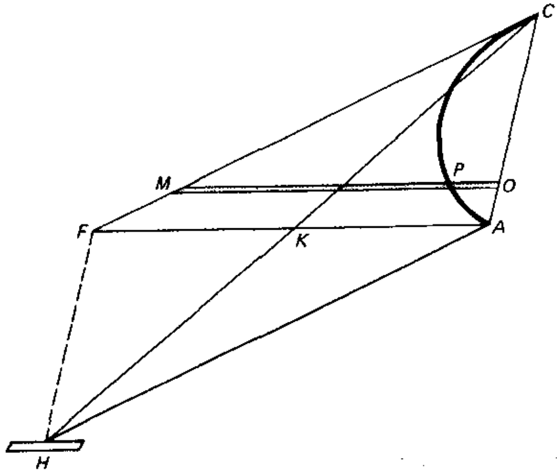
شکل ۱۵۳ یك‌قطعهٔ سهموی رانشان می‌دهدکه AC وتری ازآن‌است. CF در C برسهمی مماس و AF با محورسهمی موازی‌است. OPM نیزبا محورسهمی موازی‌است. Kوسط FA است و $HC \cdot HK = KC$ را به‌عنوان اهرم اختیارکنید به‌طوری‌که K تکیه‌گاه‌آن باشد. مرکز را در H قرار دهید، و OM را درجای خود نگهدارید.

(الف) با استفاده ازاین حقیقت هندسی‌که $OM/OP = AC/AO$ وبا روش‌تعادل ارشمیدسی نشان دهیدکه مساحت قطعهٔ سهموی برابریك‌سوم مساحت مثلث AFC است.

(ب) ازقسمت (الف) نتیجه بگیریدکه مساحت یك‌قطعهٔ سهموی برابراست با۲/۳ مساحت مثلث محصور بین وترقطعه و۲ مماس برسهمی در دونقطهٔ انتهایی وتر.

---

1. Mathematical Board of China



شکل ۱۰۳

۳.۱۱ چند مسئله از ارشمیدس

ارشمیدس چند مقاله را به‌حل مسائل حجم وسطح اختصاص داده و نتایج خود را به کمك «روش‌افنا» ثابت‌کرده است. به کمك روشهای کنونی مسائل ارشمیدس زیر را حل کنید.

(الف) مساحت یك منطقهٔ کروی به‌ارتفاع h وشعاع r را پیداکنید.

(ب) مرکزهندسی قطعهٔ کروی را پیدا کنید.

(ج) حجم یك‌گووهٔ‌استوانه‌ای یا سم را که ازقطع دادن یك استوانهٔ مستدیر قائم‌با صفحه‌ای ماربریکی ازاقطار قاعدهٔ استوانه حاصل می‌شود، حساب‌کنید.

(د) حجم مشترك دو استوانهٔ مستدیر قائم با شعاعهای برابر را که دارای محورهای متعامدند، پیداکنید.

۴.۱۱ روش تقسیم‌ناپذیرها

(الف) (۱)نشان دهیدکه یك منشورمثلث‌القاعده را می‌توان بسه هرم مثلث‌القاعده تقطیع کرد که ، دوبه‌دو، قاعده‌های معادل وارتفاعهای برابر داشته باشند. (۲) با استفاده ازاصل دوم کاوالیری، نشان دهیدکه ۲ هرم مثلث‌القاعده که قاعده‌های معادل وارتفاعهای برابر دارند ، حجمشان برابر است . (۳) حال نشان دهید که حجم یك هرم مثلث‌القاعده برابر ۱/۳ حاصلضرب مساحت قاعدهٔ هرم درارتفاع آن است.

(ب) اصل‌کاوالیری را به‌کمك انتگرالگیری نوین ثابت‌کنید.

(ج) به‌کمك اصل دوم کاوالیری ، حجم یك‌گووهٔ استوانه‌ای ، یا سم (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۳.۱۱ (ج)) را برحسب r ، شعاع استوانهٔ وابسته و h ، ارتفاع سم پیدا

کنید. (سم را با صفحه‌ای مانند p مار برمحور استوانه به‌دوقسمت برابر تقسیم کنید، وفرض کنیدکه A مساحت مقطع مثلث‌شکل حاصل باشد. یك منشور قائم که قاعدهٔ آن مربعی به مساحت A وقاعده واقع برصفحهٔ p و ارتفاع برابربا r باشد، بسازید. از منشور یك هرم ببرید که قاعدهٔ آن، قاعده‌ای ازمنشور باشد که در p واقع نیست و رأس آن نقطه‌ای در پایهٔ دیگرمنشور است. این منشور توکنده را می‌توان به عنوان جسم مبنای مقایسه برای یکی از دونیمه سم به‌کاربرد.)

(د) به کمك اصل کاوالیری، حجم یك **حلقهٔ کروی** را پیدا کنید که از کندن یك سوراخ استوانه‌ای‌شکل که با محور قطبی کره هم‌محور است، حاصل می‌شود. (جسم مبنای مقایسه راکره‌ای بگیریدکه قطرش برابربا ارتفاع h حلقه باشد.)

(ه) نشان دهید که شعاعهای کره‌های حلقه‌ها هرچه باشند، همهٔ حلقه‌های کروی که ارتفاعشان یکی است، حجمهای برابر دارند.

(و) یك چندوجهی طرح کنید که بتوان آن را به عنوان جسم مبنای مقایسه برای به‌دست آوردن حجم کره‌ای به‌شعاع r به‌کمك اصل کاوالیری، به‌کار برد. (فرض کنید AB و CD دو قطعه خط در فضا باشند به‌طوری که: (۱) $AB=CD=2r\sqrt{\pi}$، (۲) AB و CD هریك برخط واصل بین اوساطشان عمود باشند، (۳) طول قطعه خطی‌که اوساط را به هم وصل می‌کند، $2r$ است. (۴) AB بر CD عمود باشد. چهاروجهی $ABCD$ می‌تواند به‌عنوان چندوجهی مبنای مقایسه مورداستفاده قرارگیرد.)

(ز) با استفاده ازاصل دوم کاوالیری، حجم **چنبره**، یا **حلقهٔ‌لنگر** راکه از دوران دایره‌ای به‌شعاع r حول خطی‌درصفحهٔ دایره وبه‌فاصلهٔ $c\geqslant r$ ازمرکز دایره، پدیدمی‌آید پیداکنید. (چنبره را برصفحه‌ای مانند p عمود برمحور چنبره قراردهید. جسم مبنای‌مقایسه را استوانهٔ قائم مستدیری به‌شعاع r وارتفاع $2\pi c$ اختیارکنید وآن را در امتداد طول بر صفحهٔ p قرار دهید.)

(ح) با استفاده ازاصل اول کاوالیری، حجم احاطه شده توسط منحنی

$$b^{2}y^{2}=(b+x)^{2}(a^{2}-x^{2})$$

راکه درآن $b\geqslant a>0$، پیداکنید.

(ط) نشان دهیدکه نمی‌توان یك چندضلعی یافت که به عنوان مساحت مبنای مقایسه برای به‌دست آوردن مساحت دایرهٔ مفروض به وسیلهٔ اصل اول کاوالیری مورد استفاده قرار گیرد.

۵.۱۱ فرمول منشورگونی

یك منشوروار چند وجهیی است که همهٔ رأسهای آن بر دوصفحهٔ موازی قرارداشته‌باشند. وجوه واقع دراین دوصفحه، قاعده‌های منشوروار نامیده می‌شوند. اگر تعداد اضلاع دو قاعده باهم برابرباشند، منشوروار را **منشورگون** می‌نامند. **یك منشورگون تعمیم یافته هر**

جسم صلبی است که‌دارای دوصفحهٔ قاعده موازی باشد و مساحات مقاطع موازی باقاعده‌ها درآن توسط یك تابع درجهٔ دوم از فواصل آنها ازیکی ازقاعده‌ها داده شود.

(الف) نشان دهید که حجم یك منشور، یك گووه (منشور قائم مثلث‌القاعده‌ای که طوری برگردانده شده‌باشد که برروی یکی از وجوه جانبی‌آن، که قاعدهٔ آن را تشکیل می‌دهد، قرارگیرد)، ویك هرم با فرمول منشورگونی داده می‌شود:

$$V=\frac{h(U+۴M+L)}{۶}$$

که درآن h ارتفاع، U، L، و M بترتیب مساحتهای قاعده‌های بالایی و پایینی و میانی هستند.

(ب) نشان دهید که حجم هرمنشوروار محدب ازفرمول منشورگونی به‌دست‌می‌آید.

(ج) به‌کمك اصل کاوالیری، نشان دهید که حجم هرمنشوروار تعمیم یافته ازفرمول منشورگونی به‌دست می‌آید.

(د) قسمت (ج) را با استفاده ازحساب انتگرال ثابت‌کنید.

(ه) به‌کمك حساب انتگرال نشان دهید که حجم هرجسمی که دارای دوصفحهٔ‌قاعده موازی باشد و مساحتهای مقاطع موازی با قاعدهٔ آنها توسط یك معادلهٔ درجهٔ سوم از فواصل آنها ازیك قاعده داده می‌شود، ازفرمول منشورگونی به‌دست می‌آید.

(و) با استفاده از فرمول‌منشورگونی‌حجم: (۱) یك‌کره، (۲) یك بیضوی، (۳) یك گاوهٔ استوانه‌ای، (۴) جسم مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱-۳ (د) را پیداکنید.

۶.۱۱ مشتقگیری

(الف) شیب خط مماس درنقطهٔ (۳،۴) بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$ را به‌روشهای‌زیر پیداکنید:

۱. روش فرما.

۲. روش برو.

۳. روش فلوکسیونهای نیوتن.

۴. روش امروزی.

(ب) اگر $y=uv$، که در آن u و v توابعی از xاند، نشان دهید که مشتق n ام y نسبت به x از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$y^{(n)}=uv^{(n)}+nu'v^{(n-۱)}+\frac{n(n-۱)}{۲!}u''v^{(n-۲)}$$

$$+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}u'''v^{(n-۳)}+\dots+u^{(n)}v.$$

این دستور، به‌قاعدهٔ لایبنیتز مشهور است.

۷.۱۱ قضیهٔ دوجمله‌ای

(الف) نشان دهید که بیان نیوتن از قضیهٔ دوجمله‌ای که در بخش ۱۱–۹ داده شد با بسط آشنای زیر معادل است.

$$(a+b)^r = a^r + ra^{r-1}b + \frac{r(r-1)}{2!}a^{r-2}b^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}a^{r-3}b^3 + \cdots$$

(ب) با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای نشان دهید که اگر $(a+ib)^k = p+iq$، که در آن a، b، p، q اعداد حقیقی‌اند، k عدد صحیح مثبتی است، و $i=\sqrt{-1}$، آنگاه $(a-ib)^k = p-iq$.

(ج) با استفاده از (ب) نشان دهید که ریشه‌های موهومی یك چندجمله‌ای باضرایب حقیقی به‌صورت مزدوج ظاهر می‌شوند. (این نتیجه را نیوتن به‌دست داده‌است.)

۸.۱۱ یك کران بالا برای ریشه‌های یك معادلهٔ چندجمله‌ای

(الف) با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای، یا به‌طریق دیگر، نشان دهید که اگر $f(x)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ nام باشد، آنگاه

$$f(y+h) \equiv f(h) + f'(h)y + f''(h)\frac{y^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(h)\frac{y^n}{n!}.$$

(ب) نشان دهید که هرعددی که به‌ازای آن یك چندجمله‌ای حقیقی $f(x)$ و همهٔ مشتقهای $f'(x)$، $f''(x)$، ...، $f^{(n)}(x)$ آن، مثبت باشند کـران بالایی برای ریشه‌های حقیقی $f(x)=0$ است. (این نتیجه از آن نیوتن است.)

(ج) نشان دهید که اگر به‌ازای $x=a$، $f^{(n-k)}(x)$، $f^{(n-k+1)}(x)$، ...، $f^{(n)}(x)$ همه مثبت باشند، آنگاه این توابع به‌ازای هرعدد $x>a$ نیز مثبت خواهند بود.

(د) نتایج قسمتهای (ب) و (ج) را می‌توان برای یافتن کران بالای نزدیکی بـرای ریشه‌های حقیقی یك معادلهٔ چند جمله‌ای حقیقی به‌کار برد. روش کلی به‌صورت زیر است: کوچکترین عدد صحیحی را کـه $f^{(n-1)}(x)$ را مثبت می‌کند، اختیار کنید. این عدد را در $f^{(n-2)}(x)$ قرار دهید. اگر به‌یك نتیجهٔ منفی برسیم، عدد صحیح را متوالیاً واحد به واحد افزایش دهید تا عدد صحیحی پیدا کنید که این تابع را مثبت نماید. حال با عدد صحیح جدید مثل‌قبل عمل‌کنید. کار را به‌همین منوال‌ادامه دهید تا عدد صحیحی پیدا شودکه کلیهٔ تابعهای $f(x)$، $f'(x)$، ...، $f^{(n-1)}(x)$ را مثبت‌نماید. به‌کمك این‌روش کران بالایی برای ریشه‌های حقیقی

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x + 9 = 0$$

پیدا کنید.

۹.۱۱ جواب تقریبی معادلات

(الف) نیوتن روشی برای تقریب کردن مقادیر ریشه‌های حقیقی یك معادلهٔ عددی ابداع کرد که هم در معادلات جبری و هم در معادلات غیرجبری به‌کار می‌آید. پیرایش یافتهٔ این روش، که امروزه به **روش نیوتن** مشهور است، بدین قرار است: اگر $f(x)=0$ در بازهٔ $[a,b]$ تنها یك ریشه داشته باشد، و اگر نه $f'(x)$ در این بسازه صفر شود و نه $f''(x)$، و اگر x_0 را یکی از دو عدد a یا b بگیریم که به‌ازای آن $f(x_0)$ و $f''(x_0)$ هم‌علامت باشند، آنگاه

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

نزدیکتر از x_0 به‌ریشه است. این نتیجه را ثابت کنید.

(ب) به روش نیوتن معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-2x-5=0$ را برای یافتن ریشه‌ای واقع بین ۲ و ۳، حل کنید.

(ج) به‌روش نیوتن معادلـهٔ $x=\tan x$ را برای یافتن ریشه‌ای واقع بین ۴٫۴ و ۴٫۵، حل کنید.

(د) به‌روش نیوتن مقدار تقریبی $\sqrt{12}$ را با سه رقم اعشار پیدا کنید.

(ه) به‌کمك هذلولی $xy=k$، $k>0$، نشان دهید که اگر x_1 تقریبی برای $\sqrt{k}$ باشد، آنگاه $x_2=(x_1+k/x_1)/2$ تقریب بهتری است، و همینطور الی‌آخر. (این‌روش هرون برای تقریب‌کردن جذر است.) (به‌بخش ۶-۶ نگاه کنید.)

(و) روش (ه) را با به‌کاربردن روش‌نیوتن درمورد $f(x)=x^2-k$، پیدا کنید.

(ز) با به‌کار بستن روش نیوتن درمورد $f(x)=x^n-k$، که در آن n عدد صحیح مثبتی است، نشان دهید که اگر x_1 تقریبی برای $\sqrt[n]{k}$ باشد، آنگاه

$$x_2=\frac{(n-1)x_1+\dfrac{k}{x_1^{\,n-1}}}{n}$$

تقریب بهتری است، و همینطور الی‌آخر.

(ح) در کتابی راجع به‌نظریهٔ معادلات، دنبال قضیه‌ای به‌نام **قضیهٔ فوریه**[1] بگردید که در آن، شرط حتمی موفقیت‌آمیز بودن روش نیوتن ذکر شده است.

(در ۱۶۹۰، جوزف رفسون[2] (۱۶۴۸-۱۷۱۵)، یکی از اعضای انجمن سلطنتی لندن، رساله‌ای منتشر نمود، تحت عنوان تحلیل معادلات عمومی[3]، که اساساً روش نیوتن را برای تقریب ریشه‌های یك معادلهٔ عددی شرح می‌دهد. به‌این دلیل، امـروزه اغلب این روش را **روش نیوتن-رفسون** می‌نامند. نیوتن روش خود را، که در مورد معادلهٔ درجهٔ سوم قسمت (ب) توضیح داده بود، در روش فلوکسیونهای خود شرح می‌دهد، کـه گرچه در ۱۶۷۱ نوشته شده‌بود، تا سال ۱۷۳۶ چاپ نشد. اولین شرح چاپ شدهٔ روش نیوتن

1. Fourier 2. Joseph Raphson
3. Analysis aequationum universalis

در جبر والیس در ۱۶۸۵ ظاهر شد*.)

۱۰.۱۱ جبر مجموعه‌ها

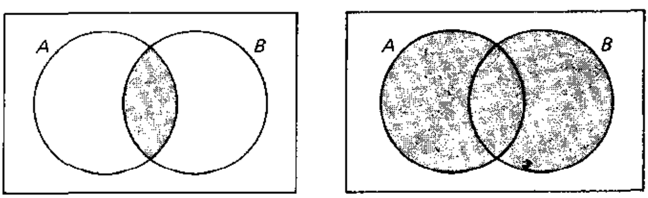
مفهوم «مجموعه‌ای از اشیاء» در منطق اهمیت اساسی دارد. لایبنیتز مقداری جبر مقدماتی مجموعه‌ها را به‌وجود آورد. با استفاده از نمادگذاری امروزی، اگر A و B مجموعه‌هایی از اشیاء باشند، آنگاه $A \bigcap B$ (که **اشتراك**، یا **حاصلضرب** A و B نامیده می‌شود) معرف مجموعهٔ همهٔ اشیایی است که هم به A و هم به B تعلق دارند، و $A \bigcup B$ (که **اجتماع**، یا **مجموع** A و B نامیده می‌شود) معرف مجموعهٔ همهٔ اشیایی است که به A یا به B و یا به هردو، تعلق دارند.

جبر مجموعه‌ها را می‌توان به‌طور نموداری به‌وسیلهٔ باصطلاح **دیاگرام ون** نشان داد، که درآن مجموعه‌ای مانند A با ناحیهٔ مفروض نمایش داده می‌شود. مثلاً، اگر دو مجموعهٔ A و B را با نقاط درونی دو دایرهٔ A و B، مانند شکل ۱۰۴، نشان دهیم، مجموعهٔ $A \bigcap B$ با ناحیهٔ مشترك این دوایر نمایش داده می‌شود، و مجموعهٔ $A \bigcup B$، با ناحیهٔ متشکل از همهٔ نقاطی که در هر یك از دو دایره واقع‌اند، نشان داده می‌شود. اگر همهٔ مجموعه‌های خود را محاط در داخل یك مستطیل بگیریم، آنگاه منظور از A'، که **متمم** A نامیده می‌شود، همهٔ نقاطی است که داخل مستطیل ولی درخارج ناحیهٔ معرف A قرار دارند.

(الف) برروی یك دیاگرام ون هر یك از نواحی زیر را پرداز بزنید: $A \bigcap (B' \bigcup C)$، $(A' \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C')$، $(A \bigcup B') \bigcup C'$.

(ب) با پرداز زدن نواحی مناسب برروی یك دیاگرام ون صحت تساویهای زیر را در جبر مجموعه‌ها تحقیق کنید: $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$، $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$، $(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$.

(ج) با پرداز زدن نواحی مناسب بر روی یك دیاگرام ون تعیین کنید که کدام یك از تساویهای زیر معتبرند: $(A' \bigcup B)' = A \bigcap B'$، $A' \bigcup B' = (A \bigcup B)'$، $A \bigcup (B \bigcap C)' = (A \bigcup B') \bigcap C'$.



شکل ۱۰۴

* نگاه کنید به ف. کازوری
«Historical Notes on the Newton – Raphson Method of Approximation» *American mathematical Monthly*, 18 (1911), pp. 29–33

عنوان مقاله

۱۱/۱ رابطهٔ پارادوکسهای زنون با حسابان.
۱۱/۲ سهم یونانیان در بسط حساب انتگرال.
۱۱/۳ نیوتن و لایبنیتز، پیشگامان نوین بسط حسابان.
۱۱/۴ استفاده از اصل دوم کاوالیری در یك درس مقدماتی درهندسهٔ فضایی.
۱۱/۵ بزرگترین دستاورد ریاضی در قرن هفدهم.
۱۱/۶ تصور لایبنیتز از دیفرانسیل.
۱۱/۷ برو و قضیهٔ اساسی حسابان.
۱۱/۸ جدول نیوتن-لایبنیتز.
۱۱/۹ چهارکتاب مهم ریاضی قرن هفدهم.
۱۱/۱۰ پنج ریاضیدان مهم بریتانیایی در قرن هفدهم.
۱۱/۱۱ افرادی‌که در قرن هفدهم هم در ریاضیات و هم در فیزیك برجسته بودند.
۱۱/۱۲ شش‌کشور پیشتاز از نظر ریاضی در قرن هفدهم، به‌ترتیب اهمیت.
۱۱/۱۳ نیوتن ژاپنی.
۱۱/۱۴ تاریخچهٔ‌کسرهای مسلسل.
۱۱/۱۵ دترمینانها در ریاضیات ژاپنی قرن هفدهم.

کتابنامه

ANTHONY, H. D., *Sir Isaac Newton*. New York: Abelard-Schuman, 1960.
BARON, M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford: Pergamon Press, 1969.
BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.
BOYER, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, 1959.
BREWSTER, SIR DAVID, *Life of Newton*. London: John Murray, 1831.
BRODETSKY, SELIG, *Sir Isaac Newton: A Brief Account of His Life and Work*. London: Methuen & Co., 1927.
CAJORI, FLORIAN, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, From Newton to Woodhouse*. Chicago: Open Court, 1919.
———, *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1928–1929.
———, *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. Revision of the translation of 1729 by Andrew Motte. Berkely, Calif: University of California Press, 1934.
CHILD, J. M., *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago: Open Court, 1920.
———, *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*. Chicago: Open Court, 1916.
COOLIDGE, J. L., *Geometry of the Complex Domain*. New York: Oxford University Press, 1924.
———, *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
———, *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
DE MORGAN, AUGUSTUS, *Essays on the Life and Work of Newton*. Chicago: Open Court, 1914.
EDWARDS, C. H., Jr., *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1980.
HALL, A. R., and M. B. HALL, eds., *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*. New York: Cambridge University Press, 1962

———, *Philosophers at War: The Quarrel Between Newton and Leibniz.* New York: Cambridge University Press, 1980.

HEATH, T. L., *History of Greek Mathematics.* Vol. 2. New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.

———, *A Manual of Greek Mathematics.* New York: Oxford University Press. 1931.

———, *The Method of Archimedes Recently Discovered by Heiberg.* New York: Cambridge University Press, 1912. Contained in *The Works of of Archimedes*, reprinted by Dover.

———, *The Works of Archimedes.* New York: Cambridge University Press, 1897. Reprinted by Dover.

KERN, W. F., and J. R. BLAND, *Solid Mensuration; with Proofs.* 2nd ed. New York: John Wiley, 1938.

LANE, E. P., *Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Chicago: University of Chicago Press, 1940.

LEE, H. D. P., ed., *Zeno of Elea.* Cambridge: Cambridge University Press, 1936.

LOVITT, W. V., *Elementary Theory of Equations.* Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1939.

MACFARLANE, ALEXANDER, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century*, Mathematical Monographs, No. 17. New York: John Wiley, 1916.

MANHEIM, J. H., *The Genesis of Point Set Topology.* New York: Macmillan, 1964.

MANUEL, F. E., *A Portrait of Isaac Newton.* Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1968.

MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians.* San Francisco: Holden-Day, 1964.

MORE, L. T., *Isaac Newton, a Biography.* New York: Dover, 1962.

MUIR, JANE. *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians.* New York: Dodd, Mead, 1961.

MUIR, THOMAS, The Theory of Determinants *in the Historical Order of Development.* 4 vols. New York: Dover, 1960.

NEUGEBAUER, OTTO, *The Exact Sciences in Antiquity.* 2d ed. New York: Harper and Row, 1962.

NEWTON, SIR ISAAC, *Mathematical Principles of Natural Philosophy.* Translated by Andrew Motte, ed. Florian Cajori. Berkeley, Calif: University of California Press, 1934.

———, *Mathematical Works.* 2 vols., ed. D. T. Whiteside. New York: Johnson Reprint, 1964–1967.

———, *Mathematical Papers.* 7 vols., ed. D. T. Whiteside. New York: Cambridge University Press, 1967.

PHILLIPS, H. B., *Differential Equations.* 3rd ed. New York: John Wiley, 1934.

ROSENTHAL, A., "The History of Calculus," *American Mathematical Monthly*, 58 (1951), pp. 75–86.

ROYAL SOCIETY OF LONDON, *Newton Tercentenary Celebrations, 15–19 July, 1946.* New York: Macmillan, 1947.

SCOTT, J. T., *The Mathematical Work of John Wallis* (1616–1703). London: Taylor & Francis, 1938.

SMITH, D. E., *History of Modern Mathematics.* 4th ed. New York: John Wiley, 1906.

———, *A Source Book in Mathematics.* New York: McGraw-Hill, 1929.

SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour.* New York: Oxford University Press, 1925.

TAYLOR, E. G. R., *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England.* Cambridge: The University Press, 1954.

TOEPLITZ, OTTO, *The Calculus, a Genetic Approach.* Chicago: University of Chicago Press, 1963.

TURNBULL, H. W., *Mathematical Discoveries of Newton.* Glasgow: Blackie & Sons, 1945.

———, The *Great Mathematicians.* New York: New York University Press, 1961.

———, ed., *Correspondence of Newton.* 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1959–1961.

WALKER, EVELYN, *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval.* New York: Teachers College, Columbia University, 1932.

۱۲

قرن هجدهم و بهره‌برداری از حسابان

۱۲-۱ مقدمه و پوزش‌خواهی

حساب، جبرمقدماتی، هندسه، ومثلثات که معمولاً امروزه درمدارس تدریس می‌شوند، همراه جبرمقدماتی دانشگاهی، هندسهٔ تحلیلی، وحسابان مقدماتی که معمولاً درسالهای اول یادوم دانشگاه تدریس می‌شوند، آنچه راکه عموماً «ریاضیات مقدماتی» نامیده می‌شود، تشکیل می‌دهند. پس دراین مرحله از کتاب بررسی‌تاریخی ریاضیات‌مقدماتی را به‌صورت‌امروزی آن، به‌پایان رسانیده‌ایم. جالب است، بدون وسعت دادن دامنهٔ تعمیم، توجه‌کنیم که دنبالهٔ دروس ریاضیات که امروزه درکلاسها تدریس می‌شود کاملاً مسیر تکاملی این موضوع را می‌پیماید.

بحق ادعا شده‌است که‌تاریخ یك موضوع را بدون آگاهی‌از خود موضوع‌نمی‌توان به‌خوبی مطالعه کرد. در نتیجه مطالعهٔ گسترده‌ای از آنچه طی‌دو وسه‌ربع قرن گذشته در ریاضیات اتفاق افتاده، با درك صحیحی از آن، مستلزم مطالعهٔ دروس پیشرفته‌تری ماوراء حسابان‌است. وقتی دانشجو از چنین زمینه‌ای از اطلاعات برخوردار باشد، مطالعهٔ کتابهای بسیار خوب پیدایش ریاضیات[1]، نوشته ا.ت.بل، تاریخ ریاضیات[2] نوشتهٔ ك.ب.بویر[3]، و اندیشهٔ ریاضی ازعهد باستان تا عصرجدید[4]، نوشتهٔ موریس‌کلاین[5] به‌او توصیه می‌شوند.

---

1. The Development of Mathematics   2. History of Mathematics
3. C.B. Boyer   4. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times   5. Morris Kline

مع‌هذا، افزودن فصل حاضر، و سه‌فصل اختتامیهٔ بعدی به‌کتاب مقتضی به‌نظر می‌رسد. سعی براین خواهد بودکه دراین فصول نکات اساسی ریاضیات قرنهای هجدهم ، نوزدهم ، و بیستم که در محدودهٔ درك خوانندگانی است که کتاب برای آنها نوشته شده و جهت گیری کنونی بسط ریاضیات را در زمینه‌ای مقدماتی نشان می‌دهد، عرضه کنیم. دراین صورت، مبحث ریاضیات مقدماتی در جایگاه واقعی‌خود پیش‌در آمدی بر دستاوردهای جالبتر دوران معاصر خواهد بود.

برخلاصه بودن وکامل‌نبودن مطالب بعدی نمی‌توان‌چندان با قاطعیت انگشت گذاشت. تاریخ معظم ریاضیات موریتس‌کانتور، که به‌پایان قرن هجدهم خاتمه می‌پذیرد، متشکل از چهارجلد بزرگ است که به‌طور متوسط هر کدام بالغ برهزار صفحه می‌شود . محتاطانه برآورد شده است که اگربنا باشد تاریخ ریاضیات قرن نوزدهم با همان جزئیات نوشته شود حداقل چهارده جلد دیگر با این حجم لازم است. هنوز کسی جرأت برآورد تعداد مجلدهای لازم ازاین نوع را برای بررسی تاریخ ریاضیات درسه‌ربع اول قرن بیستم، که بمراتب پربارتراز همهٔ دوره‌ها بوده، به‌خود نداده است. و، همانطورکه دربالا خاطرنشان شد، مقدار بسیارکمی ازاین‌مطالب را می‌توان با ریاضیات معمولی دورهٔ لیسانس به‌خوبی فهمید ، در واقع درك قسمت اعظم این مطالب مستلزم داشتن اطلاعات یك خبره در علوم ریاضی است.

رشد تقریباً انفجارآمیز تحقیقات ریاضی در دوران جدید را این واقعیت که قبل از ۱۷۰۰ تنها، به‌حسابی ، ۱۷ نشریهٔ ادواری شامل مقالات ریاضی وجود داشته ، تعداد این نشریات در قرن هجدهم به ۲۱۵ ، در قرن نوزدهم به ۹۵۰ رسیده ، و تعداد آنها در قرن نوزدهم افزایش فوق‌العاده‌ای یافته است، روشنی بیشتری می‌بخشد. بعلاوه ، تا قبل ازقرن نوزدهم مجلاتی که عمدتاً یامنحصراً مختص‌ریاضیات باشند، پدید نیامدند. گفته شده‌است، واحتمالاً کاملاً بجا، که مقالات این‌مجلات تحقیقی تاریخ واقعی ریاضیات نوین راتشکیل می‌دهند، وباید اقرارکردکه جز عدهٔ بسیارقلیلی ازاین مقاله‌ها برای کسی‌جز اهل فن،قابل فهم نیستند.

حسابان ، به همراهی هندسهٔ تحلیلی ، مهمترین ابزار ریاضـی کشف شده در قرن هفدهم بود. معلوم شد که این‌وسیله، توانایی قابل‌ملاحظه‌ای دارد و قادر به‌حل‌مسائلی‌است که پیشتر ازآن کاملاً تسخیرناپذیر می‌نمودند. قابلیت‌کاربرد گسترده واعجاب‌آورآن بود که قسمت اعظم محققان ریاضی آن روز را به‌خود جلب کرد ، و در نتیجهٔ مقالات بسیار زیادی بدون کمترین اعتناء به‌رضایتبخش‌نبودن مبانی آنها بیرون داده شدند. توجیه‌اغلب روندهای به‌کار گرفته شده برمبنای نتیجه‌بخش بودن آنها بود، وتنها پس ازسپری شدن‌قرن هجدهم و ورود برخی‌تناقضات وممتنعات به‌حیطهٔ ریاضیات بودکه ریاضیدانان ضرورت وارسی منطقی وتأسیس دقیق اساس کارخود را حس کردند . تلاش پرزحمت قرار دادن آنالیز بریك مبنای‌منطقی دقیق عکس‌العمل طبیعیی درمقابل‌کاربرد آشفتهٔ شهود و صورت‌گـرایی قرن پیشین بود. این ، وظیفهٔ بسیار دشواری ازکار درآمد و بخش اعظم فعالیت صدسال بعد صرف شاخه‌های مختلف آن شد. یکی ازنتایج این‌کار دقیق در مبانی آنالیز

پرداختن به‌مبانی کلیۀ شاخه‌های ریاضیات به‌همان دقت و نیز پیرایش بسیاری از مفاهیم آنها شد. مثلاً، مفهوم خود تابع می‌بایست روشن می‌شد، و مفاهیمی نظیر حد، پیوستگی، مشتقپذیری، و انتگرالپذیری می‌بایست به‌دقت و روشنی تعریف می‌شدند. این وظیفۀ پالایش مفاهیم اساسی ریاضیات به نوبۀ خود به تعمیمهای پیچیده‌ای منجر گردید. من‌باب ذکر، مفاهیمی نظیر فضا، بعد، همگرایی، و انتگرالپذیری دستخوش تعمیمها و تجریدهای قابل‌ملاحظه‌ای شدند. بخش قابل‌توجهی از ریاضیات قرن بیستم به این قبیل کارها اختصاص یافته‌است و تاکنون تعمیم و تجرید، جنبه‌های اصلی ریاضیات امروزی گشته‌اند. اما برخی ازاین پیشرفتها، به‌نوبۀ خود، دستۀ جدیدی از وضعیتهای پارادوکسی را به میان‌آوردند. به‌عنوان مثال، تعمیم اعداد ترانسفینی، و مطالعۀ مجرد مجموعه‌ها به وسعت وعمق بسیاری از شاخه‌های ریاضیات افزوده است، اما درهمان‌حال برخی‌پارادوکسهای بسیارمضطرب‌کننده را که به نظر می‌رسد در ژرفای ریاضیات قرار دارند، آشکار ساخته‌اند. ما ظاهراً امروزه دراین‌نقطه قرار گرفته‌ایم، وشایدچنین شودکه ربع آخرقرن بیستم شاهدپاسخگویی به‌برخی ازاین مسائل بحرانی شود.

درجمعبندی پاراگراف‌آخر می‌توان، تا حدی با اطمینان به‌درستی‌آن، گفت که‌قرن هجدهم عمدتاً صرف بهره‌برداری از روشهای جدید ونیرومند حسابان شد، قرن نوزدهم عمدتاً به تلاش در تأسیس پایۀ منطقی محکمی برای ساختمان عظیم ولی سست‌بنیاد قرن پیشین اختصاص یافت، قرن بیستم، عمدتاً، درتعمیم دستاوردهای قبلی تاسرحدامکان‌صرف گردید، واینك بسیاری از ریاضیدانان امروزی حتی با مسائل شالوده‌ای عمیقتری دست به‌گریبان‌اند. این تصویر کلی با عوامل جامعه‌شناختی متعددی که در بسط هرعلمی تأثیر می‌گذارند، پیچیده‌تر می‌شود. موضوعاتی مانند رشد بیمۀ عمر، ایجاد نیروهای دریایی عظیم قرن هجدهم، مسائل اقتصادی وفنی ناشی از صنعتی شدن اروپای غربی و امریکا در قرن نوزدهم، جو جنگ دنیاگیر قرن بیستم، وتلاش متمرکز امروزی برای تسخیر فضا، به‌پیشرفتهای عملی‌زیادی در زمینۀ ریاضیات‌انجامیده‌است. انشعابی‌در ریاضیات به«مجرد»، و «کاربردی» صورت گرفته است، تحقیقات در زمینۀ اول را تا حد زیادی متخصصینی انجام می‌دهندکه به‌ریاضیات به‌خاطرخود آن علاقه‌مند شده‌اند، و در زمینۀ دوم راکسانی که به‌کاربردهای مستقیم آن دلبستگی دارند.

اکنون، درباقی این‌کتاب، برخی ازجزئیات سیمای کلی‌طرح بالا را تکمیل‌می‌کنیم.

۲-۱۲ خانوادۀ برنولی

اعضای‌خانوادۀ برنولی[۱]، آبراهام دموآور[۲]، بروك‌تیلر[۳]، کالین‌ماکلورن، لئونهارت اویلر،

---

۱. تلفظ این نام به‌فرانسه برنویی وبه‌زبان انگلیسی برنولی است. هردوصورت تلفظ درفارسی رایج است.ـم.

2. Abraham De Moivre 3. Brook Taylor

آلکسی کلود کلرو[1]، ژان‌لورون دالامبر[2]، یوهان هاینریش‌لامبرت، ژوزف لوئی لاگرانژ[3]، وگاسپارمونژسهم‌عمده را در ریاضیات درقرن‌هجدهم داشتند. خواهیم دیدکه منشأ وهدف بخش اعظم ریاضیات اغلب آنها درکاربردهای حسابان در زمینه‌های مکانیك ونجوم بوده است. بعد ازسپری شدن بخش قابل‌توجهی ازقرن نوزدهم بودکه تحقیق‌ریاضی، خود را عموماً از قید این نقطه‌نظر رها ساخت. در این بخش خانوادهٔ برجستهٔ برنولی توصیف می‌شود.

یکی‌ازمتشخص‌ترین‌خانواده‌ها درتاریخ ریاضیات و علوم خانوادهٔ برنولی‌ازسویس است،که، ازاواخرقرن‌هفدهم‌به‌بعد، تعدادبسیار زیادی‌از ریاضیدانان و دانشمندان‌توانا را به‌وجودآورده است. سابقهٔ خانوادگی آنها با دوبرادر، یاکوب برنولی (۱۶۵۴–۱۷۰۵) ویوهان برنولی (۱۶۶۷–۱۷۴۸) شروع می‌شود،که برخی از دستاوردهای ریاضی‌آنان قبلاً دراین‌کتاب ذکرشده‌اند. این دو وقتی‌که انتشار مقاله‌های لایبنیتز دراعمال‌دانشوران آغازشد، ازاشتغالات حرفه‌ای سابق خود دست‌کشیدند. آنان ازجملهٔ اولین ریاضیدانانی بودند که به قدرت اعجاب‌انگیز حسابان پی بردند و این وسیله را در انواع گوناگون متعددی ازمسائل به‌کاربردند. ازسال ۱۶۸۷ تا زمان مرگش، یاکوب‌کرسی ریاضی رادر دانشگاه‌بال عهده‌دار بود. یوهان، درسال ۱۶۹۷، استاد ریاضیات در دانشگاه گرونینگن[4] گردید، وسپس، بعد از مرگ یاکوب درسال ۱۷۰۵، جانشین برادر خوددر دانشگاه‌بال[5] شد و مابقی عمر را در همانجا ماند. دوبرادر، که اغلب رقبای سرسخت یکدیگر بودند، تقریباً به‌طور مداوم با لایبنیتز وبا یکدیگر درتبادل‌نظر بودند.

ازجمله کارهای یاکوب‌برنولی در ریاضیات کاربرد مختصات قطبی (نگاه‌کنید به

یاکوب برنولی
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

1. Alexis Claude Clairaut
2. Jean-le-Rond d' Alembert
3. Joseph Louis Lagrange
4. Gröningen
5. Basel

بخش ۱۴ـ۴)، استخراج فرمول شعاع انحنای یك منحنی مستوی هم درمختصات متعامد و هم در مختصات قطبی، مطالعهٔ منحنی زنجیری با تعمیمهایی از آن به‌ریسمان‌هایی باچگالی متغیر وریسمان‌هایی که تحت‌عمل یك‌نیروی‌مرکزی‌قراردارند، مطالعهٔ تعدادی دیگر ازمنحنیهای مسطح از درجات بالاتر، کشف باصطلاح منحنی **همزمان**ـیا منحنیی که جسمی در امتداد آن با سرعت‌عمودی یکنواختی سقوط می کند(این منحنی یك سهمی است از درجهٔ ۳/۲ که مماس درنقطهٔ بازگشت آن قائم است). تعیین شکلی‌که یك میلهٔ‌کشسان اختیار می‌کند وقتی‌که یك سر آن‌ثابت و به‌سر دیگرش وزنه‌ای آویخته شده‌باشد، با شکلی‌که یك ورقهٔ مستطیلی قابل انعطاف اختیار می‌کند وقتی‌که دو ضلع مقابل آن به طورافقی ثابت در یك ارتفاع نگهداشته شودو در همان حال مایع سنگینی روی‌آن ریخته شود، و شکل بادبانی مستطیل‌شکلی که از باد پرباشد. وی همچنین‌مسئلهٔ **شکلهای هم‌پیرامون** (مسیرهای مسطح بسته‌ای ازانواع مفروض‌که محیط‌آنها ثابت ومساحت آنها ماکزیموم باشد) را مطرح و دربارهٔ آنها بحث کرد و بنابراین یکی از اولین ریاضیدانانی بود که درحساب تغییرات کارکرد. وی همچنین(همانطورکه‌دربخش ۱۰ـ۳ خاطرنشان شد) یکی ازاولین‌دانشوران دراحتمال ریاضی بود،کتاب او دراین زمینه، فن حدس‌زدن، بعد ازمرگ وی در ۱۷۱۳ چاپ‌شد. چیزهای زیادی وجود دارندکه درحال‌حاضرنام یاکوب برنولی برآنها گذاشته شده است. ازجملهٔ‌آنها توزیع‌برنولی‌و قضیهٔ برنولی درنظریهٔ آمار واحتمال است، معادلهٔ برنولی‌که هردانشجوی‌اولین درس معادلات‌دیفرانسیل باآن‌برخورد می‌کند، اعداد برنولی و چند جمله‌ایهای برنولی مختص نظریهٔ اعداد، و لمنیسکات برنولی‌که در اولین درس حسابان به‌آن برخورد می‌شود. درجواب برنولی به‌مسئلهٔ منحنی همزمان، که برای اولین بار دراعمال دانشوران در ۱۶۹۰ چاپ شد، برای اولین بار باکلمهٔ «انتگرال» درمعنی حسابان آن برمی‌خوریم. لایبنیتز حساب انتگرال را حساب مجموعات[1] نامیده بود؛ در ۱۶۹۶ لایبنیتز ویوهان‌برنولی موافقت‌کردندکه آن را حساب انتگرال[2] بنامند. این‌مطلب که مارپیچ لگاریتمی تحت تبدیلات گوناگون مجدداً مارپیچی‌ازنوع خود پدیدمی‌آورد، باعث اعجاب یاکوب‌برنولی شد و، به تقلید ارشمیدس، وصیت کرد که این مارپیچ را همراه‌با جملهٔ «اِئادم موتاتارسورگو[3]» («من، هرچند دگرگون، بازبرخواهم‌خاست»)، بر سنگ قبرش حك کنند.

یوهان‌برنولی در ریاضیات حتی سهمی پربارتر از برادرش یاکوب داشت. گرچه وی مردی حسود وبدخو بود، یکی ازموفقترین معلمین زمان خود بود. اوبه‌حسابان غنای زیادی بخشید. در شناساندن قدرت حسابان در بّر اروپا تأثیر زیادی داشت. همچنانکه دیده‌ایم (دربخش۱۱ـ۱۰)، مقالات متعلق به‌اوبودکه مارکی‌دولوپیتال (۱۶۶۱-۱۷۰۴)، تحت موافقتنامهٔ مالی عجیبی با یوهان، درسال ۱۶۹۶ درقالب اولین‌کتاب درسی حسابان گردآوری ومنتشر کرد. بدین‌طریق بودکه روش آشنای محاسبهٔ صورت مبهم ۰/۰ ، در

---

1. calculus summatorius 2. calculus integralis
3. Eadem mutata resurgo

متون درسی بعدی حسابان، بغلط به **قاعدهٔ هوپیتال** شهرت یافت. یوهان برنولی در زمینه‌های کاملاً گوناگونی آثاری به رشتهٔ تحریر درآورد، پدیدهٔ نورشناختی مربوط به انعکاس وانکسار، تعیین مسیرهای متعامد خانوادهٔ منحنیها، محاسبهٔ طول قوس منحنیها، تعیین مساحات منحنیها به کمك سریها، مثلثات تحلیلی، حسابان توابع مجهول القوا، ودیگر موضوعات ازجملهٔ اینهاست. یکی ازبرجسته‌ترین قطعات آثار او سهم وی در مسئلهٔ **کوتاهترین زمان** ـ تعیین منحنیی که ذرهٔ وزینی که در يك میدان جاذبه‌ای بین دو نقطهٔ مفروض حرکت می‌کند، طی آن سریعترین نزول را دارد ـ می‌باشد؛ این منحنی قوسی از يك منحنی سیکلوئید مناسب ازکار درآمد. این مسئله را یاکوب برنولی هم مورد بحث قرار داد. منحنی سیکلوئیدی جواب مسئله **همزمانی** ـ تعیین منحنیی که يك ذرهٔ وزین در امتداد آن درمدت زمان ثابتی به‌نقطهٔ مفروضی‌ازمنحنی می‌رسد، صرفنظر از اینکه ازچه نقطهٔ اولیه‌ای برمنحنی به حرکت آغازکرده باشد ـ نیزهست. مسئلهٔ اخیر، که به‌صورتی کلیتر توسط یوهان برنولی، اویلر، و لاگرانژ موردبحث واقع شد، قبلاً به وسیلهٔ هویگنس (سال ۱۶۷۳) ونیوتن (سال ۱۶۸۷) حل شده و هویگنس در ساختن پاندول ساعت (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۷.۱۰ (ج)) آن را مورد استفاده قرارداده است.

یوهان برنولی سه پسرداشت، نیکولاوس (۱۶۹۵–۱۷۲۶)، دانیل (۱۷۰۰–۱۷۸۲)، و یوهان (II) (۱۷۱۰–۱۷۹۰)، که همهٔ آنها به عنوان ریاضیدانان و دانشمندان قرن هجدهم به‌شهرت رسیدند. نیکولاوس، که استعداد زیادی ازخود در زمینهٔ ریاضیات نشان می‌داد، به‌آکادمی سن‌پترزبورگ[1] دعوت‌شد، و درآنجا متأسفانه فقط هشت ماه بعد به‌علت غرق‌شدن ازدنیا رفت. وی دربارهٔ منحنیها، معادلات دیفرانسیل، واحتمالات مطالبی نوشت. مسئلهٔ وی در زمینهٔ احتمالات، که در سن‌پترزبورگ مطرح کرده، بعدها به **پارادوکس سن‌پترزبورگ** مشهورشد. آن مسئله این است: اگر A باآمدن شیر در نخستین پرتاب سکه يك ریال دریافت کند و در صورت نیامدن شیر تا پرتاب دوم ۲ ریال دریافت کند، در صورت نیامدن شیر تا پرتاب سوم ۴ ریال دریافت کند، وهمینطور الی آخر، امیدریاضی A چیست؟ نظریهٔ ریاضی نشان‌می‌دهد که امید ریاضی A بینهایت است، که نتیجهٔ پارادوکس گونه‌ای است. این مسئله را دانیل برادر نیکولاوس، که درسن‌پترزبورگ جانشین نیکولاوس شده بود، مورد تحقیق قرار داد. دانیل هفت‌سال بعد به‌بال بازگشت. وی ازسه‌پسر یوهان مشهورترینشان بود، و قسمت عمدهٔ توان خود را صرف احتمالات، نجوم، فیزیك، و ئیدرودینامیك کرد. دراحتمالات وی‌مفهوم امیداخلاقی‌را ابداع کرد، و در ئیدرودینامیك[2]، مربوط به‌سال ۱۷۳۸، اصول ئیدرودینامیك که در همهٔ متون فیزیك مقدماتی امروزی نام او را برخود دارند، ظاهر می‌شود. وی مقالاتی در بارهٔ جذر ومد نوشت، نظریهٔ جنبشی گازها را تدوین کرد، به مطالعهٔ تارهای مرتعش پرداخت، و در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پیشگام بود. یوهان (II)، کوچکترین پسران، تحصیل حقوق کرده، ولی سالهای آخرعمر را به‌عنوان استاد ریاضیات در دانشگاه بال سپری کرد. وی بخصوص به

1. St. Petersburg 2. Hydrodynamica

یوهان برنولی
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

نظریهٔ ریاضی گرما و نورعلاقمند بود.

نیکولاوس برنولی (۱۶۸۷-۱۷۵۹) دیگری مربوط به قرن هجدهم، از برادرزادگان یاکوب و یوهان، هم بود که در ریاضیات به شهرتی دست یافت. این نیکولاوس، برای مدتی، کرسی ریاضیات در پادوا را که زمانی در اختیار گالیله بود، عهده‌دار شد. وی در بارهٔ هندسه و معادلات دیفرانسیل مطالب گسترده‌ای نوشت. درسالهای واپسین زندگی‌اش وی به‌تدریس منطق و حقوق پرداخت.

یوهان برنولی (II) پسری به نام یوهان (III) (۱۷۴۴-۱۸۰۷) داشت که، نظیر پدرش، تحصیل حقوق کرد ولی سپس به‌ریاضیات روی‌آورد. هنوز کمتر از ۱۹ سال داشت که، به‌عنوان استاد ریاضیات به‌آکادمی برلین دعوت‌شد. وی در بارهٔ نجوم، آموزهٔ شانس، اعشارمتناوب، ومعادلات نامعین مطالبی نوشت.

اخلاف کم‌اهمیت‌تر برنولی‌عبارتند از دانیل (II) (۱۷۵۱-۱۸۳۴) ویاکوب (II) (۱۷۵۹-۱۷۸۹)، دو پسر دیگر یوهان (II)، کریستوف (۱۷۸۲-۱۸۶۳)، پسر دانیل (II)، و یوهان گوستاو (۱۸۱۱-۱۸۶۳)، پسر کریستوف.

شکل ۱۰۵ شجره‌نامهٔ برنولیها را نشان می‌دهد.

۱۲-۳ دموآور و نظریهٔ احتمالات

درقرن هجدهم افکار پیشتازانهٔ فرما، پاسکال، و هویگنس درنظریهٔ احتمالات به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساخته و پرداخته شدند واین نظریه پیشرفتهای سریعی کرد، ونتیجه این‌شد که در

- نیکولاوس برنولی
  - یوهان (۲)
    - یوهان II (۶)
      - یاکوب II (۸)
      - دانیل II
        - کریستوف
          - یوهان گوستاو
      - یوهان III (۷)
    - دانیل (۵)
    - نیکولاوس (۴)
  - نیکولاوس
    - نیکولاوس (۳)
  - یاکوب (۱)

شکل ۱۰۵

پی فن حدس‌زدن یاکوب برنولی مطالعات بیشتری در بارهٔ این موضوع صورت گرفت. یکی‌ازافراد مهمی که سهمی‌درنظریهٔ احتمالات داشت ابراهام دمـوآور (۱۷۵۴-۱۶۶۷) بود. دمـوآور یك هوگنوی[1] فرانسوی بودکه پس ازنسخ فرمان نانت[2] در سال ۱۶۸۵، به‌فضای سیاسی مساعدترلندن‌مهاجرت کرد. وی زندگی‌خود را درانگلیس ازطریق‌تدریس خصوصی گذرانید، و از دوستان صمیمی آیزك نیوتن گردید.

دمـوآور بخصوص‌به‌خاطر اثرش قسط‌السنین‌عمر[3]، که‌نقش‌مهمی درتاریخ‌ریاضیات آمارگری دارد، اثر دکترین‌شانس، که حاوی مطالب جدیدتری دربارهٔ نظریهٔ احتمالات است، واثر جنگ تحلیلی[4]، که دربارهٔ سریهای متناوب، احتمالات، ومثلثات تحلیلی‌است، شهرت دارد. بررسی انتگرال احتمالاتی

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

برای اولین بار وبررسی منحنی فراوانی نرمال

$$y=ce^{-hx^{2}}, \qquad c \text{ و } h \text{ ثابت‌اند}$$

که درمبحث آمار اهمیت زیادی دارد به دمـوآور منسوب است. **فرمول استرلینگ**[5]، که به‌غلط چنین نامگذاری شده، ومی‌گویدکه به‌ازای n خیلی بزرگ

---

1. Hugenot [نامی که به‌پروتستانهای فرانسوی قرون ۱۷ و ۱۸ داده شده بود]

۲. فرمان نانت Edict of Nantes،فرمانی که در سال ۱۵۹۸ توسط هانری چهارم، پادشاه فرانسه، صادرشد و به‌موجب‌آن به‌هوگنویها حقوق‌مساوی با دیگران داده شد.ــم.

3. Annuities upon Lives 4. Miscellanea analytica 5. Stirling

$$n! \approx (2\pi n)^{1/2} e^{-n} n^{n}$$

به دموآور منسوب است و بـرای تقریب فاکتوریلهای اعداد بزرگ بسیار مفید است. فرمول معروف

$$(\cos x + i \sin x)^{n} = \cos nx + i \sin nx \quad , i = \sqrt{-1}$$

که با نام دموآور شناخته می‌شود ودرهر کتاب درس نظریهٔ معادلات دیده می‌شود، درحالتی که n عددصحیح مثبتی باشد بر دموآور معلوم بوده است. این فرمول اساس مثلثات تحلیلی است.

افسانه‌ای که اغلب در بارهٔ مرگ دموآور گفته می‌شود، بسیار جالب است. مطابق این داستان دموآور حس می‌کرد که هر روز یك ربع ساعت بیشتر از روز قبل به خواب نیاز دارد. وقتی این تصاعد عددی به ۲۴ ساعت رسید، دموآور درگذشت.

در امر بیمه در قرن هجدهم گامهای بلندی برداشته شد، و عده‌ای از ریاضیدانـان به نظریهٔ احتمالاتی که درپس آن نهفته بود، جلب شدند. در نتیجه، علاقه به تلاش برای کاربرد احتمالات در زمینه‌های جـدید ایجاد شد. در این راستا، ژرژ لـوئی لکلرك[1]، کنت دوبوفون (۱۷۰۷—۱۷۸۸)، که مدیر پاری ژاردن دوروا[2] بود و به خاطر اثر مطبوع ۳۶ جلدی‌اش در بارهٔ تاریخ طبیعی شهرت داشت، در سال ۱۷۷۷ اولین مثال از احتمال هندسی را ارائه داد، که «مسئلهٔ سوزن» مشهور او برای تقریب تجربی مقدار π بود (نگاه کنید به بخش ۴—۸ ومطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲.۱۲). برای کاربرد نظریهٔ احتمالات درموارد داوری انسان، نظیر محاسبهٔ شانس اینکه محکمه‌ای در صورت اختصاص دادن عددی به هریك از اعضای هیأت منصفه که معرف میزان شانس سخن گفتن به‌نفع حقیقت یا درك حقیقت وی است، به‌رأی‌صحیحی دست یابد، نیز تلاشهایی به‌عمل آمد. این احتمال داوری[3] در همنوایی با فلسفهٔ روشنگری، در کار آنتوان—نیکولا کاریتا[4]، مارکی‌دوکندورسه[5] (۱۷۴۳—۱۷۹۴)، که با وجود هواداری از انقلاب فرانسه، یکی از روشنفکرانی که قربانی بداقبالی ناشی از زیاده‌رویهای بعد از انقلاب شد، اهمیت اساسی داشت. یکی از نتایجی که کندورسه به آن رسیده بود، این بود که حکم اعدام باید لغا شود؛ زیرا احتمال صحت یك تصمیم هر اندازه بزرگ باشد، بسیار محتمل خواهد بود که طی سلسله تصمیمات بسیار، شخص بیگناهی به‌غلط محکوم شود.

۱۲—۴ تیلر و ماکلورن

هر دانشجوی درس حسابان با نام بروك تیلر (۱۶۸۵—۱۷۳۱) انگلیسی و نام کالین ماکلورن (۱۶۹۸—۱۷۴۶) اسکاتلندی، از طریق بسط بسیار مفید تیلر و بسط ماکلورن یك تابع، آشنایی دارد. درسال ۱۷۱۵ بود که تیلر (بدون بحث همگرایی) قضیهٔ معروف بسط خود را منتشر کرد،

---

1. Georges Louis Leclerc
2. Paris Jardin du Roi
3. Probabilité des jugements
4. Antoine- Nicolas Caritat
5. Marquis de Condorcet

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots.$$

درسال۱۷۱۷ تیلر سری خود را درحل معادلات عددی به‌صورت زیر به‌کار گرفت: فرض کنید a تقریبی برای یکی از ریشه‌های $f(x)=0$ باشد؛ قراردهید $f(a)=k$، $f'(a)=k'$، $f''(a)=k''$، و $x=a+h$؛ $f(a+h)=0$ را به‌صورت سری بسط دهید؛ همهٔ توانهای بالاتر از دوی h را کنار بگذارید؛ به‌جای k، k'، و k'' مقادیر آنها را قرار دهید ونتیجه‌را برحسب h حل کنید. باکاربردهای متوالی این فرایند، تقریبهای نزدیك و نزدیکتری رامی‌توان به‌دست آورد. برخی از کارهای انجام شده توسط تیلر در نظریهٔ‌پرسپکتیو، اخیراً درمطالعهٔ‌ریاضی فوتوگرامتری[1]، علم مساحی به‌کمك تصاویری که از هواپیما برداشته می‌شود، کاربرد پیدا کرده‌است.

وقوف به‌اهمیت واقعی‌سری تیلر تاسال ۱۷۵۵ که اویلر آنهارا درحساب‌دیفرانسیل، و حتی تا زمان بعدتری که‌لاگرانژ سری با باقیمانده را به عنوان مبنای نظریهٔ‌توابع خود به‌کار برد، حاصل نگردید.

ماکلورن یکی از مستعدترین‌ریاضیدانان قرن هجدهم بود. بسط موسوم به‌ماکلورن چیزی جز بسط تیلر درحالت $a=0$ نیست و در واقع به‌صراحت توسط تیلرو نیزتوسط جیمز استرلینگ یك ربع قرن قبل از آنکه ماکلورن آن را ، با ذکرنام تیلر، در رسالهٔ فلوکسیونهای خود (در دوجلد، سال۱۷۴۲) به‌کار برد، داده شده بود. ماکلورن درهندسه، به‌ویژه درمطالعهٔ منحنیهای مسطح درجات بالا، کاربرجسته‌ای انجام داد، و توانایی زیادی درکاربردن هندسهٔ‌کلاسیك درمسائل‌فیزیکی نشان داد. در بین‌مقالات‌متعدد او در ریاضیات کاربردی مقاله‌ای دربارهٔ نظریهٔ ریاضی‌جزر و مد است‌که برندهٔ جایزه‌شده‌است، در رسالهٔ فلوکسیونها تحقیقات او در بارهٔ ربایش متقابل دو بیضوی دوار ظاهر می‌شود.

ماکلورن ازنوادر عالم‌ریاضیات‌است. وی درسن‌یازده‌سالگی به دانشگاه گلاسگو[2] راه یافت. در ۱۵ سالگی درجهٔ‌فوق لیسانس‌خود را دریافت‌کرد ودفاع علنی‌فوق‌العاده‌ای از پایان نامهٔ خود در بارهٔ نیروی جاذبه انجام داد . در ۱۹ سالگی برای‌کرسی استادی ریاضیات درکالج ماریشال[3] درآبردین انتخاب شد، و در ۲۱ سالگی‌اولین اثر مهم خود، هندسهٔ ذاتی[4] را منتشرکرد. در ۲۷ سالگی معاون یا دستیار استادی ریاضیات در دانشگاه ادینبورو شد. برای پرداخت حقوق استادیاری او مشکلاتی پیش‌آمد، ونیوتن پیشنهادکرد که مخارج اورا شخصاً عهده‌دارمی‌شود تادانشگاه ازخدمات چنان‌جوان برجسته‌ای‌بهره‌مند شود. ماکلورن بعداً به جای همین مرد نشست‌که به‌کمك او آمده بود. رسالهٔ او در بارهٔ فلوکسیونها وقتی‌که وی ۴۴سال داشت، تنها چهار سال قبل از مرگش منتشرشد؛ این اثر اولین‌شرح منطقی واصولی‌روش‌نیوتن در بارهٔ فلوکسیونها بود و ماکلورن‌آن را به‌عنوان جوابی به حملهٔ اسقف بارکلی به اصول حسابان نوشته است.

---

1. Photogrammetry　2. Glasgow　3. Marischal College
4. Geometria organica

بعد از پرداختن به تیلر و ماکلورن ، دو مردی که دانشجویان در حسابان مقدماتی به نامهایشان برمی‌خورند، می‌توان فرد سومی راهم ذکر کرد که با نامش به طریق مشابهی مواجه می‌شویم. این شخص سوم، که تا حدودی بر دو مرد فوق‌مقدم بود، میشل رول[1] است که در آمبر[2]، اوورنی، درسال ۱۶۵۲ متولد شد و درسال ۱۷۱۹ درپاریس وفات یافت. وی با وزارت جنگ فرانسه مرتبط بود و کتابهایی درهندسه و جبر نوشت. قضیهٔ حسابان مقدماتی (۱۶۹۱) به اومنسوب است که نام وی را برخود دارد ومی گوید که $f'(x)=0$ حداقل یك ریشهٔ حقیقی بین دو ریشهٔ متوالی $f(x)=0$ دارد. «قضیهٔ مقدار میانگین» درس حسابان که بسیار مفید است، درکتابهای درسی معمولاً از این قضیه استخراج می‌شود.

۱۲-۵ اویلر

در این کتاب قبلاً به‌نام لئونهارت اویلر بارها اشاره شده‌است. اویلر در شهر بال‌سویس در سال ۱۷۰۷ به دنیا آمد. بعد از قدم گذاشتن در عرصهٔ علوم الهی ، اویلر پیشهٔ واقعی خود را در ریاضیات یافت . در این مورد پدرش ، که کشیشی از پیروان کالون[3] بود و به ریاضیات علاقه داشت، با آموختن پایه‌های موضوع به پسرش به وی کمك کرد. پدر ، ریاضیات را نزد یاکوب برنولی تحصیل کرده بود و ترتیبی داده شد که پسر نزد یوهان برنولی درس بخواند.

درسال ۱۷۲۷، وقتی اویلر فقط بیست سال داشت، دو دوست او دانیل ونیکولاوس برنولی، که به آکادمی سن پترزبورگ که مؤسس آن پطر کبیر بود، وابسته بودند پستی برای اویلر درآکادمی روس تأمین کردند. دانیل به‌زودی روسیه را ترك گفت تا کرسی ریاضیات شهر بال را عهده‌دار شود و اویلر سرریاضیدان آکادمی گردید.

بعداز اعتلا بخشیدن به آکادمی سن پترزبورگ به مدت چهارده سال، اویلر دعوتی را که از طرف فردریك کبیر به عمل آمده بود ، پذیرفت تا برای سرپرستی آکادمی پروس به برلین برود. اویلر به مدت بیست‌وپنج سال در آکادمی پروس ماند ولی شخصیت بی آلایش او با نوع پرجلاتری که مورد توجه فردریك بود، تطبیق نکرد و وی سالهای زیادی را از ناگواریها در رنج بود. روسها به اویلر احترام زیادی می گذاشتند وحتی بعدازاینکه وی به پروس رفت ارسال کمی حقوق را به او ادامه دادند.

گرمی احساسات روسها به او، در تقابل با سردی‌دربار فردریك کبیرموجب شد که اویلر در ۱۷۶۶ دعوت کاترین‌کبیر را برای بازگشت به آکادمی سن‌پترزبورگ بپذیرد. وی هفده‌سال باقی‌مانده ازعمرخود را در آنجا ماند. اویلر به‌طورکاملاً ناگهانی‌در۱۷۸۳ وقتی که هفتاد وشش سال داشت، درگذشت.

اویلر نویسندهٔ کثیرالتألیفی در ریاضیات، ودرواقع، پرتألیف‌ترین نویسنده درتاریخ این موضوع است ؛ نام وی به هر شاخه‌ای از این علم پیوسته است. جالب است بدانیم

---

1. Michel Rolle 2. Ambert 3. Calvin

که در بازدهی شگفت‌آور وی دقتی که، درحدود سال ۱۷۶۶، دچار مصیبت نابینایی کامل گردید، کمترین خللی وارد نشد. به‌کمك حافظه‌ای شگفت‌انگیز و توانایی تمرکز حواس حتی با وجود سروصدای زیاد، به کار خلاق خود با دیکته‌کردن به یك منشی و با نوشتن فرمولها روی تختهٔ بزرگی که منشی‌اش از روی آن رونویسی کند، ادامه داد. وی ۵۳۰ کتاب و مقاله‌درطول عمرش منتشر نمود، ودرموقع مرگش به قدری‌دستنوشته از خودبه‌جا گذاشت که خلاصهٔ مذاکرات[1] آکادمی سن‌پترزبورگ را به مدت ۴۷ سال دیگر غنا بخشید. یك چاپ تاریخی ازآثارکامل اویلر، شامل ۸۸۶ مقاله وکتاب را، در ۱۹۰۹ انجمن علوم طبیعی سویس[2] آغاز و برای ۷۳ جلد با قطع خشتی بزرگ طرحریزی کرد.

سهم اویلر در ریاضیات خیلی زیادتر از آن است که بتوان آن را به‌تفصیل دراینجا بیان نمود، ولی می‌توان برخی از کارهای او را درزمینهٔ ریاضیات مقدماتی ذکر کرد. مقدم برهمه، ما رسمیت یافتن نمادهای زیر را به اویلر مدیونیم:

$f(x)$ به نشانهٔ نماد تابع

e برای پایهٔ لگاریتم طبیعی

a، b، c برای اضلاع مثلث ABC

s برای نصف محیط مثلث ABC

r برای شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC

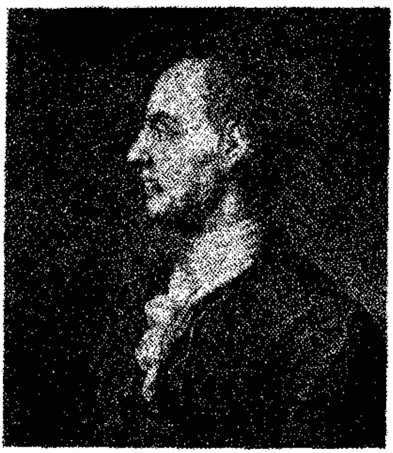
R برای شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC

$\sum$ برای علامت مجموعیابی

i برای واحد انگاری، $\sqrt{-1}$

فرمول بسیارمهم

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



لئونهارت اویلر
(کتابخانهٔ کنگره [امریکا])

---

1. Proceedings 2. Swiss Society of Natural Science

را هم به‌اویلر مدیونیم، که، به‌ازای $x=\pi$، به‌صورت

$$e^{i\pi}+۱=۰$$

در می‌آید، رابطه‌ای که پنج تا از مهمترین اعداد ریاضیات را به هم مربوط می‌کند. بـا روشهایی صرفاً صوری، اویلر به تعداد زیادی رابطهٔ عجیب، نظیر

$$i^i=e^{-\pi/۲}$$

دست یافت و توانست نشان دهد که هر عدد حقیقی غیرصفر r (در پایهٔ مفروضی) بینهایت لگاریتم دارد که همهٔ آنها موهومی‌اند هرگاه $r<۰$، و همه جز یکی موهومی‌اند هرگاه $r>۰$. درهندسهٔ مقدماتی دانشگاهی به خط اویلر مثلث برمی‌خوریم (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰۱۴)، در دروس مقدماتی دانشگاهی دربارهٔ نظریهٔ معادلات دانشجو به‌روش اویلر برای‌حل معادلات درجهٔ چهارم برخورد می‌کند، وحتی درمقدماتی‌ترین دروس نظریهٔ‌اعداد شخص با قضیهٔ اویلر و تابع-ϕ اویلر مواجه می‌شود (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۵۰۱۰). توابع بتا و گاما در حسابان پیشرفته به‌اویلر منسوب‌اند گرچه طرح ابتدایی آنها توسط والیس داده شده‌است. اویلر فکـر فاکتور انتگرال را در حل معادلات دیفرانسیل به کار گرفت، روش سیستماتیك امروزی‌حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را ارائه کرد و بین معادلات دیفرانسیل خطی همگن وغیرهمگن تمایزقائل شد. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^n y^{(n)}+a_۱x^{n-۱}y^{(n-۱)}+\dots+a_n y^{(۰)}=f(x),$$

که درآن نماهای‌داخل پرانتز مرتبهٔ مشتق‌را نشان‌می‌دهند، امروزبه **معادلهٔ‌دیفرانسیل‌اویلر** موسوم‌اند. اویلرنشان دادکه جانشین‌کردن $x=e^t$ معادله را به‌یك معادلهٔ دیفرانسیل‌خطی با ضرایب‌ثابت تحویل‌می‌کند. قضیهٔ «اگر $f(x,y)$ همگن ازمرتبهٔ n باشد، دراین‌صورت $xf_x+yf_y=nf$» امروزه به **قضیهٔ اویلر دربارهٔ توابع همگن** موسوم‌است. اویلریکی ازاولین‌کسانی بودکه نظریه‌ای برای کسرهای مسلسل به‌وجود آورد، در زمینه‌های هندسهٔ دیفرانسیل وحساب تغییرات سهمی ایفا کرد، و به‌طورقابل‌توجهی‌نظریهٔ اعداد را غنا بخشید. دریکی از مقالات کوتاهش رابطهٔ

$$v-e+f=۲$$

دیده می‌شودکه قبلاً بر دکارت معلوم بود و v عدهٔ رأسها، e عدهٔ یالها، و f عدهٔ‌وجوه هر چندوجهی بستهٔ‌ساده رابه‌هم ربط می‌دهد. درمقالهٔ‌دیگری‌وی به‌تحقیق در **منحنیهای‌مداری شکل**[1]، یا منحنیهایی‌که، نظیر دایره، مرغانه‌های محدبی با پهنای ثابت‌اند، می‌پردازد. تعداد زیادی ازمقالات وی به‌تفریحات ریاضی، نظیرمتحنیهای یك پیمایه [اونیکورسال[2]] وچند پیمایه[مولتی‌کورسال[3]] (به‌الهام ازهفت پل کونیگسبرگ[4])، مسیرچندقسمتی‌و درون‌سوی

1. Orbiform 2. Unicursal 3. Multicursal 4. Königsberg

حرکت اسب بریك صفحهٔ شطرنج ، و مربعهای یونانی-لاتین اختصاص دارند. البته زمینهٔ اصلی انتشارات او درپهنهٔ ریاضیات کاربردی ، به‌ویژه نظریهٔ حرکت ماه ، مسئلهٔ سه جسم مکانیك‌سماوی، ربایش بیضوی، ئیدرولیك، کشتی‌سازی، توپخانه، ونظریهٔ موسیقی است. طرح دیاگرام اویلر که‌برای آزمون درستی براهین استقرایی به‌کاربرده می‌شود، به‌توسط اویلر در یکی از نامه‌هایش به‌شاهزاده خانم فیلیپین، نوهٔ فردریك‌کبیر سلطان‌پروس، داده شده‌است. در دوران‌جنگ ۷ سالهٔ (۱۷۵۶–۱۷۶۳) اتمام‌کاخ سلطنتی برلین‌در ماگدبورگ مستقر شده‌بود و اویلر از راه مکاتبه از اقامتگاه خود در برلین، برتحصیل شاهزاده خانم نظارت می‌کرد.

اویلر نویسندهٔ زبردست کتابهای درسی بود و مطالب خود را در آنها با وضـوح زیاد، به‌تفصیل، وکامل‌ارائه می‌کرد. دربین‌این کتابها اثر والامقام دوجلدی مدخل درآنالیز بینهایت‌کوچکها[1] به‌سال ۱۷۴۸، اثربغایت غنی تأسیس حساب دیفرانسیل[2] به‌سال‌۱۷۵۵، وکتاب سه‌جلدی همراه آن، تأسیس حساب انتگرال[3] مربوط به‌سالهای ۱۷۶۸–۷۴ است. این کتابها، همراه باکتابهای‌دیگری دربارهٔ مکانیك وجبر، بیشترازهر نوشتهٔ دیگری‌ازلحاظ سبك ، محتـوا ، ونمادگذاری به‌عنوان‌الگویی برای‌بسیاری‌ازکتابهای درسی‌دانشگاهی امروز به‌خدمت گرفته شدند. کتابهای‌اویلر ازمحبوبیت طولانی وقابل‌ملاحظه برخوردار بوده وتا به‌امروز نوشته‌هایی‌جالب وقابل‌استفاده باقی‌مانده‌اند. میزان‌باروری خارق‌العادهٔ اویلرشخص‌را شگفت‌زده‌می‌سازد، وتعجب‌آور نیست که‌اگر بسیاری از ریاضیدانان بزرگ بعد از اویلر خود را مرهون اویلر بدانند.

شاید بجا باشد خاطرنشان کنیم کـه برخی از کارهای اویلر مثالهای برجسته‌ای از صورتگرایی ، یا به‌کار بردن فرمولهای متضمن فرایندهای نامتناهی ، بدون توجه کافی به موارد مربوط به‌همگرایی یا وجود ازلحاظ ریاضی‌درقرن هجدهم‌است. وی دربه‌کاربردن سریهای نامتناهی بی‌احتیاط بود واغلب قواعدی را درمورد آنها به‌کارمی‌برد که فقط در مورد مجموعهای متناهی معتبر بودند . با تلقی سریهای توانی به عنوان چندجمله‌ایهای از مرتبهٔ بینهایت، وی با بی‌مبالاتی خواص چندجمله‌ایهای متناهی را درموردآنها تعمیم داد. اغلب، با چنان روشهای توأم با بی‌دقتی، وی از بخت‌خوش نتایج کاملاً درستی به دست آورد (به‌عنوان مثالی، نگاه‌کنید به‌مطالعه مسئله‌ای ۶.۱۲).

دانش وعلاقهٔ اویلر به‌هیچ‌عنوان فقط به‌ریاضیات و فیزیك محدود نبود. وی عالمی برجسته، با دانشی‌وسیع درنجوم، پزشکی، گیاهشناسی، شیمی، الاهیات، و زبانهای‌شرقی، بود. وی‌آثار نویسندگان برجستهٔ رومی را به‌دقت می‌خواند، ازتاریخ مدنی و ادبی کلیهٔ اعصار وکلیهٔ‌ملل بااطلاع بود، وآشنایی‌گسترده‌ای‌با زبانها وبسیاری ازشاخه‌های ادبیات داشت. بدون‌شك کمك بزرگ او دراین موضوعات گوناگون حافظهٔ غیرعادی اوبود.

ستایشهای پرآب وتابی، مانند دومورد زیر به وسیلهٔ فـرانسواآراگو[4] (۱۷۸۶–

---

1. Introductio in analysin infinitorum 2. Institutiones calculi differentialis 3. Institutiones calculi integralis
4. Francois Arago

۱۸۵۳)فیزیکدان‌ومنجم،از اویلر به‌عمل آمده‌است: «اویلر را می‌توان، بدون هیچ استعاره‌ای وقطعاً بدون هیچ اغراقی، تجسم آنالیز دانست.» «اویلر بی‌هیچ تلاش ظاهری محاسبات خود را انجام می‌داد، درست به‌گونه‌ای که انسان نفس می‌کشد و عقاب خود را در هوا نگاه می‌دارد.»

اویلر سیزده فرزند داشت. اولین پسراو، یوهان آلبرشت[1] اویلر (۱۷۳۴–۱۸۰۰)، در زمینهٔ فیزیک به‌شهرتی دست یافت.

۱۲-۶ کلرو، دالامبر، و لامبرت

کلودآلکسی کلرو درسال۱۷۱۳ درپاریس‌متولد شد،و درهمانجا درسال۱۷۶۵درگذشت. وی از اعجوبه‌های جوان ریاضی بودکه درسن یازده‌سالگی‌مقاله‌ای‌دربارهٔ منحنیهای درجه سوم تصنیف کرد. این مقالهٔ اول، ومقالهٔ بسیار زیبای بعد ازآن دربارهٔ هندسهٔ دیفرانسیل منحنیهای پیچانده شده درفضا، برای اوکرسیی را درآکادمی علوم فرانسه در ۱۸ سالگی، پیش از رسیدن به‌سن‌قانونی، به‌ارمغان آورد. درسال ۱۷۳۶ درهیأتی پیرلوئی مورو دو-موپرتویی[2] (۱۶۹۸–۱۷۵۹) را به‌لاپونی[3] برای اندازه‌گیری طول یك درجه ازیکی از نصف‌النهارهای زمین همراهی کرد. اعزام این‌هیأت برای خاتمه بخشیدن به جدالی در مورد شکل زمین صورت گرفت. نیوتن وهویگنس، بنا بر نظریهٔ ریاضی، به‌این نتیجه رسیده بودندکه زمین در قطبین مسطح است. اما در حدود ۱۷۱۲، منجم و ریاضیدان ایتالیائی، جیووانی دومنیکو کاسینی (۱۶۲۵–۱۷۱۲)، وپسرمتولد فرانسه‌اش ژاك‌کاسینی(۱۶۷۷–۱۷۶۵)، قوسی‌ازطول بین‌دونکرك[4] وپرپینیان[5]را اندازه‌گرفتند، و به‌نتیجه‌ای رسیدندکه

کلودآلکسی کلرو
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

1. Johann Albrecht 2. Pierre Louis Moreau de Maupertuis
3. Lapland 4. Dunkirk 5. Perpignan

ظاهراً این ادعای دکارتی را که زمین درقطبین کشیده‌تر می‌شود، تأیید می کرد. اندازه گیری انجام شده درلاپونی عقیدهٔ نیوتن-هویگنس را بی‌هیچ تردیدی تأیید کرد، و برای موپرتویی لقب «مسطح‌گر زمین» را به‌ارمغان آورد. درسال ۱۷۴۳، بعدازبازگشتش به‌فرانسه، کلرو اثرقاطع خود، نظریهٔ شکل زمین[1] را منتشر کرد. درسال ۱۷۵۲ به‌خاطر مقالهٔ نظریهٔ ماه[2]، که مطالعهٔ ریاضی حرکت ماه بود و برخی سؤالات بی‌پاسخ مانده درآن زمان را روشن می‌نمود، جایزه‌ای از آکادمی سن‌پترزبورگ دریافت کرد. وی فرایند مشتقگیری درمورد معادلهٔ دیفرانسیل

$$y=px+f(p),\ p=\frac{dy}{dx},$$

را که اینك درکتابهای مقدماتی در بارهٔ معادلات دیفرانسیل به عنوان **معادلهٔ کلرو** معروف است، به‌کاربرد، وجواب تکین را پیداکرد، ولی این روش قبلاً مورد استفادهٔ بروك تیلر قرارگرفته بود. در ۱۷۵۹ بازگشت ستارهٔ دنباله‌دار هالی در سال ۱۷۵۹ را، با خطایی درحدود یك ماه محاسبه کرد.

کلرو برادری داشت که ۳سال ازاو کوچکتر بود و درتاریخ ریاضیات به «کلروی‌-کوچك»[3] (۱۷۱۶-۱۷۳۲) مشهور است و به‌نحو غم‌انگیزی درشانزده سالگی براثر آبله درگذشت ولی درچهارده‌سالگی مقاله‌ای در زمینهٔ هندسه درآکادمی فرانسه قرائت کرد و درپانزده‌سالگی اثری در هندسه منتشر نمود. پدرکلروها، ژان‌باپتیست کلرو (که در اوایل سال ۱۷۶۵ درگذشت)، معلم ریاضیات بود، با آکادمی برلین مکاتبه داشت و در هندسه چیز می‌نوشت. وی بیست فرزند داشت که تنها یکی بعد ازاو زنده ماند.

در اینجا شاید مناسب باشدکه از معادلهٔ دیفرانسیل دیگری که در دروس معادلات دیفرانسیل مطرح می‌شود، و نیزاز خانوادهٔ ریاضی مشهور دیگری نام ببریم. این معادله، **معادلهٔ ریکاتی**

$$y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$$

است که به‌یاد جیاکومو ریکاتی[4] (۱۶۷۶-۱۷۵۴) نامگذاری شده‌است که مردی ثروتمند بود و درپادوا در زمانی که نیکولاوس برنولی (برادرزادهٔ یاکوب و یوهان) درآنجا درس می‌داد، به‌تحصیل مشغول بود. علاوه برمطالعهٔ گستردهٔ معادلهٔ فوق، ریکاتی درفیزیك، مساحی، وفلسفه نوشته‌هایی دارد و تلاش زیادی کرده است که کار نیوتن را در ایتالیا بشناساند. حالتهای خاصی ازمعادلهٔ ریکاتی را قبلاً یاکوب برنولی و دیگران مورد مطالعه قرار داده بودند واویلر برای اولین بارخاطرنشان کرد که اگر یك جواب خاص معادله به صورت $v=f(x)$ معلوم باشد، تغییرمتغیر $y=v+(1/z)$ معادله را به‌معادله‌ای خطی برحسب z تبدیل می کند. دومین فرزند جیاکومو ریکاتی، وینچنتسو[5] ریکاتی (۱۷۰۷-۱۷۷۵)، یك

---

1. Théorie de la figure de la Terre 2. Théorie de la Lune
3. Le cadet Clairaut 4. Giacomo Ricatti 5. Vincenzo

استاد یسوعی ریاضیات شد و درمعادلات دیفرانسیل ، سریهای نامتناهی، محاسبهٔ مساحات، وتابعهای هذلولوی کار کرد. فرزندسوم جیاکومو، جیوردانو[1] ریکاتی (۱۷۰۹-۱۷۹۰)، نوشته‌هایی در بارهٔ کار نیوتن، هندسه، معادلات درجه سوم، و مسائل فیزیکی دارد. پنجمین فرزند، فرانچسکو[2] ریکاتی (۱۷۱۸-۱۷۹۱)، درمورد کاربردهندسه درمعماری مطلب نوشت.

ژان لورون دالامبر (۱۷۱۷-۱۷۸۳)، مانند آلکسی کلرو، درپاریس چشم به جهان گشود و در همانجا درگذشت. در نوزادی نزدیك کلیسای سن‌ژان‌لورون سر راه گذاشته شد و ژاندارمی که او را پیدا کرده‌بود، شتابزده نام جایی راکه وی را درآنجا یافته شده بود براو نهاد. بعداً، به‌دلایلی نامعلوم، نام دالامبر هم برنام او اضافه گردید.

بین دالامبر وکلرو رقابتی علمی، که اغلب دوستانه هم نبود، وجود داشت. در ۲۴ سالگی، دالامبربه آکادمی فرانسه پذیرفته‌شد . در سال ۱۷۴۳ رسالهٔ دینامیك[3] خود را بر مبنای اصل مهم انرژی جنبشی که نام خود او برآن گذاشته شده است، منتشرکرد. درسال ۱۷۱۴ اصل خود را در رساله‌ای در بارهٔ تعادل و حرکت مایعات ، و در سال ۱۷۴۶ در مقاله‌ای دربارهٔ علل وزش باد به‌کاربرد. درهریك ازاین آثار، ونیز دراثری به‌سال۱۷۴۷ دربارهٔتارهای مرتعش،وی به‌معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی رسید، ویکی ازپیشگامان مطالعهٔ این‌گونه معادلات شد. به‌کمك اصل‌خود، توانست جواب‌کاملی برای مسئلهٔ به‌نتیجه نرسیدهٔ تقدیم اعتدالین پیدا کند . دالامبر به مبانی آنالیز علاقه نشان می‌داد ، و در سال ۱۷۵۴ این پیشنهاد مهم را مطرح کردکه برای قرار دادن آنالیز بر شالودهٔ محکمی به نظریهٔ معتبری ازحدود نیازاست، ولی معاصرین وی اعتنایی به‌این پیشنهادنکردند. دالامبر برای اثبات قضیهٔ اساسی جبر (که هر معادلهٔ چندجمله‌ای مانند $f(x)=0$ با ضرایب مختلط و درجهٔ $n\geqslant 1$ حداقل دارای یك ریشهٔ مختلط است) چنان‌کوششی به‌عمل‌آوردکه این‌قضیه‌امروزه‌درفرانسه‌به **قضیهٔ دالامبر** مشهورشده است. دالامبر بودکه نام معادلهٔ‌ریکاتی را به‌معادله‌ای‌که دربالا بررسی شد، داد.

دالامبر، مانند اویلر، تحصیلاتی‌گسترده داشت و دارای دانش استثنایی در حقوق، ریاضیات، و علوم بود. این دو دانشمند که علایق مشترك زیادی داشتند، درموارد عدیده باهم‌مکاتبه داشتند. ماهیت لگاریتم‌اعداد منفی،دالامبر، وبسیاری دیگراز ریاضیدانان عصر او را سردرگم‌کرده بود. آنها حس می‌کردندکه می‌بایست $\log(-x)=\log(x)$، و مبنای استدلال آنهااین بودکه چون $(-x)^2=(x)^2$، درنتیجه $\log(-x)^2=\log(x)^2$ و ازآنجا $2\log(-x)=2\log(x)$ وسرانجام $\log(-x)=\log(x)$. در ۱۷۴۷ اویلر توانست درنامه‌ای وضعیت صحیح لگاریتم اعداد منفی را برای دالامبر روشن‌سازد. زمانی‌که درپایان دورهٔ اویلر، فردریك‌کبیر از دالامبر برای ریاست آکادمی پروس دعوت به‌عمل آورد، دالامبر از پذیرش‌دعوت اباکرده مدعی‌شدکه هیچ فردآن عصر راشایستگی آن نیست که از لحاظ برتری آکادمیکی به جای اویلر بزرگ نشانیده شود . دالامبر را کاترین‌کبیرهم برای خدمت در روسیه دعوت‌کرد ولی‌علی‌رغم پیشنهاد مقرری شایسته‌ای،

---

1. Giordano 2. Francesco 3. Traite de dynamique

ژان‌لوروِن دالامبر
(کتابخانهٔ کنگره)

دالامبر از قبول این‌دعوت هم سرباز زد. درسال ۱۷۵۴ دالامبر دبیر دایمی آکادمی فرانسه شد. در سالهای واپسین عمرش، وی روی دایرةالمعارف[1] فرانسه که دنی‌دیدرو[2] وخود وی آن را شروع کرده بودند، به‌کار پرداخت . دالامبر در ۱۷۸۳، در همان سال مرگ اویلر، دیده از جهان فروبست.

گفتهٔ مشهور و برسر زبانها (که استشهاد به‌آن درجای خود درکلاس جبرمقدماتی مقبول‌است) از دالامبرنقل است‌که: «جبر بخشنده است، وی بیش از آنچه‌که ازاو بخواهیم به ما می‌دهد.» وی همچنین بمورد خاطرنشان کرده است‌که: « حقایق هندسی به گونه‌ای مجانب حقایق فیزیکی هستند ؛ یعنی دومی به‌اولی بینهایت نزدیك می‌شود ، بی‌آنکه دقیقاً به‌آن برسد.» شاید قابل ذکرتر از همهٔ اظهارنظرهای دالامبر دربارهٔ ریاضیات این باشد که: «تردیدندارم‌که اگرانسانهاجدا ازهم زندگی می‌کردند و دروضعیتی‌بودند‌که به‌چیز دیگری جزحفظ بقای خود نپردازند، آنها مطالعهٔ علوم دقیقه را بر پروردن هنرهای‌دلپذیر ترجیح می‌دادند. زیرا به‌خاطر دیگران است‌که انسان درهنر به کمال می‌رسد ولی انسان به‌خاطر خویشتن خود را وقف علوم دقیقه می‌کند. بنابراین، به‌نظرمن، درجزیره‌ای‌متروك یك شاعر به‌ندرت می‌تواند خودرا مفید بداند، درحالی‌که یك ریاضیدان می‌تواند هنوز هم ازغروراکتشاف سرشارباشد.»

یوهان‌هاینریش‌لامبرت (۱۷۲۸-۱۷۷۷)، که کمی جوانتر از کلرو و دالامبر بود، در مولوز[3] (آلزاس[4]) ، که درآن زمان قسمتی از قلمرو سویس بود، به‌دنیا آمد. لامبرت ریاضیدانی باکیفیت عالی‌بود. وی که پسرخیاط فقیری‌بود عمدتاً پیش خود درس‌خوانده بود . وی صاحب قوهٔ تخیلی عالی بود، و نتایج خود را با توجه زیاد به‌دقت ثابت کرد. در واقع لامبرت اولین کسی بودکه ناگویا بودن π را به‌طور دقیق ثابت کرد. او نشان

---

1. Encyclopédie　2. Denis Diderot　3. Mulhouse
4. Alsace

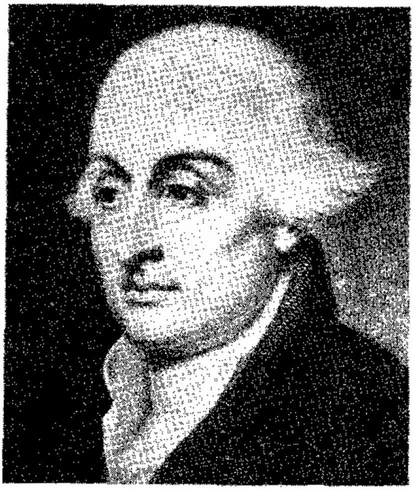
یوهان‌هاینریش‌لامبرت
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

داد که اگر x گویا ، ولی ناصفر ، باشد ، آنگاه $\tan x$ نمی‌تواند گویا باشد ؛ چون $\tan \pi/۴ = ۱$، نتیجه می‌شود که $\pi/۴$، یا π نمی‌تواند گویا باشد . همچنین اولین بسط منظم نظریهٔ توابع هذلولوی، و در واقع، نماد امروزی این توابع را به لامبرت مدیونیم. لامبرت دانشمند چندجنبه‌ای بود و به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای در ریاضیات چندین مبحث گوناگون دیگر، نظیر هندسهٔ ترسیمی، تعیین مدارستاره‌های دنباله‌دار، ونظریهٔ تصاویری که درساختن نقشه‌ها به‌کار می‌رود (یکی‌ازاین‌تصاویر پراستعمال امروزه به‌نام او اسم‌گذاری‌شده‌است)، سهم داشت. زمانی وی به‌طرحریزی یك منطق ریاضی ازنوعی که رئوس مطالب عمدهٔ آن را زمانی لایبنیتز ارائه کرده‌بود، پرداخت. درسال ۱۷۶۶، تحقیق خود دربارهٔ اصل‌توازی اقلیدس را، که بعد ازمرگش منتشرشد ، تحت عنوان نظریهٔ توازی[1] نوشت، اثری که وی را در زمرهٔ پیشگامان کشف هندسهٔ نااقلیدسی (بخش ۱۳-۶) قرارمی‌دهد.

۱۲-۷ لاگرانژ

اویلر و ژوزف لوئی‌لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) دوتن ازبزرگترین ریاضیدانان قرن‌هجدهم بودند، و این امرکه کدام یك از اینها بزرگتر از دیگری است؛ موضوعی است که اغلب حساسیتهای متنوع ریاضی بحث‌کنندگان را منعکس می‌کند. لاگرانژ درشهر تورن[2] ایتالیا به‌دنیا آمد. درسال ۱۷۶۶، زمانی که‌اویلر برلین را ترك گفت،فردریك کبیر به‌لاگرانژنوشت که «بزرگترین پادشاه اروپا» میل دارد که «بزرگترین‌ریاضیدان اروپا» را در دربارخود داشته باشد. لاگرانژ این دعوت را پذیرفت و به‌مدت بیست‌سال مقامی راکه اویلر از آن کناره‌گرفته بود، به عهده‌گرفت. چند سال بعد ازترك برلین، و علی‌رغم اوضاع پرآشوب

1. Die Theorie der Parallellinien 2. Turin



ژوزف‌لوئی‌لاگرانژ
(برادران براون)

سیاسی‌فرانسه، لاگرانژ یك‌مقام استادی‌درمدرسهٔ جدیدالتاسیس **اکول‌نرمال**[1]**[دارالمعلمین]** وسپس‌در اکول‌پلی‌تکنیك[2] [دارالفنون]پذیرفت. ازاین‌دو مدرسه، اولین‌آنها عمرکوتاهی داشت، ولی دومی در تاریخ ریاضیات صاحب‌آوازه شد بدان جهت که بسیاری از ریاضیدانان بزرگ فرانسهٔ نوین در آنجا تربیت شدند و بسیاری در آنجا مقام استادی یافتند. لاگرانژ در پدیدآمدن درجهٔ ممتاز دانش‌طلبی در ریاضیات که با نام اکول پلی‌تکنیك مرتبط گردیده کمك مؤثری کرده است.

لاگرانژ به‌شقاوتهای دوران وحشت بعد ازانقلاب فرانسه ابراز انزجارکرد. وقتی شیمیدان بزرگ، لاووازیه[3]، به‌زیر گیوتین رفت، لاگرانژ رنجش خود را ازسفاهت این حکم چنین اظهارکرد: «یك لحظه طول کشید تا مردم سراو را از تنش جدا کردند ولی برای به‌وجودآوردن نظیر اویك قرن هم کافی نیست.»

لاگرانژ در سالهای واپسین عمر دستخوش چیرگی شدید دلتنگی و افسردگی قرار گرفت. در ۵۶سالگی به‌کمك دختر جوانی‌که ۴۰سال جوانتر از او بود، ازاین مصیبت رهانیده شد. این زن، دختر دوست او، لومونیهٔ[4] منجم بود. این دختر چنان تحت تأثیر شوربختی اوقرارگرفت که در ازدواج با او پافشاری کرد. لاگرانژ تسلیم گردید، و این ازدواج کمال مطلوب ازآب درآمد.

کارهای لاگرانژ تأثیر عمیقی در تحقیقات ریاضیِ بعدی داشت، زیرا وی اولین ریاضیدان ممتازی بود که وضعیت کاملاً غیر رضایتبخش مبانی آنالیز راتشخیص داد و بدین‌جهت به‌تدقیق حسابان همت گمارد. این‌کوشش، که با موفقیت زیادی توأم نبود، درسال ۱۷۹۷ در کتاب بزرگ او نظریهٔ توابع تحلیلی شامل اصول حساب دیفرانسیل[5] به‌عمل آمد. ایدهٔ اصلی دراینجا نمایش یك تابع مانند $f(x)$ به‌وسیلهٔ یك سری تیلر بود.

1. École Normale 2. École Polytechnique 3. Lavoisier
4. Lemonnier 5. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel

مشتقهای $f'(x)$، $f''(x)$،...، بعداً به‌عنوان ضرایب h، $h^2/2!$... دربسط تیلر $f(x+h)$ برحسب h تعریف شدند. نماد $f'(x)$، $f''(x)$،...، که استفاده از آن بسیار معمول است، به لاگرانژ منسوب است. ولی لاگرانژ توجه زیادی به موضوعات همگرایی و واگرایی نکرد. با این حال در اینجا اولین «نظریهٔ توابع با یك متغیر حقیقی» را داریم. دو اثر دیگر لاگرانژ رسالهٔ درحل معادلات عددی ازکلیهٔ درجات[1] (۱۷۶۷) و اثر ماندگار مکانیك تحلیلی[2] (۱۷۸۸) است؛ اولی روشی برای تقریب ریشه‌های حقیقی یك معادله را به کمك کسرهای مسلسل می‌دهد، دومی (که سرویلیام‌همیلتن آن را یك «منظومهٔ علمی»[3] توصیف کرده است) معادلات کلی حرکت یك دستگاه دینامیکی را که امروزه به معادلات لاگرانژ موسوم‌اند، در بردارد. اثر او دربارهٔ معادلات دیفرانسیل (مثلاً، روش تغییر پارامترها)، و به‌ویژه درمعادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، بسیار قابل توجه است، وسهم او درحساب تغییرات کمك زیادی به بسط این موضوع کرد. لاگرانژ میل وافری به‌نظریهٔ اعداد داشت ومقاله‌های مهمی در این زمینه نیز نوشت، نظیرمقاله‌ای که اولین برهان منتشرشدهٔ این قضیه است که هرعدد صحیح مثبت را می‌توان به‌صورت مجموع نابیشتر از چهارمربع نشان داد. برخی از کارهای اولیهٔ او دربارهٔ نظریهٔ معادلات بعداً رهنمون گالوا در نظریهٔ گروههای وی شد. در واقع، قضیهٔ مهم نظریهٔ گروهها مبنی بر اینکه مرتبهٔ یك زیرگروه از یك گروه متناهی مانند G، عاملی از مرتبهٔ G است، به **قضیهٔ لاگرانژ** موسوم است. درقسمتهای اول این کتاب بارها به‌نام لاگرانژ اشاره شده‌است.

درحالی که اویلر آثارخود را با افراط درجزئیات و به‌خدمت گرفتن آزادانهٔ نیروی شهود می‌نوشت، نوشته‌های لاگرانژ مجمل و دقیق بود. یك‌دست‌اندرکار رسمی ریاضیات اغلب دستخوش این احساس ناخوشایند می‌شود که نیروی قلمش برنیروی هوشش برتری دارد؛ این احساسی بود که اویلر اعتراف می‌کرد اغلب قادر به فراموش کردن آن نیست. لاگرانژ ظاهراً شعور ریاضی قویتری داشته است؛ سبك وی « نو » بود و می‌توان وی را اولین آنالیزدان واقعی توصیف کرد. همهٔ موسیقیدانان بزرگ را می‌توان به‌دو دستهٔ اجراء کنندگان یا تصنیف کنندگان موفق تقسیم کرد و عدهٔ کمی به هر دو دسته تعلق دارند. به‌همین گونه، همهٔ ریاضیدانان بزرگ را می‌توان در دو دستهٔ عملگران رسمی خبره یا نظریه‌پردازان خبره قرار داد که عدهٔ کمی هم درهر دو دسته قرار دارند. اویلر در وهلهٔ اول عملگر رسمی خبرهٔ بزرگی بود ولاگرانژ یك نظریه‌پرداز بزرگ، و گاوس دانشمندی سرآمد درهردودسته بود. بنابراین اویلرمانند هایفتز[4] بود، لاگرانژمانند بتهوون، و گاوس مانند یوهان‌سباستیان باخ[5].

لاگرانژ خاطرنشان کرده است که یك ریاضیدان به فهم کامل هر بخش از کار خود دست می‌یابد مادام که چنان وضوحی به آن بخشیده باشد که بتواند آن را به‌نحو قاطعی به

1. Traité de résolution des équations numériques de tous degrés
2. Mécanique analytique 3. scientific poem 4. Heifetz
5. Johann Sebastian Bach

پیرسیمون لاپلاس
(برادران براون)

اولین شخصی که درمعبر به او برمی‌خورد، توضیح دهد. گرچه چنین آرمانی اغلب غیرممکن به نظرمی‌رسد، زمان اغلب چنین چیزی را دست‌یافتنی می‌کند. قانون جاذبهٔ عمومی نیوتن، که در ابتدا حتی برای افراد با تحصیلات عالی غیر قابل فهم بود، امروزه جزو دانش عمومی درآمده است. نظریهٔ جاذبهٔ نسبیتی اینشتین هم امروزه دستخوش تحول مشابهی شده است.

ناپلئون بوناپارت که با تعدادی از ریاضیدانان بزرگ فرانسه در زمان خود حشر و نشر داشت، ارزیابی خود از لاگرانژ را در این جمله خلاصه کرده است که، «لاگرانژ برج رفیع علوم ریاضی است.»

۱۲-۸ لاپلاس و لژاندر

لاپلاس و لژاندر معاصر لاگرانژ بودند. گرچه آثار اصلی خود را در قرن نوزدهم منتشر کردند. پیرسیمون لاپلاس[1] درسال ۱۷۴۹ از والدین فقیری به‌دنیا آمد. استعداد ریاضی زودرس او مقامهای معلمی‌خوبی برای وی به‌ارمغان آورد، و به‌عنوان یك فرصت‌طلب سیاسی خود را طرف توجه هرحزبی می‌کرد که درایام نامطمئن انقلاب فرانسه برسرقدرت بود. برجسته‌ترین کار او در زمینهٔ مکانیك سماوی، احتمالات، معادلات دیفرانسیل، و ژئودزی بود. وی دو اثر عظیم منتشر کرد: رسالهٔ مکانیك سماوی[2] (پنج جلد، ۱۷۹۹-۱۸۲۵) و نظریهٔ تحلیلی احتمالات[3] (۱۸۱۲)، که درمقدمهٔ هریك از آنها شرح غیرفنی جامعی آورده شده بود. رسالهٔ مکانیك سماوی پنج‌جلدی، که برای او لقب «نیوتن فرانسه» را کسب کرد، همهٔ کشفیات قبلی دراین زمینه همراه با سهم خود لاپلاس را دربرمی‌گرفت، ومؤلف را به‌عنوان استادی بی‌رقیب دراین موضوع متشخص کرد. شاید جالب باشد که دوتا ازحکایاتی را که

---

1. Laplace 2. Traité de mécanique céleste 3. Théorie analytique des probabilités

آدرین‌ماری لژاندر
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

اغلب در رابطه با این اثر گفته می‌شود، تکرار کنیم. وقتی ناپلئون‌خرده‌گیرانه متذکر شد که نام خداوند در رسالهٔ او ذکر نشده است، لاپلاس جواب داد، «اعلیحضرتا، من به این فرض نیازی نداشتم.» ومنجم آمریکایی،ناتانیل باوديچ[1]، وقتی رسالهٔلاپلاس را به‌انگلیسی ترجمه می‌کرد، متذکرشد، «هرگز نشد به‌یکی از عبارات « بنا براین آشکار است»لاپلاس بر بخورم بی آنکه مجبور باشم ساعتها برای پر کردن این‌شکاف کار کنم تا آن را بفهمم و نشان دهم که این‌مطلب چگونه به‌سادگی آشکاراست.» نام لاپلاس با فرضیهٔ سحابی کیهانزایی و معادلهٔ لاپلاس درنظریهٔ پتانسیل (گرچه منشأ هیچیك از این دوکار، لاپلاس نبوده است)، با به‌اصطلاح تبدیل لاپلاس که بعداً به صورت کلید حساب اوپراتوری هوی ساید[2] درآمد، و نیز با بسط لاپلاس یك دترمینان پیوند یافته است. لاپلاس در ۱۸۲۷، دقیقاً ۱۰۰ سال بعداز مرگ آیزك‌نیوتن از دنیا رفت. بنابر روایتی، آخرین کلماتی که او بر زبان آورده این بوده‌است که: «آنچه می‌دانیم بس اندك، و آنچه نمی‌دانیم به‌غایت زیاد است.»

داستان زیردر بارهٔلاپلاس‌جالب توجه‌وراهنمای‌خوبی برای کسانی است که درخواست کار می‌دهند. وقتی لاپلاس درجوانی به عنوان متقاضی استادی ریاضیات به پاریس رفت، توصیه‌نامه‌های خود راکه توسط افراد برجسته نوشته شده بود به‌دالامبر تسلیم کرد، ولی دالامبر ازقبول آنها خودداری کرد. لاپلاس در بازگشت به‌منزل خود، نامه‌ای بسیارعالی به دالامبر دربارهٔ اصول عمومی مکانیك نوشت. این نامه فتح بابی شد و دالامبرپاسخ داد که: «عالیجناب ، ملاحظه می‌کنید که من به توصیه‌نامه‌های شما توجهی نکردم. شما نیازی به توصیه‌نامه ندارید؛ شما به‌نحوی بهتر به معرفی خود پرداخته‌اید.» چند روز بعد لاپلاس به استادی ریاضیات درمدرسهٔ نظامی پاریس گمارده شد.

لاگرانژ و لاپلاس را بارها باهم مقایسه کرده‌اند. در وهلهٔ اول، تفاوت بارزی در سبك آنها وجود دارد که به‌طورخلاصه و.و. روز بال آن را چنین بیان کرده است: «کار

---

1. Nathaniel Bowditch   2. Heaviside

لاگرانژ هم درصورت و هم درمعنی کمال دارد، وی در توضیح شیوهٔ کار خود دقیق است، و گرچه استدلالهای او کلی‌اند ،فهم آنها آسان‌است. از سوی دیگر لاپلاس هیچ چیز را توضیح‌نمی‌دهد، به‌سبك‌اعتنانمی‌کند،واگرقانع‌شودکه نتایجش‌درست‌اند، خود را راضی می‌کند که برای آنها برهانی ندهد یا برهان غلطی ارائه کند.» همین تفاوت بارز در نقطه‌نظرهایی که این دو شخصیت نسبت به ریاضیات داشتند، وجود دارد. درنظر لاپلاس ریاضیات کوله‌ای از ابزار است که برای توضیح طبیعت به‌کار می‌رود. درنظر لاگرانژ، ریاضیات هنری والاست و دلیل وجودی‌اش‌خود آن است.

لاپلاس به مبتدیان در تحقیقات ریاضی بسیار سخی بود. وی این‌گونه مبتدیـان را فرزندان ناتنی خود می‌نامید ، و در موارد متعددی وی از انتشار کشف خود، خودداری کرد تا به‌یك مبتدی اجازه دهدکه زودتر ازاو فرصت انتشار آن را داشته باشد. متأسفانه چنین سخاوتی به‌ندرت درعالم ریاضیات وجود دارد.

ما توصیف کوتاه خود از لاپلاس را با دونقل‌قول منسوب به او به پایان می‌بریم. «همهٔ متعلقات طبیعت‌پیامدهای ریاضی‌صرف تعدادی‌اندك ازقوانین لایتغیرند.» «درتحلیل نهایی، نظریهٔ احتمال صرفاً عقل سلیم است‌که درقالب اعداد بیان می‌شود.»

شهرت آدرین ماری‌لژاندر (۱۷۵۲–۱۸۳۳) در تاریخ ریاضیات مقدماتی عمدتاً به‌خاطر اصول هندسهٔ[1] معروفش‌است ، که درآن برای اصلاح آموزش اصول اقلیدس از راه تنظیم مجدد وساده کردن قابل‌ملاحظهٔ بسیاری ازقضایای آن تلاش به‌عمل آورد. این اثر در امریکا مورد التفات زیادی قرارگرفت وبه‌صورت نمونهٔ‌کتاب درسی هندسه دراین کشور در آمد . در واقع ، اولین ترجمهٔ انگلیسی هندسهٔ لژانـدر در سال ۱۸۱۹ به دست جان‌فارار[2] از دانشگاه هاروارد انجام شد. سه سال بعد ترجمهٔ انگلیسی دیگری، به وسیلهٔ ادیب اسکاتلندی تامس‌کارلایل[3]، که در اوایل زندگی‌اش یك معلـم ریاضیات‌بود، انجام گردید. ترجمهٔ کارلایل،که بعداً به‌دست چارلز دیویز[4]، و سپس ازسوی ج.ه.وان آمرینج[5] درآن تجدیدنظر شده بود، ۳۳ بار درامریکا تجدیدچاپ شد. درچاپهای بعدی هندسه‌اش، لژاندر سعی کردکه اصل توازی‌را ثابت کند (نگاه‌کنید به‌بخش ۱۳–۶). کار عمدهٔ لژاندر در ریاضیات عالی حول نظریهٔ اعداد، توابع بیضوی، روش‌کمترین مربعات، و انتگرالها متمرکز بود ؛ این‌کارپیشرفته‌تر ازآن است که در اینجا موردبحث واقع شود. در محاسبهٔ جدولهای ریاضی نیزپشتکار زیاد داشت. نام لژاندر امروزه با معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ‌دوم

$$(۱-x^{۲})y''-۲xy'+n(n+۱)y=۰,$$

که در ریاضیات کاربردی اهمیت زیادی دارد ، پیوند خورده است . توابعی که در این معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کنند **توابع لژاندر** (از مرتبهٔ n) نامیده می‌شوند. وقتی n یـك

1. Éléments de géométrie 2. John Farrar 3. Thomas Carlyle
4. Charles Davies 5. J.H. Van Amringe

عدد صحیح نامنفی باشد، معادله دارای جوابهای چندجمله‌ای به‌نام **چندجمله‌ایهای لژاندر** است که موردتوجه ویژه‌ای هستند. نام لژاندر با علامت $(c|p)$ در نظریهٔ اعداد هم مرتبط است. نماد لژاندر $(c|p)$ برابر با ۱± است بسته به اینکه c، که نسبت به p اول است، ماندهٔ مربعی عدد اول فرد p باشد یا نباشد. (برای مثال ۱ = (۱۹|۶)، زیرا همنهشتی (به‌هنگ ۱۹)۶$\equiv x^2$ دارای جواب است، و ۱ − = (۴۷|۳۹)، زیرا همنهشتی (به‌هنگ ۴۷)۳۹$\equiv x^2$ دارای جواب نیست.)

علاوه بر اصول هندسه‌اش که در ۱۷۹۴ منتشر شد، لژاندر یك اثر ۸۵۹ صفحه‌ای در دوجلد تحت عنوان رساله‌ای دربارهٔ نظریهٔ اعداد[1] (۱۷۹۸–۱۷۹۷) به‌چاپ رساند که اولین رساله‌ای است که منحصراً به‌نظریهٔ اعداد اختصاص دارد. وی بعداً یك رسالهٔ سه‌جلدی تحت‌عنوان تمرینهای حساب انتگرال[2] (۱۸۱۹–۱۸۱۱) نوشت که به‌دلیل قابل درك بودن و جامعیتش با اثر مشابه اویلر برابری می‌کرد. لژاندر بعداً بخشهایی از این اثر را درقالب یك رسالهٔ سه‌جلدی تحت‌عنوان رسالهٔ توابع بیضوی وانتگرالهای اویلری[3] (۱۸۳۲–۱۸۲۵) بسط داد. لژاندر دراین کتاب اصطلاح «انتگرالهای اویلری» را برای توابع بتا و گاما معرفی کرد. لژاندر در ژئودزی به‌خاطر مثلث‌بندی فرانسه به‌شهرت قابل توجهی دست یافت.

۱۲–۹ مونژ و کارنو

آخرین ریاضیدانان برجسته‌ای که دراین فصل موردبحث قرارخواهند گرفت دوهندسه‌دان یعنی گاسپارمونژ[4] (۱۸۱۸–۱۷۴۶) و لازارکارنو[5] (۱۸۲۳–۱۷۵۳) هستند.

مونژ در دبیرستان اوراتوریها[6] در بون[7]، درشهر زادگاهش و در دبیرستان آنها در لیون، که درسن پایین ۱۶ سالگی معلم فیزیك آنجا شد، به‌تحصیل پرداخت. نقشهٔ با مقیاس بزرگی که استادانه از شهر موطنش ساخته بود، موجب پذیرفته شدن او در مدرسهٔ نظامی مزیر[8] به‌عنوان طراح شد. وقتی ازاو خواستند که از روی داده‌هایی که دراختیار او قرار داده شده، محل نصب توپ در یك قلعهٔ نظامی مفروضی را تعیین کند، مونژ برای روشهای حسابی طولانی وملال آور موجود درآن زمان یك طریقهٔ میانبر سریع هندسی یافت. روش او، که نمایش اشیای سه‌بعدی به‌نحوی ظریف به‌کمك تصاویرمناسبی برصفحهٔ دوبعدی بود، موردپذیرش ارتش قرارگرفت و درعداد اسرار نظامی خیلی سری درآمد. این روش بعداً به‌عنوان **هندسهٔ ترسیمی**[9] به‌نحو وسیعی تدریس‌شد. مونژ درسال ۱۷۶۸ استاد ریاضیات،

---

1. Essai sur la théorie des nombres
2. Exercises du calcul intégral
3. Traité des fonctions elliptiques et des intégrals eulériennes
4. Gaspard Monge 5. Lazare Carnot
۶. اوراتوریها, Oratorians. پیروان مجمعی دینی که درسال ۱۵۷۵ توسط قدیس‌فیلیپودنری (Filippo Deneri) در فلورانس تأسیس‌شد.ـم.
7. Beaunne 8. Mézières 9. descriptive geometry

گاسپارمونژ
(مجموعهٔ کتابخانهٔ عمومی نیویورک)

و درسال ۱۷۷۱، درمزیر، استاد فیزیك شد. و درسال ۱۷۸۰ به‌کرسی استادی ئیدرولیك درلیسئوم[1] پاریس منصوب شد.

برخلاف سه شخص دیگری که نامشان با «ل» شروع می‌شود (لاگرانژ، لاپلاس، و لژاندر)، وازانقلاب فرانسه به‌دورماندند. مونژ از انقلاب حمایت کرد. وی به‌عنوان وزیر نیروی دریائی، وارد خدمت شد و به ساختن اسلحه و باروت برای ارتش پرداخت. در تأسیس اکول پلی‌تکنیك درسال ۱۷۹۵، تحت‌نظر دیرکتوار[2]، نیروی عمده به‌شمارمی‌رفت، و درآنجا استاد ریاضیات بود. از دوستی نزدیك ناپلئون و تحسین وی برخوردار بود و همراه با ژوزف فوریه (۱۷۶۸–۱۸۳۱) ریاضیدان، در لشگرکشی بدفرجام مصر او را همراهی کرد. در بازگشت به‌فرانسه، مونژ مقام خود را در پلی‌تکنیك بازیافت و درآنجا به‌ثبوت رساند که معلمی با استعداد استثنایی است. دروس او در آنجا، الهامبخش تعداد زیادی ازهندسه‌دانان توانا، از جمله شارل دوپن[3] (۱۷۸۴–۱۸۷۳) و ژان‌ویکتور پونسله (۱۷۸۸–۱۸۶۷) شد، که اولی در زمینهٔ هندسهٔ دیفرانسیل، و دومی در زمینهٔ هندسهٔ تصویری سهم داشته است.

علاوه برابداع هندسهٔ ترسیمی، مونژ را پدرهندسهٔ دیفرانسیل می‌دانند. اثراوتحت عنوان کاربرد آنالیز در هندسه[4] پنج بار چاپ شد و یکی از مهمترین مباحث اولیهٔ هندسهٔ دیفرانسیل‌رویه‌ها بود. دراینجاست که مونژ، علاوه برچیزهای دیگر، مفهوم خطوط‌انحنای یك رویه درفضای سه‌بعدی را معرفی کرده است. سهم مونژ درهندسهٔ دیفرانسیل، اساساً به هندسهٔ عارضی[5] رویه‌ها (نگاه‌کنید به‌بخش ۱۴–۷) مختص شده است.

با دروس مونژ در اکول‌پلی‌تکنیك بود که هندسهٔ تحلیلی فضایی آغاز وجود کرد.

---

1. Lyceum 2. Directory 3. Charles Dupin
4. Application de l'analyse à la géométrie 5. extrinsic geometry

مطالب این دروس توسط مونژ و ژان نیکولاس-پیر هاشت[1] (۱۷۶۹-۱۸۳۴) در سال ۱۸۰۲ درمقالهٔ جامعی دربارهٔ کاربرد جبر درهندسه[2] که در مجلهٔ اکول پلی تکنیک[3] چاپ شد، نوشته شد. قضیهٔ آغازین این اثر تعمیم مشهور قضیهٔ فیثاغورس مربوط به قرن هجدهم است که: مجموع مربعات تصاویر قائم یک سطح مستوی برسه صفحهٔ دو به دو متعامد برابر با مربع مساحت آن سطح مستوی است. درجای دیگر این اثر بخش عمده مطالب کتابهای امروزی در قسمت هندسهٔ تحلیلی فضایی، نظیر فرمولهای انتقال و دوران محورها، بررسی متداول خطها وصفحه‌ها درفضا، وتعیین صفحات اصلی یک مخروطی‌وار را می‌یابیم. دراینجا نشان داده شده است که صفحهٔ مار بر نقطهٔ مفروض (x', y', z') وعمود برمحل تلاقی دوصفحهٔ

$$ax+by+cz+d=0 \quad \text{و} \quad ex+fy+gz+h=0$$

صفحهٔ

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

است که در آن

$$A=bg-fc,\ B=ce-ga,\ C=af-eb.$$

فرمولهای مربوط به‌فاصلهٔ یک نقطه ازیک‌خط درفضا وکوتاهترین فاصلهٔ بین دوخط متنافر داده شده‌اند. دربین نتایج جدیدی که مونژ آنها را داده است، نتایج زیر را می‌یابیم:

(۱) شش صفحهٔ مار براوساط اضلاع یک چهاروجهی وبه‌ترتیب عمود براضلاع مقابل درنقطه‌ای که قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی چهاروجهی نسبت به‌مرکزهندسی آن است، یکدیگر را قطع می‌کنند. (این نقطه را امروزه نقطهٔ‌مونژ چهار وجهی می‌نامند.)

(۲) مکان هندسی رأس یک کنج قائم سه‌وجهی که وجوه‌آن بر مخروطی‌وار مرکزی مفروضی مماس‌اند، کره‌ای هم‌مرکز با مخروطی‌وار است. (این کره امروزه **کرهٔ مونژ**، یا **کرهٔ هادی**، مخروطی‌وار نامیده می‌شود. نظیر این مکان هندسی درفضای دوبعدی را امروزه **دایرهٔ مونژ** مقطع مخروطی مرکزی مربوطه می‌نامند، گرچه این مکان هندسی را یک قرن پیشتر لاهیر با استفاده از روشهای ترکیبی پیدا کرده بود.)

بعداً، در سال ۱۸۰۹، مونژ براهین متعددی برای این نتیجه که خطوط واصل بین اوساط اضلاع مقابل یک چهار وجهی درمرکز هندسی چهاروجهی متقارب‌اند، ارائه داد.

مونژ دو برادر داشت که آنها هم استاد ریاضیات بودند.

لازار نیکولا مارگریت کارنو[4]، به پیروی از رسم رایج در بین اغلب فرزندان خانواده‌های مرفه فرانسوی، خودرا آمادهٔ رفتن به‌ارتش کرد، وبنا براین به‌مدرسهٔ نظامی مزیر فرستاده‌شد،

---

1. Jean-Nicolas-Pierre Hachette 2. Application d'algébre à la géométrie 3. Journal de l'École Polytechnique 4. Lazare Nicolas Marguerite Carnot

که در آنجا زیر نظر مونژ تحصیل کرد و در سال ۱۷۸۳ با درجهٔ سروانی رشتهٔ مهندسی را تمام کرد. درسال ۱۷۸۴ اولین اثر ریاضی خود را، دربارهٔ مکانیك، نوشت، که شامل اولین برهان این نکته بودکه انرژی جنبشی دربرخورد اجسام نیمه‌کشسان ازبین می‌رود. باظهور انقلاب فرانسه، خود را درگیرسیاست‌کرد وانقلاب را با شوق و ایثار پذیرفت. به‌تعدادی مقام مهم دست یافت، و، در سال ۱۷۹۳، به اعدام لوئی XVI به اتهام خیانت رأی داد. همچنین درسال ۱۷۹۳، وقتی اروپای متحد یك میلیون سرباز به فرانسه گسیل کرد، کارنو وظیفهٔ به‌ظاهرغیرممکن سازماندهی چهارده لشگر راکه به‌طور موفقیت‌آمیزی با دشمن مقابله‌کردند، متقبل شد، و برای خود عنوان «سازمانده پیروزی» را کسب کرد. درسال ۱۷۹۶ باکودتای ناپلئون مخالفت‌کرد، ومجبور به‌فرار به ژنو شد.که درآنجا یك اثر نیمه‌فلسفی در بارهٔ متافیزیك حسابان نوشت. دو اثر مهم او در هندسه، هندسهٔ وضع[1] و رسالهٔ درباب نظریهٔ موربها[2] درسالهای ۱۸۰۳ و ۱۸۰۶ به‌چاپ رسیدند. به‌عنوان «دشمن آشتی‌ناپذیر سلاطین»، درسال ۱۸۱۴، بعد ازلشگرکشی به‌روسیه، داوطلب رفتن به جبهه به‌خاطر فرانسه ولی نه به‌خاطرامپراطوری، شد. بعد از اعادهٔ سلطنت تبعید شد، و درسال ۱۸۲۳ درماگبورگ[3] درتنگدستی در گذشت.

در هندسهٔ وضع کارنو است که کمیتهای سودار برای اولین بار در هندسهٔ ترکیبی به‌طور اصولی به‌کار گرفته شده‌اند. به‌کمك کمیتهای سودار ، احکام یا رابطه‌های مجزای چندی را می‌توان درقالب یك حکم یا رابطهٔ کلی واحدی درآورد، واغلب می‌توان برهان واحدی‌را فرمولبندی‌کردکه درغیراین‌صورت نیاز به‌بررسی تعدادی حالات مختلف‌هست (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۶.۱۲). ازمفهوم کمیتهای سودار توسط اوگاستس فردیناند‌موبیوس[4] (۱۷۹۰–۱۸۶۸) در حساب گرانیگاهی[5] بـه سال ۱۸۲۷ استفادهٔ بیشتری به‌عمل آمد.

قضیهٔ منلائوس (نگاه‌کنید به‌بخش ۶–۵) مبنای رسالهٔ درباب نظریهٔ موربها نوشتهٔ کارنو است. دراینجا کارنو قضیهٔ منلائوس‌را به‌حالتی تعمیم می‌دهدکه درآن به‌جای‌قاطع موردبحث درقضیهٔ منلائوس، یك‌منحنی دلخواه درجهٔ n م گذاشته می‌شود. برای مثال، در حالت $n = 2$ داریم (نگاه‌کنید به‌شکل ۱۰۶): اگر اضلاع BC، CA، AB ازمثلث ABC یك مقطع مخروطی‌را به‌ترتیب درنقاط (حقیقی یا موهومی) A_1 و A_2، B_1 و B_2، C_1 و C_2 قطع‌کنند آنگاه

$$(AC_1)(AC_2)(BA_1)(BA_2)(CB_1)(CB_2) = (AB_1)(AB_2)(BC_1)(BC_2)(CA_1)(CA_2)$$

که‌درآن همهٔ پاره‌خطها، پاره‌خطهای جهت‌دارهستند. این قضیه را می‌توان باگذاشتن یك چندضلعی دلخواه به‌جای مثلث، تعمیم بیشتری داد.

---

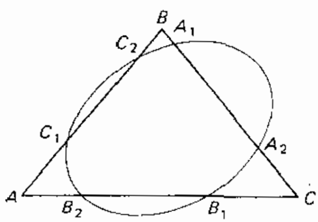
1. Géométrie de position 2. Essai sur la théorie des transversals
3. Madgeburg 4. Augustus Ferdinand Möbius
5. Der barycentische Calcul

لازارکارنو
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

کارنو همچنین حجم یك چهاروجهی را برحسب شش یال آن پیدا کرد، و فرمولی (شامل ۱۳۰ جمله) بهدست آورد که هریك از ده پارهخط واصل بین دونقطه از پنج نقطهٔ تصادفی درفضا را برحسب نه پارهخط دیگر بیان میکند.

کارنو پسری داشت بهنام هیپولیت[1]، که در سال ۱۸۴۸ وزیر تعلیمات عمومی شد، پسر دیگری به نام سعدی[2]* که فیزیکدان برجستهای شد، نوهای هم بهنام سعدی که پسر هیپولیت بود وچهارمین رئیسجمهور جمهوریسوم فرانسهشد، و نوهٔ دیگری بهنامآدلف که پسرهیپولیت بود وشیمیدان برجستهای شد.

مونژ وکارنو هردوانقلابیون دوآتشهای بودند، ولیکارنو بهطور قطع با صداقتتر وثابتقدمتراز مونژ بود. هردو بهاعدام لوئیشانزدهم رأی دادند، ولیکارنو، گرچه مایل



شکل ۱۰۶

1. Hippolyte 2. Sadi

* هیپولیت متذکرشده است که پدرش بهدلیل علاقهای که بهسعدی شیرازی‑شاعرنامی ایران‑ داشته، نام پسرخود را سعدی گذاشته است.‑م.

بود که به‌عنوان سررشته‌دار زیردست ناپلئون خدمت کند، تنها مقام تریبونی بود که باشهامت واعتقاد کافی برضد اعطای عنوان امپراطور به ناپلئون رأی داد، و به‌خاطراین موضع خود تبعید شد. برعکس مونژ، معبود خود را برده‌وار درهمهٔ احوال از زمانی که سرجوخه‌ای آرمانگرا وانقلابی بود، تا زمانی که امپراطور خودخواه ومستبدی شد، موردحمایت قرار داد، و مونژ بود که باطیب‌خاطر کارنفرت‌آور تعیین اقلامی از گنجینه‌های هنری راکه‌باید به‌عنوان غنایم‌جنگی از ایتالیا به‌پاریس‌آورده می‌شدند، پذیرفت.

۱۲-۱۰ دستگاه متری

اندازه‌گیری طول، مساحت، حجم، و وزن نقش مهمی درکاربردهای عملی ریاضیات‌دارد. در میان این واحدهای اندازه‌گیری، واحد طول جنبهٔ اساسی دارد، زیرا با داشتن یك واحد طول، می‌توان واحدی برای سایر کمیتها وضع‌کرد. یکی از دستاوردهای مهم قرن هجدهم ایجاد دستگاه متری بودکه به‌جای دستگاه اوزان و مقادیرکاملاً درهم وبرهم وغیر علمی دنیا، دستگاهی منظم، یکنواخت، علمی، دقیق، وساده گذاشته‌شود.

بسط دستگاه متری امروزی اولیــن کوشش برای دایرکردن یك دستگاه علمــی اندازه‌گیری نیست. در سال ۱۶۷۰، ریاضیدان فرانسوی و معاون اسقف کلیسای سنت‌پل درلیون، کشیش گابریل‌موتون[1]، یك دقیقه از محیط زمین را به عنوان واحد طول مطرح کرد، واین واحد را به‌طوراعشاری تقسیم وضرب‌کرد و به اضعاف ومضارب گوناگون آن اصطلاحهای مناسب‌لاتین اختصاص‌داد. تقریباً درهمان زمان سرکریستوفررن، درانگلستان، پیشنهادکردکه طول آونگی که هرنیم ثانیه یك بار درنوسان است، به‌عنوان واحد طول اختیار شود؛ این واحد تقریبی برای نصف طولی است‌که عموماً به زراع باستان (فاصلهٔ بین آرنج شخص تا نوك انگشت وسط ممتد او) تخصیص داده می‌شد. در سال ۱۶۷۱ منجم فرانسوی ژان‌پیکار[2]،و درسال ۱۶۷۳ فیزیکدان هلندی‌کریستیان‌هویگنس ازانتخاب طول آونگ یك ثانیه درسطح دریا درعرض ۴۵° جغرافیایی هواداری‌کردند؛ این واحد تنها شش میلی‌مترکوتاهتر ازمترامروزی درمی‌آمد. درسال ۱۷۴۷، لاکوندامین[3] آونگ یك ثانیه را در استوا مطرح‌کرد. درسال ۱۷۷۵، مسیه[4] طول‌آونگ یك ثانیه را درعرض ۴۵° جغرافیایی با دقت زیاد اندازه‌گرفت وبدون توفیق برای انتخاب شدن آن به عنوان واحد طول کوشید.

بحث دامنه‌دار ایجاد یك دستگاه نوین اندازه‌گیری موجب شد که در سال ۱۷۸۹ آکادمی علوم فرانسه کمیته‌ای را برای طرح برنامهٔ قابل قبولی منصوب نماید. سال بعد سرجان‌میلر[5] درمجلس عوام انگلیس، یك دستگاه اندازه‌گیری یکنواخت برای بریتانیای کبیر پیشنهادکرد. تقریباً درهمان زمان، تامس‌جفرسون[6] یك دستگاه یکنواخت برای ایالات

---

1. Abbé Gabriel Mouton 2. Jean Picard 3. La Condamine
4. Messier 5. Sir John Miller 6. Thomas Jefferson

متحده پیشنهاد وطول یك آونگ یك ثانیه‌ای درعرض جغرافیایی °۳۸ را، که میانگین عرض جغرافیایی ایالات متحده در زمان او بود، مطرح کرد.

کمیتهٔ آکادمی علوم فرانسه ضمن کارخود بر یك دستگاه اعشاری توافق نمود و دوشق را برای واحدطول این دستگاه بررسی کرد. یکی از آنها طول آونگ یك ثانیه بود. چون معادلهٔ آونگ $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ است ، طول استاندارد، یا متر، g/π^2 از آن حاصل می‌شود. از آنجاکه g هم با عرض جغرافیایی و هم ارتفاع از سطح دریا تغییرمی‌کند ، و با توجه به‌دقتی که لژاندر ودیگران نصف‌النهار زمینی را اندازه گرفته بودند، کمیته موافقت کرد که متر را یك‌ده‌میلیونیم فاصلهٔ نصف‌النهاری ازقطب شمال تااستوا انتخاب نماید. درسال ۱۷۹۳، بر اثر فشارهای سیاسی، آکادمی علوم تعطیل ولی کمیتهٔ اوزان و مقادیر ابقا شد. بعضی از اعضای آن مانند لاووازیه تصفیه شدند و عده‌ای دیگر به عضویت در آمدند که زمانی لاگرانژ، لاپلاس، لژاندر، و مونژ راشامل می‌شدند. پیش‌از ۱۷۹۹ کار کمیته به‌اتمام رسید و دستگاه متری فعلی به‌تحقق پیوست.

در ژوئن ۱۷۹۹ جمهوری فرانسه دستگاه متری اوزان ومقادیر را پذیرفت. امروزه این دستگاه درهمه‌جای دنیا، به‌جز درایالات متحده که آمادهٔ الحاق به‌آن‌است، پذیرفته شده است. البته دستگاه متری مدتهاست که درایالات متحده درمقاصد علمی مورداستفاده است.

به‌علت آشکار شدن وجود خطا در اندازه‌گیری ربع نصف‌النهاری ، متر استاندارد امروزی را به‌عنوان ۱,۶۵۰,۷۶۳.۷۳ برابر طول موج نور قرمز نارنجی ایزوتوپ کریپتون۸۶[1] که درخلأ اندازه گرفته شود، تعریف می‌کنند.

۱۱-۱۲ خلاصه

ما بررسی اجمالی خود از ریاضیات قرن هجدهم را با توجه به‌این نکته خاتمه می‌دهیم که این قرن در همان حال که شاهد پیشرفتهای قابل‌ملاحظه‌ای در زمینهٔ موضوعاتی مانند مثلثات، هندسهٔ‌تحلیلی، حسابان، نظریهٔ اعداد، نظریهٔ معادلات، احتمالات، معادلات دیفرانسیل، و مکانیك تحلیلی بود، شاهد به‌وجود آمدن برخی زمینه‌های جدید مانند علوم آمارگری ، حساب تغییرات، توابع از درجات بالا ، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ، هندسهٔ ترسیمی، وهندسه دیفرانسیل نیز بود. قسمت عمدهٔ تحقیقات ریاضی این قرن از مکانیك و نجوم نشأت والهام گرفته‌اند، ولی درتوجه دالامبر به‌مبانی سست آنالیز، در کار لامبرت دربارهٔ‌اصل‌توازی، در تلاش لاگرانژ برای دقیقتر کردن حسابان، و درافکارفلسفی کارنو، ما اشاراتی به‌آزادی قریب‌الوقوع هندسه وجبر، وتوجه عمیق به‌مبانی ریاضیات را، که در قرن نوزدهم به‌وقوع پیوست، می‌بینیم. بعلاوه، پیدایش ریاضیدانانی باتخصص در زمینه‌های محدود ، مانند مونژ در هندسه، آغاز شد . همچنین باید خاطرنشان کرد که در ۲۲ ژوئن ۱۷۹۹، بعد ازانقلاب فرانسه، جمهوری فرانسه سیستم متری اوزان ومقادیر را پذیرفت

---

1. krypton_86

پیشامد مهم دیگری که در قرن هجدهم به‌وقوع پیوست، ورود جدی زنان به‌پهنه‌های ریاضیات و علوم دقیقه بود. چنین پیشه‌هایی مورد بی‌مهری زنان و چنین فرصتهایی برای آنان عملاً ناموجود بود. در قرن هجدهم بود که ماریا گتانا آنیزی (۱۷۱۸-۱۷۹۹) و سوفی ژرمن[1] (۱۷۷۶-۱۸۳۱) برپهنهٔ ریاضیات تأثیر بخشیدند. قبلاً به ذکر ماریا آنیزی در بخش ۱۰-۳ پرداخته‌ایم. سوفی ژرمن، که در پاریس به‌دنیا آمد، ریاضیدانی نسبتاً تواناتر بود. گرچه، به‌علت زن بودن، از ثبت نام در اکول پلی تکنیك منع شده بود، یادداشتهای درسی اساتید زیادی از آن مدرسه را تهیه کرد و از طریق اظهارنظرهای کتبی که تحت نام مستعار م. لوبلان[2] به‌عمل می‌آورد، تحسین لاگرانژ را برانگیخت. وی بعدها مورد تعریف و تمجید گاوس قرار گرفت. همچنین در سال ۱۸۱۶، آکادمی فرانسه به خاطر مقاله‌ای در نظریهٔ ریاضی کشسانی جایزه‌ای به‌وی اعطا کرد. در ۱۸۳۱ وی مفهوم مفید **انحنای میانگین** (میانگین حسابی دو انحنای اصلی) را به‌عالم هندسهٔ دیفرانسیل رویه‌ها معرفی کرد.

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱.۱۲ اعداد برنولی

فرمولهای

$$۱+۲+۳+\cdots+(k-۱)=\frac{k^۲}{۲}-\frac{k}{۲},$$

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+(k-۱)^۲=\frac{k^۳}{۳}-\frac{k^۲}{۲}+\frac{k}{۶},$$

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+(k-۱)^۳=\frac{k^۴}{۴}-\frac{k^۳}{۲}+\frac{k^۲}{۴},$$

که مجموع

$$S_n(k)\equiv ۱^n+۲^n+۳^n+\cdots+(k-۱)^n$$

را به‌ازای $n=۱$، ۲، ۳ به صورت چندجمله‌ایهایی برحسب k بیان می‌کند، از زمانهای بسیار دور معلوم بوده‌اند. یاکوب برنولی به ضرایب $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$، ...، وقتی $S_n(k)$ به‌صورت یك چندجمله‌ای برحسب k به‌صورت زیر بیان می‌شود، علاقمند شد

$$S_n(k)=\frac{k^{n+۱}}{n+۱}-\frac{k^n}{۲}+B_۱C(n,۱)\frac{k^{n-۱}}{۲}-B_۲C(n,۳)\frac{k^{n-۳}}{۴}+\cdots,$$

1. Sophie Germain   2. M. Le Blanc

که در آن $C(n,r)=n(n-1)\ldots(n-r+1)/r!$. این ضرایب، که امروزه به‌عنوان **اعداد برنولی** شناخته می‌شوند، نقش مهمی در آنالیز دارند و دارای برخی خواص جالب حسابی‌اند.

(الف) اگر $n=2r+1$، می‌توان نشان داد که

$$B_1C(n,2)-B_2C(n,4)+B_3C(n,6)-\ldots+(-1)^{r-1}B_rC(n,2r)=r-(1/2).$$

با استفاده ازاین فرمول، B_1 تا B_5 را حساب کنید.

(ب) یك عدد اول مانند p را **منظم** گویند هرگاه‌آن عدد هیچیك ازصورتهای B_1، B_2،... را موقعی که این اعداد به شکل تحویل‌ناپذیر نوشته شوند، عاد نکند. در غیر این صورت p را **نامنظم** گویند. با دانستن اینکه

$$B_{16}=\frac{7709321041217}{510},$$

نشان دهید که ۳۷ نامنظم است.

در سال ۱۸۵۰، ا. کومر ثابت کرد که آخرین «قضیهٔ» فرما به‌ازای هر نمایی که یك عدد اول منظم باشد، درست است، وتنها اعداد اول نامنظم زیر ۱۰۰ عبارتند از ۳۷، ۵۹، و ۶۷.

(ج) ك. گ. گ. فون‌اشتاوت قضیهٔ مهم زیر را ثابت کرد:

$$B_r=G+(-1)^r(1/a+1/b+1/c+\ldots)$$

که در آن G عددی است صحیح و a، b، c، ... همهٔ اعداد اول مانند pاند به‌طوری که $2r/(p-1)$ یك عدد صحیح باشد. قضیهٔ اشتاوت را برای $B_1=1/30$ و $B_8=3617/510$ تحقیق کنید.

۲۰۱۲ فرمول دموآور

(الف) فرمول دموآور را ثابت کنید:

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx,$$

که در آن $i=\sqrt{-1}$ و n یك عدد صحیح مثبت است.

(ب) با استفاده از فرمول (الف)، $\cos 4x$ و $\sin 4x$ رابرحسب $\sin x$ و $\cos x$ بیان کنید.

(ج) با استفاده‌از فرمول‌دموآور، نشان‌دهید که $(-1-i)^{15}=-128+128\,i$.

(د) نشان دهید که $i^n=\cos(n\pi/2)+i\sin(n\pi/2)$.

(ه) با استفاده از فرمول دموآور، ریشهٔ هشتم ۱ را پیدا کنید.

۳۰۱۲ توزیعها

(الف) شش سکه به‌طور همزمان ۱۰۰۰ بار پرتاب می‌شوند. ازاین ۱۰۰۰ پرتاب ۹ مورد وجود دارد که در آن هیچ شیرظاهر نمی‌شود، ۹۹ مورد که در آن ۱ شیر ظاهر می‌شود، ۲۴۱ موردکه در آن۲ شیرظاهرمی‌شود، ۳۱۳ موردکه درآن ۳ شیرظاهرمی‌شود، ۲۳۳ موردکه درآن ۴ شیرظاهر می‌شود، ۹۵ موردکه درآن ۵ شیر ظاهر می‌شود، و ۱۰ مورد که در آن ۶ شیر ظاهر می‌شود. این‌توزیع فراوانی را با رسم یك منحنی فراوانی نمایش دهید.

(ب) منحنی فراوانی نرمال $y=10e^{-x^2}$ را رسم کنید.

(ج) میانگین حسابی مجموعهٔ شیر برپرتاب درآزمایش (الف) را محاسبه‌کنید.

(د) میانهٔ مجموعه‌ای از مقادیر عددی جملهٔ میانی است موقعی که مقادیر به طور صعودی یا نزولی به‌ترتیب بزرگی مرتب شوند. میانهٔ مجموعهٔ شیر برپرتاب درآزمایش (الف) چیست؟

(ه) اگر، درمجموعه‌ای ازمقادیر عددی، عددی بیشتراز سایرین تکرارشود،آن را مد مجموعه نامند. مدمجموعهٔ شیر برپرتاب درآزمایش (الف) چیست؟

(و) وضعیتی را درنظرگیرید که شخص میلیونری به‌جامعهٔ اجتماع کوچکی ازمردم کم درآمد می‌پیوندد. تأثیر این کار در درآمد میانگین، درآمد میانه، درآمد مدی جامعه چیست؟

(ز) یك بازرگان کفش بیشتر به میانگین حسابی اندازه‌های کفش مردم جامعه‌اش علاقمند است، به‌میانهٔ آن، یا به‌مدآن؟

(ح) دربارهٔ میانگین حسابی، میانه، ومد فراوانی توزیع نرمال چه می‌توان گفت؟

(ی) به‌کمك فرمول استرلینگ $1000!$ را تقریب کنید.

۴۰۱۲ کار صوری با سریها

(الف) بسط ماکلورن را برای $\sin z$، $\cos z$، و e^z به‌دست‌آورید.

(ب) نشان دهید که بسط ماکلورن $\cos z$ را می‌توان از راه مشتق‌گیری، جمله به جمله، بسط ماکلورن $\sin z$ به‌دست‌آورد.

(ج) به‌طورصوری، با استفاده ازبسط قسمت (الف)، نشان دهیدکه

$$\cos x+i\sin x=e^{ix}.$$

(د) با استفاده ازبسط ماکلورن $\sin z$، نشان دهیدکه

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)=1.$$

(ه) بااستفاده‌ازبسط تیلر $f(x)$ و $g(x)$ حول $x=a$ نشان‌دهید،وقتی

$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k)}(a)=\circ , g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(k)}(a)=\circ , g^{(k+1)}(a)\neq$
که

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(k+1)}(a)}{g^{(k+1)}(a)}\cdot$$

۵.۱۲ یك حدس و یك پارادوکس

(الف) اویلرحدس زدکه به‌ازای $n>۲$ حداقل n قوهٔ nم لازم است تا مجموعی حاصل آیدکه خودآن یك قوهٔ nم باشد. در سال ۱۹۶۶ ل. ج. لاندر[1] و ت. ر. پارکن[2]، با استفاده ازکامپیوترهای پرسرعت،کشف کردندکه

$$۲۷^۵+۸۴^۵+۱۱۰^۵+۱۳۳^۵=۱۴۴^۵.$$

در درستی این مثال نقض تحقیق کنید.

(ب) پارادوکس زیر را که موجب دردسر ریاضیدانان عصر اویلر بود، توضیح دهید: چون $(-x)^۲=(x)^۲$، داریم $\log(-x)^۲=\log(x)^۲$، وبنابراین $۲\log(-x)=۲\log(x)$ و ازآنجا $\log(-x)=\log(x)$.

۶.۱۲ اویلر و سریهای نامتناهی

(الف) اولدنبرگ[3]، در نامه‌ای به‌لایبنیتز در سال ۱۶۷۳، مجموع سری نامتناهی زیررا خواست

$$۱/۱^۲+۱/۲^۲+۱/۳^۲+۱/۴^۲+\cdots.$$

لایبنیتز نتوانست جواب را پیدا کند و در ۱۶۸۹ یاکوب برنولی اعتراف کردکه او هم قادر به یافتن جواب نیست. جزئیات روش صوری زیر را که توسط اویلر برای حل این مسئله به‌کار گرفته شد، کامل کنید.

با سری‌ماکلورن زیرشروع کنید

$$\sin z=z-z^۳/۳!+z^۵/۵!-z^۷/۷!+\cdots$$

بنابراین $\sin z=\circ$ را می‌توان (بعد از تقسیم بر z) به‌عنوان چند جمله‌ای نامتناهی

$$۱-z^۲/۳!+z^۴/۵!-z^۶/۷!+\cdots=\circ$$

یا، با قراردادن w به‌جای $z^۲$، به‌عنوان معادلهٔ

---

1. L.J. Lander 2. T.R. Parkin 3. Oldenburg

$$1-w/3!+w^2/5!-w^3/7!+\cdots=0$$

تلقی کرد، بنا بر نظریهٔ معادلات، مجموع معکوسهای ریشه‌های این معادله ضریب جملهٔ خطی با علامت منفی، یعنی ۱/۶ است. چون ریشه‌های چندجمله‌ای بر حسب z، π، 2π، 3π، ...، است، نتیجه می‌شود که ریشه‌های چند جمله‌ای بر حسب w عبارت‌اند از π^2، $(2\pi)^2$، $(3\pi)^2$، . . . . بنابراین

$$1/6=1/\pi^2+1/(2\pi)^2+1/(3\pi)^2+\cdots.$$

یا

$$\pi^2/6=1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots.$$

(ب) روش اویلر درقسمت (الف) را در مورد بسط ماکلورن $\cos z$ به‌کار برید تا مجموع زیر را پیدا کنید

$$\pi^2/8=1/1^2+1/3^2+1/5^2+\cdots.$$

(ج) با استفاده از (الف) و (ب)، به‌طور صوری نشان دهید که

$$\pi^2/12=1/1^2-1/2^2+1/3^2-1/4^2+\cdots$$

درکتاب مدخل خود مربوط به‌سال ۱۷۴۵، اویلر مجموع

$$1/1^n+1/2^n+1/3^n+\cdots.$$

را برای مقادیر زوج n از $n=2$ تا $n=26$ داد. دستیابی به حالتهایی که در آنها n فرد است هنوز هم مشکل است، وحتی معلوم نیست که مجموع معکوسهای مکعبهای اعداد صحیح مثبت مضرب گویایی از π^3 باشد. اویلر از طریق اعمال قواعدی که برای چندجمله‌ایهای متناهی معتبرند درمورد چندجمله‌ایهای نامتناهی (سریهای توانی) به‌نتایج زیادی رسید، که امروزه درست بودن آنها معلوم است.

۷۰۱۲ منحنیهای مداری‌شکل

یك منحنی **مداری شکل**، یا **منحنی با پهنای ثابت**، یك مرغانهٔ محدب مستوی است با این خاصیت که فاصلهٔ بین دومماس موازی برمنحنی ثابت است.

(الف) نشان دهید که **مثلث‌رولو**[1]، که توسط سه قوس مستدیر که مراکز آنها رئوس یك مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند و شعاع آنها برابر با ضلع مثلث است، تعریف می‌شود، یك منحنی مداری‌شکل است. (مته‌هایی براساس شکل مثلث رولو طرح شده‌اند که برای کندن سوراخهای مربع‌شکل به‌کارمی‌روند.)

(ب) نشان دهید که چگونه، با شروع از یك مثلث، می‌توان یك منحنی مداری شکل

---

1. Reauleaux

مرکب از ۶ قوس مستدیر ساخت.

(ج) با شروع از یک پنتاگرام محدب که قطرهایش باهم برابر باشند، یک منحنی مداری‌شکل مرکب از ۵ قوس مستدیر بسازید.

(د) نشان دهید که چگونه، با شروع از یک پنج‌ضلعی محدب ، می‌توان یک منحنی مداری‌شکل مرکب از ۱۰ قوس مستدیر ساخت.

(ه) یک منحنی مداری‌شکل بسازید که هیچ قوس مستدیر نداشته باشد.

(ز) نقطه‌ای مانند P بریک منحنی مداری شکل یک **نقطهٔ معمولی** نامیده می‌شود هرگاه منحنی درنقطهٔ P دارای یک‌مماس باچرخش پیوسته باشد.دوانتهای وتری با طول ماکزیموم یک منحنی مداری‌شکل **نقاط متقابل** منحنی نامیده می‌شوند.قضایای زیر را دربارهٔ منحنیهای مداری‌شکل ثابت کنید.(۱)هیچ‌قسمت‌از یک‌منحنی مداری‌شکل مستقیم نیست. (۲) اگر P_1 و P_2 دو نقطهٔ متقابل معمولی‌یک منحنی مداری‌شکل باشند، آنگاه P_1P_2 در P_1 و P_2 برمنحنی قائم است. (۳) اگر r_1 و r_2 شعاعهای‌انحنا در دونقطهٔ متقابل معمولی P_1 و P_2 از یک منحنی مداری شکل با پهنای ثابت d باشند ، آنگاه $r_1+r_2=d$. (۴) **قضیهٔ باربیه**[1]: محیط یک منحنی مداری‌شکل با پهنای‌ثابت d، برابر πd است.

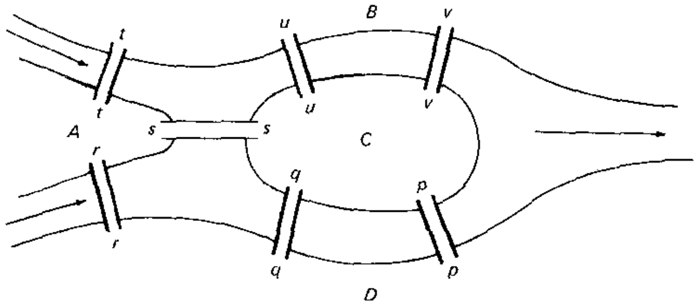
(ح) نشان دهید که اگر یک مثلث رولو حول یکی ازمحورهای تقارنش دوران داده شود،جسمی با پهنای ثابت به‌دست می‌آید. (دربارهٔ اجسام با پهنای ثابت کمتراز منحنی‌های با پهنای ثابت اطلاعاتی در دست است . گرچه برای قضیهٔ باربیه مستقیماً مشابهی وجود ندارد، مینکوفسکی[2] خاطرنشان کرده است که سایه‌های حاصل از تصویر قائم جسمی با پهنای ثابت، دوایری با محیط ثابت‌اند.)

۸۰۱۲ گرافهای یک‌پیمایه‌ای و چندپیمایه‌ای

درسال ۱۷۳۶ اویلر سؤالی‌راکه درآن‌زمان مورد بحث‌بود،پاسخ‌داد. سؤال به‌این‌مضمون بودکه‌آیا ممکن‌است درشهر کونیگسبرگ چنان گردش کرد که از هر پل شهر یکبار وفقط یکبارعبورکرد وبه نقطهٔ شروع بازگشت. این شهر نزدیک به مصب‌رود پرگل[3] واقع بود، هفت پل داشت، وبه‌طوری که درشکل ۱۰۷ نشان داده شده، شامل یک جزیره می‌شد. اویلر مسئله را به‌مسئلهٔ پیمودن گراف وابستهٔ شکل ۱۰۸، به‌نحوی که هرخط گراف یکبار وفقط یکبارطی شود، ونقطهٔ پیماینده به‌نقطهٔ شروع منتهی شود، تحویل‌کرد.

هنگام بررسی مسئلهٔ کلی ، تعاریف زیرمفیدند. یک **بند** نقطه‌ای از گراف است که خطوط ازآن منشعب می‌شوند. **شاخه** خطی ازگراف است که دوبند متوالی را به هم وصل می‌کند. **مرتبهٔ** یک بند تعداد شاخه‌هایی است که از آن منشعب می‌شوند. یک بند را **زوج** یا **فرد** نامند بسته به اینکه مرتبهٔ آن زوج یا فرد باشد . یک **مسیر** مرکب از تعدادی شاخه است که بتوان آنها را بی‌آنکه هیچ‌شاخه‌ای بیش ازیک‌بار پیموده شود، طی کرد. گرافی

1. Barbier 2. Minkowski 3. Pregel



شکل ۱۰۷

راکه بتوان طی یک‌مسیر طی کرد، **یک‌پیمایه** می‌نامند، درغیراین‌صورت آن را **چند پیمایه** می‌نامند. دربارهٔ این مفاهیم اویلر موفق به‌اثبات قضایای زیر شد:

۱. در هر گراف تعداد بندهای فرد زوج است.

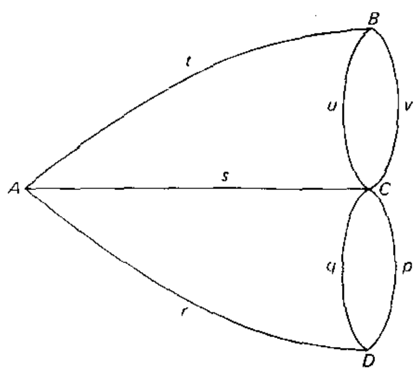
۲. یک‌گراف بدون بندهای فرد را می‌توان به‌طور یک پیمایه‌ای در امتداد یک‌مسیر تورفته‌که به‌نقطهٔ آغازش ختم می‌شود، پیمود.

۳. گرافی با دقیقاً دوبند فرد رامی‌توان به‌طوریک‌پیمایه‌ای باشروع ازیکی ازبندهای فرد وسپس رسیدن به‌دیگری پیمود.

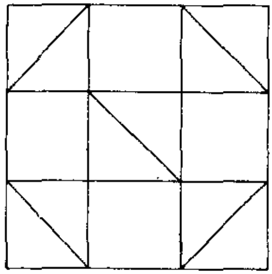
۴. گرافی با بیش از دوبند فرد، چندپیمایه‌ای است.

(الف) با استفاده ازقضایای‌اویلر، سؤال پل کونیگسبرگ راکه جوابش منفی‌است، پاسخ دهید.

(ب) نشان دهیدکه گراف شکل ۱۰۹ یک پیمایه‌ای است، درحالی‌که گراف‌شکل ۱۱۰ چندپیمایه‌ای است.



شکل ۱۰۸



شکل ۱۰۹

(ج) شکل ۱۱۱ خانه‌ای را با اطاقها و درهای‌آن به صورتی که مشخص شده‌اند، نشان می‌دهد. آیا ممکن است که به‌طورمتوالی ازهر دریك وفقط یك‌بارگذشت؟

(د) قضایای اویلر راکه دربالا بیان شده‌اند، ثابت‌کنید.

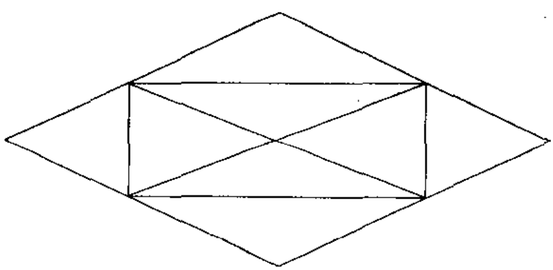
(ه) نتیجهٔ لیستینگ[1] راکه فرع قضیهٔ چهارم اویلر است، ثابت‌کنید: گرافی بادقیقاً $2n$ بند فرد را می‌توان طی n مسیر مجزا کاملاً پیمود. صحت این‌نتیجه را در مورد گراف شکل ۱۱۰ تحقیق کنید.

۹.۱۲ چند معادلهٔ دیفرانسیل

(الف) معادلهٔ دیفرانسیل

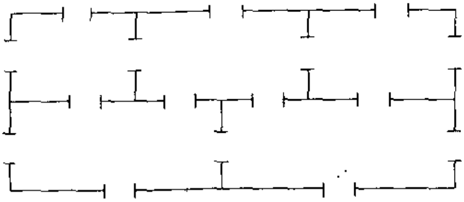
$$y^{n-1}(dy/dx)+a(x)y^n=f(x)$$

به معادلهٔ **برنولی** معروف است . نشان دهید که تبدیل $v=y^n$ معادلهٔ برنولـی را به یك



شکل ۱۱۰

1. Listing



شکل ۱۱۱

معادلهٔ دیفرانسیل خطی بدل می‌کند.

(ب) معادلهٔ دیفرانسیل

$$y=px+f(p),$$

که درآن $p=dy/dx$، به **معادلهٔ کلرو** معروف است. نشان دهیدکه جواب معادلهٔ کلرو

$$y=cx+f(c),$$

است.

(ج) معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_n y^{(0)}=f(x),$$

که درآن نماهای داخل پرانتز مرتبهٔ مشتق‌گیری‌را نشان‌می‌دهند، به **معادلهٔ اویلر** معروف است. نشان دهید که تغییر متغیر $x=e^t$ معادلهٔ اویلر را به یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌کند.

(د) معادلهٔ دیفرانسیل

$$dy/dx=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$$

به **معادلهٔ ریکاتی** معروف است. نشان دهیدکه اگر $v=f(x)$ یك‌جواب ویژهٔ معادله باشد، در این‌صورت تغییرمتغیر $y=v+1/z$ معادله را به یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی برحسب z تبدیل می‌کند.

۱۰.۱۲ توابع هذلولوی

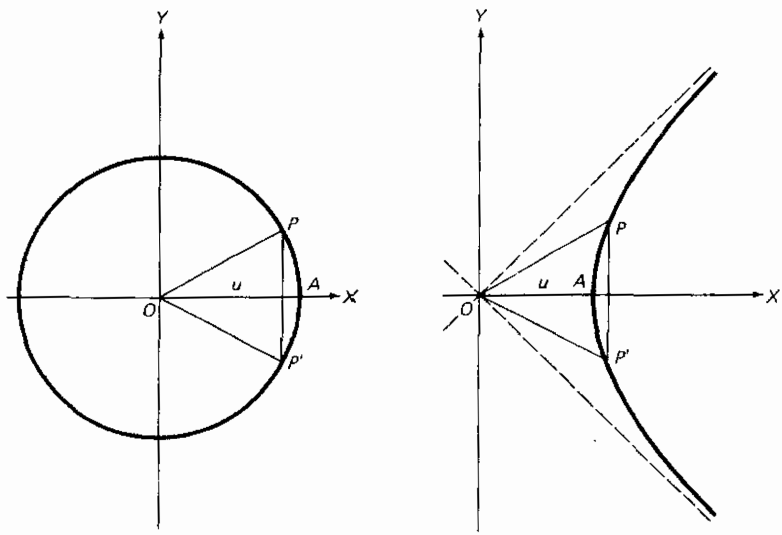
(الف) توابع **سینوس هذلولوی** و **کسینوس هذلولوی** را می‌توان به‌صورت

$$\sinh u=\frac{e^u-e^{-u}}{2},\qquad \cosh u=\frac{e^u+e^{-u}}{2},$$

تعریف کرد، و سپس تانژانت هذلولوی، کتانژانت هذلولوی، سکانت هذلولوی، و کوسکانت‌هذلولوی‌را به‌صورت $\tanh u = \sinh u/\cosh u$، $\coth u = ۱/\tanh u$، $\operatorname{sech} u = ۱/\cosh u$، $\operatorname{csch} u = ۱/\sinh u$ تعریف نمود. نشان دهیدکه

۱. $\cosh^۲ u - \sinh^۲ u = ۱$.
۲. $\tanh u = (e^u - e^{-u})/(e^u + e^{-u})$.
۳. $\coth^۲ u - \operatorname{csch}^۲ u = ۱$.
۴. $\tanh^۲ u + \operatorname{sech}^۲ u = ۱$.
۵. $\operatorname{csch}^۲ u - \operatorname{sech}^۲ u = \operatorname{csch}^۲ u \operatorname{sech}^۲ u$.
۶. $\sinh(u \pm v) = \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v$.
۷. $\cosh(u \pm v) = \cosh u \cosh v \pm \sinh u \sinh v$.
۸. $d(\cosh u)/du = \sinh u$, $d(\sinh u)/du = \cosh u$.

(ب) دایرهٔ واحد $x^۲ + y^۲ = ۱$ و یك هذلولی متساوی‌الساقین‌واحد $x^۲ - y^۲ = ۱$ را، به‌صورتی‌که درشکل ۱۱۲ تصویر شده‌اند، درنظر بگیرید. مساحت قطاعی $OPAP'$ را با u نمایش دهید. نشان دهیدکه، برای‌دایره‌داریم $x = \cos u$، $y = \sin u$، و،برای هذلولی، $x = \cosh u$، $y = \sinh u$، که در آن (x, y) مختصات P است.



شکل ۱۱۲

۱۱۰۱۲ لاگرانژ و هندسهٔ تحلیلی

لاگرانژ (اساس) فرمولهای

$$A=(۱/۲)\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix} \quad \text{و}\ V=(۱/۶)\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & z_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & z_۳ & ۱ \\ x_۴ & y_۴ & z_۴ & ۱ \end{vmatrix}$$

را برای مساحت A از مثلثی کــه رأسهای آن نقاط $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$، $(x_۳, y_۳)$ و حجم V از چهاروجهیی که رأسهای آن نقاط $(x_۱,y_۱,z_۱)$، $(x_۲,y_۲,z_۲)$، $(x_۳,y_۳,z_۳)$ هستند ، داد . وی همچنین فرمول زیر را برای فاصلـهٔ D ی نقطهٔ (p, q, r) تا صفحهٔ $ax+by+cz=d$ داد.

$$D=\frac{ap+bq+cr-d}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}.$$

(الف) فرمول مساحت مثلث را ثابت کنید.
(ب) فرمول فاصلهٔ یك نقطه ازصفحه را ثابت کنید.

۱۲۰۱۲ مسئلهٔ سوزن بوفون

مسئله‌ای که درسال ۱۷۷۷ توسط کنت دو بوفون مطرح، وحل، شد این است: فرض کنید یك سوزن همگن یکنواخت به‌طول l به‌تصادف بر روی یك صفحهٔ افقی که خطوط موازی به‌فاصلهٔ $a>l$ ازیکدیگر بر آن کشیده شده، پرتاب می‌شود. احتمال اینکــه سوزن یکی از خطوط را قطع کند، چیست؟

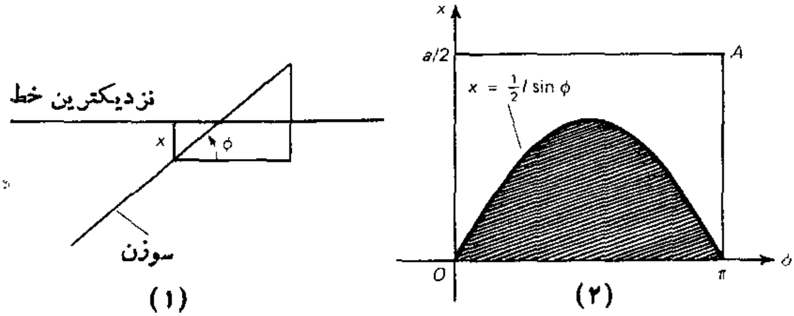
فرض می‌کنیم که دراینجا «به‌تصادف» بدان معنی است که افتادن مرکز سوزن برهر نقطهٔ صفحه به‌یك اندازه محتمل، وقرارگرفتن سوزن در هرجهت نیز به‌یك اندازه محتمـل باشد واین دومتغیرمستقل ازیکدیگر باشند. فاصلهٔ مرکز سوزن از نزدیکترین خط موازی را با x نشان دهید. فرض‌کنید که ϕ جهت سوزن را نسبت به‌جهت خطوط موازی نشان دهد.

(الف) با توجه به شکل ۱۱۳ (۱)، نشان دهید که سوزن یکی از خطوط را قطع می‌کند اگر وفقط اگر $x<(۱/۲)\,l\sin\phi$.

(ب) در صفحه‌ای با مختصات دکارتی قائم x و ϕ (نگاه کنید به شکل ۱۱۳(۲)) مستطیل OA راکه نقاط داخلی آن درنامساویهای

$$\circ<x<a/۲,\quad \circ<\phi<\pi$$

صدق می‌کنند، درنظر گیرید. به‌هرنقطه دراین مستطیل یك وفقط یك وضعیت (x) و جهت (ϕ) ازسوزن متناظراست؛ به‌هرنقطه در ناحیهٔ پردازخوردهٔ شکل ۱۱۳(۲) یك و فقط یك



شکل ۱۱۳

وضعیت (x) ویك جهت (ϕ) ازسوزن به‌طوری‌که سوزن یکی ازخطوط موازی را قطع کننده متناظر است. نشان دهید که احتمال مطلوب نسبت ناحیهٔ پرداز خورده به کل سطح مستطیل OA است.

(ج) حال نشان دهیدکه احتمال مطلوب با فرمول زیر داده می‌شود:

$$\phi=\frac{\frac{l}{۲}\int_{۰}^{\pi}\sin\phi\,d\phi}{\frac{\pi a}{۲}}=\frac{۲l}{\pi a}.$$

(د) لاپلاس، درکتاب نظریهٔ تحلیلی احتمالات‌خود مربوط به‌سال ۱۸۱۲، با اثبات نتیجهٔ زیر، نتیجهٔ بوفون را تعمیم داد: اگر دو مجموعه خطوط متعامد همفاصله داشته‌باشیم به طوری که فاصلهٔ خطوط یك مجموعه a و فاصلهٔ خطوط مجموعهٔ دیگر b باشد، در این صورت p احتمال اینکه سوزنی به‌طول $l<a,b$ که به‌طورتصادفی پرتاب شده بر روی یکی از خطوط بیفتد، چنین است

$$p=\frac{۲l(a+b)-l^{۲}}{\pi ab}.$$

نتیجهٔ بوفون را با فرض اینکه درنتیجهٔ لاپلاس $b\to\infty$، به‌دست‌آورید.

۱۳.۱۲ وتر تصادفی در یك دایره

این مطالعهٔ مسئله‌ای،مشکلی را که اغلب درتعیین اینکه در یك مسئلهٔ احتمال هندسی ، چه مجموعه‌ای ازحالات متساوی‌الاحتمال بیشتر موردنظراست، توضیح می‌دهد. این مسئله را درنظربگیرید: احتمال اینکه یك وتر تصادفی رسم شده دریك دایرهٔ مفروض طویلتراز یك

ضلع یك مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی باشد، چیست؟

(الف) نقطهٔ دلخواه A را برروی دایرهٔ مفروضی انتخاب و یك وترتصادفی را از A رسم کنید. با فرض اینکه همهٔ وترهای مار بر A متساوی‌الاحتمال باشند، نشان دهید که احتمال موردنظر ۱/۳ است.

(ب) جهت دلخواه d را انتخاب و یك وترتصادفی به‌موازات d رسم کنید. با فرض اینکه همهٔ وترهای موازی d متساوی‌الاحتمال هستند، نشان دهید که احتمال مطلوب ۱/۲ است.

(ج) نقطهٔ دلخواهی در داخل دایرهٔ مفروض رانقطهٔ وسط یك وتر تصادفی انتخاب و آن وتر را رسم کنید. با فرض اینکه همهٔ نقاط داخل دایرهٔ مفروض به عنوان نقاط وسط وترمتساوی‌الاحتمال باشند، نشان دهید که احتمال مطلوب ۱/۴ است.

۱۴۰۱۲ روش کمترین مربعات

به‌عنوان حالت ساده‌ای ازیك مسئلهٔ اساسی در روش کمترین مربعات، فرض کنید که مشاهدات منجربه $n>۲$ معادلهٔ خطی تقریبی زیرشده‌اند که دومتغیر x و y درآنها صدق می‌کنند.

$$a_i x+b_i y+c_i=۰,\ i=۱,۲,\dots,n.$$

دراین‌صورت بنابراستدلالهای مبتنی براحتمال، ثابت شده است که «بهترین» مقادیری که باید برای x و y اتخاذ شوند، مقادیری هستند که ازحل دومعادلهٔ زیر باهم، به‌دست می‌آیند

$$(\Sigma a_i^۲)x+(\Sigma a_i b_i)y+\Sigma a_i c_i=۰,$$
$$(\Sigma b_i a_i)x+(\Sigma b_i^۲)y+\Sigma b_i c_i=۰.$$

(الف) با استفاده از روش کمترین مربعات، «بهترین» مقادیر x و y را که در معادلات زیرصدق می‌کنند، پیداکنید.

$$x-y+۱=۰,$$
$$۳x-۲y-۲=۰,$$
$$۲x+۳y-۲=۰,$$
$$۲x-y=۰.$$

(ب) درتعیین‌ضریب c ی انبساط‌طولی میلهٔ فلزی‌معینی، طول‌میله در دماهای‌مختلف اندازه‌گرفته شده وجدول زیرحاصل شده‌است:

دما (درجهٔ سانتی‌گراد)	طول مشاهده شده (میلی‌متر)
۲۰	۱۰۰۰٫۲۲
۴۰	۱۰۰۰٫۶۵
۵۰	۱۰۰۰٫۹۰
۶۰	۱۰۰۱٫۰۵

با فرض اینکه $L_\circ$ معرف طول میله در ۰ درجهٔ سانتی‌گراد و L طول میله در دمای T باشد، داریم

$$L_\circ+Tc=L\cdot$$

با استفاده از روش کمترین مربعات، «بهترین» مقدار c را که از اندازه‌گیریهای داده شده حاصل می‌شود، پیدا کنید.

(ج) نشان دهید که اگر درفرمولهایی که درابتدای این‌مطالعهٔ مسئله‌ای معرفی کردیم، n را برابر ۲ اختیار کنیم، دراین‌صورت «بهترین» مقادیر x و y ازحل دستگاه‌معادلات زیربه‌دست می‌آیند.

$$a_1x+b_1y+c_1=\circ,\qquad a_2x+b_2y+c_2=\circ.$$

۱۵.۱۲ کمی هندسهٔ مونژ

از دانشجویان علاقمند می‌خواهیم که قضایای زیر را، چه به روش ترکیبی، چه به روش تحلیلی، ثابت کنند.

(الف) مجموع مربعات تصاویرقائم یك مساحت مستوی برسه صفحهٔ دوبه‌دو متعامد برابر با مربع مساحت مستوی است.

(ب) قضیهٔ مونژ دربارهٔ چهاروجهیها، به‌صورتی که دربخش ۱۲ــ۹ بیان شده‌است.

(ج) **قضیهٔ مانهایم**[1]. دریك چهاروجهی چهار صفحهٔ ماربر هرارتفاع و محل تلاقی سه‌ارتفاع وجه متناظر بداین ارتفاع، درنقطهٔ مونژ چهاروجهی همرس‌اند.

(د) نقطهٔ مونژ یك چهاروجهی، ازهرارتفاع چهاروجهی وعمود وارد بروجه‌متناظر ازنقطهٔ تلاقی ارتفاعهای‌آن به‌یك فاصله است.

(ه) مرکز کره‌ای که توسط اوساط میانه‌های یك چهاروجهی معین می‌شود بر خط اویلر چهاروجهی واقع است. (خطی که مرکز کرهٔ محیطی، مرکز هندسی، ونقطهٔ مونژ را دربردارد، به **خط اویلر** چهاروجهی معروف شده است.)

(و) نقطهٔ مونژ و مرکز هندسی یك چهار وجهی برهم منطبق‌اند اگر و فقط اگر

1. Mannheim

چهاروجهی متساوی‌الساقین باشد. (یك چهاروجهی **متساوی‌الساقین** است وقتی وفقط وقتی که هریال چهاروجهی با یال مقابلش برابر باشد.)

(ز) پنج خطی که هر یك از پنج نقطهٔ مفروض‌واقع بریك‌کره را به نقطهٔ مونژ چهار-وجهی حاصل ازچهارنقطهٔ دیگر وصل می‌کنند، همرس‌اند.

۱۶۰۱۲ کمیتهای جهت‌دار

کارنو استفادهٔ اصولی ازکمیتهای جهت‌دار را درهندسهٔ وضع خود به سال ۱۸۰۳ وارد کرد. تحت این مفهوم برهرخط، جهتی را، فرضاً، به‌عنوان جهت مثبت و جهت دیگر را به‌عنوان جهت‌منفی‌انتخاب‌می‌کنیم. دراین‌صورت پاره‌خطی‌مانند AB رابراین‌خط مثبت یا منفی تلقی می‌کنیم بسته به‌اینکه جهت‌آن روی‌خط ازنقطهٔ A به‌نقطهٔ B جهت مثبت یا منفی روی خط باشد. دراین صورت با استفاده از کمیتهای جهت‌دار داریم $AB=-BA$ و $AB+BA=0$. قضایای زیر راکه درآن همهٔ پاره‌خطها جهت‌دارهستند، ثابت‌کنید.

(الف) به‌ازای هرسه نقطهٔ همخط مانند A، B، C، $AB+BC+CA=0$.

(ب) فرض کنید O نقطهٔ دلخواهی بر محمل پاره‌خط AB باشد. در این صورت $AB=OB-OA$.

(ج) قضیهٔ اویلر (۱۷۴۷). اگر A، B، C، D چهار نقطهٔ همخط دلخواه باشند، آنگاه $(AD)(BC)+(BD)(CA)+(CD)(AB)=0$.

(د) اگر A ، B ، P همخط باشند و M نقطهٔ وسط AB باشد، آنگاه $PM=(PA+PB)/2$.

(ه) اگر O ، A ، B ، C همخط باشند و $OA+OB+OC=0$، و اگر P نقطهٔ دلخواهی برخط AB باشد، آنگاه $PA+PB+PC=3PO$.

(و) اگر برخطی‌داشته‌باشیم $OA+OB+OC=0$ و $O'A'+O'B'+O'C'=0$، آنگاه $AA'+BB'+CC'=3OO'$.

(ز) اگر A، B، C همخط باشند و P، Q، R به‌ترتیب‌اوساط BC، CA، AB باشند، آنگاه اوساط CR و PQ برهم منطبق‌اند.

(ح) اگر دوخط مار بر نقطه‌ای مانند P دایره‌ای را به‌ترتیب در نقاط A و B و در نقاط C و D قطع کنند، آنگاه $(PA)(PB)=(PC)(PD)$.

۱۷۰۱۲ قضیهٔ کارنو

(الف) قضیهٔ‌کارنو را (نگاه کنید به‌بخش ۱۲—۹) برای مثلثی‌که توسط یك منحنی جبری درجهٔ nم قطع‌شده، بیان کنید.

(ب) تعمیم قضیهٔ کارنو راکه درآن به‌جای مثلث یك چندضلعی دلخواه گذاشته شده باشد، بیان کنید.

(ج) برنقطه‌ای مانند O، غیرواقع بریك منحنی‌درجهٔ n اُم مفروض، دوخط درجهات معین رسم شده‌اندکه این‌منحنی را به‌ترتیب در نقاط P_1، P_2، …، P_n و Q_1، Q_2، …، Q_n قطع می‌کنند. با استفاده ازیك دستگاه ذکارتی مایل‌که محورهای آن با دو جهت مفروض موازی باشند، نشان دهیدکه نسبت

$$(OP_1)(OP_2)\cdots(OP_n)/(OQ_1)(OQ_2)\cdots(OQ_n)$$

از وضعیت نقطهٔ O مستقل است.

(د) با استفاده از (ج)، تعمیم قضیهٔ کارنو درقسمت (ب) را ثابت‌کنید.

عنوان مقاله

۱/۱۲ خانواده‌های مشهور ریاضی.
۲/۱۲ کتیبه‌های پیدا شده برگورهای ریاضیدانان.
۳/۱۲ لوپیتال وقاعدهٔ او.
۴/۱۲ ریاضیدان نابینای کیمبریج.
۵/۱۲ اسقف‌جورج بارکلی (۱۶۸۵–۱۷۵۳).
۶/۱۲ کالین ماکلورن (۱۶۹۸–۱۷۴۶).
۷/۱۲ پیرلوئی موردودمو پرتویی (۱۶۹۸–۱۷۵۹).
۸/۱۲ ماریا گئتانا آنیزی (۱۷۱۸–۱۷۹۹).
۹/۱۲ لطیفه‌ای‌مربوط به‌اویلر-دیدرو.
۱۰/۱۲ دیاگرامهای اویلر دربرابر دیاگرامهای ون.
۱۱/۱۲ اویلر به‌عنوان نویسندهٔ کتابهای مهم درسی.
۱۲/۱۲ برجسته‌ترین ریاضیدان قرن هجدهم که بود؟
۱۳/۱۲ ناپلئون بوناپارت و ریاضیات.
۱۴/۱۲ داستان تعمید یافتن دالامبر.
۱۵/۱۲ آکادمیهای سن‌پترزبورگ و برلین.
۱۶/۱۲ تأثیر لژاندر برتدریس هندسه در آمریکا.
۱۷/۱۲ تامس‌کارلایل و ریاضیات.
۱۸/۱۲ سه ریاضیدان برجستهٔ فرانسوی‌که ازانقلاب حمایت‌کردند.
۱۹/۱۲ اوزان و مقادیر پیش از دستگاه متری.
۲۰/۱۲ اشتباه تأثرآور پیرمیسن.
۲۱/۱۲ تاریخچهٔ علامت دلار.

کتابنامه

Ball, W. W. R., *Mathematical Recreations and Essays*. Revised by H. S. M. Coxeter. New York: Macmillian, 1939.

BELL, E. T., *Men of Mathematics. New York: Simon and Schuster, 1937.*

BOYER, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1949.

BURLINGAME, ANNE E., *Condorcet, the Torch Bearer of the French Revolution*. Boston: *Stratford, 1930.*

CADWELL, J. N., *Topics in Recreational Mathematics*. New York: Cambridge University Press, 1966.

COOLIDGE, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.

DICKSON, L. E., *History of the Theory of Numbers*. 3 vols. New York: Chelsea, 1952.

DUGAS, RENÉ, *A History of Mechanics*. New York: Central Books, 1955.

EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*. Vol. 2. Boston: Allyn and Bacon, 1965.

GILLESPIE, C. C., *Lazare Carnot, Savant*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1971.

GRIMSLEY, RONALD, *Jean d'Alembert* (1717–83). Oxford: The Clarendon Press, 1963.

HOFFMAN, J. E., *Classical Mathematics*. New York: Philosophical Library, 1959.

LAGRANGE, J. L., *Lectures on Elementary Mathematics*. 2nd ed. Translated by T. J. McCormack. Chicago: Open Court, 1901.

LAPLACE, P. S., *The System of the World*. 2 vols. Translated by H. H. Harte. London: Longmans-Green, 1830.

———, *A Philosophical Essay on Probabilities*. New York: John Wiley, 1902.

LEGENDRE, A. M., *Elements of Geometry and Trigonometry*. Translated by Davis Brewster, revised by Charles Davies. New York: A. S. Barnes, 1851.

MACLAURIN, COLIN, *A Treatise of Fluxions*. 2 vols. Edinburgh, 1742.

MAISTROV, L. E., *Probability Theory, A Historical Sketch*. Translated by Samuel Kotz. New York: Academic, 1974.

MUIR, JANE, *Of Men and Numbers, the Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd, 1961.

NORTHROP, E. P., *Riddles in Mathematics, A Book of Paradoxes*. New York: D. Van Nostrand, 1944.

ORE, OYSTEIN, *Number Theory and its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.

ROEVER, W. H., *The Mongean Method of Descriptive Geometry*. New York: Macmillian, 1933.

TAYLOR, E. G. R., *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England*. New York: Cambridge University Press, 1954.

———, *The Mathematical Practitioners of Hanoverian England*. New York: Cambridge University Press, 1966.

TODHUNTER, ISAAC, *A History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*. London, 1861.

———, *History of the Mathematical Theory of Attraction and the Figure of the Earth*. London, 1873.

———, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. New York: Chelsea,, 1949.

TURNBULL, H. W., *Bi-centenary of the Death of Colin Maclaurin*. Aberdeen: Aberdeen University Press, 1951.

———, *The Great Mathematicians. New York: New York University Press, 1961.*

TWEEDIE, CHARLES, *James Stirling. Sketch of His Life and Works*. Oxford: The Clarendon Press, 1922.

WATSON, S. J., *Carnot*. London: Bodley Head, 1954.

۱۳

اوایل قرن نوزدهم و آزادشدن هندسه وجبر

۱۳-۱ امیر ریاضیات

قرون هجدهم و نوزدهم در زیر سیطرهٔ دهای ریاضی پرصلابت کارل فریدریش گاوس، همچون گسترهٔ خلیج رودس در زیرپای تندیس عظیم آپولون، قرار دارد. وی را عموماً بزرگترین ریاضیدان قرن نوزدهم و همراه با ارشمیدس و نیوتن، یکی از بزرگترین ریاضیدانان همهٔ اعصار برشمرده‌اند.

کارل در برونسویك آلمان، درسال ۱۷۷۷ به‌دنیا آمد. پدرش کارگر زحمت‌کشی بودکه نسبت به‌تحصیلات رسمی نظرات سرسختی‌نشان می‌دادوآن‌را بی‌ارزش‌می‌دانست. ولی، مادرش، گرچه خود تحصیلاتی نداشت، همواره مشوق تحصیلات فرزند خود بود و درسراسر عمر به‌دستاوردهای او مباهات می‌کرد.

کارل یکی ازکودکان اعجوبه‌ای بودکه گهگاه درپهنهٔ گیتی ظاهرمی‌شوند. دربارهٔ اواین داستان باورنکردنی راگفته‌اندکه در سه سالگی یك خطای محاسبه‌ای را در دستك پدرش کشف کرده است. وحکایتی که مکرراً گفته می‌شوداینکه در ده سالگی‌اش، درمدرسهٔ ابتدایی، معلمش برای مشغول‌کردن‌کلاس، به‌شاگردان دستورداد‌که حاصل‌جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورند. تقریباً بلافاصله،کارل تختهٔ خود را،که طرف نوشته شدهٔآن روبه‌پائین‌گرفته شده بود، برروی میزمعلم بر آشفته، قرار داد. وقتی همهٔ تخته‌ها سرانجام

تحویل داده شدند: معلم، حیرت‌زده، دریافت که تنها کارل جواب صحیح را، که ۵۰۵۰ است ، بدون محاسبات لازم داده است . کارل به‌طور ذهنی مجموع تصاعد حسابی ۱۰۰+۹۹+۹۸+ . . . +۳+۲+۱ را با توجه به‌اینکه ۱۰۱ = ۱+۱۰۰ ، ۱۰۱ = ۲+۹۹، ۱۰۱ = ۳+۹۸ ، و الی آخر، برای ۵۰ زوج اعداد نظیر بالا، پیدا کرده‌بود که بدین‌ترتیب جواب ۱۰۱ × ۵۰، یا ۵۰۵۰ است. گاوس بعدها بشوخی می‌گفت که قبل از آنکه زبان باز کند قادر به‌حساب کردن بوده است.

رشد پیشرس گاوس مورد عنایت دوك برونسویك قرار گرفت و او، به‌عنوان مشوقی مهربان وفهیم، پسرك را درسن ۱۵ سالگی به‌کالج برونسویك ، و بعداً در سن ۱۸ سالگی به‌دانشگاه گوتینگن فرستاد. دودل از اینکه به‌فقه‌اللغه بپردازد یا ریاضیدان شود (بااینکه قبلا روش کمترین مربعات را یك‌دهه پیش از آنکه لژاندر مستقلا به‌انتشار آن دست بزند، ابداع کرده‌بود.) وی تصمیم خودرا به‌طورقاطع در ۳۰ مارس ۱۷۹۶، هنگامی که هنوز یك ماه تا نوزدهمین سالروز تولدش فاصله داشت، گرفت. حادثه‌ای که منجر به‌این تصمیم شد، موفقیتهای اعجاب‌آوری بودکه درساختن چندضلعیهای منتظم به‌روش اقلیدس به‌دست آورده‌بود وبخصوص کشف این مطلب که هفده ضلعی منتظم را می‌توان به‌چنان روشی ترسیم کرد. قبلاً گزارش این کاررا در بخش ۵-۶ داده‌ایم.

درست‌درهمان روزکه گاوس کشف خود را راجع به‌چندضلعیهای منتظم به‌عمل آورد، یادداشتهای مشهور روزانهٔ ریاضی خودرا شروع کرد، و رازکشف بسیاری از بزرگترین کشفیات خودرا به‌صورت رمزبه‌این دفتر سپرد. چون گاوس، مانندنیوتن درانتشارآثارش کندی وکراهت داشت، این دفتریادداشت، که تاسال ۱۸۹۸ به‌دست نیامد، اغلب‌مباحثات مربوط به‌تقدم دراکتشاف را فرونشاند. این دفترشامل ۱۴۶ مدخل کوتاه است، که‌آخرین آن به‌تاریخ ۹ ژوئیهٔ سال ۱۸۱۴ می‌باشد. به‌عنوان مثالی ازماهیت رمزی مداخل‌این‌دفتر یادداشت مدخل مربوط به‌دهم ژوئیهٔ سال ۱۷۹۶ را درنظربگیرید که به‌این‌صورت است

کارل فریدریش گاوس
(کتابخانهٔ کنگره)

$$\text{EΥΡΗΚΑ!} \qquad \text{num} = \Delta + \Delta + \Delta,$$

وکشف برهانی ازاین حقیقت راکه هرعدد صحیح مثبت مجموع سه‌عددمثلثی است،نشان می‌دهد. بخش‌عمدهٔ رموز مداخل دفتر به‌جز در دو موردکشف شده‌اند. مدخل مورخ ۱۹ مارس ۱۷۹۷، نشان می‌دهدکه‌گاوس قبل‌از آن موعد تناوب مضاعف برخی توابع بیضوی راکشف‌کرده بوده (درآن موقع هنوز۲۰سالش نشده بود)، ومدخل متأخری نشان‌می‌دهد که وی تناوب مضاعف را درحالت‌کلی‌تشخیص‌داده‌است. تنهاهمین یك‌کشف،درصورتی که‌گاوس آن را منتشر می‌کرد، کافی برای به‌شهرت رسانیدن او در ریاضیات می‌شد. اما گاوس هرگزآن را منتشر نکرد!

در رسالهٔ دکترایش‌که در دانشگاه هلمشتات[1]ودرسن‌بیست سالگی‌نوشته شده‌است، گاوس اولین برهان کاملاً رضایتبخش قضیهٔ اساسی‌جبر (که یك معادلهٔ چند جمله‌ای با ضرایب مختلط و از درجهٔ $n>0$ حداقل یك ریشهٔ مختلط دارد) را ارائه داد . تلاشهای بیحاصلی برای اثبات این قضیه ازسوی نیوتن، اویلر، دالامبر، ولاگرانژ به‌عمل‌آمده بود.

ایدهٔ برهان گاوس قرار دادن $x+iy$ به جای z در یك معادلهٔ چند جمله‌ای کلی $f(z)=0$ بود. از جداکردن قسمتهای حقیقی و انگاری معادلهٔ حاصل، دو معادلهٔ حقیقی $g(x,y)=0$ و $h(x,y)=0$ بر حسب متغیرهای حقیقی x و y به‌دست می‌آید. گاوس نشان دادکه نمودارهای دکارتی $g(x,y)=0$ و $h(x,y)=0$ همواره دست‌کم یك‌نقطهٔ برخوردحقیقی‌مانند (a,b) دارند. نتیجه می‌شودکه $f(z)=0$ دارای ریشهٔ مختلط $a+ib$ است. برهان، متضمن ملاحظات هندسی است. در تلاش برای یافتن برهانی‌کاملاً جبری، تقریباً بیست سال‌بعد، درسال ۱۸۱۶،گاوس دو برهان جدید، و بعداً درسال ۱۸۵۰ برهان چهارمی را منتشرکرد.

بزرگترین اثر منتشر شدهٔ گاوس تحقیقات حسابی[2] اوست، اثری‌که درنظریهٔ نوین اعداد دارای اهمیت اساسی است. یافته‌های‌گاوس در مورد ساختمان چندضلعیهای منتظم دراین اثر ظاهر می‌شود. نماد روشن و آسان برای همنهشتی(نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۲.۱۳) و اولین برهان قانون زیبای تقابل مربعی نیز در همین‌جا آمده است. قانون تقابل مربعی، در قالب نماد لژاندر که در پایان بخش ۱۲ــ۸ تعریف شد ، بیان می‌کند که اگر $p=2P+1$ و $q=2Q+1$ اعداد اول نابرابری باشند، آنگاه

$$(p|q)(q|p)=(-1)^{PQ}$$

گاوس‌سهم‌ارزنده‌ای درنجوم، زمینسنجی، والکتریسیته داشت. درسال ۱۸۰۱ وی، به‌روش‌جدید وبااطلاعات ارصادی‌ناقص، مدار سیارك‌سرس[3] راکه درآن زمان به‌تازگی کشف شده بود، ودرسال بعد مدار سیارك پالاس را محاسبه‌کرد. درسال ۱۸۰۷ وی‌استاد ریاضیات وسرپرست رصدخانهٔ گوتینگن گردید، مقامی‌که تازمان مرگش‌حفظ کرد.درسال ۱۸۲۱ وی مثلث‌بندی شهرهانوور را انجام داد، یك قوس‌نصف‌النهاری رااندازه‌گرفت،

1. Helmstädt 2. Disquisitiones arithmeticae 3. Ceres

و هلیوتروپ[1] (یا هلیوگراف [نورنگار]) را اختراع کرد. درسال ۱۸۳۱ وی کار مشترك خود با همکارش ویلهلم‌وبر[2] (۱۸۰۴-۱۸۹۱) را درزمینهٔ تحقیقات اساسی دربارهٔ الکتریسیته ومغناطیس آغاز کرد، ودرسال ۱۸۳۳ این دو دانشمند تلگراف الکترومغناطیسی را اختراع کردند.

درسال ۱۸۱۲، درمقاله‌ای دربارهٔ سری فوق هندسی، اولین تحقیق اصولی خودرا دربارهٔ همگرایی‌سریها به‌عمل آورد. شاهکار گاوس دربارهٔ نظریهٔ سطوح، تحقیقات کلی دربارهٔ رویه‌های منحنی[3]، درسال ۱۸۲۷ منتشرشد، ومطالعهٔ هندسهٔ ذاتی سطوح درفضا را فتح‌باب کرد(نگاه کنیدبه بخش۱۴ــ۶). تقدم اودر کشف هندسهٔ‌نااقلیدسی، در بخش۱۳ــ۶ مورد بحث قرارخواهدگرفت.

این گفتهٔ گاوس که «ریاضیات ملکهٔ علوم، ونظریهٔ‌اعداد ملکهٔ ریاضیات است» معروف است. گاوس‌را «یك غول‌ریاضی که ازجایگاه رفیعش به‌یك‌نظاره، ستاره ومغاك رادراحاطه داشت» توصیف کرده‌اند. درنوشته‌های علمی‌اش، گاوس کمال گرا بود. بادعوی اینکه کلیسا، کلیسا نمی‌شود مگراینکه آخرین قطعهٔ داربستش برداشته شود، اوسعی‌می‌کرد که با زدودن هرگونه اثر از تجزیه و تحلیلی که او را به‌نتایجش رسانیده است، همهٔ آثارش را کامل، مجمل، صیقل یافته، ومتقاعدکننده عرضه نماید. ازاین‌رو وی به‌عنوان مهرخود درختی را که‌تنها چند میوه داشت، وبر آن شعار: پائوکا سد ماتورا[4](کم، ولی رسیده) نقش شده‌بود، برگزید. گاوس به‌عنوان شعار دیگرش ابیات زیر ازشاه‌لیررا انتخاب کرد:

ای طبیعت، تو الههٔ منی ودر خدمت به‌قوانین تو
کمر همت بسته‌ام.

بدین‌ترتیب گاوس معتقد بودکه ریاضیات باید، برای الهام‌گرفتن، جهان واقعی را لمس نماید. به‌گفته ووردزوورث[5]، «دانشها بیشتر ازپرداختن‌به‌پیرامون خود به‌دست می‌آیند، نه ازسیر درجهان خیال واندیشه».

گاوس درخانه‌اش درصدخانهٔ گوتینگن درسال ۱۸۵۵ درگذشت، و بلافاصله بعد ازآن، پادشاه هانوور دستور دادکه مدال یادبودی به‌افتخار او تهیه شود. این مدال سی‌وهفت میلی‌متری را درسال ۱۸۷۷ مجسمه‌ساز و مدال‌ساز مشهور، فریدریش برمر از اهالی هانوورکامل کرد. براین مدال جملهٔ زیر منقوش شده است:

جرج پنجم، پادشاه هانوور
به‌امیر ریاضیات[6]

ازآن به‌بعد، گاوس به «امیرریاضیات» معروف شده‌است.

---

1. heliotrope 2. Wilhelm Weber
3. Disquisitiones generales circa superficies curvas
4. Pauca sed matura 5. Wordsworth
6. George V. rex Hannoverge Mathematicorum Principi

۱۳-۲ فوریه و پواسون

وقتی با به‌قرن نوزدهم می گذاریم، شمار ریاضیدانان توانا وخلاق کثرت فراوان می‌یابد، وما مجبوریم که تنها معدودی از درخشانترین ستاره‌های آسمان خیره کنندهٔ ریاضیات‌را برای بحث بر گزینیم. دوتا ازاین ستارگان، که اگر ازقدر اول نباشند بی تردید ازقدر دوم‌اند، ژان باپتیست ژوزف فوریه[1] و سیمون دنی پواسون[2] هستند. این دو ، که معاصر نزدیك بودند، هر دو در فرانسه متولدشدند، هردو در زمینهٔ ریاضیات‌کاربردی‌کار کردند، وهردو درمدرسهٔ پلی‌تکنیك سمت استادی داشتند.

فوریه درسال ۱۷۶۸ دراوسر[3] متولد شد و در سال ۱۸۳۰ در پاریس درگذشت. وی که پسر یك خیاط بود و در هشت‌سالگی یتیم شده بود، درمدرسهٔ نظامیی که توسط بندیکتینها[4] اداره می‌شد، تعلیم دید. وسپس‌درآنجا مدرس ریاضیات شد . وی به‌پا گرفتن انقلاب فرانسه‌کمك کرد و درقبال آن‌یك کرسی درمدرسهٔ پلی‌تکنیك به‌او داده شد. او از این سمت استعفا داد تابتواند، همراه بامونژ، ناپلئون‌را درلشگرکشی مصر همراهی‌نماید. درسال ۱۷۹۸ به‌فرمانداری مصرسفلی منصوب شد. بعداز پیروزیهای بریتانیا وتسلیم‌فرانسه درسال ۱۸۰۱ ، فوریه به‌فرانسه بازگشت و به‌فرمانداری گرنوبل[5] گماشته شد. در زمان اقامتش درگرنوبل بودکه تحقیقات خودرا در زمینهٔ حرارت آغازکرد.

در ۱۸۰۷، فوریه مقاله‌ای درمقابل آکادمی علوم فرانسه عرضه‌کرد که آغازگرفصلی جدید وبسیار پرثمر درتاریخ ریاضیات بود. موضوع این‌مقاله مسئلهٔ عملی جریان حرارت درمیله‌ها، ورقه‌ها، واجسام فلزی بود. در جریان عرضهٔ این‌مقاله، فوریه این ادعای‌تکان‌دهنده را به‌عمل‌آوردکه هرتابع‌را، که دربازهٔ متناهی بسته‌ای توسط منحنی دلخواهی رسم شده ، می‌توان به‌مجموع دوتابع سینوسی وکسینوسی تجزیه‌کرد . به‌طور صریحتر، وی مدعی‌شدکه هر تابع‌را، صرفنظر ازآنچه هراندازه با بی‌قاعدگی دربازهٔ $(-\pi,\pi)$ تعریف شده‌باشد، می‌توان دراین‌بازه با

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

نمایش‌داد که، درآن a و b اعدادحقیقی‌مناسبی‌هستند.این‌سری به‌ **سری مثلثاتی** معروف‌است و برای‌ریاضیدانان آن‌عصر تازگی‌نداشت.در واقع‌نشان داده‌شده‌بودکه‌تعدادی‌تابع‌کم‌و بیش خوش‌رفتار قابل نمایش توسط چنان سریهایی هستند. اما فوریه مدعی شدکه هرتابعی را که دربازهٔ $(-\pi,\pi)$ تعریف شده، می‌توان بدین‌گونه‌نمایش داد. دانشمندان آکادمی درصحت

---

1. Jean Baptiste Joseph Fourier 2. Siméon Denis Poisson 3. Auxerre

۴. بندیکتینها یا بندیکتیان (Benedictines) ، فرقهٔ راهبان کاتولیك رومی که توسط قدیس بندیکتوس درمونته‌کاسینو تأسیس‌گردید. بندیکتیان برخلاف راهبان اولیه به‌زندگی جامعه‌وار اهمیت می‌دهند ودیرهای‌آنان مانند خانه‌های مسیحیان‌است و رؤسای‌آنها حکم پدررا دارند. درقرون وسطی برای حفظ فضل ودانش کوشش کردند.ـــم.

5. Grenoble

ادعای فوریه تردید زیادی داشتند، و این مقاله که توسط لاگرانژ، لاپلاس، ولژاندر مورد داوری قرار گرفت، رد شد. مع‌هذا برای ترغیب فوریه به‌بسط دقیقتر نظرات خود، آکادمی فرانسه مسئلهٔ انتشار گرما را موضوع جایزهٔ بزرگی که باید در ۱۸۱۲ اعطا می‌شد، قرارداد. فوریه مقالهٔ تجدید نظرشده‌ای را در ۱۸۱۱ تسلیم کرد که توسط گروهی که ازجمله، شامل سه‌داور پیشین می‌شد، مورد داوری قرار گرفت و برندهٔ جایزه‌شد، گرچه به‌علت فقدان‌دقت مورد انتقاد واقع شد و درنتیجه چاپ آن در یادداشتهای[1] آکادمی توصیه نشد.

رنجیده ازاین موضوع، فوریه به‌تحقیقات خود در زمینهٔ حرارت‌ادامه داد و درسال ۱۸۲۲، بعد ازکوچیدن به‌پاریس در ۱۸۱۶، یکی‌از آثار بزرگ کلاسیك ریاضیات، نظریهٔ تحلیلی حرارت[2] را منتشر کرد. دوسال بعدازچاپ‌این‌اثر بزرگ، فوریه دبیرآکادمی فرانسه شد، و دراین سمت، قدرت‌آن را یافت که مقالهٔ سال ۱۸۱۱ خودرا درشکل‌اصلی آن در یادداشتهای آکادمی به‌چاپ رساند.

گرچه نشان داده شده است که ادعای فوریه دراین خصوص که هر تابع را می‌توان به‌وسیلهٔ یك‌سری مثلثاتی (یا **سری‌فوریه** که امروزه عموماً مورداطلاق‌است) نشان داد، کاملاً نامعقول است، دستهٔ توابعی که این‌گونه قابل‌نمایش‌اند، بسیار وسیع است. سریهای‌فوریه ارزش‌زیادخودرا در زمینه‌های علمی‌نظیر آکوستیك، اپتیك، الکترودینامیك، ترمودینامیك، وموضوعات دیگر به‌ثبوت رسانیده‌اند و درآنالیز هارمونیك، مسائل تیرها و پلها، و حل معادلات دیفرانسیل نقشی‌اساسی دارند. درواقع، سری‌فوریه انگیزهٔ روش جدید درموضوع فیزیك‌ریاضی‌است که متضمن‌انتگرالگیری‌معادلات دیفرانسیل‌جزئی باقیدشرایط مرزی‌است. دربخش‌۱۵-۳ نقش‌مهمی‌را که سری فوریه در تکامل مفهوم تابع‌بازی‌کرده، خواهیم دید.

در اثری که پس‌از مرگ او، درسال ۱۸۳۱ ویرایش ومنتشر شد، ما، دربین مطالب دست اول دیگر، به‌کارفوریه دربارهٔ وضعیت ریشه‌های یك‌معادلهٔ چندجمله‌ای (که امروزه

ژوزف فوریه
(مجموعهٔ دیویداسمیث)

---

1. Mémoires 2. Théorie analytique de la chaleur

در کتابهای درسی راجع به نظریهٔ معادلات بررسی می‌شوند) برمی‌خوریم. این موضوع ازسال ۱۷۸۹ به‌بعد علاقهٔ اورا کراراً به‌خود جلب کرده بود. معاصر فوریه، سعدی‌کارنو (۱۷۹۶–۱۸۳۲)، پسرهندسه‌دان برجسته‌ای که در بخش ۱۲–۹ مورد بحث بود، نیز به نظریهٔ ریاضی‌حرارت، که نظریه نوین‌ترمودینامیك ازآن‌شروع می‌شود، علاقه نشان‌می‌داد.

لردکلوین[1] (ویلیام‌تامسن[2]، ۱۸۲۴–۱۹۰۷) مسدعی بودکه خط مشی‌او درفیزیك‌ریاضی، کلاً از اثر فوریه دربارهٔ حرارت متأثر بوده است، وکلرك‌ماکسول[3] (۱۸۳۱–۱۸۷۹) رسالهٔ فوریه را «یك‌منظومه عظیم‌ریاضی» نامیده است.

داستان‌جالبی‌دربارهٔ فوریه وعلاقهٔ او به‌حرارت گفته شده است. ظاهراً ازمشاهداتش درمصر، وشایدکارش در زمینهٔ حرارت، متقاعد شده‌بودکه‌گرمای صحرا‌کمال مطلوب‌برای تندرستی است. بدین لحاظ خودرا درچندین‌لایه پارچه می‌پیچید و در اطاقهایی‌که به‌طور غیرقابل تحملی گرم بودند، زندگی می‌کرد. برخی‌گفته‌اندکه وسواس ذهنی‌اش در بارهٔ حرارت، مرگ او را براثربیماری قلبی، درحالی‌که ازگرما پخته بود، درسن شصت‌وسه‌سالگی جلوانداخت.

جمله‌ای از فوریه‌که شاید بیشترازهمه نقل می‌شود (و دراثر اولیه‌اش دربارهٔ نظریهٔ ریاضی‌حرارت دیده می‌شود) این‌است‌که: «مطالعهٔ‌ژرف طبیعت، پربارترین‌منبع‌اکتشافات ریاضی است.»

پواسون درسال۱۷۸۱ درپیتیویه[4] به‌دنیا آمد ودرسال ۱۸۴۰ درپاریس درگذشت. وی زیرنظر پدرش، تابینی‌که بعد ازبازنشستگی‌شغل‌اجرایی‌کوچکی در دهکده‌اش به‌دست آورده، و بعد از وقوع انقلاب فرانسه ادارهٔ همان محل را عهده‌دار شده‌بود، تعلیم دید. بستگان پواسون جوان می‌خواستند او را، برخلاف خواسته‌اش، وادار به‌تحصیل درپزشکی کنند. آموزش‌او را یکی‌ازعموهایش به‌عهده گرفت وکار او بانیشترزدن بدرگه‌های‌برگهای یك‌کلم شروع شد. وقتی در این‌کار مهارت پیداکرد به‌وی جواز درمان‌آبله داده شد. اما تقریباً دراولین موردی‌که وی این‌کار را رأساً انجام‌داد، بیمار مورد مداوایش ظرف چند ساعت درگذشت. گرچه‌پزشکان به‌اواطمینان خاطردادندکه«این حادثه‌بسیار معمولی‌است»، وی با خود عهدکردکه‌دیگرگرد این حرفه نگردد.

بعد ازآنکه از روی بیعلاقگی‌تحصیل طب‌را آغازکرد، برای مطالعهٔ ریاضیات‌وارد مدرسهٔ‌پلی‌تکنیك‌شدواستعداداو لاگرانژ و لاپلاس‌راتحت تأثیرقرارداد،وهمین که‌تحصیلاتش به‌اتمام رسید، به‌سمت مدرسی‌درمدرسهٔ پلی‌تکنیك انتخاب‌شد. مابقی زندگی اودرسمتهای اداری و استادی گذشت. وی‌که تاحدی سوسیالیست بود، تا سال ۱۸۱۵ جمهوریخواه ثابت‌قدمی باقی ماند، و دراین سال به‌سلطنت‌طلبان پیوست.

آثارمنتشرشدهٔ ریاضی پواسون متعدد و شمارهٔ آنها بین ۳۰۰ و۴۰۰ بوده است. رسالات عمدهٔ او عبارت‌اند از اثر دوجلدی رسالهٔ مکانیك[5]، چاپ ۱۸۱۱ و ۱۸۳۳،

---

1. Lord Kelvin   2. William Thomson   3. Clerk Maxwell
4. Pithiviers   5. Traité de mécanique

سیمون پواسون
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

نظریهٔ نوین عمل مویین[1] به‌سال ۱۸۳۱، نظریه ریاضی حرارت[2] به‌سال ۱۸۳۵، وتحقیقات دریاب احتمال داوریها[3] به‌سال ۱۸۳۷. درمقالات خود وی به‌بررسی موضوعاتی از قبیل نظریهٔ ریاضی الکتریسیته و مغناطیس، نجوم فیزیکی، ربایش بیضویها، انتگرالهای معین، سریها، و نظریهٔ‌کشسانی پرداخته است. دانشجویان باقلابهای پواسون (در معادلات دیفرانسیل)، ثابت پواسون (درالکتریسیته) نسبت‌پواسون (درکشسانی)، انتگرال پواسون و معادلهٔ پواسون (درنظریهٔ‌پتانسیل)، و توزیع پواسون (درنظریهٔ‌احتمالات) آشنایی دارند.

نظیر مورد فوریه، داستان جالبی پواسون را به‌یکی از علایق حرفه‌ای‌اش پیوند می‌دهد. وقتی بچه بود وی را تحت مراقبت یك‌پرستار قرار دادند. یك روز، وقتی پدرش به‌دیدن او آمد، پرستار بیرون‌رفته‌بود و او را از رکاب شلوارش به‌میخی‌در دیوار آویزان کرده بود ــ تااورا، به‌گفتهٔ پرستار، ازآلودگی وکثافت‌کف‌اطاق محافظت‌نماید. پواسون گفته است که‌کوششهای ورزشی وی موقعی که بدین‌طریق آویزان بوده، موجب شده‌است که به‌جلو وعقب تاب بخورد، و بدین طریق بوده است‌که وی از همان اوایل با آونگ، که مطالعهٔ آن قسمت عمدهٔ زندگی‌آتی او را اشغال کرد، آشنا شده است.

پواسون خاطر نشان‌کرده است که: «زندگی تنها برای دوچیزخوب است، کشف ریاضیات وتدریس ریاضیات.» او درهردوپیشه به‌کمال رسید.

۱۳-۳ کوشی

تدقیق‌آنالیز درقرن نوزدهم را لاگرانژ وگاوس آغازکردند. این‌کار توسط ریاضیدان

---

1. Théorie nouvelle de l'action capillaire
2. *Théorie mathématique de la chaleur*
3. Recherches sur la probabilité des jugements

بزرگ‌فرانسوی، اوگوستین- لوئی کوشی[1]، برجسته‌ترین آنالیزدان نیمهٔ اول قرن نوزدهم وسعت وقوت بیشتری یافت.

کوشی در سال ۱۷۸۹ در پاریس متولد شد و تعلیمات ابتدایی را از پدر خود فراگرفت. بعداً در مدرسهٔ سانترال پانتئون[2]، درمطالعات کلاسیك باستان به‌مدارج عالی رسید. درسال ۱۸۰۵ وی‌وارد مدرسهٔ‌پلی‌تکنیك‌شد وتحسین‌لاگرانژ و لاپلاس‌را برانگیخت. دوسال بعد درمدرسهٔ راه و ساختمان[3] پاریس نام‌نویسی‌کرد تاخودرا برای مهندسی درراه وساختمان آماده سازد. دراثر ترغیب لاگرانژ ولاپلاس، تصمیم‌گرفت‌که از مهندسی راه و ساختمان به‌نفع‌علوم‌مجرد دست‌بکشد، و یك سمت تدریس در مدرسهٔ پلی‌تکنیك راپذیرد.

کوشی‌هم‌درزمینهٔ ریاضیات مجرد وهم‌درریاضیات‌کاربسته‌بسیارزیاد و به‌غایت‌مطلب نوشته است. واحتمالاً می‌توان اورا ازلحاظ‌حجم بازدهی بعد از اویلرقرارداد*. مجموعهٔ آثار او، علاوه برچندین جلدکتاب، شامل ۷۸۹ مقاله است‌که برخی از آنها آثار بسیار جامعی هستند، و ۲۴ مجلد خشتی را پرمی‌کنند. این اثر از نظرکیفیت ناهمگون است. در نتیجه‌کوشی (درست برخلاف‌گاوس) به‌علت پرنویسی‌وتصنیف عجولانه موردانتقاد قرار گرفته است. داستان جالبی دررابطه باپرنویسی شگفت‌آورکوشی گفته شده است. درسال ۱۸۳۵ آکادمی علوم،انتشارمجلهٔ گزارشها[4] را شروع‌کرد. کوشی‌چنان به‌سرعت مقاله‌تحویل این مجله می‌دادکه آکادمی ازهزینه‌های روبه‌افزایش چاپ دچار نگرانی‌شد، ولذا قانونی را،که هنوزهم به‌قوت خودباقی‌است، تصویب‌کردکه‌همهٔ مقاله‌های چاپ شده‌را به‌حداکثر

اوگوستین - لوئی‌کوشی
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

---

1. Augustin – Louis Cauchy
2. École Centrale du Panthéon
3. École des Ponts et Chaussées

* دومین نویسندهٔ کثیرالتألیف درریاضیات یاکوشی ویا آرثر کیلی (Arthur Cayley) است، وشاید برای تعیین این که کدامیك افتخار این عنوان را دارند به‌شمارش‌صفحات‌آثار نشرشدهٔ آنان نیاز باشد.

4. Comptes Rendus

چهار صفحه محدود می‌کرد. کوشی می‌بایست برای مقالات بلندش، که بعضی از آنها متجاوز از ۱۰۰ صفحه بود، درجستجوی مجاری دیگری در آید.

کارهای پرشمار کوشی در ریاضیات پیشرفته شامل تحقیقاتی درهمگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی، نظریهٔ توابع حقیقی و مختلط، معادلات دیفرانسیل، دترمینانها، احتمالات، و فیزیك ریاضی است. دانشجویان درس حسابان در به‌اصطلاح آزمون ریشهٔ کوشی و آزمون نسبت کوشی برای همگرایی یا واگرایی یك سری با جملات مثبت، و در حاصلضرب کوشی دوسری مفروض به‌نام کوشی برمی‌خورند. حتی در اولین درس نظریهٔ توابع مختلط، به نامساوی کوشی، فرمول انتگرال کوشی، و معادلات دیفرانسیل کوشی ـ ریمان برمی‌خوریم.

قسمت عمدهٔ مباحث حسابان امروزی دانشگاه؛ نظیر مفاهیم اساسی حد و پیوستگی، نتیجهٔ کار کوشی است. کوشی مشتق $y=f(x)$ نسبت به x را به‌صورت حد خارج‌قسمت تفاضل

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

وقتی $\Delta x \to 0$، تعریف کرد. گرچه وی به‌خوبی ازسهولت عملیاتی دیفرانسیلها آگاه بود، برای آنها نقش درجهٔ دومی قائل شد. اگر dx کمیتی متناهی باشد، وی dy تابع $y=f(x)$ را صرفاً به‌صورت $f'(x)\,dx$ تعریف کرد. درحالی که درطول قرن هجدهم، انتگرالگیری را عموماً معکوس عمل مشتق‌گیری می‌دانستند. کوشی ترجیح می‌داد که انتگرال معین را به‌عنوان حد مجموعی ازمجموعه‌ای نامتناهیاً افزایش‌یابنده ازاجزاء بسیار کوچکی که به‌صفر میل می‌کنند تعریف نماید، بسیار نظیر کاری که امروزه انجام می‌شود. رابطهٔ بین انتگرال و تابع اولیه بعداً به‌کمك قضیهٔ مقدار میانگین برقرار می‌شود.

سهم کوشی درنظریهٔ دترمینانها، که بایك مقالهٔ طویل ۸۴ صفحه‌ای در سال ۱۸۱۲ آغاز می‌شود، اورا به‌عنوان پربارترین نویسنده دراین زمینه متشخص می‌کند. کوشی در مقالهٔ ۱۸۱۲ خود، اولین برهان این قضیهٔ مهم و مفید راکه اگر A و B هر دوماتریسهای $n\times n$ باشند، آنگاه $|AB|=|A||B|$، می‌دهد. ضمناً کوشی بودکه، در ۱۸۴۰، کلمهٔ «مشخصه» را با **معادلهٔ مشخصهٔ** ماتریس A نامیدن معادلهٔ $|A-\lambda I|=0$، وارد نظریهٔ ماتریسها کرد.

آثار کوشی نشان‌دهندهٔ توجه فراوان او به‌دقت است، و همین است که این آثار الهامبخش دیگر ریاضیدانان درطرد اعمال صوری کورکورانه و براهین شهودی ازآنالیز بوده‌اند.

کوشی از هواداران دوآتشهٔ بوربونها[1] بود و پس از انقلاب سال ۱۸۳۰، به‌اجبار مقام استادی مدرسهٔ پلی‌تکنیك را رها کرد و به مدت هجده‌سال ازکلیهٔ کارهای دولتی برکنار ماند. بخشی ازاین دوران را درتبعید درتورن و پراگ گذراند، و بخشی را به‌تدریس در برخی ازمدارس وابسته به‌کلیسا درپاریس سپری کرد. در سال ۱۸۴۸ اجازهٔ بازگشت

---

1. Bourbons

به‌مقام استادی درمدرسهٔ پلی تکنیك به‌اوداده‌شد بی آنکه مجبور به‌ادای سو گند وفاداری نسبت به‌حکومت جدید باشد. درمذهب فردی متعصب بود ومذاهب دیگر را تحمل نمی کرد. قسمت عمدهٔ زندگی خود را صرف در تلاش برای درآوردن دیگران به کیش خاص خودکرد. در سراسرعمرش کوشنده‌ای خستگی ناپذیر بود، وجای تأسف است که دچارخودبینی وتنگ‌نظری بود و اغلب کوششهای شایستهٔ جوانترها را به‌هیچ می گرفت. با این حال، از سوی دیگر، باید خاطرنشان کردکه درسال ۱۸۴۳ کوشی دفاع باشکوهی از آزادی وجدان و اندیشه‌را، درقالب یك نامهٔ سرگشاده، منتشر کرد. این نامه حکومت‌را به‌احمقانه بودن اختناق علمی آگاه‌کــرد، و وقتی لوئی‌فیلیپ[1] ازسلطنت خلع شد، یکی از اولین فرامین حکومت موقت بعد از او، لغو ادای سوگند وفاداری مورد نفرت همگان بود.

کوشی در ۲۳ مه‌سال ۱۸۵۷، در ۶۸ سالگی، به‌ناگهان درگذشت. وی برای استراحت ومعالجهٔ یك ناراحتی ریوی به‌ییلاق رفته‌بود، که ناگهان دچار تب مهلکی شد. درست قبل از مرگش وی بــا اسقف اعظم پاریس مشغول صحبت بود. آخرین سخنان او ، خطاب به سراسقف، این بود: «انسانها می‌میرند، اما کرده‌های آنان می‌مانند.»

۱۳-۴ آبل و گالوا

طبیعی است که، بنا به‌بعضی دلایل، برخی ازمردان تاریخ ریاضیات را دوبه‌دو به‌هم‌وابسته کنند. این امردربارهٔ هاریوت و اوترد (دو جبردان انگلیسی همعصر)، والیس و برو (دو تالی بلافصل آیزك نیوتن درزمینهٔ حسابان)، تیلر وماکلورن (دو ریاضیدان انگلیسی همعصر که عمدتاً به‌خاطرسهمشان در بسط سریهای نامتناهی معروف‌اند)، مونژ وکارنو (دو هندسه‌دان فرانسوی همعصر)، وفوریه وپواسون (دومحقق همعصر درفیزیك ریاضی) صادق است. دو تن دیگر از این قبیل نیلس هنریك آبل و اواریست گالوا هستند. این دو، گرچه معاصرهم بودند، دراینجا به‌خاطر ملیت یکسان یا به‌علت علقه‌های ریاضی‌مشابه به‌هم مرتبط نشده‌اند، بلکه به‌این‌دلیل که هرکدام، مانند شهاب ثاقبی‌در آسمان ریاضیات، به‌سرعت درخشیدند و سپس به‌طور ناگهانی و رقت‌انگیز دریك مرگ زودرس به‌خاموشی گراییدند. مع‌هذا از خود مطالب ارزنده‌ای باقی گذاشتند تا ریاضیدانان آتی برآنها کارکنند. آبل در بیست‌و شش‌سالگی‌دراثر بیماری‌سل وسوءتغذیه درگذشت، و گالوا در دوئل احمقانه‌ای‌در بیست‌و یك سالگی از جهان رفت ، هیچیك ازآنها در طول زندگیشان به‌خاطر نبوغی که داشتند، به‌نحوشایسته مورد قدردانی قرارنگرفتند.

آبل، متولدسال ۱۸۰۲ درفیندو[2] درنروژ، پسریك کشیش‌ده‌بود. وقتی‌در کریستیانیا[3] دانشجو بود، به‌نظرش آمدکه چگونگی حل جبری یك معادلهٔ درجهٔ پنجم کلی را کشف کرده است، ولی به‌زودی طی یك مقالهٔ منتشره به‌سال ۱۸۲۴ نظرخودرا اصلاح کرد. دراین‌مقالهٔ اولیه، آبل امتناع حل‌یك معادلهٔ درجهٔ‌پنجم کلی‌را به‌کمك رادیکالها ثابت کرد و بدین‌ترتیب

---

1. Louis Philippe   2. Findö   3. Christiania

نیلس هنریك آبل
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

سرانجام به مسئلهٔ دشواری کـه ریاضیدانان را از زمان بومبلی تا ویت (نگاه کنید به بخش ۸ ــ ۸) دچار گیجی کرده بود، پایان بخشید. درنتیجهٔ این مقاله، آبل مقرری کوچکی که به‌او امکان سفر به آلمان، ایتالیا، و فرانسه را می‌داد، دریافت کرد. طی این سفرها وی تعدادی مقاله در زمینه‌های مختلف ریاضیات، مثلاً در باب همگـرایی سریهای نامتناهی، دربارهٔ به‌اصطلاح انتگرالهای آبلی، ودربارهٔ توابع بیضوی نوشت.

تحقیقات آبل دربارهٔ توابع بیضوی به‌رقابت دوستانه ومهیجی باژاکوبی[1] انجامید. لژاندر پیر، که‌کارهای پیشقدمانه‌ای دربارهٔ توابع بیضوی انجام داده‌بود، عمیقاً تحت‌تأثیر اکتشافات آبل قرار گرفت. خوشبختانه آبل محملی برای‌درج مقالاتش درمجلهٔ‌جدیدالتأسیس مجلهٔ ریاضیات محض وکار بسته[2] (که عموماً به‌مجلهٔ کرله[3] معروف است) به‌دست آورد، در واقع اولین مجلد این مجله (۱۸۲۶) شامل دست کم پنج مقاله از آبل بود، و درجلد دوم (۱۸۲۷) کار آبل که موجب پیدایش نظریهٔ توابع متناوب مضاعف گردید، ظاهرشد.

هـر دانشجوی درس آنـالیز بامعادلهٔ انتگرالی آبل و قضیهٔ آبل دربارهٔ مجموع انتگرالهای توابع جبری که به‌توابع آبلی منجرمی‌شوند، مواجه می‌شود. در کار سریهای نامتناهی آزمون همگرایی آبل و قضیهٔ آبل دربارهٔ سریهای توانی را داریم. درجبر مجرد گروههای جابه‌جایی‌راداریم که امروزه گروههای آبلی نامیده می‌شوند.

آبل که در سرتاسر عمرش دچار فقر و فاقه بود و از ناراحتی ریوی رنج می‌برد، نتوانست شغل معلمی به‌دست آورد. وی در سال ۱۸۲۹ به‌نحو اسفباری در فرولاند[4] در نروژ درگذشت. دو روز پس از مرگش، نامه‌ای با تأخیر تحویل شدکه درآن کار از کار گذشته، یك سمت تدریس دردانشگاه برلین به‌آبل پیشنهاد شده بود.

---

1. Jacobi   2. Journal für die reine und angewandte Mathematik
3. Crelle   4. Froland

گرچه آبل در زمان حیات مورد اعتنای حکومت کشورش قرار نگرفت، درحال حاضر تصویر او روی تمبرهای پستی* کم بها دیده می‌شود. اما ریاضیدانان، به‌روش معمول خود، بناهای یادبود بسیار دیرپاتری برای آبل بنا کرده‌اند، زیرا امروزه نام آبل در قضایا و نظریه‌های فراوانی جاودانی شده‌است. ارمیت در بارهٔ آبل گفته است که، «از او برای ریاضیدانان چیزی باقی‌مانده است که آنها را پانصد سال مشغول می‌کند.» دوست نزدیك آبل، ماتیاس کیل‌هاو، به‌فکر برپاکردن بنای یادبود سنتی‌تری، درمحل آرامگاه ابدی او افتاد. سیاحانی که به‌زیارت کلیسای فرولاند می‌روند، می‌توانند بنای یادبودی را که کیل‌هاو برای دوستش ساخته مشاهده کنند.

وقتی از او رازپیشرفت سریعش به‌صفوف اول ریاضیدانان را پرسیدند، آبل جواب داد، «باخواندن آثار استادان، و نه‌شاگردان آنها.»

زندگی اواریست گالوا حتی کوتاهتر وتأثرانگیزتر از زندگی آبل بود. وی که به‌سال ۱۸۱۱ درپاریس به‌دنیا آمد، پسرشهردارشهرکوچکی بود واستعداد فوق‌العادهٔ ریاضی وی کمی بعد از پانزدهمین سالروز تولدش بروزکرد. وی دوبار سعی کرد که وارد مدرسهٔ پلی‌تکنیك شود، ولی درهردوبار ازدادن پذیرش به‌او به‌دلیل‌عدم توانایی وی در پاسخگویی به‌سؤالات رسمی ممتحنین، که ازدرك نبوغ او کاملاً عاجز مانده بودند، امتناع شد. سپس ضربهٔ دیگری براو واردشد؛ پدرش که حس می‌کرد ازسوی روحانیون مورد تعقیب است، دست به‌خودکشی زد. گالوا با پشتکار خود سرانجام در سال ۱۸۲۹ وارد اکول‌نرمال [دارالمعلمین] شدتاخود راآمادهٔ‌تدریس‌نماید، ولی، به‌دلیل‌حس آزادیخواهی، به آشوبهای انقلاب سال ۱۸۳۰ کشیده واز این مدرسه اخراج شد و چندین ماه را در زندان گذراند. مدت‌کوتاهی بعد از آزادی در سال ۱۸۳۲، وقتی هنوز ۲۱ سالش نشده بود، به‌دام یك دوئل باطپانچه برسر یك ماجرای عشقی کشانده شد و به‌قتل رسید.

گالوا برکتب درسی عصر خود، به‌سادگی خواندن کتابهای داستان تسلط پیداکرد، کار را باخواندن مقاله‌های لژاندر، ژاکوبی، وآبل ادامه داد، وسپس به‌آفرینش ریاضیات

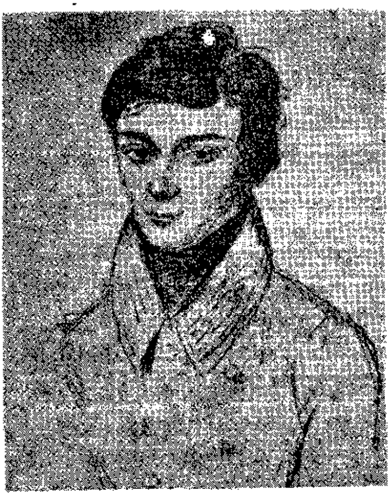
---

* ریاضیدانان دیگری که تصاویرشان در تمبرهای پستی چاپ شده عبارت‌اند از: ارشمیدس، ارسطو، فورکوش‌بویوئی، یانوش‌بویوئی، بوسکوویچ (Boscovich)، براهه، بوفون، ل.ن.م. کارنو، ن.ل.س. کارنو، چانگ هونگ (Ch'ang Hong)، چئون‌چی (Ch'unh Chih)، شاپلیژین (Chaplygin)، کپرنیك، کریستسکو (Cristescu)، کوزانوس (Cusanus)، دالامبر، داوینچی، دکارت، دویت (de Witt)، دورر، اینشتین، اویلر، گالیله، گاوس، ژربر، همیلتن، هلمهولتس، هیپارخوس، هویگنس، کپلر، کووالفسکی، کریلوف (Krylov)، لاگرانژ، لاپلاس، لایبنیتز، لیاپونوف (Liapunov)، لباچفسکی، لورنتس، مرکاتور، مونژ، خواجه نصیرالدین طوسی، نیوتن، اوستروگرادسکی (Ostrogradsky)، پاسکال، پوانکاره، پاپوف (Popov)، فیثاغورس، رمنوجن، ریس (Rièse)، استوین، تایشایرا (Teixeira)، تیتایکا (Titeica)، و توریچلی. روسیه و فرانسه در چاپ تمبرهای پستی برای ریاضیدانان از همه بیشتر سخاوت به‌خرج داده‌اند؛ انگلستان هرگز چنین کاری نکرده وآمریکا یك‌بار این کار را کرده‌است. داوینچی، گالیله، کپرنیك، و اینشتین در تمبرهای چهار کشور یا بیشتر ظاهر شده‌اند.

مختص خودش پرداخت. درهفده سالگی به‌نتایج پراهمیتی دست یافت، ولی دومقاله‌ای که برای آکادمی فرانسه فرستاد به‌نحوی توجیه‌ناپذیر مفقود شد، و این برحرمان وی افزود. مقاله‌ای کوتاه ازاو دربارهٔ معادلات درسال ۱۸۳۰ به‌چاپ رسید ونتایجی درآن ارائه شد که ظاهراً مبتنی بریك نظریهٔ کاملاکلی بوده‌اند. شب قبل‌ازدوئل، باتشخیص اینکه‌به‌احتمال قوی کشته خواهد شد، وصیت‌نامهٔ علمی خودرا درقالب نامه‌ای به‌یکی‌از دوستانش‌نوشت. این وصیت‌نامه، که بعداً برای شرح آن توانائیهای برخی ریاضیدانان بزرگ لازم‌گردید، معلوم شدکه حاوی‌نظریهٔ گروهها و به‌اصطلاح نظریهٔ گالوایی معادلات است. نظریهٔ گالوایی معادلات، مبتنی برمفاهیم نظریهٔ گروهها، محکهایی برای امکان حل یك ساختمان هندسی با ابزارهای اقلیدسی و برای امکان حل یك معادلهٔ جبری به‌کمك رادیکالها را در اختیار می‌گذارد.

چندین‌مقالهٔ علمی‌و دستنویسهایی ازگالواکه بعدازمرگش به‌دست‌آمد توسط ژوزف لیوویل[1] (۱۸۰۹-۱۸۸۲) در سال ۱۸۴۶ در مجلهٔ ریاضیات[2] او به‌چاپ رسید. مع‌هذا برای‌درك‌کامل‌دستاوردهای او بایدتاسال۱۸۷۰، که درآن کامیل‌ژوردان[3] (۱۸۳۸-۱۹۲۲) دررسالهٔ جایگشتها[4] به‌توضیح‌آنهاپرداخت، ونیز بعدها تا به‌کارگیری‌داهیانهٔ‌آنهادرهندسه توسط‌فلیکس کلاین[5] (۱۸۴۰-۱۹۲۵) و سوفوس‌لی[6] (۱۸۴۲-۱۸۹۹) درنگ می‌شد.

گالوا اساساً نظریهٔ‌گروهها راخلق‌کرد. وی اولین‌کسی بودکه (در سال ۱۸۳۰) کلمهٔ «گروه» را به‌معنی‌فنی‌آن‌به‌کاربرد. تحقیقات درنظریهٔ‌گروهها بعداًتوسط اوگوستین‌ـ لوئی‌کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) و تالیانش تحت عنوان ویژهٔ گروههای جایگشتی انجام



اواریست‌گالوا

(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

1. Joseph Liouville
2. Journal de mathématique
3. Camille Jordan
4. Traité des substitutions
5. Felix Klein
6. Sophus Lie

گرفت. باکارهای پرعظمت آرتور کیلی (۱۸۲۱–۱۸۹۵)، لودویگ سیلوو[1] (۱۸۳۲-۱۹۱۸) سوفوس لی، گئورگ فروبنیوس[2] (۱۸۴۸–۱۹۱۷)، فلیکس کلاین، هانری پوانکاره[3] (۱۸۵۴-۱۹۱۲)، اوتوهولدر[4] (۱۸۵۹-۱۹۳۷)،ودیگران، مطالعهٔ گروهها شکل مجرد مستقل خودرا پیدا کرد، و باسرعت زیادی گسترش یافت. مفهوم گروه نقش مهمی درردهبندی هندسه پیدا کرده است (نگاه کنید به‌بخش ۱۴–۸) ونقش آن درجبر به‌سان ساختار ذره‌ای نیروی گرانش ذرات، عامل مهمی درپیدایش جبرمجرد درقرن بیستم شده است. نظریهٔ گروهها هنوزهم، که تقریباً به‌انتهای نیمهٔ دوم قرن بیستم رسیده‌ایم، میدان بسیار فعالی در تحقیقات ریاضی است.

۱۳–۵ ژاکوبی و دیریکله

انقلاب فرانسه، باقطع پیوند عقیدتی‌اش با گذشته و تغییرات همه جانبه‌اش، شرایط بسیار مساعدی برای رشد ریاضیات ایجاد نمود. ازاین‌رو، ریاضیات درقرن نوزدهم، ابتدا در فرانسه، وبعدها که نیروهای محرکه به‌اروپای شمالی گسترش یافت، درآلمان وسپس اندکی دیرتر در انگلیس دستخوش جنبش عظیمی شد. ریاضیات جدید شروع به‌رها کردن خوداز بندهای مکانیك و نجوم نمود، و دیدگاه نابتری تکامل یافت. دو ریاضیدان برجسته‌ای که نقش اولیه‌ای درانتقال مرکز فعالیت ریاضی ازفرانسه به‌آلمان داشتند، کارل گوستا و یاکوب ژاکوبی[5] (۱۸۰۴-۱۸۵۱) و پترگوستاو لوژون دیریکله[6] (۱۸۰۵-۱۸۵۹) بودند.

ژاکوبی درسال ۱۸۰۴ ازوالدینی یهودی درپوتسدام[7] به‌دنیا آمد و دردانشگاه برلین تحصیل کرد، و در سال ۱۸۲۵ به‌اخذ درجهٔ دکتری نایل آمد. دو سال بعد به‌سمت استاد بدون کرسی ریاضیات درکونیگسبرگ منصوب شد، و دو سال بعداز آن به‌استادی رسمی ریاضیات آنجا ارتقاء یافت. درسال ۱۸۴۲، بادریافت مقرریی ازدولت پروس، کرسی خود در کونیگسبرگ را ترك کرده به‌برلین رفت وتازمان مرگ زودرسش درسال ۱۸۵۱ درآنجا اقامت داشت.

محققین برجستهٔ ریاضی درعین‌حال به‌ندرت معلم برجستهٔ ریاضی ازکاردرآمده‌اند. ژاکوبی یکی از استثناها بود. بی‌چون و چرا بزرگترین معلم ریاضی دانشگاه نسل خود بوده و تعداد بی‌سابقه‌ای ازدانشجویان مستعد رابرانگیخته وآنها را تحت‌تأثیر قرار داده است. مشهورترین تحقیقات او در ریاضیات درزمینهٔ توابع بیضوی است. او وآبل مستقل ازهم و به‌طور همزمان نظریهٔ این توابع را تأسیس کردند، و ژاکوبی اساس نمادگذاری امروزی برای آنها را معرفی کرد. ژاکوبی، بعد ازکوشی، شاید پرکارترین فرد در نظریهٔ دترمینانها بود. توسط او بودکه کلمهٔ «دترمینان» پذیرش نهایی خود را یافت. وی بدواً

---

1. Ludwig Sylow 2. Georg Frobenius 3. Henri Poincaré
4. Otto Hölder 5. Carl Gustav Jacob Jacobi
6. Peter Gustav Lejeune Dirichlet 7. Potsdam

کارل گوستاو ژاکوبی
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

دترمینان تابعیی راکه بعداً سیلوستر آن را ژاکوبین نامید، وهر دانشجوی نظریهٔ توابع با آن‌مواجه می‌شود، به‌کار برد. وی همچنین درنظریهٔ اعداد، نظریهٔمعادلات دیفرانسیل‌معمولی ومعادلات با مشتقات جزئی، حساب‌تغییرات، مسئلهٔ سه جسم، و دیگر مسائل دینامیکی سهم داشت.

بسیاری از دانشجویان حس می‌کنندکه قبل از اینکه به‌تحقیق بپردازند، لازم است به‌آنچه‌که قبلاً انجام شده تسلط یابند. برای مقابله بااین تصور، وبرای برانگیختن علاقه به‌کار مستقل، ژاکوبی به‌ایراد این‌تمثیل می‌پردازد: «هرگاه پدرشما اصرارمی‌کردکه‌پیش از ازدواج بادختری، باهمهٔ دختران عالم‌آشنا شود، هرگز ازدواج نکرده بود وشما هرگز به‌دنیانمی‌آمدید.» در دفاع ازتحقیق‌ناب درمقابل تحقیق‌کار بسته، وی خاطر نشان‌کردکه، «مقصود واقعی علم عظمت روح انسان است.» به‌تقلید افلاطون کـه گفته بود، «خداوند همواره‌درحال پرداختن به‌هندسه است.» گفت، «خداوند همواره درحال‌پرداختن به‌حساب است.»

ژاکوبی در بیاناتش‌نسبت به‌سایر ریاضیدانان معاصربزرگ همواره سخاوت به‌خرج می‌داد. درمورد یکی ازشاهکارهای آبل چنین‌گفت، «بالاتر ازستایش من وبالاتر ازکارمن است.»

دیریکله‌درسال۱۸۰۵در دورن[1] به‌دنیاآمد، ومتوالیاً دربرسلائو[2] وبرلین‌سمت‌استادی داشت. بامرگ گاوس در سال ۱۸۵۵ به‌عنوان جانشین‌گاوس در گوتینگن منصوب شدکه نشان شایسته‌ای‌برای ریاضیدانی‌چنین مستعدکه ازشاگردان سابق‌گاوس و ستایشگر دائمی مربی خود بود، محسوب می‌شد. زمانی که درگوتینگن بـود، امید داشت‌که آثار ناتمام

---

1. Düren 2. Breslau

گاوس را به‌پایان برساند، ولی مرگ زودرس او درسال ۱۸۵۹ مانع از آن شد.

دیریکله که به زبانهای آلمانی و فرانسه مسلط بود، به‌طور تحسین‌برانگیزی نقش رابط بین ریاضیات و ریاضیدانان این دو ملیت را بـه‌عهده گرفت و شایـد مشهورترین دستاورد ریاضی او تحلیل ژرف او ازهمگرایی سریهای فوریه بود، کاری که اورادر تعمیم مفهوم تابع راهبرشد (نگاه کنید به‌بخش ۱۵ــ۳). وی سعی زیادی در تسهیل درك برخی از روشهای غامض گاوس به‌عمل آورد، وخود اوسهم قابل ذکری در نظریهٔ اعداد داشت، کتاب درومی نظریهٔ اعداد[1] زیبای اوهنوزهم یکی‌ازسلیس‌ترین مقدمه‌ها برتحقیقات گاوس در نظریهٔ اعداد است. دیریکله از دوستان نزدیك ژاکوبی ، داماد و شارح آثار او بود. دانشجویـان ریاضیات بانام او در رابطه بـا سری دیریکله، تابع دیریکله، و اصل دیریکله برخورد می کنند.

داستان رقت‌انگیزی دربارهٔ دیریکله ومعلم کبیرش گاوس گفته شده‌است. در۱۶ ژوئیه ۱۸۴۹ ، دقیقاً ۵۰سال بعد از دریافت درجهٔ دکترایش، گاوس درجشنی به‌مناسبت پنجاهمین سال این‌واقعه درگوتینگن شرکت داشت. به‌عنوان قسمتی‌ازاین «نمایش»، گاوس‌می‌بایست درمرحله‌ای ازجریان مراسم، پیپ خودرا باتکه‌ای ازنسخهٔ اصلی دستنویس اثر تحقیقات حسابی‌اش روشن نماید. دیریکله، که درجشن حضورداشت، از انجام این کار که به‌نظر وی توهین به‌مقدساتش محسوب می‌شد، مضطرب بود. درآخرین لحظه وی جسورانه‌کاغذرااز دست گاوس قاپید واین یادگاری را در مابقی عمر برای خود حفظ کرد؛ بعد از مرگ او این کاغذ را ناشرین آثارش دربین کاغذهای او پیدا کردند.

لوژون دیریکله

(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

1. Vorlesungen Über Zahlentheorie

۱۳-۶ هندسهٔ نااقلیدسی

دو رویداد ریاضی مهم وانقلابی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم به‌وقوع پیوست. اولین آنها کشف هندسهٔ خودسازگاری، غیر از هندسهٔ مرسوم اقلیدس، درحدود سال ۱۸۲۹ بود؛ دومی کشف جبری متفاوت با جبرمعمولی دستگاه اعداد حقیقی، درسال ۱۸۴۳، بود. اکنون توجه خودرا به بررسی این دو رویداد معطوف کرده ابتدا آن‌راکه در زمینهٔ هندسه‌است، مورد بحث قرار می‌دهیم.

شواهدی در دست‌است که بسط منطقی نظریهٔ موازیها یونانیان قدیم را به‌طور قابل ملاحظه‌ای دچار دردسرکرده بود. اقلیدس باتعریف خطوط موازی به‌عنوان خطوطی‌واقع دریك صفحه که هراندازه آنهارا درهرجهت امتداد دهیم یکدیگر را تلاقی‌نمی‌کنند، و با پذیرفتن اصل توازی خود به‌عنوان یك اصل موضوع،کـه امروزه مشهور است، به‌این مشکلات پاسخ‌داد. این اصل (برای دیدن بیان آن نگاه‌کنید به‌بخش ۵ ــ ۷) که ایجاز سایر اصول‌را ندارد، به‌هیچوجه واجد صفت «بدیهی» نیست. در واقع این اصل، عکس قضیهٔ I ۱۷ است، وبیشتر به‌یك قضیه شباهت دارد تایك اصل. بعلاوه، اقلیدس‌از این‌اصل توازی تاوقتی‌که به‌قضیه I ۲۹ می‌رسد، استفاده نمی‌کند. طبیعی بودکه لزوم واقعی این اصل مورد سؤال قرارگیرد وچنین تصور شودکـه شاید بتوان‌آن‌را به‌عنوان‌قضیه‌ای از نه «اصل متعارفی» و «اصل‌موضوع» دیگر استخراج‌کرد، یاحداقل، بتوان به‌جای‌آن‌معادل قابل قبولتری‌را قرارداد.

از جانشینهای متعددی‌که‌برای قراردادن به‌جای‌اصل‌توازی اقلیدس ابداع شده‌اند، رایجترینشان اصلی است کـه در اعصار جدید توسط فیزیکدان و ریاضیدان اسکاتلندی، جان‌پلی‌فیر[1] (۱۷۴۸ ــ ۱۸۱۹) معروف شده است، گرچه‌این بدیل خاص توسط دیگران مورد استفاده بوده و توسط پروکلوس درقرن پنجم بیان شده بوده است. این، جایگزینی است کـه معمولاً در کتابهای دبیرستانی دیده می‌شود، یعنی: بر یك نقطهٔ مفروض تنها می‌توان‌یك خط به‌موازات خط مفروض رسم‌کرد*.چند بدیل پیشنهادی دیگر برای‌اصل‌توازی عبارتنداز: (۱) حداقل‌یك مثلث وجود داردکه مجموع سه زاویهٔ آن‌برابر با دو قائمه است. (۲) دومثلث متشابه غیر متساوی وجود دارند. (۳) دوخط مستقیم وجود دارند که همه‌جا از هم به یك فاصله‌اند. (۴) بر هرسه نقطهٔ غیر واقع بریك خط می‌توان دایره‌ای گذراند. (۵) برهرنقطهٔ داخل زاویه‌ای کمتر از 60° می‌توان خط مستقیمی‌کشیدکه هر دوضلع زاویه را قطع کند.

تلاشها درجهت استخراج اصل تـوازی به‌عنوان قضیه‌ای از نه «اصل متعارفی» و «اصل موضوع» دیگر هندسه‌دانان‌را برای متجاوز ازدوهزارسال‌مشغول کرد ومنجر به‌برخی

1. John playfair

* قضیه I ۲۷ وجود حداقل یك خط موازی را تضمین می‌کند.

از دوررسترین پیشرفتهای ریاضیات نوین شد. «براهین» متعددی برای این اصل ارائه شد، اما طولی نکشید که نشان داده شد که هریك از آنها مبتنی بر یك فرض تلویحی معادل با خود اصل بوده‌اند.

در سال ۱۷۳۳ اولین پژوهش علمی واقعی، توسط کشیش یسوعی ایتالیایی جیرولامو ساکری (۱۶۶۷–۱۷۳۳) به‌چاپ رسید.

در بارهٔ زندگی ساکری چیز زیادی نمی‌دانیم. وی در سان‌رمو[1] به‌دنیا آمد، در نوجوانی آثار پیشرفتگی ذهنی آشکاری ازخود نشان‌داد، دورهٔ آموزش خودرا برای‌ورود به فرقهٔ یسوعی دربیست‌وسه‌سالگی به‌اتمام رسانید، وسپس مابقی‌عمررا باعهده‌داری‌متوالی سمتهای تدریس دانشگاهی‌صرف کرد. طی تدریس علم‌معانی و بیان، فلسفه، و الاهیات در یك دانشکدهٔ یسوعی در میلان، ساکری اصول اقلیدس را خواند و شیفتهٔ روش قدرتمند برهان خلف شد. بعداً، موقعی که در تورین[2] فلسفه درس‌می‌داد، کتاب برهان منطقی[3] خود رامنتشر کرد که‌نوآوری‌عمده در آن‌کاربرد روش برهان خلف درمبحث منطق‌صوری‌است. چندسال بعد، زمانی که استاد ریاضیات در پاویا بود، این اندیشه به‌ذهن اوخطور کرد که روش برهان‌خلف مورد علاقهٔ خود را به‌منظور مطالعهٔ اصول توازی اقلیدس به‌کار گیرد، و وی اجازهٔ چاپ‌کتاب کوچکی تحت عنوان اقلیدس مبری از هرخطا[4] را دریافت کرد، واین کتاب درمیلان، درسال ۱۷۳۳، تنها چندماه پیش ازمرگش به‌چاپ رسید.

ساکری درکار خود روی اصل توازی، بیست‌وهشت قضیهٔ اول اصول اقلیدس را می‌پذیرد، که مطابق آنچه در بالا گفتیم، دراثباتشان‌نیازی به‌اصل توازی نیست. به کمك این قضایا سپس به‌مطالعهٔ یك چهار ضلعی مسانند $ABCD$ (نگاه کنید به‌شکل ۱۱۴) که درآن زوایای A و B قائمه و اضلاع AD و BC برابرند، می‌پردازد. بارسم قطرهای AC و BD واستفاده ازقضایای همنهشتی‌ساده (که‌دربین‌بیست‌وهشت قضیهٔ اول‌اقلیدس‌موجودند)، ساکری به‌آسانی نشان می‌دهد که زوایای D و C برابرند. بنابراین سه‌امکان وجود دارد: زوایای D و C زوایای حادهٔ برابرند، زوایای قائمهٔ برابرند، یازوایای منفرجهٔ برابرند.

شکل ۱۱۴

1. San Remo 2. Turin 3. Logica demonstrativa
4. Euclides ab omni naevo vindicatus

این‌سه‌امکان توسط ساکری **فرض زاویهٔحاده، فرض زاویهٔ قائمه، فرض زاویهٔ منفرجه** نام گرفتند. طرح کار، نشان دادن این مطلب بود که هریك از فرضهای زاویهٔ حاده یا منفرجه به‌یك‌تناقض منجرخواهد شد.آنگاه بنابر برهان خلف، فرض زاویهٔ قائمه باید برقرارباشد وساکری نشان دادکه این فرض برهانی ازاصل توازی را باخود به‌همراه دارد. بافرض تلویحی لایتناهی بودن خط مستقیم، ساکری بلافاصله فرض زاویهٔ منفرجه را نفی کرد، ولی حالت زاویهٔ حاده خیلی مشکلتر ازکار درآمد. بعد از به‌دست‌آوردن بسیاری از قضایای اینك‌کلاسیك به‌اصطلاح هندسهٔ نااقلیدسی، ساکری تناقض نامتقاعدکننده‌ای را که شامل مفاهیم مبهمی درباب عناصر لایتناهی بود، به‌زحمت دربحث خود واردکرد. اگر وی این اندازه مشتاق نشان دادن تناقضی نمی‌شد، و به‌جـای آن عدم توانایی خود را برای یافتن تناقضی می‌پذیرفت، افتخارکشف هندسهٔ نااقلیدسی بدون تردید امروزه نصیب او می‌شد. کار اوکمتر مورد اعتنای معاصرینش قرارگرفت و به‌زودی به‌بوتهٔ فراموشی سپرده شد* و درسال ۱۸۸۹ بود کـه توسط هموطن وی ائوجینوبلترامی[1] (۱۸۳۵ ــ ۱۹۰۰) مجدداً احیا گردید.

سی وسه سال بعد ازانتشار اثر ساکری، یوهان‌هاینریش لامبرت[2] (۱۷۲۸–۱۷۷۷) سویسی،رسالهٔ تحقیقی‌مشابهی‌تحت عنوان نظریهٔ موازیها[3] نوشت،که‌تابعد ازمرگش به‌چاپ نرسید. لامبرت یك‌چهارضلعی‌را با سه‌زاویهٔ‌قائمه (نصف‌چهارضلعی‌ساکری) به‌عنوان‌شکل بنیادی خود برگزید، و سه‌فرض را، بسته به‌اینکه زاویهٔ چهارم حـاده، قائمه ، یا منفرجه باشد، درنظرگرفت. او دراستخراج‌قضایایی‌تحت‌فرضهای زوایای حاده ومنفرجه‌به‌مراتب ازساکری‌پیشتر رفت. مثلا، مانندساکری نشان دادکه بارعایت این‌سه‌فرض‌مجموع‌زوایای یك مثلث به‌ترتیب‌کمتر از، برابر با، یابزرگترازدوقائمه‌خواهدشد، وسپس، افزون برکار ساکری، نشان‌دادکه‌تفاضل‌مجموع زوایا از دو قائمه درفرض‌زاویهٔ حاده وزیادتی‌مجموع زوایا از دوقائمه درفرض زاویهٔ منفرجه، با مساحت مثلث متناسب‌اند. وی به‌شباهت‌هندسهٔ ناشی‌ازفرض زاویهٔ منفرجه و هندسهٔ کروی، که درآن مساحت مثلث با زیادتی‌کروی آن متناسب‌است، پی‌برد، وحدس‌زدکه هندسهٔ ناشی‌ازفرض‌زاویهٔ حاده‌را شاید بتوان‌برکره‌ای باشعاع موهومی تحقیق‌کرد. فرض زاویهٔ منفرجه باپذیرش‌همان فرض تلویحیی‌که ساکری کرده‌بود، کنارگذاشته شد، اما نتایج وی‌درارابطه بافرض زاویهٔ حاده مبهم‌وغیررضایتبخش ماندند.

آدرین‌ماری‌لژاندر (۱۷۵۲ ــ ۱۸۳۳)، یکی ازبرجسته‌ترین آنالیزدانهای‌فرانسه، کاررا ازسرگرفت وسه‌فرض بسته به‌اینکه مجموع زوایای یك مثلث‌کمتر از، برابربا، یا

---

* توضیح داستان‌گونه‌ای برای توجیه بی‌اعتنایی طولانی نسبت به‌شاهکار ساکری داده شده‌است که ضمن‌آن سخن ازممانعت غیرمستقیم از انتشارکار ساکری می‌رود. نگاه‌کنید، مثلاً به ،

E.T. Bell. The Magic of Numbers, chapter 25.

1. Eugenio Beltrami 2. Johann Heinrich Lambert
3. Die Theorie der Parallellinien

بیشتر از دو قائمه باشند، درنظر گرفت. بافرض تلویحی لایتناهی بودن یك خط مستقیم، وی توانست فرض سوم را نفی کند، ولی، گرچه کوششهای متعددی انجام داد، نتوانست در مورد فرض اول کاری صورت دهد. این تلاشها در ویرایشهای متوالی اصول هندسهٔ وی، که مقبولیت عام داشت، ظاهر شد. بدین ترتیب وی در رواج دادن مسئلهٔ اصل موضوع توازی نقش زیادی داشت.

تعجب آور نیست که در فرض زاویهٔ حاده هیچ تناقضی یافته نشد، زیرا امروزه معلوم شده است که هندسه‌ای که از مجموعه‌ای از اصول متشکل از یك مجموعهٔ اساسی، بعلاوه فرض زاویهٔ حاده بسط یافته است همان‌قدر سازگار است که هندسهٔ اقلیدسی که از همان مجموعهٔ اساسی بعلاوهٔ فرض زاویهٔ قائمه بسط یافته است؛ یعنی، اصل توازی از بقیهٔ اصول مستقل است و بنا براین قابل نتیجه گیری از آنها نیست. اولین کسانی که به این حقیقت ظن بردند گاوس آلمانی، یانوش (یا یوهان) بویوئی[1] (۱۸۰۲–۱۸۶۰) مجارستانی، و نیکلای ایوانوویچ-لباچفسکی[2] (۱۷۹۳ – ۱۸۵۶) روسی بودند. اینان موضوع را از دید شکل اصل توازی پلی‌فیر با درنظر گرفتن سه امکان زیر مورد توجه قرار دادند: از یك نقطهٔ مفروض می‌توان بیش ازیك خط، یا فقط یك خط به‌موازات یك خط مفروض رسم کرد، یا هیچ خطی نمی‌توان رسم کرد. این موارد، به‌ترتیب، با فرضهای زاویهٔ حاده، قائمه، ومنفرجه معادل‌اند. مجدداً، بافرض لایتناهی بودن یك خط مستقیم، حالت سوم به‌سادگی نفی می‌شود. هریك از این سه ریاضیدان که بعد از مدتی به‌وجود هندسهٔ سازگاری تحت اولین فرض پی برده بودند، مستقلاً بسطهای هندسی ومثلثاتی فرض زاویهٔ حاده را به‌انجام رسانیدند.

محتملاً گاوس اولین کسی بوده که به‌نتایج نافذی دربارهٔ فرض زاویهٔ حاده رسیده است، ولی ازآنجا که وی در سرتاسر زندگیش توفیق به‌چاپ چیزی در بارهٔ این مطلب نیافت، افتخار کشف این‌هندسهٔ نااقلیدسی خاص باید بین بویوئی ولباچفسکی تقسیم‌شود.

نیکلای لباچفسکی
(مجموعهٔ کتابخانهٔ عمومی نیویورك)

1. Janos (or Johann) Bolyai
2. Nicolai Ivanovitch Lobachevsky

بویوئی کشفیات خود را در سال ۱۸۳۲ در ضمیمه‌ای برکارهای ریاضی پدرش به‌چاپ رسانید. بعداً معلوم شدکه‌لباچفسکی کشفیات مشابهی‌را زودتر، درسالهای ۱۸۲۹–۱۸۳۰، منتشرکرده است. ولی، به‌دلیل موانع زبانی وکندی در گسترش اکتشافات جدید موجود درطی آن سالها،کار لباچفسکی چند سالی در اروپای غربی ناشناخته ماند. به‌نظر می‌رسد نیازی به‌بحث دربارهٔ نظریه‌های بغرنج، و احتمالاً بی‌اساس، دایر براینکه چگونه هریك ازاین‌سه‌تن‌اطلاعاتی‌ازکشفیات‌یکی دیگر به‌دست‌آورده و به‌خود منتسب کرده است،نباشد. درآن زمان هم سوءظن وهم متهم‌کردن دیگران تاحدزیادی وجود داشته است.

یانوش (یا یوهان) بویوئی یك افسرمجارستانی‌درارتش اطریش وفرزند فورکوش (یا وولفگانگ) بویوئی[1]، یك معلم ریاضی ولایتی ودوست دیرینهٔ گاوس بود. بدون شك محرك بویوئی جوان درمطالعهٔ اصل توازی پدرش بود،که پیشتر ازآن علاقه‌مندی خودرا به‌این‌مسئله نشان داده‌بود. پیش‌ازسال ۱۸۲۳، یانوش بویوئی شروع به‌درك ماهیت‌واقعی مسئله‌ای‌که باآن مواجه بود،کرد، ودرنامه‌ای‌که طی این سال به‌پدر نوشت، شیفتگی خود را به‌کار خودنشان می‌دهد. دراین نامه، وی عزم خودرابرای چاپ رساله‌ای درباب‌نظریهٔ موازی، به‌محض‌آنکه زمان وفرصت تنظیم مطالب را پیدا کند، اعلام‌کرده وندا درمی‌دهد که «من ازهیچ، جهانی‌تازه وشگفت‌انگیز آفریده‌ام». پدر اصرارمی‌کندکه مقالهٔ موردنظر به‌عنوان ضمیمه‌ای براثرنیمه فلسفی حجیم دوجلدی خوداودربارهٔ ریاضیات مقدماتی‌چاپ شود. بسط وتنظیم اندیشه‌ها کندتراز آنچه یانوش انتظارداشت، پیش رفت، ولی سرانجام، درسال ۱۸۲۹، وی دستنویس پایان‌یافته را به‌پدر تسلیم‌کرد وسه‌سال‌بعد، در۱۸۳۲،رساله به‌صورت‌یك‌ضمیمهٔ بیست‌وشش‌صفحه‌ای درانتهای جلداول اثرپدرش ظاهرمی‌شود*. یانوش بویوئی دیگرچیزی چاپ نکرد، گرچه انبوهی‌ازدستنوشته‌ها ازخود به‌جای‌گذاشت. علاقهٔ اصلی‌او به‌چیزی بودکه‌وی آن را «دانش مطلق‌فضا» نامید ومنظور وی ازآن مجموعه‌ای‌از قضایا بودکه مستقل ازاصل توازی بودند ودرنتیجه هم درهندسهٔ اقلیدسی و هم در هندسهٔ جدید برقرار بودند.

نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی قسمت عمدهٔ زندگی خودرا دردانشگاه کازان[2]،ابتدا به‌صورت دانشجو، بعداً به‌عنوان استاد ریاضیات، و سرانجام به‌عنوان رئیس دانشکده گذرانید، ونخستین مقالهٔ اودربارهٔ هندسهٔ نااقلیدسی درسالهای ۱۸۲۹–۱۸۳۰ در بولتن کازان[3]، دو یاسه سال پیش‌ازآنکه اثر بویوئی به‌چاپ برسد، منتشرشد. این‌یادداشت‌توجه اندکی‌را در روسیه جلب‌کرد، وچون به‌زبان روسی نوشته شده بود، درجاهای دیگر عملا مورد هیچ توجهی واقع نشد. لباچفسکی تلاش اولیهٔ خود را با نوشته‌های دیگر دنبال

---

1. Farkas (or Wofgang) Bolyai

* برای ترجمهٔ این ضمیمه نگاه‌کنید به

R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*

یا به

D.E. Smith, *A Source Boob in Mathematics*, pp. 375-388

که در کتابنامهٔ انتهای فصل فهرست شده‌اند.

2. Kasan 3. Kasan Bulletin

نمود. مثلاً، به‌امید یافتن گروه وسیعتری خواننده، وی درسال ۱۸۴۰ کتاب کوچکی به‌زبان آلمانی تحت‌عنوان تحقیقات هندسی درباب نظریهٔ موازیها[1] منتشر کرد*، و باز بعداً، درسال ۱۸۵۵، یك سال پیش ازمرگش و بعد از آنکه نابینا شده بود، رساله‌ای نهایی و خلاصه‌تر به‌زبان فرانسه تحت عنوان هندسهٔ عام[2] به‌چاپ رساند**. اطلاعات اکتشافات جدیددر آن روزها چنان به‌کندی انتشار می‌یافت که گاوس احتمالاچیزی ازکار لباچفسکی تازمان انتشار آن به‌آلمانی درسال ۱۸۴۰، نشنید و یانوش بویوئی تاسال ۱۸۴۸ از آن بی‌خبر بود. خود لباچفسکی چندان نزیست که‌کار خود را مورد تأیید عامه ببیند، ولی به‌هندسهٔ نااقلیدسی‌که او پدید آورد، امروز اغلب **هندسهٔ لباچفسکی** اطلاق می‌شود.

استقلال واقعی اصل موضوع توازی ازسایراصول موضوعهٔ هندسهٔ اقلیدسی تازمان به‌دست‌آمدن براهین سازگاری برای فرض زاویهٔ حاده به‌گونه‌ای‌که سؤال برانگیز نباشد، ثابت‌نشد. ارائهٔ این براهین‌چندان طول نکشید وتوسط بلترامی، آرثر کیلی، فلیکس کلاین، هانری پوانکاره، و دیگران‌فراهم‌شد. روش آن، عبارت بود از وضع‌مدلی درهندسهٔ‌اقلیدسی که بتواند به‌بسط انتزاعی‌فرض زاویهٔ حاده تعبیری عینی درقسمتی ازفضای‌اقلیدسی بدهد. دراین‌صورت هر ناسازگاری درهندسهٔ نااقلیدسی موجب یك ناسازگاری متناظردرهندسهٔ اقلیدسی می‌شود (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۱۳).

درسال ۱۸۵۴، ریمان نشان داد که اگر نامتناهی بودن خط مستقیم کنار گذاشته شود وصرفاً بی‌کرانگی‌آن مورد پذیرش واقع شود، آنگاه با چند جرح و تعدیل جزئی اصول موضوعهٔ دیگر، هندسهٔ سازگار نااقلیدسی دیگررامی‌توان‌ازفرض زاویهٔ حاده به‌دست آورد. کلاین درسال ۱۸۷۱ به‌این سه هندسه، یعنی هندسهٔ بویوئی و لباچفسکی، هندسهٔ اقلیدس، و هندسهٔ ریمان، نامهای **هندسهٔ هذلولوی**، **هندسهٔ سهموی**، و **هندسهٔ بیضوی** داد.

البته نتیجهٔ مستقیم کشف این اولین هندسهٔ نااقلیدسی به‌سرانجام رسیدن مسئلهٔ دیرینهٔ اصل موضوع توازی بود ــ نشان داده شدکه اصل‌موضوع توازی مستقل ازاصول‌موضوعهٔ دیگرهندسهٔ اقلیدسی است. اما پیامدی دوررستر ازاین، آزادشدن هندسه ازقالب سنتی آن بود. این عقیدهٔ ریشه‌دار قرنهای متمادی که تنها یك هندسهٔ ممکن می‌تواند موجود باشد، خدشه‌دار شد، وراه برای ایجادچندین دستگاه مختلف هندسه‌گشوده شد. باامکان خلق‌چنین هندسه‌های کاملاً «مصنوعی»، آشکارشدکه هندسه لزوماً به‌فضای مادی واقعی گره نخورده

1. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien

* برای ترجمهٔ آن نگاه کنید به

R. Bolona, *Non - Euclidean Geometry*

که درکتابنامهٔ انتهای این فصل فهرست شده است.

2. Pangéométrie

** برای ترجمهٔ آن نگاه کنید به

D.E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, pp. 360-374

که در کتابنامهٔ انتهای این فصل فهرست شده‌است.

است. اصول موضوعهٔ هندسه، برای ریاضیدان صرفاً فرضهایی شدند که درستی یا نادرستی فیزیکی آنها برای او مطرح نیست. ریاضیدان می‌تواند اصول‌موضوعهٔ خودرا برای‌ارضای خاطر خود اختیار کند، به‌شرطی که سازگاری آنها با یکدیگر محفوظ بماند.

۱۳-۷ ظهور ساختار جبری

جمع و ضرب معمولی که برروی‌مجموعهٔ اعدادصحیح مثبت‌انجام‌می‌شوند،اعمال‌دوتایی‌اند؛ به‌هرزوج مرتب ازاعدادصحیح، مانند a و b، اعداد صحیح مثبت‌یکتای c و d ، به‌ترتیب بانامهای مجموع a و b و حاصلضرب a و b تخصیص داده می‌شوند که باعلامتهای

$$c=a+b \ , \ d=a\times b$$

نشان داده می‌شوند. این‌دوعمل دوتایی‌جمع و ضرب که برروی مجموعهٔ اعداد صحیح‌مثبت صورت می‌گیرد دارای برخی خواص است. مثلاً، اگر a ، b ، c معرف اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند، داریم

۱. $a+b=b+a$، موسوم به قانون جابجایی جمع.
۲. $a\times b=b\times a$، قانون جابجایی ضرب.
۳. $(a+b)+c=a+(b+c)$، قانون شرکتپذیری جمع.
۴. $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ قانون شرکتپذیری ضرب.
۵. $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ قانون توزیعپذیری ضرب نسبت به‌جمع.

دراوایل قرن نوزدهم، جبرصرفاً حساب علامتی تلقی‌می‌شد*. به‌عبارت دیگر، به‌جای کارکردن بااعداد معین، به‌طریقی که درحساب عمل می‌شود، درجبرحروفی راکه معرف‌این اعدادند به‌کارمی‌بریم. در این‌صورت، پنج عمل بالا، گزاره‌هایی هستندکه همیشه در جبر اعداد صحیح مثبت صادق‌اند. ولی، چون این‌گزاره‌ها علامتی هستند، قابل تصور است‌که درمورد برخی‌مجموعه‌ها به‌غیر ازاعداد صحیح مثبت قابل‌کارگیری باشند، مشروط براینکه تعریفهای مناسبی برای دوعمل دوتایی متضمن درآنها فراهم کنیم. درواقع چنین هم هست (مثلاً، نگاه کنید به‌امثله‌ای که درمطالعهٔ مسئله‌ای ۱۳.۱۳ داده شده‌اند.)

نتیجه می‌شود که پنج خاصیت اساسی اعداد صحیح مثبت مندرج دربالا را می‌توان به‌عنوان‌خواص دستگاههای‌عناصردیگری‌کاملاً متفاوت بااعداد نیزتلقی‌کرد. پیامدهای‌این پنج خاصیت، جبری را تشکیل می‌دهد که قابل استفاده در اعداد صحیح مثبت است، ولی روشن است که نتایج این‌خاصیت تشکیل جبری می‌دهد‌که قابل‌استفاده دردستگاههای‌دیگر نیز هست. به‌عبارت دیگر، یك‌ساختار جبری مشترك (پنج خاصیت اساسی و پیامدهای آنها) به‌بسیاری از دستگاههای متفاوت وابسته‌است. این‌پنج خاصیت اساسی‌را می‌توان‌به‌عنوان اصول موضوعهٔ نوع خاصی ازساختارجبری تلقی‌کرد. وهرقضیه‌ای‌که ازاین اصول ناشی

* همان دیدی که هنوز نسبت به‌جبر دبیرستانی و اغلب جبرسال اول دانشگاهها وجود دارد.

می‌شود برهر تعبیری که پنج خاصیت اصلی را برآورده می‌کند، قابل اعمال است. لذا با چنین‌دیدگاهی، جبر ارتباط خودرا باحساب گسسته، و به‌شکل یك موضوع فرضی ـ استنتاجی صوری درمی‌آید.

نخستین سوسوهای دیدگاه جدیدفوق‌الذکر درجبر درحدودسال ۱۸۳۰ درانگلستان، با کار جورج پیکاك[1] (۱۷۹۱–۱۸۵۸)، فارغ‌التحصیل ومعلم کیمبریج، وسپس سرپرست کلیسای ایلی[2]، پدیدارشد. پیکاك ازنخستین کسانی بودکه به‌مطالعهٔ جدی اصول بنیادی‌جبر پرداخت. ودرسال ۱۸۳۰ رساله درباب جبر[3] خودرا منتشرکرد، که ضمن آن کوشش کرد تا به‌جبر، پرداختی‌منطقی، قابل‌مقایسه بااصول اقلیدس، بدهد وبدین‌ترتیب برای خودعنوان «اقلیدس جبر» راکسب نماید. او بین آنچه‌که وی آن را «جبر حسابی» و «جبر نمادی» نامید، تمایز قایل شد. پیکاك اولی‌را به‌عنوان مبحثی تلقی می‌کردکه ازکاربرد علایم برای نشان دادن اعداد اعشاری معمولی‌مثبت، همراه باعلامتهای این اعمال، نظیر جمع وتفریق، که روی این اعداد عمل می‌شوند، ناشی می‌شوند. اما در «جبرحسابی» برای‌کاربردبرخی اعمال محدودیتهایی وجود دارد. مثلاً، درتفریق، $a-b$، باید داشته باشیم $a>b$. ازسوی دیگر «جبر نمادی» پیکاك اعمال «جبرحسابی» را می‌پذیرد ولی محدودیتهای آنهارانادیده می‌گیرد. بدین‌ترتیب، تفریق در «جبر نمادی» باتفریق در«جبر حسابی» متفاوت است از این جهت که در اولی این عمل همواره انجام‌شدنی است. توجیه تعمیم این قواعد «جبر حسابی» برای «جبر نمادی» توسط پیکاك، **اصل تداوم صورتهای معادل**[4] نامیده‌شد. «جبر نمادی» پیکاك، یك «جبر حسابی» عام است‌که اعمال‌آن، مادامی‌که دو جبر به‌طور مشترك پیش می‌روند، توسط اعمال «جبرحسابی» تعیین‌می‌شوند ودرسایرموارد برطبق اصل‌تداوم صورتهای معادل معین می‌گردند.

اصل تداوم صورتهای معادل، مفهوم توانایی‌درریاضیات تلقی‌شد، ودرمواردی‌مانند بسط اولیهٔ حساب دستگاه اعداد مختلط وتوسیع قوانین نماها از نمای اعداد صحیح مثبت به‌نماهایی ازنوع کلیتر، نقش تاریخی ایفاکرد. درنظریهٔ نماها، به‌عنوان مثال، اگر a یك عدد گویای مثبت و n عددی صحیح ومثبت‌باشد، آنگاه a^n، بنا برتعریف، حاصلضرب n بار a درخود است. ازاین تعریف بلافاصله نتیجه می‌شودکه، به‌ازای هردوعددصحیح مثبت‌مانند m و n، $a^ma^n=a^{m+n}$. بنا براصل تداوم صورتهای معادل، پیکاك پذیرفت‌که در «جبر نمادی»، ماهیت پایهٔ a یا نماهای m و n هرچه باشند، داریم $a^ma^n=a^{m+n}$. اصل مبهم تداوم صورتهای معادل امروز کنار گذاشته شده‌است، ولی هنوز هم اغلب، درتلاش برای تعمیم یك تعریف، بدسمتی می‌رویم‌که تعاریف کلیتر طوری تدوین شوندکه برخی خواص تعریف قدیم همچنان محفوظ بمانند.

معاصرین‌بریتانیایی پیکاك، مطالعات‌او را ارتقا دادند ومفهوم جبررا به‌مفهوم‌امروزی

---

1. George Peacock 2. Ely 3. Treatise on Algebra
4. Principle of the permanence of equivalent forms

آن نزدیك کردند. مثلاً دانکن فارکوئرسن گرگوری[1] (۱۸۱۳-۱۸۴۴) مقاله‌ای در سال ۱۸۴۰ منتشر کرد که در آن قوانین جابجایی و توزیعپذیری در جبر به‌صراحت ابراز شده‌اند. پیشرفتهای بیشتر درفهم مبانی جبر توسط اوگاستس دمورگن[2] (۱۸۰۶-۱۸۷۱)، عضو دیگر مکتب جبریون بریتانیایی انجام‌شد. درکارهای نسبتاً کورمال گونهٔ مکتب بریتانیا، می‌توان اثر ظهور ایدهٔ ساختار جبری وتدارك برای برنامهٔ اصل‌موضوعی دربسط جبر را پیدا کرد. طولی‌نکشید که افکار مکتب بریتانیا دراروپای قاره‌ای منتشرشدند ودرآنجا درسال ۱۸۶۷ توسط مورخ ریاضی آلمانی، هرمان هانکل (۱۸۳۹-۱۸۷۳) تمام و کمال مورد بررسی قرار گرفتند. اما، حتی‌قبل ازپدیدار شدن بررسی‌هانکل، ویلیام راوئن همیلتن[3] (۱۸۰۵-۱۸۶۵)، ریاضیدان ایرلندی، و هرمان گونتر گراسمان[4] (۱۸۰۹-۱۸۷۷)، ریاضیدان آلمانی، نتایجی‌را منتشر کرده بودند که ماهیت دوررستری داشتند، نتایجی که منجر به‌رهایی جبر، عمدتاً به‌همان کیفیتی شدند که کشفیات لباچفسکی و بویوئی منجر به‌رهایی هندسه شدند، وسیل‌بندهای جبرمجرد نوین را ازفرا راه آن گشودند. این‌کار قابل‌توجه همیلتن و گراسمان در فصل بعد مورد بررسی قرارخواهد گرفت.

۱۳-۸ آزاد شدن جبر

دیدیم که هندسه، پایبند توصیفی بود که اقلیدس ازآن کرده بود تا اینکه لباچفسکی و بویوئی، درسال ۱۸۲۹ ودرسال ۱۸۳۲، آن را باابداع هندسه‌ای به‌همان سازگاری که در آن یکی ازاصول موضوعهٔ اقلیدس برقرارنیستند، ازقیود خود رهانیدند. بااین‌کار، اعتقاد قبلی‌مبنی براینکه تنها یك هندسه امکان وجود دارد، خدشه‌دارشد و راه برای خلق هندسه‌های جدید متعددی گشوده شد.

نظیرهمین داستان را برای جبرهم می‌توان گفت. دراوایل قرن نوزدهم، قابل‌تصور نبود که جبری دگرگونه باجبر معمولی حساب موجود باشد. مثلاً، کوشش برای ساختن جبر سازگاری که در آن قانون جابجایی ضرب برقرار نباشد، نه‌تنها احتمالاً در آن زمان به‌ذهن کسی‌نمی‌رسید. بلکه حتی‌اگرهم به‌ذهن کسی خطورمی‌کرد‌مطمئناً به‌عنوان فکر کاملاً مسخره‌ای دورافکنده می‌شد؛ باهمهٔ اینها، چگونه‌می‌شد احتمالاً جبری منطقی داشت که در آن $a \times b$ مساوی با $b \times a$ نباشد؛ دربارهٔ جبر احساس چنین‌بود تاآنکه، درسال ۱۸۴۳، ویلیام راوئن‌همیلتن، بنابرملاحظاتی درفیزیك، مجبور به‌اختراع جبری شد که درآن قانون جابجایی‌ضرب برقرار نیست. این‌مرحلهٔ اساسی درحذف قانون جابجایی به‌آسانی به‌ذهن همیلتن خطورنکرد؛ این‌فکر پس ازسالها تأمل دربارهٔ مسئلهٔ خاصی، به‌مخیله او رسید.

پرداختن به‌انگیزهٔ فیزیکیی که درپشت ابداع همیلتن قرار داشت، مارا بیش از حد ازموضوع بحث خارج می‌کند. شایدبهترین روش، برای مقاصدما، ازطریق بحث زیبایی

---

1. Duncan Farquharson Gregory
2. Augustus De Morgan
3. William Rowan Hamilton
4. Günther Grassmann

باشد که همیلتن دربارهٔ اعداد مختلط به‌عنوان زوج اعداد حقیقی کرده است*. از لحاظ ریاضیدانان عصر وی، یك عددمختلط، عددی بود به‌شکل $a+bi$، که در آن a و b اعداد حقیقی بودند و $i^{2}=-1$. جمع‌وضرب اعداد مختلط بادرنظرگرفتن $a+bi$ به‌عنوان‌یك چند جمله‌ای خطی نسبت به i و گذاشتن -1 به‌جای i^{2}، هرجا که ظاهر می‌شد، صورت می‌گرفت. بدین طریق، برای مجموع رابطهٔ

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

و برای ضرب

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^{2}=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

را داریم. اگراین‌نتایج را به‌عنوان تعریف‌جمع وضرب زوجهای اعداد مختلط برگزینیم، دشوار نیست نشان دهیم که جمع و ضرب جابجایی و شرکتپذیر، و ضرب نسبت به‌جمع توزیعپذیر است.

حالا، چون یك‌عدد مختلط مانند $a+di$ به‌طورکامل توسط دوعدد حقیقی a و b معین می‌شود، این‌فکر درهمیلتن پیدا شد که عدد مختلط را توسط زوج اعداد حقیقی‌مرتب $(a\ ,\ b)$ نمایش دهد. وی دو زوج از این گونه اعداد مانند $(a\ ,\ b)$ و $(c,\ d)$ را برابر تعریف کرد اگر و فقط اگر $a=c$ و $b=d$. جمع و ضرب چنین زوج اعدادی را وی به صورت

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \text{ و } (a,b)\ (c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

تعریف‌کرد (تا بانتایج بالامطابقت داشته باشند). با این تعریفها بسادگی‌می‌توان نشان داد که جمع‌وضرب زوج اعداد حقیقی مرتب جابجایی وشرکتپذیرند، وضرب نسبت به‌جمع توزیعپذیراست،البته،به‌شرطی که‌بپذیریم‌این‌قوانین‌برای‌جمع و ضرب‌اعدادحقیقی برقرارند.

باید توجه‌کردکه دستگاه اعداد حقیقی دردستگاه اعداد مختلط نشانده شده است. منظور از این بیان آن است که اگر یك عدد حقیقی مانند r با زوج اعداد متناظر (r,o) یکی‌گرفته شود، آنگاه این تناظر تحت عمل جمع و ضرب اعداد مختلط حفظ می‌شود، زیرا داریم

$$(a,\circ)+(b,\circ)=(a+b,\circ) \text{ و } (a,\circ)(b,\circ)=(ab,\circ)\,.$$

در عمل به‌جای عدد مختلطی به‌شکل $(r,\circ)$ می‌توان متناظر حقیقی آن یعنی r را قرارداد.

برای به‌دست‌آوردن شکل قبلی یك عدد مختلط از شکل همیلتنی‌آن، توجه می‌کنیم که هرعدد مختلط (a,b) را می‌توان به‌صورت

$$(a,b)=(a,\circ)+(\circ,b)=(a,\circ)+(b,\circ)(\circ,1)=a+bi$$

---

* که درسال ۱۸۳۳ ازسوی همیلتن برای‌آکادمی سلطنتی ایرلند فرستاده شده‌است.

نوشت، که در آن $(0,1)$ بانماد i نشان داده می‌شود و $(a,0)$ و $(b,0)$ با اعداد حقیقی a و b یکی گرفته می‌شوند. بالاخره ملاحظه می کنیم که

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

دستگاه اعداد مختلط دستگاه اعداد بسیار مناسبی برای مطالعهٔ بردارها ودوران در صفحه‌است*. همیلتن در تلاش برای ابداع دستگاه مشابهی از اعداد برای مطالعهٔ بردارها و دورانها درفضای سه‌بعدی بود. در تحقیقات خود، وی بدین نتیجه رسید که نه‌تنها باید زوج اعداد حقیقی مرتب (a,b) را که اعداد حقیقی را درخود نشانده باشد، در نظر گیرد، بلکه باید چهارتاییهای اعدادحقیقی مرتب‌مانند (a,b,c,d) راکه هم اعدادحقیقی وهم اعدادمختلط در آن نشانده شده باشد، درنظر گیرد. به عبارت دیگر، دوچنین چهارتایی‌مانند (a,b,c,d) و (e,f,g,h) برابر تعریف‌می‌شوند اگر وفقط اگر $a=e$، $b=f$، $c=g$، $d=h$. همیلتن لازم دید تاجمع وضرب چهارتاییهای اعدادحقیقی‌مرتب‌را چنان تعریف کند، که درحالت خاص، روابط

$$(a,0,0,0)+(b,0,0,0)=(a+b,0,0,0),$$
$$(a,0,0,0)\,(b,0,0,0)=(ab,0,0,0),$$
$$(a,b,0,0)+(c,d,0,0)=(a+c,b+d,0,0),$$
$$(a,b,0,0)\,(c,d,0,0)=(ac-bd,ad+bc,0,0)$$

را داشته‌باشد. بـا **کواترنیون** (حقیقی) نامیدن چنین چهارتاییهای اعداد حقیقی مرتب، همیلتن دریافت که باید تعریفهای زیر را برای جمع و ضرب کواترنیونهای خود تدوین کند:

$$(a,b,c,d)+(e,f,g,h)=(a+e,b+f,c+g,d+h),$$
$$(a,b,c,d)(e,f,g,h)=(ae-bf-cg-dh,af+be+ch-dg,$$
$$ag+ce+df-bh,ah+bg+de-cf).$$

به‌ازای عدد حقیقی دلخواهی مانند m، با یکی دانستن کواترنیون $(m,0,0,0)$ با m

$$m(a,b,c,d)=(a,b,c,d)m=(ma,mb,mc,md).$$

با این تعریفها، می‌توان نشان داد که اعداد حقیقی و اعداد مختلط بین کواترنیونها نشانده شده‌اند، جمع وضرب کواترنیونها جابجایی وشرکتپذیرند، وضرب کواترنیونهاشرکتپذیر ونسبت به‌جمع توزیعپذیر است. اما قانون جابجایی ضرب برقرار نیست. برای ملاحظهٔ

---

* این مناسب بودن ناشی ازاین حقیقت است کـه وقتی یك عدد مختلط مانند $a+bi$ به‌عنوان معرف نقطه Z با مختصات دکارتی قائم (a,b) تلقی می‌شود، آنگاه عدد مختلط Z را می‌توان به‌عنوان معرف بردار OZ تلقی کرد، که درآن O مبدأ مختصات است.

این مطلب، درحالت خاص، دوکواترنیون $(0,1,0,0)$ و $(0,0,1,0)$ را درنظر گیرید. می‌توان دید که

$$(0,1,0,0)(0,0,1,0)=(0,0,0,1)$$

درحالی که

$$(0,0,1,0)(0,1,0,0)=(0,0,0,-1)=-(0,0,0,1)\ ;$$

یعنی، قانون جابجایی ضرب شکسته می‌شود، در واقع اگر **واحدهای کواترنیونی** $(1,0,0,0)$، $(0,1,0,0)$، $(0,0,1,0)$، $(0,0,0,1)$ را به‌ترتیب با ۱، i، j، k نشان دهیم، می‌توانیم تحقیق کنیم که جدول ضرب زیر حکمفرماست؛ یعنی، نتیجهٔ مطلوب درخانه‌ای که مشترك بین سطری که سرسطر آن اولین عامل ضرب است وستونی که سرستون آن عامل ضرب دوم است، پیدا می‌شود:

X	۱	i	j	k
۱	۱	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

همیلتن حکایت کرده است که فکر کنار گذاشتن قانون جابجایی ضرب، پانزده سال بعد از تفکر بی‌ثمر، موقعی که بازنش درکنارهٔ رویال کانال[1] نزدیك دوبلین اندکی پیش از تاریك شدن هوا، قدم می‌زده، مثل برق در ذهنش خطور کرده‌است. وی از این فکر دور از باور چنان به‌هیجان درمی‌آید که قلمتراش خودرا ازجیب درآورده و لب جدول ضرب بالارا بریکی ازسنگهای پل براوم[2] حك می‌کند. امروزه لوحه‌ای که درسنگهای پل کار گذاشته‌شده، روایتگر این‌ماجراست(نگاه کنید به‌شکل زیر). بدین گونه یکی از لحظات بزرگ در ریاضیات به‌یادگار مانده‌است.

می‌توان کواترنیون $a+bi+cj+dk$ را به‌شکل (a,b,c,d) نوشت. وقتی دوکواترنیون بدین شکل نوشته می‌شوند می‌توان آنهارا نظیر چند جمله ایهایی برحسب i، j، k درهم ضرب کرد، وسپس حاصلضرب‌را به‌کمك جدول ضرب بالا به‌همان شکل

1. Royal Canal 2. Broughm Bridge

اینجا، به‌هنگام قدم زدن
درشانزدهم اکتبر ۱۸۴۳
سرویلیام راوئن همیلتن
دربرقی از نبوغ فرمول اساسی
ضرب کواترنیونها
$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$
راکشف و آن‌را برسنگی ازاین‌پل کند.

درآورد.

در سال ۱۸۴۴، هرمان گونترگراسمان اولین چاپ اثر مهم خود حساب توسیعها[1] را منتشرکرد، که درآن دسته‌ای از جبرها با تعمیم بسیار بیشتری نسبت به‌جبرکواترنیون همیلتن بسط یافته‌بودند. به‌جای اینکه فقط مجموعه‌های چهارتایی از اعداد حقیقی در نظرگرفته شوند، گراسمان مجموعه‌های مرتب از n عدد حقیقی‌را در نظر گرفت. به‌هر مجموعه‌ای مانند $(x_1, x_2, \dots, x_n)$، گراسمان عدد ابرمختلطی به شکل $x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$ را نسبت داد که درآن e_1، e_2، ...، e_n واحدهای بنیادی جبر او هستند. دوعدد ابرمختلط از این نوع، نظیرچند جمله‌ایهایی برحسب e_1، e_2، ...، e_n جمع وضرب می‌شوند. دراین صورت جمع دوچنین عددی، عددی ازهمان نوع به‌دست می‌دهد. برای آنکه حاصلضرب دو عدد از این‌گونه، عددی از همین نوع را به وجود آورد، ساختن جدول ضربی برای واحدهای e_1، e_2، ...، e_n مشابه باجدول ضرب‌همیلتن برای‌واحدهای ۱، i، j، k لازم است. دراینجا آزادی عمل‌زیادی وجود دارد، وجبرهای مختلفی را می‌توان باساختن جداول ضرب مختلف به‌وجود آورد. هرجدول ضرب تابع مورد استعمال‌آن و قوانینی از جبر است‌که حفظ آنها مورد نظر است.

قبل ازختم این بخش، یک‌جبر غیرجابجایی‌دیگررا درنظر می‌گیریم ـ جبرماتریسی که توسط ریاضیدان انگلیسی آرثرکیلی (۱۸۲۱ ـ ۱۸۹۵) درسال ۱۸۵۷ ابداع شد. کیلی در رابطه باتبدیل خطی‌از نوع زیرمتوجه ماتریسها شد

$$x'=ax+by,$$
$$y'=cx+dy,$$

که درآن a، b، c، d اعداد حقیقی‌اند، و می‌توان آن‌را به‌عنوان نگاشتی درنظرگرفت‌که نقطهٔ (x,y) را به نقطهٔ (x',y') می‌برد. روشن است‌که تبدیل بالا توسط چهار ضریب

1. Ausdehnungslehre

a، b، c، d کاملاً معین می‌شود، ولذا این تبدیل را می‌توان با آرایهٔ مربعی زیر درقالب نماد درآورد:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

که ما آن را یك **ماتریس (مربعی از مرتبهٔ دوم)** می‌نامیم. چون دوتبدیل مورد بحث در صورتی وفقط درصورتی یکی‌هستندکه دارای ضرایب یکسان باشند، ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

را بنابرتعریف برابرمی‌گیریم اگروفقط اگر $a=e$، $b=f$، $c=g$، $d=h$. اگربه‌دنبال تبدیل بالا تبدیل

$$x''=ex'+fy'$$
$$y''=gx'+hy'$$

انجام شود، به‌کمك جبرمقدماتی، می‌توان نشان دادکه نتیجهٔ آن تبدیل زیر است

$$x''=(ea+fc)x+(eb+fd)y,$$
$$y''=(ga+hc)x+(gb+hd)y.$$

این‌کار به‌تعریف زیر برای ضرب ماتریسها منجر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix}.$$

جمع ماتریسها به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix},$$

و، اگر m عددی حقیقی باشد، تعریف زیررا می‌کنیم:

$$m\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}m=\begin{bmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{bmatrix}.$$

درجبر ماتریسها که این‌گونه به‌دست می‌آید، می‌توان نشان دادکه جمع هم جابجایی وهم شرکتپذیر است و اینکه ضرب شرکتپذیـر و نسبت به‌جمع توزیعپذیر است ، اما ضرب ،

همچنانکه با مثال سادهٔ زیر نشان داده می‌شود، جا بجایی نیست،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

با بسط جبرهایی با قوانین ساختاری متفاوت با قوانین جبر معمولی، همیلتن، گراسمان، و کیلی سیل بندهای جبر مجرد نوین را گشودند. درواقع با تضعیف یا حذف اصول موضوعهٔ گوناگون جبر معمولی، یا با گذاشتن یك یا چند اصل موضوع به‌جای اصول دیگر، که با بقیهٔ اصول موضوعه سازگار باشند، دستگاههای گوناگون متعددی را می‌توان مطالعه کرد. به‌عنوان برخی از این دستگاهها ، دستگاههای زیر را داریم : گروهوارها ، شبه گروهها، طوقه‌ها، نیمگروهها، تکواره‌ها، گروهها ، حلقه‌ها ، حوزه‌های صحیح ، شبکه‌ها، حلقه‌های تقسیم، حلقه‌های بولی، هیأتها، فضاهای برداری، جبرهای ژوردان، و جبرهای لی، که دو جبر اخیر مثالهایی از جبرهای غیرشرکتپذیرند. این گفته احتمالاً صحیح است که ریاضیدانان، تا به‌امروز، بالغ بر ۲۰۰ تا ازچنین ساختارهای جبری را مطالعه کرده‌اند. قسمت اعظم این کار به‌قرن بیستم تعلق دارد و انعکاسی از روح تعمیم و تجریدی است که این گونه در ریاضیات امروز متداول است. جبر مجرد به‌واژگان قسمت اعظم ریاضیات امروزی بدل شده‌است.

۱۳-۹ همیلتن، گراسمن، بول، و دمورگن

ویلیام راوئن همیلتن، که بی‌چون وچرا مشهورترین چهرهٔ ایرلندی درزمینهٔ ریاضیات است، درسال ۱۸۰۵ در دوبلین به‌دنیا آمد و، جز دیدارهای کوتاه از سایر جاها، تمام زندگی خودرا درهمانجا به‌سر برد. خیلی زود یتیم شد، اما قبل از آن‌هم، وقتی تنها یك‌سال داشت، پرورش او به‌عمویی واگذار شد که به‌تعلیم جدی ولی نامتوازن او پرداخت در حالی‌که بریادگیری زبانها تأکید فراوان داشت. ویلیام نشان‌داد که اعجوبه‌ای‌است کم‌نظیر و وقتی به‌سن ۱۳ رسید تعداد زبانهای خارجی‌که در حد تسلط با آنها آشنایی یافته بود، به‌عدد سنین او بود. وی به‌آثار کلاسیك علاقمند شد و بدون آنکه واقعاً توفیقی داشته باشد، به تفنن درچیزی پرداخت‌که برای او به‌عنوان میلی مادام‌العمر درآمد ــ گفتن شعر. درسلك دوستان صمیمی شاعر بزرگ ویلیام وردزوورث[1] درآمد وضمن تحسین وی، مورد تمجید او نیز قرار گرفت.

در۱۵ سالگی تغییرعلاقه داد و به ریاضیات دلبستگی پیدا کرد. این تغییر ازملاقات او با زراکولبرن[2]، محاسب برق‌آسای امریکایی حاصل شد،که زرا، گرچه خود جوانکی بیش نبود ، قدرت خود را در نمایشگاهی در دوبلین به‌عرضه گذاشت . اندك زمانی بعد تصادفاً نسخه‌ای از حساب عمومی نیوتن به‌دست همیلتن رسید. وی با حرص و ولع آن را خواند وبعداً بر هندسهٔ تحلیلی وحسابان تسلط یافت. سپس چهارجلد پرینسیپیا راخواند و به‌آثار بزرگ ریاضی قارهٔ اروپا روکرد . باخواندن مکانیك سماوی لاپلاس ، پرده از

1. William Wordsworth 2. Zerah Colburn

یك خطای ریاضی برداشت و درسال ۱۸۲۳ مقاله‌ای در بارهٔ آن نوشت‌که توجه زیادی را به‌خود جلب کرد. سال بعد وارد کالج ترینیتی در دوبلین شد.

دوران شغلی همیلتن در دانشگاه منحصر به‌فرد بود، زیرا درسال ۱۸۲۸، وقتی‌فقط ۲۱ سال داشت و هنوز دانشجوی دورهٔ لیسانس بود، هیئت منتخبین او را به‌سمت منجم سلطنتی ایرلند، سرپرست رصدخانهٔ دانسینك[1]، واستادنجوم در دانشگاه برگزیدند. به‌فاصلهٔ کوتاهی بعداز آن، تنها در زمینهٔ‌نظریهٔ ریاضی، وی‌انکسارمخروطی‌دربلورهای دومحوری‌را پیش‌بینی کرد، که بعداً به‌طور تجربی‌توسط فیزیکدانها تأیید شد. درسال ۱۸۳۳مقالهٔ مهم خودرا به آکادمی ایرلند عرضه کردکه درآن جبر اعداد مختلط به‌عنوان جبرزوجهای‌مرتب اعداد حقیقی ظاهر می‌شود (نگاه‌کنید به‌بخش ۱۳-۸). درسال ۱۸۳۵ به دریافت‌عنوان شهسواری [شوالیه] نائل شد.

بعد از مقالهٔ ۱۸۳۳اش، همیلتن برای مدتهای مدید به‌تفکر دربارهٔ جبر سه‌تاییها و چهارتاییهای مرتب اعداد حقیقی پرداخت، ولی مسئلهٔ تعریف ضرب به‌گونه‌ای که‌قوانین آشنای این عمل‌را حفظ کند، همواره به‌عنوان مانعی دربرابر او جلوه‌گر می‌شد. سرانجام درسال ۱۸۴۳، هنگامی‌که درامتدادکانال‌سلطنتی[2]درخارج‌شهر دوبلین‌قدم‌می‌زد، ازراه‌شهود در ذهنش چنین‌آمدکه انتظارش بیجا بوده وباید قانون جابجایی را فداکند، و چنین‌شدکه جبرکواترنیونها، اولین‌جبر غیر جابجایی، دفعتاً تکوین یافت (نگاه‌کنید به‌بخش۱۳-۸).

درطی حدود ۲۰ سالی‌که ازعمرش‌باقی‌مانده بود، همیلتن‌قسمت اعظم وقت وتوان خود را به‌ بسط کواترنیونهای خود، که حس می‌کرد در فیزیك ریاضی اهمیتی ریشه‌ای خواهد داشت، صرف کرد. اثربزرگ او، رساله دزباب کواترنیونها[3]، درسال ۱۸۵۳منتشر

ویلیام راوئن‌همیلتن
(مجموعهٔ‌گرانجر[4])

---

1. Dunsink 2. Royal canal
3. Treatise on Quaternions 4. Granger

شد، که پس از آن وی خود را وقف آماده کردن کتاب حجیمتر اصول کواترنیونها[1] کرد، ولی پیش از اتمام کتاب درسال ۱۸۶۵ در دوبلین، بهمرگی که عمدتاً بر اثر الکلیسم و شرایط عموماً ناگوار ناشی از یك زندگی زناشویی بسیار نامناسب بود، درگذشت. مبحث کواترنیونها برای مدتی عدهای طرفدار ثابتقدم پیدا کرد، ولی بهموقع خود آنالیز برداری انعطافپذیرتر فیزیکدان وریاضیدان امریکایی، جوسایا ویلارد گیبس[2] (۱۸۳۹-۱۹۰۳) از دانشگاه ییل، و نیز مبحث عامتر n - تاییهای مرتب هرمان گونتر گراسمان، نظریهٔ کواترنیونها را بهمقامی رساند که تنها چیزی بسیار جالب ولی سزاوار موزه در تاریخ ریاضیات گردید.

همیلتن علاوه بر کار در کواترنیونها، دراپتیك، دینامیك، و حل معادلات درجهٔ پنجم، تابعهای نوسانکننده، منحنی شتابنمای یك ذرهٔ متحرك*، و حل عددی معادلات دیفرانسیل مطلب نوشت.

دانشجویان فیزیك بهنام همیلتن در باصطلاح تابع همیلتنی، و در دینامیك با معادلات دیفرانسیل همیلتن ـ ژاکوبی برمیخورند. در نظریهٔ ماتریس، قضیه، معادله، و چندجملهای همیلتن ـ کیلی را داریم و در تفریحات ریاضی بهبازی همیلتنی برمیخوریم که بر روی دوازده وجهیهای منتظم انجام میشود. (نگاه کنید بهمطالعهٔ مسئلهای ۲۴.۱۳.)

شاید یادآوری این نکته باعث خوشایند آمریکاییان شود که درسالهای واپسین و غم آلود بیماری و نزاعهای زندگی زناشویی همیلتن، آکادمی ملی علوم ایالات متحده[3]، که جدیداً تأسیس شده بود، همیلتن را بهعنوان اولین عضو خارجی برگزید. افتخار کم سابقهٔ دیگری که نصیب همیلتن کردند، بههنگام شرکت او در دومین گردهمایی انجمن بریتانیایی در کیمبریج، در سال ۱۸۴۵ بود که بهمدت یك هفته در اطاقهای مقدس کالج ترینیتی به او جا دادند، که بنا به روایات آیزك نیوتن کتاب پرینسیپیا را در آنجا تصنیف کرده است.

سرویلیام راوئن همیلتن را نباید با معاصرش، سرویلیام همیلتن (۱۷۸۸ - ۱۸۵۶)، فیلسوف برجستهای از ادینبورو، مشتبه کرد. دومی این عنوان را بهارث برد؛ اولی آن را کسب کرد.

گراسمان در اشتتین[4] آلمان، درسال ۱۸۰۹ پا بهعرصهٔ وجود گذاشت، و درهمانجا درسال ۱۸۷۷ از دنیا رفت. وی مردی باعلاقههای وسیع فکری بود. وی نهتنها یك معلم ریاضی، بلکه معلم مذهب، فیزیك، شیمی، لاتین، تاریخ، و جغرافیا بود. وی در فیزیك مطالبی نوشت و بهتدوین کتابهای درسی مدارس درزبانهای آلمانی و لاتین، و ریاضیات پرداخت. وی ناشر مشترك یك هفتهنامهٔ سیاسی درسالهای طوفانی ۱۸۴۸ و ۱۸۴۹ بود. او بهموسیقی علاقمند بود و درسالهای ۱۸۶۰ منقد او پرایی یك روزنامه بود. وی رسالهای در فقهاللغهٔ گیاهان آلمانی تهیهکرد و یك مقاله درمیسیونری را ویرایش نمود. بهتحقیق در قواعد آواشناختی پرداخت، فرهنگی برای ریگ ـ ودا[5] نوشت و ریگ ـ ودا را بهشعر ترجمه

---

1. Elements of Quaternions 2. Josiah Willard Gibbs

* انتهای برداری که از نقطهٔ ثابتی برابر با بردار سرعت نقطهٔ متحرکی رسم شود، یك منحنی را میپیماید که شتابنمای (Hodograph) نقطهٔ متحرك نامیده میشود.

3. National Academy of Sciences of the United States 4. Stettin

۵. ریگ-ودا یکی ازچهاربخش کتاب ودا، کتاب مقدس هندوان، است که سرود ستایش خدایان هندوان است.ـم.

کرد، آهنگهای محلی‌سه‌صدایی‌را تنظیم کرد، رسالهٔ عظیم حساب توسیعها را تدوین‌نمود، و نه تا از یازده فرزند خودرا به‌ثمر رسانید.

درسال ۱۸۴۴ گراسمن اولین ویرایش‌کتاب مهم حساب توسیعهای خود را منتشر کرد. متأسفانه بیان ضعیف و گفتار مبهم وی باعث شدکه این اثر عملاً برمعاصرین او ناشناخته بماند. تدوین مجددی‌که در ۱۸۶۲، بیرون آمد، توفیق بیشتری به‌دست نیاورد. سرخورده ازعدم استقبال از اثرش، گراسمن ریاضیات را کنار گذاشت تا به‌مطالعهٔ زبان سانسکریت وادبیات بپردازد ودراین زمینه تعدادی مقالهٔ درخشان نوشت.

گراسمن تمام عمرخودرا به‌جزسالهای ۱۸۳۴ تا ۱۸۳۶ راکه دریك‌مدرسهٔ صنعتی دربرلین‌جانشین یاکوب‌اشتاینر شده و ریاضیات درس می‌داد، در شهر زادگاه خود در اشتتین به‌سر برد. دروس اوکلاً درسطح متوسطه بود، گرچه وی امیدوار بودکه سمتی در دانشگاه به‌دست آورد. پدر او در دانشکدهٔ اشتتین معلم ریاضیات و فیزیك بود. پسر او هرمان‌گراسمان[1] (متولد ۱۸۵۹) نیز یك‌ریاضیدان‌شد. پدر او دوجلدکتاب در ریاضیات نوشت وپسر رساله‌ای درهندسهٔ تصویری.

حساب توسیعها کاربرد وسیعی دارد، بدون‌آنکه (آن‌طورکه دربخش ۱۳-۸ بحث شد) محدودیتی درتعداد ابعاد موجود باشد. درسالهای اخیر غنا وعمومیت شگفت‌آورکار گراسمن درك شده و روشهای گراسمن عموماً، و بخصوص در برّ اروپا و در آمریکا، درترجیح بر روشهای هميلتن، دنبال شده‌اند.

اینك به ذکرکوتاهی از دو ریاضیدان انگلیسی، جورج‌بول[2] و اوگاستس‌دمورگن می‌پردازیم‌که، از جملهٔ سایرکارها، مطالعهٔ علمی اصول اساسی جبررا که توسط هميلتن و گراسمان آغاز شده‌بود، ادامه دادند.

جورج‌بول درلینکلن[3] انگلستان، درسال ۱۸۱۵ به‌دنیا آمد. پدر اوکاسب تلاشگر خرده‌پایی بود، وبنابراین بول تنها تحصیلاتی معمولی یافت؛ ولی توانست یونانی ولاتین را پیش‌خود فراگیرد. بعداً، زمانی‌که به‌عنوان معلم مدرسهٔ ابتدایی‌کار می‌کرد، ریاضیات را باخواندن‌آثار لاپلاس ولاگرانژ فراگرفت، زبانهای خارجی را یادگرفت، وازطریق دوستش دمورگن، به‌منطق صوری علاقمند شد. در سال ۱۸۴۷ جزوه‌ای تحت عنوان آنالیز ریاضی منطق[4] منتشر کرد که دمورگن آن‌را به‌عنوان اثردورانساز موردتحسین‌قرار داد. بول دراین اثراظهارعقیده‌کردکه ماهیت اساسی ریاضیات درصورت آن نهفته‌است ونه درمحتوای آن؛ ریاضیات (برخلاف آنچه هنوز بعضی ازفرهنگها ادعا می‌کنند) صرفاً «علم اندازه‌گیری وعدد» نیست وبلکه، به‌طور وسیعتر، هرگونه مطالعه‌ای متشکل از نمادها همراه باقواعد مشخصی‌برای عمل برآن نمادهاست، واین‌قواعد تنها مقید به‌شرط‌سازگاری درونی هستند. دوسال بعد، بول به‌سمت استادی ریاضیات درکوئینزکالج[5] جدیدالتأسیس درکورك[6] درایرلند منصوب شد. درسال ۱۸۵۴، بول ضمن بسط و ایضاح اثرپیشین خود

---

1. Hermann Grassmann 2. George Boole 3. Lincoln
4. The Mathematical Analysis of Logic 5. Queen's College 6. Cork

مربوط به ۱۸۴۷، آن‌را درقالب کتابــی تحت عنوان تفحص درقوانین تفکر[1] درآورد که در آن، هم منطق صوری و هــم جبر جدید، یعنی جبرمجموعه‌ها را که امروزه به جبربولی[2] موسوم‌است، تأسیس کرد. درسالهای اخیر، جبر بولی کاربردهایی، همچون درنظریهٔ مدارهای الکتریکی، راه یــافته است. در سال ۱۸۵۹ بول رساله در باب معادلات دیفرانسیل[3] و سپس، درسال ۱۸۶۰، رساله درباب حساب تفاضلات متناهی[4] را به‌چاپ رسانید. کتاب دوم تــا به امروز هم اثری استانــدارد باقی مانده است . بــول در ۱۸۶۴ در کــورك در گذشت.

اوگاستس دمورگن، که نامش در چندین جای دیگر این کتاب آمده است، در سال ۱۸۰۶ در مدرس ، محل کار پدرش به‌عنوان شریك درکمپانی هند شرقی ، (نابینا از یك چشم) به‌دنیا آمد . وی در ترینیتی کالج کیمبریج تحصیل کرد ، به‌عنوان رانگلر[5] چهارم فارغ‌التحصیل شد، ودر ۱۸۲۸ دردانشگاه لندن (که بعدها یونیورسیتی کالج[6] نامگذاری شد) که در آن زمان تازه تأسیس شده بود، به‌سمت استادی رسید ودر آنجا، ازطریق کارها ودانشجویانش، نفوذ گسترده‌ای درریاضیات انگلیس اعمال کرد. وی‌مطالعهٔ وسیعی‌درفلسفه وتاریخ ریاضیات داشت، وآثاری در زمینهٔ بنیادهای جبر، حساب‌دیفرانسیل، منطق، ونظریهٔ احتمالات نگاشت. او شارحی بسیار روشن‌نویس بود. کتاب بذله‌آمیز و سرگرم‌کنندهٔ او، مجموعهٔ پارادوکسها، هنوز برای سرگرمی خوانده می‌شود. وی‌کار بول را درجبرمجموعه‌ها دنبال‌کرد، و اصل دوگانی درنظریهٔ مجموعه‌ها را بیان نمودکه قوانین موسوم به **قوانین دمورگن** مثالی ازآن است: اگر A و B زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ مرجع باشند، آنگاه متمــم اجتماع A و B اشتراك متممهای A و B است، و متمم اشتراك A و B، اجتماع متممهای A و B است(بااستفاده‌ازنمادها: $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$ و $(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$، که در آن پریم معرف متمم است). نظیر بول، دمورگن ریاضیات را مطالعهٔ مجردی از نمادهامقیدبه‌مجموعه‌ای‌از اعمال‌نمادی می‌دانست. دمورگن‌مدافع صریح‌اللهجهٔ‌آزادیهای علمی ومماشات مذهبی بود. وی خوب فلوت می‌نواخت و همواره مصاحبی خوش‌مشرب، ودوستدار مسلم زندگی درشهرهای بزرگ بود. اوشیفتهٔ چیستانها و معماهای جناسی بود، و وقتی سن یاسال‌تولد او را می‌پرسیدند، جواب می‌داد، «من درسال x^2، x ساله‌بودم». وی درسال ۱۸۷۱ درلندن درگذشت.

---

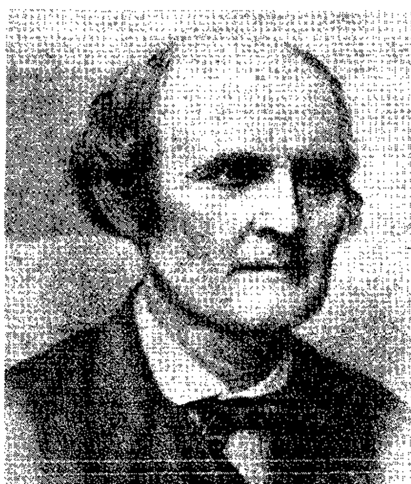
1. Investigation of the Laws of Thought
2. Boolean algebra
3. Treatise on Differential Equations
4. Treatise on the Calculus of Finite Differences
۵. در دانشگاه کیمبریج، قبول‌شدگان در امتحانی به‌نام تریپوس(Tripos) که فارغ‌التحصیلان ممتاز حق شرکت در آن دارند ، به‌چهار بخش تقسیم می‌شود ، که بخش صدری آن را رانگلر (Wrangler) نامند.ــم.
6. University College

۱۳-۱۰ کیلی، سیلوستر، و ارمیت

قسمت عمدهٔ این بخش به‌دو ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی، آرثر کیلی وجیمز جوزف سیلوستر اختصاص دارد، که بسیار انگیزه‌بخش یکدیگر بودند، اغلب در مسائل ریاضی واحدی تحقیق می‌کردند، مقدار زیادی ریاضیات نو به‌وجود آوردند، ولی با این همه، درخلق‌وخو، سبك، وديدگاه باهم مغایرت داشتند.

آرثر کیلی درسال ۱۸۲۱ در ریچموند[1]، در ساری[2]، متولد شد و در ترینیتی کالج، کیمبریج، تحصیل کردودرسال ۱۸۴۲ به‌عنوان رانگلر ارشد در ترایپوس ریاضی فارغ التحصیل شد، ودرهمان سال درامتحان مشکلتر جایزهٔ اسمیت[3] نفر اول شد. برای مدت چندین سال به‌مطالعهٔ حقوق و وکالت پرداخت، وهمواره احتیاط می‌کرد که اشتغال به‌حقوق مانع کارش در ریاضیات نشود. وقتی دانشجوی حقوق بود به‌دوبلین رفت و در دروس همیلتن دربارهٔ کواترنیونها حضوریافت. موقعی که کرسی استادی سادلری[4] در سال ۱۸۶۳ درکیمبریج تأسیس شد، این کرسی به‌کیلی پیشنهاد شد، که او آن‌را پذیرفت، وبنابراین حرفهٔ قضایی‌را که آیندهٔ پرسودی داشت در مقابل معیشت کم زندگی علمی رها کرد. اما دراین صورت می‌توانست تمام وقتش را وقف ریاضیات کند.

کیلی سومین نویسندهٔ کثیرالتألیف ریاضیات درتاریخ این‌موضوع است، وتنهااویلر وکوشی براوپیشی دارند. وی موقعی که هنوز دانشجوی دورهٔ لیسانس درکیمبریج بود، به‌نشر آثار پرداخت وبین ۲۰۰ تا ۳۰۰ مقاله در طی اشتغال به‌حقوق بیرون آورد، ودر مابقی عمر طولانی‌اش به‌کار نشر پرکثرت‌خود ادامه داد. مجموعهٔ مقالات ریاضی[5] حجیم کیلی مشتمل بر ۹۶۶ مقاله است و سیزده مجلد بزرگ به قطع ربعی به‌طور متوسط ۶۰۰



آرثر کیلی
(کتابخانهٔ کنگره)

1. Richmond 2. Surrey 3. Smith's prize
4. Sadlerian 5. Collected Mathematical Papers

صفحه درهرجلد را پرمی‌کند. به‌ندرت می‌توان زمینه‌ای در ریاضیات مجرد را سراغ گرفت که نبوغ کیلی بر آن دست نیازیده باشد یا بر غنای آن نیفزوده باشد. قبلا، در بخش ۱۳-۸، ما کار او را درجبرماتریسها بررسی کرده‌ایم. وی سهم پیشتازانه‌ای درهندسهٔ تحلیلی، نظریهٔ تبدیلها، نظریهٔ دترمینانها، هندسهٔ باابعاد بالاتر، نظریهٔ افراز، نظریهٔ منحنیها ورویه‌ها، مطالعهٔ صورتهای دودویی وسه‌سه‌یی، نظریهٔ تابعهای آبلی، تتا وبیضوی دارد. اما شاید مهمترین کار اوابداع وبسط نظریهٔ پایاها باشد. نطفه‌های این نظریه رامی‌توان درنوشته‌های لاگرانژ، گاوس، و به‌ویژه، بول یافت. مسئلهٔ اساسی نظریهٔ پایاها یافتن تابعهایی ازضرایب معادلهٔ جبری مفروضی است که وقتی متغیرهای معادله درمعرض یك تبدیل خطی کلی قرارمی‌گیرند، به‌جز درمورد فاکتوری که تنها متضمن ضرایب تبدیل است، بلاتغییرباقی می‌مانند. سیلوستر به‌همین مبحث علاقمند شد، و این دو شخصیت، که هر دو در آن موقع در لندن زندگی می‌کردند، پشت‌سرهم کشفیات تازه‌ای را بیرون دادند.

سبك ریاضی کیلی تربیت قضایی‌اورا آشکارمی‌کند، زیرا مقاله‌های او دقیق، سرراست، بااسلوب، و روشن‌اند. وی حافظه‌ای شگفت‌انگیز داشت وچنین می‌نمود که هرگز چیزی‌را که دیده یاخوانده، فراموش نمی‌کند. وی همچنین‌خویی به‌طوراستثنایی آرام وملایم‌داشت. اورا «ریاضیدان ریاضیدانان» نامیده‌اند.

کیلی اشتیاق غریبی به‌خواندن رمان پیداکرد. وی درموقع مسافرت، در وقت‌انتظار برای‌شروع گردهماییها، ودرهرفرصتی که پیش‌می‌آمد، رمان‌می‌خواند. درطول‌زندگی‌اش وی‌هزاران‌کتاب رمان، نه‌تنها به‌زبان انگلیسی، بلکه‌به‌یونانی، فرانسوی، آلمانی وایتالیایی خواند. وی‌ازنقاشی کردن، به‌ویژه‌آبرنگ، لذت‌زیادی می‌برد، واستعداد زیادی درنقاشی آبرنگ ازخود بروز داد. او دوستدار سرسخت‌آموختن‌گیاهشناسی و به‌طورکلی طبیعت‌شناسی بود.

کیلی، به‌سنت حقیقی‌انگلیسی، کوهنورد دوستگاری بود، وبرای‌راه‌پیماییهای‌طولانی وصعودبه‌کوه، سفرهای متعددی به‌قارهٔ اروپاکرد. حکایت‌کرده‌اند که به‌ادعای خودش، دلیل مبادرت او به‌کوهنوردی آن بودکه، گرچه صعود ازکوهها را دشوار وخسته‌کننده می‌یافت، احساس نشاط عظیمی‌که بعداز فتح قله به‌او دست می‌داد، نظیر احساسی بودکه بعد از حل یك مسئلهٔ ریاضی مشکل یاکامل کردن نظریهٔ ریاضی پیچیده‌ای به‌او دست می‌داد، وبرای‌او آسانتر بودکه این احساس خوش را باصعود به‌کوه به‌دست‌آورد.

کیلی در سال ۱۸۹۵ درگذشت. به فاصلهٔ کوتاهی بعد از آن، شارل ارمیت[1] در گزارشها[2] چنین‌نوشت: «مشخصهٔ استعداد ریاضی کیلی وضوح و زیبایی‌غایی‌صورت‌تحلیلی آن است؛ این استعدادرا ظرفیت‌کار بی‌نظیر وی‌که موجب شده است این عالم برجسته‌با کوشی‌مقایسه شود، تقویت می‌کند.»

جیمز جوزف سیلوستر[3] درسال ۱۸۱۴ درلندن به‌دنیا آمد وآخرین فرزند خانواده

---

1. Charles Hermite
2. Comptes Rendus
3. James Joseph Sylvester

در بین چند فرزند بود. شهرت خانواده در ابتدا جوزف بود، ولی بزرگترین پسرخانواده به‌آمریکا مهاجرت کرد، و به‌علتی که امروزه معلوم نیست، شهرت جدید سیلوستررا برگزید، واین شهرت را بقیهٔ اعضای خانواده پذیرفتند. این برادرآمریکایی آمارگر بود، و به‌هیئت مدیرهٔ پیمانکاران بخت آزماییهای ایالات‌متحده پیشنهادکردکه مسئلهٔ مشکلی‌دربارهٔ ترتیبها راکه باعث زحمت آنان شده‌بود، به‌برادرش جیمز، که درآن موقع تنهاشانزده سال‌داشت، واگذارکنند. جواب کامل واقناع کنندهٔ جیمز به‌مسئله سبب آن‌شدکه هیئت‌مدیره به‌ریاضیدان جوان یك جایزهٔ ۵۰۰ دلاری اعطا نماید.

در سال ۱۸۳۱ جیمز وارد کالج سنت جیمز[1] کیمبریج شد وشش سال بعد رانگلر دوم شد. از سال ۱۸۳۸ تا ۱۸۴۰ به‌عنوان استاد فلسفهٔ طبیعی [فیزیك] در دانشگاه لندن به‌خدمت پرداخت وسپس، درسال ۱۸۴۱، سمت استادی ریاضیات در دانشگاه ویرجینیا[2] درآمریکارا پذیرفت واین‌پست راچندماه‌بعد به‌دلیل آنکه وارد نزاعی بادوتن‌ازدانشجویانش شد، ترك گفت. با بازگشت به‌انگلستان، وی دریك شرکت بیمه مشغول کار شد و در سال ۱۸۵۰ اجازهٔ وکالت دعاوی گرفت. درسال ۱۸۴۶ همکاری خودرا با آرثرکیلی شروع کرد.

ازسال۱۸۵۵تا۱۸۷۰، سیلوستر استاد ریاضیات آکادمی‌سلطنتی‌نظامی[3] در وولویچ[4] شد. درسال۱۸۷۶ وی به‌عنوان استاد ریاضیات‌در دانشگاه جان‌هاپکنیز[5] درشهربالتیمور[6] به‌آمریکا بازگشت وهفت‌سال‌خوش و بسیار پرثمررا درآنجا به‌سربرد و درسال ۱۸۷۸ مؤسس وسردبیرمجلهٔ آمریکایی ریاضی[7] شد. هنگام خدمت در دانشگاه جان‌هاپکنیز، کیلی را برای ایراد سلسله دروسی دربارهٔ توابع آبلی به‌دانشگاه دعوت‌کـرد، وخود اوهم در کلاسهای درس وی حضور یافت . در سال ۱۸۸۴ کرسی ساویلی هندسه را در دانشگاه آکسفورد پذیرفت. در۱۸۹۷، درهشتادوسه‌سالگی درلندن درگذشت.

اولین مقاله‌های ریاضی سیلوستر درنظریهٔ نوری‌فرنل[8] وقضیهٔ استورم[9] بود. سپس، به‌تشویق کیلی به‌نوشتن مقالات مهمی درجبر جدیدپرداخت. وی مقالاتی درنظریهٔ حذف، نظریهٔ تبدیل، صورتهای‌کانونی، دترمینانها، حساب صورتها، نظریهٔ افـراز، نظریهٔ پایاها، روش چبیشف درخصوص تعداد اعداد اول درحدود معین ، مقادیر ویـژهٔ ماتریسها، نظریهٔ معادلات، جبرچندگانیها، نظریهٔ اعداد، ماشینهای مفصلی، نظریهٔ احتمالات، و عکس‌سازها نوشت. وی‌سهم زیادی در واژه‌شناسی ریاضی داشت وآن‌قدر واژهٔ ریـاضی نوساخت‌که اورا «حضرت‌آدم‌ریاضیات[10]» نامیده‌اند.

همانطورکه قبلاً ذکرشد، کیلی وسیلوستر ازلحاظ خلق‌وخو، سبك، ودیدگاه نقطهٔ

---

1. St. John's College 2. University of Virginia
3. Royal Military Academy 4. Woolwich
5. the Johns Hopkins University 6. Baltimore
7. American Journal of Mathematics 8. Fresnel 9. Sturm
10. the Adam of mathematics

مقابل هم بودند. درحالی که کیلی آرام وخونسرد بود، سیلوستر اغلب آتشی‌مزاج بودوخیلی زود به‌هیجان می‌آمد . تدریس کیلی با اسلوب و تـدارك یافته بود ؛ در حالی که تدریس سیلوستر بی‌برنامه و سرزبانی بود. کیلی بادقت‌و مرتب می‌نوشت؛ سیلوستر پـراکنده و در مواقعی که حالت‌وجد به‌او دست می‌داد، می‌نوشت. دروس کیلی آثارکاملی بودند؛ سیلوستر اغلب ریاضیات‌را درکلاس‌درس خلق می‌کرد. کیلی حافظه‌ای شگفت‌انگیز داشت؛سیلوستر اغلب حتی برخی کشفیات‌خود را به‌خاطر نمی‌آورد. کیلی دستاوردهای ریاضی دیگران را می‌خواند؛ سیلوسترخواندن‌کارهای دیگران را کسل‌کننده می‌شمرد. کیلی اصول‌اقلیدس را تحسین‌می‌کرد؛ سیلوستر ازاین‌اثر بیزاربود. کیلی، گرچه قوی‌و پرطاقت‌بود، جثهٔ کوچکی داشت، سیلوستر تنومند، عضلانی، و چارشانه بود.

سیلوسترعلاقه‌ای جاودانی به‌شعر داشت وباسرودن شعرخودرا سرگرم می‌کرد. شبی، درانستیتوی پی‌بادی[1] دربالتیمور، وی شعر روزالیند[2]، سرودهٔ خودرا می‌خواند که مشتمل بر ۴۰۰ بیت بودکه همه باشیرزن قهرمان «روزالیند» هم قافیه بودند. برای آنکه شعر را درنیمه قطع نکند، وی ابتدا یك ساعت‌ونیم صرف خواندن پانوشتهای توضیحی‌کرد، که بسیاری از آنها منجر به‌توضیحات ارتجالی بیشتر شد. سپس، برای باقی‌ماندهٔ حضار،خود شعررا خواند. در سال ۱۸۷۰ وی کتابچهٔ کوچکی تحت‌عنوان قوانین شعر[3] منتشر کرد که ارزش زیادی برای آن قایل بود.

سیلوستر به‌موسیقی هم علاقمند بود و خوانندهٔ دوستگاری بـاصدایی ظریف بود و زمانی از آهنگساز معروف فرانسوی شارل فرانسوا گونو[4] درس موسیقی فراگرفته بود . گاهگاهی درگردهماییهای کارگری باخواندن آوازدیگران‌را سرگرم می‌کرد، و گفته‌اند که اوبیشتر به‌صدای کنترالتوی بالای خود درموسیقی می‌بالید تابه‌کارهای خود درنظریهٔ پایاها در ریاضیات. درپانوشتی برمقاله‌اش، «دربارهٔ قاعدهٔ نیوتن بـرای‌یافتن ریشه‌های موهومی» وی‌چنین‌دادسخن‌می‌دهد: «آیا نباید موسیقی‌را ریاضی‌احساس خواند، و ریاضی را موسیقی عقل؟ روح هردویکی است! پس دراحساس موسیقیدان، ریاضی جلوه‌گراست، و درتفکرریاضیدان موسیقی.»

شاید ذکر این نکته جالب باشدکه برجسته‌ترین شاگـرد خصوصی که در روزهای سخت اوایل زندگی‌سیلوستر پیش او درس‌می‌خواند، زن‌جوانی به‌نام فلورانس‌نایتینگل[5] بودکه بعدها به‌عنوان اصلاحگر روش پرستاری بیمارستانی به‌شهرت جهانی رسید.

بسیاری‌ازکشفیات زیبای کیلی وسیلوستر را در رساله‌های ستایش‌برانگیز جورج‌سمن[6] (۱۸۱۹ – ۱۹۰۴)، رئیس کالج ترینیتی، در دوبلین، ویکی از بهترین نویسندگان کتابهای پیشرفتهٔ درسی زمان خود، می‌توان یافت.

قسمت عمدهٔ کار کیلی و سیلوستر را ریاضیدان با استعداد فرانسوی ، شارل‌ارمیت

1. Peabody Institute 2. Rosalind 3. The Laws of Verse
4. Charles Francois Gounod 5. Florence Nightingale
6. George Salmon

دنبال کرده آن‌را بسط داد. شارل ارمیت سهم مهمی در جبر و آنالیز دارد. ارمیت در دیوز[۱]، درلورن، در سال ۱۸۲۲ به‌دنیا آمد و بعد از تحصیلاتی نامنظم، ابتدا در دبیرستان لوئی-لو-گران[۲] و سپس به‌مدت کوتاهی در اکول پلی‌تکنیک، درسال ۱۸۴۸ سمت ممتحن پذیرش و طراح سؤال اکول پلی‌تکنیک شد. وی بعداً به‌عنوان استاد اکول پلی‌تکنیک و سوربن[۳] به‌خدمت پرداخت، و تازمان بازنشستگی درسال ۱۸۹۷ در مؤسسهٔ اخیرماند. وی درسال ۱۹۰۱ در پاریس درگذشت.

گرچه ارمیت نویسندهٔ کثیرالتألیفی نبود، بیشتر مقاله‌های وی به‌مسائل پر اهمیت می‌پردازند و روشهای او اصالت زیاد وقابلیت کارگیری وسیع دارند. حتی موقعی که در لوئی - لو - گران بود، ارمیت دومقاله نوشت که یکی از آنها از کیفیتی استثنایی برخوردار بسود و در سالنامهٔ جدید ریاضیات، مجله‌ای کـه در ۱۸۴۲ تأسیس شد و بـه علایق دانشجویان مدارس عالی اختصاص یافت، برای نشرپذیرفته شد. استاد راهنمای او، پروفسور لویی پل امیل ریشارد[۴]، خود را موظف دیدکه این نکته‌را با پدر ارمیت در میان گذارد که شارل «یك لاگرانژ جوان است». تحقیقات ارمیت محدود به‌جبروآنالیزنبود. وی دربارهٔ نظریهٔ اعداد، ماتریسها، کسرهای مسلسل جبری، پایاها وهمپایاها، کوانتیکها[۵]، اوکتانها[۶]، انتگرالهای معین، نظریهٔ معادلات، توابع بیضوی، توابع آبلی، و نظریهٔ توابع مقالاتی نوشت. درزمینهٔ نظریهٔ توابع وی بزرگترین نویسندهٔ عصرخود بوده است. مجموعهٔ آثار ارمیت، که توسط امیل پیکار[۷] ویراستاری شده، چهار مجلد را شامل می‌شود.

دونتیجهٔ ریاضی‌مهم منسوب به‌ارمیت که ازهمه بیشتر مورد توجه عامه است، راه‌حل مربوط به‌سال ۱۸۵۸ او برای معادلات درجه پنجم کلی به‌کمك توابع بیضوی، وبرهان مربوط به‌سال ۱۸۷۳ او از متعالی بودن عدد e است. توفیق ارمیت درحل معادلات درجهٔ پنجم بعداً منجر به‌معلوم شدن‌این‌حقیقت شد که ریشه‌ای از معادلهٔ درجه n م کلی‌را می‌توان برحسب ضرایب معادله و به‌کمك توابع فوکسی بیان کرد، و روشی را که او برای اثبات متعالی بودن e به‌کار برد در سال ۱۸۸۲، لیندمان[۸] بـرای اثبات متعالی بودن π به‌کار گرفت.

ارمیت بانقص‌عضو درپای راست به‌دنیا آمد ودرسرتاسر عمرش لنگ بود، وبرای آمد وشد به‌عصا نیاز داشت. یکی‌ازمحاسن علیل بودنش این بودکه مانع پیوستن به‌هرنوع خدمت نظام شد. زیان این نقص عضو آن بودکه پس‌ازیك سال تحصیل دراکول پلی‌تکنیك، اورا به‌این دلیل که بنابرادعای مقامات مدرسه پای‌لنگش او را از احراز مشاغلی که برای

---

1. Dieuze 2. Louis – le – Grand lycée 3. Sorbonne
4. Louis Paul Émile Richard 5. Quantics [توابع همگن جبری چند متغیره]
۶. اوکتان Evectant، پادوردا (contravariant)یی است که ازعمل یك اوکتور evector بریك پایا یاچند پایا تشکیل می‌شود. خود اوکتور عملگری است که از یك کوانتیك تشکیل می‌شود. ـم.
7. Émile Picard 8. Lindemann

دانشجویان موفق مدرسه موجود بود باز می‌داشت ، کنار گذاشتند. علی‌رغم لنگی‌پایش و مشکلاتی که درابتدا برای یافتن شغل مناسبی داشت، ارمیت همواره مردی‌خلیق بود واین امرموجب می‌شدکه محبوب همهٔ کسانی‌باشدکه او را می‌شناختند. برخی‌ریاضیدانان مردان جوانی‌راکه خواهان شناخته‌شدن هستند، بیدریغ راهنمایی‌می‌کنند؛ ارمیت‌را بی‌چون‌وچرا عالیترین شخصیتی از این نوع در سرتاسر تاریخ ریاضیات دانسته‌اند. در سال ۱۸۵۶ ، به‌دنبال یك‌بیماری سخت، وی‌که ازپیروان میانه‌روی مذهب‌لاادری بود، توسط‌کوشی به مذهب رومن‌کاتولیك‌گروید.

مسئلهٔ وجود ریاضی‌موضوعی‌بسیار جدل‌آمیزاست. به‌عنوان مثال، آیا ذوات‌ریاضی وخواص‌آنهاازپیش‌درنوعی‌برزخ سرمدی ویژهٔخود وجود دارند، وما،که سرگشته درچنین عالمی‌هستیم، تصادفاً آنهاراکشف می‌کنیم؟آیا دراین‌عالم‌برزخ، میانه‌های یك‌مثلث همواره یکدیگر را درنقطه‌ای‌که هرمیانه را به‌سه قسمت می‌کند، قطع‌می‌کنند، وقطع می‌کرده‌اند، وکسی، احتمالاً در زمانهای‌گذشته، سرگشته باخیال‌خود دراین‌عالم برزخ، به‌این‌خاصیت قبلاً موجود در بارهٔ میانه‌هـای مثلث برخورده است؟ دراین عالم بـرزخ، خواص قابل ملاحظهٔ بسیاری از اشکال هندسی همواره موجودبوده‌اند، اما هنوزکسی به‌آن برنخورده، وممکن است بعد ازسالیانی به‌آن بربخورد، یاهیچ‌وقت به‌آن برنخورد. دراین‌عالم‌برزخ، اعداد طبیعی وخواص زیبای متعدد آنها همواره وجود داشته‌اند و دارند، اما این خواص تنها زمانی‌درعالم واقعی‌انسانها وجود پیدا خواهندکردکه یکی ازسرگشتگان دراین‌برزخ با آنان مواجه شود.

فیثاغورس‌و ریاضیدانان بسیاری بعداز اواین‌فکروجود ریاضی‌را درسرمی‌پروردند. ارمیت اعتقاد مسلمی به این سرزمین برزخی وجود ریاضی‌داشت. درنظر او، اعداد وهمهٔ خواص زیبای آنها همواره موجودیتی‌ازآن خود داشته‌اند، ویك‌کریستوف کلمب‌ریاضی گاهگاهی تصادفاً به یکی از این خواص قبلاً موجود برمی‌خورد و سپس‌کشف خودرا به جهانیان اعلام می‌دارد.

۱۳-۱۱ آکادمیها، انجمنها، و نشریات ادواری

افزایش فوق‌العاده درفعالیتهای علمی و ریاضی، در زمانی‌که هیچ نشریهٔ ادواری موجود نبود، به‌پیدایش تعدادی‌محفل‌بحث وگفتگومنجر گردیدکه دراوقات منظمی‌تشکیل‌می‌شدند. برخی از این‌گروهها سرانجام درقالب آکادمیها تبلور یافتند، واولین‌آنها درسال ۱۵۶۰ درناپل بود،که بعد ازآن آکادمی ملی لینچئی[1] درسال ۱۶۰۳ در رم به‌وجودآمد. سپس، به‌تبع از حرکت فعالیتهای ریاضی به‌سمت شمال اروپا درقرن هفدهم، انجمن سلطنتی[2] در

1. Accademia dei lincei
2. Royal Society

سال ۱۶۶۲ درلندن و آکادمی فرانسه[1] درسال ۱۶۶۶ درپاریس بنا گردیدند. این آکادمیها مراکزی بودندکه مقالات پژوهشی رامی‌شد در آن عرضه‌کرد و درباب آنها به‌مباحثه پرداخت.

اما نیاز به‌نشریات ادواری به‌منظور اشاعهٔ سریع یافته‌های علمی و ریاضی جدید به‌طور روزافزونی حس شد، تا اینکه امروزه چنین نشریاتی وسعتی گزاف یافته‌اند. بنا بر حسابی، قبل از سال ۱۷۰۰ تنها ۱۷ نشریه حاوی مقالات ریاضی وجود داشته‌اند، که اولین آنها درسال ۱۶۶۵ منتشر شده بود. درقرن هجدهم، ۲۱۰ نشریه از این‌قبیل پدیدار شدند، و درقرن نوزدهم، عدهٔ مجلات جدید ازاین‌دست، ۹۵۰ بود. ولی بسیاری از اینها دراغلب موارد چیززیادی دربارهٔ ریاضیات محض نداشتند. شاید قدیمی‌ترین‌مجلهٔ موجود، که عمدتاً یاکاملاً به ریاضیات پیشرفته اختصاص داشت، مجلهٔ مدرسهٔ پلی‌تکنیک[2] باشد، که انتشار آن درسال۱۷۹۴ شروع‌شد. تعدادی مجلهٔ ریاضیات مقدماتی‌تر قبلاً آغازشده بودند، ولی هدف بسیاری از اینها بیشتر سرگرم‌کردن مشترکین بامعماها، و مسائل‌بود تا بالابردن دانش ریاضی. برخی ازنشریات ریاضی درجهٔ اول امروزی درطول نیمهٔ اول قرن‌نوزدهم‌آغاز به کار کردند. درپیشاپیش آنها مجلهٔ آلمانی تحت‌عنوان مجلهٔ ریاضیات محض وکاربسته[3] است، که اولین بار درسال ۱۸۲۶ توسط ا. ل. کرله چاپ شد، و مجلهٔ فرانسوی تحت‌عنوان مجلهٔ ریاضیات محض‌وکاربسته[4] است، که درسال۱۸۳۶ به‌سردبیری ژ. لیوویل‌ظاهر گردید. این‌دومجله، به‌یادبنیانگذارانشان، اغلب مجلهٔ‌کرله[5] ومجلهٔ‌لیوویل[6] نامیده می‌شوند. درانگلستان مجلهٔ ریاضی‌کیمبریج[7] درسال۱۸۳۹ بنیان‌گذاشته شد، ازسال۱۸۴۶ تا۱۸۵۴ به مجلهٔ ریاضی‌کیمبریج ودوبلین[8] تبدیل‌شد، ودرسال۱۸۵۵ عنوان مجلهٔ فصلنامهٔ ریاضیات محض وکاربسته[9] را یافت. مجلهٔ آمریکایی ریاضی[10] درسال ۱۸۷۸ به‌سردبیری ج. ج. سیلوستر تأسیس شد . اولین نشریات ادواری دائمی که اختصاصاً علاقهٔ دبیران ریاضی‌را مدنظر داشتند تاتحقیقات ریاضی، عبارتند از آرشیوریاضیات وفیزیک[11]، تأسیس به سال ۱۸۴۱، وسالنامهٔ جدید ریاضیات[12]، که یک سال بعد تأسیس شد.

درنیمهٔ دوم قرن نوزدهم ، تحول نیرومندی موجب افزایش تعداد مجلات ریاضی درجهٔ‌اول‌شد. این‌تحول عبارت‌بود ازتشکیل‌تعدادی‌ازانجمنهای ریاضی بزرگ که نشریات

---

1. French Academy   2. Journal de l'École Polytechnique
3. Journal für die reine und angewandte Mathematik
4. Journal de mathématiques pures et appliquées
5. Crelle's Journal   6. Liouville's Journal
7. Cambridge Mathematical Journol
8. Cambridge and Dublin Mathematical Journal
9. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics
10. American Journal of Mathematics
11. Archiv der Mathematik und Physik
12. Nouvelles annales de mathématiques

ادواری به‌عنوان ارگانهای رسمی از خود داشتند. قدیمیترین این انجمنها، انجمن ریاضی لندن[1] بود که درسال ۱۸۶۵ سازمان یافت و بلافاصله به انتشار خلاصهٔ مذاکرات[2] پرداخت. این انجمن به‌صورت انجمن ملی ریاضی انگلیس درآمده است. هفت سال بعد، انجمن ریاضی فرانسه[3] در پاریس تأسیس شد، ومجلهٔ رسمی آن به بولتن[4] معروف است. در ایتالیا، در سال ۱۸۸۴ ، انجمن ریاضی محفل ریاضی پالرمو[5] سازمان داده شد ، و سه‌سال بعد به‌انتشار خلاصهٔ گزارشها[6] پرداخت. درهمین اوان انجمن ریاضی ادینبورگ[7] در اسکاتلند بنیانگذاری شد، وازآن به بعد خلاصهٔ مذاکرات خود را حفظ نموده است. انجمن آمریکایی ریاضی[8]، تحت نام دیگری، درسال ۱۸۸۸ سازماندهی شد ، وبه‌نشر بولتن خود، وسپس، درسال ۱۹۰۰ به نشر کارنامه[9] ودرهمین اواخر، در سال ۱۹۵۰، به‌نشر خلاصهٔ مذاکرات پرداخت. آلمان آخرین کشور عمده ازنظر ریاضی بود که به‌سازماندهی یك انجمن ریاضی اقدام کرد، ولی درسال ۱۸۹۰، اتحادیهٔ ریاضیدانان آلمانی[10] سازمان داده شد، که درسال ۱۸۹۲، شروع به‌نشر گزارش سالانه[11] کرد. مجلهٔ اخیر تعدادی گزارش جامع دربارهٔ پیشرفتهای نوین درزمینهٔ ریاضیات دربرداشت، چنین گزارشهایی بعضاً به‌چندین صدصفحه بالغ می‌شد. این گزارشها را می‌توان به‌عنوان پیشاهنگان دائرةالمعارفهای بزرگ ریاضی ادوار بعد تلقی کرد. مجلات ریاضی بسیارعالی اتحاد شوروی را، گرچه منشأ جدیدتری دارند، نباید نادیده گرفت.

امروزه تقریباً هرکشوری انجمن ریاضی مختص به‌خودرا دارد، و بسیاری از آنها مجامع دیگری دارند که به‌سطوح مختلف تعلیم ریاضیات اختصاص دارند. این انجمنها و مجامع به‌عوامل نیرومندی درسازماندهی و پیشرفت فعالیتهای تحقیق در ریاضیات، و در اصلاح روشهای تدریس این موضوع تبدیل شده‌اند. به‌طورکلی، هریك ازاین انجمنها و مجامع سرپرستی انتشار حداقل یك مجله را به‌عهده دارد.

با افزایش فوق‌العاده درتخصصی شدن ریاضیات در قرن بیستم، تعدادکثیری مجلهٔ ریاضی جدید پدیدار شده‌اند که به‌زمینه‌های بسیار محدوداین موضوع اختصاص یافته‌اند. مجلهٔ نقد ریاضی[12]، که توسط گروههای ریاضی درآمریکا و درخارج سازمان یافته است، برای محققین بسیار ارزشمند است. این مجله درسال ۱۹۴۰ پدید آمد وشامل چکیده‌ها و نقد ادبیات ریاضی دنیاست.

---

1. London Mathematical Society
2. Proceedings
3. Société Mathématique de France
4. Bulletin
5. Circolo Mathematico di Palermo
6. Rendiconti
7. Edinburgh Mathematical Society
8. American Mathematical Society
9. Transactions
10. Deutsche Mathematiker - Vereinigung
11. Jahresbericht
12. Mathematical Review

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱.۱۳ قضیهٔ اساسی جبر

با استفاده از روشی که گاوس در اولین برهانش برای قضیهٔ اساسی جبر به‌کار برد، نشان دهید که

(الف) معادلهٔ $z^2-4i=0$ یك ریشهٔ مختلط دارد.

(ب) معادلهٔ $z^2+2iz+i=0$ یك ریشهٔ مختلط دارد.

۲.۱۳ خواص اساسی همنهشتی

دراولین فصل تحقیقات حسابی، گاوس تعریف و نماد زیر را (که دراینجا کمی مختصر شده) می‌دهد: دوعدد a و b را همنهشت به‌هنگ n (که در آن n عدد صحیح مثبتی است) نامند و با

$$a\equiv b \ (n \text{ به هنگ})$$

نشان‌می‌دهند اگروفقط اگر n تفاضل $a-b$ را عادکند. گاوس سپس بسط جبررابطهٔ همنهشتی را ادامه می‌دهد، که خواص مشترك زیادی باجبررابطهٔ تساوی معمولی دارد، ولی‌تفاوتهای زیادی نیز باآن دارد. اگر n عدد صحیح ومثبت ثابتی باشد و a، b، c، d اعداد صحیح دلخواه باشند، نشان دهید که

(الف) $a\equiv a$ (به‌هنگ n) (خاصیت انعکاسی).

(ب) $a\equiv b$ (به‌هنگ n)، آنگاه $b\equiv a$ (به‌هنگ n) (خاصیت تقارنی).

(ج) اگر $a\equiv b$ (به هنگ n) و $b\equiv c$ (به هنگ n)، آنگاه $a\equiv c$ (به‌هنگ n) (خاصیت تعدی).

(د) اگر $a\equiv b$ (به هنگ n) ، و $c\equiv d$ (به هنگ n) ، آنگاه $a+c\equiv b+d$ (به هنگ n) و $ac\equiv bd$ (به‌هنگ n).

(ه) اگر $a\equiv b$ (به‌هنگ n) . آنگاه $a+c\equiv b+c$ (به‌هنگ n) و $ac\equiv bc$ (به‌هنگ n).

(و) اگر $a\equiv b$ (به هنگ n) ، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k $a^k\equiv b^k$ (به‌هنگ n)

(ز) اگر $ca\equiv cb$ (به هنگ n) ، آنگاه $a\equiv b$ (به هنگ n/d) ، که در آن d بزرگترین مقسوم علیه مشترك c و n است.

(ح) اگر $ca\equiv cb$ (به‌هنگ n) و c و n متباین باشند،آنگاه $a\equiv b$ (به‌هنگ n).

(ط) اگر $ca\equiv cb$ (به‌هنگ p)، که در آن p عدد اولی است و c را عادنمی‌کند، آنگاه $a\equiv b$ (به‌هنگ p).

(ی) اگر $ab\equiv 0$ (به‌هنگ n)، واگر a و b متباین باشند، آنگاه $a\equiv 0$ (به‌هنگ n) یا $b\equiv 0$ (به‌هنگ n).

(ك) اگر a نسبت به n اول باشد، آنگاه همنهشتی خطی $ax\equiv b$ (n بههنگ) تنها يك جواب مثبت x نابیشتر از n دارد.

۳.۱۳ گاوس و اعداد

(الف) اساساً بااستفاده از روش گاوس، در دوران شاگرد مدرسه بودنش، مجموع n جملهٔ يك تصاعد حسابی‌را که جملهٔ اول‌آن a وجملهٔ آخر آن l است، پیداکنید.

(ب) با اختیار ۰ به‌عنوان اولین عدد مثلثی، هریك از اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را به‌صورت مجموع سه‌عدد مثلثی بیان کنید.

(ج) باتوجه به‌قانون تقابل مربعی، نشان دهیدکه اگر p و q اعداد اول متمایزی باشند، آنگاه، $(p|q)=-(q|p)$، اگر وفقط اگر $p\equiv q\equiv ۳$ (۴ بههنگ).

۴.۱۳ سریهای فوریه

بافرض اینکه از سری مثلثاتی بخش ۱۳ـ۲ بتوان جمله به جمله از $-\pi$ تا π انتگرال گرفت، می‌توان نشان دادکه اگرتابعی مانند $f(x)$ را بتوان به‌کمك يك‌سری نمایش داد، دراین صورت ضرایب سری چنین‌اند

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (n\geqslant ۰)$$
$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

(الف) نشان دهید که $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=۰$ وقتی $n\neq ۰$.

(ب) نشان دهیدکه سری فوریه برای تابع $f(x)$ که با تعریف زیر

$$f(x)=۲, \qquad -\pi<x<۰$$
$$f(x)=۱, \qquad ۰<x<\pi$$

داده می‌شود، به‌صورت زیراست

$$f(x)=\frac{۳}{۲}-\frac{۲}{\pi}\left(\sin x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x+\frac{۱}{۵}\sin ۵x+\cdots\right).$$

(ج) با قرار دادن $x=\pi/۲$ در سری فوریهٔ قسمت (ب)، رابطهٔ زیر را به دست آورید

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\cdots.$$

(د) نشان دهید که تابع قسمت (ب) را می‌توان در برد داده شده توسط معادلهٔ واحد زیر نشان داد

$$f(x)=\frac{۳}{۲}-\frac{x}{۲|x|}.$$

۵.۱۳ کوشی و سریهای نامتناهی

(الف) با استفاده از آزمون نسبت کوشی، همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را ثابت کنید.

۱. $۱+۱/۲!+۱/۳!+\cdots$.

۲. $۱/۵-۲/۵^۲+۳/۵^۳-\cdots$.

۳. $۱+۲^۲/۲!+۳^۳/۳!+\cdots$.

(ب) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را با استفاده از آزمون ریشهٔ کوشی ثابت کنید.

۱. $|\sin\alpha|/۲+|\sin ۲\alpha|/۲^۲+|\sin ۳\alpha|/۲^۳+\cdots$.

۲. $۲|\sin\alpha|+۲^۲|\sin ۲\alpha|+۲^۳|\sin ۳\alpha|+\cdots$.

(ج) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را با استفاده از آزمون انتگرال کوشی ثابت کنید.

۱. $۱/e+۲/e^۲+۳/e^۳+\cdots$.

۲. $۱/(۲\ln ۲)+۱/(۳\ln ۳)+۱/(۴\ln ۴)+\cdots$.

۶.۱۳ نظریهٔ گروهها

یک گروه مجموعه‌ای ناتهی مانند G از عناصر است که برروی آن یک عمل دوتایی مانند $*$ تعریف شده و در اصول زیر صدق می‌کند:

گ۱: به‌ازای هر a، b، c در G، $(a*b)*c=a*(b*c)$.

گ۲: عنصری مانند i از G وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر a در G، $a*i=a$.
(عنصر i عنصر همانی گروه نامیده می‌شود.)

گ۳: به‌ازای هر عنصر مانند a از G عنصری مانند $a^{-۱}$ از G وجود دارد به‌طوری که $a*a^{-۱}=i$. ($a^{-۱}$ عنصر معکوس a نامیده می‌شود.)

قضایای زیر دربارهٔ گروه را ثابت کنید.

(الف) اگر a، b، c عضو G باشند و $a*c=b*c$، آنگاه $a=b$.

(ب) به‌ازای هر a در G، $i*a=a*i$.
(ج) یك گروه دارای عنصرهمانی یکتایی است.
(د) به‌ازای هر a از G، $a^{-1}*a=a*a^{-1}$.
(ه) اگر a، b، c، در G باشند و $c*a=c*b$، آنگاه $a=b$.
(و) هر عنصر یك گروه عنصر معکوس یکتایی دارد.
(ز) اگر a در G باشد، آنگاه $(a^{-1})^{-1}=a$.
(ح) اگر a و b در G باشند، آنگاه عناصری‌مانند x و y از G موجودند به‌طوری که $a*x=b$ و $y*a=b$.

۷۰۱۳ مثالهایی از گروهها

نشان دهید که هریك از دستگاههای زیر یك گروه است.
(الف) مجموعهٔ اعداد صحیح تحت عمل جمع معمولی.
(ب) مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای ناصفر تحت عمل ضرب معمولی.
(ج) مجموعهٔ همهٔ انتقالهای

$$T: \begin{array}{l} x'=x+h, \\ y'=y+k, \end{array}$$

صفحهٔ دکارتی، که در آن h و k اعداد حقیقی هستند، و T_2*T_1 نتیجهٔ انجام اولین انتقال یعنی T_1 وسپس انتقال T_2 است.
(د) چهار عدد ۱، ۱-، i، $-i$ (که درآن $i^2=-1$) تحت عمل ضرب معمولی.
(ه) چهار عدد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴ تحت ضرب به‌هنگ ۵.
(و) شش عبارت

$$r, 1/r, 1-r, 1/(1-r), (r-1)/r, r/(r-1),$$

که درآن $a*b$ معرف نتیجهٔ قراردادن عبارت b به‌جای r درعبارت a است. (این گروه، **گروه نسبت‌خاجی** نامیده می‌شود.)

۸۰۱۳ گروههای آبلی

گروهی که دراصل موضوع اضافی:
گ ۴: اگر a و b در G باشند، آنگاه $a*b=b*a$،
صدق کنند، یك **گروه جابجایی** یا **آبلی** نامیده می‌شود. کدامیك از گروههای مطالعهٔ مسئله‌ای ۷۰۱۳ آبلی‌اند.

۹.۱۳ چهارضلعیهای ساکری

یك چهارضلعی ساکری چهار ضلعیی‌است مـانند $ABCD$ که در آن ساقهای AD و BC برابرند وزوایای A و B قائمه‌انـد. ضلع AB به **قاعده**، ضلع مقابـل، DC، به‌**تارك**، و زوایای D و C به **زوایای تارك** معروف‌اند. به‌کمك قضایای تساوی ساده (که‌مستلزم‌اصل توازی نیستند)، روابط زیررا ثابت‌کنید:

(الف) زوایای تارك یك‌چهارضلعی ساکری برابرند.

(ب) خطی‌که اوساط قاعده وتـارك یك چهارضلعی ساکری را به‌هم وصل می‌کند برهردوی آنها عمود است.

(ج) عمودهایی‌که از دوسر قاعدهٔ مثلثی برخطی‌که اوساط دوساق آن‌را به‌هم‌وصل می‌کند، وارد شوند یك چهار ضلعی ساکری تشکیل می‌دهند.

(د) خطی‌که اوساط دوساق برابریك چهارضلعی ساکری را به‌هم وصل می‌کند بر خط واصل بین اوساط قاعده وتارك آن عمود است.

۱۰.۱۳ فرض زاویهٔ حاده

فرض زاویهٔ حاده می‌پذیردکه زوایای‌برابر تارك دریك چهارضلعی‌ساکری‌حاده‌اند، یااینکه زاویهٔ چهارم یك چهار ضلعی لامبرت حاده است. درزیر فرض زاویهٔ حاده را می‌پذیریم.

(الف) فرض‌کنید ABC یك مثلث‌قائم‌الزاویهٔ‌دلخواه و M وسط‌وتر AB باشد. در A زاویهٔ BAD دابرابر زاویهٔ ABC [درخارج مثلث] بسازید. از M عمود MP را بر CB رسم‌کنید. بر AD، AQ را برابر PB جدا کنید و MQ را رسم نمایید. ثابت‌کنید که مثلثهای AQM و BPM برابرند، بدین ترتیب نشان می‌دهیدکه زاویهٔ AQM قائمه است و نقاط Q، M، P همخط هستند. آنــگاه $ACPQ$ یك چهارضلعی لامبرت بازاویهٔ حادهٔ Aاست.حال‌نشان دهیدکه، تحت‌فرض زاویهٔ حاده، مجموع زوایای‌هرمثلث قائم‌الزاویه کمتر از دوقائمه است.

(ب) فرض کنید زاویهٔ A از مثلث ABC کوچکتر از زاویهٔ B یا زاویهٔ C نباشد. ارتفاع مار بر A را رسم‌کنید و، به‌کمك (الف)، نشان دهیدکه، تحت فرض زاویهٔ حاده، مجموع زوایای هرمثلث کمتر از دوقائمه است. تفاضل بین دوقائمه و مجموع زوایای یك مثلث به **کاستی** مثلث معروف است.

(ج) دومثلث ABC و $A'B'C'$ را درنظربگیریدکه‌درآن‌زوایای متناظر برابرباشند. اگر $A'B'=AB$، آنگاه این مثلثها همنهشت‌اند. فرض‌کنید $A'B'<AB$. بر AB، AD دابرابر $A'B'$، و بر AC، AE دابرابر $A'C'$جداکنید.آنگاه مثلثهای ADE و $A'B'C'$ مساوی‌اند. نشان دهید که E نمی‌تواند روی C بیفتد، چون دراین‌صورت زاویهٔ BCA بزرگتر از زاویهٔ DEA خواهدبود. همچنین نشان‌دهیدکه E نمی‌تواند روی امتداد AC قرارگیرد، چون‌دراین‌صورت DE، BC را درنقطه‌ای مانند F قطع‌خواهدکرد ومجموع زوایای مثلث FCE بزرگتر از دوقائمه خواهدشد. بنابراین، E بین A و C قرار دارد،

و $BCED$ یك چهارضلعی محدب است. نشان دهیدکه مجموع زوایای این چهار ضلعی برابر باچهار زاویهٔ قائمه است. اما تحت فرض‌زاویهٔ حاده‌این امرغیرممکن‌است. بنابراین نتیجه می‌شود که نمی‌توانیم داشته باشیم $A'B' < AB$ و تحت فرض زاویهٔ حاده ، دومثلث همنهشت‌اند اگـر سه زاویهٔ یکی برابر سه زاویهٔ دیگری باشد. به‌عبارت دیگـر ، در هندسهٔ هذلولوی شکلهای متشابه نابرابر موجود نیستند.

(د) پاره خطی که رأس مثلثی را به‌نقطه‌ای واقع بـرضلع مقابل وصل می کند، یك مورب نامیده می‌شود. یك موربِ‌مثلث‌را به‌دومثلث جزء تقسیم‌می‌کند، که هریك ازآنها را می‌توان به‌طور مشابه مجدداً به‌دوجزء تقسیم‌نمود، و همینطور الی آخر. نشان دهیدکه اگر مثلثی توسط موربها به تعدادی متناهی از مثلثهای جزء افراز شود کاستی مثلث اصلی برابر است با مجموع کاستیهای مثلثهای افرازی.

۱۱.۱۳ یك مدل اقلیدسی برای هندسهٔ هذلولوی

دایرهٔ ثابتی مانند Σ درصفحهٔ اقلیدسی‌اختیارکنید و درون Σ را صفحهٔ هذلولوی، یك‌نقطهٔ اقلیدسی درون Σ را یك«نقطه» ازصفحهٔ هذلولوی وقسمتی‌ازیك «خط» اقلیدسی واقع‌در درون Σ را یك خط هذلولوی،تعبیرکنید. در این مدل ، صحت‌گزاره‌های زیررا تحقیق کنید.

(الف) دو «نقطه» یك وفقط یك «خط» را معین می کنند.

(ب) دو «خط» متمایز حداکثر دریك «نقطه» یکدیگر را تلاقی می کنند.

(ج) اگر یك «خط» مانند l ویك «نقطه» مانند P غیر واقع بر l مفروض باشند، بر P می‌توان «خطوط» بیشماری رسم‌کردکه «خط» l را تلاقی نکنند.

(د) فرض‌کنید خط اقلیدسی که توسط«نقاط» P و Q معین‌شده‌است، Σ را در S و T به ترتیب S، P، Q، T قطع‌کند. در این صورت ما «فاصلهٔ» هذلولوی از P تا Q را به عنوان $\log[(QS)(PT)/(PS)(QT)]$ تعبیر می‌کنیم. اگـر P، Q، R سه «نقطه» بر یك «خط» باشند، نشان دهیدکه

$$\text{«فاصلهٔ»}\, PQ + \text{«فاصلهٔ»}\, QR = \text{«فاصلهٔ»}\, PR$$

(ه) فرض‌کنید «نقطهٔ» P ثابت باشد و نقطهٔ Q روی «خط» ثابتی‌مار بر P به‌سمت T حرکت‌کند. نشان دهیدکه $\infty \leftarrow$ «فاصلهٔ» PQ.

این مدل توسط فلیکس‌کلاین ابداع شد. با تعابیر بالا، همراه با تعبیر مناسبی از «زاویه» بین خطوط ، می‌توان نشان دادکه همهٔ اصول موضوعهٔ هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی ، به‌جز اصل توازی، درهندسهٔ این مدل گزاره‌هایی درست‌انـد. درقسمت (ج)، دیده‌ایم‌که اصل توازی اقلیدسی چنان گزاره‌ای نیست ، بلکه به جای آن اصل توازی لباچفسکییی برقرار است. بدین ترتیب این‌مدل‌ثابت می‌کند که اصل توازی اقلیدسی را نمی‌توان از دیگر اصول موضوعهٔ هندسهٔ اقلیدسی استنتاج کرد، زیرا اگر این اصل از دیگر اصول موضوعهٔ هندسهٔ اقلیدسی لازم می‌آمد، می‌بایست گزارهٔ درستی در هندسهٔ این مدل باشد.

۱۲.۱۴ هندسهٔ نااقلیدسی و فضای مادی

به‌علت پیچش به‌ظاهر ناگشودنی فضا و ماده شاید تعیین اقلیدسی یا نااقلیدسی بودن فضای مادی، به‌کمک روشهای نجومی محال باشد. چون همهٔ اندازه‌گیریها هم متضمن فرضهای فیزیکی و هم متضمن فرضهای هندسی هستند، هر نتیجهٔ مشهود را می‌توان صرفاً با تغییرات جبران‌کنندهٔ مناسبی در چگونگیهای فضا و ماده که پذیرفته‌ایم، بیان کرد. مثلاً، کاملاً ممکن است که اختلاف مشهود درمجموع زوایای یك مثلث را بتوان باحفظ فرضهای هندسهٔ اقلیدسی ولی درعین حال با اصلاح برخی قوانین فیزیکی، نظیر برخی قوانین نورشناسی، توضیح داد. و نیز، فقدان هرگونه اختلافی از این دست، ممکن است با اصول یك هندسهٔ نا اقلیدسی، همراه با برخی جرح وتعدیلهای مناسب درمفروضات ما دربارهٔ ماده سازگار باشد . براین اساس، هانری پوانکاره مدعی بود که این سؤال که کدام هندسه درست است، سؤالی است بیمعنی. برای روشن نمودن این دیدگاه، پوانکاره یك جهان انگاری مانند Σ طرح کرد که درون کره‌ای به‌شعاع R را که قوانین فیزیکی زیر در آن برقرارند، اشغال می‌کند:

۱. درهر نقطهٔ P از Σ دمای مطلق با $T=k(R^2-r^2)$ داده می‌شود ، که درآن r فاصلهٔ P از مرکز Σ و k یك ثابت است.

۲. ابعاد خطی یك جسم مادی مستقیماً بادمای مطلق محل استقرار جسم تغییرمی‌کنند.

۳. همهٔ اجسام مادی در Σ بلافاصله دمای محل استقرارشان را به‌خودمی‌گیرند.

(الف) نشان دهیدکه برای یکی از ساکنین Σ امکان آن هست که از این سه‌قانون فیزیکی حاکم درجهان خود کاملاً بیخبر باشد.

(ب) نشان دهیدکه فرد ساکن Σ براساس اینکه بعد از برداشتن N گام متناهی ، هراندازه‌که N بزرگ اختیار شود، هرگز به‌کرانه‌ای نخواهد رسید؛ حس خواهد کرد که جهان او ازنظر وسعت لایتناهی است.

(ج) نشان دهیدکه ژئودزیکهای Σ منحنیهایی هستندکه انحنای آنها به‌سمت مرکز Σ متوجه‌است. درواقع، می‌توان‌نشان‌دادکه ژئودزیك مار بردونقطهٔ A و B از Σقوسی‌از یك‌دایره مار بر A وB است که صفحهٔ آن، کرهٔ محیطی Σ را به‌طورعمودی قطع می‌کند.

(د) بافرض اینکه نور درامتداد ژئودزیکهای Σ سیرمی‌کند، قانون فیزیکی دیگری را برجهان Σ اعمال می‌کنیم. این‌شرط را می‌توان باپرکردن Σ باگازی که شاخص‌انکسار مناسبی درهرنقطهٔ Σ داشته باشد، تحقق بخشید. حال نشان دهیدکه ژئودزیکهایΣ به‌نظر ساکنین Σ مستقیم جلوه خواهندکرد.

(ه) نشان دهیدکه درهندسهٔ ژئودزیکها در Σ اصل‌توازی لباچفسکییی برقراراست، به‌طوری‌که ساکنین Σ تصورخواهندکردکه دریك دنیای نااقلیدسی زندگی می‌کنند. در اینجاما قطعه‌ای از فضای معمولی، و بالفرض اقلیدسی داریم کــه، به‌دلیل قوانین فیزیکی متفاوت، نااقلیدسی به‌نظر می‌رسد.

۱۳.۱۳ دستگاههایی باساختار جبری مشترك

نشان دهیدکه هریك ازمجموعه‌های زیر باتعریفهای همراه از اعمال $+$ و $\times$ دارای‌پنج

خاصیت اساسی داده شده در ابتدای بخش ۱۳ــ۷ هستند.

(الف) مجموعهٔ کلیهٔ اعــداد صحیح مثبت، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی دارند.

(ب) مجموعهٔ اعداد گویا، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت برجمع وضرب معمولی دارند.

(ج) مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت برجمع وضرب معمولی دارند.

(د) مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به‌شکل $m+n\sqrt{2}$، که درآن m و n اعداد صحیح‌اند، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت برجمع وضرب معمولی دارند.

(ه) مجموعهٔ **اعداد صحیح گاوسی** (اعداد مختلط $m+in$، که درآن m و n اعداد صحیح معمولی‌اند و $i=\sqrt{-1}$)، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی دارند.

(و) مجموعهٔ همهٔ زوجهــای مرتب اعداد صحیح ، که در آن $(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$ و $(a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$.

(ز) مجموعهٔ زوجهای مرتب از اعداد صحیح ، کــه در آن $(a,b)+(c,d)=(ad+bc,bd)$ و $(a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$.

(ح) مجموعهٔ کلیهٔ زوجهای مرتب از اعداد صحیح، که در آن $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ و $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

(ط) مجموعهٔ کلیهٔ چندجمله‌ایها برحسب متغیرحقیقی x، با اعمال $+$ و $\times$ که‌دلالت برجمع وضرب معمولی چندجمله‌ایها دارند.

(ی) مجموعهٔ کلیهٔ توابع پیوستهٔ حقیقی از متغیر x که بـر بازهٔ بستهٔ $0\leqq x\leqq 1$ تعریف شده‌اند، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت برجمع وضرب معمولی چنان توابعی‌دارند.

(ك) مجموعهٔ متشکل از فقط دوعنصر m و n ، که درآن تعریف می‌کنیم

$$m+m=m, \qquad m\times m=m,$$
$$m+n=n+m=n, \quad m\times n=n\times m=m,$$
$$n+n=m, \qquad n\times n=n.$$

(ل) مجموعهٔ کلیهٔ مجموعه‌های نقطه‌ای صفحه، با $a+b$ که دلالت براجتماع a و b دارد و $a\times b$ دلالت براشتراك مجموعه‌های a و b دارد. به‌عنوان مجموعهٔ‌نقطه‌ای خاصی‌از صفحه ما يك مجموعهٔ‌آرمانی، **مجموعهٔ تهی**، را معرفی می‌کنیم که‌نقطه‌ای در خود ندارد.

۱۴۰۱۳ قوانین جبری

عضو سمت‌چپ هریك ازتساویهای‌زیررا با استفادهٔ‌متوالی ازقانون‌شرکت‌پذیری،جابجایی، یا توزیعپذیری به‌عضو طرف راست تبدیل کنید. به‌تبع از رسوم، دراینجا گاهی ضرب با نقطه(.) و گاهی تنها باکنارهم‌گذاشتن عاملها نشان داده شده‌اند.

(الف) $۵(۶+۳)=۳\cdot۵+۵\cdot۶$.
(ب) $۵(۶\cdot۳)=(۳\cdot۵)۶$.
(ج) $۴\cdot۶+۵\cdot۴=۴(۵+۶)$.
(د) $a[b+(c+d)]=(ab+ac)+ad$.
(ه) $a[b(cd)]=(bc)(ad)$.
(و) $a[b(cd)]=(cd)(ab)$.
(ز) $(ad+ca)+ab=a[(b+c)+d]$.
(ح) $a+[b+(c+d)]=[(a+b)+c]+d$.

۱۵.۱۳ مطالب بیشتری در بارهٔ قوانین جبری

تعیین کنید که آیا اعمال دوتایی* و | درزیر، که برای اعداد صحیح مثبت تعریف‌شده‌اند، ازقوانین جابجایی وشرکتپذیری تبعیت می‌کنند، وآیا عمل | نسبت به عمل * شرکتپذیر است.

(الف) $a*b=a+۲b$، $a|b=۲ab$.
(ب) $a*b=a+b^۲$، $a|b=ab^۲$،
(ج) $a*b=a^۲+b^۲$، $a|b=a^۲b^۲$.
(د) $a*b=a^b$، $a|b=b$.

۱۶.۱۳ اعداد مختلط به‌عنوان زوج مرتب از اعداد حقیقی

دربحث همیلتن از اعداد مختلط به‌عنوان زوجهای مرتب اعداد حقیقی، نشان دهیدکه

(الف) جمع جابجایی و شرکتپذیر است.
(ب) ضرب جابجایی و شرکتپذیر است.
(ج) ضرب نسبت به‌جمع توزیعپذیر است.
(د) $(a,۰)+(b,۰)=(a+b,۰)$.
(ه) $(a,۰)(b,۰)=(ab,۰)$.
(و) $(۰,b)=(b,۰)(۰,۱)$.
(ز) $(۰,۱)(۰,۱)=(-۱,۰)$.

۱۷.۱۳ کواترنیونها

(الف) دوکواترنیون $(۱,۰,-۲,۳)$ و $(۱,۱,۲,-۲)$ را باهم جمع کنید.
(ب) دوکواترنیون $(۱,۰,-۲,۳)$ و $(۱,۱,۲,-۲)$ را، درهر دو ترتیب، در هم ضرب کنید.
(ج) نشان دهیدکه جمع کواترنیونها جابجایی وشرکتپذیر است.
(د) نشان دهیدکه ضرب کواترنیونها شرکتپذیر و نسبت به‌جمع توزیعپذیر است.

(ه) نشان دهید که اعداد حقیقی در داخل کواترنیونها نشانده شده‌اند.
(و) نشان دهید که اعداد مختلط در داخل کواترنیونها نشانده شده‌اند.
(ز) دوکواترنیون $a+bi+cj+dk$ و $e+fi+gj+hk$ را نظیر چندجمله‌ایهایی برحسب i،j،k درهم ضرب و به‌کمك جدول ضرب واحدهای کواترنیونی تحقیق کنید که در تعریف حاصلضرب دوکواترنیون صدق می‌کند.

۱۸۰۱۳ ماتریسها

(الف) اگر

$$x'=ax+by, \qquad x''=ex'+fy',$$
$$y'=cx+dy, \qquad y''=gx'+hy',$$

نشان دهید که

$$x''=(ea+fc)x+(eb+fd)y,$$
$$y''=(ga+hc)x+(gb+hd)y.$$

(ب) با مفروض بودن ماتریسهای

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}.$$

$A+B$، AB، BA، و $A^۲$ را محاسبه کنید.

(ج) نشان دهید که جمع ماتریسها جابجایی و شرکتپذیر است.
(د) نشان دهید که ضرب ماتریسها شرکتپذیر و نسبت به‌جمع توزیعپذیر است.
(ه) نشان دهید که درجبر ماتریسها، ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ حکم‌واحدرادارد،و ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ حکم‌صفر را.

(و) نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

کدام دوقانون آشنای جبر معمولی دراینجا نقض شده‌اند؟

(ز) نشان دهید که ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ دارای جذر نیست.

(ح) نشان دهید که به‌ازای هرعدد حقیقی مانند k، داریم

$$\begin{bmatrix} k & ۱+k \\ ۱-k & -k \end{bmatrix}^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$

که بنابرآن ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ بی‌نهایت جذر دارد.

(ط) نشان دهید که می‌توان اعداد مختلط را به‌صورت ماتریسهایی به‌شکل

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

که در آن a و b حقیقی‌اند، تعریف کرد، به‌شرطی که جمع و ضرب، همان جمع و ضرب ماتریسها باشد.

(ی) نشان دهید که کواترنیونهای حقیقی را می‌توان به‌صورت ماتریسهایی به‌شکل

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix},$$

که در آن a، b، c، d اعداد حقیقی‌اند، و $i^{۲}=-۱$ تعریف کرد، به‌شرط آنکه از تعریفهای معمولی جمع وضرب ماتریسها پیروی شود.

۱۹۰۱۳ جبرهای ژوردان و لی

اعضای یك جبر (خاص) ژوردان، که درمکانیك کوانتومی از آن استفاده می‌شود، ماتریسهای مربعی هستند که تساوی و جمع در آن مانند جبر ماتریس کیلی تعریف شده‌اند، ولی ضرب دوماتریس A و B به‌صورت $A*B=(AB+BA)/۲$ تعریف می‌شود، که در آن AB معرف ضرب کیلی دوماتریس A و B است. گرچه در این جبر، ضرب شرکتپذیر نیست ولی آشکارا جابجایی است. تفاوت جبر ژوردان، مذکور در فوق، با جبر لی در این است که در جبر اخیر حاصلضرب دوماتریس A و B با $A\circ B=AB-BA$ تعریف می‌شود، که در آن AB معرف حاصلضرب کیلی ماتریسهای A و B است. در این جبر، ضرب نه شرکتپذیر است و نه جابجایی.

(الف) با اختیار

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به‌عنوان اعضای یك جبر ژوردان، $A+B$، $A*B$، $B*A$، $A*(B*C)$، و $(A*B)*C$ را محاسبه کنید.

(ب) با اختیار A، B، C از قسمت (الف) به‌عنوان اعضای یك جبر لی، $A+B$، $A\circ B$، $B\circ A$، $A\circ(B\circ C)$، و $(A\circ B)\circ C$ را محاسبه کنید.

(ج) نشان دهید که روابط زیر در یك جبر ژوردان برقرارند.

ژ ۱: $A*B=B*A$،

ژ ۲: $(kA)*B=A*(kB)=k(A*B)$، که در آن k عدد دلخواهی است،

ژ ۳: $A*(B+C)=(A*B)+(A*C)$،

ژ ۴: $(B+C)*A=(B*A)+(C*A)$،

ژ ۵: $A*(B*A^۲)=(A*B)*A^۲$، که در آن $A^۲=A*A=AA$.

نام جبرژوردان توسط آ. آ. آلبرت[1] درسال ۱۹۴۶ معمول شد، به‌این دلیل که مطالعهٔ این جبرها درسال ۱۹۳۳ توسط پاسکوئل یوردان[2] فیزیکدان، یکی ازبنیانگذاران مکانیك کوانتوم نوین، آغاز شد. رابطهٔ ژ ۵ قانون شرکتپذیری خاصی برای جبرهـای ژوردان است.

(د) نشان دهید که رابطه‌های زیر در یك جبر لی برقرارند.

ل ۱: $A\circ B=-(B\circ A)$.

ل ۲: $(kA)\circ B=B\circ(ka)=k(A\circ B)$، که k عدد دلخواهی است،

ل ۳: $A\circ(B+C)=(A\circ B)+(A\circ C)$،

ل ۴: $(B+C)\circ A=(B\circ A)+(C\circ A)$.

ل ۵: $A\circ(B\circ C)+B\circ(C\circ A)+C\circ(A\circ B)=۰$

جبرهای لی‌را به یاد ریاضیدان نروژی، ماریوس سوفوس لـی[3] (۱۸۴۲-۱۸۹۹) نامگذاری کرده‌اند که کار آغازین در گروههای پیوسته را انجام داد. رابطهٔ ل ۵ به **اتحاد ژاکوبی** درجبرهای لی موسوم است.

(ه) نشان دهید که

$$A\circ(B*B)=۲[(A\circ B)*B],$$
$$A\circ(B\circ C)=۴[A*B)*C-(A*C)*B],$$
$$AB=(A*B)+(A\circ B)/۲.$$

(و) **ترانهادهٔ** $\mathbf{A}'$ یك ماتریس‌مربع مانند A ماتریسی‌است که سطرهای متوالی آن، ستونهای متوالی A است. ماتریس A را **متقارن‌چپ** نامند اگر $A'=-A$. نشان دهید که

ل ۶: اگر A و B متقارن‌چپ باشد، دراین‌صورت $A\circ B$ متقارن‌چپ است.

قضیهٔ زیبایی دربـارهٔ ماتریسهای متقارن‌چپ درسال ۱۸۲۷ توسط ژاکوبـی ثابت شد. وی نشان داد که دترمینان یك ماتریس متقارن‌چپ ازمرتبهٔ فرد برابرصفر است.

---

1. A.A.Albert 2. Pascual Jordan 3. Marius Sophus Lie

۲۰۰۱۳ بردارها

کواترنیونهای همیلتن و، تا حدودی، حساب توسیع گراسمن توسط خالقین آنها به‌عنوان ابزارهای ریاضی جهت کاوش درفضای مادی ابداع شدند. این ابزارها پیچیده‌تر از آن ازکار درآمدند که به‌سرعت بتوان برآنها تسلط پیداکرد و به‌آسانی آنهارا به‌کار برد، ولی از آنها موضوع آنالیز برداری که خیلی ساده‌تر قابل آموختن است و به‌سهولت می‌توان آن را به‌کار برد، پدیدار شد. کشف این موضوع را، که هردانشجوی فیزیك مقدماتی به‌آن برمی‌خورد، اصولاً مدیون فیزیکدان آمریکایی جوسایا ویلارد گیبس[1] (۱۸۳۹–۱۹۰۳) هستیم. در فیزیك مقدماتی، یك بردار به‌طور نموداری به‌صورت پاره خط جهت دار، یا پیکانی تلقی می‌شود، و تعاریف زیر را از برابری، جمع، وضرب این بردارها داریم:

۱. دو بردارمانند aوb برابرند اگروفقط اگرطول یکسان وجهت یکسان داشته‌باشند.

۲. فرض کنید aوb دو بردار دلخواه باشند. برنقطه‌ای ازفضا بردارهای a'وb' را، به‌ترتیب، برابر با بردارهای aوb رسم کنید، ومتوازی‌الاضلاع حاصل از a'وb' راکامل کنید. در این صورت مجموع $a+b$، از بردارهای aوb برداری است که طول وجهت آن، طول وجهت قطری است که بین‌مبدأ مشترك a'وb' ورأس چهارم متوازی‌الاضلاع رسم می‌شود.

۳. فرض کنید a و b دوبردار دلخواه‌باشند. منظور از **حاصلضرب برداری**، $a\times b$ی این‌دوبردار، برداری است که طول آن از لحاظ عددی برابر بامساحت متوازی‌الاضلاع تعریف (۲) است، وجهت آن جهت حرکت یك‌پیچ معمولی است وقتی که درامتداد عمود بر a'وb' قرار داده شود وبه اندازهٔ زاویه‌ای نابیشتر از 180° پیچانده شود تا بردار a' بر بردار b' منطبق شود.

(الف) نشان دهیدکه جمع برداری جابجایی وشرکتپذیر است.

(ب) نشان دهیدکه ضرب برداری غیرجابجایی وغیرشرکتپذیر است.

(ج) نشان دهیدکه ضرب برداری نسبت به‌جمع برداری توزیعپذیر است.

گیبس، که از اهالی نیوهیون[2] بود، ریاضیات وفیزیك را در دانشگاه ییل تحصیل کرد ودرسال۱۸۶۳ دکترای‌فیزیك‌دریافت کرد. وی سپس به‌تحصیلات بیشتری‌درریاضیات و فیزیك در پاریس، برلن، و هایدلبرگ پرداخت. در سال ۱۸۷۱ به‌استادی ریاضیات دانشگاه ییل منصوب شد. به‌عنوان یك فیزیکدان بسیار خلاق، سهم زیادی به‌فیزیك ریاضی ایفا کرد. کتاب آنالیزبرداری[3] او در سال ۱۸۸۱ و یك‌بار دیگر در سال ۱۸۸۴ منتشر شد. درسال۱۹۰۲ اصول مقدماتی مکانیك آماری[4] خود را چاپ‌کرد. هردانشجوی آنالیزهمساز باپدیدهٔگیبس[5] درسری فوریه مواجه می‌شود.

---

1. Josiah Willard Gibbs

2. New Haven 3. Vector Analysis

4. *Elementary Principles of Statistical Mechanics*

5. Gibbs' phenomenon

۲۱۰۱۳ یك‌جبر جالب

مجموعهٔ کلیهٔ زوجهای مرتب اعـداد حقیقی را درنظر بگیریـد وچنین تعریف‌کنید: (۱) $(a,b)=(c,d)$ اگردفقط اگر $a=c$ و $b=d$؛ (۲) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$؛ (۳) $(a,b)(c,d)=(0,ac)$؛ (۴) $k(a,b)=(ka,kb)$.

(الف) نشان دهید که ضرب جابجایی، شرکتپذیر، ونسبت به‌جمع توزیعپذیر است.

(ب) نشان دهید که حاصلضرب سه‌عامل یا بیشترهمیشه برابر $(0,0)$ است.

(ج) یك جدول ضرب برای واحدهای $u=(1,0)$ و $v=(0,1)$ درست‌کنید.

۲۲۰۱۳ یك جبر نقطه‌ای

فرض‌کنید حروف بزرگ P،Q،R، ... معرف نقاط صفحه باشند .جمع نقاط Pو Q را با $P+Q=R$ تعریف‌کنید، که در آن مثلث PQR یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع درجهت‌مخالف عقربه‌های ساعت است.

(الف) نشان دهید که جمع نقاط صفحه غیرجابجایی و غیرشرکتپذیر است.

(ب) نشان دهید که اگر $P+Q=R$، آنگاه $Q+R=P$.

(ج) اتحادهای زیررا ثابت‌کنید:

۱. $(P+(P+(P+(P+(P+(P+Q))))))=Q$.

۲. $P+(P+(P+Q))=(Q+P)+(P+Q)$.

۳. $(P+Q)+R=(P+(Q+R))+Q$.

۲۳۰۱۳ یك‌گروه غیرآبلی نامتناهی

(الف) نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای ۲ در ۲

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

که درآن a، b، c، d اعدادی گویاهستند به‌طوری که $ad-bc\neq 0$، تحت ضرب ماتریس کیلی یك گروه تشکیل می‌دهد.

(ب) معکوس A^{-1} ازماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ را محاسبه‌کنید، و نشان دهید که حاصلضرب AA^{-1} ماتریس همانی است.

۲۴۰۱۳ بازی همیلتنی

بازی همیلتنی عبارت است از تعیین مسیری درامتداد یالهای یك دوازده وجهی منتظم که یك‌بار وفقط یك‌بار از هررأس دوازده وجهی عبور می‌کند. بازی توسط سرویلیام راوئن‌ـ همیلتن اختراع شد، که او رأسهای دوازده وجهی را با حروفی به‌نشانهٔ شهرهـای مختلف

نشان می‌داد. همیلتن تعدادی مسئله درارتباط با این‌بازی مطرح کرد.

۱. اولین مسئله، رفتن «دوردنیا» است. یعنی، باشروع از شهر مفروض، از هرشهر دیگر یك‌بار وفقط یك‌بار دیدار کرده به شهر اول برگردید، که درآن مرتبهٔ اولین $n \geqslant 5$ شهررا می‌توان‌ازقبل معین کرد. همیلتن جوابی برای این‌مسئله‌را درگردهمایی سال۱۸۵۷ انجمن انگلیسی در دوبلین ارائه‌کرد.

۲. مسئلهٔ دیگری را که همیلتن مطرح کرد، مسئلهٔ شروع از شهر مفروض آغازین، دیدار ازشهرهای معین به‌ترتیب مشخص، وسپس رفتن به‌هرشهردیگر یك‌بار و فقط یك‌بار وختم سفر دریك شهرمفروض دیگر است.

از دانشجو دعوت می‌شودکه نظریهٔ بازی‌همیلتنی را، مثلاً، درمقالات و تفریحات ریاضی، نوشتهٔو. و. روزبال، وتجدید نظر ه. س.م کاکستر بخواند.

عنوان مقاله

۱۳/۱ بزرگترین ریاضیدان قرن نوزدهم.
۱۳/۲ داستانها وحکایات راجع به‌گاوس.
۱۳/۳ صفحهٔ وسل ــ آرگاند ــ گاوس.
۱۳/۴ نفوذکوشی برداننشجویان ریاضی امروز.
۱۳/۵ توابع بیضوی ــ این توابع چیستند وچراچنین نامگذاری شده‌اند؟
۱۳/۶ موارد اکتشافات مستقل وتقریباً همزمان درهندسه در نیمهٔ اول قرن نوزدهم.
۱۳/۷ دوسرویلیام همیلتن.
۱۳/۸ دمورگن به‌عنوان ریاضیدانی‌که بیشتر ازهمه ذکر او دربین است.
۱۳/۹ اصل تداوم صورتهای معادل.
۱۳/۱۰ انجمن تحلیلی.
۱۳/۱۱ سیلوستر درآمریکا.
۱۳/۱۲ موسیقی و ریاضیدانان.
۱۳/۱۳ برخی ریاضیدانان اعجوبهٔ قرن نوزدهم.
۱۳/۱۴ برخی ریاضیدانان قرن نوزدهم‌که دچار مرگ زودرس شدند.
۱۳/۱۵ برخی‌از ریاضیدانان قرن‌نوزدهم‌که اغلب دوبه‌دو به‌هم وابسته شده‌اند وعلل آن.
۱۳/۱۶ اعجوبه‌های محاسب؛کولبرن، بیدر، دازه.
۱۳/۱۷ جبردرقرن نوزدهم واین نظر غالب‌الذکر که بیشترکشفیات ریاضی به‌دست‌مردان جوان انجام شده است.
۱۳/۱۸ ریاضیدانان کیمبریج درقرن نوزدهم.
۱۳/۱۹ سوفی‌ژرمن(۱۷۷۶ ــ ۱۸۳۱).
۱۳/۲۰ نیلس‌آبل (۱۸۰۲ــ۱۸۲۹).

کتابنامه

ALTSHILLER-COURT, NATHAN, *Modern Pure Solid* Geometry. 2d edition. New York: Chelsea, 1964.

BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.

BOLYAI, JOHN, "The Science of Absolute Space." Translated by G. B. Halsted, 1895. See BONOLA.

BONOLA, ROBERTO, *Non-Euclidean Geometry*. Translated by H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955. Containing BOLYAI and LOBACHEVSKY.

BOYER, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1949.

BÜHLER, W. K., *Gauss, A Biographic Study*. New York: Springer-Verlag, 1981.

BURTON, D. M., Elementary Number Theory. Rev. edition. Boston: Allyn and Bacon, 1980.

CAYLEY, ARTHUR, *Collected Mathematical Papers*. 14 vols. Cambridge: 1889–1898.

CROWE, M. J., *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1967.

DE MORGAN, AUGUSTUS, *A Budget of Paradoxes*: 2 vols. in one. New York: Dover, 1954.

DE MORGAN, SOPHIA ELIZABETH, *Memoir of A. D. M. by His Wife Sophia Elizabeth De Morgan, with Selections from His Letters*. London: 1882.

DUNNINGTON, G. W., *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science: A Study of His Life and Work*. New York: Hafner, 1955.

EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*, vol. 2. Boston: Allyn and Bacon, 1965.

———, *Elementary Matrix Theory*. New York: Dover, 1980.

———, and C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Rev. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

FORDER, H. G., *The Calculus of Extension*. New York: Cambridge University Press, 1941.

FOURIER, J. B. J., *The Analytical Theory of Heat*. New York: Dover, 1955.

GANS, DAVID, *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*. New York: Academic, 1973.

GAUSS, C. F., *Inaugural Lecture on Astronomy and Papers on the Foundations of Mathematics*. Translated by G. W. Dunnington. Baton Rouge, La: Louisians State University, 1937.

———, *Theory of the Motion of Heavenly Bodies*. New York: Dover, 1963.

———, *General Investigation of Curved Surfaces*. Translated by Adam Hiltebeitel and James Morehead. New York: Raven Press, 1965.

———, *Disquisitiones arithmeticae*. English translation by A. A. Clarke. New Haven, Conn.: Yale University Press, 1966.

GIBBS, J. W., and E. B. WILSON, *Vector Analysis*. New Haven, Conn.: Yale University Press, 1901.

GRAVES, R. P., *Life of Sir William Rowan Hamilton*. 3 vols. Dublin: Hodges, Figgis, 1882.

HALL, TORD, *Carl Friedrich Gauss*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931.

HERIVEL, J., *Joseph Fourier, The Man and the Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1975.

HOYLE, FRED, *Ten Faces of the Universe* (Chap. 1). San Francisco: W. H. Freeman, 1977.

INFELD, LEOPOLD, *Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois*. New York: McGraw-Hill, 1948.

KAGAN, V. N., *Lobachevsky and His Contribution to Science. Moscow: Foreign Languages* Publishing House, 1957.

LANGER, R. E., *Fourier Series, the Genesis and Evolution of a Theory*. Oberlin, Ohio: The Mathematical Association of America, 1947.

LOBACHEVSKY, NICHOLAS, "*Geometrical Researches on the Theory of Parallels*." Translated by G. B. Halsted, 1891. See BONOLA.

MACFARLANE, ALEXANDER, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century*. New York: John Wiley, 1916.

MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. San Francisco: Holden-Day, 1964.

———, *Evolution of Mathematical* Thought. San Francisco: Holden-Day, 1965.

MERZ, J. T., *A History of European Thought in the Nineteenth Century*. New York: Dover, 1965.

MIDONICK, HENRIETTA O., *The Treasury of Mathematics: A Collection of Source Material in Mathematics Edited and Presented with Introductory Biographical and Historical*

Sketches. New York: Philosophical Library, 1965.

MUIR, JANE, *Of Men and Numbers: The Story of the Great Mathematicians.* New York: Dodd, Mead, 1961.

MUIR, THOMAS, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development.* 4 vols. in two. New York: Dover, 1960.

ORE, OYSTEIN, *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary.* Minneapolis: University of Minnesota Press, 1957.

PEACOCK, GEORGE, *Treatise on Algebra.* 2 vols., 1840–1845. New York: *Scripta Mathematica,* 1940.

PRASAD, GANESH, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century, Their Lives and their Works.* 2 vols. Benares: Benares Mathematical Society, 1933–1934.

Quaternion Centenary Celebration. Dublin: Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 50, 1945. (Among the articles is "The Dublin Mathematical School in the First Half of the Nineteenth Century," by A. J. McConnell.)

SARTON, GEORGE, *The Study of the History of Mathematics.* New York: Dover, 1957.

SCHAAF, W. L., *Carl Friedrich Gauss.* New York: Watts, 1964.

SIMONS, L. G., *Bibliography of Early American Textbooks on Algebra.* New York: *Scripta Mathematica,* 1936.

SMITH, D. E., *Source Book in Mathematics.* New York: Dover, 1958.

———, and JEKUTHIEL GINSBURG, *A History of Mathematics in America Before 1900.* Chicago: Open Court, 1934.

SOMMERVILLE, D. M. Y., *Bibliography of Non-Euclidean Geometry.* London: Harrison, 1911.

TAYLOR, E. G. R., *The Mathematical Practitioners of Hanoverian England.* New York: Cambridge University Press, 1966.

TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians.* New York: New York University Press, 1961.

WHEELER, L. P., *Josiah Willard Gibbs: The History of a Great Mind.* New Haven, Conn.: Yale University Press, 1962.

WOLFE, H. E., *Introduction to Non-Euclidean Geometry.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1945.

YOUNG, J. W. A., ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field.* New York: Dover, 1955.

۱۴

اواخر قرن بیستم و حسابیدن آنالیز

۱۴-۱ پیگیری کار اقلیدس

تا اعصار جدید چنین تصور می‌شد که یونانیان بحث هندسهٔ ترکیبی مقدماتی مثلث و دایره را به‌اتمام رسانده‌اند. اما بهیچوجه چنین نبود، زیرا قرن نوزدهم شاهد گشایش مجدد اعجاب‌آور باب این مبحث بود. اکنون به‌نظرمی‌رسد که این زمینهٔ تحقیق باید نامحدود باشد، زیرا تعداد بسیار زیادی مقاله راجع به بررسی ترکیبی مثلث و نقاط، خطوط، و دوایر وابسته، بیرون‌آمده و درحال بیرون‌آمدن هستند. عمدهٔ این‌مطالب برای‌چهار وجهی و نقاط، صفحات، خطوط و کره‌های وابسته به آن تعمیم داده شده‌اند. پرداختن به‌تاریخ تفصیلی این مبحث غنی وگسترده دراینجا کاری‌بسیار سنگین خواهد بود. بسیاری ازنقاط، خطوط، دوایر، صفحات، وکره‌های خاص به‌نام تحقیق‌کنندگان اصلی یا بعدی نامگذاری شده‌اند. در زمرهٔ این نامها، نامهای ژرگون، نیگل[1]، فوئرباخ، هارت[2]، کیسی[3]، بروکار[4]، لموآن[5]، تاکر[6]، نویبرگ[7]، سیمسن[8]، ملک‌کی[9]، اویلر، گاوس، بودنمیلر[10]، فورمان[11]، اسکوت[12]، اسپیکر[13]، تیلر، دروز-فارنی[14]، مورلی[15]، میکوئل[16]، هاگ[17]، پوسلیه[18]، اشتاینر[19]، تاری[20]، و بسیاری دیگر را داریم.

---

1. Nagel 2. Hart 3. Casey 4. Brocard 5. Lemoine
6. Tucker 7. Neuberg 8. Simson 9. McCay
10. Bodenmiller 11. Furhmann 12. Schoute 13. Spieker
14. Droz-Farny 15. Morley 16. Miquel 17. Hagge
18. Peaucellier 19. Steiner 20. Tarry

ورای چند اکتشاف اولیهٔ پراکنده، نظیر قضیهٔ کوماندینو به‌سال ۱۵۶۵ (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۲.۱۴) و قضیهٔ سوا به‌سال ۱۶۷۸ (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۹)، تا قرن نوزدهم چیز جدید ومهمی در هندسهٔ ترکیبی مثلث و چهاروجهی کشف نشده بود. درست است که اویلر خط اویلر یك مثلث (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۱۴) را درسال ۱۷۶۵ کشف کرد، ولی برهان او تحلیلی بود. اولین برهان ترکیبی توسط ل. ن. م. کارنو در هندسهٔ وضع به‌سال ۱۸۰۳ داده‌شد. تعدادی ازعناصر مهم وابسته به مثلث، نظیر دایرهٔ نه‌ـنقطه ونقاط بروکارـ که کشف آنها به‌اشتباه به‌اونسبت داده شده استـ درنیمهٔ اول قرن نوزدهم کشف شدند. اما در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم بود که این موضوع شکوفایی واقعی یافت و به‌نحو شگفت‌انگیزی رشد یافت. اغلب این کشفیات‌از فرانسه، آلمان، وانگلستان سرچشمه گرفت. امروز هم‌ادای سهم به‌این‌زمینه ادامه دارد، واین‌کار تقریباً ازهمه قسمتهای دنیا انجام می‌شود.

بخشهای بزرگی از مطالب فوق خلاصه شده و در کتابهای اخیر متعددی که عنوان هندسهٔ نوین یا هندسهٔ کالج دارند، تدوین شده‌اند. این گفته گزافه نیست که درسی در این ماده برای هرمعلم آتی هندسهٔ دبیرستانی بسیارمطلوب است. این ماده قطعاً مقدماتی است ولی ساده‌نیست و فوق‌العاده جذاب می‌باشد.

۲ـ۱۴ امتناع حل سه مسئلهٔ مشهور با ابزارهای اقلیدسی

در قرن نوزدهم بود که سرانجام امتناع حل سه مسئلهٔ مشهور دوران باستان با ابزارهای اقلیدسی، نشان‌داده شد. براهین این‌حقیقت را اکنون می‌توان در بسیاری از کتابهای‌درسی راجع به‌نظریهٔ معادلات یافت، که درآنها نشان‌داده می‌شود که محکهای لازم برای‌ساختنی‌ـ بودن اساساً ماهیت جبری دارند. به‌ویژه، دوقضیهٔ زیر اثبات می‌شوند:*

۱. کمیت هرطول ساختنی با ابزارهای اقلیدسی ازیك واحد طول مفروض یك‌عدد جبری است.

۲. ساختن قطعه خطی از یك واحد طول مفروض با ابزارهای اقلیدسی که کمیت طول آن ریشهٔ یك معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب‌گویا ولی بدون ریشهٔ گویا باشد، غیرممکن است.

تکلیف مسئلهٔ تربیع با قضیهٔ اول معلوم می‌شود. زیرا اگــر شعاع دایرهٔ مفروض را واحد طول اختیارکنیم، ضلع مربع مطلوب $\sqrt{\pi}$ می‌شود. بنابراین اگر مسئلــهٔ تربیع با ابزارهای اقلیدسی مقدور بود، می‌توانستیم ازپاره‌خط واحد پاره‌خط دیگری به طول $\sqrt{\pi}$ بسازیم. اما این‌کار غیرممکن‌است، چون لیندمان درسال ۱۸۸۲ نشان دادکه π، و درنتیجه $\sqrt{\pi}$، غیرجبری است.

---

* نگاه کنید، مثلاً، به

Howard Eves, *A Survey of Geometry*, Vol. 2, pp. 30—38.

قضیهٔ دوم تکلیف دومسئلهٔ دیگر را روشن می‌کند. مثلاً، در مسئلهٔ تضعیف، ضلع مکعب مفروض را واحد طول اختیار کنید وضلع مکعب مطلوب را با x نشان دهید. دراین‌صورت باید داشته باشیم $x^۳ = ۲$. اگرمسئله با ابزارهای اقلیدسی قابل‌حل باشد ساختن پارهٔ‌خطی به‌طول x ازپاره‌خط واحد ممکن خواهد شد. اما این کار غیرممکن است، چون $x^۳ = ۲$ یك معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب گویا ولی بدون ریشهٔ گویاست.*

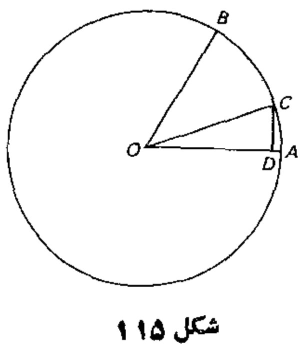
با نشان دادن این نکته که زاویهٔ خاصی را نمی‌توان با ابزارهای اقلیدسی تثلیث کرد، می‌توان ثابت کرد که زاویهٔ‌کلی را نمی‌توان با این‌ابزار تثلیث نمود. حال، درمثلثات اتحاد زیر را داریم

$$\cos \theta = ۴ \cos^۳ \left(\frac{\theta}{۳}\right) - ۳ \cos\left(\frac{\theta}{۳}\right).$$

با اختیار $\theta = ۶۰^\circ$ وقرار دادن $x = \cos(\theta/۳)$ این اتحاد به‌صورت

$$۸x^۳ - ۶x - ۱ = ۰$$

درمی‌آید. فرض‌کنید OA واحد طول مفروضی باشد. دایرهٔ به مرکز O وبه‌شعاع OA را رسم‌کنید، وبه‌مرکز A وبه‌شعاع AO قوسی رسم کنید تا دایره را در B قطع کند (نگاه



شکل ۱۱۵

* یادآوری می‌شود که اگر معادلهٔ چندجمله‌ای

$$a_۰x^n + a_۱x^{n-۱} + \dots + a_n = ۰$$

با ضرایب صحیح $a_۰$، $a_۱$، . . . ، a_n یك ریشهٔ گویای تحویل یافته مانند a/b داشته باشد، آنگاه، a یکی ازعوامل a_n است و b یك‌عامل $a_۰$. بنابراین‌کلیه ریشه‌های‌گویای $x^۳ - ۲ = ۰$ بین ۱، ۱ −، ۲، ۲ − واقع خواهند بود. چون با امتحان مستقیم هیچ یك از این اعداد در معادله صدق نمی‌کنند، پس معادله دارای ریشه‌های گویا نیست.

کنید به‌شکل ۱۱۵). دراین‌صورت زاویه BOA مساوی 60° است. فرض کنید که ثلث‌ساز OC، که‌زاویهٔ $COA=20^\circ$ را می‌سازد، دایره را در C قطع کند، وفرض کنید D پای‌عمود وارد از C بر OA باشد. در این صورت $OD=\cos 20^\circ=x$. نتیجه می‌شود که اگر یك زاویهٔ 60° را بتوان با ابزارهای اقلیدسی ثلث کرد، به‌عبارت دیگر اگر OC را بتوان با این ابزارها رسم کرد، می‌توان ازپارهٔخط واحد OA پاره‌خط دیگری به‌طول x ساخت. اما این کار، بنابرقضیهٔ دوم، غیرممکن است، چون معادلهٔ درجهٔ سوم فوق دارای ضرایب گویا ولی بدون ریشه‌های گویاست.

باید متذکر شد که ما ثابت نکرده‌ایم که هیــچ زاویه‌ای را با ابزارهای اقلیدسی نمی‌توان ثلث کرد، بلکه تنها ثابت کرده‌ایم که نمی‌توان هر زاویه‌ای را به این نحو ثلث کرد. حقیقت مطلب اینکه 90° و تعداد بینهایتی از سایر زوایا را می‌توان با استفاده از ابزارهای اقلیدسی ثلث کرد.

۱۴-۳ تنها پرگار یا تنها ستاره*

هندسه‌دان و شاعر قرن‌هجدهم ایتالیا، لورنتسوماسکرونی[1]، این‌نکتهٔ شگفت‌انگیز راکشف کرد که همهٔ ترسیمات هندسهٔاقلیدسی، مادام که عناصرمفروض ونیز مطلوب نقاط باشند، با پرگارتنها انجام‌پذیر هستند، و بدین‌ترتیب ستاره‌ابزار زایدی‌است. البته خطوط مستقیم را نمی‌توان با پرگار رسم‌کرد، ولی‌هرخط مستقیمی که دریك ساختمان‌اقلیدسی لازم‌می‌آید، با پیداکردن دونقطه درآن، تنها با پرگار قابل تعیین است. این کشف درسال ۱۷۹۷ در هندسهٔ پرگار[2] ماسکرونی ظاهرشد.

ازآنجاکه دریك ساختمان اقلیدسی‌نقاط جدید ازنقاط قدیم با (۱) پیداکردن یکی از نقاط تلاقی دو دایره، (۲) پیداکردن یکی ازنقاط تلاقی خطی با دایره، (۳) پیداکردن محل تلاقی دوخط مستقیم، پیدا می‌شوند، تنها کاری که ماسکرونی باید می‌کرد نشان‌دادن این مطلب بودکه چگونه، با پرگار تنها، مسائل (۲) و (۳) را وقتی‌که ازخط مستقیمی دو نقطه در دست است، باید حل کرد.

کمی قبل‌ازسال‌۱۹۲۸، یکی‌از دانشجویان ی.یلمسلو[3](۱۸۷۳—۱۹۵۰)، ریاضیدان دانمارکی در حال پرسه درکتابفروشیی درکپنهاگ، به‌نسخه‌ای از یك‌کتاب قدیمی به‌نام اقلیدس‌دانمارکی[4] برخوردکه‌درسال‌۱۶۷۲ توسط نویسندهٔ گمنامی به‌نام گئورگ‌موهر[5] چاپ شده بود. دربررسی‌این‌کتاب، یلمسلو درکمال‌شگفتی کشف‌ماسکرونی را، همراه بابرهانی که ۱۲۵ سال قبل ازانتشار اثرماسکرونی به‌آن دست یافته شده بود، درآن یافت. در سال

---

* برای بررسی کاملترمطالب این فصل، همراه با براهین، نگاه‌کنید، مثلاً، به

Howard Eves, *A Survey of Geometry*, Vol. 1, Chapter IV.

1. Lorenzo Mascheroni 2. Geometria del compasso

3. J. Hjelmslev 4. Euclides Danicus 5. Georg Mohr

لورنتسو ماسکرونی
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

۱۸۹۰، هندسه‌دان ونیزی، اوگوست آدلر[1] (۱۸۶۳-۱۹۲۳) برهان جدیدی از قضایای ماسکرونی را، با استفاده از تبدیل معکوس، منتشرکرد.

با الهام ازکشف ماسکرونی، ریاضیدان فرانسوی ژان‌ویکتور پونسله ساختمانهایی تنها با ستاره را مدنظر قرار داد. حال گرچه نمی‌توان به کلیهٔ ساختمانهای اقلیدسی فقط با ستاره دست یافت، ولی، کاملاً عجیب آنکه، با داشتن یك دایره ومرکز آن‌که درصفحهٔ ساختمان رسم شده باشد، همهٔ ساختمانهای اقلیدسی را می‌توان با ستاره انجام داد. این قضیهٔ مهم درسال ۱۸۲۲ به‌ذهن پونسله رسید و سپس، درسال ۱۸۳۳، به‌طور کامل توسط هندسه‌دان نابغهٔ سویسی-آلمانی یاکوب اشتاینر بسط یافت. دراینجا لازم است نشان داده شودکه، با داشتن یك دایره ومرکز آن، ساختمانهای (۱) و (۲) را می‌توان تنها با ستاره حل‌کرد، که درآن اکنون یك دایره با داشتن مرکز و نقطه‌ای برمحیط‌آن مفروض شمرده می‌شود.

درحدود سال ۹۸۰ بودکه ریاضیدان ایرانی، ابوالوفای بوزجانی استفاده ازستارهٔ تنها را همراه با **پرگارهای‌زنگ‌زده**[2]، یعنی پرگارهایی باگشادگی ثابت، مطرح کرد. با توجه به‌قضیهٔ پونسله-اشتاینر، در واقع لازم است‌که از پرگار فقط یك بار استفاده کرد و بعداً آن راکنارگذاشت. در سال ۱۹۰۴، فرانچسکوسوری[3] ایتالیائی گامی پیشتر رفت، ونشان دادکه تنها چیزی‌که موردنیاز است، قوسی، هراندازه‌کوچك، ازیك دایره ومرکز آن است تا آنکه همهٔ ساختمانهای اقلیدسی با ستارهٔ تنها انجام شوند. همچنین، توسط آدلر و دیگران، نشان‌داده شدکه هرساختمان‌اقلیدسی را می‌توان با یك ستارهٔ دولبه انجام داد، خواه‌این لبه‌ها موازی‌باشند ویا نباشند.قضایای ساختمانی جالب ازاین گونه‌بسیارند،

---

1. August Adler 2. rusty compasses 3. Francesco Severi

که اثبات آنها مستلزم ذکاوت فراوان است.

اخیراً * ، نشان داده شده‌است که گئورگ‌موهر فوق‌الذکـر مؤلف جزوه‌ای بینام بوده که تحت عنوان خلاصه‌ای از شگفتیهای اقلیدس[1] به چاپ رسیده و در سال ۱۶۷۳ منتشرشده‌است و در آن در واقع نشان داده شده است که همهٔ ساختمانهای اصول اقلیدس با ستاره و پرگار با گشادگی ثابت‌شدنی‌اند.

مسئلهٔ یافتن « بهترین » راه حل اقلیدسی برای یك ساختمان مورد سؤال نیز تحت مطالعه قرار گرفتــه است ، و دانش هندسه نگــاری[2] در سال ۱۹۰۷ توسط امیل‌لموآن (۱۸۴۰–۱۹۱۲) برای مقایسهٔ کمی ساختمانی با ساختمان دیگر به‌وجود آمد. برای‌این منظور لموآن، پنج عمل زیر را مطمح‌نظر قرارداد:

S_1: گذراندن ستاره ازیك نقطهٔ مفروض،

S_2: کشیدن یك خط مستقیم،

C_1: منطبق‌کردن یك پای پرگار بریك نقطه،

C_2: منطبق‌کردن یك پای پرگار با هرنقطه ازیك مکان هندسی،

C_3: رسم یك دایره.

اگــر اعمال بالا m_1، m_2، n_1، n_2، n_3 بار در یك ساختمان انجــام شوند ، آنگــاه $m_1S_1+m_2S_2+n_1C_1+n_2C_2+n_3C_3$ به‌عنوان علامت[3] ساختمان تلقی‌می‌شود. تعداد کل‌اعمال، $m_1+m_2+n_1+n_2+n_3$، سهولت[4] ساختمان نامیده‌می‌شود، وعدهٔ کل انطباقها، $m_1+n_1+n_2$، دقت[5] ساختمان نامیده می‌شود. عدهٔ کل مکانهای هندسی رسم شده، یعنی m_2+n_3، برابر اختلاف بین سهولت و دقت ساختمان است. علامت رسم خط راستی بر نقاط A و B عبارت از $2S_1+S_2$ است، علامت رسم دایره‌ای به مرکز C و شعاع AB عبارت از $3C_1+C_3$ است.

۱۴–۴ هندسهٔ تصویری

صرفنظر ازکشف هندسهٔ نااقلیدسی، درقرن نوزدهم گامهای بلندی در زمینهٔ هندسه به‌جلو برداشته شد. همچنانکه‌قبلاً خاطرنشان‌کردیم، پیشرفت‌دامنه‌داری در دنبالهٔ‌کارهای‌اقلیدس پدیدآمد که به‌نحو چشمگیری برمایه بودند. دربخش‌حاضرخواهیم دیدکه هندسهٔ‌تصویری

---

* نگاه‌کنید به A.E.Hallerberg, «The geometry of the fixed-compass» *The Mathematics Teacher*, Apr. 1959, pp. 230-44,

و

A.E. Hallerberg, «Georg Mohr and Euclidis Curiosi, *The Mathematics Teacher*, February 1960 pp. 127-32.

1. Compendium Euclidis Curiosi 2. geometrography 3. symbol
4. simplicity 5. exactitude

نیز به‌دستاوردهایی مؤثر و بسیار ثمربخش نایل شد. فصل ۱۴ـ۵ به گسترش قابل‌ملاحظهٔ روشهای هندسهٔ تحلیلی در قرن نوزدهم اختصاص دارد و بخش ۱۴ـ۶ به بررسی رشد فوق‌العادهٔ هندسهٔ دیفرانسیل دراین قرن.

گرچه دزارگ، مونژ، و کارنو مطالعهٔ هندسهٔ تصویری را آغاز کرده بودند، بسط واقعی آن به‌طور کاملاً مستقل به‌دست ژان‌ویکتور پونسله (۱۷۸۸ـ۱۸۶۷) صورت گرفت. پونسله در متس[1] در سال ۱۷۸۸ به دنیا آمد، در همانجا به‌مدرسه رفت، و سپس از سال ۱۸۰۷ تا ۱۸۱۰ در اکول‌پلی‌تکنیك زیرنظر مونژ به‌تحصیل پرداخت. درسال۱۸۱۲، بعد ازاستفاده از مقرری دانشجویی آکادمی نظامی متس با درجهٔ ستوان مهندس، وارد ارتش شد و درلشگرکشی پرماجرای ناپلئون به‌روسیه شرکت کرد. پونسله که درجریان عقب‌نشینی فرانسویان از مسکو به عنوان مرده در میدان جنگ کراسنوی[2] رها شده بود، به اسارت درآمد و، بعد از یك راهپیمایی اجباری تقریباً پنج‌ماهه، او را در ساراتوف[3]، برساحل رود ولگا حبس کردند. درآنجا، بدون آنکه کتابی دراختیار داشته باشد، وی طرح کتاب عظیم خود، رسالهٔ خواص تصویری اشکال[4] را ریخت که بعد از رهایی وبازگشت به‌متس دراواخر سال ۱۸۱۴، آن را تدوین کرد و درسال ۱۸۲۲ درپاریس به‌چاپ رساند. پونسله باقی عمر را وقف مشاغل نظامی کرد و در لابلای آن به نوشتن مطالبی در بارهٔ مکانیك، ئیدرولیك، سریهای نامتناهی، و هندسه پرداخت. وی رساله‌ای در بارهٔ مکانیك کاربردی (۱۸۲۶)، مقالهٔ جالبی در بارهٔ آسیاهای آبی (آن نیز در ۱۸۲۶)، گزارشی در بارهٔ ماشین‌آلات و ادوات انگلیسی درنمایشگاه بین‌المللی لندن درسال ۱۸۵۱، نسخهٔ‌مبسوطی ازاثر قبلی‌اش‌در دومجلد(۱۸۶۲، ۱۸۶۵) و مقالات‌متعددی درهندسه درصفحات مجله‌کرله نوشت. باآنکه پونسله در سرتاسر عمرش از لحاظ سلامتی دستخوش ناملایمات بود، در مأموریتهای نظامی‌اش همواره جدی، کارآ، وقابل اعتماد بود، واستعدادهای خلاقهٔ خود در ریاضیات‌را تقریباً تا زمان‌مرگ حفظ‌کرد. وی درسال۱۸۶۷درپاریس درسن‌هفتادونه در گذشت.

کتاب رسالهٔ خواص تصویری‌اشکال رویدادی مهم در تاریخ هندسه است. این اثر تحرك شدیدی درمطالعهٔ این موضوع پدید آورد وموجب گشوده شدن به‌اصطلاح «دوران کبیر» در تاریخ هندسهٔ تصویری شد. گروهی ریاضیدان بعداً دراین زمینه ظاهر شدند که دربین‌آنها ژرگون، بریانشون، شال[5]، پلوکر، اشتاینر، اشتاوت، ری[6]، وکرمونا[7] قرار داشتندکه نامهایی بزرگ درتاریخ هندسه و به‌ویژه درتاریخ هندسهٔ تصویری هستند.

ما دراینجا خود را تنها به‌بررسی دو وسیلهٔ ریاضی‌که توسط پونسله دربسط هندسهٔ تصویری به‌دست او، به‌کار گرفته شد، محدود می‌کنیم. این دو وسیله عبارت‌اند از اصل دوگانی و اصل پیوستگی.

---

1. Metz 2. Krasnoi 3. Saratoff 4. Traité des propriétés Projectives des figures 5. Chasles 6. Reye 7. Cremona

ژان‌ویکتور پونسله
(کولورسرویس)

در هندسهٔ تصویری مسطحه، درصورت استفاده از عناصر آرمانی در بینهایت، تقارن قابل‌ملاحظه‌ای بین نقاط وخطوط وجود دارد، به‌طوری که اگر در گزارهٔ درستی دربارهٔ «نقاط» و «خطوط» نقش این دو واژه را باهم عوض کنیم، و احیاناً بیان را تلطیف کنیم، گزارهٔ درست دیگری دربارهٔ «خطوط» و «نقاط» به‌دست می‌آوریم. به‌عنوان مثال‌ساده‌ای دوگزارهٔ زیر راکه بدین‌طریق به‌هم مربوط‌اند، درنظربگیرید:

هر دونقطهٔ متمایزیك خط و فقط یك خط را معین می‌کنندکه هردو برآن واقع‌اند.

هر دوخط متمایز یك نقطه و فقط‌یك‌نقطه را معین می‌کنندکه هردو برآن می‌گذرند.

این تقارن، که به‌زوجی‌کردن گزاره‌های‌هندسهٔ تصویری مسطحه منجرمی‌شود،اصل فراگیری است موسوم به **اصل دوگانی**. به محض آنکه اصل دوگانی ثابت شود، آنگاه برهان‌گزاره‌ای دریك زوج‌دوگان، برهان دیگری‌را با خود به‌همراه می‌آورد.می‌خواهیم قضیهٔ پاسکال را به‌صورت دوگانی درآوریم. ابتدا قضیهٔ پاسکال را به‌شکلی بیان می‌کنیم که شاید دوگانی کردن‌آن را آسانتر کند.

شش رأس یك شش‌ضلعی بریك مقطع مخروطی‌واقع‌اند اگر و فقط اگرنقاط تلاقی سه‌زوج اضلاع متقابل بریك خط واقع باشند.

با دوگانی‌کردن به دست‌می‌آوریم:

شش ضلع یك شش ضلعی بریك مقطع مخروطی مماس‌اند اگر و فقط اگر خطوط واصل بین سه زوج رئوس متقابل دریك نقطه متلاقی باشند.

این قضیه را ابتدا ش.ژ.بریانشون (۱۷۸۳–۱۸۶۴)، وقتی که در اکول‌پلی‌تکنیك درپاریس دانشجو بود، درسال ۱۸۰۶، تقریباً ۲۰۰ سال بعد از آنکه پاسکال قضیهٔ خود را بیان‌کرده‌بود، منتشرکرد.

اصل دوگانی را می‌توان به چند طریق ثابت کرد. می‌توان مجموعه‌ای از اصول موضوعه برای هندسهٔ تصویری داد که خود آنها درقالب زوجهای دوگانی مرتب شده باشند. نتیجه می‌شود که دوگان هرقضیه‌ای راکه ازچنان مجموعه‌ای از اصول موضوعه استخراج شده است، می‌توان صرفاً از طریق دوگانی کردن مراحل برهان قضیهٔ اصلی معتبر دانست. اصل دوگانی را می‌توان بلافاصله بعد از آنکه مفاهیم «مختصات» یك خط و «معادلهٔ» یك نقطه فرمولبندی شدند (بخش ۱۴-۵)، به‌طریق تحلیلی ثابت کرد. سرانجام، دانشجویی که با مفاهیم اولیهٔ قطب وقطبی نسبت به‌یك مقطع مخروطی‌مبنا آشنا باشد، تشخیص می‌دهد که، تحت تناظری که بدین ترتیب بین قطب وقطبی ایجاد می‌شود، به‌هر شکلی متشکل از خطوط ونقاط، یك شکل دوگانی وابسته می‌شود که متشکل ازنقاط وخطوط است. به‌روش اخیر بود که اثبات اصل دوگانی برای بار اول توسط ژرگون و پونسله انجام گرفت. اصطلاح قطب، در سال ۱۸۱۰ توسط ریاضیدان فرانسوی ف.ژ. سروا[1] (۱۷۶۷ - ۱۸۴۷)، واصطلاح متناظر قطبی سه‌سال بعد توسط ژرگون معمول شد.

جالب توجه است اشاره کنیم که اصول دوگانی در چندین شاخهٔ دیگر ریاضیات، نظیر هندسهٔ تصویری‌فضایی، جبر بولی، نظریهٔ اتحادهای‌مثلثاتی، هندسهٔ‌کروی، مجموعه‌های جزئاً مرتب، وحساب گزاره‌ها برقرار شده‌اند.

وسیلهٔ ریاضی دیگر پونسله، اصل پیوستگی، را می‌توان به‌کمك مثال زیر شرح داد. وضعیت دو دایره را درنظر بگیرید که در دونقطهٔ حقیقی A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند. دانش‌آموزان درس هندسهٔ مقدماتی می‌توانند به‌آسانی ثابت کنند که مکان هندسی نقطه‌ای مانند P که نسبت به دو دایره قوت مساوی داشته باشد، خط AB است. این خاصیت، وقتی‌که برقرار بودن آن ثابت شد، باید به روشهای هندسهٔ تحلیلی قابل اثبات باشد. اما روشهای هندسهٔ تحلیلی به‌این امرکه نقاط‌تلاقی دو دایره، A، B، حقیقی یا موهومی‌هستند، وقوفی ندارد. بنابراین سلسله معادلاتی که قضیه را در حالت حقیقی بودن A و B ثابت می‌کنند، درحالت موهومی بودن A و B نیز آن را ثابت می‌کنند. از اینجا نتیجه می‌شود که وقتی دو دایره متقاطع نیستند، مکان هندسی نقطه‌ای مانند P که نسبت به دو دایره قوتهای مساوی دارند بازهم یك خط مستقیم است. این‌روش استدلال، که درآن ازاثبات قضیه‌ای برای وضعیت حقیقی، قضیه‌ای برای وضعیت موهومی به دست می‌آید، توسط پونسله **اصل پیوستگی** هندسه نامیده شد. در هندسهٔ تصویری موارد زیادی وجود دارد که درآن قضیه‌ای راکه می‌توان درحالت‌یك تصویر حقیقی ثابت‌کرد، می‌توان به‌کمك اصل پیوستگی به‌حالت یك تصویر موهومی تعمیم داد.

اصل پیوستگی پونسله با مقاومتهایی از طرف عده‌ای از هندسه‌دانان روبرو شد، و بسیاری ازمقالات پونسله در مجلهٔ کرله به دفاع ازاین اصل و تشریح آن اختصاص یافته است.

بسیاری از اندیشه‌های پونسله در هندسهٔ تصویری، بعداً توسط هندسه‌دان سویسی،

---

1. F. J. Servois

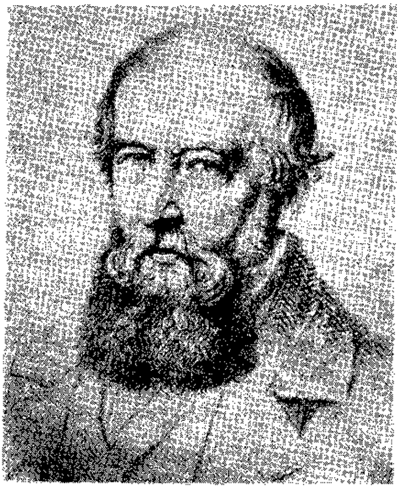
یاکوب‌اشتاینر (۱۷۹۶–۱۸۶۳)، یکی‌از بزرگترین دانشمندان هندسهٔ ترکیبی که تاکنون دنیا به‌خود دیده است، بسط یافت. اشتاینر دراوتسنزدورف[1] درسال ۱۷۹۶ به‌دنیا آمد و تا چهارده‌سالگی نوشتن را نیاموخت. درهفده‌سالگی شاگرد یوهان هاینریش‌پستالوتسی[2] (۱۷۴۶–۱۸۲۷)، آموزگارمشهور سویسی شدکه کم‌کم عشق به‌ریاضیات را دراشتاینر برانگیخت. بعداً، درسال ۱۸۱۸، درهایدلبرگ به‌دانشگاه رفت و در آنجا استعداد خود را در ریاضیات بسرعت نشان داد. در سال ۱۸۲۱ در برلین شروع به‌تدریس خصوصی ریاضیات‌کرد و به‌زودی به‌سمت معلمی‌در دانشکدهٔ بازرگانی وصنایع[3] برگزیده شد. نام او ازطریق‌مقالاتش‌که درمجلهٔ‌جدیدالتأسیس‌مجلهٔ کرله چاپ می‌شد، مشهورشد و او و آبل بیشترین‌سهم را درنوشتن مقالات این مجله داشتند.درسال ۱۸۳۴، با نفوذ ژاکوبی،کرله، و فون‌هومبولت[4]، یك کرسی استادی برای او در دانشگاه برلین تأسیس شد که وی بقیهٔ دورهٔ تدریس خود را در آنجا گذراند. سالهای واپسین عمرش با ناخوشی، در سویس سپری شد. وی درسال ۱۸۶۳ در برن در گذشت.

اشتاینر که از او به عنوان «بزرگترین هندسه‌دان از زمان آپولونیوس به بعد» یاد شده‌است، قدرتی خارق‌العاده در استفاده از روش ترکیبی هندسه داشت. وی نویسندهٔ پرکاری دراین زمینه شد وتعدادی رسالهٔ درجهٔ اول نوشت. گفته‌اندکه او از روش‌تحلیلی درهندسه نفرت داشت و آن را عصای دست کسانی می‌دانست که از لحاظ هندسی ذهنی ناتوان داشتند. وی با چنان سرعت شگفت‌انگیزی به خلق هندسهٔ جدید می‌پرداخت که اغلب فرصت ثبت براهین را نمی‌یافت ونتیجهٔ‌آن این بودکه بسیاری ازکشفیات او برای سالها برای‌کسانی‌که درجستجوی برهان بودند، همچون معما باقی ماند. کتاب بسطهای منظم[5] او، چاپ ۱۸۳۲، بلافاصله او را به‌شهرت رساند. این اثر شامل بحث کاملی است ازعکس‌یابی، اصل دوگانی، تجانس و دسته خطوط، تقسیمات توافقی، و هندسهٔ تصویری مقاطع‌مخروطی مبتنی برتعریف بسیار بارورِیك مقطع مخروطی به‌عنوان مکان هندسی‌نقاط تلاقی‌خطوط متناظر دو دسته خط‌همنگار با رأسهای‌متمایز. وی به‌مطالعهٔ n ضلعیها درفضا، نظریهٔ منحنیها و رویه‌ها، منحنیهای پادکی، چرخهای دندانه‌دار وبیست وهفت خط مستقیم بریك رویهٔ درجهٔ سوم ایفای سهم‌کرد. وی به‌کمك هندسهٔ ترکیبی مبادرت به حل مسائلی درماکزیموم ومینیموم کرد که در دست دیگران به‌ارکان حساب تغییرات نیاز داشت. به نام او در جاهای زیادی در هندسه، مانند جواب اشتاینر به مسئلهٔ مالفاتی[6] و تعمیم آن، زنجیرهای اشتاینر، پوریسم‌اشتاینر، ونقاط اشتاینرشکل هگزاگرام رمزی برمی‌خوریم.

پونسله واشتاینر درمطالعهٔ هندسهٔ‌تصویری،مفاهیم‌تصویری‌بسیاری‌را برخواص متری مبتنی کرده‌اند. هندسهٔ تصویری سرانجام توسط کارل گئورگ‌فون‌اشتاوت در کتاب او

---

1. Utzensdorf
2. Johann Heinrich Pestalozzi
3. Gewerbeakademie
4. Von Humbolt
5. Systematische Entwickelungen
6. Malfatti



یاکوب اشتاینر
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

به‌نام هندسهٔ وضع[1] به‌سال ۱۸۴۷ از هـرگونه مبنای متری رهایی کامـل یافت.اشتاوت در روتنبرگ[2] در سال ۱۷۹۸ متولد شد، تصدی کرسی ریاضیات در ارلانگن[3] را به‌عهده گرفت و درسال ۱۸۶۷ در ارلانگن در گذشت.

جنبهٔ تحلیلی هندسهٔ تصویری در آثار اوگوستوس فردیناندموبیوس (۱۷۹۰-۱۸۶۸)، میشل شال (۱۷۹۳-۱۸۸۰) و، بخصوص، یولیوس پلوکر (۱۸۰۱ - ۱۸۶۸) پیشرفتهای چشمگیری کرد. پلوکر به‌همان گونه که اشتاینر به‌عنوان قهرمان هندسهٔ ترکیبی شهرت یافته بود، به‌عنوان قهرمان هندسهٔ تحلیلی شهرت یافت. این موضوع با تفصیل بیشتر در بخش ۱۴-۵ بررسی خواهد شد. میشل شال نیز دانشمند برجسته‌ای درهندسهٔ ترکیبی بود، واثر او به‌نام بررسی تاریخی مبدأ وبسط روشها درهندسه[4] (۱۸۳۷) هنوزهـم اثر استانده‌ای در تاریخ هندسه‌است. شال در اکول پلی‌تکنیك، درسال ۱۸۴۱، استاد هندسه و ریاضیات و درسال ۱۸۴۶ در دانشکدهٔ علوم استاد هندسه شد. وی به‌خاطر کتابش به‌نام رسالهٔ مقاطع مخروطی[5] که درسال ۱۸۶۵ درپاریس منتشر شد ، به دریافت مدال کاپلی[6] انجمن سلطنتی نایل شد.

بعداً با اختیار تعریف تصویری مناسبی برای یك متریك، نشان داده شد که چگونه می‌توان هندسهٔ متری را در چارچوب هندسهٔ تصویری مطالعه کرد، و با الحاق یك مقطع مخروطی پایا به‌هندسهٔ تصویری درصفحه، می‌توان هندسه‌های نااقلیدسی کلاسیك را به‌دست آورد. در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، هندسهٔ تصویری ازلحاظ اصل موضوعی مورد بررسیهای چندی قرار گرفت و در نتیجه هندسه‌های تصویری متناهی کشف شدند.

---

1. Geometrie der Lage 2. Rothenburg 3. Erlangen
4. Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie 5. Traité des sections coniques 6. Coply

باافزایش وتغییر تدریجی‌اصول‌موضوعه نشان داده شدکه می‌توان‌از هندسهٔ‌تصویری وارد هندسهٔ اقلیدسی شد، وطی‌آن به‌چندین هندسهٔ مهم دیگر برخورد کرد.

۱۴-۵ هندسهٔ تحلیلی

علاوه بر دستگاههای مختصات دکارتی متعامد ومایل، دستگاههای مختصاتی دیگری‌نیز در صفحه وجود دارند. در واقع می‌توان‌به‌سادگی‌دستگاههای مختصاتی‌ابداع کرد. تنهاچیزی که بدان نیاز است، چارچوب مرجع مناسبی‌همراه باچندقاعده است که طرز تعیین‌موضع نقطه‌ای را در صفحه به‌کمك مجموعهٔ مرتبی از اعداد نسبت به‌این چارچوب مرجع بیان کند. مثلاً، در مورد دستگاه دکارتی متعامد ، چارچوب مرجع متشکل از دو محور عمودی است، که برهریك ازآنها مقیاسی وجود دارد، وهمهٔما باقواعد تعیین موضع یك‌نقطه‌نسبت به‌این‌چارچوب توسط زوج مرتبی از اعداد حقیقی‌که نمایش‌فواصل‌علامتدار این نقطه از دو محور هستند، آشنا هستیم . دستگاههای دکارتی رایجترین دستگاهها در عمل هستند، و فوق‌العاده‌بسط یافته‌اند. قسمت اعظم اصطلاحات، نظیر دسته‌بندی منحنیها به‌منحنیهای خطی، درجهٔ دوم، درجهٔ سوم، وغیره، براثراستفاده از این دستگاه، پیدا شده‌اند. مع‌هذا معادلات برخی منحنیها نظیر اغلب مارپیچها به‌دستگاه دکارتی به‌سختی‌گردن می‌گذارند، درحالی که معادلات آنها نسبت به‌دستگاه مختصات دیگری‌که استادانه طرح شده باشد، نسبتاًساده است. بخصوص درمورد مارپیچها، دستگاه مختصات قطبی بسیار مفید است و ، یادآوری می‌کنیم‌که، دراین دستگاه، چارچوب مرجع یك نیمخط است ، و درآن جای یك نقطه با زوجی از اعداد حقیقی تعیین‌می‌شود،که یکی ازآنها نمایش یك‌فاصله ودیگری یك‌زاویه است. مفهوم مختصات‌قطبی‌ظاهراً درسال ۱۶۹۱ توسط یاکوب برنولی (۱۶۵۴-۱۷۰۵) معرفی شده‌است*. دستگاههای مختصات دیگر تا نزدیك به‌اواخر قرن هجدهم مورد تحقیق قرارنگرفتند، و دراین موقع‌هندسه‌دانان هنگامی‌که ضرورتهای خاص مسائل مناسبتر بودن دستگاههای دیگررانشان‌می‌دادند به‌رهاکردن دستگاه دکارتی کشانده شدند. به‌هرصورت، مختصات برای هندسه ساخته شده‌اند ونه هندسه برای مختصات.

بحث جالبی‌در دستگاه مختصات توسط هندسه‌دان‌پروسی‌یولیوس‌پلوکر[1] (۱۸۰۱-۱۸۶۸) درسال ۱۸۲۹ پیش‌کشیده شدکه وی طی‌آن متـذکرشد عنصر بنیادی ما لزومی ندارد که نقطه باشد ، و بلکه می‌تواند هرموجود هندسی باشد. مثلاً، اگر خط مستقیم را به‌عنوان عنصربنیادی‌خودبرگزینیم، می‌توانیم هرخط مستقیم‌ناگذرنده برمبدأ یك‌چارچوب

---

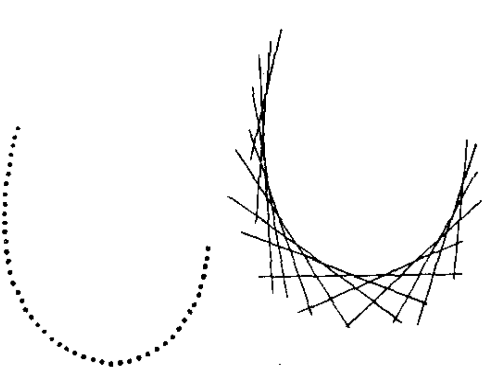
* مع‌هذا نگاه‌کنید به

C. B. Boyer, «Newton as an originator of polar coordinates,» *American Mathematical Monthly*, February 1949, pp. 73 – 78.

1. Julius Plücker

مرجع دکارتی متعامد مفروض را به‌وسیلهٔ، مثلاً، x و y، یعنی طول از مبدأخط وعرض از مبدأ خط معین کنیم. پلوکر عملاً عکسهای این مقادیررا باعلامت منفی به‌عنوان اعدادموضع خط برگزید واز هندسهٔ تحلیلی این به‌اصطلاح **مختصات‌خطی** استفادهٔ زیادی به‌عمل آورد. حالا یك نقطه، به‌جای آنکه دارای مختصات باشد، یك معادلهٔ خطی دارد، یعنی معادله‌ای که مختصات همهٔ خطوط مار براین نقطه در آن صدق می کنند (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۵.۱۴). تعبیرمضاعف یك زوج مختصات یا به‌صورت مختصات نقطه‌ای یامختصات خطی وتعبیریك معادلهٔ خطی یا به‌صورت معادلهٔ یك خط یا معادلهٔ یك نقطه، مبنای برهان تحلیلی پلوکر از اصل‌دوگانی هندسهٔ تصویری‌را فراهم کرد. یك منحنی‌را می‌توان یامکان هندسی نقاط آن یا به‌عنوان پوش مماسهای برآن تلقی کرد (نگاه کنید به‌شکل ۱۱۶). اگر، به‌جای‌نقاط یا خطوط راست، دایره را به‌عنوان عناصربنیادی‌خود برگزینیم، دراین‌صورت برای‌تعیین یکی ازعناصرخود به‌طورکامل به‌یك‌سه‌تایی مرتب ازاعداد، نیازخواهیم‌داشت. برای مثال، دریك‌چارچوب مرجع دکارتی متعامد، می‌توانیم دومختص دکارتی مرکزدایره را همراه باشعاع دایره اختیارکنیم. چنین ایده‌هایی منجر به‌تعمیم قابل ملاحظه وبه‌وجود آمدن نظریهٔ ابعاد شد. بعد چندی چندگونایی ازعناصربنیادی به‌عنوان‌عدهٔ مختصات مستقل لازم برای تعیین موضع‌یك‌عنصر بنیادی این‌چندگونا تلقی می‌شد. مطابق این‌مفهوم، صفحه برحسب نقاط، ونیز خطوط، دوبعدی، ولی نسبت به‌دوایر سه‌بعدی است. می‌توان نشان‌داد که صفحه درصورتی که همهٔ مقاطع مخروطی بتمامی در صفحه به‌عنوان چندگونای عناصر بنیادی اختیار شوند، پنج‌بعدی خواهد بود. البته نظریهٔ ابعاد، بسیار فراتر از این مفهوم مقدماتی‌رفته است، و امروزه موضوعی باوسعت و ژرفای زیاد است.

گرچه دکارت به‌هندسهٔ تحلیلی‌اجسام‌صلب اشاره‌کرده‌بود، ولی‌وارد جزئیات آن‌نشده بود. دیگران، نظیرفرانس‌وان‌سخوتن، لاهیر، ویوهان برنولی به‌طرح هندسهٔ تحلیلی‌اجسام صلب امروزی پرداختند، ولی در سال ۱۷۰۰ بودکه این موضوع به‌طور منظم، توسط



شکل ۱۱۶

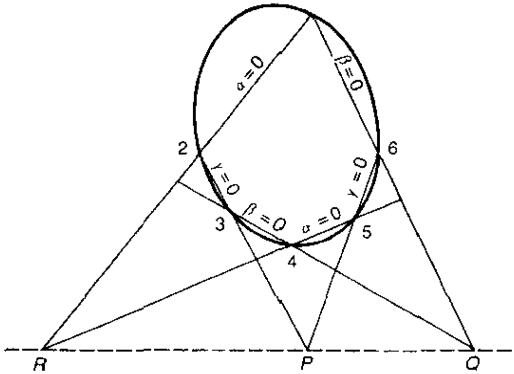
آنتوان‌پارن[1] (۱۶۶۶ ــ ۱۷۱۶) در مقاله‌ای که به‌آکادمی فرانسه عرضه شد، بسط یافت. ا.ك. کلرو (۱۷۱۳ ــ ۱۷۶۵) درسال ۱۷۳۱، اولین‌کسی بود که به‌طور تحلیلی دربارهٔ منحنیهای فضایی غیرواقع دریك صفحه، چیز نوشت. اویلر بعداً کل این موضوع را از مراحل مقدماتی به‌سطح بالاتری ارتقاء داد. این کارورزان اولیه، نقطه را به عنوان عنصر بنیادی انتخاب کردند. گرچه فضا برحسب نقاط سه بعدی است، می‌توان نشان داد که برحسب‌خطوط ونیزکرات چهاربعدی است. مع‌هذا، فضا برحسب‌صفحات، سه‌بعدی است (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۶.۱۴).

درحالی‌که هندسهٔ ترکیبی‌دانان به‌دستاوردهای‌سهل‌الوصول‌وجالب‌توجه‌می‌رسیدند، هندسهٔ تحلیلی‌دانان درباطلاق محاسبات جبری فرو رفته‌بودند. اگر هندسهٔ تحلیلی درصدد رقابت موفقیت‌آمیز باهندسهٔ ترکیبی برمی‌آمد، می‌بایست به‌بسط روشهایی نو و بهبودیافته بپردازد. برخی ازسرجنبانان روشهای مختصاتی باشوق وذوق فراوان درفهرست مدافعین هندسهٔ تحلیلی وارد شدند، واین‌موضوع دورهٔ طلایی خودرا آغازکرد. درصدرکسانی که درایجاد روشهای بهبودیافته درهندسهٔ تحلیلی‌سهم‌داشتند، یولیوس‌پلوکرقراردارد که طی‌یك سری مقاله وکتاب درسی، به‌تدبیر روشهایی پرداخت‌که نشان داد هندسهٔ تحلیلی، موقعی که به‌خوبی به‌کارگرفته شود، چیزی در زیبایی وسهولت ازهندسهٔ ترکیبی‌کم ندارد.

پلوکر درالبرفلد[2] درسال ۱۸۰۱ به‌دنیا آمد ودربن، برلین، و هایدلبرگ تحصیل کرد، ومدت کمی درپاریس درس خواند، که درآنجا در دروس مونژ و همشاگردیهای او شرکت کرد. بین ۱۸۲۶ و ۱۸۳۶ وی به‌طورمتوالی دربن، برلین، وهاله[3] سمت معلمی داشت. درسال ۱۸۳۶ به‌عنوان استاد ریاضیات به‌دانشگاه بن بازگشت و این شغل را در سال ۱۸۴۷ با استادی فیزیك همان دانشگاه تعویض کرد. وی دربن در سال ۱۸۶۸ درگذشت.

کتاب دوجلدی بسط هندسهٔ تحلیلی[4] پلوکر در سالهای ۱۸۲۸ و ۱۸۳۱ منتشرشد. درجلد اول این اثر، **روش‌نماد مختصر**[5]، گرچه قبلاً توسط گابریل‌لامه[6] و اتین‌بوبیلیه[7] به‌کار رفته بود، برای اولین‌بار به‌طورمبسوط مورد بحث قرار می‌گیرد. فکرنماد مختصر مبتنی برنمایش عبارات طولانی توسط حرفی واحد ومبتنی براصل بنیادی زیر است: اگر $\alpha(x,y)=0$ و $\beta(x,y)=0$ دومنحنی باشند، دراین صورت $u\alpha+v\beta=0$، که درآن u و v دومقدار ثابت یا تابعهایی از x و y اند، منحنیی است که برنقاط تلاقی منحنیهای $\alpha=0$ و $\beta=0$ می‌گذرد. برای‌قضایایی نظیر قضیهٔ دومثلث دزارگ وقضیهٔ هگزاگرام رمزی پاسکال که ظاهراً از لحاظ جبری پیچیده‌اند، می‌توان به‌کمك نماد مختصر براهین نسبتاً زیباتر و مختصرتری داد. به‌عنوان مثال قضیهٔ اخیررا درنظرگیرید.

1. Antoine Parent 2. Elberfeld 3. Halle
4. Analytisch - geometrische Entwicklungen
5. Method of abridged notation 6. Gabriel Lamé
7. Étienne Bobillier



شکل ۱۱۷

قضیهٔ هگزاگرام رمزی پاسکال . اگر شش نقطهٔ ۱ ، ۲ ، ۳، ۴ ، ۵ ، ۶ بریك مقطع مخروطی واقع باشند، دراین صورت سه نقطهٔ P، Q، R، محل تلاقی سه زوج خط ۵۶ و ۲۳، ۱۶ و۳۴، ۱۲ و ۴۵ همرس‌اند.

فرض می‌کنیم $\alpha=0$، $\beta=0$، $\gamma=0$، $\alpha'=0$، $\beta'=0$، $\gamma'=0$ معادلات (نگاه کنید به‌شکل ۱۱۷) خطوط ۱۲، ۳۴، ۵۶، ۴۵، ۶۱، ۲۳ باشند، منحنی درجهٔ سوم

$$\alpha\beta\gamma+k\alpha'\beta'\gamma'=0$$

را درنظر گیرید. صرفنظر ازمقدار k، این‌معادلهٔ درجهٔ سوم برنه نقطهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، P، Q، R می‌گذرد. نقطه دیگری مانند ۷ را برمقطع مخروطی اختیارکنید و k را طوری تعیین‌کنید که معادلهٔ درجهٔ سوم برنقطهٔ ۷ نیز بگذرد. حال یك‌منحنی درجهٔ سوم ویك‌مقطع مخروطی می‌توانند یکدیگر را حداکثر در ۶ = (۲)(۳) نقطه قطع کنند، مگر اینکه مقطع مخروطی قسمتی ازمنحنی درجهٔ سوم‌باشد، و بقیهٔ آن یك‌خطِ مستقیم است. پس‌بایدهمینطور باشد، وسه نقطهٔ باقی ماندهٔ P، Q، R، باید بریك خط واقع باشند.

درجلد دوم بسط هندسهٔ تحلیلی، مختصات همگن نقاط درصفحه عرضه می‌شود. در این‌کتاب مختصات دکارتی (همگن) نقطه‌ای مانند P که دارای مختصات دکارتی (X,Y) است ، به‌عنوان هر سه‌تایی مرتب (x,y,t) به طوری‌که $X=x/t$ و $Y=y/t$ تعریف می‌شود، نتیجه می‌شود که سه‌تاییهای مرتب (x,y,t) و (kx,ky,kt) معرف نقطهٔ واحدی هستند. نام همگن ازاین‌واقعیت‌ناشی می‌شود که وقتی‌معادلهٔ $f(X,Y)=0$ مربوط به‌منحنی جبری درمختصات دکارتی را به‌صورت $f(x/t,y/t)=0$ درمی‌آوریم، همهٔ جمله‌ها در معادلهٔ جدید برحسب متغیرهای جدید درجهٔ واحدی پیدا می‌کنند. امـا، مهمتر ازآن، در مختصات همگن یك سه‌تایی $(x,y,0)$، که همتایی در دستگاه دکارتی ندارد، معرف یك

«نقطه در بینهایت»است، و نقاط آرمانی در بینهایت کپلر، دزارگ، و پونسله اینك نمایشی در یك دستگاه مختصات می‌یابند. دراین‌صورت معادلهٔ ۰ = t معادلهٔ خط آرمانی در بینهایت است. نتیجه می‌شود که مختصات همگن، ابزارکاملی برای اکتشاف تحلیلی هندسهٔ تصویری است که هم به‌نقاط متناهی وهم به‌نقاط نامتناهی صفحه نیاز دارد.

کتاب پلوکر به‌نام دستگاه هندسهٔ تحلیلی[1] سال ۱۸۳۵ مشتمل بر رده‌بندی کاملی از منحنیهای درجهٔسوم برمبنای‌ماهیت نقاط بینهایت آنهاست، وکتاب نظریهٔ منحنیهای جبری[2] سال ۱۸۳۹ او شمارشی از منحنیهای درجهٔ چهارم و چهارمعادلهٔ مشهور اوکه نقاط تکین منحنیهای جبری‌را به‌هم مربوط می‌کنند، می‌دهد. این معادلات عبارت‌اند از

$$m = n(n-۱) - ۲\delta - ۳\kappa \quad , \; n = m(m-۱) - ۲\tau - ۳\iota$$
$$\iota = ۳n(n-۲) - ۶\delta - ۸\kappa \; , \; \kappa = ۳m(m-۲) - ۶\tau - ۸\iota$$

که در آن m ردهٔ منحنی (درجهٔ معادلهٔ منحنی وقتی که در مختصات خطی بیان شوند)، n درجهٔ منحنی (درجهٔ معادلهٔ منحنی وقتی که درمختصات نقطه‌ای بیان شوند)، δ عدهٔ بندها، κ عدهٔ نقاط بازگشت، ι عدهٔ نقاط عطف منحنی ، و τ عدهٔ دومماسیها است.

برای‌مدت تقریباً بیست‌سال بعداز انتصابش به‌عنوان استادفیزیك، پلوکر عمدتاًخود را وقف‌تحقیقاتی درآنالیزطیفی، مغناطیس، وسطح‌موجی فرنل‌کرد. وی دربقیهٔزندگی‌اش، به‌سوی محبوب‌اولش، ریاضیات، بازگشت وهندسهٔ چهاربعدی خطوط فضایی‌را همراه با نظریهٔ «همبافتها» و «همنهشتیها»ی خطوط فضایی پدید آورد.

دربررسی مفصلتر رشد قابل ملاحظهٔ هندسهٔ تحلیلی درقرن نوزدهم، افراد زیر باید مورد توجهی غیرگذرا قرارگیرند: ژوزف دیاز ژرگون(۱۷۷۱–۱۸۵۹، افسرتوپخانه، ویراستار، و استاد ریاضیات) ، اوگوستوس فردیناند موبیوس (۱۷۹۰ – ۱۸۶۸ ، استاد درلایپزیگ)، گابریل‌لامه(۱۷۸۵–۱۸۷۰، مهندس‌واستاد ریاضیات)، اتین بوبیلیه(۱۷۹۷–۱۸۳۲، استاد مکانیك)، لـوتویك اوتو هسه[3] (۱۸۱۱–۱۸۷۴، استاد درکونیگسبرگ) ، رودلف‌فریدریش آلفرد کلبش[4](۱۸۳۳–۱۸۷۲، استاددرکونیگسبرگ‌وبعداً درگوتینگن)، ژورژـ هانری‌هالفن[5](۱۸۴۴–۱۸۸۹، ازاهالی‌روئن[6] وممتحن‌اکول‌پلی‌تکنیك‌درپاریس)، و دیگران.

بخشی از کاربرد هندسهٔ تحلیلی در مطالعهٔ ابرفضایی‌که برحسب نقاط n بعدی ($n>۳$) است به‌بخش‌آتی موکول می‌شود.

---

1. System der analytischen Geometrie
2. Theorie der algebraischen Curven
3. Ludwig Otto Hesse
4. Rudolph Friedrich Alfred Clebsch
5. George - Henri Halphen
6. Rouen

۱۴-۶ هندسهٔ n - بعدی

نخستین مفاهیم مبهم یك ابرفضای n-بعدی ($n>3$) برحسب نقاط درتاریکی ایام گذشته محو شده و باافکار مابعدالطبیعه درهم آمیخته‌اند. اولین مقالهٔ حساب شده‌ای که صراحتاً به‌هندسهٔ نقطه‌ای باابعاد بالامی‌پردازد توسط آرثر کیلی (۱۸۲۱–۱۸۹۵) درسال ۱۸۴۳ نگاشته شده و پس ازآن مورد توجه سه ریاضیدان انگلیسی یعنی کیلی، ج. ج. سیلوستر (۱۸۱۴–۱۸۹۷)، و و. ك. کلیفورد[1] (۱۸۴۵–۱۸۷۹) قرارگرفته است. کار پیشگامانهٔ همزمان درهندسه باابعاد بالاکه توسط هـ. گ. گراسمن (۱۸۰۹–۱۸۷۷) و لوتویك- اشلفلی[2] (۱۸۱۴–۱۸۹۵) انجام شده بود، برای مدتی توجه کسی‌را درقارهٔ اروپا به‌خود جلب نکرد. درواقع‌قسمت اعظم‌کار اشلفلی تا چند سال بعد ازمرگ او یعنی تا زمانی که ویکتور اشلگل[3] (۱۸۴۳–۱۹۰۵) و دیگران درآلمان این‌موضوع را به اشتهار رسانده بودند، منتشرنشد. هندسهٔ تصویری باابعاد بالا تقریباً به‌طورکامل‌توسط مکتب هندسه‌دانان ایتالیایی به‌وجودآمده بود، گرچه گشایش باب این مبحث درسال ۱۸۷۸ به‌دست کلیفورد صورت گرفت.

کاملا مستقل از کاری که در بالا در بارهٔ آغاز هندسهٔ نقطه‌ای با ابعاد بالا ذکرشد، به‌پیدایش تدریجی جنبهٔ حسابی این موضوع براثر کاربردهای آنالیز، که درآن بحث تحلیلی‌را می‌توان به‌آسانی ازدو‌یا سه‌متغیر به‌تعداد دلخواهی متغیرتعمیم داد، برمی‌خوریم. مثلاً جورج گرین[4] (۱۷۹۳ – ۱۸۴۱)، در سال ۱۸۳۳، مسئلهٔ ربایش دوسویهٔ دو جرم بیضوی را به مسئله‌ای درآنالیز تحویل، و سپس آن‌را با هرتعدادی متغیرحل کرد وافزود که، «دیگر مسئله مانندقبل به‌سه بعد فضا محدودنیست». دیگرنویسندگان تعمیمهای مشابهی را برای‌تعداد زیادی متغیردلخواه به‌عمل‌آوردند، وتنها گامی دیگرلازم بود تااصطلاحات هندسه دربسیاری ازصورتها وفرایندهای جبر وآنالیز به‌کارگرفته شوند. این‌گام با بیان روشن‌زیرتوسط‌کوشی، درسال ۱۸۴۷، درمقاله‌ای دربارهٔ مکانهای‌تحلیلی برداشته شدکه می‌گفت، «مجموعه‌ای از n متغیر را یك نقطهٔ تحلیلی و یك معادله یادستگاهی ازمعادلات را یك مکان تحلیلی خواهیم نامید»، و بی‌هیچ تردیدی، مهمترین تجلی‌گاه اولیهٔ‌این نقطه- نظر تحلیلی ازهندسه باابعاد بالادرخطابهٔ مهم‌آزمایشی‌ریمان به‌سال ۱۸۵۴ دیده می‌شود، که تا سال ۱۸۶۶ چاپ نشد. درضمن این خطابه بودکه ریمان مفهوم چند گوناهای n- بعدی و روابط اندازه‌ای‌آنهـا را بنیان‌گذاشت، ودرسرتاسر این بحث وی پنـداشتها و انگاره‌های هندسی را درنظر داشت.

تعداد مقالات وآثاری‌که به‌هندسهٔ باابعاد بالا اختصاص دارد، بعدازسال ۱۸۷۰ افزایش زیادی یافت. در سال ۱۹۱۱ د. م. ی. سومرویل[5] اثر خود به‌نام کـتابشناسی

---

1. W. K. Clifford 2. Ludwig Schläfli
3. Victor Schlegel 4. George Green
5. D. M. Y. Sommerville

نااقلیدسی، به انضمام نظریهٔ موازیها، مبانی هندسه، وفضای n ـ بعدی[1]، را منتشر کرد. دراین کتابشناسی، ۱۸۳۲ مرجع دربارهٔ هندسهٔ n ـ بعدی دیده می‌شود، که حدود ثلث آن ایتالیایی، حدود ثلث آن آلمانی، و بقیه عمدتاً فرانسوی، انگلیسی، وهلندی هستند.

مطالعهٔ هندسهٔ n ـ بعدی با واردکردن مفاهیم مناسب درحساب فضای n-بعدی انجام می‌شود. فضای حسابی n ـ بعدی مجموعهٔ همهٔ n ـ تاییهای مرتب مانند $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ از اعداد حقیقی است و هریك از گونهٔ n-تاییها، یك **نقطه** این فضا نامیده می شود. روابط بین این نقاط بەوسیلهٔ فرمولهایی مشابه بافرمولهایی‌که برای روابط بین‌نقاط، مثلاً، فضاهای نقطه‌ای دکارتی دو وسه‌بعدی برقرار است،تعریف می شوند. مثلاً، چون فاصلهٔ بین نقاط (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در یك دستگاه دو بعدی دکارتی متعامد به‌صورت

$$[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{1/2},$$

و فاصلهٔ بین دونقطهٔ (x_1, x_2, x_3) و (y_1, y_2, y_3) در یك دستگاه سه بعدی دکارتی متعامد به‌صورت

$$[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2]^{1/2}$$

داده می شود، **فاصلهٔ** بین دو نقطهٔ $x=(x_1, \cdots, x_n)$ و $y=(y_1, \cdots, y_n)$ در فضای n بعدی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}.$$

به‌طور مشابه، **کرهٔ nـبعدی** به‌شعاع r و به‌مرکز $(a_1, \cdots, a_n)$ را به عنوان مجموعهٔ کلیهٔ نقاطی مانند $x=(x_1, \cdots, x_n)$ به‌قسمی‌که داشته‌باشیم

$$(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2=r^2,$$

تعریف می‌کنیم. یك زوج نقطه را به‌عنوان یك **پاره خط**، وهر n ـ تایی مرتب اعداد به‌شکل

$$(k(y_1-x_1), \cdots, k(y_n-x_n)), k\neq 0$$

را **مؤلفه‌های هادی** پاره خط xy که با نقاط x و y معین می‌شود، تعریف می‌کنیم. **کسینوس زاویهٔ** θ بین دوپاره خط xy و uv را با

$$\cos\theta=\frac{(y_1-x_1)(v_1-u_1)+\cdots+(y_n-x_n)(v_n-u_n)}{d(x, y)\, d(u, v)}$$

---

1. Bibliography of Non-Euclidean Geometry, Including the Theory of Parallels, the Foundations of Geometry, and Space of n Dimensions

تعریف می‌کنیم که در آن $d(x,y)$ فاصلهٔ بین نقاط x و y، و $d(u, v)$ فاصلهٔ بین نقاط u و v است. دو پاره خط را **متعامد** نامیم اگر و فقط اگر کسینوس زاویهٔ بین آنها برابر صفر باشد. تبدیلی به‌صورت

$$y_i = a_i + x_i,\ \ i = ۱, ۲, \cdots, n,$$

که نقطه x را به نقطه y می‌نگارد، یك **انتقال** نامیده می‌شود. سایر تبدیلهای نقاط فضا بر روی خود را می‌توان به‌طور مشابه تعریف نمود. بیان تعریفی از یك مخروطی‌وار n- بعدی و سپس مطالعهٔ قطب، قطبی، وسایر خواص این مخروطی‌وارها کار ساده‌ای است. یك هندسهٔ n - بعدی از این نوع را می‌توان یك مبحث ناب جبری تلقی کرد که از اصطلاحات هندسی استفاده می‌کند.

هندسه‌های با ابعاد بالا در سایر مباحث بدون کاربرد نیستند. درحقیقت، عملاً برخی نیازهای فیزیکدانها و آماردانها بود که عمدتاً موجب بسط و توسعهٔ این موضوع گردید. مثلاً، امروزه، خیلی‌ها وحتی غیر اهل فن، می‌دانند که درنظریه نسبیت ازمفهوم فضای چهار- بعدی استفاده می‌شود. اما دراینجا می‌توان مثال ساده‌تری را، با نشان دادن اینکه نظریهٔ جنبشی گازها چگونه به‌استفاده از هندسهٔ ابعاد بالا می‌پردازد، عنوان کرد. ظرف بسته‌ای را که حاوی گازی است، درنظر بگیرید وفرض کنید که این گاز از m مولکول تشکیل شده باشد. این مولکولها در داخل ظرف درحال حرکت هستند، و هرمولکول خاص، در لحظهٔ خاصی، در نقطه‌ای مانند (x, y, z) از فضای معمولی است و ، در آن لحظه، دارای مؤلفه‌های تندی معین u، v، w درامتداد محورهای مختصات است. تنها درصورتی که هرشش عدد x، y، z، u، v، w را بدانیم، جای مولکول را در لحظهٔ مفروض، وامتداد ومیزان حرکت آن را خواهیم دانست. بدین ترتیب m مولکول گاز داخل ظرف به $۶m$ مختص بستگی دارند. درهرلحظه این $۶m$ مختص مقادیر معینی دارند که وضعیت گاز را درآن لحظه معین می‌کنند. اما این $۶m$ مقدار نقطه‌ای را در یك فضای $۶m$ بعدی معین می‌کنند، و بین این گونه نقاط و وضعیتهای ممکن گاز تناظری یك به‌یك موجود است. چون وضعیت گاز، به‌دلیل حرکت مولکولها، تغییر می‌کند، نقطهٔ متناظر به‌آن مسیر یا یك مکان هندسی را درفضای $۶m$ بعدی به‌وجود می‌آورد. از اینجا نتیجه می‌شود که رفتار، یا سابقهٔ، این گاز به‌طورهندسی با این مکان هندسی نمایش داده می‌شود.

۱۴-۷ هندسهٔ دیفرانسیل

موضوع هندسهٔ دیفرانسیل مطالعهٔ خواص منحنیها وسطوح، وتعمیم آنها، به کمك حسابان، است.

اگرچه می‌توان استنتاج قضایای هندسی را درمطالعهٔ اشکال تدریجاً تغییر یابنده در تعیین مساحات و احجام به روش ارشمیدس ، مطالعهٔ آپولونیوس از قائمهای برمقاطع مخروطی، وبعداً از روش تقسیم‌ناپذیرهای کاوالیری وکار زیبای هویگنس دربارهٔ انحنا و

گسترده‌ها مشاهده کرد، شاید کاملاً به درستی بتوان گفت که هندسهٔ دیفرانسیل، دست کم درشکل جدیدش، باکاربردهای حساب دیفرانسیل وانتگرال درهندسهٔ تحلیلی دراوایل قرن هجدهم آغاز شده‌است. اما اولین انگیزهٔ واقعی دراین موضوع را، ورای هندسهٔ دیفرانسیل در صفحه، گاسپارمونژ (۱۷۴۶–۱۸۱۸) فراهم کرده است، واو را می‌توان پدر هندسهٔ دیفرانسیل منحنیها وسطوح درفضا دانست. مونژمعلم برجسته‌ای بود، و دروس اودرمدرسهٔ پلی‌تکنیك پاریس الهامبخش عدهٔ زیادی ازمردان جوان برای پرداختن به این موضوع گردید. دربین اینها ژ. ب. مونیه[1] (۱۷۵۴–۱۷۹۳)، ا. ل. مالوس[2] (۱۷۷۵–۱۸۱۲)، ش. دوپن[3] (۱۷۸۴–۱۸۷۳)، و ا. رودریگز[4] (۱۷۹۴–۱۸۵۱) قرار دارند، که همهٔ آنها قضایای مهمی در هندسهٔ دیفرانسیل به نام خود دارند. مونژ و دانشجویان او بانیان مکتب بزرگ‌فرانسوی هندسه دیفرانسیل‌دانان شدند، که بعداً افرادی نظیر اوگوستن‌لوئی کوشی (۱۷۸۹–۱۸۵۷)، ب.دوسن‌ونان[5] (۱۷۹۶–۱۸۸۶)، ف.فرنه[6] (۱۸۱۶–۱۸۸۸)، ژ. ا. سره[7] (۱۸۱۹–۱۸۸۵)، و.پوییزو[8] (۱۸۲۰–۱۸۸۳)، و ژ. برتران[9] (۱۸۲۲–۱۹۰۰) را درسلك خود قرار داد.

کارکوشی در هندسهٔ دیفرانسیل نشانهٔ پایان نخستین دوره در تاریخ این موضوع است. دومین‌دوره توسط کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷–۱۸۵۵) گشوده می‌شود، که روش بسیار پرثمر مطالعهٔ هندسهٔ دیفرانسیل منحنیها و سطوح را به‌کمك نمایش پارامتری آنها مطرح کرده‌است. گ.میناردی[10] (۱۸۰۰–۱۸۷۹)، ژ.پلاتو[11] (۱۸۰۱–۱۸۸۳)، ك. گ. ژ. ژاکوبی (۱۸۰۴–۱۸۵۱)، ا. بونه[12] (۱۸۱۹–۱۸۹۲)، د.کوداتسی[13] (۱۸۲۴–۱۸۷۵)، ا. ب. کریستوفل[14] (۱۸۲۹–۱۹۰۱)، ا. بلترامی[15] (۱۸۳۵–۱۹۰۰)، ژ. گ. داربو[16] (۱۸۴۲–۱۹۱۷)، وبسیاری دیگر ازکسانی هستندکه در نظریهٔ کلاسیك منحنیها وسطوح درفضا سهمی داشتند.

سومین دورهٔ بزرگ در تاریخ هندسهٔ دیفرانسیل با گئورگ برنهارد ریمان (۱۸۲۶–۱۸۶۶) آغاز شد. در این دوره، این‌مطلب که گرایش ریاضیات اعصار جدید به‌تلاش برای بیشترین تعمیمهای ممکن است، به‌ثبوت می‌رسد. فضای سه بعدی معمولی آشنا پشت سر گذاشته می‌شود، و مطالعه درچیزهایی‌نظیرچندگوناهای m- بعدی مشتقپذیر که درفضای n- بعدی فرو برده شده‌اند، متمرکز می‌شود. دوچیز برای این بسط، لازم شناخته

---

1. J. B. Meusnier
2. E. L. Malus
3. C. Dupin
4. O. Rodrigues
5. B. de Saint-Venant
6. J. F. Frenet
7. J. A. Serret
8. V. Puiseux
9. J. Bertrand
10. G. Mainardi
11. J. Plateau
12. O. Bonnet
13. D. Codazzi
14. E. B. Christoffel
15. E. Beltrami
16. J. G. Darboux

شدند: اصلاح نمادگذاری و روشی که به‌ماهیت چندگونا بستگی داشته باشد و نه به‌دستگاه مختصات خاصی که به‌کار برده شده‌است. از این لحاظ حساب تانسوری ابداع گردید، و این موضوع کلی توسط ریاضیدانانی چون گ. ریچی ـ کورباسترو[1] (۱۸۵۳-۱۹۲۵)، ت. لوی. چیوتیا[2] (۱۸۷۳-۱۹۴۱)، و آ. اینشتین[3] (۱۸۷۹-۱۹۵۵) بسط یافت. هندسه‌های دیفرانسیل تعمیم یافته، موسوم به هندسه‌های ریمانی، وسیعاً مورد کاوش قرار گرفتند، و اینها به‌نوبهٔ خود به‌هندسه‌های غیرریمانی و سایر هندسه‌ها منجر شدند. تحقیقات امروزی درهندسهٔ دیفرانسیل به‌تعمیم و تجرید می‌پردازد، و به‌مطالعهٔ کلاسیك که پیوندهای قوی با موارد ملموس دارد، کمتر شبیه‌است.

به‌یك سطح می‌توان ازدودیدگاه نظر کرد: یا به‌عنوان مرز یك‌جسم صلب یا به‌عنوان یك پوستهٔ دوبعدی مجزا. اولی شاید طرز تلقی یك مهندس ساختمان ازسطح باشد، ودومی شاید طرز تلقی یك مساح از آن. اولین دیدگاه شخص را بر آن می‌دارد که به‌جستجوی آن خواص سطح بپردازد که آن‌را به‌فضای اطراف مربوط می‌کند، ودومین دیدگاه شخص را بر آن می‌دارد که در آن خواص سطح تفحص کند که مستقل ازفضای اطراف باشند. خواص نوع اول **خواص نسبی** سطح نامیده می‌شوند ومطالعهٔ آنها **هندسهٔ عارضی** سطح نام دارد؛ خواص نوع دوم **خواص مطلق** سطح نامیده می‌شوند ومطالعهٔ آنها **هندسهٔ ذاتی** سطح نام دارد. جالب اینکه دوشخصیت مهمی که دراوایل سهمی درهندسهٔ دیفرانسیل سطوح داشتند، یعنی مونژ و گاوس، به‌ترتیب به‌سطح عمدتاً به‌عنوان مرز یك جسم و عمدتاً به‌عنوان یك ـ پوستهٔ دوبعدی‌مجزا توجه‌کردند. مونژ، ازجمله، به‌خاطر کارش به‌عنوان یك‌مهندس‌ساختمان استحکامات نظامی‌شهرت‌دارد، و گاوس، ازجمله به‌خاطر کار درمساحی ژئودزی و ژئودزیك شهرت به‌هم‌رسانده‌است.

۸-۱۴ فلیکس کلاین و برنامهٔ ارلانگر

درسال ۱۸۷۲، هنگام انتصاب به‌استادی دانشکدهٔ فلسفه وعضویت هیأت امنای دانشگاه ارلانگن[4]، فلیکس کلاین (۱۸۴۹ - ۱۹۲۵) به رسم معمول نطق افتتاحیه‌ای در حوزهٔ تخصص‌اش ایراد کرد. دراین نطق، که مبتنی برکارخود او و سوفوس لی (۱۸۴۲-۱۸۹۹) در نظریهٔ گروهها بود، تعریف مهمی از «هندسه» داد که اساساً درتدوین کلیهٔ هندسه‌های موجود آن زمان به کار آمد وشاهراههای جدید و پرثمری را درتحقیقات هندسی در پیش گشود. این نطق، با برنامهٔ مطالعهٔ هندسی مورد توصیه‌اش، به‌**برنامهٔ ارلانگر**[5] مشهور شده‌است؛ این برنامه درست در زمانی عنوان شد که نظریهٔ گروهها تقریباً کلیهٔ حوزه‌های ریاضیات را تحت تسلط خود قرار داده بود، و برخی از ریاضیدانان چنین حس می‌کردند که همهٔ ریاضیات چیزی جز وجهی ازنظریه گروهها نیست.

---

1. G. Ricci - Curbastro
2. T. Levi - Civita
3. A. Einstein
4. Erlangen
5. Erlanger Programm

کاربرد گروهها در هندسه توسط کلاین به‌مفهوم **تبدیل یك مجموعهٔ S به‌روی خودش** بستگی دارد، که منظور از آن صرفاً تناظری است که تحت آن هرعضو S با عضو یکتایی ازخودش متناظر می‌گردد، وهرعضو S نظیر عضویکتایی از S است. منظور از **حاصلضرب T_2T_1** دوتبدیل T_1 و T_2 مجموعه‌ای مانند S برروی خودش، تبدیلی است که ابتدا با انجام تبدیل T_1 وسپس تبدیل T_2 به‌دست می‌آید. اگر T تبدیلی ازمجموعهٔ S برروی خود باشد، که هرعضو a از S را به‌عضو متناظری مانند b از S ببرد، دراین صورت تبدیلی که تبدیل T را، با برگرداندن هرعضو b از S به عضو اولیهٔ a از S، عکس می‌کند، **تبدیل معکوس** T نامیده شده و با T^{-1} نشان داده می‌شود. تبدیلی که هرعضو S را به‌خودآن عضو می‌برد، **تبدیل همانی** برروی S نامیده شده و با I نشان داده می‌شود. خاصیت زیررا می‌توان به‌آسانی ثابت کرد: مجموعه‌ای مانند Γ از تبدیلات مجموعه‌ای مانند S برروی خودش‌تحت عمل‌ضرب تبدیلها تشکیل یك‌گروه (به‌معنی‌فنی‌آن درجبرمجرد ـ نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۶.۱۳) می‌دهد هرگاه (۱) حاصلضرب دوتبدیل دلخواه از Γ در مجموعهٔ Γ باشد، (۲) معکوس هرتبدیل از مجموعهٔ Γ در مجموعهٔ Γ باشد. هرچنین گروهی ازتبدیلها را به‌اختصار **یك‌گروه تبدیل** می‌نامند.

اینك برای ارائهٔ **تعریف** مشهور فلیکس کلاین از یك هندسه آماده‌ایم: یك **هندسه** مطالعهٔ آن خواص ازیك مجموعهٔ S است‌که وقتی‌اعضای‌آن تحت تبدیلهای‌گروه تبدیلی مانند Γ قرار گیرند، پایا بمانند. این هندسه را می‌توان به‌سهولت با نماد $G(S,\Gamma)$ نشان داد.

برای تشریح تعریف کلاین ازهندسه، فرض‌کنید S مجموعهٔ همهٔ نقاط یك صفحهٔ معمولی‌باشد، ومجموعهٔ Γ از تبدیلات S را درنظربگیریدکه ترکیبی ازانتقالها، دورانها، و انعکاسها نسبت به خطوط باشند. چون حاصلضرب هردو تبدیلی از این گونه تبدیلها و معکوس هرتبدیلی از این گونه تبدیلها، از نوع این تبدیلها هستند، نتیجه می‌شودکه Γ یك‌گروه تبدیل است. هندسهٔ حاصل **هندسهٔ متری اقلیدسی مسطحهٔ** معمولی است. چون خواصی‌نظیر طول، مساحت، همنهشتی، توازی، تعامد، تشابه اشکال، همخطی نقاط، وهمرسی خطوط تحت گروه Γ پایا هستند، این خواص در هندسهٔ متری اقلیدسی مسطحه مطالعه می‌شوند. حال اگر Γ باانضمام تبدیلهای تجانس (که درآن هرنقطه مانند P به‌نقطه‌ای مانند P' برده می‌شود به‌قسمی که $AP=k\cdot AP'$، که درآن A یك‌نقطهٔ ثابت، k یك عدد ثابت مثبت، و A، P، P' همخط هستند) به انتقالها، دورانها، و انعکاس نسبت به خطوط تعمیم یابد، **هندسهٔ تشابه درصفحه**، یا **هندسهٔ همشکلی در صفحه** به‌دست می‌آید. تحت این گروه توسیع‌یافته خواصی‌نظیرطول، مساحت، وهمنهشتی دیگرپایا نمی‌مانند، وبنابراین دیگر موضوع مطالعه نیستند، ولی توازی، تعامد، تشابه اشکال، همخطی نقاط، و همرسی خطوط همچنان خواص پایا هستند، وبنابراین مطالب موردمطالعه دراین هندسه‌را تشکیل می‌دهند. ازدیدگاه کلاین، هندسهٔ تصویری، مطالعهٔ‌آن خواصی ازنقاط یك تصویر است‌که براثرعمل‌گروه به‌اصطلاح تبدیلات‌تصویری، پایا باقی‌بمانند. ازخواص درپیش گفته‌شده،

تنها همخطی نقاط وهمرسی خطوط همچنان پایا می‌مانند. یك پایای مهم تحت این تبدیلها، نسبت خاجی چهارنقطهٔ همخط است؛ این پایا نقش مهمی در مطالعهٔ هندسهٔ تصویری دارد. هندسه‌های متری مسطحهٔ نااقلیدسی را، که درفصول قبل بررسی شدند، می‌توان مطالعهٔ آن خواصی ازنقاط یك‌صفحهٔ نااقلیدسی تصور کرد که تحت گروه تبدیلهایی مرکب از تبدیلها، دورانها، وانعکاس نسبت به‌خطوط پایا باقی بمانند.

در کلیهٔ هندسه‌های بالا، عناصر بنیادیی که تبدیلهای یك گروه تبدیل بر آنها اعمال می‌شوند، نقاط‌اند؛ بنابراین‌هندسه‌های بالا همه مثالهایی از به‌اصطلاح **هندسه‌های نقطه‌ای**‌اند. همچنان که در بخش ۱۴ــ۵ خاطرنشان شد، هندسه‌هایی وجود دارند که درآنها ذواتی‌جز نقاط به عنوان عناصر بنیادی انتخاب می‌شوند. مثلاً هندسه‌دانان، هندسه‌های خطوط، هندسه‌های دوایر، هندسه‌های کرات، وسایر هندسه‌های گوناگون را مطالعه می‌کنند. در بنا کردن یك هندسه ابتدا در انتخاب عنصر بنیادی آن (نقطه، خط، دایره، و غیره)؛ سپس، چندگونا یا فضای این‌عناصر (صفحهٔ نقاط، فضای نقاط معمولی، فضای‌کروی نقاط، صفحهٔ خطوط، دستهٔ دوایر، وغیره)؛ وسرانجام، گروه تبدیلی که روی عناصر بنیادی عمل می‌کند، آزادی عمل وجود دارد. بدین‌طریق، ساختن یك هندسهٔ جدید مطلب ساده‌ای‌می‌شود.

جنبهٔ جالب دیگر این هندسه‌ها، نحوه‌ای است که برخی از آنها سایرین را دربر می‌گیرند. مثلاً، چون‌گروه تبدیل هندسهٔ متری اقلیدسی مسطحه زیرگروهی ازگروه‌تبدیل هندسهٔ همشکلی مسطحه است، نتیجه می‌شودکه هر قضیه‌ای که درهندسهٔ اخیر صادق باشد، در دومی هم باید صادق باشد. از این دیدگاه می‌توان نشان داد که هندسهٔ تصویری در درون هر یك از دوهندسهٔ قبل قرار داد، و نوعی دنبالهٔ هندسه‌های تودرتو پدید می‌آیند. تا این اواخر، گروه تبدیل هندسهٔ تصویری، گروههای تبدیل عملاً کلیهٔ هندسه‌های دیگر راکه موردمطالعه قرارگرفته بودند، به‌عنوان زیرگروه دربرداشت. منظور کیلی ازاین‌بیان که: «هندسهٔ تصویری هرهندسه‌ای را شامل می‌شود» همین است. در واقع، تا آنجا که به قضایای‌هندسه‌ها مربوط می‌شود،روی دیگراین‌مطلب‌صحیح است ـ قضایای هندسهٔ‌تصویری دربین قضایای هریك ازهندسه‌های دیگر قرارمی گیرند.

تقریباً به‌مدت ۵۰سال ترکیب وتدوین هندسه‌ها به‌سبك کلاین اساساً معتبر ماند. اما به‌فاصلهٔ‌کوتاهی بعداز تغییرقرن، مجموعه‌ای‌ازقضایای ریاضی، که به‌نظر ریاضیدانان باید هندسه نامیده می‌شدند، آشکار شدند؛ این مجموعهٔ قضایا را نمی‌شد با چنین نحوهٔ تدوینی مطابقت داد، و دیدگاه جدیدی دربارهٔ این موضوع به‌وجودآمد، که مبنای آن مفهوم‌فضای مجرد با ساختاری اعمال شده برآن بودکه می‌شد برحسب گروه تبدیلی قابل تعریف باشد یا نباشد. ما این دیدگاه جدید را در بخش ۱۵ــ۳ بررسی خواهیم کرد و صرفاً در اینجا خاطرنشان می‌کنیم که‌برخی‌ازاین هندسه‌های جدیدکاربردهایی درنظریهٔ‌جدیدفضای‌فیزیکی پیداکرده‌اندکه با نظریهٔ نسبیت عمومی اینشتین درهم آمیخته‌اند. مفهوم کلاینی هم‌اکنون نیز هرجاکه کاربردی داشته باشد، بسیارمفید است، ومی‌توان هندسه‌ای را که تعریف آن مطابق تعریف کلاین به صورت بالا باشد، یك **هندسهٔ کلاینی** نامید. تلاشهایی تا حدی

فلیکس کلاین
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

موفقیت آمیز در قرن بیستم، به‌ویژه توسط اسوالد وبلن[1] (۱۸۸۰—۱۹۶۰) و الی کارتان[2] (۱۸۶۹—۱۹۵۱) به‌عمل آمد تا تعریف کلاین طوری تعمیم و توسیع یابد که هندسه‌هایی راکه خارج از برنامهٔ اصلی کلاین قرار داشتند، دربر گیرد.

فلیکس کلاین در دوسلدورف[3] درسال ۱۸۴۹ به‌دنیا آمد. دربن، گوتینگن، وبرلین تحصیل کرد، و به‌عنوان دستیار یولیوس پلوکر دربن به‌خدمت درآمد. اولین مقام حرفه‌ای او در دانشگاه ارلانگن (۱۸۷۲—۱۸۷۵) بود، که نطق افتتاحیهٔ او در آنجا به‌گشایش برنامهٔ هندسی فوق‌الذکر منجرشد. سپس در مونیخ، دانشگاه لایپزیگ (۱۸۸۰—۱۸۸۶)، و دانشگاه گوتینگن (۱۸۸۶—۱۹۱۳) در سمت استادی تدریس کرد، و در موسسهٔ اخیر سرپرست بخش شد، وی‌سردبیر ماتماتیشه‌آنالن[4] وپایه گذار دائرةالمعارف ریاضی‌معروف بود. وی مفسری روشن بین، معلمی‌الهامبخش، ومدرسی با استعداد بود. او درسال ۱۹۲۵ درگوتینگن در گذشت.

در دوره‌ای که کلاین سرپرستی بخش ریاضی دانشگاه گوتینگن را به عهده داشت، این مؤسسه به کعبهٔ دانشجویان ریاضی از سراسر جهان تبدیل شد. تعداد قابل توجهی از ریاضیدانان طراز اول دراین دانشگاه تحصیل کردند، یادرآنجا به‌عنوان جانشینان ارزشمندی برای گاوس، دیریکله، و ریمان به‌خدمت پرداختند، ومدرسهٔ ریاضی گوتینگن را به‌صورت یکی ازمشهورترین مدارس اعصار جدید درآوردند. ازجملهٔ این ریاضیدانان عبارت‌اند از داویدهیلبرت[5] (۱۸۶۲—۱۹۴۳، بزرگترین ریاضیدان دوران اخیر)، ادموندلاندائو[6] (۱۸۷۷—۱۹۳۸، یک نظریه اعداد دان مشهور)، هرمان مینکوفسکی[7] (۱۸۶۴—۱۹۰۹،

---

1. Oswald Veblen 2. Élie Cartan 3. Düsseldorf
4. Mathematische Annalen 5. David Hilbert
6. Edmund Landau 7. Hermann Minkowski

متولدروسیه وموجد نظریهٔ هندسی‌اعداد)، ویلهلم آکرمان[1] (۱۸۹۶–۱۹۶۲، همکارهیلبرت درمنطق ریاضی)، کنستانتین‌کاراتئودوری[2] (۱۸۷۳–۱۹۵۰، ریاضیدان‌یونانی که درنظریهٔ توابع به‌شهرت‌رسید)، ارنست‌تسرملو[3] (۱۸۷۱–۱۹۵۳، که شهرتش به‌خاطر اصل تسرملو است)، کارل‌رونگه[4] (۱۸۵۶–۱۹۲۷، که دانشجویان درس‌معادلات‌دیفرانسیل‌او را ازطریق روش رونگه-کوتا[5] می‌شناسند)، امی‌نوئتر[6] (۱۸۸۲–۱۹۳۵، بانوی جبردان مشهور)، ریشارد ددکیند (۱۸۳۱–۱۹۱۶، شهرتش به خاطر برش ددکیند است)، ماکس‌دن[7] (۱۸۷۸–۱۹۵۲، اولین ریاضیدانی که یکی از ۲۳ مسئلهٔ [مطروحه در کنگرهٔ بین‌المللی ۱۹۰۰] پاریس توسط هیلبرت‌را حل کرد)، هرمان‌وایل[8] (۱۸۸۵–۱۹۵۵، که بخصوص به‌خاطرکارش درمبانی وفلسفهٔ ریاضیات شهرت دارد)، و بسیاری دیگر.

۱۴-۹ حسابیدن آنالیز

علاوه بررهایی هندسه و رهایی جبر، سومین رویداد ریاضی بسیارمهم نیز درقرن نوزدهم به‌وقوع پیوست. این رویداد سوم که در زمینهٔ آنالیز رخ‌داد، به‌کندی تحقق‌پذیرفت، و به حسابیدن آنالیز مشهورشد.

هنگامی‌که یك‌عمل ریاضی ازلحاظ تئوری خوب‌فهمیده نشده باشد، این خطروجود داردکه به‌روش صوری کورکورانه و شاید غیرمنطقی به‌کار برده شود و این امکان وجود داردکه، بدون توجه به محدودیتهای احتمالی عمل، در مواردی که لزوماً کارآیی ندارد، مورد استفاده قرار گیرد. معلمان ریاضی تقریباً همه روزه به اشتباهاتی از این قبیل که دانشجویانشان مرتکب می‌شوند، برمی‌خورند. مثلاً یك دانشجوی جبر مقدماتی که کاملاً به درستی رابطهٔ $a^{\circ} = ۱$، به‌ازای هر عدد حقیقی متقاعد شده است، ممکن است بنویسد $۰^{\circ} = ۱$، درحالی که یك دانشجوی دیگر از این دست ممکن است تصور کند که معادلهٔ $ax=b$ همیشه به‌ازای هر زوج مقادیر حقیقی مفروض a و b دقیقاً دارای جواب است. یا اینکه، دانشجویی‌که درس مثلثات می‌خواند ممکن است فکر کند که فرمول

$$\sqrt{۱-\sin^{۲} x}=\cos x$$

به‌ازای هرعدد حقیقی x برقراراست. دانشجوی درس حسابان، که از وجود انتگرالهای ناسره اطلاعی ندارد، ممکن است باکاربرد قواعد به‌ظاهر درست انتگرالگیری صوری به نتیجهٔ نادرستی دست یابد. یا ممکن است با به‌کار بردن قاعده‌ای که فقط برای سریهای نامتناهی مطلقاً همگرا برقرار است، در مورد برخی سریهای نامتناهی همگرا به‌یك نتیجهٔ پارادوکس‌گونه برسد. اینها مواردی بودند که اساساً درطی سدهٔ بعد از اختراع حسابان رخ داد. ریاضیدانان‌که مجذوب کارآیی پرقدرت این موضوع شده بودند و درك درستی

1. Wilhelm Ackermann 2. Constantin Carathéodory
3. Ernst Zermelo 4. Carl Runge 5. Runge-Kutta
6. Emmy Noether 7. Max Dehn 8. Hermann Weyl

از شالوده‌هایی که این موضوع بر آن استوار بود، نداشتند، فرایندهای آنالیز را تقریباً به روش کورکورانه‌ای به‌کار گرفتند، درحالی که راهنمای آنان اغلب شهودی فطری بود از آنچه که حس می‌شد باید درست باشد. انباشته شدن تدریجی این مهملات حتمی‌الوقوع بود تا آنکه، به‌عنوان واکنش طبیعی درمقابل استعمال آشفتهٔ شهودگرایی و صوری گرایی*، برخی از ریاضیدانان جدی خود را مقید به‌تلاش درجهت وظیفهٔ دشوار ایجاد مبنایی دقیق برای این موضوع حس کردند.

اولین توصیه برای چارهٔ جدی این‌وضع نابسامان مبانی آنالیز، ازسوی ژان لورون-دالامبر (۱۷۸۳-۱۷۱۷) به‌عمل آمد، که درسال ۱۷۵۴ کاملاً به‌درستی به‌لزوم یك نظریهٔ حدود پی برد، ولی بسط صحیحی ازاین نظریه تا سال ۱۸۲۱ ارائه نشد. اولین ریاضیدان درجهٔاولی که برای تدقیق حسابان اهتمام جدی‌مبذول‌داشت، ریاضیدان ایتالیایی-فرانسوی ژوزف‌لوئی‌لاگرانژ (۱۸۱۳-۱۷۳۶) بود. کوشش او، مبتنی بر نمایش یك تابع از راه بسط به‌سری‌تیلر، به‌دور از توفیق بود زیرا در آن به‌موارد لازم همگرایی‌یا واگرایی توجه نشده بود. این‌کار درسال۱۷۹۷ دراثرعظیم لاگرانژ، نظریهٔ توابع تحلیلی[1] به‌چاپ‌رسید. لاگرانژ شاید برجسته‌ترین ریاضیدان قرن هجدهم بود، وکار او تأثیر عمیقی در تحقیقات ریاضی پس ازوی داشت؛ باکار لاگرانژ وظیفهٔ طولانی‌وسنگین به‌کنارافکندن شهودگرایی و صوری گرایی ازآنالیز شروع شده‌بود.

در قرن نوزدهم بنای آنالیز همچنان رفیعتر می‌شد، ولی بر مبنایی که پیوسته عمق بیشتری می‌یافت. بدون تردید پیشرفت دراین راه را مرهون‌کارل‌فریدریش گاوس هستیم، زیرا گاوس، بیش ازهر ریاضیدان عصرخود، ازایده‌های شهودی گسست ومعیارهای عالی جدیدی برای دقت‌ریاضی وضع‌نمود. همچنین، درمطالعه‌ای که گاوس ازسری‌فوق‌هندسی درسال ۱۸۱۲ به‌عمل‌آورد به‌آنچه‌که عموماً اولین بررسی حقیقتاً مناسب ازهمگرایی یك سری بینهایت تلقی می‌شود، برمی‌خوریم.

گام عظیم به جلو در سال ۱۸۲۱ برداشته شد. در این سال ریاضیدان فرانسوی اوگوستن‌لوئی‌کوشی (۱۸۵۷-۱۷۸۹) پیشنهاد دالامبر را، با بسط نظریهٔ قابل قبولی از حدود وسپس تعریف پیوستگی، مشتقپذیری، وانتگرال معین برحسب مفهوم حد با موفقیت به‌موقع اجرا گذاشت. اساساً همین تعریفها هستند که در کتابهای مقدماتی حسابان دقیقتر امروزی دیده می‌شوند. مفهوم حدمطمئناً از بسط‌آنالیز جدایی‌ناپذیر است، زیراهمگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی هم به این مفهوم وابسته‌اند. دقت کوشی الهامبخش دیگر ریاضیدانان‌درپیوستن به‌تلاش برای‌رهاکردن آنالیز ازصوری گرایی وشهودگرایی گردید.

ولی نیاز به‌درك حتی عمیقتری از مبانی‌آنالیز با مطرح شدن مثالی درسال ۱۸۷۴،

---

* اصلاحات صوری‌گرایی و شهودگرایی دراین بخش را نباید با معانی خاصی که در مباحث فلسفه‌های ریاضی امروزی به‌آنها داده شده است، اشتباه کرد. ما با این‌اشارات فلسفی درفصل آخراین کتاب روبه‌رو خواهیم شد.

1. Théorie des fonctions analytique

ازسوی ریاضیدان آلمانی کارل‌وایرشتراس به‌طورچشمگیری آشکار گردید. این مثال در بارهٔ تابع پیوسته‌ای است که مشتق ندارد، یا، به‌عبارت دیگر، منحنی پیوسته‌ای که دارای مماس درهیچیك ازنقاطش نیست. گئورگ برنهاردریمان تابعی را ارائه داد که به‌ازای همهٔ مقادیرناگویای متغیرپیوسته ولی به‌ازای همهٔ مقادیرگویا ناپیوسته بود. چنین‌مثالهایی ظاهراً با شهود انسانی درتعارض بودند وبه‌طور روزافزونی این نکته را آشکارمی‌کردند که کوشی به عمق مشکلات موجود در راه پی‌ریزی صحیح آنالیز ، پی نبرده بوده‌است . نظریهٔ حدود براساس تصور شهودی ساده‌ای از دستگاه اعداد حقیقی ساخته شده بود. در واقع دستگاه اعداد حقیقی، به صورتی که هنوز در اغلب کتابهای حسابان معمول است ، مسلم فرض می‌شد.روشن گردیدکه نظریهٔ حدود،پیوستگی، ومشتق‌پذیری به‌خواصی ازاعداد حقیقی پیچیده‌تر ازآنچه قبلاً تصور می‌شد، بستگی دارند. بنابراین ، وایرشتراس هوادار این برنامه شدکه خود دستگاه اعداد حقیقی باید تدقیق وسپس کلیهٔ مفاهیم بنیادی آنالیز از این دستگاه اعداد حقیقی استخراج شود . این برنامهٔ مهم ، معروف به **حسابیدن آنالیز** سخت وبغرنج ازکاردرآمد، ولی مآلاً توسط وایرشتراس وپیروان اوتحقق‌یافت، به‌طوری که امروزه همهٔ آنالیز را می‌توان به‌طور منطقی از یك مجموعه اصل موضوع که اعداد حقیقی را مشخص می‌کند، استخراج کرد.

ریاضیدانان از بنیان‌نهی دستگاه اعداد حقیقی به‌عنوان مبنایی برای آنالیز، بسیار فراتر رفته‌اند. هندسهٔ تحلیلی را نیز ، از طریق تعبیرتحلیلی آن، می‌توان بر اساس دستگاه اعداد حقیقی‌استوارکرد، و ریاضیدانان نشان داده‌اندکه‌اغلب شاخه‌های هندسه درصورتی سازگارندکه هندسهٔ اقلیدسی سازگارباشد. همچنین،چون دستگاه اعداد حقیقی، یا جزئی ازآن، را می‌توان درتعبیر شاخه‌های متعدد جبر به‌کار گرفت، معلوم می‌شود که سازگاری قسمت عمده‌ای‌ازجبر را نیزمی‌توان به‌سازگاری‌دستگاه اعدادحقیقی مربوط‌کرد. درواقع، حالیه می‌توان‌گفت‌که اساساً همهٔ ریاضیات‌موجود سازگاراست به‌شرطی‌که دستگاه‌اعداد حقیقی سازگار باشد . اهمیت بسیار زیاد دستگاه اعداد حقیقی برای مبانی ریاضیات در همینجا نهفته است.

چون قسمت‌عمدهٔ ریاضیات موجود رامی‌توان بردستگاه اعداد حقیقی استوارنمود، طبیعتاً این سؤال مطرح می‌شود که آیا این مبانی را می‌توان عمقی حتی بیش ازاین داد؟ دراواخر قرن نوزدهم، باکار ریشارد ددکیند(۱۸۳۱–۱۹۱۶)، گئورگ‌کانتور (۱۸۴۵–۱۹۱۸)، و جیوزپه‌پئانو[1](۱۸۵۸–۱۹۳۲)، این‌مبانی برروی دستگاه اساسی‌تر و ساده‌تر اعداد طبیعی‌استوارشدند.یعنی، اینان نشان دادندکه‌چگونه دستگاه‌اعداد حقیقی وبنابراین قسمت‌اعظم ریاضیات‌را می‌توان ازیك مجموعهٔ اصل‌موضوعی‌برای اعداد طبیعی‌استخراج کرد. بعداً، دراوایل قرن بیستم، نشان داده شدکه اعداد طبیعی را می‌توان برحسب‌مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف ، و بدین ترتیب قسمت اعظم ریاضیات را بر سکویی در نظریهٔ

1: Giuseppe Peano

اعداد استوارکرد. منطقیون، به‌رهبری برتراند راسل[1] (۱۸۷۲–۱۹۷۰) و آلفردنورث‌وایتهد[2] (۱۸۶۱–۱۹۴۷)، تلاش به‌عمل آورده‌اند تا مبانی‌را، با استخراج نظریهٔ‌مجموعه‌ها ازمبنایی درحساب گزاره‌های منطق، ازاین هم پیشتر ببرند، گرچه همهٔ ریاضیدانان براین اعتقاد نیستندکه این‌کار با توفیق به‌موقع اجرا درآمده است.

۱۴–۱۰ وایرشتراس و ریمان

عموماً چنین تصورمی‌شودکه یك ریاضیدان بالقوهٔ درجهٔ اول، برای توفیق در زمینهٔ‌کارش، باید مطالعات ریاضی جدی‌را درسنین پائین آغازکند ونبایدکه افراط درتعلیمات‌ابتدایی باعث بطالت وی شود. کارل تئودور ویلهلم‌وایرشتراس[3]، که در اوستنفلده[4] درسال۱۸۱۵ به‌دنیاآمد، استثنای عمده‌ای براین دوقانون کلی است. وایرشتراس که جوانی‌اش را در راه خطا به‌تحصیل حقوق وبازرگانی صرف‌کرده بود، دیر وارد ریاضیات شد، وتنهادرسن چهل‌سالگی بودکه با به‌دست آوردن یك مقام معلمی در دانشگاه برلین سرانجام خود را از دبیری رهانید، و هشت سال گذشت تا آنکه، در سال ۱۸۶۴، در این دانشگاه به درجهٔ استادی کامل نایل شد و سرانجام قادرشد که همهٔ وقت خود را صرف ریاضیات پیشرفته نماید . وایرشتراس هرگز ازبابت سالهایی که صرف تدریس مقدماتی کرده بود، تأسف نمی‌خورد، وبعداً تواناییهای قابل توجهش درفنون آموزش را به‌کار دانشگاهی‌اش تسری داد وشاید بزرگترین معلم ریاضیات پیشرفته‌ای شدکه تاکنون جهان به‌خود دیده است.

وایرشتراس تعدادی مقاله دربارهٔ انتگرالهای فوق بیضوی، توابع آبلی، ومعادلات دیفرانسیل جبری نوشت ، ولی وسیعترین سهم معلوم او در ریاضیات ایجاد نظریهٔ توابع مختلط توسط سریهای توانی‌است. این‌کار، به‌معنایی، توسیعی ازصفحهٔ مختلط بودکه‌پیشتر لاگرانژ درجهت آن کوشیده بود، ولی وایرشتراس آن را با دقت کامل به‌پایان رسانید . وایرشتراس علاقهٔ خاصی به‌توابع تام وتوابعی که توسط حاصلضربهای نامتناهی تعریف می‌شوند ، نشان می‌داد. او همگرایی یکنواخت راکشف و، آن‌گونه که در بالا دیده‌ایم، به‌اصطلاح حسابیدن‌آنالیز، یاکار تحویل اصول‌آنالیز به‌مفاهیم اعداد حقیقی راآغازکرد. تعداد زیادی از یافته‌های ریاضی او ، نه از طریق چاپ توسط خود او ، بلکه از طریق یادداشتهایی که‌از دروس‌او برداشته می‌شدند، جزو متعلقات‌ریاضی دنیای ریاضی درآمدند. وی در دادن اجازه به دانشجویانش و دیگران برای آنکه پیرامون بسیاری از گوهرهای ریاضی‌اش تحقیق کنند وافتخار آن را ازآن خودکنند، بسیار دست‌و دل‌باز بود. به‌عنوان مثال، تا حدی‌دراشاره به‌این نکته، در دروسش به‌سال ۱۸۶۱ بودکه برای اولین بارمثال خود ازیك تابع پیوستهٔ مشتق‌ناپذیر را به‌بحث گذاشت، که سرانجام درسال ۱۸۷۴ توسط پل‌دوبوا – رمون[5] (۱۸۳۱–۱۸۸۹) منتشر گردید.

---

1. Bertrand Russel 2. Alfred North Whitehead
3. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 4. Ostenfelde
5. Paul du Bois-Reymond

کارل وایرشتراس
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

درجبر، وایرشتراس شاید اولین کسی بود که تعریف به‌اصطلاح اصل موضوعی دترمینان را ارائه داد. وی دترمینان یك ماتریس مربعی مانند A را به‌عنوان یك چندجمله‌ای برحسب عناصر A تعریف کرد، که نسبت به‌عناصر هرسطر A همگن وخطی است، وصرفاً وقتی تغییر علامت می‌دهد که دو سطر A جابه‌جا شوند، و وقتی A ماتریس واحد متناظر باشد مقدار آن به ۱ بدل می‌شود. وی همچنین درصورتهای دوخطی و مربعی سهم داشت، و، همراه با ج. ج. سیلوستر (۱۸۱۴-۱۸۹۷) و ه.ج.س. اسمیت (۱۸۲۶-۱۸۸۳)، نظریهٔ مقدماتی مقسوم‌علیه‌های ماتریسهای λ را به‌وجود آورد.

وایرشتراس معلم پرنفوذی بود، و دروسی که او با دقت زیاد آماده می‌کرد، نمونهٔ کاملی برای بسیاری از ریاضیدانان آینده بود؛ «دقت‌وایرشتراسی» با «استدلال فوق‌العاده دقیق» مترادف گردید. وایرشتراس « وجدان تمام‌عیار ریاضی » بود. وی درسال ۱۸۹۷، درست ۱۰۰ سال پس از نخستین چاپ کوششی برای تدقیق حسابان، توسط لاگرانژ در سال ۱۷۹۷، دربرلین از دنیا رفت.

همراه با این دقیق‌سازی ریاضیات، گرایشی به‌تعمیم‌مجرد، فرایندی که در ریاضیات امروزه بسیار بارزاست، پدید آمد. ریاضیدان آلمانی گئورگ فریدریش برنهارد ریمان شاید بیش ازهر ریاضیدان دیگرقرن نوزدهم دراین جنبهٔ ریاضیات جدید تأثیر داشته است. وی مطمئناً تأثیر گزافی بر تعدادی ازشعبه‌های ریاضی، بخصوص هندسه و نظریهٔ توابع داشته است، و تعداد ریاضیدانانی که پیش ازاو افکاری را برای بسط بیشتر برای جانشینانشان به‌ارث گذاشته‌اند، بسیار اندك است.

ریمان درسال ۱۸۲۶ در دهکدهٔ کوچکی درهانوور به‌دنیا آمد. پدرش کشیشی از فرقهٔ لوتری بود. رفتارش همواره عجولانه و از نظر مزاج همیشه ضعیف بود. علیرغم تنگدستی پدر، تحصیلات مناسبی، ابتدا در دانشگاه برلین و سپس در دانشگاه گوتینگن

گئورگ ریمان
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

کسب نمود. درجهٔ دکترای خود را از مؤسسهٔ اخیر با نوشتن رسالهٔ درخشانی در زمینهٔ نظریهٔ توابع مختلط دریافت کرد. دراین رساله به‌اصطلاح معادلات دیفرانسیل کوشی-ریمان که تحلیلی بودن تابعی از یك متغیر مختلط را تضمین می‌کند، دیده می‌شود (گرچه قبل از زمان ریمان این معادلات شناخته شده‌بودند). مفهوم بسیار ثمربخش سطح ریمان نیز، که ملاحظات توپولوژیکی‌را وارد آنالیز کرد، درهمین‌رساله است. ریمان مفهوم انتگرالپذیری را با تعریف آنچه امروزه‌آن را به‌عنوان انتگرال‌ریمان می‌شناسیم، روشنی بخشید، واین کار، در قرن بیستم، به مفهوم عامتر انتگرال لبگ، و از آنجا به تعمیمهای بیشتر انتگرال منجر شد.

در سال ۱۸۵۴ ریمان پریوات‌دوتسنت[1] (معلم حق‌التدریسی) در دانشگاه گوتینگن شد، وبرای دریافت این امتیاز خطابهٔ امتحانی مشهور خود را دربارهٔ فرضهایی که مبانی هندسه را تشکیل می‌دهند، ارائه‌کرد واین‌مقاله درقیاس با مقالات هم‌حجم باآن، غنی‌ترین مقاله‌ای به‌شمارمی‌آیدکه تاکنون درتاریخ ریاضیات عرضه شده است. دراین مقاله تعمیم گسترده‌ای از فضا و هندسه دیده می‌شود. نقطهٔ عزیمت ریمان فرمول فاصلهٔ بین دو نقطهٔ بینهایت نزدیك به‌هم بود. درهندسهٔ اقلیدسی این متریك به‌صورت زیر داده می‌شود

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

ریمان خاطرنشان‌کردکه می‌توان از فرمولهای‌فاصلهٔ عدیده‌ای استفاده کرد، که هریك‌ازاین متریك‌ها خواص فضاها وهندسه‌های ناشی ازآنها را معین می‌کند. فضای با متریکی به‌شکل

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dx\,dz +$$

1. Privatdocent

$$+g_{21}dydx+g_{22}dy^2+g_{23}dydz$$

$$+g_{31}dzdx+g_{32}dzdy+g_{33}dz^2,$$

که درآن gها ثابتها یا توابعی از x، y، z هستند، امروزه به **فضای ریمانی** معروف است، وهندسهٔ چنین فضایی **هندسهٔ ریمانی** نامیده می‌شود. فضای اقلیدسی حالت بسیار خاصی است که در آن، $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$، وهمهٔ gهای دیگر صفرند. بعداً آلبرت اینشتین ودیگران مفهوم وسیع فضا و هندسهٔ ریمان را محیط ریاضی لازم برای نظریهٔ عمومی نسبیت یافتند. خود ریمان ازچندلحاظ درفیزیك نظری سهم داشت، مثلاً وی اولین کسی بود که به‌مطالعهٔ ریاضی موجهای تلاطمی پرداخت.

در آثار ریاضی، به اصطلاح **تابع زِتای ریمان** و **فرضیهٔ ریمان** وابسته به آن شهره‌اند. این فرضیه حدس ثابت نشدهٔ مشهوری است که در آنالیز کلاسیك همان کیفیت «آخرین قضیهٔ» فرما را درنظریهٔ اعداد دارد. اویلر روابطی را بین نظریهٔ اعداد اول وسری

$$1/1^s+1/2^s+1/3^s+\cdots+1/n^s+\cdots,$$

که درآن s عدد صحیحی است، خاطرنشان کرده بود. ریمان همان سریهارا وقتی s عدد مختلطی مانند $\sigma+i\tau$ بود، مورد مطالعه قرارداد. مجموع این سری معرف تابعی است مانند $\zeta(s)$ که به تابع زتای ریمان معروف است. ریمان، درحدود سال ۱۸۵۹، حدس زد که همهٔ صفرهای موهومی تابع زتا دارای قسمت حقیقی $\sigma=1/2$ اند. در سال ۱۹۱۴ نظریهٔ اعداددان انگلیسی، سرگادفری هرلد هاردی[1] (۱۸۷۷– ۱۹۴۷) موفق به اثبات این مطلب شدکه $\zeta(s)$ بینهایت صفر با $\sigma=1/2$ دارد ولی حدس اولیهٔ ریمان، گرچه اکنون بیش از قرنی سابقه دارد، هنوز حل نشده است. هیلبرت تعیین درستی یانادرستی فرض ریمان را به‌عنوان یکی از ۲۳ مسئلهٔ مشهور پاریس خود برگزید.

درسال ۱۸۵۷ ریمان به‌سمت استادیاری درگوتینگن منصوب شد، وسپس، در سال ۱۸۵۹، درسمت استادی جانشین دیریکله درکرسیی شدکه زمانی گاوس آن‌را در اختیار داشت. ریمان در سال ۱۸۶۶، وقتی ۴۰ سال بیشتر نداشت، در شمال ایتالیا، جایی که به‌دنبال بهبود سلامتی رفته بود، به‌بیماری سل ازدنیا رفت.

۱۴-۱۱ کانتور، کرونکر، و پوانکاره

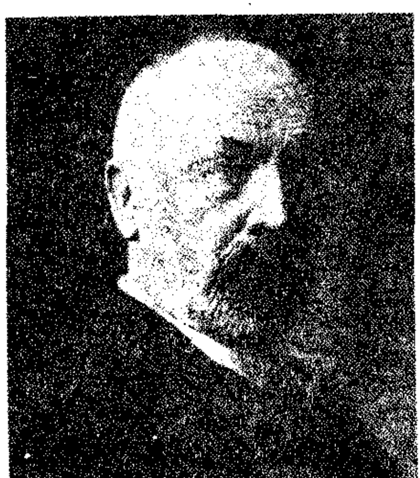
این بخش به‌بررسی کوتاه زندگی گئورگ کانتور و زندگی هانری پوانکاره، دو ریاضیدانی که ایام عمرشان بخشی درقرن نوزدهم وبخشی درقرن بیستم گذشت وتأثیر فوق‌العاده‌ای

1. Sir Godfrey Harold Hardy

برقسمت اعظم ریاضیات امروزی داشتند، اختصاص خواهـد یافت. همچنین طبیعی است که چندکلمه دربارهٔ لئوپولدکرونکر، منتقد سرسخت و سختگیر ریاضیات بینهایت کانتور گنجانیده شود.

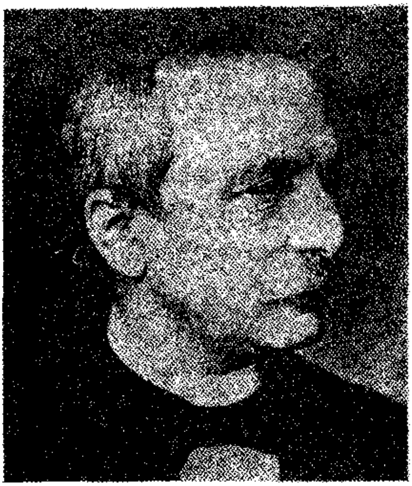
گئورگ‌فردیناند لوتویك‌فیلیپ‌کانتور[1] از والدینی دانمارکی در سن‌پترزبورگ، روسیه، در سال ۱۸۴۵ به‌دنیا آمد، ودرسال ۱۸۵۶ باوالدین خود به‌شهر فرانکفورت در آلمان‌کوچ کرد. پدرکانتور از یهودیانی بودکه به‌آیین پروتستان گرویده بود، و مادر او در ولادت کاتولیك بود. پسرعلاقهٔ شدیدی به‌الاهیات قـرون وسطی ومباحثات بغرنج آن دربارهٔ پیوستگی و لایتناهی پیداکرد. به‌دنبال آن پیشنهاد پدررا درجهت‌آماده شدن برای پرداختن به‌شغل‌مهندسی به‌کنار گذاشت وفکرش‌را درفلسفه،فیزیك،و ریاضیات متمرکزکرد. در زوریخ، گوتینگن، وبرلین (که درآنجا تحت تأثیر وایرشتراس قرارگرفت ودکترای خود را درسال ۱۸۶۷ از آنجا اخذکرد) به‌تحصیل پرداخت. سپس مدتی طولانی‌را در شغل معلمی در دانشگاه‌هاله از سال ۱۸۶۹ تا ۱۹۰۵ سپری‌کرد. درسال ۱۹۱۸ در هاله دریك بیمارستان روانی درگذشت.

موضوعهای مورد علاقهٔ‌کانتور بدواً نظریهٔ اعداد، معادلات نامعین، وسریهای مثلثاتی بود. نظریهٔ ظریف سریهای مثلثاتی ظاهراً الهامبخش وی در نگرش به مبانی آنالیز بوده است . وی بحث زیبای خود از اعداد گویا را به‌وجود آورد ــ که از دنباله‌های همگرا از اعدادگویا استفاده می‌کند و کاملاً با بحث ملهم‌از هندسهٔ ددکیند تفاوت دارد ــ و در سال ۱۸۷۴ کار انقلابی‌اش دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها ونظریهٔ اعداد نامتناهی را آغازکرد.



گئورگ کانتور
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

1. Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor



لئوپولد کرونکر
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

باکار اخیرش، کانتور زمینهٔ کاملاً تازه‌ای از تحقیقات ریاضی رابه‌وجود آورد. درمقاله‌های خود، وی نظریهٔ اعداد ترانسفینی را، براساس یك بحث ریاضی در بارهٔ بینهایت واقعی، ابداع کرد، وحساب اعداد ترانسفینی‌را مشابه باحساب اعداد متناهی به‌وجود آورد.

کانتور به‌شدت مذهبی بود، وکار او، که به‌تعبیری ادامهٔ مباحثات مربوط به‌پارادوکسهای زنون بود، گرایش باطنی او را به‌افکار مدرسی قرون وسطایی در بارهٔ ماهیت بینهایت، منعکس می‌کند. دیدگاههای او بامخالفتهای شدیدی، عمدتاً ازسوی لئوپولدکرونکر[1] (۱۸۲۳ - ۱۸۹۱) از دانشگاه برلین روبرو شد، وکرونکر باتمام قوا باتلاشهای کانتور برای به‌دست آوردن منصب تدریس در دانشگاه برلین مخالفت کرد. امروزه، نظریهٔ مجموعه‌های کانتور تقریباً در هرشاخهٔ ریاضیات ریشه دوانیده، ومعلوم شده است که در توپولوژی و مبانی نظریهٔ توابع حقیقی از اهمیتی خاص برخوردار است. در زمینهٔ منطق مشکلاتی وجوددارد و پارادوکسهایی پدیدار شده‌اند. جدل بین صورتگرایان، به‌رهبری هیلبرت، وشهودگرایان، به‌رهبری براوئر، درقرن بیستم، اساساً دنبالهٔ جدل بین‌کانتور و کرونکر است. در فصل بعد نگاه عمیقتری به‌این مطالب خواهیم داشت.

کرونکر درلاینیگتس نزدیك برسلاو[2]، درسال ۱۸۲۳ متولد شد وکومر معلم او در دبیرستان‌شهر زادگاه اوبود. وی سپس‌در دانشگاه برلین نزد ژاکوبی، اشتاینر، ودیریکله درس خواند، وسپس در دانشگاه بن، بازهم پیش‌کومر، به‌تحصیل پرداخت. بعد از اتمام تحصیلاتش وی به‌مدت یازده سال از ۱۸۴۴ تا ۱۸۵۵ به‌تجارت پرداخت واز آنجا که سرمایه‌گذار مستعدی بود ثروت شخصی زیادی اندوخت. درسال ۱۸۵۵ به‌برلین نقل‌مکان کرد و درسال ۱۸۶۱، تدریس در دانشگاه‌آن شهر را آغازکرد. کومر نیز به‌برلین کوچ کرده‌بود، وکومر، وایرشتراس، وکرونکر یك گروه‌قوی‌سه‌عضوی‌را تشکیل دادند. کرونکر

1. Leopold Kronecker 2. Breslau

درنظریهٔمعادلات،توابع بیضوی، و نظریهٔجبری اعدادتخصص داشت. به‌عنوان یك‌متناهی گرا، کارکانتور را مردود دانست وآن‌را الاهیات وتەریاضیات قلمدادکرد. با این اعتقادکه کل ریاضیات باید مبتنی بر روشهای متناهی روی اعداد صحیح باشد، وی یك فیثاغورس قرن نوزدهم بود. این جمله را او گفته است که «خداوند اعداد صحیح‌را آفرید، باقی‌کارآدمی است». وی درسال ۱۸۹۱ در برلین درگذشت.

ژول‌هانری پوانکاره، که به‌تأیید عموم برجسته‌ترین ریاضیدان زمان خود است، در سال۱۸۵۴ درنانسی[1]، فرانسه، به‌دنیا آمد. وی پسرعم‌ریمون[2]پوانکاره، سیاستمدار برجسته ورئیس‌جمهور فرانسه درطول‌جنگ بین‌الملل اول بود. بعداز فارغ‌التحصیل‌شدن‌از مدرسهٔ پلی‌تکنیك درسال ۱۸۷۵، هانری به‌اخذ درجهٔ مهندسی معادن از مدرسهٔ معادن[3] در سال ۱۸۷۹ نایل‌شد، و درهمان‌سال از دانشگاه پاریس درجهٔ دکترای علوم دریافت‌کرد. پس از فراغت از تحصیل ازمدرسهٔ معادن، به‌مقام معلمی در دانشگاه‌کان[4] منصوب شد، ولی دو سال بعد به‌دانشگاه پاریس انتقال یافت، ودرآنجا تازمان مرگش، در سال ۱۹۱۲، چندین کرسی‌استادی در ریاضیات وعلوم‌را در اختیار داشت.

پوانکاره را به‌عنوان آخرین جامع‌العلوم در زمینهٔ ریاضیات وصف‌کرده‌اند. این مطلب مطمئناً حقیقت داردکه دامنهٔ موضوعاتی‌که وی برآنها تسلط داشت و باعث غنای آنها شد، به‌طور حیرت‌آوری‌گسترده بود. در سوربون هرسال درس‌تازه‌ای را در زمینهٔ ریاضیات محض یاکاربسته به‌نحوی درخشان تدریس می‌کرد، که بسیاری از این دروس مدت‌کوتاهی بعد چاپ می‌شدند. اونویسندهٔ کثیرالتألیفی بود، و بالغ بر۳۰ جلدکتاب و ۵۰۰ مقالهٔ فنی نوشت. وی همچنین یکی از تواناترین‌کسانی بودکه ریاضیات و علوم را به‌زبان‌عامه درمی‌آورند. کتابهای‌جلد شمیز توصیفی ارزان‌قیمت اورا هرکس‌باهرحرفه‌ای حریصانه خریداری می‌کرد ومی‌خواند؛ اینها شاهکارهایی‌اندکه، به‌دلیل روشنی بیان و سبك‌گیرا، هیچ‌کتابی برآنهاپیشی‌نگرفته‌است و به‌زبانهای‌خارجی‌بسیاری‌ترجمه شده‌اند. در واقع‌نوشته‌های عامه‌پسند پوانکاره ازلحاظ ادبی به‌قدری ممتازندکه عالیترین درجه‌ای که یك نویسندهٔ فرانسوی می‌تواند به‌آن برسد، نصیب اوشده است: انتخاب به‌عضویت بخش ادبی انستیتو[5]ی فرانسه.

پوانکاره هرگزمایل‌نبودکه مدت زیادی درزمینهٔ واحدی‌کارکند. بلکه ترجیح‌می‌داد که به‌چالاکی ازعرصه‌ای به‌عرصهٔ دیگر بجهد. یکی ازمعاصرینش وی را «یك فاتح، نه یك‌مستعمره‌دار» توصیف‌کرده است. رسالهٔ دکترای اودربارهٔ معادلات دیفرانسیل به‌قضایای وجودی مربوط است، این‌اثر او را به‌بسط نظریهٔتوابع اوتومورفیك، وبه‌ویژه به‌اصطلاح توابع‌ـ زتاـفوکسی[6]راهبرشد وپوانکاره‌نشان‌دادکه‌می‌توان‌ازاین توابع برای‌حل‌معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم باضرایب جبری استفاده کرد. پوانکاره همچون لاپلاس سهم ارزنده‌ای در موضوع احتمالات داشت. وی همچنین توپولوژی‌را که ازموضوعات‌مورد

---

1. Nancy 2. Raymond 3. École des Mines
4. Caen 5. Institut 6. Zeta - Fuchsian

هانری پوانکاره
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

علاقه در قرن بیستم است ، حرکت سریعی بخشید، ونام او امروزه در **گروههای پوانکارهٔ** توپولوژی ترکیباتی دیده می‌شود. قبلاً، دربخش ۱۳ــ۶ ومطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲.۱۳ علاقهٔ پوانکاره‌را به‌هندسهٔ نااقلیدسی‌دیده‌ایم. در ریاضیات‌کاربسته، این‌نابغهٔ ذوفنون‌درموضوعات گوناگونی چون‌اپتیک، الکتریسیته ، تــلگراف، موئینگی، کشسانی ، ترمودینامیک، نظریهٔ پتانسیل، نظریهٔ‌کوانتوم، نظریهٔ نسبیت، وکیهانشناسی سهم داشت.

پوانکاره درسرتاسرزندگی ازلحاظ جسمی‌آدمی فاقد ظرافت،نزدیک‌بین، وحواس‌پرت بود ، ولی دارای حافظه‌ای بی‌نقص بود و توانایی به‌یاد آوردن سریع هرچیزی را که قبلاً یک‌بار خوانده بود، داشت. وی کارهای ریاضی خودرا ذهنی ، در حالی‌که با بی‌آرامی‌قدم می‌زد، انجام می‌داد، وموقعی که‌کار به‌طورکامل درمخیله‌اش پرورش‌می‌یافت، فوراً آن‌را روی‌کاغذ می‌آورد بدون اینکه به‌بازنویسی یادستکاری آن اقدام‌کند. درمقایسه باکارهای عجولانه وگستردهٔ وی، کارهای‌دقیقاً مهیا شدهٔ گاوس وشعارگاوس به‌یادمی‌آید: «کم، ولی رسیده».

ازعدم چالاکی جسمی‌پوانکاره داستانهای فراوانی گفته‌اند. مثلاً دربارهٔ او گفته‌اند که ذوالیمینین بوده است، یعنی، کارخود را باهر دو دست به‌یک‌اندازه بد صورت می‌داده است. وی هیچ استعدادی درنقاشی نداشت، ودر مدرسه در این‌درس نمرهٔ صفر می‌گرفت. درپایان سال‌تحصیلی، همکلاسیهای او به‌شوخی یک نمایشگاه عمومی ازشاهکارهای هنری او ترتیب دادند. آنها هرفقره را به‌دقت به‌زبان‌یونانی برچسب زدند، مثلاً، «این‌یک خانه است»، «این یک اسب است»، وغیره.

شاید بتوان گفت‌که پوانکاره آخرین‌کسی بوده است‌که دربارهٔ وی تامیزان معقولی می‌توان ادعاکردکه همهٔ ریاضیات رادراختیارخود داشته‌است. دراعصارجدید ریاضیات باچنان سرعت خارق‌العاده‌ای رشد یافته‌است که کاملاً غیرممکن‌به‌نظر می‌رسد کسی دیگر‌بار به‌چنان افتخاری نایل شود.

۱۴-۱۲ سونیا کووالفسکی و امی نوئتر

این بخش کوتاه به دوتن از برجسته‌ترین ریاضیدانان زن اختصاص دارد.

سوفیا کوروین ــ کروکوفسکی[1]، که بعداً به‌سونیا کووالفسکی[2] مشهور شد، دریك خانوادهٔ اشرافی روسیه، درسال ۱۸۵۰ در مسکو به‌دنیا آمد. وقتی هفده ساله بود به سن‌پترزبورگ رفت ونزد معلمی ازمدرسهٔ نیروی دریایی آنجا به مطالعهٔ حسابان پرداخت. چون به‌دلیل زن بودن، از ادامهٔ تحصیلات عالیه در دانشگاههای روسیه منع شده بود، با ولادیمیر کووالفسکی (که بعداً دیرین‌شناس برجسته‌ای‌شد) که با او اظهارهمدردی می‌کرد، ترتیب یك ازدواج صوری را داد تا از مخالفتهای والدین باتحصیل او در خارج، رهایی یابد. ازدواج در سال ۱۸۶۸ صورت گرفت و دربهار سال بعد، این زوج به هایدلبرگ رفتند.

کووالفسکی‌درهایدلبرگ‌در دروس‌ریاضی کونیگسبرگر[3] ودوبوآ-رمون[4] (۱۸۳۱ــ ۱۸۸۹) و دروس فیزیك کیرشهوف[5] (۱۸۲۴ــ۱۸۸۷) و هلمهولتس[6] (۱۸۲۱ – ۱۸۹۴) حضور یافت. کونیگسبرگر قبلاً پیش‌کارل وایرشتراس در دانشگاه برلین درس خوانده بود، و داستانهایی که مشتاقانه از استادش نقل می‌کرد، کم‌کم شوق مطالعه در نزدآن معلم بزرگ را در وی برانگیخت. وی درسال ۱۸۷۰ وارد برلین شد ولی دانشگاه را درعدم قبول دختران دانشجو سرسخت دید. بنابراین مستقیماً به وایرشتراس مراجعه کرد و او، با وصول توصیه‌نامه‌ای قوی ازکونیگسبرگر، وی را به‌عنوان یك شاگرد خصوصی پذیرفت. کووالفسکی به‌زودی به‌شاگرد موردعلاقهٔ وایرشتراس بدل‌شد و وی دروس دانشگاهی‌خود را برای‌کووالفسکی تکرارکرد. وی‌تحسین وایرشتراس را برانگیخت وبه‌مدت چهارسال (۱۸۷۰ – ۱۸۷۴) نزد استاد به‌تحصیل پرداخت، وطی این مدت نه‌تنها دروس ریاضی دانشگاه را فراگرفت، بلکه سه‌مقالهٔ مهم نیزنوشت، یکی دربارهٔ نظریهٔ معادلات‌دیفرانسیل با مشتقات جزئی، یکی دربارهٔ تحویل انتگرالهای آبلی نوع سوم، ویکی مکمل تحقیق لاپلاس درشکل حلقه‌های کیوان.

درسال ۱۸۷۴ از سوی دانشگاه‌گوتینگن، به‌سونیا کووالفسکی، به‌طورغیابی، درجهٔ دکترای فلسفه اعطا شد، وبه‌دلیل عالی بودن کیفیت مقاله‌ای‌که در بارهٔ معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی‌عرضه‌کرده بود، از امتحان‌شفاهی معاف شد. در سال ۱۸۸۸، درسی‌وهشت سالگی به بزرگترین موفقیت دوران زندگی‌اش‌نایل شد واین‌زمانی بودکه آکادمی‌فرانسه جایزهٔ بسیار معتبر پری بوردن[7] را به‌خاطر مقالهٔ «دربارهٔ مسئلهٔ گردش یك‌جسم صلب‌حول یك نقطهٔ ثابت» به‌اواعطا کرد. ازبین‌پانزده مقاله‌ای‌که برای دریافت جایزه تسلیم‌شده‌بود،

---

1. Sophia Korvin - Krukovsky
2. Sonja Kovalevsky [درزبان روسی‌کووالفسکایا گفته می‌شود]
3. Königsberger 4. du Bois - Reymond 5. Kirchhoff
6. Helmholz 7. Prix Bordin

سونیا کووالفسکی
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

مقالهٔ کووالفسکی بهترین شناخته شد؛ این مقاله را چنان استثنایی تلقی کردند که جایزه را از ۳۰۰۰ فرانك به ۵۰۰۰ فرانك افزایش دادند.

از سال ۱۸۸۴ تا پایان زندگیش درسال ۱۸۹۱، کووالفسکی به‌سمت استاد ریاضیات عالی در استخدام دانشگاه استکهلم بود. شعار او این بود: «هرچه را می‌دانی بگو، آنچه را که لازم است انجام ده، هرچه پیش آید خوش آید».

آمالی امی نوئتر[1] که اورا عموماً بزرگترین ریاضیدان زن می‌دانند، در ارلانگن، آلمان‌غربی، درسال ۱۸۸۲ متولد شد. پدر او ماکس‌نوئتر (۱۸۴۴ - ۱۹۲۱) ریاضیدان برجسته‌ای در دانشگاه ارلانگن بود. ماکس نوئتر[2]، مانند پل گوردون[3] (۱۸۳۷-۱۹۱۲) که اوهم وابسته به‌دانشگاه و از دوستان نزدیك خانوادهٔ نوئتر بود، یك جبردان بود. تعجب‌آور نیست که امی‌نوئتر هم، که دراین دانشگاه تحصیل کرد، متخصص جبر شد. او رسالهٔ دکترای خود را زیر نظر گوردون درسال ۱۹۰۷ باعنوان «دربارهٔ دستگاههای کامل پایاها برای فرمهای درجهٔ چهارم سه‌تایی» نوشت. موقعی که گوردون درسال ۱۹۱۰ بازنشسته شد، جای اورا یك سال بعد ارنست‌فیشر[4] (۱۸۷۵ - ۱۹۵۹)، جبردان دیگری، گرفت که علاقهٔ ویژه‌ای به‌نظریهٔ حذف ونظریهٔ پایاها داشت. تأثیر او بر نوئتر بسیار زیاد بود و به‌راهنمایی فیشر، اشتغال ذهنی او از جنبهٔ الگوریتمی کار گوردون به رهیافت اصل موضوعی مجرد هیلبرت منتقل شد.

بعد از ترك ارلانگن، امی نوئتر در گوتینگن به‌تحصیل پرداخت و درآنجا امتحانات احرازشرایط خودرادرسال ۱۹۱۹، بعد ازفائق‌آمدن برمخالفتهای عده‌ای از اعضای هیأت علمی که با مدرسین‌زن مخالف بودند، گذراند. در ۱۹۲۲ وی‌استاد استثنایی‌دانشگاه گوتینگن

---

1. Amalie Emmy Noether 2. Max Noether 3. Paul Gordon
4. Ernst Fischer

آمالی امی نوئتر
(مجموعهٔ دیویداسمیت)

شد و این سمت را تا سال ۱۹۳۳ به‌عهده داشت و در این زمان به‌دلیل زیاده رویهای انقلاب ملی آلمان، وی و عدهٔ کثیر دیگری از شرکت در فعالیتهای علمی منع شدند. وی بلادرنگ باقبول سمت استادی کالج برین‌ماوئر[1] در پنسیلوانیا آلمان را ترک کرد و عضو مؤسسهٔ تحصیلات عالی[2] در پرینستون شد. سالهای عمر او در آمریکا شاید شادترین و پرثمرترین بخش زندگی‌اش باشد. وی در سال ۱۹۳۵، در پنجاه‌وسه سالگی و در اوج قدرت خلاقه‌اش چشم از جهان فرو بست.

گرچه نوئتر از لحاظ کیفیت تدریس ضعیف و فاقد مهارتهای آموزشی بود، وی توانست الهامبخش عدهٔ شگفت آوری دانشجو باشد که آنان نیز در زمینهٔ جبر مجرد از خود اثر گذاشتند. مطالعات او دربارهٔ حلقه‌های مجرد و نظریهٔ ایده‌آلها اهمیت خاصی در بسط جبر نوین داشته‌اند.

درمراسم پس ازمرگش، امی نوئتر سخت مورد ستایش آلبرت اینشتین قرار گرفت. شخصی یك بار او را دختر ماکس نوئتر وصف کرده بود. ادموندلانداثو در جواب او گفت: «ماکس نوئتر پدر امی نوئتر بود، امی مبدأ مختصات در خانوادهٔ نوئتر است». صدمین سال تولد امی نوئتر در سال ۱۹۸۲ در کالج برین‌ماوئر جشن گرفته شد.

۱۴-۱۳ اعداد اول

اعداد اول تاریخی طولانی، از روزگار یونانیان باستان گرفته تا زمان حاضر داشته‌اند. چون

1. Bryn Mawr College
2. Institute for Advanced Study

برخی از مهمترین اکتشافات راجع به اعداد اول در قرن نوزدهم انجام شده‌است، اینجا محل مناسبی برای بحث دربارهٔ این اعداد جالب، به‌نظر می‌رسد.

قضیهٔ بنیادی حساب می‌گوید که اعداد اول‌خشت بناهایی هستندکه همهٔ اعدادصحیح دیگر از آنها به‌طور ضربی ساخته می‌شوند. از اینرو اعداد اول بسیار مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، و تلاشهای زیادی صرف کوشش در تعیین کیفیت توزیع آنها در دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت شده‌است. نتایج عمدهٔ به‌دست آمده درعهد باستان، برهان نامتناهـی بودن اعداداول از اقلیدس و غربال اراتستن برای‌یافتن همهٔ اعداد اول‌کوچکتر ازعددمفروضی مانند n هستند.

ازغربال‌اراتستن می‌توان فرمول پرزحمتی به‌دست آوردکه عدهٔ‌اعداداول پایین‌تر از n را وقتی اعداد اول پایین‌تر از $\sqrt{n}$ معلوم باشند، تعیین می‌کند. این فرمول به‌طور قابل ملاحظه‌ای در سال ۱۸۷۰ توسط ارنست میسل[1] اصلاح شد. وی موفق به‌نشان دادن این مطلب شد که عدهٔ اعداد اول پایینتر از $۱۰^۸$ عبارت از ۵,۷۶۱,۴۵۵ است. ریاضیدان دانمارکی برتلسن[2] به‌این محاسبات ادامه داد و، درسال ۱۸۹۳، اعلام‌کردکه عدهٔ اعداد اول زیر $۱۰^۹$ عبارت از ۵۰,۸۴۷,۴۷۸ است. در سال ۱۹۵۹، ریاضیدان امریکایی د. ه. لیمر[3] نشان داد که نتیجهٔ اخیر نادرست است و بـاید این عدد ۵۰,۸۴۷,۵۳۴ باشد، وی همچنین نشان دادکه عدهٔ اعداد اول زیر $۱۰^{۱۰}$ عبارت از ۴۵۵,۰۵۲,۵۱۱ است.

تاکنون هیچ شیوهٔ عملی برای‌آزمون اول بودن اعداد بزرگ به‌دست نیامده‌است، و تلاشهایی‌که مصروف آزمودن برخی اعداد معین شده، فوق‌العاده زیاد بوده‌است. بالغ بـر ۷۵ سال بزرگترین عددی کـه اول بودن آن محقق گردیده بود، عـدد ۳۹ رقمی $۲^{۱۲۷}-۱ = ۱۷۰,۱۴۱,۱۸۳,۴۶۰,۴۶۹,۲۳۱,۷۳۱,۶۸۷,۳۰۳,۷۱۵,۸۸۴,۱۰۵,۷۲۷$، بودکه توسط ریاضیدان فرانسوی آناتول‌لوکاس[4] درسال ۱۸۷۶ داده شده بود. در سال ۱۹۵۲، ماشین EDSAC درکیمبریج انگلستان اول بودن عدد بسیاربزرگتر (۷۹ رقمی)

$$۱۸۰(۲^{۱۲۷}-۱)^۲+۱$$

را به‌ثبوت رساند و از آن پس سایر کامپیوترهای رقمی اول بودن اعداد بسیار بزرگ $۲^n - ۱$ را به‌ازای $n=$ ۵۲۱، ۶۰۷، ۱۲۷۹، ۲۲۰۳، ۲۲۸۱، ۳۲۱۷، ۴۲۵۳، ۴۴۲۳، ۹۶۸۹، ۹۹۴۱، ۱۱۲۱۳، ۱۹۹۳۷ و ۲۱۷۰۱ نشان داده‌اند.

رؤیای نظریهٔ اعداد دانان یافتن تابعی مانند $f(n)$ است که به‌ازای اعداد صحیح مثبت n، تنها اعداد اول از آن به‌دست‌آیند و دنبالهٔ اعداد اولی‌که به‌این تـرتیب حاصل می‌شود شامل عدهٔ اعداد اول متفاوت ونامتناهی باشد. مثلاً $f(n)=n^۲-n+۴۱$ اعداد اول را به‌ازای هر n به‌طوری‌که $n<۴۱$ به‌دست می‌دهد، ولی $f(۴۱)=(۴۱)^۲$، که‌عدد

1. Ernst Meissel 2. Bertelsen 3. D.H. Lehmer
4. Anatole Lucas

مرکبی است. چند جمله‌ای درجهٔ دوم $f(n)=n^{2}-79n+1601$ اعداد اول را به‌ازای $n<80$ می‌دهد. می‌توان توابع چندجمله‌ایی پیدا کرد که متوالیاً هرچند تا عدد اول را که بخواهیم به‌ما بدهد، ولی هیچ تابعی نمی‌توان یافت که همواره اعداد اول از آن حاصل شوند.

درحدود سال ۱۶۴۰ بود که پیر دوفرما حدس زد که $f(n)=2^{2^{n}}+1$ به‌ازای کلیهٔ اعداد صحیح نامنفی، اول است ولی، همچنانکه در بخش ۱۰ — ۳ متذکر شدیم، این مطلب درست نیست. نتیجهٔ جالب ومؤخری در این زمینه، اثبات وجود عددی حقیقی مانند A، توسط و. ه. میلز[1] در سال ۱۹۴۷، است به‌قسمی که بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از $A^{3^{n}}$ به‌ازای هرعددصحیح مثبت n یك عدد اول است. دربارهٔ مقدار واقعی، وحتی مقدار تقریبی، عدد حقیقی A چیزی گفته نشده بود.

تعمیم قابل توجهی ازقضیهٔ اقلیدس دربارهٔ نامتناهی بودن اعداد اول توسط لوژون ـ دیریکله (۱۸۰۵ ـ ۱۸۵۹) داده شد. وی موفق شد نشان دهد که هر تصاعد حسابی مانند

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots,$$

که در آن اعداد a و d متباین باشند، شامل تعداد بینهایتی از اعداد اول است. اثبات این قضیه چندان ساده نیست.

شاید شگفت‌انگیزترین قضیه‌ای که تاکنون راجع به‌توزیع اعداد اول به‌دست آمده به‌اصطلاح **قضیهٔ اعداد اول** باشد. فرض کنید A_n معرف اعداد اول کمتر از n باشد. دراین صورت بنابرقضیهٔ اعداد اول وقتی n بزرگتر وبزرگتر می‌شود $(A_n \log_e n)/n$ به‌سمت یك میل می‌کند. به‌عبارت دیگر A_n/n، که **چگالی** اعداد اول در بین اولین n عدد صحیح نامیده می‌شود، با $1/\log_e n$ تقریب‌زده می‌شود، وکیفیت تقریب باافزایش n بهتر می‌شود. این قضیه را گاوس با امتحان جدول بزرگی از اعداد اول حدس زد، و درسال ۱۸۹۶ ریاضیدانان فرانسوی و بلژیکی یعنی ژ. آدامار[2] و ش. ژ. دو لا واله پوسن[3] آن‌را مستقل از یکدیگر ثابت کردند.

جداول عاملی گسترده، درتحقیقات مربوط به‌اعداد اول ارزش فراوان دارند. چنین جدولی برای همهٔ اعداد تا ۲۴۰۰۰ درسال ۱۶۵۹ توسط ی. ه. ران[4]، به‌عنوان ضمیمه‌ای بریك کتاب جبر منتشر شد. درسال ۱۶۶۸، جان پل[5] انگلیسی این جدول را تا ۱۰۰,۰۰۰ بسط داد. در نتیجهٔ درخواستهای ریاضیدان آلمانی ی. ه. لامبرت، جدول مبسوط و بدسرانجامی توسط مدیر مدرسه‌ای از وین به‌نام فلکل[6] محاسبه شد. اولین جلد محاسبات فلکل، که عوامل اعداد تا ۴۰۸۰۰۰ را می‌داد، درسال ۱۷۷۶ به‌خرج خزانه‌داری سلطنتی اتریش به‌چاپ رسید. اما این جلد مشترکین زیادی پیدا نکرد و لذا خزانه‌داری تقریباً کلیهٔ مجلدات را جمع آوری وکاغذ آن را به‌فشنگ تبدیل کرد تا درجنگ برای کشتن ترکها

---

1. W.H. Mills　2. J. Hadamard　3. C. J. de la Vallée Poussin
4. J. H. Rahn　5. John Pell　6. Felkel

ازآن استفاده نمایندا درقرن‌نوزدهم، تلاشهای مشترك چرناك[1]، بورکهارت[2]، کرله، گلیشر، و محاسب برق‌آسای اعجوبـه، دازه، منجر به پدید آمدن جدولی شدکـه همهٔ اعداد تا ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ راشامل می‌شد و در ده جلد به‌چاپ رسید. ولی، ازمیان دستاوردهای از این نوع، بزرگترینشان جدولـی است که توسط ی. پ. کولیك[3] (۱۷۷۳-۱۸۶۳)، از دانشگاه پراگ، محاسبه شد. دستنویس‌اوکه هنوز چاپ نشده، حاصل‌تفنن ۲۰ سالهٔ‌اوست، وکلیهٔ اعداد تا ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ را شامل می‌شود. بهترین جدول عوامل موجود، جدول ریاضیدان آمریکایی د. ه. لیمر* (۱۸۶۷ - ۱۹۳۸) است. این‌جدولی‌است که استادانه دریك جلد تهیه شده و شامـل اعداد تا ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ می‌شود. بـا پیشرفت‌کامپیوترهای الکترونیکی مدرن، آزمون‌اول بودن وساختن جداول برای اعداد اول خاص شدت‌زیادی یافته است. مثلاً درشمارهٔ نـوامبر معماهای ریاضی[4] جدولی از ۹۳ عدد اول پنج رقمی مقلوبی(یك عدد مقلوبی عددی است که‌آن‌را ازهر طرف بخوانیم، نتیجه یکی‌است، مانند عدد اول مقلوبی ۳۴۱۷۱۴۳) وتمام اعداد مقلوبی هفت رقمی که تعدادشان ۶۶۸ است، دیده می‌شود. محاسبات بریك کامپیوتر PDP-۱۹/۴۵ در دانشگاه واترلو[5] انجام شده، و زمان‌کامپیوتر کمی بیش‌ازیك دقیقه بوده است. یك‌عدد مقلوبی نه‌رقمی بسیار جالب‌عدد ۳۴۵۶۷۶۵۴۳است‌که توسط لئوساتوه[6]، سردبیر این‌مجله ارائه شده و وی اظهار داشته که ۵۱۷۲ عدد اول مقلوبی نه‌رقمی موجود است.

حدسهای ثابت نشدهٔ زیادی در بارهٔ اعداد اول موجود است. یکی از آنها براین مضمون است‌که بینهایت زوج از **اعداد اول توامان**، یا اعداد اولی به‌شکل p و $p+2$، نظیر ۳ و ۵، ۱۱ و ۱۳، و ۲۹ و ۳۱ موجود است. دیگری حدس ك.گولدباخ[7] است‌که درسال ۱۷۴۲ درنامه‌ای به‌اویلر آمده است. گولدباخ مشاهده‌کرده بود که هرعدد زوج، به‌جز ۲، ظاهراً قـابل نمایش به صورت مجموع دو عدد اول است. مثلا ۲+۲=۴، ۳+۳=۶، ۳+۵=۸، ...، ۳+۱۳=۱۶، ۷+۱۱=۱۸، ...، ۱۹+۲۹=۴۸، ...، ۳+۹۷=۱۰۰، والی‌آخر. تا سال ۱۹۳۱ که ریاضیدان روسی شنیرلمان[8] نشان‌داد که هرعدد صحیح مثبت را می‌توان به‌صورت مجموعـی از نابیشتر از ۳۰۰,۰۰۰ عدد اول نمایش داد، پیشرفتی دراین مسئله حاصل‌نشد. چندی بعد ریاضیدان روسی وینوگرادوف[9] نشان دادکه عدد صحیح مثبتی‌مانندN موجود است به‌قسمی‌که هرعدد صحیح مانند$n>N$ را می‌توان به‌صورت حداکثر چهار عدد اول نشان داد، ولـی برهان آن بهیچوجه امکان ارزیابی اندازهٔ N را نمی‌دهد.

سؤالات زیر(که درآن nنمایش عدد صحیح مثبتی است) دربارهٔ اعداد اول هرگز

---

1. Chernac 2. Burckhardt 3. J. P. Kulik

* پدر د. ه. لیمر، د. ن. لیمر خاطرنشان‌کرده است‌که جدول‌کولیك خطاهایی دارد.

4. Crux Mathematicorum 5. University of Waterloo

6. Léo Sauvé 7. C. Goldbach 8. Schnirelmann

9. Vinogradoff

پاسخی نیافته‌اند: آیا بینهایت عدد اول به‌شکل n^2+1 موجود است؟ آیا همواره بین n^2 و $(n+1)^2$ عدد اولی وجود دارد؟ آیا هرعددی مانند n از نقطه‌ای به‌بعد مربع یا مجموع یك عدد اول بایك مربع است؟ آیاتعداد **اعداد اول فرما** (اعداد اول به شکل $2^{2^n}+1$) نامتناهی است؟

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۱۴ هیئت فوئر باخ

درهندسهٔ مقدماتی نوین مثلثها،دایرهٔ نه نقطه مقام ممتازی دارد. درمثلث مفروض $A_1A_2A_3$ که مرکز دایرهٔ محیطی آن O ومحل برخورد ارتفاعهای آن H است، فرض کنید که O_1، O_2، O_3 اوساط اضلاع ، و H_1، H_2، H_3 پاهای سه ارتفاع، و C_1، C_2، C_3 اوساط پاره‌خطهای HA_1، HA_2، HA_3 باشند. دراین صورت نه نقطهٔ O_1، O_2، O_3، H_1، H_2، H_3، C_1، C_2، C_3، بریك دایره واقع‌اند.که به **دایرهٔ نه‌نقطه** مثلث مفروض موسوم‌است. این دایره، بعداً به دلیل نادیده گرفته‌شدن کار کاشف اولیه ، گاهی **دایرهٔ اویلر** نامیده می‌شود .درآلمان آن‌را **دایرهٔ فوئرباخ** می‌نامند، زیرا کارل ویلهام فوئرباخ[1] (۱۸۰۰-۱۸۳۴) جزوه‌ای چاپ‌کرد که درآن نه‌تنها به‌دایرهٔ نه نقطه دست‌یافت بلکه همچنین ثابت کردکه این دایره بردایرهٔ محاطی داخلی و سه‌دایرهٔ محاطی خارجی مثلث مفروض مماس است. نتیجهٔاخیر به **قضیهٔ فوئرباخ** معروف است وبحق به‌عنوان یکی‌از زیباترین قضایای هندسهٔ جدید مثلثها تلقی می‌شود. چهار نقطهٔ تماس دایرهٔ نه‌نقطه با دوایر محاطی داخلی و خارجی به **نقاط فوئرباخ** مثلث موسوم‌اند وبه‌طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. مرکزدایرهٔ نه‌نقطه، F، دروسط OH قرار دارد. مرکزهندسی(محل تلاقی میانه‌های مثلث)، G، نیز بر OH واقع است به‌قسمی‌که $HG=2(GO)$. خطی‌که نقاط O، F، G، H برآن واقع‌اند، به **خط اویلر** مثلث مفروض مشهور است. فرض‌کنید H_2H_3، H_3H_1، H_1H_2 اضلاع مقابل یعنی A_2A_3، A_3A_1، A_1A_2 را در P_1، P_2، P_3 قطع‌کنند. در این صورت P_1، P_2، P_3 برخطی موسوم به **محورقطبی** مثلث $A_1A_2A_3$ قرار دارند، واین محورقطبی برخط اویلرعمود است. اگردایرهٔ نه‌نقطه و دایرهٔ محیطی یکدیگررا قطع‌کنند،آنگاه محور قطبی وتر مشترك این دو دایره است، و دایرهٔ به‌قطر HG، موسوم به **دایرهٔ مرکز ارتفاعی** مثلث مفروض، نیز ازهمین نقاط تلاقی می گذرد.

شکلی‌بزرگ ودقیق‌ازیك‌مثلث‌منفرج‌الزاویه‌را همراه بامرکزهندسی، مرکزارتفاعی، مرکز دایرهٔ محیطی، مراکز دوایر محاطی داخلی وخارجی، خط‌اویلر، محور قطبی، دایرهٔ نه‌نقطه، نقاط فوئرباخ، دایرهٔ محیطی،ودایرهٔ مرکز ارتفاعی آن رسم‌کنید.

---

1. Karl Wilhelm Feuerbach

۲۰۱۴ قضیهٔ کوماندینو

فدریگو کوماندینو[1] (۱۵۰۹–۱۵۷۵) درسال ۱۵۶۵ یکی از اولین قضایا، بعد از دورهٔ یونانیان، را دربارهٔ هندسهٔ چهار وجهی‌ها منتشر کرد. این قضیه راجع به میانه‌های چهاروجهی است، که در آن یك **میانه** به عنوان پاره خطی تعریف می‌شود که رأسی از چهاروجهی را به مرکز هندسی وجه مقابل وصل می‌کند. قضیهٔ کوماندینو بیان می‌کند که: چهارمیانهٔ یك چهار وجهی در نقطه‌ای که هرمیانه را به چهار بخش می‌کند، به هم می‌رسند.

(الف) قضیهٔ کوماندینو را به طور تحلیلی ثابت کنید.

(ب) قضیهٔ کوماندینو را به طریقهٔ ترکیبی ثابت کنید.

(ج) نشان دهید که صفحهٔ مار به سه مرکز هندسی یك چهاروجهی باوجه چهارم آن چهاروجهی موازی است.

چهاروجهی حاصل از صفحات مار بر رأسهای یك چهاروجهی مفروض و به موازات وجه‌های مقابل مربوطه، **مقابل متمم** چهاروجهی مفروض نامیده می‌شود .

(د) ثابت کنید که رأسهای یك چهاروجهی، مراکز هندسی وجوه چهاروجهی مقابل متمم‌اند .

(ه) ثابت کنید که هریال چهاروجهی مقابل متمم، توسط دو وجه چهاروجهی مفروض که یکدیگر را دراین یال قطع می‌کنند، به سه قسمت تقسیم می‌شود.

۳۰۱۴ ارتفاعهای چهاروجهی

سه ارتفاع یك مثلث همرس‌اند. آیا چهار ارتفاع یك چهاروجهی هم همرس‌اند؟

۴۰۱۴ مشابه‌های فضایی

قضایایی را درفضای سه بعدی که مشابه‌های قضایای زیر درصفحه هستند، ذکر کنید.

(الف) نیمسازهای زوایای مثلث درمرکز دایرهٔ محاطی مثلث همرس‌اند.

(ب) مساحت دایره برابر بامساحت مثلثی است که طول قاعدهٔ آن با محیط دایره مساوی و ارتفاع آن باشعاع دایره برابر باشد.

(ج) پای ارتفاع یك مثلث متساوی‌الساقین وسط قاعدهٔ آن است.

۵۰۱۴ عناصرهمزاویه‌ای

دوخط مار بر رأس یك زاویه ومتقارن نسبت به نیمساز آن زاویه **خطوط مزدوج همزاویه‌ای** زاویه نامیده می‌شوند. قضیهٔ جذابی دربارهٔ مثلثها وجود دارد که بیان می‌کند هرگاه سه خط

---

1. Federigo Commandino

مار بر رأسهای یك مثلث همرس باشند، آنگاه‌سه‌خط مزدوج‌همزاویه‌ای آنها نیزهمرس‌اند. دونقطهٔ همرسی را زوج **نقاط مزدوج همزاویه‌ای** مثلث می‌نامند. شش پای عمود وارد ازیك زوج نقاط مزدوج همزاویه‌ای براضلاع یك‌مثلث بردایره‌ای واقع‌اند که مرکز آن نقطهٔ وسط پاره خط واصل بین زوج نقاط مزدوج همزاویه‌ای است.

(الف) شکلی‌رسم کنیدکه نشان دهندهٔ حقایق بالا باشد.

(ب) نشان دهیدکه مرکز ارتفاعی ومرکز دایرهٔ محیطی یك مثلث، زوجی از نقاط مزدوج همزاویه‌ای تشکیل می‌دهند.

(ج) مشابه‌های فضای سه‌بعدی تعریفها و قضایای بیان شده در ابتدای این مطالعهٔ مسئله‌ای را پیداکنید.

نقطهٔ مزدوج همزاویه‌ای مرکزهندسی یك مثلث **نقطهٔ هم‌میانه** یا **نقطهٔ لموآن** مثلث نامیده می‌شود. این‌نقطه‌را اولین بار امیل‌لموآن (۱۸۴۰ – ۱۹۱۲) درسال ۱۸۷۳، در مقاله‌ای‌که در انجمن‌فرانسوی‌برای پیشرفت علوم[1] قرائت شد، معرفی‌کرد ومی‌توان‌مدعی شدکه به‌طورجدی به‌مبحث نوین هندسهٔ مثلثها حرکت بخشیده‌است.

۶.۱۴ ساختمانهای ناممکن

(الف) اتحاد زیررا ثابت‌کنید: $\cos\theta = ۴\cos^{۳}(\theta/۳) - ۳\cos(\theta/۳)$.

(ب) نشان دهیدکه ساختن نه‌ضلعی منتظم با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(ج) نشان دهیدکه ساختن زاویهٔ °۱ با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(د) نشان دهیدکه ساختن هفت‌ضلعی منتظم باابزارهای اقلیدسی‌غیرممکن‌است.

(ه) نشان دهیدکه تثلیث زاویه‌ای‌که‌کسینوس‌آن ۲/۳ باشد، با ابزارهای‌اقلیدسی غیرممکن است.

(و) قطعه خط s مفروض است، نشان دهید که ساختن پاره خطهایی مانند m و n به طوری‌که $s:m = m:n = n:۲s$، با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن‌است.

(ز) نشان دهیدکه ساختن شعاع‌کره‌ای‌که حجم‌آن مجموع‌حجمهای دوکرهٔ دلخواه به‌شعاعهای معلوم‌می‌باشد، با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(ح) نشان دهیدکه ساختن پاره‌خطی‌که طول‌آن برابر بامحیط دایرهٔ مفروض‌باشد، غیرممکن است.

(ط) زاویه‌ای مانند AOB ونقطه‌ای مانند P درداخل‌آن مفروض‌اند. خط مار بر P که خطوط OA وOB را به‌ترتیب در C وD به‌قسمی قطع می‌کندکه $CE = PD$، وE پای عمود وارد ازO برCD است، بــه **خط فیلون** زاویــهٔ AOB ونقطهٔ P موسوم است. می‌توان نشان دادکه خط فیلون کوتاهترین وتری مانند CD است که می‌توان از P رسم کرد. نشان دهیدکه در حالت‌کلی ساختن خط فیلون برای یك زاویه و یك نقطهٔ مفروض

1. Association Francaise pour l' Advancement des Sciences

با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

۷.۱۴ برخی ساختمانهای تقریبی

(الف) برای ساختمان تقریبی یك هفت ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مفروضی، سهم شش ضلعی منتظم محاط در دایره را به‌عنوان ضلع‌هفت‌ضلعی اختیار کنید. این تقریب تاچه حد خوب است.

(ب) یك ساختمان تقریبی از یك نه‌ضلعی منتظم در دایرهٔ مفروضی به‌شعاع r، کسه توسط آلبرشت دورر داده شده، به‌قرارزیراست. محیط دایره‌ای هم‌مرکز بادایرهٔ مفروض و به شعاعی برابر با $3r$ رسم‌کنید . این محیط دایره را به‌وسیلهٔ نقاط A، B، C، D، E، F به‌شش‌قسمت مساوی تقسیم‌کنید. به‌مراکز F و B، قوسهایی برA و مرکز مشترك دوایر رسم‌کنید، این قوسها دایرهٔ مفروض را به‌ترتیب در M وN قطع می‌کنند. دراین صورت MN به‌عنوان یك ضلع نه‌ضلعی منتظم اختیار می‌شود. این تقریب تاچه حد خوب است؟

(ج) برای تثلیث زاویهٔ مرکزی مفروضی ازیك دایره، کسی پیشنهاد می‌کندکه وتر قوس مقابل به زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم‌کنند وسپس این نقاط تثلیث را به‌مرکز دایره وصل نمایند. نشان دهیدکه این‌کار برای زوایای حاده بزرگ به‌تقریب‌ضعیفی‌منجر می‌شود.

(د) دقت روش زیر برای تثلیث تقریبی‌یك زاویه‌را بررسی‌کنید؛ این روش توسط کوپف[1] درسال ۱۹۱۹ داده شد وسپس توسط ا. پرون[2] و م. دوکانی[3] اصلاح شد. فرض کنیدکه زاویهٔ مفروض AOB به‌عنوان یك زاویهٔ مرکزی در دایره‌ای به‌قطر BOC اختیار شود . D ، وسط OC را پیدا کنید ، سپس P را بـر امتداد OC پیدا کنید بـه قسمی‌که $CP=OC$. در نقطهٔ D، عمودی اخراج‌کنید تا دایره را در E قطع کند ، سپس نقطهٔ F را بین C و D به قسمی جدا کنید که $DF=(DE)/3$. به‌مـرکز F و به شعاع FB، قوسی رسم‌کنید تا امتداد CA را درA' قطع‌کند. دراین‌صورت زاویهٔ $A'PB$ تقریباً برابر بایك‌سوم زاویهٔ AOB است .

(ه) دقت روش زیر برای تثلیث تقریبی یك‌زاویه را بررسی‌کنید؛ این‌روش توسط م. دوکانی درسال ۱۹۳۴ داده شد و به حد اعجاب‌آوری برای زوایای کوچك، دقیق‌است. فرض‌کنیدکه زاویهٔ مفروض AOB به‌عنوان یك‌زاویهٔ‌مرکزی دایره‌ای به‌قطر BOCاختیار شود. فرض‌کنید D وسط OC و M وسط قوس AB باشد. در این صورت زاویهٔ MDB تقریباً برابر بایك‌سوم زاویهٔ AOB است.

۸.۱۴ قضیهٔ ساختمان ماسکرونی

فرض‌کنید دایرهٔ به‌مرکز نقطه‌ای مانندC ومار برنقطهٔ A باعلامت$C(A)$، ودایرهٔ به‌مرکزC و

1.Kopf 2. O. Perron 3. M. d'Ocagne

شعاعی برابر با پاره‌خط AB با علامت $C(AB)$ نشان داده شود. رشته ساختمانهای زیر را ثابت‌کنید و نشان دهیدکه آنها اثبات قضیهٔ ساختمان ماسکرونی هستند: هرساختمان اقلیدسی‌را، مادام که عناصر مفروض ومطلوب نقطه باشند، می‌توان تنها باپرگار اقلیدسی انجام داد. این‌ساختمانها درجدولی ثبت شده‌اندکه درآن‌سطر بالایی آنچه راکه باید رسم شود، نشان می‌دهد، در حالی‌که سطر زیرین نقاط جدیدی را که باید بدین ترتیب پیدا شوند، نشان می‌دهد.

(الف) ساختن دایرهٔ $C(AB)$ با پرگار اقلیدسی

$C(A)$,$A(C)$	$M(B)$,$N(B)$	$C(X)$
M , N	X	

(تذکر: این ساختمان نشان می‌دهدکه پرگارهای اقلیدسی و پرگارهای جدید ابزارهای معادلی هستند.)

(ب) پیداکردن محل‌تلاقی $C(D)$ باخط واصل بین‌نقاط A و B باپرگارهای‌جدید.

حالت ۱، C بر AB واقع نیست.

$A(C),B(C)$	$C(D),C_1(CD)$
C_1	x,y

حالت ۲، C بر AB واقع است.

$A(D),C(D)$	$C(DD_1),D(C)$	$C(DD_1),D_1(C)$	$F(D_1),F_1(D)$	$F(CM),C(D)$
D_1	F، چهارمین‌رأس متوازی‌الاضلاع CD_1DF	F_1،چهارمین‌رأس متوازی‌الاضلاع CDD_1F_1	M	X,Y

(ج) پیدا کردن نقطهٔ تلاقی خطوط واصل بین نقاط A، B و نقاط C، D وبه‌کمك پرگارهای جدید.

$A(C)$, $B(C)$	$A(D)$, $B(D)$	$C(DD_1)$, $D_1(CD)$	$C_1(G)$, $G(D_1)$	$C_1(C)$, $G(CE)$	CF, $C_1(CF)$
C_1	D_1	G، همخط با C و C_1	E، هریک از نقاط تلاقی	F، همخط با C_1 و E	X

(د) درصفحهٔ ۲۶۸ کتاب تاریخ ریاضیات[1] ، اثر کاژوری[2] می‌خوانیم: «ناپلئون مسئلهٔ تقسیم محیط دایره به‌چهارقسمت مساوی را فقط با پرگار، برای ریاضیدانان فرانسوی مطرح کرد. ماسکرونی این کار را باجدا کردن سه وتر متوالی مساوی باشعاع دایره انجام می‌دهد؛ وی قوسهای AB، BC، CD را به‌دست می‌آورد، دراین‌صورت AD یك قطر است؛ بقیه بدیهی است.» قسمت «بدیهی» این ساختمان‌را تکمیل کنید.

۹.۱۴ ساختمانهایی باخط کش و پرگارهای بافرجهٔ ثابت

باخط کش و پرگار با فرجهٔ ثابت، اولین چهارده مسئلهٔ ساختمانی زیررا که در خلاصه‌ای از شگفتیهای اقلیدس اثر موهر یافته می‌شود، حل کنید :

۱. تقسیم پاره‌خط مفروضی به‌دوجزء مساوی.

۲. اخراج عمودی بریك خط مستقیم از نقطهٔ مفروضی واقع برآن.

۳. ساختن مثلث متساوی‌الاضلاعی با یك ضلع معلوم .

۴. اخراج عمودی بریك‌خط از نقطه‌ای واقع درخارج آن.

۵. رسم خطی‌از یك‌نقطهٔ مفروض به‌موازات یك خط مفروض.

۶. جمع دوپاره خط مفروض.

۷. تفریق یك پاره خط ازپاره‌خط مفروضی بزرگتر ازآن.

۸. قراردادن پاره خط مفروضی به‌طور عمودی برانتهای یك پاره خط مفروض.

۹. تقسیم پاره‌خطی به‌تعداد دلخواهی قسمت مساوی .

۱۰. پیدا کردن سومین‌جزء‌تناسب، با‌معلوم بودن دوپاره‌خط

۱۱. پیدا کردن چهارمین جزء تناسب، با معلوم بودن سه پاره خط .

۱۲. پیدا کردن واسطهٔ هندسی بین دوپاره خط مفروض.

۱۳. تبدیل مستطیل مفروضی به‌یك مربع.

۱۴. رسم مثلثی، باداشتن سه‌ضلع آن.

---

1. A History of Mathematics

2. Cajori

۱۰.۱۴ هندسه‌نگاری لموآن

نمـاد، سهولت، و دقت ساختمانهای آشنای زیر برای رسم خطی از نقطهٔ مفروضی مانند A و به موازات خط مفروض MN را پیداکنید.

(الف) بر A خطی بگذرانید تا MN را در B قطع کند. به‌شعاع دلخواهی مانند r دایرهٔ $B(r)$ را رسم کنید تـا MB را در C و AB را در D قطع کند. دایرهٔ $A(r)$ را رسم کنید تا AB را در E قطع کند. دایرهٔ $E(CD)$ را رسم کنید تا دایرهٔ $A(r)$ را در X قطع کند. AX را رسم کنید تا خط موازی مطلوب به‌دست آید.

(ب) با هر نقطهٔ مناسب مانند D به‌عنوان مرکز، دایرهٔ $D(A)$ را رسم کنید تا MN را در B و C قطع کند. دایرهٔ $C(AB)$ را رسم کنید تا دایرهٔ $D(A)$ را در X قطع کند. AX را رسم کنید.

(ج) با هر شعاع مناسبی مانند r دایـرهٔ $A(r)$ را رسم کنید تا MN را در B قطع کند. دایرهٔ $B(r)$ را رسم کنید تا MN را در C قطع کند. دایرهٔ $C(r)$ را رسم کنید تا دایرهٔ $A(r)$ را در X قطع کند. AX را رسم کنید.

نمـاد، سهولت، و دقت ساختمانهای زیر برای رسم خطی عمود برخط مفروض m از نقطهٔ مفروض P بر آن را پیداکنید.

(د) به مرکز P و با هر شعاع مناسب، دایره‌ای رسم کنید تا m را در A و B قطع کند. به‌مراکز A و B و با هر شعاع مناسب قوسهایی رسم کنید تا در Q تلاقی کنند. PQ را، که عمود مطلوب است، رسم کنید.

(ه) با هر نقطهٔ مناسبی غیرواقع بر m به‌عنوان مرکز، دایره‌ای از P بگذرانید تا m را باز در Q قطع کند، و قطر QR از این دایره را رسم کنید. PR را، که عمود مطلوب است، رسم کنید.

۱۱.۱۴ اصل دوگانی

(الف) دوگان ۱۲.۹ (الف) را پیدا کنید. (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲.۹.)

(ب) با مفروض بودن ۵ خط، بر هریك از آنها نقطهٔ تماس یك مقطع مخروطی مماس بر ۵ خط را پیداکنید.

(ج) با مفروض بودن چهار مماس بر یك مقطع مخروطی و نقطهٔ تماس هریك از آنها، مماسهای بیشتری بر مقطع مخروطی رسم کنید.

(د) دوگان ۱۲.۹ (د) را پیداکنید.

(ه) دوگان ۱۲.۹ (ه) را پیداکنید.

(و) با مفروض بودن سه مماس بر یك مقطع مخروطی و نقاط تماس دوتـا از آنها، سومین نقطهٔ تماس را پیداکنید.

(ز) دوگان قضیهٔ دومثلث دزارگ را پیداکنید.

۱۲.۱۴ یك مجموعهٔ اصول موضوعهٔ خود ـ دوگان برای هندسهٔ تصویری

(الف) نشان دهید که مجموعهٔ اصول موضوعهٔ زیر برای هندسهٔ تصویری، که توسط کارل‌منگر[1] در سال ۱۹۴۵ داده شده، خود ـ دوگان است.

پ۱: یك خط وتنها یك خط بر هردونقطهٔ متمایز واقع است، ویك نقطه وفقط یك نقطه برهردوخط متمایز واقع است.

پ۲: دونقطه و دوخط وجود دارندبه‌طوری‌که هریك ازنقاط فقط بریکی ازخطوط و هریك از خطوط فقط بریکی ازنقاط واقع است.

پ۳: دونقطه و دوخط وجود دارند، نقاط واقع برخطوط نیستند، به‌طوری که‌نقطهٔ واقع روی دوخط برخط روی دونقطه قراردارد.

(ب) صحت سه اصل موضوع (الف) را برای هفت «نقطه» که باحروف A، B، C، D، E، F، G مشخص می‌شوند، وهفت «خط» که توسط سه‌تاییهای (AFB)، (BDC)، (CEA)، (AGD)، (BGE)، (CGF)، (DEF) نشان داده می‌شوند تحقیق کنید. این مثال وجود هندسه‌های تصویری متناهی (یعنی، هندسه‌های تصویری مشتمل برتنها تعدادی متناهی نقطه وخط) را ثابت می‌کند.

۱۳.۱۴ اصل دوگانی مثلثات

اگر دریك معادلهٔ مثلثاتی، به‌جای هر تابع مثلثاتی که در معادله ظاهر می‌شود تابع متمم آن را قرار دهیم، معادلهٔ جدیدی را که به دست می‌آید، **دوگان** معادلهٔ اصلی می‌نامیم. **اصل دوگانی** زیر را برای مثلثات ثابت کنید: اگر یك معادلهٔ مثلثاتی شامل یك‌زاویه، یك اتحاد باشد، آنگاه دوگان آن نیز یك اتحاد است.

۱۴.۱۴ دستگاههای مختصات

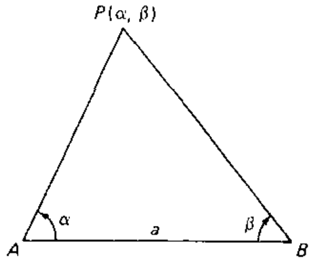
دستگاه مختصاتی‌را که چارچوب مرجع آن یك پاره‌خط افقی مانند AB به‌طول a است ویك نقطهٔ P درصفحهٔ آن به‌وسیلهٔ زاویهٔ $\alpha = \sphericalangle BAP$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت و زاویهٔ $\beta = \sphericalangle ABP$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌عنوان مختصات‌تعیین می‌شود، یك **دستگـاه مختصات دوقطبی** نام دارد (نگاه‌کنید به‌شکل ۱۱۸).

(الف) معادلهٔ دوقطبی: (۱) عمود منصف AB، (۲) قوسی‌از یك دایره که وتر آن AB باشد، را پیدا کنید.

(ب) معادلات تبدیلی‌را پیدا کنید که یك‌دستگاه مختصات دوقطبی‌را به‌دستگاه‌مختصات

---

1. Karl Menger



شکل ۱۱۸

دکارتی قائمی که محور xهـای آن در امتداد AB و مبدأ مختصات آن وسط AB است، مربوط می‌سازد.

(ج) منحنیهای زیر را مشخص کنید: (۱) $\cot\alpha\cot\beta=k$، (۲) $\cot\alpha/\cot\beta=k$، (۳) $\cot\alpha+\cot\beta=k$ که در آنها k مقدار ثابتی است.

(د) معادلات دکارتی قائم منحنیهای زیر را کـه با معادلات قطبی داده شده‌اند، پیدا کنید: (۱) لمنیسکات برنولی، $r^۲=a^۲\cos ۲\theta$، (۲) کاردیوئید، $r=a(۱-\cos\theta)$، (۳) مارپیچ ارشمیدس، $r=a\theta$، (۴) مارپیچ متساوی‌الزاویه، $r=e^{a\theta}$، (۵) مارپیچ هذلولوی، $r\theta=a$، (۶) گل چهاربرگی، $r=a\sin ۲\theta$.

(ه) دستگاه مختصات عرضی وطولی بریك سطح کروی را شرح دهید.

(و) یك تعمیم طبیعی دستگاه مختصات قطبی از صفحه به فضا چنین بدست می‌آید که مبدأ ثابتی مانند O می‌گیریم و برای نقطه‌ای مانند P طول بـردار OP، r، عرض جغرافیایی این نقطه، ϕ، و طول جغرافیایی آن، θ، را نسبت به‌کره‌ای به مرکـز O و شعاع OP به عنوان مختصات اختیار می‌کنیم. این مختصات را **مختصات کروی** می‌نامند. معادلاتی را پیدا کنید که مختصات کروی (r,ϕ,θ) نقطهٔ P را بـه مختصات دکارتی قائم (x,y,z) آن مربوط می‌کنند. چنین روابطی اساساً در آثار لاگرانژ (۱۷۳۶ ـ ۱۸۱۳) دیده می‌شود.

(ز) دستگاه مختصاتی طرح کنید که محل نقاط را بر (۱) سطح استوانهٔ دوار، (۲) یك چنبره، معین کند.

۱۵.۱۴ مختصات خطی

(الف) نشان دهید که بریك چارچوب مرجع دکارتی قائم می‌توان ازشیب وعرض ازمبدأ هرخط، یا از طول عمود وارد از مبدأ برخط و زاویه‌ای که این عمود با محور xها می‌سازد، به‌عنوان مختصات خط استفاده کرد.

(ب) عکس عرض ازمبدأ وعکس طول از مبدأ یك خط باعلامت منفی، u و v، به‌مختصات

پلوکر خط معروف است. مختصات پلوکر خطوطی را کـه معادلات دکارتـی آنهـا $۵x+۳y-۶=۰$ و $ax+by+۱=۰$ هستند، پیدا کنید. معادلهٔ دکارتی خطی را که مختصات پلوکر آن (۱,۳) است، بنویسید.

(ج نشان دهید که مختصات پلوکر، u و v، کلیهٔ خطوطی کـه برنقطه‌ای بامختصات دکارتی (۲,۳) می‌گذرند، درمعادلهٔ خطی $۲u+۳v+۱=۰$ صادق‌اند. این معادله به‌عنوان معادلهٔ پلوکر نقطهٔ (۲,۳) اختیار می‌شود. مختصات دکارتی نقاطی که معادلات پلوکر آنها $۵u+۳v-۶=۰$ و $au+bv+۱=۰$اند، چه هستند؟ معادلهٔ پلوکر نقطه‌ای بامختصات دکارتی (۱,۴) را بنویسید.

۱۶.۱۴ بعد چندی

(الف) نشان دهید که صفحه برحسب پاره‌خطهای جهت‌دار چهار بعدی است.

(ب) بعد چندی صفحه برحسب پاره خطهایی جهت‌دار باطول معلوم چیست؟

(ج) نشان دهید که فضا برحسب خطوط چهار بعدی است.

(د) نشان دهید که فضا برحسب صفحه سه بعدی است.

(ه) نشان دهید که فضا برحسب کرات چهار بعدی است.

بعدچندی چندگوناهای زیرچیست؟

(و) خطوطی که دوخط متنافر را قطع می‌کنند.

(ز) خطوط مار برنقطه‌ای ازفضا.

(ح) صفحات مار برنقطه‌ای از فضا.

(ط) دایره‌هایی درفضا که ازیك نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

(ی) کراتی درفضا که ازیك نقطه می‌گذرند.

(ك) همهٔ دایره‌های واقع بریك کره.

(ل) همهٔ دایره‌ها درفضا.

(م) همهٔ دایره‌هایی که صفحات آنها برخط ثابتی از فضا می‌گذرند.

(ن) همهٔ خطوط مماس بریك کرهٔ مفروض.

(س) همهٔ صفحات مماس بریك کرهٔ مفروض.

۱۷.۱۴ نماد اختصاری

قضایای زیررا ثابت‌کنید.

(الف) اگر $\alpha=۰$ و $\beta=۰$ معادلات نرمال (قائم) دوخط متمایز باشند که برمبدأ نمی‌گذرند، واگر $m\alpha+n\beta=۰$، که درآن m و n مقادیر ثابت‌اند، خطی مار بـرنقطهٔ تلاقی آنها باشد، دراین‌صورت m/n نسبت فاصلهٔ علامت‌دار نقطه‌ای برخط $m\alpha+n\beta=۰$ ازخط $\beta=۰$ است برفاصلهٔ علامت‌دار آن‌ازخط $\alpha=۰$ باعلامت منفی.

(ب) اگر $\alpha = ۰$ و $\beta = ۰$ معادلات نرمال دوخط راست غیرموازی مفروض باشند که برمبدأ نمی‌گذرند، در این صورت $\alpha - \beta = ۰$ و $\alpha + \beta = ۰$ نیمسازهای زوایای بین این دوخط‌اند، که اولی نیمساز زاویه‌ای است که شامل مبدأ است.

(ج) اگر $\alpha = ۰$ و $\beta = ۰$ معادلات نرمال دوخط غیر موازی باشند که برمبدأ نمی‌گذرند، دراین‌صورت $m\alpha + n\beta = ۰$ و $n\alpha + m\beta = ۰$ ، که در آن m و n مقادیر ثابت‌اند، خطوط همزاویه‌ای زوایای بین دوخط اولیه‌اند.

(د) فرض کنیدکه $\alpha = ۰$، $\beta = ۰$، $\gamma = ۰$ معادلات اضلاع یك مثلث باشند، دراین صورت سه‌خط سوایی $m\beta - n\gamma = ۰$، $r\alpha - s\alpha = ۰$، و $u\alpha - v\beta = ۰$ همرس‌اند اگر وفقط اگر $mru = nsv$.

(ه) اگر $\alpha = ۰$، $\beta = ۰$، $\gamma = ۰$ معادلات اضلاع یك‌مثلث باشند، هرسه‌خط‌سوایی همرس‌را می‌توان به‌صورت $r\beta - s\gamma = ۰$، $s\gamma - t\alpha = ۰$، $t\alpha - r\beta = ۰$ نوشت.

(و) نیمسازهای زوایای مثلث همرس‌اند.

(ز) ارتفاعهای مثلث همرس‌اند.

(ح) میانه‌های مثلث همرس‌اند.

(ط) اگر خطوط سوایی یك مثلث همرس باشند، دراین صورت سه‌خط همزاویه‌ای سوایی نیزچنین‌اند.

(ی) مکان هندسی نقطه‌ای که حاصلضرب فواصل آن از زوجی از اضلاع متقابل یك چهاروجهی متناسب باحاصلضرب فواصل آن از زوج اضلاع متقابل دیگر چهارضلعی باشد، یك مقطع مخروطی است که بررئوس چهارضلعی می‌گذرد.

(ك) مکان هندسی نقطه‌ای‌که حاصلضرب فواصل آن از دوخط ، متناسب با مربع فاصلهٔ آن از یك خط سوم است، یك مقطع مخروطی است که درنقاط تلاقی دوخط اول با خط سوم بردوخط اول مماس است.

۱۸.۱۴ مختصات همگن

(الف) مختصات دکارتی‌همگن متناظرنقاط (۲,۳)، (۱,۵ —)، (۰,۷) را بنویسید.

(ب) مختصات دکارتی همگن نقاط در بینهایت واقع برخطوط $x = y$ ، $۳x + ۲y - ۷ = ۰$، $ax + by + c = ۰$ را بنویسید.

(ج) مختصات دکارتی‌غیرهمگن‌متناظرنقاط (۴ — ,۷,۳)، (۱,۱,۱)، (۲,۲ — ,۰) را بنویسید.

(د) معادلهٔ دکارتی غیرهمگن خطی مار برنقطهٔ آرمانی (۱, — ۲,۰) را بنویسید.

(ه) یك معادلهٔ دکارتی‌همگن متناظر برای دایرهٔ زیربنویسید

$$x^۲ + y^۲ + ۲fy + ۲gx + c = ۰.$$

(و) نشان دهیدکه هردایره بر دونقطهٔ آرمانی $(۱, -i, ۰)$ و $(۱, i, ۰)$ می‌گذرد.

این نقاط را نقاط **مستدیر در بینهایت** نامند.

(ز) نشان دهید که هرمقطع مخروطی حقیقی‌مار بر دو نقطهٔ مستدیر در بینهایت، یك دایره است.

۱۹۰۱۴ اعداد پلوکر

با استفاده از معادلات پلوکر که نقاط تکین یك معادلهٔ جبری‌را به‌هم مربوط می‌کند، نشان دهید که:

(الف) هرمقطع مخروطی از ردهٔ دوم است.

(ب) منحنی درجهٔ سوم $y=x^{3}$ از ردهٔ سوم است و یك‌نقطهٔ بازگشت در بینهایت دارد.

(ج) معنی درجهٔ سوم $y^{2}=x^{3}$ از ردهٔ ششم است‌ویك نقطهٔ عطف دربینهایت‌دارد.

(د) $\iota-\kappa=3(m-n)$

۲۰۰۱۴ هندسهٔ n-بعدی

(الف) چگونه باید خط مستقیم را، به‌طور تحلیلی، درابرفضایی‌که به‌وسیلهٔ دونقطهٔ $(x_{1}, \dots, x_{n})$ و $(y_{1},\dots,y_{n})$ معین می‌شود، تعریف کرد؟

(ب) چگونه باید کسینوسهای هادی خط مستقیم قسمت (الف) را تعریف کرد؟

(ج) چگونه باید بینیت بین دونقطهٔ قسمت (الف) را تعریف کرد؟

(د) چگونه باید وسط پاره خطی که به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ قسمت (الف) معین می‌شود، تعریف کرد؟

(ه) تعریف داده شده دربخش ۱۴-۶ برای کسینوس زاویهٔ بین‌دوپاره‌خط در ابر-فضا را توجیه کنید. یعنی نشان دهید که $1 \geqslant \cos\theta \geqslant 0$.

(و) اگر x، y، z سه‌نقطهٔ دلخواه درابرفضاباشند، و اگر $d(x,y)$ معرف فاصلهٔ بین x و y باشد، نشان دهید که

۱. $d(x,y)\geqslant 0$،

۲. $d(x,y)=0$ اگر وفقط اگر $x=y$،

۳. $d(x,y)=d(y,x)$،

۴. $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

۲۱۰۱۴ انحنای گاوسی

مقاطعی ازسطحی مانند S را که ازصفحات مار برنرمال بسر S درنقطه‌ای مانند P پدید آمده‌اند، درنظر گیرید. درمیان این مقاطع یکی هست‌که دارای انحنای ماکزیموم k در

نقطهٔ P است، و یکی که دارای انحنای میتیموم k' دراین نقطه است. این دو مقطع با انحناهای ماکزیموم و مینیموم در حالت کلی برهم عمودند، و انحناهای آنها در نقطهٔ P **انحناهای اصلی** S درنقطهٔ P نامیده می‌شوند. حاصلضرب $K = kk'$ **انحنای (گاوسی، یا کلی)** سطح S در P نامیده می‌شود. اگر دوانحنای اصلی دارای‌یك جهت باشند، K مثبت‌است؛اگر دوانحنای‌اصلی جهتهای مخالف داشته باشند، K منفی است؛ اگر یکی از انحناهای اصلی صفر باشد، K صفر است. گاوس این‌قضیهٔ قابل توجه را کشف کرد که اگر سطحی را (بدون کشیدگی، تاخوردگی، یاپارگی) خم کنیم، انحنای آن در هرنقطه بدون تغییر باقی می‌ماند.

(الف) آیا سطح درجهٔ دویی وجود داردکه انحنای آن درهمه‌جا مثبت باشد؟ همه جا منفی باشد؟ درهمه‌جا صفر باشد؟ در بعضی‌جاها مثبت و درجاهای دیگرمنفی‌باشد؟

(ب) اگر سطحی‌را بتوان چنان خم کردکه برسطح دیگری منطبق‌شود، این دوسطح **درخور هم** نامیده می‌شوند. نشان دهیدکه هرگاه دوسطح درخورهم باشند، بین‌نقاط آنها یك تناظر یك به یك موجود است به‌طوری‌که انحناهای دو سطح در دونقطهٔ متناظر باهم برابرند.

(ج) نشان دهیدکه وقتی یك سطح برسطح دیگر خمانیده شود، ژئودزیکهای سطح اول برژئودزیکهای سطح دوم نهاده می‌شوند.

(د) نشان دهیدکه انحنای کره‌ای به‌شعاع r، مقدار ثابت مثبت $1/r^2$ است.

(ه) نشان دهیدکه انحنای یك صفحه برابرصفر است.

(و) نشان دهیدکه‌یك سطح استوانه‌ای دارای‌انحنای‌ثابت‌صفر است. آیا یك سطح استوانه‌ای درخور یك صفحه هست؟

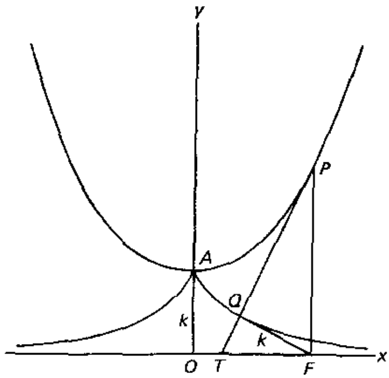
(ز) نشان دهیدکه اگرسطحی در هروضعی درخورخود باشد، انحنای‌آن بایدثابت باشد.

(ح) نشان دهید تنها سطوحی‌که تحرك آزادانهٔ اشکال برروی آنها امکانپذیراست، سطوح با انحنای‌صفرند.

(ط) نشان دهیدکه‌کره درخورصفحه نیست. (بدین جهت است‌کـه درساختن نقشهٔ زمین،نوعی تحریف درنقشه ضروری است.)

۲۲.۱۴ تراکتوئید

نمودار $y = k\cosh(x/k)$ **منحنی زنجیری**، یعنی‌شکلی‌است‌که یك زنجیر انعطاف‌پذیر غیرقابل انبساط باچگالی یکنواخت‌که‌از دوتکیه‌گاه غیرواقع بریك خط‌قائم آویخته‌شده، به‌خود می‌گیرد. فرض‌کنیدکه منحنی‌زنجیری (نگاه‌کنید به‌شکل۱۱۹) محور yها را درA قطع‌کند، وP نقطهٔ دلخواهی برمنحنی وF پای‌عمود وارد از P برمحور xهاباشد. همچنین فرض‌کنیدکه مماس‌برمنحنی‌درنقطهٔ Pمحورxها را درنقطهٔ T قطع‌کند وQ پای عمودوارد از F برPT باشد.



شکل ۱۱۹

(الف) به‌کمك حسابان مقدماتی، نشان دهیدکه طول QF ثابت و برابر با k است
(ب) به‌کمك حساب‌انتگرال، نشان دهیدکه QP باطول قوس AP برابراست.
(ج) نشان دهیدکه هرگاه یك‌رشتهٔ AP ازاین زنجیر بریده‌شود، انتهای A ازاین‌رشته یك منحنی مانند AQ رسم‌خواهدکرد با این‌خاصیت که طول‌مماس QF بر آن ثابت و برابر k است. به‌عبارت دیگر، مکان‌هندسی Q که گسترندهٔ منحنی‌زنجیری‌است، یك‌تراکتریس‌است.
(د) می‌توان نشان دادکه‌برای یك سطح دوار، انحناهای اصلی (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۲۱.۱۴) درنقطه‌ای مانند Q ازسطح، انحنای نصف‌النهار مار بر Q وانحنای‌مقطع ماربر Q است که برنصف‌النهار مار بر Q عمود می‌باشد. اگرنرمال‌برسطح درنقطهٔ Qمحور دوران سطح را در T قطع‌کند، در این صورت می‌دانیم‌که انحنای اخیر برابر با $1/QT$ است. نشان دهیدکه انحناهای‌اصلی‌درنقطهٔ Q برای‌تراکتوئیدی‌که از دوران‌تراکتریکس قسمت (ج) حول محور xها به‌دست می‌آید، برابر با $1/QP$ و $1/QT$ هستند.
(ه) نشان دهیدکه انحنای (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۲۱.۱۴) تراکتوئید قسمت (د) ثابت ودرهمه‌جا برابر با $-1/k^2$ است.

۲۳.۱۴ برنامهٔ ارلانگر

(الف) نشان دهیدکه مجموعهٔ کلیهٔ تبدیلهای تصویری ازصفحهٔ تصویری‌برروی‌خود که خط ثابتی از صفحه (آن را **خط دربینهایت** می‌نامیم) را برروی خود می‌برد، یك گروه تبدیل تشکیل می‌دهد. (هندسهٔ وابسته به این گروه به **هندسهٔ مسطحهٔ آفین** موسوم است.)
(ب) نشان دهیدکه مجموعهٔ کلیه تبدیلهای تصویری از صفحهٔ تصویری‌برروی‌خود که خط ثابتی از صفحه را برروی خودویك نقطهٔ ثابت ازصفحه غیرواقع براین خط‌ثابت

را برخود این نقطه می‌برند، یك‌گروه تبدیل تشکیل می‌دهند. (هندسهٔ وابسته به‌این گروه به **هندسهٔ مسطحهٔ آفین مرکزدار** موسوم است.)

(ج) نشان دهیدکه هندسه‌های تودرتوی

{متریك اقلیدسی، همشکل، آفین‌مرکزدار، آفین،تصویری}

را داریم‌که درآنها گروه تبدیل هریك ازهندسه‌ها زیرگروهی از گروه تبدیل هریك از هندسه‌های بعدی در دنبالهٔ فوق است.

(د) نشان دهید که مجموعهٔ کلیهٔ تبدیلهای تصویری صفحهٔ تصویری‌برروی‌خود که دایرهٔ مفروض S از صفحه را برروی خود و داخل S را برداخل Sمی‌برند، یك گروه تبدیل تشکیل می‌دهند. (باتعریفهای مناسب از فاصله و اندازه‌های زاویه‌ای، می‌توان‌نشان دادکه هندسهٔ وابسته به‌این‌گروه تبدیل‌باهندسهٔ متریك لباچفسکیایی‌درصفحه، معادل‌است.)

۲۴۰۱۴ رازگرایی و محالات درحسابان اولیه

(الف) یکی از مؤثرترین انتقادها برمبانی ناقص حسابان اولیه ازسوی فیلسوف برجستهٔ مابعدالطبیعی اسقف جورج بارکلی[1] (۱۶۸۵–۱۷۵۳) واردشد. وی براین عقیده پافشاری می‌کردکه بسط حسابان توسط نیوتن متضمن‌مغالطهٔ‌منطقی تصرف درفرض[2] است. تصرف درفرض‌موجود درکارنیوتن درتعیین‌مشتق (یافلوکسیون، نامی‌که او به‌کار می‌برد) x^3 در زیررا خاطرنشان‌کنید. در اینجاکارنیوتن‌را در تربیع منحنیهای وی به‌سال ۱۷۰۴ باعبارات دیگر می‌آوریم:

در همان حال‌که x، براثر نمو، به‌$x+o$ تبدیل می‌شود، قوهٔ x^3 به $(x+o)^3$، یا

$$x^3+3x^2o+3xo^2+o^3,$$

تبدیل می‌شود ونسبت میزان رشد، یانموها یعنی

$$o \text{ و } 3x^2o+3xo^2+o^3$$

به‌یکدیگر مثل

$$1 \text{ و } 3x^2+3xo+o^2$$

است. حال نموها را به‌سمت صفر میل دهید، درایـن‌صورت آخـرین نسبتها ۱ و $3x^2$ خواهندبود، وازآنجا نرخ تغییر x^3 نسبت به‌x برابر $3x^2$ است.

(ب) بیان‌کنایه‌آمیز بارکلی ازمشتق: «اشباح کمیتهای محوشده» را توضیح دهید.

(ج) دربارهٔ اصل‌زیرکه‌توسط یوهان‌برنولی‌برای‌تضمین‌اعمالی‌نظیر اعمال‌توضیح

---

1. George Berkeley 2. shift in the hypothesis

داده‌شده در قسمت (الف)، پذیرفته شده، بحث کنید: «کمیتی که به‌میزان بی‌نهایت کوچکی زیاد یا کم می‌شود نه افزایش می‌یابد و نه کاهش.»

۲۵.۱۴ مشکلات اولیه در سریهای نامتناهی

ریاضیدانان قرنهای هفدهم و هجدهم درک کمی از سریهای نامتناهی داشتند. آنها اغلب، درمورد این گونه سریها، اعمالی را به‌کار می‌بردند که درمورد سریهای متناهی صادق‌اند، ولی درمورد سریهای نامتناهی تنها تحت برخی محدودیتها قابل‌اعمال‌اند. بدون آگاهی از این محدودیتها، نتیجه آن شد که درکار باسریهای نامتناهی پارادوکسهایی به‌وجود آیند.

(الف) یک‌سری پردردسر در روزهای اولیهٔ حسابان سری متناوب زیر بود

$$۱-۱+۱-۱+۱-۱+\cdots,$$

ودربارهٔ مجموع S که باید به‌این سری اختصاص یابد، بحث زیادی پیش آمد. نشان‌دهید که گروه بندی

$$(۱-۱)+(۱-۱)+(۱-۱)+\cdots$$

منجر به $S=۰$ می‌شود، و گروه‌بندی

$$۱-(۱-۱)-(۱-۱)-(۱-۱)-\cdots$$

منجربه $S=۱$. برخی چنین استدلال می‌کردند که چون مجموعهای ۰ و ۱ به‌یک اندازه محتمل‌هستند، مجموع‌صحیح‌دوسری مقدارمتوسط ۱/۲ است. نشان دهیدکه‌این‌مقدار رانیز می‌توان به‌یک‌روال کاملاً صوری از گروه‌بندی زیر به‌دست آورد.

$$۱-(۱-۱+۱-۱+۱-۱+\cdots).$$

(ب) بسط دوجمله‌ای به صورت

$$(a+b)^n=a^n+C(n,۱)a^{n-۱}b+C(n,۲)a^{n-۲}b^۲+C(n,۳)a^{n-۳}b^۳+\cdots,$$

که درآن

$$C(n,r)=\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)}{(۱)(۲)(۳)\cdots(r)},$$

تنها تحت برخی‌شرایط درست است؛ یعنی، سری‌طرف راست، تنها تحت برخی‌محدودیتها بر a، b، و n به‌عبارت سمت چپ همگراست. بدون آگاهی‌ازاین محدودیتها، وبه‌کاربردن این‌عبارت به‌نحوی‌که‌گویی همیشه درست است، می‌تواند منجر به پارادوکسهایی شود. پارادوکسهایی از این نوع (مانند پارادوکس اویلر) را با به کار بردن صوری بسط دوجمله‌ای برای $(۲-۱)^{-۱}$ به‌دست آورید.

(ج) با تقسیم $x-۱$ بر x و $۱-x$ بر x، و سپس جمع کردن نتایج، نتیجهٔ مضحکی را که اویلر پیدا کرد، به‌دست آورید:

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ غیرازه ۰ و ۱،} \quad ۰ = \cdots + x^۲ + x + ۱ + \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۲} + \cdots$$

(د) پارادوکس زیر را توضیح دهید. فرض کنید S مجموع سری همگرای زیر باشد

$$\frac{۱}{(۱)(۳)}+\frac{۱}{(۳)(۵)}+\frac{۱}{(۵)(۷)}+\cdots$$

دراین صورت

$$S=\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۲}{۳}\right)+\left(\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۵}\right)+\left(\frac{۳}{۵}-\frac{۴}{۷}\right)+\cdots$$

$$=۱-\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۵}+\frac{۳}{۵}-\frac{۴}{۷}+\cdots=۱,$$

زیرا همهٔ جمله‌ها بعد ازجملهٔ اول حذف می‌شوند. همچنین

$$S=\frac{\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۳}\right)}{۲}+\frac{\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\right)}{۲}+\frac{\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}\right)}{۲}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۴}+\cdots=\frac{۱}{۲},$$

چون همهٔ جمله‌ها بعد ازجملهٔ اول حذف می‌شوند. نتیجه می‌شود که $۱ = ۱/۲$.

۲۶.۱۴ برخی پارادوکسها در جبر مقدماتی

وقتی‌که نظریهٔ یك عمل ریاضی فقط به‌طور ضعیفی فهمیده شود، این خطر وجود دارد که عمل مزبور کورکورانه به‌طورصوری واحیاناً به‌روش غیرمنطقی به‌کار گرفته شود. به‌کارگیرندهٔ این‌عمل، کــه از محدودیتهای احتمالی‌عمل آگاه نیست، امکان داردکه عمل‌را در مواردی به‌کار گیردکه لزوماً قابل به‌کار بردن نیست. این اساساً کاری بودکه طی قرن بعد از ابداع حسابان درآنالیز پیش‌آمد، و نتیجه آن شدکه انبوهــی از محالات ناشی‌شوند. مطالعهٔ مسئله‌ای حاضر نشان می‌دهدکه چگونه ممکن است این محالات درجبر مقدماتی در صورت به‌کاربردن برخی اعمال جبری بدون تشخیص محــدودیتهای اعمال شده برآنها، پیش‌آیند.

(الف) پارادوکس زیر را توضیح دهید:
تردیدی نیست که

$$۳>۲.$$

ازضرب طرفین در $\log (۱/۲)$، داریم

$$۳\log\left(\frac{۱}{۲}\right)>۲\log\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

یا

$$\log\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}>\log\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲},$$

واز آنجا

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}>\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۸}>\frac{۱}{۴}.$$

(ب) پارادوکس زیررا توضیح دهید:
روشن است که $(-۱)^{۲}=(+۱)^{۲}$. با گرفتن لگاریتم از طرفین، داریم $\log(-۱)^{۲}=\log(+۱)^{۲}$. بنابراین $۲\log(-۱)=۲\log(+۱)$، یا $۱=۱-$.
(ج) اغلب دانشجویان درجبر مقدماتی قضیهٔ زیررا می‌پذیرند: «اگر دوکسر برابر صورتهای برابر داشته باشند، مخرجهای آنها باهم برابرند.» حال مسئلهٔ زیررا در نظر گیرید. می‌خواهیم معادلهٔ

$$\frac{x+۵}{x-۷}-۵=\frac{۴x-۴۰}{۱۳-x}$$

را حل کنیم. ازترکیب جملات طرف چپ، داریم

$$\frac{(x+۵)-۵(x-۷)}{x-۷}=\frac{۴x-۴۰}{۱۳-x}$$

یا

$$\frac{۴x-۴۰}{۷-x}=\frac{۴x-۴۰}{۱۳-x}.$$

بنابر قضیهٔ بالا، نتیجه می‌شود که $۱۳-x=۷-x$، یا با اضافه کردن x به طرفین، $۱۳=۷$.

کجای کار غلط است؟

(د) مغالطه‌ای را که در برهان زیر بنا براستقرای ریاضی، وجود دارد، پیدا کنید:

$P(n)$: تمام اعداد در مجموعه‌ای متشکل از n عدد، باهم برابرند.

۱. $P(۱)$ آشکارا درست است.

۲. فرض کنید k یك عدد طبیعی باشد که برای آن $P(k)$ درست است. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k، $a_{k+۱}$ مجموعهٔ دلخواهی از $k+۱$ عدد باشد. در این صورت، بنا برفرض $a_۱=a_۲=\dots=a_k$ و $a_۲=\dots=a_k=a_{k+۱}$. بنابراین $a_۱=a_۲=\dots=a_k=a_{k+۱}$، و $P(k+۱)$ درست است.

نتیجه می‌شود که $P(n)$ به‌ازای کلیهٔ اعداد طبیعی n درست است.

(ه) مغالطه‌ای راکه دربرهان‌زیر بنابراستقرای ریاضی وجود دارد، پیداکنید.

$P(n)$: اگر a و b دوعددطبیعی دلخواه باشند به‌طوری‌که $\max(a,b)=n$، آنگاه $a=b$. (تذکر: منظور از $\max(a,b)$، وقتی $a\neq b$، بزرگترین عدد دربین a و b است. منظور از $\max(a,a)$، عدد a است. مثلاً $\max(۵,۷)=۷$، $\max(۸,۲)=۸$، $\max(۴,۴)=۴$.)

۱. $P(۱)$ آشکارادرست است.

۲. فرض کنید k عددی طبیعی باشد که برای آن $P(k)$ درست است. فرض کنید a و b دو عدد طبیعی دلخواه باشند به طوری که $\max(a,b)=k+۱$، و فرض کنید $\alpha=a-۱$ و $\beta=b-۱$. در این صورت $\max(\alpha,\beta)=k$، که از آن، بنابر فرض، $\alpha=\beta$. بنابراین $a=b$ و $P(k+۱)$ درست است.

نتیجه می‌شود که $P(n)$ به‌ازای هرعدد طبیعی n درست است.

(و) سه پارادوکس زیرراکه متضمن ریشه‌های دوم هستند، توضیح دهید:

۱. چون $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$، داریم

$$\sqrt{-۱}\sqrt{-۱}=\sqrt{(-۱)(-۱)}=\sqrt{۱}=۱.$$

اما، بنابرتعریف، $\sqrt{-۱}\sqrt{-۱}=-۱$. بنابراین $-۱=+۱$.

۲. متوالیاً داریم

$$\sqrt{-۱}=\sqrt{-۱},$$

$$\sqrt{\frac{۱}{-۱}}=\sqrt{\frac{-۱}{۱}},$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$

$$\sqrt{1}\sqrt{1}=\sqrt{-1}\sqrt{-1},$$

$$1=-1.$$

۳. اتحاد زیرین‌را، که به‌ازای کلیهٔ مقادیر x و y درست است، درنظر گیرید:

$$\sqrt{x-y}=i\sqrt{y-x}.$$

باقراردادن $x=a$ و $y=b$، که درآن $a\neq b$، داریم

$$\sqrt{a-b}=i\sqrt{b-a}.$$

حال باقراردادن $x=b$ و $y=a$، داریم

$$\sqrt{b-a}=i\sqrt{a-b}.$$

ازضرب دومعادلهٔ آخر، عضو به‌عضو، داریم

$$\sqrt{a-b}\sqrt{b-a}=i^2\sqrt{b-a}\sqrt{a-b}$$

از تقسیم طرفین بر $\sqrt{a-b}\sqrt{b-a}$، سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$i^2=1 \text{ ، یا } 1=-1$$

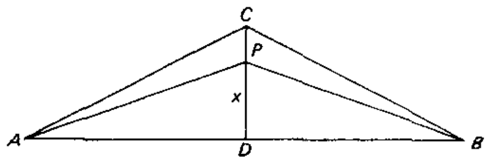
۲۷.۱۴ برخی پارادوکسها درحسابان

(الف) باروشهای استانده داریم

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2$$

اما تابع $y=1/x^2$ هیچوقت منفی نیست، بنابراین «محاسبهٔ» بالا نمی‌تواند درست‌باشد.

(ب) فرض‌کنید که e معرف خروج از مرکز بیضی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ باشد. می‌دانیم که طول r از شعاع حامل مرسوم از کانون سمت چپ بیضی به‌یك نقطهٔ $P:(x,y)$ واقع برمنحنی توسط $r=a+ex$ داده می‌شود. اما $dr/dx=e$. چون هیچ مقداری از x وجود ندارد که برای آن dr/dx صفر شود، نتیجه می‌شود که r دارای ماکزیموم یا مینیموم نیست. اما تنهامنحنی بسته‌ای که شعاع حامل آن ماکزیموم یامینیمومی ندارد، دایره است. پس نتیجه می‌شود که هر بیضی یك دایره است.



شکل ۱۲۰

(ج) مثلث متساوی‌الساقین ABC در شکل ۱۲۰ به‌قاعدهٔ $AB=۱۲$ و ارتفاع $CD=۳$ را درنظر بگیرید. مطمئناً نقطه‌ای مانند P بر CD وجود دارد به‌طوری که

$$S=PC+PA+PB$$

مینیموم است. می‌خواهیم محل این نقطه را پیدا کنیم. DP را با x نشان می‌دهیم. دراین صورت $PC=۳-x$، و $PA=PB=(x^{۲}+۳۶)^{۱/۲}$. بنابراین

$$S=۳-x+۲(x^{۲}+۳۶)^{۱/۲}$$

و

$$\frac{dS}{dx}=-۱+۲x(x^{۲}+۳۶)^{-۱/۲}.$$

باقراردادن $dS/dx=۰$، پیدامی‌کنیم، $x=۲\sqrt{۳}>۳$، و P خارج مثلث برامتداد DC قرار دارد. بنابراین هیچ نقطه‌ای برپاره خط CD که به‌ازای آن S مینیموم باشد، وجود ندارد.

(د) انتگرال زیررا درنظر گیرید

$$I=\int \sin x\cos x dx.$$

دراین صورت داریم

$$I=\int \sin x(\cos x dx)=\int \sin x d(\sin x)=\frac{\sin^{۲}x}{۲}.$$

همچنین

$$I=\int \cos x(\sin x dx)=-\int \cos x d(\cos x)=\frac{\cos^{۲}x}{۲}$$

بنابراین

$$\sin^۲ x = -\cos^۲ x,$$

یا

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۰ .$$

اما، به‌ازای هر x،

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱ .$$

(ه) چون

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-dx}{-x} ,$$

داریم $\log(x) = \log(-x)$ یا $x = -x$، واز آن $۱ = -۱$.

۲۸.۱۴ منحنی پیوسته‌ای که هیچ مماسی ندارد

می‌دانیم که یك منحنی پیوسته‌را می‌توان به‌طور هندسی به‌عنوان حد دنباله‌ای از منحنیهای کثیرالاضلاعی تعریف کرد، و این فرایند توسط عده‌ای از ریاضیدانان برای پدید آوردن منحنی پیوسته‌ای که دارای هیچ مماس یا نیم مماسی در هریك از نقاطش نیست، مورد استفاده قرار گرفته‌است. در اینجا یکی از این گونه منحنیها را که توسط ریاضیدان سوئدی هلگه فون کوخ[1] (۱۸۷۰–۱۹۲۴) ابداع شده درنظر می‌گیریم.

پاره‌خط افقی AB (نگاه کنید به شکل ۱۲۱) را توسط نقاط C و D به سه قسمت مساوی تقسیم کنید؛ برقطعهٔ وسطی، CD، مثلث متساوی‌الاضلاع CED را درقسمت بالای پاره‌خط جهت‌دار AB بسازید، و سپس پاره‌خط باز CD را پاك کنید. حال همین ساختمان را برروی هریك از پاره خطهای جهت‌دار AC، CE، ED، وDB انجام دهید. این عمل ساختمان را به‌طور نامحدود ادامه دهید. حدی که این شکل به‌آن میل می‌کند، **منحنی کوخ** نامیده می‌شود.

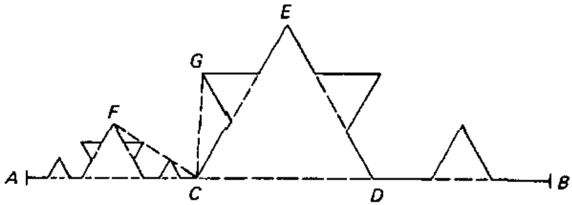
(الف) با درنظرگرفتن خط مماس بریك منحنی درنقطه‌ای مانند P ازمنحنی به‌عنوان وضعیت حدی، درصورت وجود چنین وضعیتی، ازقاطعی مار بر P ونقطه‌ای مجاور مانند Q از منحنی وقتی Q برمنحنی درجهت انطباق با P پیش می‌رود، نشان دهید که منحنی کوخ شکل ۱۲۱ دارای هیچ مماسی درنقطهٔ C نیست.

(ب) نشان دهید که طول منحنی کوخ بینهایت است.

(ج) برهرضلع یك مثلث متساوی‌الاضلاع، و درخارج آن، یك منحنی کوخ بسازید.

---

1. Helge von Koch



شکل ۱۲۱

منحنی بستهٔ حاصل گاهی **منحنی‌دانه‌برفی**[1] نامیده می‌شود. نشان دهید که منحنی دانه برفی منحنی پیوستهٔ بستهٔ ساده‌ای است به‌طول بینهایت که یک سطح متناهی را محصور می‌کند.

(د) فرض کنید T_1 یك ناحیهٔ مستوی افقی به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. T_1 را با وصل کردن اوساط اضلاع آن به‌چهار قسمت مساوی تقسیم کنید. برقطعهٔ مرکزی آن یك چهار وجهی منتظم بسازید که دربالای صفحهٔ T_1 قرار داشته باشد، قطعه مرکزی T_1 را پاك کنید؛ سطح باقیمانده را با T_2 نمایش دهید. ادامهٔ این‌روند چگونه باید صورت گیرد تا سطح حاصل، سطح پیوستهٔ بی‌مماسی درفضای سه‌بعدی باشد؟

۲۹.۱۴ اعداد جبری و متعالی

یك‌عدد مختلط **جبری** نامیده می‌شود هرگاه این عدد ریشهٔ یك چند جمله‌ای با ضرایب گویا باشد؛ در غیر این‌صورت آن را **متعالی** نامند. ف. لیندمان (۱۸۵۲–۱۹۳۹) برای اولین بار، درسال ۱۸۸۲، ثابت کرد که π متعالی است.

(الف) نشان‌دهید که هرعددگویا عددی جبری‌است و بنابراین هرعدد متعالی‌حقیقی، ناگویاست.

(ب) آیا هرعدد ناگویا یك عدد متعالی است؟

(ج) واحد انگاری i جبری است یا متعالی؟

(د) با استفاده ازقضیهٔ لیندمان، نشان دهید که $\pi/2$ متعالی است.

(ه) با استفاده از قضیهٔ لیندمان، نشان دهید که $\pi+1$ متعالی است.

(و) با استفاده از قضیهٔ لیندمان، نشان دهید که $\sqrt{\pi}$ متعالی است.

(ز) (د)، (ه)، و (و) را تعمیم دهید.

(ح) نشان دهید که هرعدد جبری، ریشهٔ یك چند جمله‌ای با ضرایب صحیح است.

---

1. snowflake curve

۳۰.۱۴ اعداد اول

(الف) به کمک غربال اراتستن، همهٔ اعداد اول زیر ۵۰۰ را پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که هر عدد صحیح مثبت مانند p اول است هر گاه دارای هیچ عامل اولی نابیشتر از بزرگترین عدد صحیحی که مربع آن از p بیشتر نیست، نباشد. این قضیه بیان می‌کند که، درفرایندحذف غربال اراتستن، می‌توانیم به‌محض اینکه به‌عدد اولی مانند $p>\sqrt{n}$ برسیم، کار را متوقف کنیم، چون حذف p به‌p اعداد بعد از p صرفاً تکرار حذفی است که قبلاً انجام شده‌است. مثلاً، در پیدا کردن اعداد اول کوچکتر از ۵۰۰، می‌توانیم بعد از خط‌زدن نوزده به‌نوزده اعداد بعد از عدد ۱۹، کار را متوقف کنیم، چون عدد اول بعدی، یعنی ۲۳، بزرگتر از $\sqrt{500}$ است.

(ج) $(A_n \log n)/n$ را به‌ازای $n = ۵۰۰$، $۱۰^۸$، و $۱۰^۹$ محاسبه کنید.

(د) ثابت کنید که، n هر اندازه بزرگ باشد، همواره می‌توان n عدد صحیح مرکب متوالی پیدا کرد.

(ه) چند زوج اعداد اول توأمان کوچکتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

(و) هر عدد صحیح زوج کوچکتر از ۱۰۰، جز ۲، را به‌صورت مجموع دو عدد اول، بیان کنید.

(ز) نشان دهید کـه از فرمولهای $۲+\sin^2(n\pi/۲)$، $۳(\cos ۲n\pi)$، و $۳(n^\circ)$ به‌ازای هر مقدار صحیح مثبت n، اعداد اولی حاصل می‌شود.

(ح) نشان دهید که $n^2+n+۱۷$ به‌ازای کلیه اعداد صحیح از ۱ تا ۱۶ اول است و اینکه $۲n^2+۲۹$ به‌ازای کلیهٔ اعداد صحیح n از ۱ تا ۲۸ اول است.

(ط) نشان دهید که ۱۱ تنها عدد اول مقلوبی دورقمی است.

(ی) هر ۱۵ عدد اول مقلوبی سه‌رقمی را پیدا کنید.

(نامتناهی بودن عدهٔ اعداد مقلوبی هنوز ثابت نشده‌است.)

عنوان مقاله

۱/۱۴ حجرهٔ پوسلیه ومتوازی‌الاضلاع پروانه‌ای هارت.

۲/۱۴ مفصلها.

۳/۱۴ اوگوستوس‌فردیناندموبیوس (۱۷۹۰–۱۸۶۸).

۴/۱۴ کارل‌فوئرباخ (۱۸۰۰–۱۸۳۴).

۵/۱۴ ویلیام کینگدم کلیفورد[1] (۱۸۴۵–۱۸۷۹)

۶/۱۴ چارلز لـوتویج داجسن[2] (۱۸۳۲–۱۸۹۸).

۷/۱۴ سونیاکووالفسکی (۱۸۵۰–۱۸۹۱).

۸/۱۴ نظریهٔ قطب وقطبی واصل دوگان.

---

1. William Kingdom Clifford
2. Charles Lutwidge Dodgson

۹/۱۴ یك مجموعهٔ اصول موضوعهٔ خود ـ دوگان برای هندسهٔ تصویری مسطحه.
۱۰/۱۴ یك اصل دوگان درمطالعهٔ مثلثهای کروی.
۱۱/۱۴ مسئلهٔ مالفاتی.
۱۲/۱۴ ابرمکعب.
۱۳/۱۴ هندسهٔ ذاتی رویه‌ها درمقابل هندسهٔ عارضی آنها.
۱۴/۱۴ سالهای زندگی کلاین در رأس بخش ریاضی دانشگاه گوتینگن.
۱۵/۱۴ هندسه به‌عنوان نظریهٔ پایاها وجبر به‌عنوان نظریهٔ ساختارها.
۱۶/۱۴ خطابهٔ امتحانی ریمان در سال ۱۸۵۴.
۱۷/۱۴ پوانکاره به‌عنوان نویسنده‌ای عامه‌پسند.
۱۸/۱۴ یك هندسهٔ تحلیلی بدون دستگاه مختصات یاچارچوب مرجع.
۱۹/۱۴ اهمیت قضایای وجودی.
۲۰/۱۴ پیشرفتهای آنالیز درقرن نوزدهم براثر عوامل درونی در ریاضیات.
۲۱/۱۴ برخی‌از ریاضیدانان قرن نوزدهم‌که هم در تدریس و هم درتحقیق نخبه بودند.
۲۲/۱۴ چرا تعداد زنان ریاضیدان برجسته، محدود است.

کتابنامه

ALTSHILLER-COURT, NATHAN, *College Geometry, An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle.* 2nd ed., revised and enlarged, containing historical and bibliographical notes. New York: Barnes & Noble, 1952.

———, *Modern Pure Solid Geometry.* 2nd ed., containing historical and bibliographical notes. New York: Chelsea, 1964.

BARON, MARGARET E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus.* Oxford: Pergamon Press, 1969.

BELL, E. T., *Men of Mathematics.* New York: Simon and Schuster, 1937.

BOYER, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover, 1949.

———, *History of Analytic Geometry.* New York: *Scripta Mathematica,* 1956.

BURRILL, C. W., *Foundations of Real Numbers.* New York: McGraw-Hill, 1967.

COHEN, L. W., and GERTRUDE EHRLICH, *The Structure of the Real Number System.* Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1963.

COOLIDGE, J. L., *A Treatise on the Circle and the Sphere.* Oxford: The Clarendon Press, 1916.

———, *A History of Geometrical Methods.* Oxford: The Clarendon Press, 1940.

DEDEKIND, RICHARD, *Essays on the Theory of Numbers.* Translated by W. W. Beman. Chicago: Open Court, 1901; New York: Dover, 1963.

DICKSON, L. E., *History of the Theory of Numbers.* 3 vols. New York: Chelsea, 1962.

———, "Construction with Ruler and Compasses," in *Monographs on Topics of Modern Mathematics,* edited by J. W. A. Young. New York: Longmans, Green and Company, 1924.

DODGE, C. W., *Numbers and Mathematics.* 2d ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1975.

EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry.* 2 vols. Boston: Allyn and Bacon, 1972 and 1965.

———, and C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* Rev. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

GRATTAN-GUINESS, IVOR, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann.* Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1970.

HANCOCK, HARRIS, *Foundations of the Theory of Algebraic Numbers.* 2 vols. New York: Dover Publications, 1931 and 1932.

———, *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*. 2 vols. New York: Dover, 1939.
HUDSON, H. P., *Ruler and Compasses*. Reprinted in *Squaring the Circle, and Other Monographs*. New York: Chelsea, 1953.
KAZARINOFF, N. C., *Ruler and the Round*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1970.
KEMPE, A. B., *How to Draw a Straight Line; A Lecture on Linkages*. Reprinted in *Squaring the Circle, and Other Monographs*. New York: Chelsea, 1953.
KLEIN, FELIX, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. 2 vols. Translated by E. R. Hedrick and C. A. Noble. New York: Dover, 1939 and 1945.
———, *Famous Problems of Elementary Geometry*. Translated by W. W. Beman and D. E. Smith. Reprinted in *Famous Problems, and Other Monographs*. New York: Chelsea, 1955.
KOSTOVKII, A. N., *Geometrical Constructions Using Compasses Only*. Translated by Halina Moss. New York: Blaisdell, 1961.
LANDAU, EDMUND, *Foundations of Analysis*. Translated by F. Steinhardt. New York: Chelsea, 1951.
LANG, SERGE, *Algebraic Numbers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
MESCHOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. San Francisco: Holden-Day, 1964.
———, *Evolution of Mathematical Thought*. San Francisco: Holden-Day, 1965.
MUIR, JANE, *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd, Mead, 1961.
NIVEN, IVAN, *Irrational Numbers*, Carus Mathematical Monograph No. 11. New York: John Wiley, 1956.
POINCARÉ, HENRI, *The Foundations of Science*. Translated by G. B. Halsted. Lancaster, Pa.: The Science Press, 1946.
POLLARD, HARRY, *The Theory of Algebraic Numbers*, Carus Mathematical Monograph No. 9. New York: John Wiley, 1950.
PRASAD, GANESH, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century*. 2 vols. Benares: Benares Mathematical Society, 1933 and 1934.
SIEGEL, C. L., *Transcendental Numbers*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1949.
SMITH, D. E., *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.
SMOGORZHEVSKII, A. S., *The Ruler in Geometrical Construction*. Translated by Halina Moss. New York: Blaisdell, 1961.
STEINER, JACOB, *Geometrical Constructions with a Ruler*. Translated by M. E. Stark, ed. by R. C. Archibald. New York: *Scripta Mathematica*, 1950.
THURSTON, H. A., *The Number-System*. New York: Interscience, 1956.
TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.
WAISMANN, FRIEDRICH, *Introduction to Mathematical Thinking, The Formation of Concepts in Modern Mathematics*. Translated by T. J. Benac. New York: Frederick Ungar, 1951.
YATES, R. C., *Geometrical Tools*. St. Louis: Educational Publishers, 1949.
———, *The Trisection Problem*. Ann Arbor, Mich.: Edward Bros., 1947.
YOUNG, J. W. A., ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. New York: Dover, 1955.

۱۵

تجرید و گذر به قرن بیستم

۱۵-۱ نقایص منطقی «اصول» اقلیدس

قسمت اعظم تلاشهای ریاضی قرن بیستم، صرف بررسی مبانی منطقی وساختار ریاضیات شده‌است. این کار به‌نوبهٔ‌خود به‌پدیدارشدن مبحث **اصل موضوعیها**، یامطالعهٔ مجموعه‌های اصول موضوعه و ویژگیهای آنها منجر شده است. بسیاری از مفاهیم اساسی ریاضیات دستخوش تکامل و تعمیم قابل ملاحظه‌ای شده‌اند، موضوعاتی کاملاً بنیادی مانند نظریهٔ مجموعه‌ها، جبرمجرد، وتوپولوژی به‌نحو گسترده‌ای بسط یافته‌اند. نظریهٔ عمومی‌مجموعه‌ها به‌پارادوکسهای ریشه‌ای‌ومضطرب کننده‌منجر گردیدکه‌می‌بایستی برای آنهافوراً چاره‌اندیشی شود. خود منطق، که به‌مثابهٔ ابزاری برای به‌دست‌آوردن نتایجی از فرضهای پذیرفته شده در ریاضیات به‌کار گرفته می‌شد، مورد علاقه قرار گرفت، ومنطق ریاضی پا به‌عرصهٔ وجود نهاد. بستگیهای بین منطق وفلسفه به‌مکاتب مهم و گوناگون فلسفهٔ ریاضی‌کنونی منجرشد. و درهمین حال، انقلاب درکامپیوترها درقرن بیستم نیز تأثیرعمیقی در برخی از شاخه‌های ریاضیات برجای نهاد. درمجموع، دیدگاه قدیمی «درخت ریاضیات» منسوخ شد. عجیب اینکه اغلب‌این‌ملاحظات نوین، نظیرقسمتهایی از ریاضیات، ریشه درآثار یونانیان‌باستان، و به‌ویژه، درکتاب عظیم اصول اقلیدس‌دارند.

راستی چقدر خوب می‌شد اگر اصول اقلیدس، این تلاش دیرین وعظیم در روش ارائهٔ اصل موضوعی، عاری از ایرادهای منطقی می‌بود. در پرتو نقادیهای ادوار بعدی نقایص بسیاری در ساختار منطقی این اثر آشکار شده است. شاید بزرگترین این نقایص، فرضهای تلویحی متعددی هستندکه اقلیدس می‌پذیرد بی‌آنکه اصول موضوعهٔ وی آنها را

مجاز شمرده باشد. مثلاً، گرچه اصل موضوع P۲ حاکی از آن است که یك خط مستقیم را می‌توان به‌طور نامحدود امتداد داد*، این اصل لزوماً ایجاب نمی‌کند که خط مستقیم نامتناهی باشد وبلکه صرفاً بی‌انتها یا بی‌مرز است. قوسی از یك دایرهٔ عظیمه راکه دونقطه ازکره را به‌هم وصل می‌کند، می‌توان درطول دایرهٔ عظیمه به‌طور نامحدود امتداد داد و با این کار قوس امتداد داده‌شده را بدون انتها کرد، بی‌آنکه این‌قوس نامتناهی باشد. ریمان، ریاضیدان بزرگ آلمانی، درخطابهٔ امتحانی مشهورش به‌سال ۱۸۵۴، تحت عنوان فرضهایی که اساس هندسه برآنها مبتنی است[1]، بین نامحدود بودن و نامتناهی بودن خطوط مستقیم تمیز قائل شد. موارد متعددی، مثلا در اثبات قضیهٔ ۱۶ I، وجود دارند که اقلیدس در آنها نامتناهی بودن خطوط مستقیم را پذیرفته است. باز، مثلاً دراثبات قضیهٔ ۲۱ I، تلویحاً فرض کرده‌است که وقتی خط مستقیمی از رأس مثلثی داخل آن می‌شود، در صورتی که به‌حدکافی امتداد داده شود، ضلع‌مقابل را قطع‌می‌کند. موریتس پاش[2] (۱۸۴۳ ــ ۱۹۳۰) لزوم اصل موضوعی را که ناظر برچنین وضعیتی باشد گوشزد کرده است. از غفلتهای دیگرهندسهٔ اقلیدس، فرض وجود نقاط تلاقی بعضی خطوط و دوایر است. مثلاً، در قضیهٔ ۱ I فرض‌می‌شود دوایری‌که مراکزشان دوسریك پاره‌خط وشعاع مشترك آنها همین‌پاره‌خط باشد یکدیگر را قطع می کنند، و مثلاً به‌نحوی داخل یکدیگرنمی‌شوندکه نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. برای تضمین وجود چنین نقطهٔ تلاقیی، نوعی اصل‌موضوع پیوستگی، نظیر اصلی‌که بعدها توسط ر. ددکیند مطرح شد، لازم‌است. همچنین، اصل موضوع P۱ وجود حداقل یك خط مستقیم را که نقاط A و B را به‌هم وصل می‌کند، تضمین می‌کند ولی‌این اطمینان را به‌ما نمی‌دهدکه تعداد این خطوط واصل بیش از یکی نیست. اقلیدس بارها فرض‌کرده است که خط منحصر به‌فردی وجود داردکه دونقطه‌را به‌هم‌وصل‌می‌کند. می‌توان براصل برهمنهی نیزکه توسط اقلیدس، با بی‌میلی‌آشکار، برای اثبات برخی قضایای‌اولیهٔ همنهشتی به‌کار گرفته شده‌است، ایرادهایی واردکرد، گرچه اصل متعارفی A۴ تا حدودی پاسخگوی این ایرادات است.

وجود خدشه در اثر اقلیدس‌تنها به‌خاطر فرضهای تلویحی متعدد نیست، بلکه برخی از تعاریف مقدماتی نیز درمعرض‌انتقادقراردارند. اقلیدس‌سعی کرده است‌کلیهٔ اصطلاحات فنی‌هندسهٔ خودرا تعریف‌نماید. ولی در واقع تعریف صریح همهٔ اصطلاحات فنی‌یك‌مبحث همانقدر غیرممکن است‌که اثبات کلیهٔ احکام آن؛ زیرا یك اصطلاح فنی را بایدبه‌کمك سایر اصطلاحات فنی تعریف‌کرد، و این اصطلاحات را توسط اصطلاحات دیگر، و قس‌علی‌هذا. به‌منظور رفع این مشکل و برای‌احتراز از دوری‌بودن درتعریف اصطلاح x به‌کمك اصطلاح y، وسپس تعریف اصطلاح y به‌کمك اصطلاح x، مجبوریم‌که در مقدمهٔ مبحث مجموعه‌ای از اصطلاحات اولیه، یا اساسی، را درنظر بگیریم ومعانی‌آنها را مورد

---

* بیان اصول متعارفی واصول موضوعهٔ اقلیدس را دربخش ۵ـ۷ ببینید.

1. Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen
2. Moritz Pasch

پرسش قرارندهیم. تمام اصطلاحات فنی دیگر مبحث را مآلاً باید به کمك این اصطلاحات اولیه تعریف کرد. در این صورت، در تحلیل نهایی، اصول موضوعهٔ مبحث، گزاره‌های پذیرفته‌شده‌ای دربارهٔ اصطلاحات اولیه‌اند. از این دیدگاه، می‌توان اصطلاحات اولیه را به‌طور ضمنی تعریف‌شده تلقی کرد، بدین معنی که این اصطلاحات چیزها یا مفاهیمی هستند که در اصول موضوعه صدق می‌کنند، و این تعریف ضمنی تنها تعریفی است که به اصطلاحات فنی می‌توان داد.

اقلیدس در بسط هندسه، مثلاً اصطلاحات نقطه و خط را می‌توانست به‌خوبی در داخل مجموعه‌ای از اصطلاحات اولیهٔ این مبحث قرار دهد. به هر صورت می‌توان به‌سادگی ملاحظه کرد که، تعریف اقلیدس از یك نقطه به صورت «چیزی که جزء ندارد» و تعریف خط به‌عنوان «طول بدون پهنا» دوری‌اند و بدین لحاظ از نقطه نظر منطقی نامناسب. یکی از وجوه تمایز بین برداشت مکتب یونانی و برداشت نوین از روش اصل موضوعی در همین مورد اصطلاحات اولیه است؛ در برداشت مکتب یونانی فهرستی از اصطلاحات اولیه داده نشده است. یونانیان را می‌توان از این جهت معذور دانست که برای آنها هندسه تنها یك مطالعهٔ مجرد نبود و بلکه تلاش در جهت تحلیل منطقی فضای مادی آرمانی بود. نقاط و خطوط، از نظر یونانیان، ذره‌های بسیار کوچك و تارهای بسیار باریك آرمانی بودند. تلاش اقلیدس بیان این آرمانی‌سازی در برخی از تعاریف اولیه‌اش بود. اختلافهای دیگری هم بین دیدگاههای یونانی و دیدگاههای نوین نسبت به روش اصل موضوعی وجود دارد.

تنها در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، بعد از آنکه مبانی هندسه موضوع مطالعهٔ همه‌جانبه‌ای قرار گرفت، بود که مجموعه‌های اصول موضوعهٔ رضایتبخشی برای هندسهٔ اقلیدسی مسطحه و فضایی تهیه شد. در میان این گونه مجموعه‌ها برجسته‌ترینشان به افراد زیر تعلق دارند: م. پاش، ج. پئانو، م. پیری[1]، د. هیلبرت، او. وبلن، ا. و. هانتینگتون[2]، گ. د. بیرکهوف[3]، و ل. م. بلومنتال[4]. مجموعهٔ هیلبرت شامل ۲۱ اصل موضوع است، و اصطلاحات اولیهٔ آن نقطه، خط‌مستقیم، صفحه، بر، همنهشتی، و بین هستند؛ مجموعهٔ پیری شامل ۲۰ اصل موضوع است و اصطلاحات اولیهٔ آن نقطه و حرکت هستند؛ مجموعهٔ وبلن شامل ۱۶ اصل موضوع است و اصطلاحات اولیهٔ آن نقطه و ترتیب هستند؛ مجموعهٔ هانتینگتون شامل ۲۳ اصل موضوع است و اصطلاحات اولیهٔ آن کره و شمول هستند.

ازحدود اواسط قرن بیستم به بعد، عده‌ای از مؤلفین و گروههای نویسندگان به‌کار به‌وجود آوردن مطالب متون درسی کلاسهای هندسهٔ دبیرستانی دست زده‌اند که در آنها هندسه برمبنای اصل‌موضوعی به‌طور دقیق بسط یافته است. در این تلاشها، یا مجموعهٔ اصول موضوعهٔ هیلبرت یا مجموعهٔ اصول موضوعهٔ بیرکهوف (اغلب با برخی تغییرات همراه یا بدون اضافاتی بر آنها) پذیرفته‌شده‌اند.

---

1. M. Pieri   2. E.V. Huntington   3. G.D. Birkhoff
4. L.M. Blumenthal

۲-۱۵ مبحث اصل موضوعیها*

عمدتاً پیجوییهای اخیر برای یافتن مجموعهٔ اصول موضوعهٔ قابل قبول از لحاظ منطق برای هندسهٔ اقلیدسی، و در پرتو کشف هندسه‌های نااقلیدسیی که همانقدر سازگاری داشتند، بود که به‌پدید آمدن مبحث اصل موضوعیها ، یا مطالعهٔ مجموعه‌های اصول موضوعه و ویژگیهای آنها منجر گردید.

هنگام کار با یك دستگاه قیاسی، یکی از گرفتاریهای موجود، انس بیش از حد با موضوعات این دستگاه است. دلیل اغلب معایب اصول اقلیدس همین گرفتاری است. برای گریز از این گرفتاری، توصیه می‌شود که به‌جای اصطلاحات اولیه یا تعریف نشدهٔ مبحث، علامتهایی نظیر x و y و z وغیره گذاشته شود. در این‌صورت اصول موضوعهٔ مبحث به‌صورت گزاره‌هایی در بارهٔ این علامتها درمی آیند و بنابراین عاری ازمعانی ملموس می‌شوند، لذا نتایج حاصله بریك مبنای کاملاً منطقی، بدون دخالت عوامل شهودی استوار می‌شوند. مبحث اصل موضوعیها خواص چنین‌مجموعه‌هایی از اصول موضوعه را بررسی می کند.

آشکار است که نمی‌توان هر مجموعه‌ای از گزاره‌ها دربارهٔ اصطلاحات اولیه را به‌عنوان مجموعهٔ‌اصول‌موضوعه اختیار کرد. مجموعهٔ‌اصول موضوعه باید مشروط به‌بعضی از ویژگیها و مقید به برخی دیگر باشند. مثلاً ضروری است‌که اصول موضوعه **سازگار** باشند ــ یعنی هیچ تناقضی را نتوان ازآنها نتیجه‌گرفت.

موفقترین‌روش که‌تاکنون برای‌اثبات سازگاری یك‌مجموعهٔ‌اصول‌موضوعه‌ابداع‌شده است، روش مدلهاست. یك‌مدل برای‌یك مجموعه ازاصول موضوعه هنگامی به‌دست می‌آید که بتوانیم به اصطلاحات اولیهٔ این مجموعه معانیی نسبت دهیم‌که اصول موضوعه را به گزاره‌های‌درستی دربارهٔ مفاهیم نسبت داده شده تبدیل‌کنند. دو نوع مدل وجود دارد ــ **مدلهای ملموس و مدلهای آرمانی**. یك مدل را زمانی ملموس می‌نامند‌که معانی منسوب به اصطلاحات اولیه اشیاء و روابطی مأخوذ از دنیای واقعی باشند، درحالی‌که مدل را آرمانی نامند هرگاه معانی منسوب به اصطلاحات اولیه، چیزها و روابطی مأخوذ از یك مبحث اصل موضوعی دیگری باشند.

وقتی‌یك مدل ملموس ارائه می‌شود، حس‌می‌کنیم‌که سازگاری مطلقی برای‌دستگاه اصل‌موضوعی‌خود به‌وجودآورده‌ایم، زیرا اگرقضایای متناقضی‌از اصول‌موضوعهٔ ما‌نتیجه شوند، آنگاه‌گزاره‌های متناقض متناظری، درمدل ملموس، وجود خواهد داشت. اما همه براین باوریم‌که تناقض در دنیای واقعی غیر ممکن است.

پی‌ریزی یك مدل ملموس برای یك‌مجموعه اصول موضوعهٔ مفروض همواره مقدور نیست. مثلاً اگرمجموعهٔ اصول موضوعه شامل عدهٔ بینهایتی از عناصر اولیه باشد، مطمئناً یك مدل‌ملموس غیرممکن خواهد بود. زیرا دنیای واقعی‌شامل عدهٔ بینهایتی‌ازاشیاءنیست.

---

* برای بررسی کاملتر مبحث اصل موضوعیها نگاه‌کنید، مثلا به‌فصل ۶ کتاب ایوز و نیوسام،
An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, rev. ed .,Holt, Rinehart and Winston, 1965.

درچنین‌مواردی سعی می‌کنیم یك مدل آرمانی بدین ترتیب پی‌ریزی کنیم که به‌اصطلاحات اولیهٔ دستگاه اصل موضوعیی مانند A، مفاهیم دستگاه اصل موضوعی دیگری مانند B را نسبت دهیم به‌طوری‌که تعابیر دستگاه اصل موضوعی A، پیامدهای منطقی دستگاه اصل موضوعی B باشند. ولی اکنون نمی‌توان مدعی شد که آزمون سازگاری مجموعهٔ اصل موضوعی A یك آزمون مطلق است و بلکه این آزمون تنها یك آزمون نسبی است. تنها می‌توان گفت که مجموعهٔ اصل‌موضوعی A درصورت سازگاربودن مجموعهٔ اصل‌موضوعی B سازگار است، وما سازگار بودن دستگاه A را به‌سازگاربودن دستگاه دیگری مانند B تحویل کرده‌ایم.

سازگاربودن‌احتمالی یك‌مجموعهٔ اصل‌موضوعی درجایی‌که قادر به‌اثبات این‌حقیقت باشیم، یکی از سؤالات گشودهٔ جالب درمبحث اصل موضوعیهاست. مطالعات راجع به سازگاری، منجر به‌نتایج ناراحت‌کننده وبحث‌انگیز برای کسانی شده است‌که به‌مبانی دانش ریاضی‌می‌پردازند. اثبات سازگاری به کمك روش‌مدلها یك پویش‌غیرمستقیم‌است. قابل تصور است‌که سازگاری مطلق‌می‌تواند به‌روش مستقیمی‌اثبات شودکه می‌کوشدنشان دهد باپیروی ازقواعد استنتاج نمی‌توان از‌یك مجموعهٔ اصل موضوعی به‌دوقضیه رسیدکه ناقض یکدیگر باشند. درسالهای اخیر، هیلبرت چنین‌روش مستقیمی‌را، باموفقیت‌محدودی مورد بررسی قرار داده‌است.

یك مجموعهٔ اصول‌موضوعه را مستقل می‌خوانیم‌هرگاه هیچ‌یك از اصول موضوعهٔ آن مستلزم اصل‌موضوع‌دیگری از این مجموعه نباشد. برای‌اینکه نشان دهیم‌اصل‌موضوع خاصی از یك مجموعه، مستقل است باید تعبیری از اصطلاحات اولیه به‌عمل آوریم که اصل موضوع مورد نظر را باطل ولی صحت اصول موضوعهٔ دیگر را تأییدنماید. در صورتی‌که قادر به یافتن چنین تعبیری باشیم، آنگاه اصل موضوع مورد بحث نمی‌تواند نتیجهٔ منطقی دیگر اصول موضوعه باشد، زیرا اگر این اصل موضوع پیامد منطقی سایر اصول موضوعه باشد، دراین‌صورت تعبیری‌که کلیهٔ اصول‌موضوعهٔ دیگر را به‌گزاره‌های درستی تبدیل می‌کند، این اصل موضوع راهم به‌یك گزارهٔ صحیح تبدیل خواهد کرد. آزمون استقلال مجموعهٔ کاملی از اصول موضوعه، براین منوال، آشکارا کاری طولانی خواهد بود ،زیرا اگر مجموعهٔ ما، n اصل موضوع داشته باشد ، n آزمون مجزا (یکی برای هراصل موضوع) را باید فرمولبندی کرد . موضوع استقلال در ارتباط باهندسهٔ نااقلیدسی اهمیت زیادی داشته‌است.

امکان‌داردکه مجموعهٔ مطالب‌مفروض‌از بیش‌از یك‌مجموعهٔ‌اصول‌موضوعه‌قابل‌استنتاج باشد. کلاً آنچه ازدومجموعهٔ اصول موضوعهٔ $P^{(1)}$ و $P^{(2)}$، برای اینکه به‌مبحث واحدی منجرشوند، انتظارداریم، آن‌است‌که‌اصطلاحات‌اولیه‌درهریك‌قابل‌تعریف به‌کمك‌اصطلاحات اولیهٔ دیگر، واصول‌موضوعهٔ هریك‌قابل‌استنتاج ازاصول‌موضوعهٔ دیگری‌باشد. دومجموعه از چنین مجموعه‌های اصل موضوعی را هم‌ارز نامند . مفهوم مجموعه‌های اصول موضوعهٔ هم‌ارز در تلاش برای یافتن جانشینهایی برای اصل موضوع توازی پدیدار شده‌است.

علاوه برسازگاری، استقلال، وهم ارزی، ویژگیهای دیگری از مجموعه‌های اصل

موضوعی نیز درمبحث اصل موضوعیها مورد مطالعه قرار می‌گیرند. این ویژگیها ارتباط نزدیکی بامنطق علامتی و فلسفهٔ ریاضیات‌دارند. دراین‌زمینه افراد بسیاری‌کارکرده وهنوز هم درحال‌کارند. برجسته‌ترین آنها هیلبرت، پئانو، پیری، وبلن، هانتینگتون، راسل، وایتهد، گودل، وبسیاری دیگرهستند.

۱۵-۳ تکامل برخی مفاهیم اساسی

درپی ایجاد نظریهٔ مجموعه‌ها توسط گئورگ کانتور در اواخر قرن نوزدهم، علاقه به‌این نظریه به‌سرعت گسترش یافت تا آنکه امروزه عملاً هر زمینه‌ای در ریاضیات تأثیر آن‌را لمس کرده است. به‌عنوان مثال، مفهوم فضا و هندسهٔ یك فضا به‌کمك‌نظریهٔ مجموعه‌ها دچار تغییرات کاملاً بنیادی شده است. همچنین، مفاهیم اساسی درآنالیز، نظیرمفهوم حد، تابع، پیوستگی، مشتق، وانتگرال، اکنون به‌مناسبترین صورت درقالب مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها توصیف می‌شوند. ولی، مهمتر ازهمه ایجاد فرصت برای‌مباحثی از ریاضیات جدید بوده است که پنجاه سال پیش قابل تصور نبودند. مثلاً، به موازات درك جدید از روشهای اصل موضوعی در ریاضیات، فضاهای‌مجرد پدیدآمده‌اند، نظریه‌های عمومی بعد واندازه خلق‌شده‌اند، وشاخه‌ای از ریاضیات که توپولوژی نام دارد، دستخوش رشدقابل‌ملاحظه‌ای شده است. مختصرآنکه، تحت تأثیر نظریهٔ مجموعه‌ها، وحدت قابل ذکری در ریاضیات سنتی پدید آمده است، و ریاضیات جدید باسرعت انفجارآمیزی خلق گردیده است.

برای‌آنکه تکامل تاریخی مفاهیم اساسی ریاضی را نشان دهیم، ابتدا مفاهیم فضا وهندسهٔ یك فضارا بررسی می‌کنیم. این مفاهیم نسبت به‌دورهٔ یونان‌باستان، دچار تغییرات شدیدی شده‌است. ازنظر یونانیان تنها‌یك‌فضا ویك‌هندسه وجود داشت؛ اینها مفاهیم‌مجرد بودند. تلقی آنها ازفضا نه به‌صورت مجموعه‌ای ازنقاط، بلکه به‌عنوان یك‌حوزه یا مکان هندسی بودکه در آن اشیاء می‌توانستند آزادانه پیرامون خود حرکت‌کنند و با یکدیگر مقایسه‌شوند. از این دیدگاه رابطهٔ اساسی هندسه، رابطهٔ همنهشتی یا برهمنهی بود.

با بسط هندسهٔ تحلیلی درقرن هفدهم، فضا به‌عنوان مجموعه‌ای ازنقاط تلقی‌شد، و با به‌وجودآمدن‌هندسه‌های نااقلیدسی کلاسیك درقرن هفدهم، ریاضیدانان این‌وضع‌راکه‌بیش ازیك هندسه وجود دارد، پذیرفتند. اما فضا هنوزهم به‌عنوان یك مکان هندسی تلقی‌می‌شد که درآن اشکال می‌توانستند بایکدیگر مقایسه شوند. موضوع اساسی، موضوع یك گروه از تبدیلهای همنهشت فضا به خودش شد و یك هندسه به صورت‌مطالعهٔ آن خواص از پیکربندیهای نقاط تلقی‌شدکه وقتی فضای پیرامون تحت‌تأثیر این‌تبدیلات قرارمی‌گیرند، بدون تغییر باقی می‌مانند. قبلاً، دربخش ۱۴-۸ دیده‌ایم که چگونه این نقطه نظر توسط فلیکس کلاین دربرنامهٔ ارلانگر او به‌سال ۱۸۷۲، بسط یافته است. دربرنامهٔ ارلانگر، یك هندسه به‌عنوان نظریهٔ پایاهای‌یك‌گروه تبدیل تعریف می‌شود. این‌مفهوم کلیهٔ مفاهیم پیشین هندسه را ترکیب کرده و آنها را تعمیم داد، و رده‌بندی بی‌نظیری از تعداد زیادی از هندسه‌های مهم فراهم کرد.

در پایان قرن نوزدهم، با به‌وجود آمدن این نظر که هرشاخه از ریاضیات مجموعه‌ای از قضایای مجردی است که ازیك مجموعهٔ اصول موضوعه استنتاج شده‌باشند، هر هندسه، ازاین دیدگاه، به‌صورت شاخهٔ خاصی‌از ریاضیات درآمد. مجموعه‌های اصول موضوعه برای‌انواع متعددی ازهندسه‌ها مورد مطالعه قرارگرفتند، ولی برنامهٔ ارلانگر به‌هیچ‌عنوان دچار آشفتگی نشد، زیرا یك هندسه‌را می‌شد به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات کـه نظریهٔ پایاهای یك‌گروه تبدیلات هستند، تلقی‌کرد.

مع‌هذا، درسال ۱۹۰۶، موریس فرشه (۱۸۷۸ – ۱۹۷۳) مطالعهٔ فضاهای مجردرا آغازکرد، (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۵.۱۵) و هندسه‌های بسیارکلی به‌وجود آمدند که دیگر با رده‌بندی شسته و رفتهٔ کلاینی‌جور درنمی‌آمدند. یـك فضا صرفاً به صورت مجموعـه‌ای از اشیاء ، کـه معمولاً نقطه نامیده مـی‌شوند، همراه با مجموعه‌ای از روابط درآمدکه متضمن این‌نقاط بودند، و یك هندسه صرفاً به‌صورت نظریهٔ چنان‌فضایی درآمد. مجموعهٔ روابط حاکم براین‌نقاط، **ساختار** فضا نامیده می‌شوند، و این ساختار ممکن است درقالب نظریهٔ پایاهای یك گروه تبدیل قابل توضیح باشد یا نباشد. بدین‌ترتیب هندسه ، ازطریق نظریهٔ مجموعه‌ها ، تعمیم بیشتری پیدا کـرد. گرچه فضاهای مجرد به‌طور صوری اولین‌بار درسال ۱۹۰۶ مطرح شدند ، ایدهٔ یك هندسه به‌عنوان مطالعهٔ مجموعه‌ای ازنقاط با ساختاری برنهاده برآن، در واقع قبلاً در اظهارات ریمان درخطابهٔ پرارزشش به‌سال ۱۸۵۴ مندرج بود. جالب است که برخی از این هندسه‌های جدید کاربردهای مفیدی در نظریهٔ نسبیت اینشتین، و در دیگر مباحث فیزیك نوین یافته‌اند.

مفهوم تابع، نظیرمفاهیم‌فضا وهندسه، دستخوش‌تکامل آشکاری‌شده‌است، وهردانشجوی ریاضیات درخلال‌ادامهٔ مطالعه‌اش‌از دروس مقدماتی‌دبیرستان به‌دروس پیشرفته‌تروپیچیده‌تر بالاتر ازلیسانس باترمیمهای گوناگون این تکامل مواجه می‌شود .

تاریخ اصطلاح تابع مثال جالب دیگری ازگرایش ریاضیدانان به‌تعمیم وگسترش مفاهیم مورد نظرشان است. واژهٔ تابع، به‌صورت معادل لاتین آن، ظاهراً درسال ۱۶۹۴ توسط لایبنیتز مطرح شده است و بـدواً بـه عنوان اصطلاحی بـرای نشان دادن هـرکمیت مرتبط با یك منحنی ، نظیر مختصات یك نقطه برمنحنی، شیب منحنی، شعاع انحنای منحنی وغیره به‌کاررفته است. یوهان‌برنولی، پیش ازسال ۱۷۱۸، یك‌تابع را به‌عنوان‌هرعبارتی متشکل‌ازیك متغیر و برخی‌ثابتها درنظرمی‌گرفت، و اویلر،کمی بعدازآن،تابع‌را هرمعادله یافرمولی تلقی می‌کردکه متضمن متغیرها وثابتها باشد. فکر اخیر تصوری ازیك‌تابع‌است که در ذهن دانشجویان دروس مقدماتی ریاضیات به‌وجود می‌آید. مفهوم اویلر بدون‌تغییر باقی‌ماندتاآنکه ژوزف فوریه (۱۷۶۸–۱۸۳۰)، درتحقیقات خود دربارهٔ انتقال‌حرارت، به‌بررسی به‌اصطلاح سریهای مثلثاتی‌کشانده شد. نوع رابطهٔ بین متغیرهاکه در این سریها مطرح است، کلیتر از روابطی است‌که قبلاً مطالعه شده بودند ، و در تـلاش بـرای تهیهٔ تعریفی ازیك تابع که‌گنجایش‌کافی برای دربرگرفتن چنان روابطی داشته باشد ، لـوژون دیریکله (۱۸۰۵ – ۱۸۵۹) به‌فرمولبندی زیررسید: یك متغیر نمادی است که هریك از اعضای مجموعه‌ای از اعداد را نشان می‌دهد؛ اگر دومتغیر x وy طوری به‌هم مربوط باشند

که وقتی مقداری به x اختصاص یابد، خود به‌خود مقداری هم، بنا برقاعده یا تناظری، به y اختصاص یابد، آنگاه گوییم که y **یك تابع** (یك مقداری) از x است. متغیر x، که به‌آن مقداری به‌دلخواه نسبت داده می‌شود. **متغیر مستقل** نامیده می‌شود، ومتغیر y، که مقادیر آن به‌مقادیر x بستگی‌دارند، **متغیر وابسته** نامیده می‌شود. مقادیر قابل قبولی که x می‌پذیرد، **حوزهٔ تعریف** تابع، ومقادیری که توسط y اختیار می‌شود، **دامنهٔ مقادیر** تابع را تشکیل می‌دهند.

دانشجوی ریاضی معمولاً با تعریف دیریکله‌ای تابع در درس مقدماتی حسابان برمی‌خورد. این تعریف بسیار بسیط است واز آن‌چیزی راجع به‌امکان بیان رابطهٔ بین x و y توسط نوعی عبارت تحلیلی بر نمی‌آید؛ این تعریف بر ایدهٔ اساسی رابطه‌ای بین‌دومجموعه از اعداد تأکید می‌کند.

نظریهٔ مجموعه‌ها به‌مفهوم تابع وسعتی بخشیده است تا شامل روابطی بین‌هر دومجموعه از عناصر، خواه این عناصر عدد باشند یا چیز دیگر، بشود. بدین ترتیب، در نظریهٔ مجموعه‌ها، **یك تابع** مانند f به‌عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب عناصر تعریف می‌شود به‌طوری که اگر $(a_1,b_1)\in f$، $(a_2, b_2)\in f$، و $a_1=a_2$، آنگاه $b_1=b_2$. مجموعهٔ A ازهمهٔ عناصر اول زوج مرتب **حوزهٔ (تعریف)** تابع نامیده می‌شود، ومجموعهٔ B ازهمهٔ عناصر دوم زوج مرتب **دامنهٔ (مقادیر)** تابع نام دارد. بدین ترتیب یك رابطهٔ تابعی چیزی جز نوعی زیر-مجموعهٔ حاصلضرب دکارتی مجموعهٔ $A\times B$ نیست. **یك تناظر یك به یك**، به‌نوبهٔ خود، نوع خاصی از یك تابع، یعنی تابعی است مانند f به‌طوری که اگر $(a_1,b_1)\in f$، $(a_2,b_2)\in f$، و $b_1=b_2$، آنگاه $a_1=a_2$. اگر، برای یك رابطهٔ تابعی مانند f، $(a,b)\in f$، می‌نویسیم $b=f(a)$.

مفهوم تابع در بخش عمدهٔ ریاضیات دخالت دارد، واز اوایل قرن حاضر ریاضیدانان متنفذ زیادی از استفاده ازاین مفهوم به‌عنوان اصل اساسی ومتحد کننده درسازماندهی دروس ریاضی مقدماتی طرفداری کرده‌اند. ظاهراً این مفهوم راهنمای طبیعی ومؤثری برای انتخاب وبسط مطالب متون درسی است. در ارزشمندی هرچه زودتر آشنا ساختن دانشجویان ریاضی با مفهوم تابع تردیدی وجود ندارد.

۱۵-۴ اعداد ترانسفینی

نظریهٔ ریاضی جدید مجموعه‌ها یکی ازمهمترین ابداعات ذهن بشری است. به‌دلیل قاطعیت نامعمول برخی از ایده‌هایی که در آن یافت می‌شود، و به دلیل برخی روشهای ممتاز اثبات ناشی از آن، نظریهٔ مجموعه‌ها جذابیت وصف ناپذیری یافته است. ولی بالاتر ازهمه، این نظریه اهمیت بسیار زیادی تقریباً در تمام ریاضیات دارد. این نظریه درغنا، وضوح، توسیع، وتعمیم بسیاری از زمینه‌های ریاضیات بی‌اندازه مؤثر بوده است، ونقش آن درمطالعهٔ مبانی ریاضیات کاملاً اساسی است. نظریهٔ مجموعه‌ها همچنین حلقه‌های ارتباط بین ریاضیات از یك سو وفلسفه ومنطق از سوی دیگر را تشکیل می‌دهد.

دومجموعه را **هم‌ارز** گویند اگر وفقط اگر بتوان آنهارا در تناظر یك به یك قرار داد.

وقتی دومجموعه‌هم‌ارز باشند، می گویند دارای یك **عدداصلی** هستند. اعداداصلی مجموعه‌های متناهی را می‌توان با اعداد طبیعی مشخص کرد. اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی به**اعداد ترانسفینی** معروف‌اند، و نظریهٔ این اعداد اولین‌بارتوسط گئورگ کانتور در یك سری مقالهٔ قابل توجه که از سال ۱۸۷۴ آغاز شد، بسط یافت. اغلب این مقالات درمجله‌های آلمانی ماتماتیشه‌آنالن و مجلهٔ ریاضیات[1] به‌چاپ رسیدند. قبل از مطالعهٔ کانتور، ریاضیدانان فقط یك بینهایت‌را پذیرفته بودند، که باعلامتی شبیه به ∞ نشان داده می‌شد، واین‌علامت بدون تمایز برای نشان دادن «عدد» اعضا در مجموعه‌هایی نظیرمجموعهٔ کلیهٔ اعداد طبیعی ومجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی به‌کار گرفته می‌شد. باکارکانتور، دیدگاه کاملاً جدیدی مطرح گردید، ومقیاس وحسابی برای بینهایتها به‌دست آمد.

این اصل اساسی که مجموعه‌های هم‌ارز، عدد اصلی واحدی دارند، در موردی که مجموعه‌های تحت بررسی مجموعه‌های نامتناهی باشند، وضعیتهای جالب وشگفت آوری پیش می‌آورد. گالیله پیشتر، درنیمهٔ دوم قرن شانزدهم متوجه شده بود که، به‌کمك تناظر $n \longleftrightarrow 2n$، مجموعهٔ کلیهٔ اعداد صحیح مثبت‌را می‌توان دریك تناظر یك به‌یك بامجموعهٔ کلیهٔ اعداد صحیح مثبت و زوج قرار داد. از اینرو باید به‌هریك از این دو مجموعه عدد اصلی واحدی اختصاص داد، و، از این نقطه نظر، بایدگفت که تعداد اعداد صحیح مثبت برابرتعداد اعداد صحیح مثبت زوج است. بی‌درنگ‌می‌توان مشاهده کردکه اصل‌موضوع اقلیدسی مبنی براینکه کل بزرگتر از جزء است، در موقعی کـه اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی مورد بحث‌اند، نمی‌توانند جایز باشد. در واقع ددکیند، در حـدود سال ۱۸۸۸، یك مجموعهٔ نامتناهی را مجموعه‌ای تعریف کـرد که با یك زیر مجموعهٔ حقیقی خودش هم‌ارز باشد.

ما عدد اصلی مجموعهٔ کلیهٔ اعداد طبیعی را با d نشان خواهیم‌داد*، وهرمجموعه‌ای با این‌عدد اصلی را **شمارا** خواهیم نامید. نتیجه می‌شود که مجموعه‌ای مانند S شماراست اگر وفقط اگراعضای آن‌را بتوان به‌صورت دنبالهٔ بی‌پایان $\{s_1,s_2,s_3,\ldots\}$ نوشت. چون به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که هرمجموعهٔ نامتناهی زیرمجموعهٔ شمارایی‌دارد، نتیجه‌می‌شود که d «کوچکترین» عدد ترانسفینی است.

کانتور در یکی از اولین مقاله‌های خود دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، شمارا بودن دو مجموعهٔ مهم را که در نگاه اول به‌زحمت واجد این‌خاصیت به‌نظر می‌رسند، اثبات کرد.

اولین مجموعه، مجموعهٔ اعداد گویا است. این مجموعه خاصیت مهم **چگال** بودن را دارد. منظور این است که بین هر دوعددگویای متمایز عددگویای دیگری ــدر حقیقت بینهایت عدد گویای دیگر ــ وجود دارد. مثلاً بین ۰ و ۱ اعدادگویای

$$1/2,2/3,3/4,4/5,5/6,\ldots,n/(n+1),\ldots$$

---

1. Journal für Mathematik

* کانتور این‌عدد اصلی‌را باحرف عبری الف با اندیس صفر، یعنی $\aleph_0$ نشان داد.

قراردارند، بین ۰ و ۱/۲ اعداد گویای

$$۱/۳,۲/۵,۳/۷,۴/۹,۵/۱۱,\ldots,n/(۲n+۱),\ldots$$

قرار دارند، بین ۰ و ۱/۴ اعداد گویای

$$۱/۵,۲/۹,۳/۱۳,۴/۱۷,۵/۲۱,\ldots,n/(۴n+۱),\ldots$$

و غیره قرار دارند. به‌موجب این خاصیت ممکن است این تصور به‌وجود آید که عدد ترانسفینی مجموعهٔ اعداد گویا بزرگتر از d است*. کانتور نشان داد که چنین نیست، و برعکس، مجموعهٔ اعداد گویا شماراست. اثبات آن جالب و به‌صورت زیر است.

قضیهٔ ۱ مجموعهٔ اعدادگویا شماراست.

آرایهٔ زیر را که در آن اولین سطر، به‌ترتیب قدر، شامل کلیهٔ اعداد طبیعی (یعنی، همهٔ کسرهای مثبت به‌مخرج ۱)، سطر دوم، به‌ترتیب قدر، شامل کسرهای مثبت به مخرج ۲، سطر سوم، به‌ترتیب قدر، شامل همهٔ کسرهای مثبت به مخرج ۳، وغیره

$$\begin{array}{ccccccc}
۱ & \rightarrow & ۲ & & ۳ & \rightarrow & ۴\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
۱/۲ & & ۲/۲ & & ۳/۲ & & ۴/۲\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
۱/۳ & & ۲/۳ & & ۳/۳ & & ۴/۳\ldots \\
 & \swarrow & & & & & \\
۱/۴ & & ۲/۴ & & ۳/۴ & & ۴/۴\ldots \\
\downarrow & & & & & & \\
. & & . & & . & & . \ldots
\end{array}$$

هستند درنظر می‌گیریم. آشکاراست که همهٔ اعداد گویای مثبت دراین آرایه ظاهر می‌شوند، واگر این اعداد را به‌ترتیب توالی نشان داده به‌کمك پیکانها فهرست و اعدادی راکه قبلاً ظاهرشده‌اند حذف کنیم، به‌دنبالهٔ بی‌پایان زیرمی‌رسیم

$$۱,۲,۱/۲,۱/۳,۳,۴,۳/۲,۲/۳,۱/۴,\ldots$$

که درآن هرعددگویا یك‌بار وفقط یك‌بار ظاهرمی‌شود. این دنباله را با $\{r_۱,r_۲,r_۳,\ldots\}$

---

* عدد اصلی مجموعه‌ای مانند A را بزرگتراز عدد اصلی مجموعه‌ای‌مانند B گویند اگر و فقط اگر B بایك زیرمجموعهٔ حقیقی A هم‌ارز باشد، ولی A با هیچ زیرمجموعهٔ حقیقی B هم‌ارز نباشد.

نشان می‌دهیم. در این‌صورت دنبالهٔ $\{0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \ldots\}$ شامل همهٔ اعداد گویاست، و شمارا بودن این مجموعه ثابت می‌شود.

دومین مجموعه‌ای که توسط کانتور مطالعه شد، مجموعهٔ اعدادی است که ظاهراً بسیار وسیعتر از مجموعهٔ اعداد گویاست. ابتدا تعریف زیر را می‌کنیم.

تعریف ۱ یك عدد مختلط را جبری نامند اگر ریشهٔ یك چند جمله‌ای مانند

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

باشد که در آن $a_0 \neq 0$ و همه a_kها اعداد صحیح هستند. عدد مختلطی را که جبری نباشد **متعالی** نامند.

کاملاً روشن است که اعداد جبری، ازجمله، شامل کلیهٔ اعداد گویا و کلیهٔ ریشه‌های چنین اعدادی هستند. از اینرو قضیهٔ زیر تاحدی حیرت‌انگیز به‌نظرمی‌آید:

قضیهٔ ۲ مجموعهٔ کلیهٔ اعداد جبری شماراست.

فرض کنید $f(x)$ یك چندجمله‌ای از نوع توصیف شده در تعریف ۱ باشد، که در آن، بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، می‌توان فرض کرد که $a_0 > 0$. به‌اصطلاح **ارتفاع** چندجمله‌ای راکه به‌صورت زیر تعریف می‌شود، درنظر گیرید

$$h = n + a_0 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

بدیهی است که h عددی است صحیح و ناکوچکتراز ۱، ونیز آشکاراست که تنها یك‌عده متناهی از چندجمله‌ایها با ارتفاع مفروض h وجود دارند، و بنابراین تنها یك عدهٔ متناهی عدد جبری که از چندجمله‌ایهای به‌ارتفاع مفروض h ناشی‌می‌شوند، موجود هستند. اکنون می‌توانیم (به‌طورنظری) همهٔ اعداد جبری را فهرست کنیم، درحالی‌که ازتکرار هرعددی که قبلاً فهرست شده است خودداری می‌کنیم. این‌کار را بدین صورت انجام می‌دهیم که ابتدا همهٔ اعداد جبری ناشی از چندجمله‌ایهایی به ارتفاع ۱، سپس اعداد جبری ناشی از چندجمله‌ایهای به‌ارتفاع ۲، سپس همهٔ اعداد جبری‌ناشی ازچندجمله‌ایهای به‌ارتفاع ۳ را اختیار می‌کنیم و همینطور الی آخر. بنابراین ملاحظه می‌کنیم که همهٔ اعداد جبری را در دنبالهٔ بی‌پایانی فهرست کرده‌ایم و ازاینرو این‌مجموعه شماراست.

با توجه به دوقضیهٔ قبل، این امکان‌باقی می‌ماند که همهٔ مجموعه‌های نامتناهی شمارا هستند. خلاف آن توسط کانتور با برهان اعجاب‌آوری درقضیهٔ مهم زیرنشان داده‌شد.

قضیهٔ ۳ مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی دربازهٔ $0 < x < 1$ ناشماراست.

اثبات به‌برهان‌خلف‌است‌و روش نامعمولی موسوم به **فرایند قطری‌کردن‌کانتور** را مورد استفاده قرارمی‌دهد. دراین‌صورت فرض‌می‌کنیم که مجموعه شماراست. با این فرض

می‌توان اعداد مجموعه را در دنباله‌ای مانند $\{p_{۱}، p_{۲}، p_{۳}،...\}$ فهرست کرد. هر یك از این اعداد را می‌توان به طور منحصر بفردی به صورت یك‌کسر اعشاری نامختوم نوشت؛ دراین رابطه یادآوری این‌مطلب‌مفید است که هرعددگویا را می‌توان به‌صورت «اعشاری مکرر» نوشت؛ مثلا عددی مانند ۳ر۰ را می‌توان به صورت ۲۹۹۹۹ . . . ر۰ نوشت. در این‌صورت می‌توانیم دنباله را با آرایهٔ زیرنمایش دهیم،

$$p_{۱} = ۰ \cdot a_{۱۱}\, a_{۱۲}\, a_{۱۳} \cdots$$

$$p_{۲} = ۰ \cdot a_{۲۱}\, a_{۲۲}\, a_{۲۳} \cdots$$

$$p_{۳} = ۰ \cdot a_{۳۱}\, a_{۳۲}\, a_{۳۳} \cdots$$

....

که در آن a_{ij} معرف یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ است . حال علیرغم دقتی‌که در فهرست کردن کلیهٔ اعداد بین ۰ و ۱ به کار رفته است، عددی وجود دارد که نمی‌توانسته درفهرست وارد شود. چنین عددی $b_{۱}\, b_{۲}\, b_{۳} \ldots$ ۰. است که در آن، مثلاً، $b_k = ۷$، درصورتی‌که $a_{kk} \neq ۷$ و $b_k = ۳$، اگر $a_{kk} = ۷$، به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n, \ldots$. این عددآشکارا بین ۰ و ۱ قرار دارد، وباید با هریك ازاعداد p_i متفاوت باشد، زیرا با $p_{۱}$ حداقل در رقم اعشاری اول تفاوت دارد ، با $p_{۲}$ حداقل در رقم اعشاری دوم تفاوت دارد ، با $p_{۳}$ حداقل در رقم اعشاری سوم تفاوت دارد ، و الی آخر. بدین ترتیب فرض آغازین‌که همهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را می‌توان در دنباله‌ای فهرست کرد ، قابل‌قبول نیست، ولذا این مجموعه باید ناشمارا باشد.

کانتور قضیهٔ مهم زیر را از قضایای ۲ و۳ نتیجه‌گرفت:

قضیهٔ ۴ اعداد متعالی موجودند.

چون، بنابرقضیهٔ ۳، مجموعهٔ اعدادحقیقی‌بین ۰ و۱ ناشماراست، به‌آسانی می‌توان نشان دادکه مجموعهٔ اعداد مختلط نیزناشماراست. اما، بنابرقضیهٔ ۲، مجموعهٔ اعدادجبری شماراست. نتیجه می‌شودکه باید اعداد مختلط که جبری‌نیستند، وجود داشته‌باشند، و قضیه ثابت می‌شود.

برهان فوق برای قضیهٔ ۴ برای همهٔ ریاضیدانان قابل قبول نیست. قابل قبول بودن یا غیرقابل قبول بودن این برهان مربوط به تصور ما از چگونگی وجود ریاضی است، و ریاضیدانانی وجود دارندکه به‌زعم آنها وجود ریاضی فقط موقعی ثابت می‌شودکه یکی از چیزهائی‌که وجودشان مورد بحث است عملاً ساخته ونشان داده شود. ولی برهان بالا وجود اعداد متعالی را با ایجاد نمونهٔ مشخصی‌ازچنین اعداد ثابت نمی‌کند. در ریاضیات برهانهای وجودی از این نوع غیرساختنی فراوان‌اندکه درآنها وجود، فرضاً تنها با نشان دادن اینکه فرض عدم وجود منجر به تناقض می‌شود ، ثابت می گردد . مثلاً بسیاری از

براهین قضیهٔ اساسی جبر برچنین اساسی فرمولبندی شده‌اند.

به‌دلیل ناخشنودی برخی ریاضیدانان از برهانهای وجودی غیرساختنی، تلاش زیادی صرف جانشین کردن این برهانها با برهانهایی شده‌است که عملاً یکی از چیزهای مورد بحث را می‌دهند.

اثبات وجود اعداد متعالی و این اثبات که عدد خاصی متعالی است دو مطلب کاملاً متفاوت‌اند. دومی اغلب مسئلهٔ بسیار دشواری است. ارمیت، درسال ۱۸۷۳، ثابت‌کرد که عدد e، پایهٔ لگاریتم طبیعی، متعالی است. لیندمان، درسال ۱۸۸۲، برای اولین بارمتعالی بودن π راثابت کرد. متأسفانه برای اثبات این‌حقایق جالب دراین‌کتاب محذوراتی وجود دارد. دشواری مشخص کردن جبری بودن یا متعالی بودن عدد مفروض خاصی را می‌توان با این حقیقت روشن کرد که هنوز معلوم نیست که π^{π} جبری یا متعالی است. دستاورد جدیدی در این زمینه اثبات ماهیت متعالی بودن اعدادی به‌شکل a^b است، که درآن a عددی جبری جز ۰ و ۱ است، و b یك عددنا گویای جبری می‌باشد. این‌نتیجه، که درسال ۱۹۳۴ توسط الکساندراوسیپوویچ گلفوند (متولد ۱۹۰۶) به‌دست آمده وامروزه قضیهٔ گلفوند نامیده می‌شود، حاصل کوشش تقریباً ۳۰ ساله‌ای برای‌اثبات متعالی بودن به‌اصطلاح **عدد هیلبرت**، $2^{\sqrt{2}}$، بوده‌است.

چون مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی در بازهٔ $0 < x < 1$، *ناشمارا*ست، عددترانسفینی این مجموعه بزرگتر از d است. ما آن را با c نشان می‌دهیم و آن‌را **عدداصلی‌متصله** اطلاق می‌کنیم. عقیدهٔ کلی‌براین است‌که c عدد ترانسفینی بعد از d است، یعنی، اینکه‌هیچ مجموعه‌ای نیست‌که دارای عدد اصلیی بزرگتر از d وکوچکتر از c باشد. این اعتقاد به **فرض‌متصله** موسوم است، ولی، علی‌رغم کوششهای شدید، هنوز برهانی‌برای‌آن پیدا نشده است. نتایج زیادی از این فرض استنتاج شده‌اند، و، به‌حدود سال ۱۹۴۰، منطقی‌اطریشی کورت‌گودل[1] (۱۹۰۶ – ۱۹۷۸) به‌اثبات این‌نکته موفق شد که فرض متصله بامجموعهٔ اصول موضوعهٔ مشهوری مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است، به‌شرطی‌که خود این اصول موضوعه سازگار باشند. گودل حدس زدکه انکار فرض متصله نیز با اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است. این‌حدس را درسال۱۹۶۳ دکتر پل. ج. کوهن از دانشگاه استانفورد ثابت‌کرد وبدین‌ترتیب نشان دادکه فرض‌متصله ازاصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها مستقل است، و بنابراین قابل استنتاج از این اصول‌موضوعه نیست. این وضعیت شبیه به‌وضعیت اصل توازی درهندسهٔ اقلیدسی است.

نشان داده شده‌است که مجموعهٔ کلیهٔ توابع تك‌مقداری مانند $f(x)$ که بربازهٔ $0 < x < 1$ تعریف شده‌اند، دارای عدد اصلی بزرگتر از c هستند، ولی اینکه آیا عدد اصلی مزبور عدد بعد از c هست یانیست، معلوم نشده است. نظریهٔ‌کانتور دنبالهٔ نامتناهیی از اعداد ترانسفینی را پیش‌بینی می‌کند، و براهینی وجود دارند که مقصودشان نشان‌دادن آن است که تعداد نامحدودی از اعداد اصلی بزرگتر از متصله عملاً موجودند.

---

1. Kurt Gödel

۱۵-۵ توپولوژی

توپولوژی در آغاز شاخه‌ای از هندسه بود، ولی طی ربع دوم قرن بیستم به قدری تعمیم یافت و چنان با شاخه‌های متعدد دیگری از ریاضیات درگیر شد که اکنون شاید بیشتر شایسته باشد که آن‌را ، همراه باهندسه، جبر، و آنالیز، یکی از شعب بنیادی ریاضیات تلقی کرد. امروزه شاید بتوان توپولوژی را به‌طور کلی مطالعهٔ ریاضی پیوستگی تعریف کرد. در این بخش خود را محدود به برخی از جنبه‌های این مبحث خواهیم نمود که منشأ هندسی آن‌را منعکس می‌کنند. از این نقطه نظر، توپولوژی را می‌توان مطالعهٔ آن خواص اشکال هندسی تلقی کرد که تحت به‌اصطلاح **تبدیلهای توپولوژیایی**، یعنی تحت نگاشتهای تك‌مقداری پیوسته‌ای که معکوسهای تك‌مقداری پیوسته دارند، پایا می‌مانند. منظورما از یك شکل هندسی یك مجموعهٔ نقطه‌ای درفضای سه‌بعدی (یا ابعاد بالاتر) است ؛ یك نگاشت تك مقداری پیوسته، نگاشتی است که بتوان آن را ، نسبت به یك دستگـاه مختصات دکارتی در فضا، به‌کمك توابع پیوستهٔ تك‌مقداری از مختصات نمایش داد.

چون مجموعهٔ تبدیلهای توپولوژیایی یك‌شکل هندسی تشکیل یك‌گروه تبدیل‌می‌دهد، توپولوژی را می‌توان، از دیدگاه‌ما، یك هندسهٔ کلاینی دانست، وبنابراین آن‌را درقالب برنامهٔ ارلانگر تدوین کرد. آن خواص یك شکل هندسی که تحت تبدیـلات توپولوژیایی شکل ، پایا می‌مانند **خواص توپولوژیایی** شکل نامیده می‌شوند، و دو شکلی را که بتوان به‌طور توپولوژیایی به‌یکدیگر تبدیل کرد **همسانـریخت**، یا **ازلحاظ توپولوژیایی هم‌ارز** می‌نامند.

نیازی به‌این نیست‌که تابعهای نگاشت یك تبدیل توپولوژیایـی در تمام فضایی که شکل هندسی در آن نشانیده شده، تعریف شده‌باشند؛ بلکه می‌توان آنها را تنها روی آن مجموعهٔ نقطه‌ای که شکل هندسی را تشکیل می‌دهد، تعریف نمود. دراین صورت می‌توان آن خواص توپولوژیایی از شکل را **ذاتی** دانست کـه تحت کلیهٔ تبدیلهای توپولوژیایی شکل مورد نظر پایا می‌مانند، وآن خواص توپولوژیایی از شکل را **عارضی** دانست کـه تنها تحت تبدیلهای توپولوژیایی کل فضایی که شکل‌را احاطه می‌کند، پایامی‌مانند. خواص توپولوژیایی ذاتی شکل آنهایی هستندکـه از فضای محاط‌کننده مستقل‌اند، در حالی‌که خواص توپولوژیایی عارضی آنهایی‌هستند که به‌فضای محاط‌کننده بستگی دارند، واین‌مطلب یادآور وضعیت مشابهی است‌که دربخش ۱۴-۷ درارتباط باهندسه دیفرانسیل سطوح در فضای سه‌بعدی مورد بررسی قرار گرفت.

توپولوژی، به‌عنوان مبحثی خود مرتبط، بـزحمت به‌پیشتر از اواسط قرن نوزدهم می‌رسد، ولی می‌توان برخی تحقیقات توپولوژیایی پراکندهٔ جلوتر ازآن را هم دید. در اواخر قرن هفدهم لایبنیتز اصطلاح **هندسهٔ وضع** را برای توصیف نوعی ریاضیات کیفی که امروزه می‌توان آن‌را یك توپولوژی تلقی کرد، به‌کاربرد وانجـام مطالعات مهمی در این زمینه را پیش‌بینی کـرد، ولـی تحقق پیشگویی او به‌کندی صورت گرفت. ازخواص توپولوژیایی یك سطح چندوجهی بستهٔ ساده که پیشترها کشف شده، رابطهٔ $v-e+f=2$

است که در آن v، e، f به‌ترتیب معرف عدهٔ رأسها، یالها، و وجوه چندوجهی‌هستند. این رابطه بر دکارت درسال ۱۶۴۰ معلوم بوده است، ولی اولین برهان این‌فرمول توسط اویلر درسال ۱۷۵۲ داده شد. اویلرجلوتر از آن، درسال ۱۷۳۶، قدری‌توپولوژی گرافهای‌خطی را در بررسی‌اش در مسئلهٔ پل‌کونیگسبرگ (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲ . ۸) مطالعه کرده بود. گاوس‌سهم‌زیادی درتوپولوژی داشته است. ازچندین برهان‌که وی برای‌قضیهٔ اساسی‌جبرداده، دوتای آنها آشکارا توپولوژیایی هستند. در اولین برهانش برای‌این‌قضیه، تکنیکهای توپولوژیایی را به‌کار می‌گیرد واین برهان در رسالهٔ دکترای‌او به‌سال ۱۷۹۹، وقتی‌که ۲۲ ساله بود، آورده شده است. گاوس بعدها مختصراً نظریهٔ گره‌ها را که امروزه موضوع مهمی درتوپولوژی است، مطالعه‌کرد. در حدود ۱۸۵۰ فرانسیس‌گاتری[1] مسئلهٔ چهاررنگ را حدس‌زد*، که بعدها توسط او گاستس‌دمورگن، آرثرکیلی، ودیگران‌دنبال شد. دراین‌زمان‌موضوع توپولوژی‌باعنوان **هندسهٔ وضع** شناخته‌می‌شد. اصطلاح توپولوژی توسط ی. ب. لیستینگ (۱۸۰۸ – ۱۸۸۲)، یکی از شاگردان‌گاوس، درسال ۱۸۴۷، در عنوان مطالعات اولیه درتوپولوژی[2]، اولین‌کتابی‌که به‌این‌موضوع اختصاص داشت، مطرح گردید. کلمهٔ‌آلمانی *topologie* بعداً‌توسط پروفسور سالومون‌لفشتس[3] از دانشگاه‌پرینستون به‌صورت *topology* به انگلیسی درآمد. گ.ر. کیرشهوف (۱۸۲۴ – ۱۸۸۷)، دانشجوی دیگرگاوس، درسال ۱۸۴۷ توپولوژی‌گرافهای خطی‌را درمطالعهٔ شبکه‌های‌الکتریکی به‌کار برد. اما دربین همهٔ دانشجویان گاوس، کسی که سهمش در توپولوژی به‌مراتب بیش از دیگران است، برنهارد ریمان است، که در رسالهٔ دکترای خود به‌سال ۱۸۵۱، مفاهیم توپولوژیکی را درمطالعهٔ نظریهٔ توابع مختلط داخل‌نمود. ازعوامل‌عمدهٔ‌تحرك توپولوژی که ریمان موجب آن بود، مفهوم **سطح‌ریمان** وی است که ابزاری‌است توپولوژیایی برای تبدیل‌توابع مختلط‌چندمقداری به توابع یك‌مقداری. خطابهٔ امتحانی ریمان به‌سال ۱۸۵۴، دربارهٔ فرضهایی که اساس‌هندسه برآنها مبتنی است، نیز درتوپولوژی‌اهمیت اساسی‌دارد. ورود به‌ابعاد بالاتر توسط این‌خطابه میسرشد، واصطلاح ومفهوم **خمینه** در اینجا مطرح شدند. درحدود سال ۱۸۶۵، ا.ف. موبیوس (۱۷۹۰ – ۱۸۶۸) مقاله‌ای نوشت که در آن به‌چندوجهی صرفاً به‌عنوان مجموعه‌ای ازچندضلعیهایی متصل به‌هم نظرشد. این کار مفهوم ۲ـ کومپلکسها را داخل‌توپولوژی کرد. موبیوس‌درمطالعهٔ منظم‌خود دربارهٔ ۲ـ کومپلکسها، به‌سطحی که یك‌طرف ویك‌لبه دارد و اکنون به‌نوارموبیوس موسوم است، رسید. در سال ۱۸۷۳، ج. ك. ماکسول (۱۸۳۱ – ۱۸۷۹) نظریهٔ توپولوژیایی‌همبندی را درمطالعهٔ‌خود دربارهٔ میدانهای الکترومغناطیسی به‌کار برد. عدهٔ دیگری نظیر هـ. هلمهولتس[4] (۱۸۲۱ – ۱۸۹۴) و لردکلوین(ویلیام‌تامسن[5]، ۱۸۲۴–۱۹۰۷)، راهم‌می‌توان به‌فهرست فیزیکدانانی

---

1. Francis Guthrie

* که هرنقشه‌برصفحه یاکره را می‌توان حداکثر باچهار رنگ رنگ‌آمیزی کرد.

2. Vorstudien zur Topologie 3. Solomon Lefschetz

4. H. Helmholtz 5. William Thomson

که مفاهیم توپولوژیایی را با موفقیت به‌کار برده‌اند، افزود. هانری پوانکاره (۱۸۵۴ ـ ۱۹۱۲) درمیان اولین کسانی که سهمی در توپولوژی دارند، مقام شامخی دارد. مقاله‌ای از او، که درسال ۱۸۹۵ نوشته شده وعنوان آن هندسهٔ وضع[1] است، اولین مقالهٔ مهمی است که کلاً به‌توپولوژی اختصاص دارد. دراین مقاله است که نظریهٔ مهم هومولوژی n بعدی مطرح می‌شود. همچنین پوانکاره بود که گروههای بتی[2] را وارد توپولوژی کرد. باکار پوانکاره، موضوع توپولوژی به جریان افتاد، و عدهٔ روزافزونی از ریاضیدانان وارد میدان شدند. نامهایی که درتوپولوژی بعد از زمان پوانکاره اهمیت خاص دارند، عبارت‌اند از ا. وبلن (۱۸۸۰ ـ ۱۹۶۰)، ج. و. الکساندر[3] (۱۸۸۸ ـ ۱۹۷۱)، س. لفشتس (۱۸۸۴ـ۱۹۷۲)، ل. ا. ی. براوئر (۱۸۸۲ـ۱۹۶۶)، و م. فرشه (۱۸۷۸ ـ ۱۹۷۳).

مفهوم یك شکل هندسی به‌عنوان مجموعه‌ای متناهی از قطعات بنیادی متصل به‌هم، که‌موردتأکیدموبیوس، ریمان، وپوانکاره‌بود، تدریجاً جای‌خود را به‌مفهوم‌کانتوری مجموعهٔ دلخواهی ازنقاط‌داد، وسپس این‌نکته تشخیص داده شد که هرمجموعه‌ای ازچیزها ـ خواه مجموعه‌ای از اعداد، موجودات جبری، توابع‌باشند، خواه اشیاء غیرریاضی ـ می‌توانند بدین یا بدان مفهوم یك‌فضای توپولوژیایی تشکیل دهند. این دیدگاه اخیر، و بسیار کلی، نسبت به‌توپولوژی به **توپولوژی مجموعه‌ای** شهرت یافته‌است، در حالی که مطالعاتی که ارتباط نزدیکتری بادیدگاه سابق دارند، به **توپولوژی‌ترکیبیاتی یا جبری** شهرت دارند، گرچه باید متعرف بود که این‌تقسیمبندی شاید بیشتر جنبهٔ تسهیل داشته‌باشد تاجنبهٔ منطقی.

۱۵ـ۶ منطق ریاضی

هرنظریهٔ ریاضی از تأثیرمتقابل دوعامل، مجموعه‌ای از اصول موضوعه ویك منطق، ناشی می‌شود. این‌مجموعه اصول‌موضوعه، پایه‌ای‌را تشکیل می‌دهد که‌نظریه از آن‌آغاز می‌شود، ویك منطق قواعدی‌را تشکیل می‌دهد که به‌کمك‌آن چنین پایه‌ای را می‌توان به‌مجموعه‌ای از قضایا بسط داد. آشکار است که هر دوعامل مهم‌اند، وبدین جهت هردوعامل دقیقاً مورد بازبینی و مطالعه قرار گرفته‌اند. مطالعهٔ اولین عامل موضوع مبحث اصل موضوعیها را تشکیل می‌دهد، که قبلاً دربخش ۱۵ـ۲ بررسی شد؛ دراین بخش به‌دومین عامل نظری می‌افکنیم.

گرچه یونانیان قدیم منطق صوری را به‌طور قابل توجهی بسط دادند، و ارسطو (۳۸۴ـ۳۲۲ ق.م.) مطالب آن‌رامنظم‌نمود، این‌کار آغازین‌همه به‌کمك زبان عادی‌صورت گرفت. ریاضیدانان‌کنونی بحث درنظرات نوین درباب منطق به‌چنان روش‌را، کار تقریباً بیحاصلی می‌دانند. برای دست یافتن به‌بررسی دقیق‌علمی مطلوب از این موضوع یك زبان نمادی ضرورت دارد. به دلیل وجود این چنین نمادگرایی، محصول چنین مطالعه‌ای به **منطق‌علامتی** یا **ریاضی** شهرت یافته است. درمنطق علامتی‌روابط مختلف بین گزاره‌ها، طبقه‌ها، و غیره بافرمولهایی ارائه می‌شوند که معانی آنها عاری از ابهامهایی هستند که در

---

1. Analysis situs 2. Betti 3. J. W. Alexander

زبان معمولی رواج زیادی دارند. بدین ترتیب بسط این موضوع ازمجموعه‌ای ازقاعده‌های آغازین برطبق برخی قواعد در بارهٔ تبدیلهای صوری که به‌روشنی تقریر شده‌اند، عیناً نظیر بسط قسمتی از جبرمعمولی، میسرمی گردد. همچنین، وباز نظیر بسط قسمتی از جبرمعمولی، مزایای زبان نمادی بر زبان معمولی تا آنجا که به‌ایجاز و سهولت دریافت مربوط می‌شود، بسیار زیاد است.

لایبنیتز را اولین کسی می‌دانند که پسندیده بودن یك منطق علامتی را مورد توجه قرار داده است. یکی از اولین نوشته‌های او، مقاله‌ای است تحت عنوان درفن ترکیب[1]، که در سال ۱۶۶۶ منتشر کرده ودرآن اعتقاد خود را به‌ممکن بودن یك زبان علمی جهانشمول، که با نمادگرایی مقتصدانه وعملی برای هدایت ما درفرایند استدلال بیان‌شود، خاطرنشان کرده‌است. با بازگشت به‌این اندیشه‌ها بین‌سالهای ۱۶۷۹ و ۱۶۹۰، درایجاد منطق‌علامتی پیشرفت قابل ملاحظه‌ای کـرد، و مفاهیم چندی وضع کرد که اهمیت زیادی در مطالعات جدید دارند.

توجه مجددی به‌منطق علامتی که بسیاراهمیت داشت، درسال ۱۸۴۷ صورت گرفت که طی آن جورج بول (۱۸۱۵ – ۱۸۶۴) جزوهٔ کوچك خود تحت عنوان تحلیل ریاضی منطق، مقاله‌ای درجهت حساب استدلال قیاسی[2]، را منتشرکرد. بول مقالهٔ دیگری را در سال ۱۸۴۸ منتشر کرد، وبالاخره، درسال ۱۸۵۴، شرح قابل توجهی از اندیشه‌های خود را دراثری به‌نام، پژوهشی درقوانین تفکر، که نظریه‌های ریاضی منطق واحتمالات برآنها بنا شده‌اند[3]، ارائه داد.

اوگاستس‌دمورگن (۱۸۰۶–۱۸۷۱) ازمعاصرین بول بود، ورسالهٔ او دربارهٔ منطق صوری ؛ یا ، حساب استنتاج، لازم و محتمل[4]، که در سال ۱۸۴۷ منتشر شد، در مواردی به‌طورقابل‌ملاحظه‌ای از بول‌فراتر رفت. بعداً دمورگن‌مطالعات وسیعی نیز درمنطق‌رابطه‌ها، که تا آن موقع دربوتهٔ فراموشی افتاده بود، به‌عمل آورد.

درامریکا، کار برجسته دراین زمینه توسط چارلزساندرزپیرس[5] (۱۸۳۹–۱۹۱۴)، فرزند ریاضیدان نامدار دانشگاه هاروارد، بنجامین‌پیرس[6] صورت گرفت. پیرس برخی اصول اعلام شده ازطرف پیشینیان خود را مجدداً کشف کرد. جای تأسف است که‌کار او تاحدی خارج ازجریان متعارف بسط این‌موضوع به‌نظرآمد؛ تنها در دوره‌های اخیراست که مزیت قسمت اعظم افکارپیرس به‌طور شایسته درك شده است.

مفاهیمی که‌بول‌ابداع کرده‌بود، در رسالهٔ طولانی‌ارنست‌شرودر[7] (۱۸۴۱–۱۹۰۲)

---

1. De arte combinatoria 2. The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards Calculus of Deductive Reasoning
3. An Investigation into the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability
4. Formal Logic ;or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable
5. Charles Sanders Peirce 6. Benjamin Peirce
7. Ernst Schröder

تحت عنوان درسهایی درجبر منطق[1]، که درطی‌دورهٔ ۱۸۹۰ ـ ۱۸۹۵ منتشرشد،کمال‌قابل ملاحظه‌ای یافت. در واقع، تمایل منطقیون جدید آن است که منطق علامتی به رسم بولی را با اصطلاح جبر بول ـ شرودر مشخص نمایند. درجبر بولی هنوز کارهای قابل ملاحظه‌ای درحال انجام است، ومقاله‌های زیادی‌دراین‌موضوع را می‌توان درمجلات تحقیقی‌کنونی پیدا کرد.

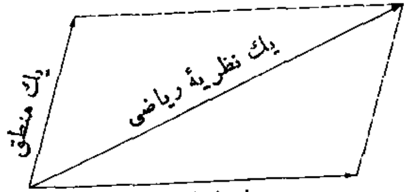
رهیافت جدیدتری به‌منطق علامتی‌ریشه درکارمنطقی آلمانی گوتلوب‌فرگه[2](۱۸۴۸ـ ۱۹۲۵) طی سالهای ۱۸۷۹ ـ ۱۹۰۳، و مطالعات جوزپه‌پئانو (۱۸۵۸ـ۱۹۳۲) دارد. انگیزهٔکار پئانو میل به‌بیان‌تمام ریاضیات درقالب یك‌حساب منطقی‌بود، وکار فرگه از نیاز به‌مبنای سالمتری برای ریاضیات ریشه می‌گرفت. اثر فرگه به‌نام مفهومنگاشت[3] در سال ۱۸۷۹، واثر ازلحاظ تاریخی مهم او به‌نام قوانین اساسی حساب[4] در ۱۸۹۳ ـ ۱۹۰۳ ظاهر شد؛ فرمول ریاضی[5] اثر پئانووهمکارانش در سال ۱۸۹۴ به‌تدریج منتشرشد.کاری‌که توسط فرگه و پئانو آغـاز شد مستقیماً به‌اثر بسیار پرنفوذ و ماندگار پرینسیپیاماتماتیکا[6] (۱۹۱۰ ـ ۱۹۱۳) اثر آلفردنورث‌وایتهد (۱۸۶۱ ـ ۱۹۴۷) و برتراندراسل(۱۸۷۲ ـ ۱۹۷۰) منجر شد. ایدهٔ اساسی این اثر یکی‌کردن قسمت اعظم ریاضیات بامنطق به‌کمك استنتاج از دستگاه اعداد طبیعی، وبنابراین‌قسمت عمدهٔ ریاضیات موجود، از مجموعه‌ای ازمقدمات یا اصول موضوعه برای خود منطق بود. درسالهای ۱۹۳۴ ـ۱۹۳۹ اثرجامع مبانی ریاضی[7] داوید هیلبرت (۱۸۶۲ ـ ۱۹۴۳) وپل بـرنیس[8] (۱۸۸۸ـ) منتشر شد. این اثر،کـه مبتنی بریك رشته مقالات و دروس دانشگاهی ارائه شده توسط هیلبرت است، درتلاش آن است که ریاضیات را به‌کمك منطق علامتی به‌روش جـدیدی‌که ایجاد سازگاری در ریاضیات را مقدور می‌سازد، بنانماید.

در زمان حاضر، مطالعات دقیقی در زمینهٔ منطق علامتی از سوی ریاضیدانان زیادی دنبال‌می‌شود،که عمدتاً ناشی از انگیزه‌ای است که براثر انتشار پرینسیپیاماتماتیکا در این زمینه به‌وجودآمده‌است. یك‌نشریهٔ ادواری، موسوم به‌مجلهٔ منطق علامتی[9]، درسال۱۹۳۵ برای انتشار نوشته‌های این‌گروه تأسیس شد.

شباهت‌جالبی(درصورتی‌که درآن‌خیلی زیاده‌روی نشود)بین‌قانون متوازی‌الاضلاع برای نیروها و روش اصل موضوعی وجود دارد. بنابرقـانون متوازی‌الاضلاع دو نیروی مؤلفه‌ای‌درقالب‌یك‌نیروی‌منتجهٔ واحدی ترکیب‌می‌شوند. باتغییریك یاهردونیروی‌مؤلفه‌ای، نیروهای منتجهٔ مختلفی به‌دست می‌آیند، گرچه می‌توان بااختیار یك‌زوج نیروی مؤلفه‌ای آغازین‌مختلف، یك‌نیروی منتجهٔ واحدی رابه‌دست‌آورد. حال، همچنان‌که نیروی منتجه به

---

1. Vorlesungen über die Algebra der Logic
2. Gottlob Frege
3. Begriffsschrift
4. Grundgesetze der Arithmetik
5. Formulaire de mathématiques
6. Principia mathematica
7. Grundlagen der Mathematik
8. Paul Bernays
9. Journal of Symbolic Logic



شکل ۱۲۲

کمك نیروهای مؤلفه‌ای آغازین معین می‌شود، همینطورهم (نگاه کنید به‌شکل ۱۲۲) یك نظریهٔریاضی به‌کمك مجموعه‌ای از اصول‌موضوعه و یك منطق معین می‌شود. یعنی‌مجموعهٔ گزاره‌هایی که یك نظریهٔ ریاضی‌را تشکیل می‌دهند از اثر متقابل مجموعه‌ای ازگزاره‌های آغازین، موسوم به‌اصول موضوعه، و مجموعهٔآغازین دیگری‌از گزاره‌ها، موسوم به‌منطق یاقواعد عمل ناشی می‌شود. ازدیرباز ریاضیدانان به‌تغییرپذیری‌مجموعهٔ اول ازگزاره‌های آغازین، یعنی‌اصول موضوعه، پی‌برده بودند،ولی تاهمین اواخرمجموعهٔ دوم ازگزاره‌های آغازین؛یعنی، منطق، را عموماً ثابت، مطلق، تغییرناپذیر تلقی‌می‌کردند. در واقع، هنوزهم عقیدهٔ غالب درمیان اغلب مردم‌همین است، زیرا، جزبرای معدودی‌از دانشجویان این‌علم، کاملاً غیرمتقاعدکننده به‌نظر می‌رسدکه برای قوانین منطق‌که توسط ارسطو درقرن‌چهارم ق.م. بیان شده، شئ‌دیگری وجود داشته‌باشد. احساس کلی این است که‌این قوانین‌به‌نحوی برای ساختار جهان، عرضی‌و برای خود ماهیت استدلال‌بشری ذاتی‌هستند. همچنان‌که در مورد مطلقهای گذشته پیش آمده، این یك نیز برافتاده است، ولی این امر تا سال ۱۹۲۱ به‌تأخیر افتاده است. دیدگاه نوین‌را نمی‌توان پاکیزه‌تر ازآنچه درجملات زیر از منطقی برجستهٔ آمریکایی، آلونسوچرچ[1] آمده، بیان نمود.

ما هرگز صفت‌وحدت یاحقیقت مطلق‌را به‌هیچ‌دستگاه خاص منطقی نسبت‌نمی‌دهیم. ذوات منطق صوری تجریدهایی هستند که به‌دلیل مورد استفاده بودن آنها در توصیف و تنظیم حقایق تجربه‌ها یا مشاهدات ابداع شده‌اند، وخواص آنها، که درطرح‌خام براثر چنین‌نیتی مشخص می‌شوند،ازلحاظ ماهیت دقیق خودبه‌نحوهٔ انتخابشان بستگی‌دارندکه مطابق‌میل ابداع‌کننده صورت‌می‌گیرد.می‌توانیم‌فضای سه‌بعدی هندسی‌را که درتوصیف فضای مادی به‌کار می‌رود، به‌عنوان شاهدمثال بیاوریم‌که به‌نظرما مشهود بودن چنین وضعیتی برای عامه قابل تشخیص است. آشکار است‌که ذوات هندسه‌ماهیت مجردی دارند، صفحات بدون ضخامت و نقاطی‌که هیچ سطحی‌را درصفحه اشغال نمی‌کنند، مجموعه‌هایی ازنقاط که‌شامل عده‌ای نامتناهی‌از نقاط‌اند، خطوطی‌بادرازاهای‌نامتناهی، وچیزهای دیگری‌که

---

1. Alonzo church

نمی‌توان آنها را درهیچ تجربهٔ مادی به‌وجودآورد، درشمار این ذوات هستند. با این‌حال هندسه را می‌توان در فضای مادی چنان مـورد استفاده قرار داد که تناظر بغایت مفیدی بین‌قضایای هندسه وحقایق قابل مشاهده دربارهٔ اجسام‌مادی درفضا ایجاد شود. دربنا کردن هندسه، موارد کاربردی که برای‌آن در فضای مادی پیشنهاد می‌شود، نقش راهنمای کلی‌را در تعیین خواصی دارندکـه ذوات مجرد باید دارا باشند، ولی این کاربردها، این خواص را به‌طور کامل مشخص نمی‌کنند. درنتیجه ممکن است، همانطورکه واقعیت امر نشان می‌دهد، بیش از یك هندسه موجود باشد، که استفاده از آن درتوصیف فضای مادی شدنی باشد. به‌طور مشابه، بدون تردید، بیش از یك دستگاه صوری می‌تواند موجود باشد که استفاده از آن به‌عنوان منطق میسر باشد، و از این دستگاهها ممکن است یکی رضایتبخش‌تر وسهل‌الوصول‌تر از دیگری باشد، اما نمی‌توان گفت که یکی درست و دیگری نادرست است.

خاطرنشان می‌سازیم که هندسه‌های جدید برای اولین‌بار ازطریق نفی اصل توازی اقلیدس، وجبرهای جدید از طریق نفی قانون جابجایی ضرب پدیدآمدند. به‌همین روال، به‌اصطلاح «منطقهای چندارزشی» اولین‌بار بانفی قانون‌طرد شق وسط ارسطو پیدا شدند. بنابراین‌قانون، گزارهٔفصلی«p یا نهp»یك‌راستگواست،وهرگزاره مانند p درمنطق‌ارسطویی همیشه یا درست است یا نادرست. چون یك‌گزاره می‌تواند هریك از دو ارزش راستی، یعنی درستی یا نـادرستی داشته بـاشد، این منطق به‌منطق دوارزشی موسوم است. درسال ۱۹۲۱، در یك مقالهٔ کوتاه دوصفحه‌ای یان لوکاسیویچ[1] به‌مطالعهٔ یـك‌منطق سه ارزشی، یامنطقی که درآن‌گزاره‌ای‌مانند p می‌تواند هریك ازسه‌ارزش راستی ممکن‌را داشته‌باشد، پرداخت. به فاصلهٔ‌کوتاهی بعدازآن؛ و مستقل ازکار لـوکاسیویچ، ا. ل. پست[2] به‌مطالعهٔ منطقهای m ارزشی‌پرداخت، که درآن‌گزاره‌ای مانند p می‌تواند هریك از m ارزش‌راستی ممکن‌را داشته‌باشدو درآن m، عددصحیح مثبتی‌بزرگتراز۱ است. اگر m از ۲ بیشترباشد، منطق را **چندارزشی** می‌نـامند. مطالعهٔ دیگـری از منطقهای m ارزشی درسال ۱۹۳۰ از طرف لوکاسیویچ و ا. تارسکی[3] ارائه شد. بعداً، درسال ۱۹۳۲، دستگاههای راستی mـ ارزشی توسط ه. رایشنباخ[4] تا یـك منطق بینهایت ارزشی توسیع داده شد کـه در آن گزاره‌ای، مانند p می‌تواند هریك ازبینهایت ارزش ممکن را داشته‌باشد*.

---

1. J. Lukasiewicz 2. E.L. Post 3. A. Tarski 4. H. Reichenbach

* مطلبی که ازنظر تاریخی‌اهمیت دارد، اینکه درسال۱۹۳۶، ك. میخالسکی (K.Michalski) کشف نمودکـه منطقهای سه‌ارزشی پیشتر درقرن چهاردهم توسط مدرس قرون وسطی، ویلیام‌اهل اوکام (William of Occam) پیش‌بینی شده بود. ممکن بودن یك منطق سه‌ارزشی همچنین توسط هگل‌فیلسوف، درسال ۱۸۹۶، وتوسط هیو مك‌کال (Hugh Maccoll) مورد تـوجه قرار گرفته بود. مع‌هذا این‌تحقیقات‌نظری تأثیرکمی درافکارنسلهای بعدگذاشت وبنابراین‌نمی‌توان آن‌را سهم قاطعی درایجاد این منطق تلقی‌کرد.

همهٔ منطقهای جدیداز نوعی که دربالا بحث‌شد، نیستند.مثلاً، ا. هیتینگک[1] یك منطق علامتی دو ارزشی به‌وجود آورده است تادرخدمت مکتب ریاضی‌شهودگرایی‌قرارگیرد. این‌منطق از این نظر بامنطق ارسطویی متفاوت است کـه به‌طورکامل قانون طرد شق وسط یا قانون نفی مضاعف را نمی‌پذیرد. در این‌صورت، مانند منطقهای چندارزشی، این‌منطق با مقاصد خاص هم تفاوتهایی‌را با قوانین ارسطویی آشکار می‌سازد. این‌گونه منطقها به **منطقهای غیرارسطویی** موسوم‌اند. حقیقت‌اینکه، منطق‌علامتی دوارزشی پرینسیپیا ماتماتیکا غیر ارسطویی‌است؛ این‌منطق به‌جهت معنی‌استلزام درآن، از منطق ارسطویی متفاوت‌است.

منطقهای غیر ارسطویی ثابت کرده‌اندکه، نظیر هندسه‌های غیراقلیدسی، آنها هم از نظرکاربرد بی‌ثمرنیستند. در واقع رایشنباخ منطق بینهایت ارزشی خود را بـدین منظور ابداع کردکه به‌عنوان مبنایی برای نظریهٔ ریاضی احتمالات مورد استفاده قرار گیرد. در سال ۱۹۳۳. ف. سویکی[2] مشاهـده نمودکه منطقهای چند ارزشی را می‌توان در نظریهٔ کوانتوم فیزیـك نوین به‌کارگـرفت. جزئیات بسیاری از چنین کاربردها توسط گارت بیرکهوف[3]، ج.فون‌نویمان[4]، و ه.رایشنباخ در اختیارماقرارداده شده‌اند. نقشی که منطقهای غیرارسطویی دربسط آتی ریاضیات می‌تواند داشته باشد نامشخص، ولی اندیشه در بارهٔ آن دل‌انگیز است؛ به‌کارگرفتن منطق‌علامتی هیتینگک در ریاضیات شهودگرایانه نشانهٔ آن است که منطقهای جدید می‌توانند ازنظر ریاضی پرارزش باشند. دربخش‌آتی به یك‌فایدهٔ احتمالی این منطقها در رفع بحران تازه‌ای درمبانی‌ریاضیات اشاره خواهیم کرد.

ازمطالب بالا اصل مهمی‌دراکتشاف وپیشرفت پدید می‌آید،که همان‌تشکیك سازنده دریك اعتقاد سنتی است. وقتی از اینشتین پرسیدند چگونه به‌کشف نظریهٔ نسبیت نایل‌شده است، پاسخ داد، «باتردیدنسبت به‌یك اصل موضوع». لباچفسکی و بویوئی بااصل‌موضوع توازیهای اقلیدس به‌مبارزه برخاستند؛ همیلتن و کیلی اصل‌جابجایی‌بودن ضرب را به‌مبارزه طلبیدند؛لوکاسیویچ و پست با اصل ارسطویی طردشق وسط درافتادنـد. مشابه‌این احوال، در زمینهٔ علوم، کپرنیك این‌اصل‌را که‌زمین مرکزمنظومهٔ شمسی‌است، مورد سؤال‌قرارداد، گالیله این اصل را کـه سقوط اجسام سنگینتر سریعتر است، به‌مبارزه خواست؛ اینشتین به‌هماوردجویی با این‌اصل‌پرداخت‌که از دولحظهٔ مجزا یکی‌باید مقدم بردیگری‌باشد.این تردیدهای سازنده دراصول،یکی‌از رایجترین روشها در پیشرفت‌در ریاضیات‌است، و این نکته بدون تردید در روح این‌کوتاه سخن مشهور از گئورگ کانتور است کـه: «جوهر ریاضیات درآزادی آن است.»

۱۵-۷ تعارض درنظریهٔ مجموعه‌ها

از مطالعهٔ تاریخ ریاضیات از عهد یونـان‌باستان تازمان حـاضرآشکار می‌شودکـه مبانی

---

1. A. Heyting 2. F. Zwicky 3. Garrett Birkhoff
4. J. Von Neumann

ریاضیات، سه‌بحران تکان‌دهنده را پشت سر گذاشته است، که در آنها، در هرمورد، بخشی وسیع از ریاضیات که تا آن زمان استوار به‌نظر می‌رسیده درمعرض تردید قرارگرفته و به‌تجدید نظر فوری نیاز پیداکرده است.

نخستین بحران درمبانی ریاضیات درقرن پنجم ق. م. پیش‌آمد، و در واقع، چنین بحرانی نمی‌توانست پیشتر ازآن رخ‌دهد، زیرا ، همچنانکه دیده‌ایم ، ریاضیات به‌عنوان یك علم قیاسی زودتر از قرن ششم ق.م.، شاید به‌توسط تالس، فیثاغورس و شاگردان آنها شروع نشده‌بود. این بحران باکشف نامنتظر این‌مطلب که همهٔ کمیتهای هندسی‌همجنس بایکدیگر متوافق نیستند، به‌جلو انداخته شد؛ مثلاً نشان داده شدکه قطر و ضلع یك مربع هیچ مقیاس مشترکی ندارند. چون بسط فیثاغورسی کمیتها براین اعتقاد راسخ شهودی‌که همهٔ کمیتهای همجنس متوافق‌اند، بناشده بود؛ این‌کشف‌که‌کمیتهای همجنس، نامتوافق هم می‌توانند باشند، بسیار مخرب ازکار درآمد. به‌عنوان مثال، کل نظریهٔ فیثاغورسی تناسب باهمهٔ تبعات آن می‌بایست به‌دلیل سست‌بنیادی به‌کناری گذاشته می‌شد. رفع این نخستین بحران درمبانی ریاضیات نه به‌سادگی ونه‌به‌سرعت میسر بود. این‌مقصود سرانجام درحدود سال ۳۷۰ ق.م. توسط ائودوکسوس زیرك حاصل شد، که نظریهٔ تجدید نظریافتهٔ او در-بارهٔکمیتها وتناسب، یکی از بزرگترین شاهکارهای همهٔ اعصار است. بررسی قابل توجه ائودوکسوس از نامتوافقهارا می‌توان درمقالهٔ پنجم اصول اقلیدس یافت؛ مطالعهٔ وی‌اساساً با شرح جدیدی‌که توسط ریشارد ددکیند درسال ۱۸۷۲ از اعدادگویا داده شد، انطباق دارد. ما این نخستین‌بحران درمبانی ریاضیات را دربخش ۳-۵، و چگونگی رفع آن‌را توسط ائودوکسوس، دربخش۵-۵ دیده‌ایم. این‌امکان کاملاً موجود است‌که بحران‌مزبور عمدتاً براثر فرمولبندی وپذیرش روش اصل موضوعی در ریاضیات پیدا شده‌باشد.

دومین بحران درمبانی‌ریاضیات پس‌ازکشف حسابان‌توسط نیوتن‌ولایبنیتز دراواخر قرن هفدهم پیش‌آمد*. دیدیم‌که چگونه جانشینان این‌دوتن، سرمست ازقدرت وکارپذیری این‌ابزار جدید، از استحکام به‌قدرکفایت پایه‌ای‌که این موضوع برآن بناشده بود غافل ماندند، به‌طوری‌که به‌جای داشتن براهینی‌که نتایج را موجه نماید، نتایج را برای‌توجیه براهین به‌کارگرفتند. باگذشت زمان تناقضها وپارادوکسهای‌روزافزون پیش‌آمد، وبحرانی جدی درمبانی ریاضیات آشکارگردید. این‌نکته بیشتر وبیشتر تشخیص داده شدکه بنای آنالیزخانه‌ای به‌روی‌شن است وسرانجام دراوایل قرن‌نوزدهم، کوشی اولین‌گامها را در جهت حل این‌بحران، باگذاشتن روش دقیق حدود به‌جای روش مبهم بینهایت‌کوچکها، برداشت. با به‌اصطلاح حسابیدن آنالیزکه توسط وایرشتراس و پیروانش درقدم بعدانجام شد، این احساس به‌وجود آمدکه بردومین بحران درمبانی آنالیز غلبه حاصل شده است، وکل ساختار ریاضیات ازمشکل‌رها و برپایه‌ای عاری از اشکال قرارداده شده‌است. ریشه ونحوهٔ رفع این دومین بحران درمبانی ریاضیات موضوع بخش ۱۴-۹ بود.

---

* پیش اخطارهای این‌بحران را می‌توان در پارادوکسهای مشهور زنون به‌حدود ۴۵۰ ق.م. مشاهده کرد.

سومین بحران درمبانی ریاضیات به‌طورغیر مترقبه‌ای درسال ۱۸۹۷ متجسم‌شد، و، گرچه‌اکنون قدمتی بیش‌ازنصف قرن دارد، هنوز به‌نحوی‌که رضایت همهٔ‌افراد ذیعلاقه‌را فراهم‌آورد، حل‌نشده‌است. این‌بحران باکشف‌پارادوکسها یاتعارضاتی‌درحاشیه نظریهٔ‌عام مجموعه‌ها منسوب به‌کانتور، پدیدارشد. چون مفاهیم مجموعه‌تداخل‌زیادی درقسمت اعظم ریاضیات دارد، وبه‌همین دلیل، می‌توان در واقع‌آن را پایه‌ای برای ریاضیات قرار داد، کشف‌پارادوکسهایی درنظریهٔ مجموعه‌ها طبیعتاً در اعتبارتمامیت ساختاربنیادی ریاضیات سایهٔ تردید می‌افکند.

درسال ۱۸۹۷ ریاضیدان ایتالیائی، بورالی ــ فورتی[1]، اولین پارادوکس‌درنظریهٔ مجموعه‌ها را به‌معرض توجه عموم درآورد. این‌پارادوکس به‌صورتی‌که در ذهن‌بورالی‌ـ فورتی بوده و توسط او بیان شده، متضمن اصطلاحات فنی وایده‌هایی است‌که، در این بررسی محدود، جای بسط‌آن وجود ندارد. مع‌هذا، جوهر این پارادوکس را می‌توان با یك توصیف غیرفنی ازپارادوکس‌کاملاً مشابهی‌که دوسال‌بعدتوسط کانتور پیدا شد، ارائه کرد. کانتور درنظریهٔ مجموعه‌های خود موفق به‌اثبات این مطلب شد کــه به‌ازای هر عدد ترانسفینی مفروض همواره یك عدد ترانسفینی‌بزرگتر ازآن وجوددارد. یعنی همانطورکه بزرگترین عدد طبیعی موجود نیست ، بزرگترین عدد تــرانسفینی هم وجود نــدارد. حال مجموعه‌ای را درنظر بگیریدکه اعضای آن کلیهٔ مجموعه‌هــای ممکن باشند. مطمئناً هیچ مجموعه‌ای نمی‌تواند اعضایی بیش از این مجموعهٔ کلیهٔ مجموعه‌ها داشته باشد. ولی‌اگر چنین بــاشد چگونه یك عدد متعالی بزرگتر از عدد تــرانسفینی این مجموعه می‌توانــد وجود داشته‌باشد؟

در حالی‌که پارادوکسهای بــورالی ـ فورتــی و کانتور متضمن نتایجی از نظریهٔ مجموعه‌هاست، برتراند راسل در سال۱۹۰۲ پارادوکسی‌کشف‌کردکه به‌چیزی جزمفهوم صرف خود مجموعــه بستگی ندارد. قبل از بیان پــارادوکس راسل، متذکر می‌شویم‌که مجموعه‌ها یا اعضای خودهستند یااعضای خودنیستند. مثلاً مجموعهٔ همهٔ‌ایده‌های‌مجردخود ایدهٔ مجردی است ، ولــی مجموعهٔ همهٔ انسانها یك انسان نیست . همچنین ، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها خود یك مجموعه است، ولی مجموعهٔ‌کلیهٔ ستارگان یك ستاره نیست. مجموعهٔ کلیهٔ مجموعه‌هایی‌را که اعضای خودشان هستند با M، ومجموعهٔ‌کلیهٔ مجموعه‌هایی راکه اعضای خودشان نیستند با N نشان می‌دهیم. حال ازخود می‌پرسیم‌که آیا مجموعهٔNعضو خودش هــت یانیست . اگر N یکی از اعضای خودش باشد ، در این صورت N عضو M است ونه عضو N، و N یك عضوخودش نیست. ازطرف دیگر، اگرN یکی‌ازاعضای خود نباشد، آنــگاه N یکی از اعضای N و نــه M است ، وN یکی از اعضای خودش می‌باشد. پارادوکس از این‌حقیقت ناشی می‌شودکه درهرحالت به‌یك تناقض می‌رسیم.

صورت‌فشرده‌تر و دور از اطنابی از پارادوکس راسل را می‌توان به‌شکل‌زیرارائه کرد. فرض‌کنید X مجموعهٔ دلخواهی باشد. دراین صورت بنابر تعریف N،

1. Burali – Forti

$$(X\in N) \longleftrightarrow (X\notin X)$$

حال X را N بگیرید، و به تناقض زیر برسید

$$(N\in N) \longleftrightarrow (N\notin N).$$

راسل این پارادوکس را طی نامه‌ای برای فرگه فرستاد. این نامه درست بعداز آنکه فرگه آخرین جلد اثر عظیم دوجلدی خود در بارهٔ مبانی حساب را تکمیل کرده بود، به‌او رسید. فرگه در پایان کتاب خود باجملات متأثر کننده وکاملاً توأم‌باخویشتن‌داری زیر به‌این نامه اشاره کرد. «برای یك دانشمند هیچ‌چیزی نامطبوعتر از آن نیست که به‌محض اتمام کاری مبنای آن را در حال فروپاشی ببیند. نامه‌ای از آقای برتراند راسل در زمانـی که کتاب تقریباً آماده سپردن به چاپخانه بود، مرا درچنین وضعی قـرارداده است.» حاصل زحمات ده‌سال یا بیشتر، همین بود.

به‌پارادوکس راسل به‌شکلهای مختلف جنبهٔ‌عامیانه داده شده‌است. یکی‌از مشهورترین شکلهای آن توسط خود راسل در سال ۱۹۱۹ داده شد و به‌گرفتاری آرایشگری در یك دهکدهٔ معین مربوط می‌شود که مبنای کار خودرا براین گذارده کـه فقط وفقط صورت آن عده از اهالی دهکده را بتراشد که خود صورت خود را نمی‌تراشند. ماهیت پارادوکسی وضعیت این شخص وقتی تشخیص داده می‌شود که بخواهیم به‌سؤال زیر پاسخ دهیم، «آیا این آرایشگرصورت خود را خود می‌تراشد یا نه؟» اگـر وی صورت خود را بتراشد، در این‌صورت مطابق‌اصل اعلام شده از طـرف خود، نباید ایـن کار را انجام دهد، اگر وی صورتش‌را خود نتراشد، دراین‌صورت مطابق اصل خود باید این کار را انجام دهد.

از زمان کشف تناقضهای بالا دربطن‌نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها، پارادوکسهای فراوان دیگری به‌وجود آمده‌اند. این پارادوکسهای جدید نظریهٔ مجموعه‌ها به چندین پارادوکس قدیمی در منطق‌مربوط می‌شوند. مثلاً نکتهٔ زیر به‌ائوبولیدس[1] مربوط به‌قرن چهارم ق.م. نسبت داده می‌شود، «چیزی که الان می‌گویم نادرست است.» اگر گفتهٔ ائوبولیدس درست باشد، آنگاه بنابر گفتهٔ خود او، این گفته باید نادرست باشد. از طرف دیگر، اگـر گفتهٔ ائوبولیدس نادرست باشد، دراین صورت نتیجه می‌شود که گفتهٔ او باید درست باشد. بدین ترتیب گفتهٔ ائوبولیدس نمی‌تواند بی‌آنکه‌موجب تناقضی شود نه‌درست ونه‌نادرست باشد. پارادوکسی منسوب به‌اپیمنیدس[2]، که درصحت انتساب آن به‌اپیمنیدس جای تردید است، شاید قدیمیتر از پارادوکس‌ائوبولیدس باشد. اپیمنیدس که خود فیلسوفی‌از اهالی کرت[3] درقرن ششم ق.م. بود، گویا چنین گفته است که «اهالی کرت همیشه دروغ می گویند». از تحلیل سادهٔ این گفته آشکار می‌شود که این نیز ناقض خود است.

وجود پارادوکسهایی در نظریهٔ‌مجموعه‌ها، نظیر پارادوکسهای بالا، به‌وضوح آشکار می‌کنند که‌کارازجایی‌عیب دارد. از زمان کشف‌آنها، نوشته‌های زیادی در بارهٔ‌این‌موضوع منتشر، وکوششهای متعددی درجهت رفع آنها پیشنهاد شده‌است.

---

1. Eubulides 2. Epimenides 3. Crete

تا آنجا که به‌ریاضیات مربوط می‌شود، راه مفری برای ایـن وضع موجود است. تنها لازم است‌که نظریهٔ مجموعه‌ها را بریك پایهٔ اصل موضوعی با محدودیتی‌کافی بناکرد تا چنین تعارضهایی در احکام آن طرد شوند. چنین‌کوششی برای اولین‌بار توسط تسرملو درسال ۱۹۰۸ انجام‌شد، وتنقیحهای بعدی آن توسط فرانکل[1] (۱۹۲۲–۱۹۲۵)، اسکولم[2] (۱۹۲۲، ۱۹۲۹)، فون‌نویمان (۱۹۲۴–۱۹۲۸)، بـرنیس (۱۹۳۷–۱۹۴۸)، و دیگران به‌عمل آمده است . اما چنین روشهایی با عنوان اینکه هدف آنها صرفـاً اجتناب از این پارادوکسهاست، مورد انتقاد قرارگرفته‌است؛ این روش مطمئناً توضیحی راجـع به‌این پارادوکسها نمی‌دهد. وانگهی‌دراین روش‌تضمینی‌نیست‌که انواع دیگری از پارادوکسها درآینده رخ ندهند.

روش دیگری وجود داردکه ظاهراً هم این پارادوکسهارا توضیح می‌دهد و هم از آنها برکنار می‌ماند. درصورت امتحان دقیق، مشاهده می‌شودکه هریك از پارادوکسهای مورد بحث دربالا متضمن مجموعه‌ای مانند S وعضوی مانند m از S است‌که تعریف آن به S بستگی‌دارد. چنین‌تعریفهایی **غیراسنادی** نامیده می‌شوند، وتعریفهای غیراسنادی به‌یك معنی دوری‌اند. برای مثال، پارادوکس آرایشگر راسل را درنظر بگیرید. فرض‌کنیدکه m معرف آرایشگر و S معرف مجموعهٔ کلیهٔ اعضای دهکدهٔ آرایشگر باشد. در این صورت m به‌طور غیراسنادی چنین‌تعریف می‌شود «آن عضو S که فقط وفقط صورت آن اعضای S را می‌تراشدکه صورت خود را نمی‌تراشند». ماهیت دوری بـودن این تعریف‌آشکار است ـ تعریف آرایشگر اعضای دهکده را شامل می‌شود وخود آرایشگر یکی‌ازاعضای این دهکده است.

پوانکاره علت این‌تناقضها در احکام را درتعریفهای غیراسنادی می‌دانست، و راسل همین نظر را در اصل‌دورفاسد خود بیان کرد : هیچ مجموعه‌ای مانند S مجاز به داشتن اعضایی مانند m که تنها در قالب S قابل تعریف باشند، یا اعضایی مانند m که متضمن S اند یاپیشفرض آنها S است، نیست. این‌اصل معادل باتحدیدی درمفهوم مجموعه است. کانتور با بیان زیرسعی‌کرده بودکه به‌مفهوم مجموعه معنی عامتری بدهد: منظور ما از یك مجموعهٔ S هرگردایه‌ای است منتخب ازکل اشیاء مجزا ومعین مانند m که درشهود واندیشه ما وجود دارد؛ این اشیاء m عناصر S نامیده می‌شوند. نظریـهٔ مجموعه‌هایی کـه برمبنای مفهوم‌عام کانتور از مجموعه ساخته شود، هما نطورکه دیده‌ایم، به‌تناقضهایی منجرمی‌شود، ولی اگر مفهوم مجموعه بنابر اصل دورفاسد محدود شود، نظریهٔ حاصل، دور ازتعارضاتی است‌که بر ما معلوم‌اند. بدین‌ترتیب به‌نظر می‌رسدکه منع تعریفهای غیراسنادی راه حلی برای پارادوکسهای معلوم نظریهٔ مجموعه‌ها باشد. مع‌هذا، یك ایرادجدی براین راه حل وارد است و آن این است‌که بخشهایی در ریاضیات وجود دارند، که ریاضیدانان اکراه زیاد ازکنارگذاشتن آنها دارند واین بخشها حاوی‌تعریفهای غیراسنادی‌اند.

یك‌مثال‌ازتعریف غیراسنادی در ریاضیات، تعریف کوچکترین کران بالای یك‌مجموعهٔ

---

1. Fraenkel 2. Skolem

ناتهی مفروض از اعداد حقیقی است ـ کوچکترین کـران بالای یك مجموعـهٔ مفروض ، کوچکترین عضو مجموعهٔ کلیهٔ کرانهای بالای مجموعهٔ مفروض است. موارد مشابه زیادی از تعریفهای غیر اسنادی در ریاضیات موجود است، گرچه می‌توان با تدبیر بر بسیاری از آنها چیره شد. درسال ۱۹۱۸، هرمان وایل[1] درپی کشف این مطلب برآمد که چه مقداری از آنالیز را می‌توان از ریشهٔ دستگاه اعداد حقیقی بـدون استفاده از تعریفهـای غیراسنادی بنا کرد . گرچه وی در به‌دست آوردن قسمت قابل مـلاحظه‌ای از آنالیز موفق شد ، در استخراج این قضیهٔ مهم که هرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی با کران بالا، یك کوچکترین کران بالا دارد، موفقیتی حاصل نکرد.

کوششهای دیگری که برای رفع پارادوکسهای نظریهٔ مجموعه‌هـا به‌عمل آمده‌اند، ناظر به‌یافتن مشکلات منطق هستند، و باید پذیرفت که کشف این پارادوکسها درنظریهٔ عام مجموعه‌ها زمینه‌را برای تفحص کامل درمبانی منطق فراهم کرده است. یك پیشنهاد وسوسه‌انگیز برای دفع این پارادوکسها، شاید دراستفاده ازیك منطق سه‌ارزشی باشد. مثلاً، در پارادوکس راسل که دربالا داده شد، دیدیم که، «N عضوی از خودش است»، می‌تواند نه درست باشد ونه‌نادرست. دراینجا وجود یك امکان سوم، می‌تواند مفید باشد. با نشان‌دادن ارزش درستی یك گزاره با T، ارزش نادرستی آن با F، ویك ارزش سوم، که نه T ونه F است با ؟ (شاید به‌معنی ، غیرقابل تصمیم) ، می‌توان مشکل را با رده‌بندی گزارهٔ اخیر به‌عنوان؟ برطرف کرد.

سه فلسفهٔ اصلی، یامکتب تفکر، در رابطه بامبانی ریاضیات پیدا شده‌است ـ به‌اصطلاح مکتب منطق‌گرا، مکتب شهودگرا، ومکتب صوری‌گرا. طبیعی است که هرفلسفهٔ نوین مبانی ریاضیات باید ، به‌نحوی ، با بحران کنونی درمبانی ریاضیات مقابله کند . در بخش آتی به‌طور مختصر این سه مکتب فکری را مورد بررسی قرار داده و متذکر خواهیم شد که چگونه هریك از اینها راهی برای مواجهه با تعارضهای نظریهٔ عـام مجموعه‌ها در پیش‌پا می‌گذارد.

۱۵-۸ فلسفه‌های ریاضیات

یك فلسفه‌را می‌توان توضیحی دانست که درصدد افادهٔ معنی برای بی‌نظمی طبیعی‌مجموعه‌ای از تجارب برمی‌آید. از این دیدگاه، امکان آن هست که تقریباً برای هـرچیزی فلسفه‌ای داشته‌باشیم. فلسفهٔ‌هنر، فلسفهٔ زندگی، فلسفهٔ مذهب، فلسفهٔ‌آموزش، فلسفهٔ‌جامعه، فلسفهٔ‌تاریخ، فلسفهٔ علوم، فلسفهٔ ریاضیات ، و حتی فلسفهٔ خود فلسفه. یك فلسفه همانا یك فرایند تهذیب ونظم‌دهی تجارب و ارزشهاست. فلسفه در جستجوی روابط بین اشیائی است که درحالت عادی شباهتی بین آنها متصور نیست، و درپی تفاوتهای مهم بین‌چیزهایی است که‌درحالت عادی یکسان تلقی می‌شوند؛ فلسفه بیان نظریه‌ای است درباب ماهیت چیزی. به‌ویژه، یك فلسفهٔ ریاضیات اساساً عبارت است از بازسازی مجدانه‌ای که درآن به‌تودهٔ بی‌نظم معرفت

---

1. Hermann Weyl

ریاضی که طی سالیان متمادی برهم انباشته شده معنی یا نظم خاصی داده‌می‌شود. روشن است که فلسفه تابعی از زمان است، و فلسفهٔ خاصی ممکن است باگذشت زمان منسوخ یا در پرتو تجارب اضافی تغییر یابد. ما در اینجا فقط به فلسفه‌های معاصر ریاضی می‌پردازیم- فلسفه‌هایی که ناظر بر پیشرفتهای اخیر در ریاضیات وبحران کنونی در این‌موضوع هستند.

امروزه سه‌فلسفهٔ اصلی ریاضی وجود داردکه هریك از آنها گروه معتنابهی هواخواه دارد و هریك، مجموعهٔ بزرگی از نوشته‌های مربوطه را پدید آورده‌اند. این فلسفه‌ها عنوانهای زیررا دارند، مکتب منطق گرا، که مفسرین عمدهٔ آن‌راسل و وایتهد هستند، مکتب شهودگرا، به رهبری براوئر و مکتب صوری گرا، که عمدتاً توسط هیلبرت به‌وجود آمد. البته، جزاین‌سه‌فلسفه، فلسفه‌های ریاضی دیگری درعصرحاضروجود دارند، چندفلسفهٔ‌مستقل وجود دارند و فلسفه‌های دیگری هم هستندکه آمیزه و اختلاطی از این سه فلسفهٔ اصلی هستند، ولی این دیدگاههای دیگر هنوز چندان بارور نشده، یامتضمن بازسازی ریاضیات به حد قابل مقایسه با این فلسفه‌ها نیستند.

۱. منطق گرایی. تزمنطق گرا آن است که ریاضیات شاخه‌ای از منطق است. به‌جای آنکه منطق‌ابزاری برای ریاضیات باشد، منطق‌پیشرو ریاضیات‌می‌شود. همهٔ‌مفاهیم ریاضی باید در قالب مفاهیم منطقی تدوین شوند، وهمهٔ قضایای ریاضیات باید به‌عنوان قضایای منطق بسط یابند؛ تمایز بین ریاضیات و منطق صرفاً به عملی برای تسهیل کار در می‌آید.

مفهوم منطق به‌عنوان‌علمی در بر دارندهٔ اصول وایده‌های زمینه‌ساز همهٔ علوم دیگر حداقل به زمان‌لایبنیتز (۱۶۶۶) باز می‌گردد. تحویل عملی‌مفاهیم ریاضی به‌مفاهیم منطقی توسط ددکیند (۱۸۸۸) و فرگه (۱۸۸۴- ۱۹۰۳) انجام شد، وپئانو (۱۸۸۹-۱۹۰۸) مبادرت به بیان قضایای ریاضی به‌کمك نمادگرایی منطقی نمود. از اینرو این دانشمندان پیشگامان مکتب منطق گرا هستندکه بیان قاطع آن در اثر تاریخی پرینسیپیاماتماتیکای وایتهد و راسل (۱۹۱۰-۱۹۱۳) متبلور شده‌است. این‌اثرعظیم و پیچیده درصددآن است که به‌تفصیل همهٔ‌ریاضیات رابه‌منطق تحویل‌نماید. اصلاحات وپیرایشهای بعدی این‌برنامه توسط ویتگنشتین[1] (۱۹۲۲)، خفیستك[2] (۱۹۲۴-۱۹۲۵)، رمزی[3] (۱۹۲۶)، لنگفورد[4] (۱۹۲۷)، کارناپ[5] (۱۹۳۱)، کواین[6] (۱۹۴۰)، وسایرین انجام شد.

تز منطق‌گرا طبیعتاً از تلاش برای تعمیق هرچه بیشترمبانی ریاضیات ناشی گردید. قبلاً دیده‌ایم که چگونه این‌مبانی در دستگاه اعداد حقیقی تأسیس شده، وسپس از دستگاه اعداد حقیقی به دستگاه اعداد طبیعی، وازآن، بـه نظریهٔ مجموعه‌ها فراتر برده شده‌اند. چون نظریهٔ طبقات قسمت مهمی از منطق است، طبیعی است اندیشهٔ تحویل ریاضیات به منطق وارد ذهن شود. بدین‌ترتیب تز منطق‌گرایی ترکیب‌سازی مجدانه‌ای است که براثر گرایش پر اهمیتی در تاریخ‌کاربرد روش اصل موضوعی، به ذهن متبادر می‌شود.

---

1. Wittgenstein 2. Chwistek 3. Ramsey 4. Langford
5. Carnap 6. Quine

برتراند راسل
(مجموعهٔ کتابخانهٔ عمومی نیویورك)

پرینسیپیاماتماتیکا با «مفاهیم اولیه» و «گزارههای اولیه»، متناظر با «اصطلاحات تعریف نشده»و « اصول موضوعهٔ» یك مبحث مجرد صوری آغاز میشود . این مفاهیم و گزارههای اولیه نباید در معرض تعبیر و تفسیر قرار گیرند، بلکه باید بهمفاهیم شهودی منطق محدود گردند؛ آنها را باید به عنوان توصیفهای موجه و فرضهایی دربارهٔ دنیای واقعی تلقیکرد یا حداقل آنها را چنین پذیرفت.کوتاه سخنآنکه، در اینجا یك دیدگاه ملموس حاکماست ونهیك دیدگاهمجرد، و درنتیجه هیچتلاشی برای اثبات سازگاریاین گزارههای اولیه بهعملنمیآید. هدف پرینسیپیاماتماتیکا بسط مفاهیم و قضایای ریاضی از این مفاهیم وگزارههای اولیه استکه با یك حسابگزارهها آغاز میشود و از طریق نظریهٔ طبقات و رابطهها بهطرف تأسیس دستگاه اعداد طبیعی و از آنجا به سمت همهٔ ریاضیاتیکه از دستگاه اعداد طبیعی قابل استخراج است، پیش میرود. در این بسط اعدادطبیعی باهمان معانییکه بهطورمعمول به آنها منتسب میشود، ظاهر میشوند و بهطور نایکتا به مثابهٔ هر چیزیکه در مجموعهٔ معینی از اصول موضوعهٔ مجرد صدق میکنند ، تعریف نمیشوند.

برای اجتناب ازتناقضهای نظریهٔ مجموعهها، در پرینسیپیاماتماتیکا «نظریهٔ نوعها» بهکارگرفته میشود. با توصیف تا حدی خیلی ساده، یك چنین نظریهای سلسله مراتبی در سطح عناصر برقرار میکند. عناصر اولیه ، عناصر نوع ۰ را تشکیل میدهند، طبقات عناصر نوع ۰ ، عناصر نوع ۱ را تشکیل میدهند ، طبقات عناصر نوع ۱ ، عناصر نوع ۲ را تشکیل میدهند ؛ و همینطور الی آخر . در بهکارگیری نظریهٔ نوعها ، از این قانون تبعیت میشود کهکلیهٔ عناصر هر طبقه باید از یك نوع باشند . پیروی از این قاعده تعاریف غیراسنادی را مستثنی میسازد و بدین ترتیب از پارادوکسهای نظریهٔ مجموعهها احتراز میشود . بهگونهای که در طرح اصلی پرینسیپیا ماتماتیکا

عمل شده‌است، سلسله مراتبی در داخل سلسله مراتب دیده می‌شود که به‌اصطلاح نظریهٔ «شاخه‌ای» انواع منجرشده است. برای به‌دست آوردن تعریفهای غیر اسنادی‌مورد نیاز در تأسیس آنالیز، یك «اصل قابلیت تحویل» باید وارد بحث می‌شد. ماهیت غیر بدوی و اختیاری این اصل انتقاداتی جدی را متوجه آن کرد، و قسمت عمدهٔ پیرایشهای برنامهٔ منطق‌گرایی تلاشهایی برای‌ابداع روشی جهت احتراز ازاین‌اصل‌نامطبوع قابلیت تحویل معطوف بوده‌است.

در پاگرفتن یانگرفتن‌تز منطق‌گرا ظاهراً هرکس نظری دارد. با آنکه برخی برنامه را رضایتبخش می‌دانند، عده‌ای دیگر ایرادهایی درآن یافته‌اند. حداقل در یك مورد، تز منطق‌گرا را می‌توان از این لحاظ مورد پرسش قرار دادکه بسط منظم منطق (به‌عنوان یك مبحث سازمان یافته) مفاهیم ریاضی از قبیل مفهوم بنیادی تکرار راکه بایستی در شرح نظریهٔ انواع یا مفهوم استنتاج از مقدمات معلوم به‌کار برده شود، از پیش انگاشته می‌گیرد.

آلفرد نورث وایتهد[1] در رمزگیت[2] انگلیس، در سال ۱۸۶۱،به دنیا آمد، و از ۱۸۸۵ تا ۱۹۱۱ در دانشکدهٔ شربورن[3] وکالج ترینیتی‌کیمبریج درس خواند. از ۱۸۸۵ تا ۱۹۱۱ درکالج ترینیتی به تدریس ریاضیات و سپس درکالج یونیورسیتی در دانشگاه لندن به تدریس ریاضیات کاربسته و مکانیك پرداخت. وی از ۱۹۱۴ تا ۱۹۲۴ در کالج سلطنتی علم و صنعت[4] دانشگاه لندن استاد ریاضیات بود و پس از آن به عنوان استاد فلسفه در دانشگاه هاروارد به ایالات متحده رفت و این سمت را تا زمان بازنشستگی در سال ۱۹۳۶ بر عهده داشت. در سال ۱۹۴۷ در کیمبریج ماساچوست[5] درگذشت. مانند ممتازترین دانشجوی خود، برتراندراسل، وایتهد به‌فلسفه از دیدگاه‌ریاضیات می‌نگریست واین‌دوشخصیت همراه‌باهم، اثر دوران سازخود پرینسیپیاماتماتیکا را درسالهای‌۱۹۱۰–۱۹۱۳ به‌نگارش درآوردند. وایتهد چندین اثر بسیار روان در ریاضیات و فلسفه منتشر کرد.

برتراندآرثر ویلیام راسل[6]، از اخلاف یك خانوادهٔ اشرافی، در نزدیکی ترلك[7]، ویلز[8]، در سال ۱۸۷۲، متولدشد. وی که برندهٔ یك‌بورس آزاد درکالج‌ترینیتی، کیمبریج، بود در ریاضیات وفلسفه مقام بسیار ممتازی یافت، و پیش وایتهد درس خواند. علاوه بر تدریس، عمدتاً در دانشگاههای ایالات متحده، وی بالغ بر چهل کتاب در ریاضیات، منطق، فلسفه، جامعه شناسی، و آموزش نوشت. وی جوایز بسیاری مانند نشان سیلوستر و نشان دمورگن انجمن‌سلطنتی (۱۹۳۴)، نشان لیاقت[9] (۱۹۴۰)، و جایزهٔ نوبل در ادبیات (۱۹۵۰) دریافت‌کرد. اظهار نظرهای بی‌پردهٔ او اغلب اورا به‌ستیزه و جدل می‌کشیدند.

---

1. Alfred North Whitehead 2. Ramsgate 3. Sherborne
4. Imperial College of Science and Technology 5. Massachusetts
6. Bertrand Arthur William Russell 7. Trelleck 8. Wales
9. Order of Merit

در طول جنگ جهانی اول او را از دانشگاه کیمبریج اخراج و به‌مدت چهار ماه به دلیل عقاید صلح طلبانه و مخالفت با سربازگیری زندانی کردند. در اوایل سالهای ۱۹۶۰ به رهبری جنبشهای صلح طلبانه به منظور منع تسلیحات هسته‌ای پرداخت، و باز به مدت کوتاهی به زندان افتاد. وی که مردی با ذهن و استعداد درخشان بود، در سال ۱۹۷۰، در حالی‌که تا آخرین لحظه هوشیاری ذهنی خود را حفظ کرده بود، در سن نودوهشت سالگی دنیا را وداع گفت.

۲. شهودگرایی. تز شهودگرا آن است که ریاضیات باید منحصراً به توسط یك عدهٔمتناهی از روشهای سازنده دربارهٔ دنبالهٔ اعداد طبیعی که به‌طور شهودی در نظر گرفته شده‌اند، بنا شود. لذا مطابق این‌نظر، در زیربنای ریاضیات شهود اولیه‌ای قرار دارد که، بدون تردید، با حس گذرایی قبل و بعد در وجود ما همراه است و به ما اجازه می‌دهدیك چیز واحد، سپس یکی‌دیگر، سپس یکی‌دیگر، و همینطورتابه‌طور بی‌پایان را تصورکنیم. بدین‌ترتیب دنباله‌های بی‌انتهارا به‌دست می‌آوریم، که معروفترین آنها دستگاه‌اعداد طبیعی است. از این‌مبنای شهودی دنبالهٔ اعداد طبیعی، هرشیء ریاضی دیگر را باید به‌یك روال سازنده بناکرد ودرآن‌تعدادی متناهی ازمراحل یا اعمال رابه‌کاربرد. در تز شهودگرا بسط ریاضیات از لحاظ تکوینی تا سر حد امکان دنبال می‌شود.

مکتب شهودگرا (به عنوان یك‌مکتب) در حدود سال ۱۹۰۸ به توسط ریاضیدان هلندی ل. ا. ی. براوئر آغاز شد، ولی برخی مفاهیم شهودگرایانه قبلاً توسط کسانی چون کرونکر (درسالهای ۱۸۸۰) و پوانکاره (۱۹۰۲-۱۹۰۶) ابراز شده‌بود. این‌مکتب باگذشت زمان تدریجاً تقویت شده، برخی از ریاضیدانان برجستهٔ‌کنونی را به خود جلب کرده، و تأثیر فوق‌العاده‌ای درتمام افکار مربوط به‌مبانی ریاضیات گذاشته است.

برخی از پیامدهای تز شهودگرا جنبهٔ انقلابی دارند. مثلاً پافشاری بر روشهای سازنده به تصوری از وجود در ریاضیات منجر می‌شودکه آن چیزی نیست که همهٔ ریاضیدانان به‌آن اعتقاد داشته‌باشند. برای شهودگرایان، هستیی‌که اثبات وجودآن لازم است، باید در تعدادی مراحل متناهی ساختنی باشد، کافی نیست که فرض عدم وجود آن هستی منجر به تناقض شود. این بدان معنی است که بسیاری از براهین وجودی زیادی که در ریاضیات کنونی دیده می‌شوند، برای شهودگرایان قابل قبول نیستند.

مورد مهمی ازپافشاری شهودگرایان بر روشهای‌سازنده، نظریهٔ مجموعه‌هاست. از نظرشهودگرایان، یك مجموعه‌را نمی‌توان به عنوان گردایهٔ ساخته‌وپرداخته‌ای تصورکرد، بلکه بایدآن‌را به‌عنوان قانونی‌تلقی‌کرد که به‌کمك آن عناصرمجموعه‌را بتوان به‌یك روال قدم به‌قدم بناکرد. این‌مفهوم مجموعه‌امکان وجودمجموعه‌های تناقض‌آمیزی‌مانند «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» را رد می‌کند.

یك پیامد قابل توجه دیگر از پافشاری شهودگرایان برساختنی بودن متناهی، نفی پذیرهٔ عام قانون طرد شق وسط است. مثلاً، عدد x را در نظر بگیرید که برابر $(-1)^k$ تعریف می‌شود، که در آن k شمارهٔ اولین رقم در بسط اعشاری π است که دنبالهٔ ارقام متوالی ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ باآن شروع می‌شود، و، درصورت نبودن چنین kیی، $x = 0$.

حال گرچه x خوشتعریف است، نمی‌توانیم بلادرنگ، تحت محدودیتهای شهودگرا، بگوییم که گزارهٔ «$x = 0$» درست یا نادرست است. تنها به‌شرطی می‌توان گفت این گزاره درست است که برهانی از آن را بتوان با تعدادی مراحل متناهی ساخت، و تنها به شرطی می‌توان گفت نادرست است که برهانی از چنین وضع با تعدادی مراحل متناهی ساخته شود. مادامی که یکی از این دو برهان‌ساخته نشده‌اند، گزاره نه‌درست است و نه نادرست، و قانون طرد شق وسط غیر قابل‌کاربرد است. اما اگر k را به عددی کوچکتر از مثلاً یك بیلیون محدود کنیم، آنگاه کاملاً درست است بگوییم که اینك گزاره درست یانادرست است، زیرا، برای k کوچکتر از یك بیلیون، درستی یا نادرستی گزاره را مطمئناً می‌توان در یك عدهٔ متناهی مرحله، برقرار کرد.

بنابراین، برای شهودگرایان، قانون طرد شق‌وسط برای‌مجموعه‌های متناهی برقرار است ولی نباید آن را در مورد مجموعه‌های غیر متناهی به‌کاربرد. براوثر تقصیر چنین اوضاعی را به‌گردن بسط منطق از لحاظ جامعه شناسی می‌اندازد. قوانین منطق در زمانی از تکامل انسان ظاهر شده است که وی زبان مناسبی برای پرداختن به‌مجموعه‌های متناهی از پدیده‌ها در اختیار داشته است؛ او سپس خطای به کار بردن این قوانین را در مجموعه‌های نامتناهی در ریاضیات مرتکب و نتیجه آن شده است که تعارضها در احکام ظاهر شوند.

در پرینسیپیا ماتماتیکا، قانون‌طرد شق‌وسط و قانون‌تناقض معادل‌هستند. برای‌شهود-گرایان ، چنین وضعی حاکم نیست ، و این مسئلهٔ جالبی است که سعی کنیم با الهام از اندیشه‌های شهودگرایان ، به ساختن ابزارهای منطقی لازم مبادرت ورزیم. این‌کار در سال ۱۹۳۰ توسط ا. هیتینگ[1] انجام شد و وی موفق به بسط یك‌منطق علامتی شهودگرا شد. بدین ترتیب ریاضیات شهودگرا منطق خاص خود را به‌وجود می‌آورد، و در نتیجه منطق ریاضی، شاخه‌ای از ریاضیات به حساب می‌آید.

سؤال نهایی‌مهم این است: چه‌مقداری از ریاضیات موجودرا می‌توان بامحدودیتهای شهودگرایانه ساخت؟ اگر همهٔ آن رابتوان بدین طریق، بدون‌آنکه تلاشهای لازم بسیار افزونتر شوند، بناکرد دراین صورت مشکل کنونی مبانی‌ریاضیات ظاهراً برطرف‌خواهد شد. در حال حاضرشهودگرایان در بازسازی قسمتهای مهمی از ریاضیات‌کنونی، منجمله یك نظریهٔ پیوستار و یك نظریهٔ مجموعه‌ها توفیق یافته‌اند ولی هنوز راه زیادی در پیش است. تاکنون، ریاضیات شهودگرا به طور قابل ملاحظه‌ای‌کم‌توان‌تر از ریاضیات کلاسیك ازکار در آمده است، و در بسیاری از جهات بسط آن خیلی پیچیده‌تر است. نقصی که در رویهٔ شهودگرایی دیده می‌شود، این است ــ چیزهای بسیار زیادی‌که نزد اغلب ریاضیدانان گرامی‌اند باید فدا شوند. این وضع شاید همیشه پایدار نباشد، زیرا این امکان بازسازی شهودگرایانهٔ ریاضیات کلاسیك به صورتی دیگر و توأم با موفقیت

---

1. A . Heyting

بیشتر باقی است. و در این ضمن، علیرغم، اعتراضات کنونی علیه تز شهودگرا، عموماً به این نکته اعتراف می‌شود که روشهای آن به تناقضاتی منجر نمی‌شود.

براوئر علاوه بر اینکه پیشرو و هواخواه خستگی‌ناپذیر نظریهٔ شهودگرایی در ریاضیات بود، رد خود را در سایر زمینه‌های این موضوع به‌جا گذاشت. وی را یکی از بنیانگذاران توپولوژی نوین می‌دانند، و به‌ویژه به‌خاطر قضیهٔ پایائی و قضیهٔ نقطهٔ ثابت منسوب به‌او شهرت دارد. قضیهٔ اول بیان می‌کند که بعد چندی یك خمینهٔ عددی دکارتی n- بعدی یك پایای توپولوژیکی است، و قضیهٔ دوم بیان می‌کند که هر نگاشت پیوستهٔ یك کرهٔ n بعدی به‌روی خودش حداقل یك نقطهٔ ثابت دارد.

براوئر درسال ۱۸۸۲ به‌دنیا آمد، قسمت عمدهٔ زندگی حرفه‌ای‌اش را در دانشگاه آمستردام گذراند، و در سال ۱۹۶۶ درگذشت. وی مدافع سرسخت نظریاتش بود. به‌عنوان سردبیر ماتماتیشه‌آنالن که مسئولیت قبول یا رد مقالات وارده‌را داشت، حملات خودرا براستفادهٔ آزادانهٔ برهان خلف، با ردکلیهٔ مقالاتی که قانون طرد شق وسط را در مورد گزاره‌هایی به‌کار می‌بردند که درستی یا نادرستی آنها درتعدادی متناهی از مراحل قابل تصمیم‌گیری نبود، آغاز کرد. هیأت تحریریهٔ مجله این بحران را با مستعفی کردن و انتخاب مجدد همه، به‌جز براوئر، برطرف کرد. دولت هلند چنان ازاین تحقیر برجسته‌ترین ریاضیدان خود، رنجیده خاطرشد که مجلهٔ ریاضی رقیبی، به‌مسئولیت براوئر، دایر کرد.

صفوف شهودگرایان با پیوستن هرمان وایل به‌گروه آنها قویترشد. وایل در سال ۱۸۸۵ نزدیك هامبورگ به‌دنیا آمد. وقتی هجده ساله بود، وارد دانشگاه گوتینگن شد، بدل به یکی از مستعدترین شاگردان هیلبرت شد و (به‌جز یك سال اقامت در مونیخ) تا موقعی که درسال ۱۹۱۳ به زوریخ فراخوانده شد و درآنجا اینشتین را ملاقات کرد، در همانجا ماند. درسال ۱۹۳۰ وی را به عنوان جانشین هیلبرت به‌گوتینگن دعوت کردند. او تنها سه‌سال در گوتینگن ماند، و به‌دلیل آنکه رژیم نازی عدهٔ بسیاری از همکاران او را اخراج کرد، ازآن دانشگاه کناره گرفت. درسال ۱۹۳۳ وی پیشنهاد عضویت دایم در مؤسسهٔ مطالعهٔ پیشرفته در پرینستون را، که تازه تأسیس شده بود، پذیرفت. در واپسین سالهای عمرخود، وی‌نیمی ازسال را در پرینستون ونیمی دیگر را در زوریخ می‌گذراند. او به‌طور ناگهانی درسال ۱۹۵۵ درگذشت.

۳. صوری‌گرایی. تز صوری گرا این است که ریاضیات با دستگاههای نمادی صوری سروکار دارد. در واقع، ریاضیات مجموعه‌ای ازآن مباحث مجرد تلقی می‌شود که درآن اصطلاحات صرفاً نمادهایی هستند واحکام قواعدی متضمن این نمادها، پایهٔ غایی ریاضیات درمنطق قرار ندارد وبلکه تنها درمجموعه‌ای از نشانه‌ها یا نمادهای پیش‌منطقی و در مجموعه‌ای از اعمال با این نشانه‌ها واقع است. چون، از این دیدگاه، ریاضیات عاری از محتوای ملموس و تنها شامل عناصر نمادی آرمانی است، برقراری سازگاری شاخه‌های مختلف ریاضیات قسمت مهم و لازمی از برنامهٔ صوری گرایی می‌شود. بدون همراهی‌چنین برهان سازگاری، تمام مبحث اساساً بی‌معنی‌خواهدشد. درتزصوری گرا بسط

اصل موضوعی ریاضیات در بیشترین حد دنبال می‌شود.

مکتب صوری‌گرا توسط داوید هیلبرت، بعداز اتمام‌کارش در بررسی اصل‌موضوعی هندسه تأسیس شد. در مبانی هندسه‌اش (۱۸۹۹)، هیلبرت روش ریاضی را از قالب مبحث اصل موضوعیهای مادی اقلیدس به قالب دقیقتر مبحث اصل موضوعیهای صوری کنونی درآورده‌بود. دیدگاه‌صوری‌گرا بعداً برای مقابله با بحران ناشی از پارادوکسهای نظریهٔ مجموعه‌ها و به‌مبارزه طلبیده‌شدن ریاضیات کلاسیك به‌دلیل انتقادهای‌شهودگرایانه، به‌وسیلهٔ هیلبرت ایجاد شد. گرچه هیلبرت پیش‌ازسال ۱۹۰۴ اصطلاحات صوری‌گرایانه را به‌کار برده بود، تا بعدازسال ۱۹۲۰ وی وهمکارانش، برنیس، آکرمان، فون نویمان، و دیگران‌کار جدی را در بارهٔ آنچه‌که امروزه برنامهٔ صوری‌گرا نامیده می‌شود، آغاز نکردند.

توفیق یا شکست برنامهٔ هیلبرت برای نجات ریاضیات‌کلاسیك درگرو حل مسئلهٔ سازگاری است. بری بودن از تناقض تنها به‌کمك برهانهای ناسازگاری تضمین می‌شود، و برهانهای ناسازگاری قدیمیتر مبتنی برتعابیر ومدلهایی هستندکه مسئلهٔ سازگاری را از یك حوزهٔ ریاضیات به حوزهٔ دیگرمنتقل می‌کنند. به عبارت دیگر، یك برهان سازگاری به‌روش مدلها صرفاً برهانی نسبی است. بدین‌جهت هیلبرت روش مستقیم جدیدی برای مسئلهٔ سازگاری تدبیرکرد. بسیار شبیه به‌اثبات آنچه وضعیتهایی خاص دریك بازی، بنابر قواعدآن، نمی‌توانند در بازی پیش‌آیند هیلبرت امید آن را داشت تا، به‌کمك مجموعهٔ مناسبی از قواعد عمل برای به‌دست آوردن فرمولهای قابل قبول از نمادهای اساسی، ثابت‌کندکه فرمول متناقضی هرگز پیش نمی‌آید. با نمادهای منطقی، یك فرمول متناقض، فرمولی از نوع «F و نه F» است،که درآن F فرمول پذیرفته شده‌ای از دستگاه است. اگر بتوان نشان دادکه چنین فرمول متناقضی ممکن نیست، آنگاه سازگاری دستگاه‌ثابت شده‌است.

داوید هیلبرت

(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

بسط افکار فوق برای آزمون مستقیم سازگاری در ریاضیات، توسط هیلبرت، نظریهٔ برهان نامیده شد. هیلبرت و برنیس در نظر داشتند شرح تفصیلی نظریهٔ برهان (وکاربرد آن درهمه جای ریاضیات کلاسیك) را دراثرعظیم مبانی ریاضی خود، که آن را می‌توان به‌عنوان«پرینسیپیاماتماتیکا»ی مکتب‌صوری گرا دانست، ارائه دهند. مبانی‌ریاضی سرانجام در دوجلد چاپ شد، جلد اول درسال ۱۹۳۴ وجلد دوم درسال ۱۹۳۹، ولی در زمان نوشتن این اثر، مشکلات نامنتظره‌ای پیش‌آمدند و امکان تکمیل نظریهٔ برهان مقدور نشد. برای دستگاههای مقدماتی معینی، براهین‌سازگاری‌فراهم شدند، که آنچه را هیلبرت میل به انجام آن برای همهٔ ریاضیات کلاسیك داشت، نشان می‌دهند ولی، درکل، مسئلهٔ ناسازگاری برای دستگاه بدون چاره ماند.

درحقیقت، برنامهٔ هیلبرت، حداقل به‌شکلی که دراصل در ذهن هیلبرت بود، ظاهراً محکوم به‌شکست بود؛ این حقیقت توسط کورت گودل درسال ۱۹۳۱، عملاً قبل ازآنکه انتشار مبانی انجام شود، آشکار گردید. گودل، به‌کمك روشهای بی‌ایراد و قابل قبول برای پیروان هر یك از سه مکتب اصلی فلسفهٔ ریاضیات، نشان دادکه برای یك دستگاه قیاسی که به‌حدکافی صوری شده باشد، نظیردستگاه هیلبرت برای همهٔ ریاضیات کلاسیك، اثبات سازگاری دستگاه به‌کمك روشهای متعلق به خود آن دستگاه میسر نیست. این قضیهٔ قابل‌توجه پیامد قضیهٔ اساسی‌تری‌است؛ گودل ناکامل بودن دستگاه هیلبرت را ثابت‌کرد- یعنی وی وجود مسائل «تصمیم ناپذیر» را در داخل دستگاه، که سازگاری دستگاه ازآن جمله است، نشان داد. این قضایای گودل دشوارتر ازآن هستندکه با جزئیات فنی دراینجا مطرح شوند. این قضایا مطمئناً در زمرهٔ مهمترین قضایای تمامی ریاضیات قرار دارند، و محدودیت پیش‌بینی نشده‌ای را در روشهای ریاضیات صوری آشکار می‌سازند. آنها نشان می‌دهند «که دستگاههای ریاضی‌که برای استخراج ریاضیات مناسب‌شناخته‌شده‌اند، قابل اطمینان نیستند، بدین معنی‌که سازگاری‌آنها را نمی‌توان با روشهایی متناهی‌که در داخل دستگاه صوری شده‌اند، ثابت‌کرد، وحال‌آنکه هردستگاهی‌که از این لحاظ مطمئن تشخیص داده شده، نامناسب است.»

---

* ف. دسوا در
F. De sua, «Consistency and Completenes - a Résumé», *American Mathematical Monthly*, 63 (1956): pp. 295 - 305.
درهمینجا همچنین به‌نکته جالب زیر برمی‌خوریم: «فرض‌کنیدکه به‌مسامحه، هرنظامی را که برپایهٔ عنصر ایمان استوار است، صرفنظر ازعنصر دلیل‌آن، یك دین بنامیم. با این تعریف، مثلا مکانیك‌کوانتوم یك دین‌خواهدشد. ولی ریاضیات‌ازاین موقعیت منحصر به‌فردبرخوردار است‌که تنها شاخه‌ای از الاهیات است‌که برای این‌گونه طبقه‌بندی‌اش برهانی دقیق دارد.»
همچنین رجوع کنید به
Howard Eves and C. V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and fundamental Concepts of Mathematics,* rev. ed. Appendix, Section A. 7 (Holt, Rinehart and winston, 1965)

داوید هیلبرت درسال ۱۸۶۲ درکونیگسبرگ متولد شد ودرجهٔ دکترای خودرا در سال ۱۸۸۵ از دانشگاه آن شهر دریافت کرد. وی در دانشگاه کونیگسبرگ، ابتدا به‌عنوان معلم حق‌التدریسی (۱۸۸۶ ـ ۱۸۹۲) و سپس به عنوان استاد (۱۸۹۳ ـ ۱۸۹۴) به‌تدریس پرداخت. در ۱۸۹۵ استاد دانشگاه گوتینگن شد و تا زمان بازنشستگی‌اش در ۱۹۳۰ این مقام را حفظ کرد. وی درسال ۱۹۴۳ در گوتینگن درگذشت.

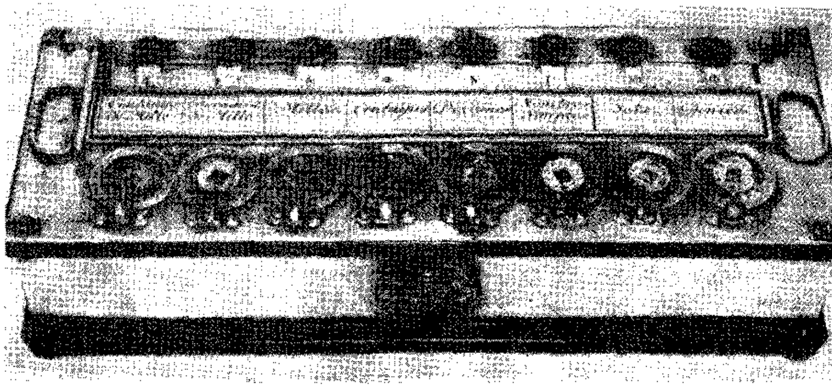
هیلبرت ریاضیدانی تمام‌عیار بود و در زمینه‌های متعددی سهم بسزایی داشت. وی معمولا کار در هر زمینه را قبل از آنکه سراغ زمینهٔ دیگری رود، با پاکیزگی به اتمام می‌رساند. موارد زیرین در زمرهٔ این زمینه‌های کار هیلبرت هستند: نظریهٔ پایاهای جبری (۱۸۸۵ـ۱۸۹۲)؛ نظریهٔ اعداد جبری (۱۸۹۳ـ۱۸۹۹)؛ مبانی هندسه، که شروع کار او در مبحث اصل موضوعیها بود (۱۸۹۸ـ۱۸۹۹)؛ مسئلهٔ دیریکله و حساب تغییرات (۱۹۰۰ـ۱۹۰۵)؛ معادله‌های انتگرالی، شامل نظریهٔ طیفی و مفهوم فضای هیلبرت (تا سال ۱۹۱۲)؛ پس از آن کار در فیزیك ریاضی در زمینهٔ نظریهٔ جنبشی گازها و نظریهٔ نسبیت؛ و سرانجام بررسیهای نقادانهٔ مبانی ریاضیات و منطق ریاضی. کلاسهای درس انگیزه‌بخش او دانشجویانی را ازهمهٔ نقاط دنیا به‌آنجا جلب کرد. وی به‌مثابه نیروگاهی در دانشگاه گوتینگن بود، و، همراه با فوجی از همکاران طراز اول، گوتینگن را تا زمان حوادث مخرب سیاسی سالهای ۱۹۳۰ به‌صورت کعبهٔ ریاضیدانان درآورد. هیلبرت به دریافت نشانهای افتخار متعددی نایل شد و در سال ۱۹۰۲ سردبیر ماتماتیشه‌آنالن گردید. درکنگرهٔ بین‌المللی ریاضی منعقده در پاریس درسال ۱۹۰۰، وی بیست وسه مسئلهٔ مهم و حل نشدهٔ ریاضی را مطرح کرد و کار روی این مسائل موجب غنای زیاد ریاضیات شده‌است.

۱۵-۹ کامپیوترها

یکی از دستاوردهای بسیار مهم قرن بیستم در زمینهٔ ریاضیات، تکامل وسایل کمك محاسباتی مکانیکی سادهٔ ایام پیشتر وتبدیل‌آن به‌ابزارهای قابل توجه وحیرت‌آور محاسبهٔ الکترونیکی مقیاس ـ وسیع امروزی بود. چیزی‌که بخصوص جنبهٔ انقلابی داشت، فکر داخل کردن یك برنامهٔ دستورالعمل و نیز مجموعه‌ای از داده‌های عامل درماشین بود. ما این بخش را به‌تاریخچه‌کوتاهی از دستگاههای کمك محاسباتی که منجر به پیدایش این شگفتی‌آفرینان اخیرشدند، اختصاص می‌دهیم.

علاوه بر وسیلهٔ کمك محاسباتی‌که طبیعت به انسان به‌شکل ده انگشت اعطاکرده (وهنوز هم امروزه درکلاسهای مدارس مورداستفاده است) وچرتکهٔ بسیارکارا و ارزان‌قیمت قدیمی (که هنوز در بسیاری از نقاط جهان مورد استفاده است)، اختراع اولین ماشین محاسبه به بلز پاسکال منسوب است‌که، در سال ۱۶۴۲، به تعبیهٔ یك ماشین جمع برای‌کمك به‌پدرش درممیزی حسابهای دولتی در روئن[1] دست زد. این دستگاه از عهدهٔ

1. Rouen



یکی‌از ماشینهای حساب پاسکال، که توسط او درسال ۱۶۴۲ تهیه شده

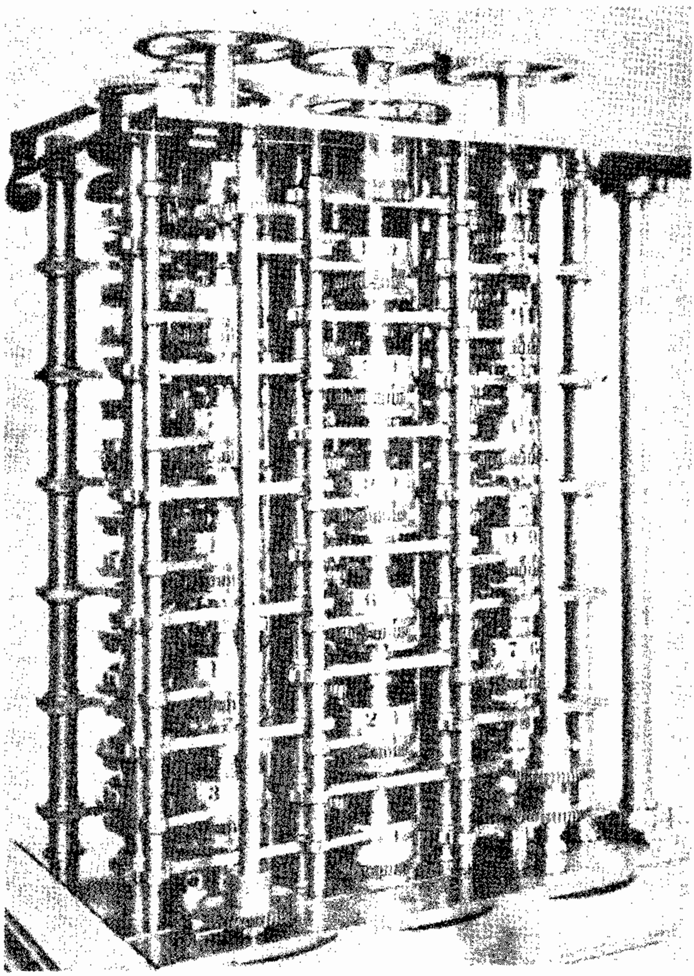
محاسبه با اعدادی که بیش‌از شش رقم نداشتند برمی‌آمد. دستگاه شامل تعدادی شماره‌گیر بودکه باهم درگیر بودند و برهریك ازآنها ارقام ۰ تا ۹ مشخص وطوری طرح شده‌بود که وقتی یك شماره‌گیر از رشتهٔ شماره‌گیرهای از ۹ تا ۰ چرخانده می‌شد، شماره‌گیر پیشین این رشته خود به‌خود یك واحد می‌چرخید. بدین‌ترتیب عمل «نقل کردن» در جمع به‌طور مکانیکی صورت می‌گرفت. پاسکال بیش‌از ۵۰ ماشین ساخت، که برخی ازآنها هنوز درمدرسه و موزهٔ هنرها وصنایع دستی[1] در پاریس نگهداری می‌شوند. جالب آنکه اختراع چرخ دستی یك چرخ هم به‌صورت امروزی‌آن، به‌پاسکال نسبت داده می‌شود.

بعداً در همین قرن، لایبنیتز (۱۶۷۱) درآلمان وسرساموئل مورلند[2] (۱۶۷۳) در انگلستان ماشینهایی اختراع کردندکه قادر به‌عمل ضرب بودند. کوششهای مشابهی‌توسط عده‌ای دیگر به‌عمل‌آمد، ولی بسیاری از این ماشینهاکند و غیرعملی ازکار درآمدند. در سال ۱۸۲۰، توماس دوکولمار[3]، بی‌آنکه با کار لایبنیتز آشنا باشد، یکی از ماشینهای نوع لایبنیتزی را به ماشینی مبدل کردکه قادر به انجام تفریق و تقسیم بود. این ماشین به‌صورت نمونه‌ای از تقریباً تمام ماشینهای تجارتی تولید شده قبل از سال ۱۸۷۵، و آنهایی‌که بعد از این سال تکمیل شدند، درآمد. در سال ۱۸۷۵، امتیاز اولین ماشین محاسبهٔ عملی‌که قادر به‌انجام چهارعمل‌اصلی حساب بدون تنظیم مجدد بود، به‌نام فرانك استیفن بالدوین[4] آمریکایی ثبت شد. درسال ۱۸۷۸، ویلگات تئوفیل اودنر[5] سوئدی، امتیاز ماشینی راکه طرح‌آن بسیار شبیه به‌ماشین بالدوین بود، درآمریکا به‌دست آورد. امروزه چندین ساخت از ماشینهای حساب رومیزی برقی، نظیر فریدن[6]، مارشان[7]، و

1. Conservatoire des Arts et Métiers 2. Sir Samuel Morland
3. Thomas de Colmar 4. Frank Stephen Baldwin
5. Willgodt Theophile Odhner 6. Friden 7. Marchant

مونرو[1]، وجود داردکه اساساً همان ساختمان اصلی ماشین بالدوین را دارند.

در حدود سال ۱۸۱۲، ریاضیدان انگلیسی چارلز بابیج (۱۷۹۲-۱۸۷۱) به فکر ساختن‌ماشینی برای کمك به‌محاسبهٔ جداول ریاضی‌افتاد. وی ازاستادی‌لوکاسی در کیمبریج استعفاکرد تا مساعی خودرا به‌ساختن این ماشین مصروف دارد. در سال ۱۸۲۳، بعد از سرمایه‌گذاری و از دست دادن ثروت شخصی‌اش در این‌کار، موفق شدکه از حکومت بریتانیا کمك مالی دریافت کند و برای ساختن یك ماشین تفاضل[2] که قادر به‌عمل با ۲۶



قسمتی از ماشین تفاضل بابیج

1. Monroe 2. difference engine

چارلز بابیج
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

رقم بامعنی ومحاسبه و چاپ تفاضلهای‌متوالی تا مرتبهٔ ششم را داشته‌باشد، به‌کارپرداخت. ولی‌کار بابیج به‌طور رضایت‌آمیزی پیشرفت نکرد، و ده سال بعد کمك دولت قطع شد. درنتیجه بابیج ماشین‌تفاضل خودرا رهاکرد و برای‌ساختن ماشینی با اهداف بلندپروازانه که‌آن‌را ماشین تحلیلی[1] نامید، آغاز به‌کار کرد. هدف وی این بود که دستگاه مزبور کاملاً به‌طور خودکار رشتهٔ‌کاملی ازاعمال حسابی را که به‌کاربرندهٔ دستگاه در بدو امر به‌آن می‌داده انجام دهد. این ماشین نیز هرگزکامل‌نشد و دلیل عمدهٔ‌آن نبودن ابزارهای دقیق لازم درآن زمان بود.

از اولین اعقاب مستقیم موتور تحلیلی بابیج، ماشین عظیم *IBM Automatic Sequence Controlled Calculator*(ASCC) است که در دانشگاه‌هاروارد درسال ۱۹۴۴ به‌عنوان طرح مشترکی بین دانشگاه وشرکت بین‌المللی ماشینهای‌تجاری[2] به‌مقاطعه برای نیروی دریایی‌امریکا تکمیل شد. این ماشین ۵۱ پا درازا، ۸ پا بلندی دارد، دوپانل به‌طول ۶ پا دارد، و وزن آن حدود ۵ تن است. ساختن مدل اصلاح شدهٔ دوم ASCC جهت استفاده، از سال ۱۹۴۸، در پایگاه تحقیقاتی نیروی دریایی[3] در دال‌گرن[4]، ایالت ویرجینیا[5]، شروع شد. از اعقاب دیگر تلاشهای بابیج ماشین *Electronic Numerical Integrator and Computer* (ENIAC) است که یك کامپیوتر الکترونیکی چند منظوره می‌باشد که در سال ۱۹۴۵ در دانشگاه پنسیلوانیا تحت مقاطعه‌ای با آزمایشگاه تحقیقاتی پرتابشناسی[6] وابستهٔ پایگاه تحقیقاتی ارتش در آبردین[7] تکمیل شد. این ماشین به‌یك اطاق ۳۰ در ۵۰ پا نیاز دارد، شامل ۱۹,۰۰۰ لامپ است، ودرحدود ۳۰ تن وزن دارد، اکنون آن را می‌توان در مؤسسهٔ اسمیتسونی[8] در شهر واشینگتن یافت. این

---

1. analytic engine 2. International Business Machines Corporation
3. Naval Proving Ground 4. Dahlgren 5. Virginia
6. Ballistic Research Laboratory 7. Army's Aberdeen Proving Ground 8. Smithsonian Institution

ماشینهای محاسب شگفت‌انگیز پرسرعت، همراه با طرحهای مشابه، نظیر (SSEC) *Selective Sequence Electronic Calculator* از شرکت بین‌المللی ماشینهای تجاری، ماشین (EDVAC) *Electronic Discrete Variable Calculator* از دانشگاه پنسیلوانیا، ماشین MANIAC از مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته[1] در پرینستون، (UNIVAC) *Universal Automatic Computer* از مؤسسهٔ استاندارد[2]، و تحلیل‌کننده‌های تفاضلی[3] متعدد، که نشانه‌هایی از ماشینهایی با تواناییهای افسانه‌ای‌ترند. در هرچند سال، نسل جدیدی از این ماشینها ساخته می‌شوند که ظاهراً سرعت، قابلیت اعتماد، و حافظهٔ ماشینهای نسل قبل را تحت‌الشعاع قرار می‌دهند. جدول مقایسه‌ای زیر برای محاسبهٔ π که در کامپیوترهای الکترونیکی انجام شده افزایش سریع در سرعت محاسبه‌ای حاصل شده را نشان می‌دهد.

مسئول طرح	ماشین	تاریخ	تعداد ارقام اعشاری	زمان
رایت ویزنر[4]	ENIAC	۱۹۴۹	۲۰۳۷	۷۰ ساعت
نیکولسون[5] و جینل[6]	NORC	۱۹۵۴	۳۰۸۹	۱۳ دقیقه
فلتون[7]	Pegasus	۱۹۵۸	۱۰۰۰۰	۳۳ ساعت
ژنوی[8]	IBM 704	۱۹۵۸	۱۰۰۰۰	۱۰۰ دقیقه
ژنوی	IBM 704	۱۹۵۹	۱۶۱۶۷	۴٫۳ ساعت
شنکس و رنچ	IBM 7090	۱۹۶۱	۱۰۰۲۶۵	۸٫۷ ساعت

اغلب کامپیوترهای اولیه برای حل مسائل نظامی طراحی شده بودند، ولی امروزه آنها برای مقاصد تجارت، حکومت، وغیره طراحی می‌شوند. در توسعهٔ کنونی آنها از صورت ابزارهای تجملی به‌ابزارهای حیاتی و ضروری تبدیل‌شده‌اند. بدین دلیل، آنالیز عددی دراین اواخر فوق‌العاده تحرک یافته و به‌موضوعی با اهمیت روزافزون تبدیل شده است. امروزه عرضهٔ درسی مقدماتی درعلوم‌کامپیوتر درمدارس متوسطه وایجاد اتصال با کامپیوتری که دریک کالج یا دانشگاه مجاور قرار دارد، به‌صورت یک‌کارعادی درآمده‌است؛ رؤیای با بیبج تحقق یافته است!

متأسفانه احساس رو به‌تزایدی، نه‌تنها در بین عموم و بلکه بین دانشجویان جوان

1. Institute for Advanced Study at Princeton 2. Bureau of Standards 3. differential analyzers 4. Reitwiesner 5. Nicholson 6. Jeenel 7. Felton 8. Genuys

ریاضی هم پیدا شده‌است، که از این به‌بعد هر مسئلهٔ ریاضی به‌کمك ماشین الکترونیکی به‌حدکافی پیچیده‌ای حل‌خواهد شد، و اینکه تمام ریاضیات کنونی گرایش‌کامپیوتری دارد. معلمان ریاضی باید با این‌بیماری کامپیوترزدگی[1] مبارزه و خاطرنشان‌کنند که این ماشینها صرفاً ماشینهای حساب فوق‌العاده سریع و کارا هستند، و تنها در آن مسائل ریاضی که بتوان محاسبات یا شمارشهای گسترده را به‌کار برد، ارزشمندند.

با این‌حال‌کامپیوترها، در زمینهٔ محدودکاربرد خود، به‌برخی‌پیروزیهای‌مهم ریاضی نایل شده‌اند. مثلاً، دستاوردهای اخیر دربارهٔ اعداد متحابه و تام‌که شرح آنها در بخش ۳ــ۳ آمد ودستاوردهای مربوط به اعداد اول‌که شرح آنها در بخش ۱۴ــ۱۳ آورده شد، بدون کمك‌کامپیوتر ممکن‌نمی‌بود. این‌ماشینها نه‌تنها در برخی قسمتهای‌نظریهٔ اعداد، بلکه در سایرمباحث ریاضی، مانند نظریهٔ‌گروهها، هندسه‌های متناهی، و ریاضیات‌تفریحی مفید از کار در آمده‌اند. مثلاً، در زمینه اخیر، در سال ۱۹۵۸ دانا س. اسکات[2] کامپیوتر رقمی MANIAC را به‌جستجوی کلیهٔ جوابهای مسئلهٔ‌گذاشتن‌دوازده پنتومینو* باهم به طوری که یك مربع ۸×۸ با سوراخ ۲×۲ در وسط تشکیل دهند،به‌کار وا-داشت. بعد از حدود $۳\frac{۱}{۲}$ ساعت‌کار، ماشین فهرست کاملی از ۶۵ جواب مجزا به دست داد که در آن هیچ جوابی را نمی‌شد با دوران یا انعکاس از دیگری به دست آورد. به‌طور مشابه، شمارش وساختن‌کلیه ۸۸۰ مربع جادویی نرمال متمایز از مرتبهٔ ۴ به‌کمك یك‌کامپیوتر انجام شد، و برنامه‌سازی مسئلهٔ متناظر برای مربعهای جادویی نرمال ازمرتبهٔ ۵ کار مشکلی نیست.

یك پیروزی بسیار چشمگیر برای‌کامپیوتر، یافتن جواب حدس مشهور چهار رنگ توپولوژی، به‌سال ۱۹۷۶ بود؛ این حدس مشعر بر آن است‌که هر نقشه برصفحه یاکره را می‌توان حداکثر با چهار رنگ رنگامیزی‌کرد به‌طوری‌که هیچ دوکشور هم‌مرز با یك رنگ رنگامیزی نشوند. این حدس در سال ۱۸۵۰ پدیدار شد، و از آن به بعد کوشش زیادی برای اثبات یا نفی آن به عمل آمده و نتایج جزئی یا مرتبط به‌حدس از آن حاصل شده ولی همواره خود حدس اصلی بدون سرانجام مانده بود. اوضاع بر این منوال بود تا اینکه، درتابستان ۱۹۷۶، کنت اپل[3] و وولفگانگ هیکن[4] وابسته به دانشگاه ایلینوی[5]، حدس‌را باتحلیل بسیار پیچیده‌ای مبتنی برکامپیوتر اثبات‌کردند. برهان شامل چند صد صفحه جزئیات پیچیده است و بیشتر از هزار ساعت وقت کامپیوتر را می‌گیرد. روش برهان متضمن ۱۹۳۶ شکل قابل تحویل است و در هریك از آنها باید تا نیم میلیون انتخاب منطقی مورد بررسی‌قرارگیرند تا صحت و سقم تحویلپذیری‌تحقیق

---

1. Computeritis 2. Dana S. Scott

* پنتومینو (Pentomino) یك‌آرایهٔ مسطح ازپنج مربع واحداست‌که در امتداداضلاعشان به هم پیوسته‌اند.

3. Kenneth Appel 4. Wolfgang Haken 5. Illinois

شود. مرحلهٔ اخیرکار شش ماه طول‌کشید و سرانجام در ژوئن ۱۹۷۶کامل شد. بازبینی نهایی سرتاسر ماه‌ژوئیه راگرفت، ونتایج به بولتن انجمن آمریکایی ریاضی ارسال‌شد.

راه‌حل اپل ـ هیکن، بی‌تردید دستاوردی مبهوت‌کننده است، ولی راه حلی مبنی بر تحلیلهای‌کامپیوتری‌که نزدیك به دوهزار حالت و چیزی در حدود یك بیلیون انتخاب منطقی‌دارد، برای ریاضیدانان بسیاری، بارریاضیات زیبا فاصلهٔ‌زیادی‌دارد. مطمئناً زیبایی‌راه حل یك مسئله ارزشی لااقل به اندازهٔ خود راه‌حل آن دارد. گرچه یك برهان‌کامپیوتری دیگر، که نسبتاً پیچیدگی‌کمتری دارد، در سال بعد، یعنی ۱۹۷۷، توسط ف. الر[1] برای حدس چهار رنگ داده شد، وجود و احتمالاً لزوم چنین طرز مقابله‌ای با مسائل ریاضی این‌سؤال فلسفی را مطرح‌کرده‌است‌که برهان یك‌گزارهٔ ریاضی مجاز به در برداشتن چه چیزهایی باید باشد.

آنچه برای دانشجویان، بازرگانان، و مهندسان بسیار مورد استفاده است، ماشینهای حساب جیبی‌اندکه اکنون با قیمتهایی زیر ۵۰ دلار در دسترس‌اند و هر ساله‌بهای آنهاکمتر و پیچیدگی آنها بیشتر می‌شود. این ماشینهای‌کوچك،که از عهدهٔ‌کار با اعداد ۸ رقمی برمی‌آیند، دارای حافظه‌اند، و قادر به انجام فوری هرعمل حسابی و، در برخی موارد، محاسبات مثلثاتی‌اند، فشردگی قابل ملاحظهٔ خود را به‌ترانزیستورهای کوچکی مدیون‌اندکه جای لامپهای الکترونیکی ماشینهای قبلی و بزرگتر راگرفته‌اند.

هیچ بحثی از کامپیوترهای نوین بدون لااقل اشارهٔ کوتاهی به ریاضیدان بزرگ مجارستانی، جان فون‌نویمان[2]، کامل نخواهد بود، زیرا او بودکه مسئولیت به‌کار انداختن اولین ماشین حساب الکترونیکی‌کامل و اندیشهٔ‌کامپیوتر رقمی حافظه‌دار را به عهده گرفت، مطالعات او از مغز انسانی و منطق در تحقیقاتش در زمینهٔ ایجاد کامپیوترها مفید افتاد.

فون نویمان دربوداپست، در سال ۱۹۰۳، به دنیا آمد و اعجوبهٔ علمی بودن او به‌زودی آشکار شد. وی دکترایش را در سال ۱۹۲۶ دربوداپست گرفت، در سال ۱۹۳۰ به آمریکا مهاجرت‌کرد، و در ۱۹۳۳ عضو دایمی مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته در پرینستون شد. وی قبلاً به خاطر سهمش درنظریهٔ عملگرها، نظریهٔ‌کوانتوم، و نظریهٔ بازی شهرتی جهانی داشت. او نقش زیادی در جهت دهی به مقدار زیادی از ریاضیات قرن بیستم داشت.کار او بسیار برجسته و اصیل بود. طی جنگ جهانی دوم به‌کارهای علمی و اداری ساختن بمبهای اتمی و هیدروژنی وپیش‌بینی بلندمدت هوا اشتغال داشت. وی در سال ۱۹۵۷ بر اثر سرطان درگذشت.

۱۵ـ۱۰ ریاضیات جدید و بورباکی

دو مشخصهٔ ریاضیات قرن بیستم را می‌توان تأکید برتجرید و علاقهٔ روز افزون به تحلیل

---

1. F. Allaire 2. John Von Neumann

ساختارها و الگوهای کلی زمینه‌ساز آن برشمرد. در اواسط قرن، این وجوه مشخصه مورد توجه علاقمندان آموزش ریاضیات مدرسه‌ای قرار گرفت، و برخی حس کردند که این وجوه مشخصه باید در تدریس ریاضیات در مدارس گنجانده شود. از این رو، گروههای نویسندگان با صلاحیت و جدی برای تجدید نظر و «نوسازی» مطالب ریاضی عرضه‌شده در مدارس تشکیل شدند، و ریاضیات جدید[1] را به هستی نهاد.

از آنجا که اندیشه‌های ریاضی مجرد را اغلب می‌توان پاکیزه و موجز در قالب مفاهیم ونماد مجموعه‌ها بیان کرد، وچون نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان اساس ریاضیات شناخته می‌شود، ریاضیات جدید با معرفی مقدماتی نظریهٔ مجموعه‌ها آغاز می‌شود، و سپس با استفادهٔ پیگیر از مفاهیم و نمادهای مجموعه‌ای ادامه می‌یابد. ریاضیات جدید، مانند ریاضیات قرن بیستم، بر ساختارهای زمینه‌ای این موضوع نیز تأکید می‌ورزد. مثلاً، در جبر مقدماتی، توجهی بسیار بیشتر از سابق، به ساختارها و قوانین جبر، نظیر قوانین جابه‌جایی، شرکتپذیری، توزیعپذیری، و قوانین دیگر می‌شود. همچنان که اغلب در مورد اندیشه‌های جدید پیش می‌آید، گرایشی به‌افراط از سوی برخی شیفتگان موجود بود که می‌خواستند اصول رهیافت جدید را حتی در وضعیتهایی به‌کار برند که به‌وضوح وسادگی نمی‌انجامید، و برخی از متخصصین آموزش اظهار نگرانی کردند که در تلاش برای تأکید چرایی در ریاضیات، به‌چگونگی کم بها داده‌می‌شود. با این‌حال، تردیدی نیست که کاربرد معقولتر مفاهیم اساسی ریاضیات جدید احتمالاً ماندگار خواهدشد.

از سال ۱۹۳۹ به بعد مجموعهٔ مجلات جامعی در ریاضیات که انعکاس آگاهانهٔ گرایشهای ریاضیات قرن بیستم، در سطحی پیشرفته‌تر، بود با تقریر مؤلفی به‌نام نیکولاس بورباکی[2] در فرانسه شروع به انتشار کرده بود. نام بورباکی ابتدا در ارتباط با بعضی یادداشتها، نقدها، و مقالات دیگری که درگزارشهای[3] آکادمی علوم فرانسه ودرجاهای دیگر منتشرشد، پدیدار شد. پس از آن رسالهٔ اصلی بورباکی تدریجاً شکل یافت. هدف این رسالهٔ اصلی درمقاله‌ای که به انگلیسی ترجمه ودرسال ۱۹۵۰ در ماهنامهٔ آمریکایی ریاضی تحت عنوان «معمار ریاضیات» منتشر شد، تشریح شده‌است. در پانوشتی بر این مقاله می‌خوانیم که: «پروفسور ن. بورباکی، سابقاً وابسته به‌آکادمی سلطنتی پولداوی[4]، هم‌اکنون ساکن شهرنانسی درفرانسه، مؤلف رسالهٔ جامعی در ریاضیات جدید است که تحت‌عنوان ارکان ریاضیات[5] (ناشرهرمان وشرکا[6]، پاریس، ۱۹۳۹ــ) در حال انتشار است وتاکنون ده جلدآن منتشرشده است.» بالغ بر سی جلد تا سال ۱۹۷۰ منتشرشد.

نام نیکولاس بورباکی، یونانی، ملیت‌اوفرانسوی‌است، وباید در ردیف بانفوذترین ریاضیدانان قرن حاضر قرارداده شود. آثار او را زیاد می‌خوانند و ازآنها نقل قول می‌کنند. او طرفدارانی جدی و منتقدینی بی‌پروا دارد. وعجیب‌تر ازهمه اینکه، او وجود

---

1. new math 2. Nicolas Bourbaki 3. Comptes Rendus
4. Royal Poldavian Academy 5. Eléments de Mathématique
6. Herman et Cie

خارجی ندارد.

نیکولاس بورباکی یك نام مستعار جمعی است که یك گروه غیررسمی ریاضیدانان ازآن استفاده می‌کنند. گرچه‌اعضای این سازمان سوگند رازداری یاد نکرده‌اند، بسیاری ازآنها مقداری پنهانکاری دربارهٔ خودرا تفریح خاطری برای خود یافته‌اند. با این‌حال، نام آنها رازی برملا بـرای اغلب ریاضیدانان است. عقیده براین است که ك. شوالی[1]، ژ. دلسارت[2]، ژ. دیودونه[3]، و ا. وایل[4] در زمرهٔ اعضای اولیه‌اند. فهرست اعضا در طول سالهای مختلف متغیر بوده، وگاهی حتی مشتمل بر بیست ریاضیدان بوده است. تنها قرار و قاعدهٔ گروه‌آن است که هیچ قرار و قاعده‌ای به‌جز بازنشستگی اجباری اعضا در پنجاه سالگی ، نداشته باشند. کار گروه مبتنی بـراین عقیدهٔ غیرقابل اثبات متافیزیکی است که برای هرمسئلهٔ ریاضی، دربین‌چندین راه ممکن پرداختن به‌آن، راهی بهترازهمه، یا بهینه، وجود دارد. گرچه بنیانگذاران گروه بورباکی عمداً منشاء نام نیکولاس بورباکی را در هاله‌ای از اسرار فـرو بـرده‌اند، دو داستان درکوشش بـرای توضیح علت این انتخاب در دست است.

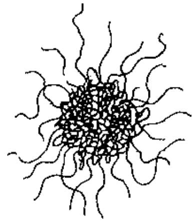
افسر پرشوری به‌نام ژنرال شارل دنی سوته بورباکی[5] بوده‌که درجنگ فرانسه و پروس به‌شهرت می‌رسد. درسال ۱۸۶۲، درچهل وشش سالگی، تاج و تخت یونان به او پیشنهاد می‌شودکه وی ازقبول‌آن سرباز می‌زند. دریك لشگرکشی نافرجام مجبور می‌شود که به‌سویس عقب‌نشینی‌کند و درآنجا بازداشت شده با تفنگ قصد جان خود را می‌کند. ظاهراً کوشش او برای خودکشی با شکست مصادف می‌شود زیرا تا سن هشتادوسه زنده می‌ماند. می‌گویندکه مجسمه‌ای از او درنانسی، فرانسه، قرار دارد و این می‌تواند منشاء ارتباط او باگروه ریاضیدانان مورد بحث باشد، زیـرا عدهٔ زیادی از اعضای‌گروه گاه و بیگاه با دانشگاه نانسی ارتباط داشته‌اند. این تـوضیح ، اشتقاق قسمت«نیکولاس» درنام گروه را بی‌پاسخ می‌گذارد.

افسانهٔ دیگر راجع به منشأ نام بورباکی مبتنی براین حکایت است که ، در حـدود ۱۹۳۰، دانشجویان تازه وارد دانشسرایعالی پاریس[6]، که عدهٔ بسیاری از ریاضیدانان فرانسوی‌آموزش خود را درآنجا دیده‌اند، باسخنرانی مهمان برجسته‌ای به‌نام نیکولاس بورباکی مواجه می‌شوندکه در واقع هنرپیشهٔ دوستگاری درلباس‌مبدل یا شاید دانشجویی درسالهای‌آخر بوده‌که در دوپهلوگویی ریاضی مهارتی موجه‌نما داشته‌است.

برداشت بورباکی، یا حداقل برداشت ژان دیودونه از ریاضیات‌کنونی،آن است که ریاضیات امروزه مانند گلوله نخی است‌که رشته نخهای بسیاری برآن پیچیده (نگاه کنید به‌شکل ۱۲۳) که درآن رشته‌های مرکزی گلوله اثرمتقابل شدیدی، باکیفیتی تقریباً غیرقابل پیش‌بینی، روی یکدیگر دارند. در این‌گلوله نخ، رشته‌هایی ، و سررشته‌هـایی وجود دارندکه درجهات مختلف رو به‌بیرون می‌روند وهیچ رابطهٔ تنگاتنگی با چیزی در

---

1. C. Chevally 2. J. Delsarte 3. J. Dieudonné 4. A.Weil
5. Chgr les Denis Sauter Bourbaki 6. Ecole Normale Supérieure



شکل ۱۲۳

درون ندارند. روش بورباکی آن است که این رشته‌های آزاد را بچینند وحواس خود را بر مغز فشردهٔ گلوله که بقیهٔ رشته‌ها از آن جـدا می‌شوند، متمرکـز کنند. این مغز فشرده، ساختارهای اساسی و فرایندهای بنیادی یا ابزارهای ریاضی را در بر می‌گیرند و اینها بخشهایی از ریاضیات‌اند که با تغییرتدریجی از قالب استراتژیها درآمده به‌روشها تبدیل و به قدر قابل ملاحظه‌ای تثبیت یافته‌اند. تنها این بخش ریاضیات است که بـورباکی درصدد دادن نظم منطقی و شکل یك نظریهٔ منسجم و آسان بـه کاربردنی بـه آن است. نتیجه آنکه، بخش اعظم ریاضیات عمداً خـارج از حیطهٔ گـروه بورباکی گـذاشته شده است.

۱۵-۱۱ درخت ریاضیات

چند سال پیش متـداول شده بود که ریاضیات را به‌شکـل یك درخت، معمولاً یك بلـوط بزرگ، نشان بدهند. ریشه‌های این درخت عناوینی ازقبیل جبر، هندسهٔ مسطحه، مثلثات، هندسهٔ تحلیلی، و اعداد گویا داشتند. از این ریشه‌ها تنهٔ تنومند درخت برمی‌خاست که بر آن حسابان نقش بسته بود. سپس، از بالای تنه شاخه‌های متعددی منشعب و به شاخه‌های کوچکتری تقسیم می‌شدند. به این شاخه‌ها عناوین «شاخه‌های» مختلف ریاضیات عالـی نظیر متغیرهای مختلط، متغیرهای حقیقی، حساب تغییرات، احتمالات، و غیـره داده شده‌بود.

منظور از این درخت ریاضیات آن بود که گذشته از ارائهٔ چگونگی رشد تاریخی ریاضیات به دانشجو، مسیری را هم که دانشجو باید بـرای ادامهٔ این موضوع طی کند، خاطرنشان سازد. بدین‌ترتیب، در دبیرستان و شاید در سال اول دانشکده، دانشجو باید وقت خود را صرف مطالعهٔ موضوعهـای بنیادی بنماید که ریشهٔ ایـن درخت را تشکیل می‌دهند. سپس، در دورهٔ دانشکده، وی باید، ازطریق یك برنامهٔ سنگین، کاملاً به حسابان تسلط یابد. بعدازانجام این‌کار، دانشجو می‌تواند آن شاخه‌هایی از ریاضیات راکه مایل به‌ادامهٔ آنهاست، دنبال نماید.

آن اصل‌آمـوزشیی که درخت ریاضیات پشتوانهٔ آن است احتمالاً اصل صحیحی است، زیرا مبتنی برقانون مشهوری است که چکیدهٔ آن تـوسط زیست شناسان چنین بیان

شده‌است: «اونتوژنی[1] تکرار فیلوژنی[2] است»، که به زبان ساده بدین معنی است که، در حالت کلی «تکامل فرد بازگوی تکامل گروه است». یعنی ، حداقل در چارچوب کلی ، یك دانشجو هرموضوع را تقریباً به‌همان ترتیبی فرا می‌گیرد که آن موضوع طی سالیان دراز بدان صورت رشد یافته است. به‌عنوان مثالی خاص، هندسه را درنظر بگیرید. قدیمیترین هندسه‌را شاید بتوان **هندسهٔ ناخودآگاه** نامید که منشأ آن مشاهدات ساده‌ای است که از توانایی انسان در تشخیص شکل ظاهری ومقایسهٔ اشکال و اندازه‌ها ناشی می‌شد. پس از آن هندسه به **هندسهٔ علمی**، یا **تجربی** بدل شد، و هندسه زمانی به این مرحله رسید که عقل انسانی می‌توانست از مجموعه‌ای از روابط ملموس یك قانون مجرد کلی (یك قانون هندسی) استخراج کند که مورد اول را به عنوان حالات خاصی دربر داشت. در فصول اولیهٔ این کتاب متذکر شده‌ایم که چگونه قسمت‌اعظم هندسه مقدم بر دورهٔ یونانی ازاین نوع تجربی بود. بعداً، در واقع و در دورهٔ یونانی، هندسه به درجهٔ بالاتری ارتقا یافت و به **هندسهٔ برهانی** بدل شد. اصل آموزش اساسی که دراینجا مطرح است، درواقع داعیهٔ آن را دارد که هندسه باید بدواً درشکل ناخودآگاه‌آن، احتمالاً از طریق کارهای هنری و مشاهدات سادهٔ طبیعت، به‌کودکان عرضه شود. سپس،کمی بعد از آن، این‌مبنای ناخودآگاه به‌هندسهٔ علمی متکامل گردد ، که در آن دانش‌آموزان به مقدار قابل توجهی از حقایق هندسی از طریق انجام تجربه با پرگار و ستاره، با خط‌کش ونقاله، وبا قیچی وخمیر پی‌می‌برند. و تازه بعدازآن، وقتی دانش‌آموز به‌قدرکافی ورزیدگی یافته باشد ، هندسه را می‌توان در شکل برهانی، یا قیاسی آن عرضه کرد ، و محاسن و معایب فرایندهای استقرایی پیشین را خاطر نشان کرد.

پس، دراینجا به‌آن اصل آموزشی که درخت ریاضیات پشتوانه آن‌است اعتراضی نداریم. اما دربارهٔ خود درخت چه؟ آیا این درخت هنوز هم تصویرکاملاً معقولی از ریاضیات امروزی را عرضه می‌کند؟ به نظر ما چنین نیست. روشن است که یك درخت ریاضیات تابعی از زمان است . درخت بلوطی‌که قبلاً توصیف شد مطمئناً نمی‌تواند ، مثلاً ، درخت ریاضیات دورهٔ اسکندر کبیر باشد. این‌درخت بلوط نمودارمناسبی از وضع ریاضیات درقرن هجدهم و بخش زیادی ازقرن نوزدهم است، زیرا درآن سالها تلاشهای عمدهٔ ریاضی بسط ، توسیع ، وکاربرد حسابان بود. ولی با رشد فوق‌العادهٔ ریاضیات در قرن بیستم، تصویر کلی ریاضیات که به‌کمك درخت بلوط داده می‌شود، دیگرمصداق پیدا نمی‌کند. شاید اظهار این مطلب کاملا درست باشد که امروزه بخش عمدهٔ ریاضیات با حسابان وتوسیعهای آن ارتباط نداشته یا ارتباط کمی دارد. مثلا زمینه‌های گستردهٔ مورد پوشش جبر مجرد، ریاضیات متناهی، نظریهٔ مجموعه‌ها، ترکیبیات ، منطق ریاضی ، مبحث اصل موضوعیها، نظریهٔ غیرتحلیلی اعداد، مباحث اصل‌موضوعی هندسه، هندسه‌های متناهی وغیره را می‌توان ذکر کرد.

1. Ontogeny 2. Phylogeny

درخت ریاضیات را، برای آنکه ریاضیات امروزی را عرضه نماید، باید، از نو رسم کنیم. خوشبختانه درخت ایده‌الی برای این نمایش جدید موجوداست ــ درخت انجیر هندی. درخت انجیر هندی درخت چندتنه‌ای است که پیوسته تنه‌های جدیدی بر آن می‌روید. بدین ترتیب که از شاخه‌ای از آن، الیاف نخ مانندی به طرف پایین گسترده می‌شود تا به زمین برسد. درآنجا این قسمت ریشه می‌گیرد وطی چند سال بعد این رشته ضخیمتر و ضخیمتر می‌شود، و باگذشت زمان خود به تنه‌ای با شاخه‌های زیاد مبدل می‌شود، که هر یك الیاف نخ مانند خود را به زمین می‌اندازند.

برخی از درختهای انجیر هندی هستند که دهها تنه دارند، و از لحاظ جا به‌اندازهٔ یك بلوك شهری را اشغال می‌کنند. این درختها، مانند درخت بلوط تنومند، زیبا هستند و عمر طولانی دارند؛ چنین ادعا می‌شود که آن درخت انجیر هندی، کــه بودا در مواقع تفکر به آن تکیه می‌داده، هنوز هم زنده و در حال رویش است. بنابراین درخت انجیر هندی برای درخت ریاضیات امروزی شکل بــا ارزش و دقیقتری دارد. طــی سالهای آینده، تنه‌های جدیدی پدید خواهند آمد، وبرخی از تنه‌های پیرتر شاید پژمرده و خشك شوند. دانشجویان مختلف می‌توانند تنه‌های مختلفی ازاین درخت را برای صعود انتخاب کنند وهردانشجوابتدا مبانیی راکه ریشه‌های تنهٔ انتخابی او دربرمی‌گیرند، مطالعه‌می‌کند. البته همهٔ این تنه‌ها دربالا توسط یك سلسله شاخه‌های در همرفتهٔ درخت باهم ارتباط‌پیدا می‌کنند. تنهٔ حسابان هنوز زنده وفعال‌است، امامثلاً تنه‌ای هم برای جبرخطی، تنه‌ای‌برای منطق ریاضی، و تنه‌های دیگری هم وجود دارند.

ریاضیات آن‌چنان گسترش‌یافته که‌امروزه ممکن است شخص‌ریاضیدانی‌بسیار بارور و خلاق باشد ولی ازحسابان و توسیعهای‌آن چندان اطلاعی نداشته باشد. ماهاکه امروزه در دانشگاهها‌تدریس می‌کنیم با اصرار براینکه همهٔ دانشجویان باید ابتدا از تنهٔ حسابان درخت ریاضیات بالا روند، به برخی ازآنان زیان می‌رسانیم. علی‌رغم همهٔ جذابیت و زیبایی حسابان، این طور نیست که این درس به مذاق همهٔ دانشجویان خوش بیاید. بــا مجبورکردن همهٔ دانشجویان به‌بالارفتن ازتنهٔ حسابان، شاید ریاضیدانان مستعد بالقوه‌ای را از دست می‌دهیم. کوتاه سخن‌آنکه، اکنون شاید زمان آن رسیده باشدکه فن‌آموزش ریاضی خود را برای آنکه مناسب درخت ریاضیاتی باشدکه توسعهٔ تاریخی‌کنونی این موضوع را بهتر منعکس نماید، اصلاح‌کنیم.

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۱۵ فرضهای تلویحی اقلیدس

به بیان واثبات قضایای I۱، I۱۶ و I۲۱ مراجعه‌کنید (مثلاً درسیزده مقالهٔ اصول اقلیدس ت . ل. هیث) و نشان دهیدکه:

(الف) در قضیهٔ I۱ اقلیدس‌تلویحاً چنین فرض‌می‌کندکه دو دایره‌ای‌که مراکزشان

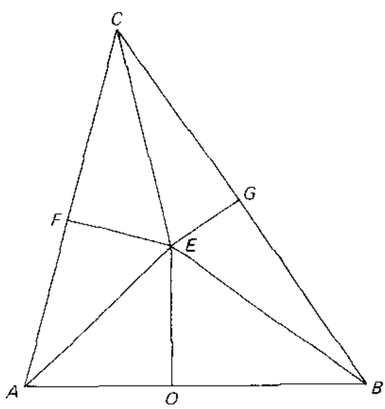
دوانتهای یك پاره‌خط است واین‌پاره‌خط شعاع مشترك آنهاست، یکدیگر را قطع‌می‌کنند.
(ب) در قضیهٔ ۱۶ I اقلیدس تلویحاً نامتناهی بودن خطوط راست را می‌پذیرد.
(ج) در قضیهٔ ۲۱ I اقلیدس تلویحاً فرض می‌کندکه اگر خط مستقیمی از رأس مثلثی واردآن شود، در صورتی که به‌حدکافی امتداد داده‌شود، ضلع مقابل را قطع‌می‌کند.

۲۰۱۵ سه پارادوکس هندسی

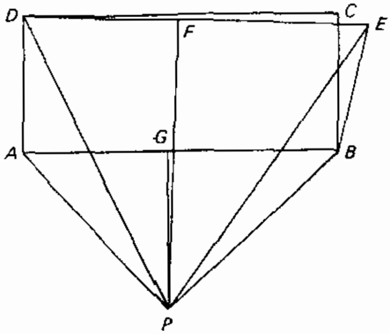
اگر فرض تلویحاً پذیرفته شده‌ای دریك مبحث قیاسی متضمن دریافت غلطی باشد، مطرح کردن آن نه تنها ممکن است به قضیه‌ای منجر شودکه از اصول موضوعهٔ دستگاه قیاسی تبعیت نمی‌کند بلکه به‌قضیه‌ای‌منجرمی‌شودکه ممکن‌است‌عملاً ناقض برخی ازقضایای قبلاً ثابت شدهٔ این دستگاه باشد. از این نقطه نظر، سه پارادوکس هندسی زیر را نقدکنید:

(الف) اثبات اینکه هر مثلثی متساوی‌الساقین است.

فرض‌کنید ABC مثلث دلخواهی باشد (نگاه‌کنید به شکل ۱۲۴). نیمساز زاویهٔ C وعمودمنصف ضلع AB را رسم کنید. ازنقاط‌تلاقی آنها یعنی E، عمودهای EF و EG را به‌ترتیب بر AC و BC واردکنید، و EA و EB را رسم‌کنید. حال مثلثهای‌قائم‌الزاویهٔ CFE و CGE برابرند، زیرا وتر هر یك از آنها CE است و $\sphericalangle FCE = \sphericalangle GCE$. بنابراین $CG = CF$. همچنین، مثلثهای‌قائم‌الزاویهٔ EFA و EGB مساوی‌اند، زیرا ساق EF از یکی برابر با ساق EG از دیگری است (هر نقطه‌ای مانند E بر نیمساز زاویهٔ C از دو ضلع این زاویه به یك فاصله‌اند) و چون وتر EA از یکی برابر با وتر EB از دیگری است (هر نقطه‌ای مانند E بر عمود منصف پاره خطی مانند AB از دو انتهای این پاره خط به یك فاصله است.) بنابراین نتیجه می‌شودکه $CF+FA=CG+GB$، یا $CA=CB$، و مثلث مزبور متساوی‌الساقین است.



شکل ۱۲۴



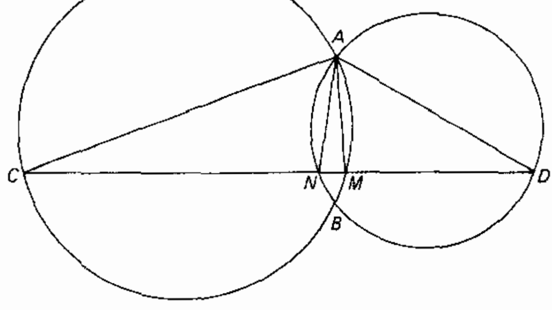
شکل ۱۲۵

(ب) اثبات اینکه یك زاویهٔ قائمه برابر با یك زاویهٔ منفرجه است.

فرض کنید $ABCD$ مستطیل دلخواهی باشد(نگاه کنید به‌شکل۱۲۵). BE را خارج از مستطیل و از نظر طول برابر با BC، وبنابراین برابر با AD رسم کنید. عمودمنصفهای DE و AB را رسم کنید ؛ چون آنها بر خطوط غیر موازی عمود هستند، بایددر نقطه‌ای مانند P یکدیگــر را قطع کنند. AP، BP، DP و EP را رسم کنید. در این صورت $PA=PB$ و $PD=PE$ (هرنقطه‌ای برعمود منصف یك پاره‌خط از دوسر این پاره‌خط به یك فاصله است). همچنین، بنا به نحوهٔ ساختمان، $AD=BE$. بنابراین مثلثهای APD و BPE متساوی‌اند، چون سه ضلع یکی برابر با سه ضلع از دیگری هستند. بنابرایــن $\sphericalangle DAP=\sphericalangle EBP$. اما $\sphericalangle BAP=\sphericalangle ABP$ ، چون این زوایا، زوایای مجاور به‌قاعدهٔ مثلث‌متساوی‌الساقین APBاند. با تفریق، اکنون نتیجه‌می‌شودکه زاویهٔ‌قائمهٔ DAG = زاویهٔ منفرجهٔ EBA.

(ج) اثبات اینکه از نقطه‌ای می‌توان دو عمود برخطی وارد کرد.

فرض کنید دودایرهٔ دلخواه‌یکدیگر را درA و B قطع کنند(نگاه کنید به‌شکل۱۲۶).



شکل ۱۲۶

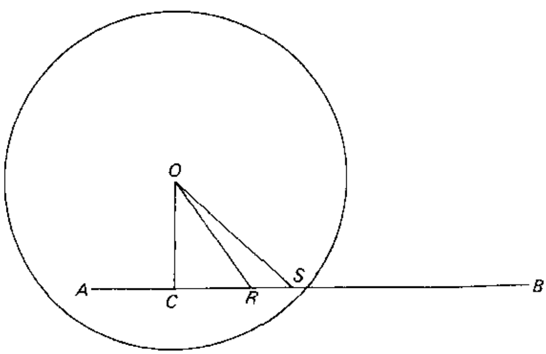
اقطار AC و AD را رسم کنید، فرض کنید که خط واصل بین C و D دایره‌های مربوطه را در M و N قطع کند. دراین‌صورت زوایای AMC و AND قائمه‌اند، چون هریك در نیمدایره‌ای محاط هستند. بنابراین AM و AN دوعمود وارد بر CD اند.

۳.۱۵ اصل پیوستگی ددکیند

برای تضمین وجود برخی نقاط تلاقی (خط بادایره ودایره بادایره) ریشارد ددکیند (۱۸۳۱— ۱۹۱۶) اصل موضوع پیوستگی زیر را وارد هندسه کرد: اگر همهٔ نقاط یك خط مستقیم در دو رده قرارگیرند، به‌طوری‌که هر نقطهٔ ردهٔ اول در طرف چپ هر نقطهٔ ردهٔ دوم قرارگیرد، آنگاه یك و فقط یك نقطه وجود داردکه این تقسیم همهٔ نقاط به دو رده، یعنی برش خط مستقیم به‌دو پاره را به‌وجود می‌آورد.

(الف) جزئیات برهان زیر از قضیهٔ بعد راکامل کنید: قطعهٔ خط مستقیمی که نقطه‌ای مانند A در داخل یك دایره را به نقطه‌ای مانند B در خارج دایره وصل می‌کند نقطهٔ مشترکی با دایره دارد.

فرض کنید O مرکز و r شعاع دایرهٔ مفروض باشد (نگاه‌کنید به شکل ۱۲۷)، و فرض کنید C پای عمود وارد از O بر خطی باشدکه توسط A و B معین می‌شود. نقاط پاره خط AB را می‌توان به دو رده تقسیم کرد: نقاطی مانند P که برای آنها $OP<r$، و نقاطی مانند Q که برای آنها $OQ\geqslant r$. می‌توان نشان دادکه، در هرحالت، $CP<CQ$. بنابراین، بنابراصل ددکیند، نقطه‌ای مانند R بر AB وجود دارد و به قسمی که همهٔ نقاط قبل ازآن به‌یك رده تعلق دارند و همهٔ نقاط بعد از آن به‌ردهٔ دیگر. اما $OR\nless r$، زیرا در غیر این صورت می‌توانستیم S را بر AB ، بین R و B ، طوری انتخاب کنیم که $RS<r-OR$. اما، چون $OS<OR+RS$، این نامساوی موجب این رابطهٔ بی معنی خواهد شدکه $OS<r$. به‌طور مشابه می‌توان نشان دادکه $OR\ngtr r$. بنابراین باید داشته باشیم $OR=r$، و قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱۲۷

(ب) چگونه می‌شود اصل ددکیند را تعمیم داد تا زوایا راهم شامل بشود؟
(ج) چگونه می‌شود اصل ددکیند را تعمیم داد تا کمانهای دایره راهم شامل بشود؟

۴.۱۵ تعبیر مختصاتی اصول موضوعهٔ اقلیدس

برای سهولت، سه اصل موضوع اول اقلیدس را به صورتهای معادل زیر بیان می‌کنیم:

۱. هردو نقطهٔ متمایز خط راستی را معین می‌کنند.
۲. یك خط مستقیم نامحدود است.
۳. دایره‌ای وجود دارد که مرکز آن نقطهٔ مفروض دلخواهی است و برنقطهٔ مفروض دلخواه دیگری می‌گذرد.

نشان دهید که اصول موضوعهٔ اقلیدس، کـه بخشی از آنها در بالا بیان شده‌اند، درصورتی که نقاط صفحه محدود به‌نقاطی شوند کـه مختصات دکارتی متعامد آنها نسبت به‌چارچوب مرجع ثابتی اعدادگویا هستند، برقرارند. با این‌حال، نشان دهید کـه تحت این‌محدودیت، یك دایره ویك خط مار برمرکز آن لزومی نداردکه یکدیگر را قطع کنند.

۵.۱۵ تعبیر کروی اصول موضوعهٔ اقلیدس

نشان دهید که اصول موضوعهٔ اقلیدس (به‌آن صورت ناقصی که در مطالعهٔ مسئله‌ای ۴.۱۵ بیان‌شده‌اند)، در صورتی که صفحه را سطح یك کره، خطوط مستقیم را دوایرعظیمهٔ واقع برآن، نقاط رانقاطی واقع برکره تعبیر کنیم، برقرارند. مع‌هذا نشان دهید که با این‌تعبیر گزاره‌های زیرهم درست‌اند:

(الف) خطوط موازی موجود نیستند.
(ب) همهٔ خطوط عمود بریك خط مفروض که در یك طرف خـط برآن رسم شده باشند، یکدیگر را درنقطه‌ای قطع می‌کنند.
(ج) این امکان وجود داردکه دوخط متمایز دونقطه را بههم وصل کنند
(د) مجموع زوایای یك مثلث بیش از دوقائمه است.
(ه) مثلثهایی موجودندکه هرسه زاویهٔ آنها قائمه‌اند.
(و) هر زاویهٔ خارجی یك مثلث همیشه بزرگتر از هر یك از دو زاویهٔ داخلی غیر مجاورش نیست.
(ز) مجموع دوضلع یك مثلث می‌تواندکمتر ازضلع سوم آن باشد.
(ح) برای مثلثی کـه یك زوج زاویهٔ برابر دارد ممکن است اضلاع مقابل به آنها نابرابر باشند.
(ط) بزرگترین ضلع یك مثلث لزوماً مقابل به‌بزرگترین زاویهٔ آن نیست.

۶.۱۵ اصل موضوع پاش

در سال ۱۸۸۲ موریتس پاش اصل موضوع زیررافرمولبندی کرد: فرض‌کنیدکه A، B، C

سه‌نقطهٔ غیرواقع بریك خط مستقیم باشند، و فرض کنید که m خطی مستقیم واقع برصفحهٔ ABC باشد که از هیچیك از نقاط A، B، C نمی‌گذرد. در این صورت، اگر خط m برنقطه‌ای از پاره‌خط AB بگذرد، آنگاه برنقطه‌ای از پاره‌خط BC یا نقطه‌ای از پاره‌خط AC نیز خواهد گذشت. این اصل موضوع یکی از فرضهایی است که توسط هندسه‌دانان جدید به‌عنوان اصل موضوع ترتیب دسته‌بندی شده و به‌روشن ساختن مفهوم «نسبیت» کمك می‌کند.

(الف) به‌عنوان نتیجه‌ای بر اصل موضوع پاش، ثابت کنید که اگر خط راستی از رأس یك مثلث وارد آن شود، باید ضلع مقابل را قطع کند.

(ب) نشان دهید که اصل موضوع پاش برای یك مثلث کروی که توسط دایرهٔ عظیمه‌ای قطع می‌شود، همواره برقرار نیست.

۷۰۱۵ یك دستگاه مجرد ریاضی

مجموعه‌ای مانند K از عناصر تعریف نشده را، که ما با حروف کوچك نشان خواهیم داد، درنظر بگیرید، و فرض کنید R معرف یك نسبت دوتایی تعریف نشده باشد که ممکن است بین زوجی از عناصر K برقرار باشد یا نباشد. اگر عنصر a از K با عنصر b از K با نسبت R، ارتباط داشته‌باشند، می‌نویسیم $R(a, b)$. حال چهار اصل موضوع زیر دربارهٔ عناصر K و نسبت دوتایی R را می‌پذیریم.

P۱ اگر a و b هردو عنصر مجزای K باشند، در این صورت یا داریم $R(a, b)$ و یا $R(b, a)$.

P۲ اگر a و b هردو عنصر K باشند به قسمی که داشته باشیم $R(a, b)$، آنگاه a و b عناصر مجزایی هستند.

P۳ اگر a، b، c هرسه عنصر K باشند به قسمی که داشته باشیم $R(a, b)$ و $R(b, c)$، آنگاه داریم $R(a, c)$. (به‌عبارت دیگر نسبت R، متعدی است.)

P۴ K متشکل از دقیقاً چهار عنصر متمایز است.

هفت قضیهٔ زیر را از چهار اصل موضوع بالا نتیجه بگیرید:

T۱ اگر داشته باشیم $R(a, b)$، آنگاه نسبت $R(b, a)$ برقرار نیست. (به‌عبارت دیگر نسبت R متقارن نیست.)

T۲ اگر داشته باشیم $R(a, b)$، و اگر c عنصر K باشد، آنگاه یا داریم $R(a, c)$ و یا $R(c, b)$.

T۳ حداقل یك عنصر K باهیچ عنصر K نسبت R را ندارد. (این یك قضیهٔ وجودی است).

T۴ حداکثر یك عنصر K وجود دارد که با هیچ عنصر K نسبت R را ندارد. (این یك قضیهٔ یکتایی است).

تعریف ۱ اگر داشته باشیم $R(a, b)$، آنگاه گوییم که داریم $D(a, b)$.

T۵ اگر داشته باشیم $D(a, b)$ و $D(b, c)$، آنگاه داریم $D(a, c)$.

تعریف ۲ اگر داشته باشیم $R(a, b)$، و هیچ عنصری مانند c موجود نباشد به‌قسمی که داشته باشیم $R(a, c)$ یا $R(c, b)$، آنگاه گوییم که داریم $F(a, b)$.

T۶ اگر داشته باشیم $F(a, c)$ و $F(b, c)$، آنگاه a با b یکی است.

T۷ اگر داشته باشیم $F(a, b)$ و $F(b, c)$، آنگاه رابطهٔ $F(a, c)$ را نداریم.

تعریف ۳ اگر داشته باشیم $F(a , b)$ و $F(b , c)$، آنگاه گوییم که داریم $G(a , c)$.

۸.۱۵ مبحث اصل موضوعیها

(الف) سازگاری مجموعهٔ اصل موضوعی مطالعهٔ مسئله‌ای ۷.۱۵ را به‌کمك هریك از تعبیرهای زیر ثابت کنید:

۱. فرض کنید K متشکل از یك مرد، پدر او، پدر پدر او، پدر پدر پدر او، و $R(a , b)$ به‌معنی «a جد b است» باشد.

۲. فرض کنید که K متشکل از چهار نقطهٔ متمایز بر یك خط افقی باشد، وفرض کنید $R(a , b)$ به‌معنی «a سمت‌چپ b است» باشد.

۳. فرض کنید که K متشکل از چهار عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و $R(a , b)$ به‌معنی «$a<b$» باشد.

اصول موضوعهٔ این‌مجموعه، اصول موضوعهٔ نسبت دنباله‌ای موجود بین‌چهارعنصر هستند. هر نسبتی مانند R که این اصول موضوعه را تعبیر کند یك **نسبت دنباله‌ای** نامیده می‌شود، وگویند که عناصر K تشکیل یك **دنباله** می‌دهند. تعابیر پیشنهادی بالا سه‌کاربرد شاخهٔ مجرد از ریاضیاتی راکه‌درمطالعهٔ مسئله‌ای ۷.۱۵ بسط‌یافت، دراختیار مامی‌گذارند.

(ب) صورت قضایا و تعاریف مطالعهٔ مسئله‌ای ۷.۱۵ را برای هریك از تعابیر (الف) بنویسید.

(ج) استقلال مجموعهٔ اصل موضوعی مطالعهٔ مسئله‌ای ۷.۱۵ را به‌کمك هریك از چهار تعبیر جزئی زیر ثابت کنید.

۱. فرض کنید که K متشکل از دو برادر، پدرآنها، و پدر پدر آنها و $R(a, b)$ به‌معنی «a جد b است» باشد. این، استقلال P۱ را ثابت می‌کند.

۲. فرض کنید K متشکل از چهار عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و $R(a, b)$ به‌معنی «$a\leqslant b$» باشد. این، استقلال P۲ را ثابت می‌کند.

۳. فرض کنید K متشکل از چهار عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و $R(a, b)$ به‌معنی «$a\neq b$» باشد. این استقلال P۳ را ثابت می‌کند.

۴. فرض کنید K متشکل از پنج عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و $R(a, b)$ به‌معنی «$a<b$» باشد. این، استقلال P۴ را ثابت می‌کند.

(د) نشان دهید P۱، T۱، P۳، P۴ یك مجموعهٔ اصل‌موضوعی معادل با P۱، P۲، P۳، P۴ تشکیل می‌دهد.

۹.۱۵ گزاره‌های فرضی مربوط به‌هم

(الف) گزارهٔ زیر را ثابت کنید: اگر یك مثلث متساوی‌الساقین باشد، نیمسازهای زوایای مجاور به‌قاعدهٔ آن برابرند.

(ب) عکس گزارهٔ (الف) را بیان کنید. (این عکس، که اثبات آن تاحدی پرزحمت است، به‌مسئلهٔ اشتاینر-لهموس شهرت یافته است.

(ج) متقابل (یا عکس) گزارهٔ (الف) را بیان کنید.

(د) اگر گزاره‌ای به‌شکل اگر A آنگاه B درست باشد، آیا لزوماً نتیجه می‌شود که عکس آن درست است؟ متقابل آن چطور؟

(ه) نشان دهید که اگر گزاره‌ای به‌شکل اگر A آنگاه B و متقابل آن هردو درست باشند، آنگاه عکس آن نیز درست است.

(و) گزاره‌هایی را بیان کنید که درست باشند اگر؛ A شرط لازم برای B باشد؛ A یك شرط کافی برای B باشد؛ A یك شرط لازم و کافی برای B باشد. (اگر A هم شرط لازم و هم شرط کافی برای B باشد، آنگاه A را ملاك B می‌نامند.)

۱۰.۱۵ شهود در مقابل برهان

سؤالات زیر را به‌طور شهودی پاسخ دهید، وسپس جوابهای خود را با محاسبه امتحان کنید.

(الف) اتومبیلی با سرعت ۴۰ مایل درساعت از P به Q حرکت وسپس باسرعت ۶۰ مایل درساعت از Q به P مراجعت می‌کند. سرعت متوسط رفت‌وبرگشت چقدراست؟

(ب) A کاری را می‌تواند ۴روزه انجام دهد و B آن را می‌تواند در ۶ روز انجام دهد و اگر A و B این‌کار را توأماً انجام دهند، کارچقدر طول خواهد کشید؟

(ج) مردی نصف سیبهای خود را هر۳ عدد به ۱۷ سنت می‌فروشد وسپس نصف دیگررا هر ۵ عدد به ۱۷ سنت می‌فروشد. وی همهٔ سیبهایش را به‌چه قیمتی بفروشد تا همان درآمد بالا را داشته‌باشد؟

(د) اگریك گلوله نخ به‌قطر ۴ اینچ ۲۰ سنت ارزش داشته باشد، برای یك گلوله نخ به‌قطر ۶ اینچ چقدر باید بپردازید؟

(ه) دوشغل مزد سالانهٔ یکسان ۶۰۰۰ دلار در شروع ومزد سالانهٔ ماکزیمم یکسان ۱۲۰۰۰ دلار دارند. دریکی ازاین دوشغل افزایش مزد سالانهٔ ۸۰۰ دلار و در دیگری افزایش مزد شش ماههٔ ۲۰۰ پیشنهاد می‌شود. کدام شغل پردرآمدتر است؟

(و) هرباکتری درکشت معینی در هردقیقه به‌دو باکتری تقسیم می‌شود. اگردرپایان یك ساعت ۲۰ میلیون باکتری موجود باشند، درچه‌زمانی ۱۰ میلیون باکتری وجود داشته‌اند؟

(ز) آیا یك مزد ۱ سنت برای نیم ماه اول، ۲سنت برای نیم‌ماه دوم، ۴سنت برای نیم‌ماه سوم، ۸سنت برای نیم‌ماه چهارم، وبه‌همین ترتیب تاپایان یافتن سال، مجموعاً مزد سالانه خوب یا بدی است؟

(ح) ساعتی در ۵ ثانیه‌شش ضربه می‌زند. چقدر طول می‌کشد تا دوازده ضربه بزند؟

(ط) یك بطری و یك چوب‌پنبه مجموعاً ۱٫۱۰ دلار قیمت دارند. اگر قیمت بطری یك دلار بیش از قیمت چوب‌پنبه باشد، قیمت چوب‌پنبه چقدر است؟

(ی) فرض کنید که در یك لیوان مقدار معینی از یك مایع مانند A وجود داشته‌باشد، و در لیوان دوم همان مقدار ازمایع دیگری مانند B وجود داشته باشد. یك قاشق ازمایع A را از لیوان اول برداشته و آن را درلیوان دوم می‌ریزیم، سپس یك قاشق از محلول را از لیوان دوم به‌لیوان اول برمی‌گردانیم. اینك مقدار مایع A درلیوان‌دوم از مقدارمایع B درلیوان اول بیشتراست یا کمتر؟

(ك) فرض کنید که ورق بزرگی از کاغذ به‌ضخامت یك‌هزارم اینچ را به‌دو قسمت بریده ودوقطعه را روی هم بگذاریم. حال اینها را نصف می‌کنیم، و چهار قطعه را روی هم به‌صورت کپه می‌گذاریم. اگر این عمل نصف کردن‌وکپه‌کردن را ۵۰ بار انجام دهیم، بلندی کپهٔ نهایی کاغذ از یك‌مایل بیشترخواهد شد یا کمتر؟

(ل) آیا یك تخفیف ۱۵درصد درقیمت فروش یك قلم‌کالا با یك تخفیف ۱۰ درصد درقیمت فروش و یك تخفیف ۵درصد درقیمت تخفیف داده شدهٔ آن یکی است؟

(م) ۴ یك‌چهارم به‌چه نسبتی ازسه‌چهارم بیشتراست؟

(ن) کودکی می‌خواهد میانگین حسابی هشت نمرهٔ خودرا حساب کند. وی ابتدا میانگین چهارنمرهٔ اول، سپس میانگین چهار نمرهٔ آخررا پیدا می‌کند، وسپس میانگین میانگینها را به‌دست می‌آورد. آیا این‌کار وی درست است؟

۱۱٫۱۵ یك دستگاه ریاضی کوچك

مجموعهٔ اصل موضوعی زیررا درنظر بگیرید:

P۱ هر $abba$ مجموعه‌ای از $dabba$هاست.

P۲ حداقل دو $dabba$ موجود است.

P۳ اگر p و q دوتا $dabba$ باشند، آنگاه یك و فقط یك $abba$ وجود دارد که هم شامل p است وهم شامل q.

P۴ اگر L یك $abba$ باشد، آنگاه $dabba$ای وجود دارد که در L نیست.

P۵ اگر L یك $abba$، و p یك $dabba$ باشد که در L نیست، آنگاه یك و فقط‌یك $abba$ شامل p وجود دارد که شامل هیچ‌یك از $dabba$های واقع در L نیست.

(الف) اصطلاحات اولیهٔ این مجموعهٔ اصل موضوعی چیست؟

(ب) نشان دهید که این مجموعهٔ اصل موضوعی مطلقاً سازگار است.

(ج) استقلال اصول موضوعهٔ P۳ و P۵ را ثابت کنید.

(د) قضایای زیر را ازمجموعهٔ اصل‌موضوعی بالا نتیجه بگیرید: (۱) هر $dabba$ حداقل مشمول در دو $abba$ است. (۲) هر $abba$ شامل حداقل دو $dabba$ است. (۳)حداقل چهار $dabba$ی متمایزموجوداست. (۴)حداقل شش $abba$ی متمایز وجوددارد.

۱۲.۱۵ مجموعه‌ای از گزاره‌های ناسازگار

اگر p، q، r معرف گزاره‌هایی باشند، نشان دهید که مجموعهٔ چهار گزارهٔ زیر ناسازگار است: (۱) اگر q درست باشد، آنگاه r نادرست است. (۲) اگر q نادرست باشد، آنگاه p درست است. (۳) r درست است. (۴) p نادرست است.

۱۳.۱۵ یك مجموعهٔ اصل موضوعی مربوط به نظریهٔ نسبیت

فرض کنید S مجموعه‌ای از عناصر و F یك نسبت دوتایی باشد که در اصول موضوعهٔ زیر صدق می‌کند:

P۱ اگر a و b عناصر S باشند و اگر bFa، آنگاه $a\not{F}b$.(در اینجا bFa به‌معنی آن است که عنصر b با عنصر a نسبت F دارد.)

P۲ اگر a یك عنصر S باشد، آنگاه حداقل یك عنصر مانند b از S وجود دارد به‌قسمی که bFa.

P۳ اگر a یك عنصر S باشد، آنگاه حداقل یك عنصر مانند b از S وجود دارد به‌قسمی که aFb.

P۴ اگر a، b، c عناصر S باشند به قسمی که bFa و cFb، آنگاه cFa.

P۵ اگر a و b عناصر S باشند به قسمی که bFa، آنگاه حداقل یك عنصر مانند c از S وجود دارد به قسمی که cFa و bFc.

(الف) نشان دهید که گزارهٔ «اگر a یك عنصر S باشد، آنگاه حداقل یك عنصر مانند b از S، متمایز از a، وجود دارد به قسمی که $b\not{F}a$ و $a\not{F}b$»، با اصول موضوعهٔ بالا سازگار است. (این مجموعهٔ اصول موضوعه، که به آن گزارهٔ بالا اضافه شود، در نظریهٔ نسبیت مورد استفاده قرار گرفته است که در آنجا عناصر S به عنوان لحظه‌های زمان و F به معنی «بعد از» تعبیر می‌شود.)

(ب) اصول موضوعهٔ بالا و گزارهٔ (الف) را در قالب تعبیر مذکور در (الف) بنویسید.

۱۴.۱۵ زنبورها و کندوها

مجموعهٔ اصل موضوعی زیر را در نظر بگیرید، که در آن زنبور و کندو اصطلاحات اولیه هستند:

P۱ هرکندو مجموعه‌ای از زنبورهاست.

P۲ هر دو کندوی متمایز یك وفقط یك زنبور مشترك دارند.

P۳ هر زنبور متعلق به دو و فقط دو کندو است.

P۴ دقیقاً چهار کندو وجود دارد.

(الف) نشان دهید که این مجموعهٔ اصول موضوعه مطلقاً سازگار است.

(ب) نشان دهید که اصول موضوعهٔ $P2$، $P3$، و $P4$ مستقل‌اند.
(ج) قضایای زیر را از مجموعهٔ اصول موضوعهٔ‌مفروض استنتاج کنید:
T۱ دقیقاً شش زنبور وجود دارد.
T۲ درهرکندو دقیقاً سه زنبور وجود دارد.
T۳ به ازای هر زنبور دقیقاً یك زنبور دیگر موجود است‌که با آن دریك‌کندو نیست.

۱۵.۱۵ فضاهای‌متری

درسال ۱۹۰۶، موریس‌فرشه مفهوم‌فضای متریك‌رامطرح کرد. یك **فضای متریك**مجموعه‌ای مانند M از عناصر، به نام **نقاط**، است همراه با عددی حقیقی مانند $d(x,y)$، به نام **تابع‌فاصله** یا **متریك** فضا، که به هرزوج مرتب نقاط x و y در M مربوط می‌شود، و در چهار اصل موضوع زیر صدق می‌کند.
M۱ $d(x,y)\geqslant 0$.
M۲ $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$.
M۳ $d(x,y)=d(y,x)$.
M۴ $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ ، که در آن x، y، z سه نقطه‌از Mاندکه لزوماً متمایز نیستند. (این نامساوی را **نامساوی‌مثلث** می‌نامند.)

(الف) نشان دهیدکه مجموعهٔ M از همهٔ نقاط حقیقی مانند x، همراه با $d(x_1 x_2)=|x_1-x_2|$، یك فضای متریك است.

(ب) نشان دهیدکه مجموعهٔ M از همهٔ زوجهای مرتب $p=(x,y)$ از اعداد حقیقی، همراه با

$$d(p_1,p_2)=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]^{1/2},$$

که در آن $p_1=(x_1,y_1)$ و $p_2=(x_2,y_2)$، یك فضای متریك است.

(ج) نشان دهیدکه مجموعهٔ M از همهٔ زوجهای مرتب $p=(x,y)$ از اعداد حقیقی، همراه با

$$d(p_1,p_2)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|,$$

که درآن $p_1=(x_1,y_1)$ و $p_2=(x_2,y_2)$ ، یك‌فضای متریك است. (به‌کمك مشخص کردن نقاط بریك صفحهٔ دکارتی، بی‌درنگ مشاهده می‌شودکه چرا به‌این فضای متریك، **فضای تاکسی** اطلاق می‌شود.)

(د) نشان دهیدکه مجموعهٔ M ازهمهٔ زوجهای مرتب $p=(x,y)$ ازاعدادحقیقی، همراه با

$$d(p_1,p_2)=\max(|x_2-x_1|\ ,\ |y_2-y_1|),$$

که در آن $p_1=(x_1,y_1)$ و $p_2=(x_2,y_2)$، یك فضای متریك است.

(هـ) نشان دهید که به‌جای اصول موضوعهٔ M۱، M۳، و M۴ می‌توان اصل موضوع تنهای زیر را قرار داد: $M1'$: $d(x,y)\leqslant d(y,z)+d(z,x)$، که در آن x، y، z هرسه نقطه از M، و نه لزوماً متمایز، هستند.

(و) نشان دهید که هر مجموعه‌ای مانند M از عناصر را می‌توان با قراردادن $d(x,y)=1$ اگر $x\neq y$، و $d(x,y)=0$، اگر $x=y$، به‌یك فضای متریك تبدیل کرد.

(ز) نشان دهید که اگر $d(x,y)$ یك متریك برای مجموعه‌ای مانند M باشد، آنگاه می‌توانیم هر یك از متریك‌های زیر را به عنوان یك متریك M مورد استفاده قرار دهیم:

۱. $kd(x,y)$، که در آن k یك عدد مثبت حقیقی است.

۲. $[d(x,y)]^{1/2}$.

۳. $d(x,y)/[1+d(x,y)]$. نشان دهید که در اینجا همهٔ فاصله‌ها کوچکتر از یك هستند.

(ح) فرض کنید که c نقطه‌ای از یك فضای متریك باشد و فرض کنید r عدد حقیقی مثبتی باشد. مجموعهٔ همهٔ نقاط M مانند x را به طوری که $d(c,x)=r$، یك **دایره** به مرکز c و شعاع r در این فضای متریك تعریف کنید. شکل یك دایره را در نمایشهای دکارتی فضاهای متریك (الف)، (ب)، (ج)، و (د) توصیف کنید.

۱۶.۱۵ پاره خطهای معادل

(الف) یك پاره خط AB بسته به‌اینکه سر A (یا B) از آن متعلق یا غیر متعلق به این پاره‌خط فرض شود، با استفاده از به‌ترتیب یك کروشه یا یك پارانتز، درکنار A (یا B) نشان داده خواهد شد. با استفاده از این نمادگذاری، نشان دهید که $[AB]$، $[AB)$، $(AB]$، (AB)، به عنوان مجموعه‌ای از نقاط، با یکدیگر معادل‌اند.

(ب) نشان دهید که مجموعه نقاطی که یك پاره خط متناهی را تشکیل می‌دهند و مجموعه نقاطی که یك پاره خط نامتناهی را تشکیل می‌دهند، معادل هستند.

۱۷.۱۵ برخی مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

(الف) نشان دهید که اجتماع عدهٔ متناهیی از مجموعه‌های شمارا یك مجموعهٔ شماراست.

(ب) نشان دهید که اجتماع عدهٔ شمارایی از مجموعه‌های شمارا یك مجموعهٔ شماراست.

(ج) نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ اعداد ناگویا ناشماراست.

(د) نشان دهید که مجموعهٔ کلیهٔ اعداد متعالی ناشماراست.

۱۸.۱۵ چند جمله‌ایهایی به ارتفاعهای ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵

(الف) نشان دهید که ۱ تنها چند جمله‌ای به ارتفاع ۱ است.

(ب) نشان دهید که x و ۲ تنها چند جمله‌ایهای به ارتفاع ۲ هستند.

(ج) نشان دهید $x^۲$، $۲x$، $x+۱$، $x-۱$، و ۳ تنها چند جمله‌ایهای به ارتفاع ۳ هستند، و اعداد جبری متمایز ۰، ۱، ۱ − را می‌دهند.

(د) همهٔ چند جمله‌ایهای ممکن به ارتفاع ۴ را تشکیل و نشان دهید که تنها اعداد جبری حقیقی جدید حاصل از آنها ۲ −، ۱/۲ −، ۱/۲، ۲ هستند.

(ه) نشان‌دهید که چندجمله‌ایهای به‌ارتفاع ۵، دوازده عددجبری‌حقیقی دیگر به‌دست می‌دهند.

۱۹.۱۵ اندازهٔ یك مجموعهٔ شمارا ازنقاط

(الف) جزئیات برهان زیر دربارهٔ ناشمارا بودن همهٔ نقاط واقع بریك پاره خط AB راکامل کنید:

طول AB را ۱ واحد اختیار و فرض کنید که نقاط واقع بر AB یك‌مجموعهٔ شمارا تشکیل دهند. در این صورت نقاط واقع بر AB را می‌توان به‌صورت دنباله‌ای مانند $\{P_۱, P_۲, P_۳, \ldots\}$ مرتب کرد. نقطهٔ $P_۱$ را دربازه‌ای به طول ۱/۱۰، نقطهٔ $P_۲$ را دربازه‌ای به‌طول $۱/۱۰^۲$، نقطهٔ $P_۳$ را دربازه‌ای به‌طول $۱/۱۰^۳$، محصور کنید و به‌همین نحو ادامه دهید. نتیجه می‌شود که طول‌واحد AB توسط دنباله‌ای متناهی از زیر بازه‌های احتمالاً در همرونده به‌طولهای ۱/۱۰، $۱/۱۰^۲$، $۱/۱۰^۳$،...کاملاً پوشیده می‌شود. اما مجموع طولهای این زیر بازه‌ها عبارت است از

$$۱/۱۰+۱/۱۰^۲+۱/۱۰^۳+\cdots=۱/۹<۱.$$

(ب) با انتخاب زیر بازه‌های قسمت (الف) به‌طوری که طولهای $\varepsilon/۱۰$، $\varepsilon/۱۰^۲$، $\varepsilon/۱۰^۳$،... داشته باشند که در آن ε عدد مثبتی باکوچکی دلخواه است، نشان دهید یك مجموعهٔ شمارا از نقاط را می‌توان توسط مجموعه‌ای از بازه‌ها پوشانید به طوری که مجموع طول بازه‌ها تا هر اندازه‌که بخواهیم کوچك باشد. (با استفاده از اصطلاحات نظریهٔ اندازه، گوییم که یك مجموعهٔ شمارا از نقاط دارای **اندازه‌صفر** است.)

۲۰.۱۵ اعداد ترانسفینی و نظریهٔ ابعاد

فرض کنید که $E_۱$ معرف مجموعهٔ نقاط واقع بر یك پاره‌خط واحد $[۰,۱)$ و $E_۲$ معرف مجموعهٔ همهٔ نقاط واقع بر یك مربع واحد $۰<x,y\leqslant ۱$ باشد. نقطه‌ای مانند Z از $E_۱$ را می‌توان توسط ارقام اعشاری بی‌پایانی مانند $z=۰.z_۱z_۲z_۳\ldots$، که بین ۰ و ۱ قرار دارند، نشان داد، و نقطه‌ای مانند P از $E_۲$ را می‌توان توسط زوج مرتبی از ارقام اعشاری بی‌پایان مانند

$$(x = 0.x_1x_2x_3\ldots,\ y = 0.y_1y_2y_3\ldots)$$

نشان داد که هر کسر اعشاری بین ۰ و ۱ قرار دارد. فرض کنید که هر z_i، x_i، y_i را در این نمایشها معرف یك رقم غیرصفر یا یك رقم غیرصفری که قبل از آن احتمالاً بلوکی از صفرها می‌آید، بگیریم. مثلاً، اگر $z = 0.73028007\ldots$، آنگاه $z_1 = 7$، $z_2 = 3$، $z_3 = 02$، $z_4 = 8$، $z_5 = 007$، ... . نشان دهید که می‌توان یك تناظر یك بدیك بین نقاط E_1 و نقاط E_2 بدین ترتیب برقرار کرد که به هر نقطهٔ $0.z_1z_2z_3\ldots$ از E_1 یك نقطهٔ

$$(0.z_1z_3z_5\ldots,\ 0.z_2z_4z_6\ldots)$$

از E_2 نسبت داده شود، و به نقطهٔ

$$(0.x_1x_2x_3\ldots,\ 0.y_1y_2y_3\ldots)$$

از E_2، نقطهٔ $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$ از E_1 منسوب شود. بدین ترتیب نشان دهید که مجموعهٔ کلیهٔ نقاط واقع در یك مربع واحد دارای عدد ترانسفینیِ c است. (این کار نشان می‌دهد که بعد یك چندگونا را نمی‌توان با عدد ترانسفینیِ چندگونا مشخص کرد.)

۲۱۰۱۵ دوایر و خطوط

(الف) نشان دهید که اگر حداقل یکی از مختصات مرکز دایره‌ای ناگویا باشد، آنگاه حداکثر دو نقطه بر دایره با مختصات گویا وجود دارند.

(ب) نشان دهید که اگر حداقل یکی از مختصات مرکز دایره‌ای یك عدد متعالی باشد، آنگاه حداکثر دو نقطه بر دایره با مختصات جبری وجود دارند.

(ج) آیا ممکن است که یك خط مستقیم یا یك دایره در صفحهٔ دکارتی تنها شامل نقاطی با مختصات گویا باشند؟ با مختصات جبری باشند؟

(د) نشان دهید که هر مجموعهٔ نامتناهی از بازه‌های بستهٔ دو به دو خارج هم واقع بر یك خط مستقیم، شماراست.

(ه) نشان دهید که هر مجموعهٔ نامتناهی از دوایر دو به دو خارج هم، در یك صفحه، شماراست.

۲۲۰۱۵ سطوح همسانریخت

دو سطح را **همسانریخت**، یا **از نظر توپولوژی هم‌ارز** نامیم، هرگاه بتوانیم یکی را از دیگری بر اثر کشیدن، فشردن، خم کردن (بدون پاره کردن یا به هم چسباندن)، و در صورت نیاز، بریدن ــ البته به‌شرطی که سرانجام دو لبهٔ هر بریدگی را به همان گونه که قبل از بریدن بودند، به هم متصل کنیم ــ به‌دست آوریم.

(الف) سطوح تشکیل شده از ۲۶ حرف الفبا را در دسته‌هایی که از لحاظ توپولوژیکی هم‌ارز باشند، مرتب کنید.

(ب) نشان دهید که یك چهاروجهی منتظم که به‌جای یالهای آن سیم گذاشته شده، سطحی را به‌دست می‌دهد که با سطح کره‌ای که سه‌دسته فنجان چایی به‌آن متصل شده، همسانریخت است.

(ج) لطیفهٔ زیر را توضیح دهید: «در نظر یك توپولوژی‌دان بین یك دونات [نان شیرینی حلقه‌ای شکل] و فنجان قهوه‌اش تفاوتی وجود ندارد.»

۲۳.۱۵ طرفها و یالها

(الف) سطحی که از تاب‌دادن یك نوار کاغذی به‌اندازهٔ 180° وچسباندن دوسر آن به‌هم تشکیل می‌شود، **نوار موبیوس** نام دارد. نشان‌دهید که نوار موبیوس فقط یك طرف و یك یال بدون گره دارد.

(ب) سطحی بسازید که یك‌طرف و یك‌یال گره‌دار داشته‌باشد.

(ج) سطحی بسازید که دوطرف و یك‌یال گره‌دار داشته‌باشد.

(د) سطحی بسازید که دوطرف و یك‌یال بدون گره داشته‌باشد.

۲۴.۱۵ حلقه‌های همرو

روش جادوگری را که به‌مصلحت بودن ازدواج زوجهای خواهان ازدواج را به‌شرح زیر تعیین می‌کرد، مورد بحث قراردهید. اگرمی‌خواست که یك‌جدایی درآینده رادر ازدواج مطرح شده پیش‌بینی نماید، یك نوار تاب نخورده را از وسط می‌برید؛ اگر می‌خواست پیش‌بینی کند که زوج باهم مشاجره خواهندکرد ولی باهم خواهند ماند، نواری راکه تاب‌کاملی داشت، دونیم می‌کرد؛ اگر می‌خواست ازدواج پایداری را پیش‌بینی کند، یك نوار موبیوس را دونیم می‌کرد.

۲۵.۱۵ سطوح چندوجهی

(الف) مقدار $v-e+f$ را برای هریك از سطوح چندوجهی منتظم حساب کنید. (می‌توان نشان‌داد که برای همهٔ‌سطوح چندوجهی همسانریخت باکره، $v-e+f=2$.)

(ب) مثالهایی از سطوح بستهٔ سادهٔ چندوجهی باشش و هشت‌یال ارائه ونشان‌دهید که هیچ سطحی با هفت‌یال وجود ندارد.

(ج) از روی رابطهٔ $v-e+f=2$ نشان دهید که بیش از پنج چندوجهی منتظم نمی‌تواند موجود باشد.

۲۶.۱۵ وجوه و رئوس سطوح چندوجهی

یك سطح چندوجهی بستهٔ‌ساده مانند P با v رأس، e یال، و f وجه را درنظر گیرید. فرض کنید f_n معرف عدهٔ وجوه با n یال، و v_n معرف عدهٔ رئوسی که از آنها n یال منشعب می‌شوند، باشند.

(الف) نشان دهید که

۱. $f=f_{3}+f_{4}+\cdots$.

۲. $v=v_{3}+v_{4}+\cdots$.

۳. $2e=3f_{3}+4f_{4}+5f_{5}+\cdots$.

۴. $2e=3v_{3}+4v_{4}+5v_{5}+\cdots$.

حال، از روی رابطهٔ $v-e+f=2$، نشان دهید که

۵. $2(v_{3}+v_{4}+\cdots)=4+f_{3}+2f_{4}+3f_{5}+4f_{6}+\cdots$.

به‌طور مشابه نشان دهید که

۶. $2(f_{3}+f_{4}+\cdots)=4+v_{3}+2v_{4}+3v_{5}+4v_{6}+\cdots$.

با دوبرابر کردن (۶) واضافه کردن (۵) به‌آن رابطهٔ زیر را به‌دست آورید.

۷. $3f_{3}+2f_{4}+f_{5}=12+2v_{4}+4v_{5}+\cdots+f_{7}+2f_{8}+\cdots$.

(ب) ازمسئلهٔ (۷) قسمت (الف) نتایج زیررا استخراج کنید.

۱. هیچ Pای نیست که وجوه آن بیش از ۵ یال داشته باشد.

۲. اگر P هیچ‌وجه سه‌ضلعی یا چهارضلعی نداشته باشد، آنگاه حداقل ۱۲ وجه P، پنج‌ضلعی‌اند.

۳. اگر P دارای هیچ وجه سه‌ضلعی یا پنج‌ضلعی نباشد، آنگاه حداقل شش‌وجه P چهارضلعی‌اند.

۴. اگر P دارای هیچ‌وجه چهارضلعی یاپنج‌ضلعی نباشد، آنگاه حداقل چهاروجه P سه‌ضلعی‌اند.

(ج) P را **سه‌وجهی** می‌نامند اگرازهر رأس دقیقاً سه‌یال‌خارج شوند.نشان‌دهید که:

۱. اگر P سه‌وجهی باشد و وجوه‌آن تنها پنج‌ضلعی وشش‌ضلعی باشند، آنگاه‌تعداد وجوه پنج‌ضلعی در آن ۱۲ است.

۲. اگر P سه‌وجهی باشد و وجوه‌آن تنها چهارضلعی و هشت‌ضلعی باشند، آنگاه تعداد وجوه چهارضلعی در آن ۶است.

۳. اگر P سه‌وجهی باشد و وجوه‌آن تنهاسه‌ضلعی وهشت‌ضلعی باشند، آنگاه‌تعداد وجوه سه‌ضلعی در آن ۴ است.

۲۷.۱۵ فضای هاوسدورف

درسال ۱۹۱۴، فلیکس هاوسدورف یك فضای توپولوژی مجرد پدید آورد که به‌**فضای هاوسدورف** مشهور شده است. چنین فضایی عبارت‌است ازمجموعه‌ای مانند H ازاعضا،

که نقاط نامیده می‌شوند، همراه با زیرمجموعه‌های H، که همسایگیها نامیده می‌شوند،و درچهار اصل موضوع زیرصدق می‌کنند:

H۱ به‌ازای هرنقطهٔ x در H، حداقل یك همسایگی مانند N_x شامل x موجود است.

H۲ به ازای هردو همسایگی مانند N_x و N'_x از x، همسایگی سومی مانند N''_x موجود است که هم مشمول در N_x و هم مشمول در N'_x است.

H۳ اگر y نقطه‌ای در N_x باشد، یك همسایگی y مانند N_y موجود است به‌طوری که N_y مشمول در N_x است.

H۴ اگر x و y نقاط متمایزی در H باشند، همسایگیهایی مانند N_x و N_y موجودندکه نقطهٔ مشترکی ندارند.

(الف) نشان دهیدکه مجموعهٔ کلیهٔ نقاط یك خط راست را می‌توان یك فضای هاوسدورف گرفت که درآن همسایگیهای نقطهٔ x پاره‌خطهای بازی اختیار می‌شوندکه x وسط آنهاست. (همتای حسابی این فضای هاوسدورف درمبحث آنالیز مهم است.)

(ب) نشان دهیدکه مجموعه نقاط صفحه را می‌توان یك‌فضای هاوسدورف گرفت که درآن همسایگیهای نقطه‌ای مانند P، درونهای دوایر به‌مرکز P اختیار می‌شوند.

(ج) نشان دهیدکه مجموعهٔ کلیهٔ نقاط صفحه را می‌توان یك فضای هاوسدورف گرفت‌که درآن همسایگیهای نقطه‌ای مانند P درونهای مربعهایی به‌مرکز P وبا اضلاعی که موازی دوخط مفروض عمود برهم در صفحه‌اند، اختیار می‌شوند.

(د) نشان دهیدکه از هرمجموعهٔ نقاط می‌توان یك فضای هاوسدورف ساخت در صورتی‌که همسایگیهای نقاط را خود نقاط بگیریم.

(ه) نشان دهیدکه از هر فضای متریك می‌توان یك فضای هاوسدورف ساخت در صورتی‌که همسایگیها را درونهای«دوایر» بگیریم (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای۱۵.۱۵).

تعریف نقطه‌ای مانند x درفضای هاوسدورف H، یك **نقطهٔ حدی** زیرمجموعهٔ S در H نامیده می‌شود، مشروط براینکه هرهمسایگی x حداقل شامل یك‌نقطهٔ S مجزا از x باشد.

(و) ثابت‌کنیدکه هرهمسایگی مانند N_x ازیك نقطهٔ حدی x ازیك زیرمجموعهٔ S ازفضای هاوسدورف H، شامل تعدادی نامتناهی از نقاط S است.

۲۸.۱۵ گزاره‌های متفق

سه‌گزارهٔ زیر به‌گزارهٔ «اگر p، آنگــاه q» مربوط می‌شوند: (۱) عکس آن، «اگــر q، آنگاه p»، (۲) متقابل آن، «اگر نه p، آنگاه نه q»، (۳) عکس نقیض‌آن، «اگر نه q، آنگاه نه p». نشان دهید:

(الف) عکس یك استلزام درست، لزوماً یك استلزام درست نیست.

(ب) متقابل یك استلزام درست لزوماً یك استلزام درست نیست.

(ج) عکس نقیض یك استلزام درست، یك استلزام درست است.
(د) عکس نقیض یك استلزام با عکس متقابل آن یکی است.
(ه) آیا متقابل عکس یك استلزام با عکس متقابل آن یکی است؟

۲۹.۱۵ منطقهای سه‌ارزشی

(الف) نشان دهید که ۲۵۶ طریق گوناگون در تشکیل یك جدول ارزش برای ترکیب عطفی در یك منطق سه‌ارزشی وجود دارد که در آن فرض می‌کنیم که «p و q» درست است وقتی و فقط وقتی که هم p درست باشد و هم q.

(ب) نشان دهید که ۱۲ طریق مختلف در تشکیل یك جدول ارزش برای نقیض در یك منطق سه‌ارزشی وجود دارد که در آن فرض می‌کنیم وقتی p درست است، نه p باید درست نباشد، و وقتی p نادرست باشد، نه p نباید نادرست باشد.

(ج) بافرض اینکه، مانند مورد منطق رایج دوارزشی، تمام رابطهای منطقی دیگر را بتوان با تعریف این رابطهای دیگر در قالب ترکیب عطفی و نقیض تشکیل داد، نشان دهید که مجموعاً ۳۰۷۲ منطق سه‌ارزشی می‌تواند موجود باشد.

(د) چند منطق m- ارزشی ممکن مشابه با ۳۰۷۲ منطق سه ارزشی ممکن موجود است؟

۳۰.۱۵ پارادوکس راسل

صورتهای قابل فهم زیر برای عامه از پارادوکس راسل را درنظر گیرید:

(الف) در کشوری هر شهرداری باید یك شهردار داشته باشد، و هیچ دو ناحیهٔ شهرداری نمی‌توانند یك شهردار داشته باشند. بعضی از شهردارها درحوزهٔ شهرداری محل خدمت خود سکونت ندارند. قانونی تصویب می‌شود که شهرداران غیرساکن را به‌سکونت در یك ناحیهٔ معین A ملزم می‌کند. تعداد شهرداران غیرساکن به‌قدری است که A خود بخشی دارای شهردار اعلام می‌شود. شهردار A کجا باید اقامت نماید؟

(ب) در زبان انگلیسی صفتی راکه خودرا توصیف کند **حملپذیر**[1] نامند؛ درغیر این صورت صفت را **حملناپذیر**[2] نامند. مثلاً صفات «کوتاه»، «English»، و«چند سیلابی» توصیف کنندهٔ خود هستند و بنابراین حملپذیرند، درحالی که صفات «دراز»، «انگلیسی»، و «تك سیلابی» توصیف کنندهٔ خود نیستند و بنابراین حملناپذیرند. حال می‌خواهیم بدانیم که صفت «حملناپذیر» حملپذیر است یا حملناپذیر؟

(ج) فرض کنید که کتابداری، برای گذاشتن در کتابخانه‌اش، یك کتابنامه از همهٔ کتابنامه‌هایی که نام آنها درخودآنها فهرست نشده، گردآوری می‌کند.

---

1. autological 2. heterological

۳۱.۱۵ یك پارادوکس

پارادوکس زیر را بررسی کنید. هرعدد طبیعی‌را می‌توان به‌زبان عرفی وبدون استفاده از نمادهای عددی بیان‌کرد. مثلاً ۵ را می‌توان با «پنج» یا «نصف ده»، یا «دومین عدداول فرد»، یا «جذر مثبت عدد بیست و پنج» و عباراتی ازاین قبیل بیان‌کرد. حال عبارت «کوچکترین عدد طبیعی‌که باکمتر از دوازده‌کلمه قابل بیان نباشد» را در نظر بگیرید. این عبارت یك عدد طبیعی را با یازده‌کلمه بیان می‌کندکه باکمتر از دوازده کلمه قابل بیان نیست.

۳۲.۱۵ برخی بلاتکلیفیها و چند سؤال

(الف) یك‌کروکدیل‌که بچه‌ای را دزدیده است: به‌پدربچه قول می‌دهدکه بچه را برگرداند به‌شرطی‌که پدربچه حدس بزندکه بچه برگردانده خواهد شد یانه. اگر پدر بچه حدس بزندکه بچه بازگردانده نخواهد شد،کروکدیل چه باید بکند؟

(ب)کاشفی به‌دست آدمخوارانی گرفتار آمده است‌که به‌او این فرصت را می‌دهند تا جمله‌ای ابرازکندکه به‌شرط درست بودن‌آن وی را آب‌پزکنند واگر نادرست باشد وی راکباب‌کنند. اگرکاشف بگویدکه «من‌کباب خواهم شد» آدمخواران چه باید بکنند؟

(ج) آیا حکم «هرقاعده را استثنائاتی است» ناقض خود است؟

(د) اگر یك نیروی مقاومت ناپذیر با جسم حرکت ناپذیری برخورد کند، چه‌خواهد شد؟

(ه) اگر زئوس[1] قادر به‌هرکاری باشد، آیا می‌تواند سنگی بسازدکه نتواندآن‌را بلندکند؟

۳۳.۱۵ ریاضیات تفریحی

(الف) هر۱۲ پنتومینو را بسازید و به‌طورتجربی حداقل یکی از ۶۵ راه‌گذاشتن آنها درکنارهم را برای‌تشکیل یك‌مربع ۸ × ۸ با یك سوراخ ۲ × ۲ در وسط پیداکنید.

(ب) هشت وزیر را بریك صفحهٔ شطرنج طوری قراردهیدکه هیچ وزیری نتواند دیگری را بزند. (این‌مسئله دراصل توسط فرانتس ناؤك[2] در سال ۱۸۵۰ مطرح شد. ۱۲ جواب بنیادی، یعنی جوابهایی‌که هیچ دوتا ازآنها را نمی‌توان از یکدیگر با دوران یا انعکاس به‌دست آورد، وجود دارد.)

عنوان مقاله

۱/۱۵ نیلس‌آبل (۱۸۰۲-۱۸۲۹).

۲/۱۵ داستانها وحکایاتی دربارهٔ داوید هیلبرت.

---

1. Zeus 2. Franz Nauch

۳/۱۵ هرمان مینکوفسکی (۱۸۶۴-۱۹۰۹).
۴/۱۵ هاردی و لیتلوود.
۵/۱۵ آلبرت اینشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵).
۶/۱۵ آمالی امی نوئتر (۱۸۸۲-۱۹۳۵).
۷/۱۵ سر ینوس رمنوجن (۱۸۸۷-۱۹۲۰).
۸/۱۵ نوربرت وینر (۱۸۹۴-۱۹۶۴).
۹/۱۵ خواص دستگاههای اصول موضوعه.
۱۰/۱۵ یك مجموعهٔ اصول موضوعه برای جبر بولی.
۱۱/۱۵ اصل دوگانی جبر بولی.
۱۲/۱۵ جنبه‌های تفریحی نوار موبیوس.
۱۳/۱۵ سطوح همسانریخت.
۱۴/۱۵ تعاریف غیراسنادی.
۱۵/۱۵ قضایای گودل.
۱۶/۱۵ هنر کامپیوتری.
۱۷/۱۵ تمبرهای کامپیوتری هلند.
۱۸/۱۵ بعد چهارم درطراحی چشم‌اندازها.
۱۹/۱۵ مکتب ریاضی لهستان.
۲۰/۱۵ روانشناسی ابداع ریاضی.
۲۱/۱۵ آیا ریاضیات اختراع می‌شود یا اکتشاف؟
۲۲/۱۵ زیبایی‌شناسی ریاضیات و ریاضیات زیبایی‌شناسی.
۲۳/۱۵ تعهدات اخلاقی ریاضیدانان.
۲۴/۱۵ تکامل دیدگاهها درباب ماهیت هندسه.
۲۵/۱۵ داستانها وحکایاتی دربارهٔ بورباکی.
۲۶/۱۵ فردای ریاضیات جدید.
۲۷/۱۵ درسهایی که از درخت ریاضیات می‌گیریم.
۲۸/۱۵ علت مطالعهٔ تاریخ ریاضیات.
۲۹/۱۵ تاریخ ریاضیات به‌عنوان یك‌وسیلهٔ تدریس.
۳۰/۱۵ مواردی از تاریخ ریاضیات درکلاسهای درس متوسطه.

کتابنامه

ALEXANDROFF, PAUL, *Elementary Concepts of Topology*. Translated by A. N. Obolensky. New York: Frederick Ungar, 1965.

AMBROSE, ALICE, and MORRIS LAZEROWITZ, *Fundamentals of Symbolic Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1948.

APOSTLE, H. G., *Aristotle's Philosophy of Mathematics*. Chicago: University of Chicago Press, 1952.

BARKER, S. F., *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.

BEGLE, E. G., ed., *The Role of Axiomatics in Problem Solving in Mathematics*. Boston: Ginn, 1966.

BENACERRAF, PAUL, and HILARY PUTNAM, eds., *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.

BERKELEY, E. C., *Giant Brains; Or, Machines that Think*. New York: John Wiley, 1949.

BERNAYS, PAUL, *Axiomatic Set Theory*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1958.

BERNSTEIN, JEREMY, *The Analytical Engine: Computers—Past, Present and Future*. New York: Random House, 1963.

BETH, E. W., *The Foundations of Mathematics*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1959.

———, *Mathematical Thought: An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. New York: Gordon & Breach Science Publishers, 1965.

BIRKHOFF, G. D., and RALPH BEATLEY, *Basic Geometry*. Chicago: Scott, Foresman, 1940; New York: Chelsea, 1959.

BLACK, MAX, *The Nature of Mathematics: A Critical Survey*. 2d ed. New York: Humanities Press, 1950.

———, *Critical Thinking: An Introduction to Logic and Scientific Method*. 2d ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1952.

BLANCHÉ, ROBERT, *Axiomatics*. Translated by G. B. Kleene. London: Routledge & Kegan Paul, 1962.

BLUMENTHAL, L. M., *A Modern View of Geometry*. San Francisco: W. H. Freeman, 1961.

BOCHENSKI, J. M., *A Precis of Mathematical Logic*. Translated by Otto Bird. Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1959.

———, *A History of Formal Logic*. Translated by Ivo Thomas. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1961.

BOOLE, GEORGE, *An Investigation of the Laws of Thought*, New York: Dover, 1951.

BRADIS, V. M., V. L. MINKOVSKII, and A. K. KHARCHEVA, *Lapses in Mathematical Reasoning*. New York: Macmillan, 1959.

BREUER, JOSEPH, *Introduction to the Theory of Sets*. Translated by H. F. Fehr, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1958.

CANTOR, GEORG, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Translated by P. E. B. Jourdain. New York: Dover, 1915.

CARMICHAEL, R. D., *The Logic of Discovery*. Chicago: Open Court, 1930.

CARNAP, RUDOLF, *The Logical Syntax of Language*. New York: Harcourt, Brace & World, 1937.

CARTWRIGHT, M. L., *The Mathematical Mind*. New York: Oxford University Press, 1955.

CHAPMAN, F. M., and PAUL HENLE, *The Fundamentals of Logic*. New York: Charles Scribner's, 1933.

CHURCH, ALONZO, *Introduction to Mathematical Logic (Part 1)*. Annals of Mathematics Studies, No. 13, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1944.

COHEN, M. R., and ERNEST NAGEL, *Introduction to Logic and Scientific Method*. New York: Harcourt, Brace & World, 1934.

COOLEY, J. C., *A Primer of Formal Logic*. New York: Macmillan, 1942.

COURANT, RICHARD, and HERBERT ROBBINS, *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. New York: Oxford University Press, 1941.

CURRY, H. B., *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1951.

DAVIS, MARTIN, *Computability & Unsolvability*, New York: McGraw-Hill, 1958.

DELACHET, ANDRÉ, *Contemporary Geometry*. Translated by H. G. Bergmann. New York: Dover, 1962.

DUBBEY, J. M., *Development of Modern Mathematics*. London: Butterworth, 1970.
ENRIQUES, FEDERIGO, *The Historic Development of Logic*. Translated by J. Rosenthal. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1929.
EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*, vol. 2. Boston: Allyn and Bacon, 1965.
———, and C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Rev. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
EXNER, R. M., and M. F. ROSSKOPF, *Logic in Elementary Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1959.
FEARNSIDE, W. W., and W. B. HOLTHER, *Fallacy, the Counterfeit of Argument*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1959.
FÉLIX, LUCIENNE, *The Modern Aspect of Mathematics*. Translated by J. H. and F. H. Hlavaty New York: Basic Books, 1960.
FORDER, H. G., *The Foundations of Euclidean Geometry*. New York: Cambridge University Press, 1927.
FRAENKEL, A. A., *Abstract Set Theory*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1953.
———, and Y. BAR-HILLEL, *Foundations of Set Theory*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1958.
FRÉCHET, MAURICE, and KY FAN, Initiation to Combinatorial Topology. Translated and augmented with notes by Howard Eves. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1967.
FREGE, GOTTLOB, *The Foundations of Arithmetic: A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number*. Translated by J. L. Austin. Oxford: Basil Blackwell, 1959.
GALILEO GALILEI, Dialogue Concerning Two New Sciences. Translated by H. Crew and A. deSalvio. New York: Dover, 1951.
GARDNER, MARTIN, *Logic Machines and Diagrams*. New York: McGraw-Hill, 1958.
GÖDEL, KURT, On *Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1934.
———, *Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Rev. ed. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1951.
GOLDSTINE, H. H., *The Computer from Pascal to Von Neumann*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1972.
GOODSTEIN, R. L., *Essays in the Philosophy of Mathematics*. Leicester, England: Leicester University Press, 1965.
GRADSHTEIN, I. S., *Direct and Converse Theorems*. Translation by T. Boddington. New York: Macmillan, 1963.
HADAMARD, JACQUES, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945.
HALSTED, G. B., *Rational Geometry*. New York: John Wiley, 1904.
HARDY, G. H., *A Mathematician's Apology*. New York: Cambridge University Press, 1941.
HAUSDORFF, FELIX, *Mengenlehre*. New York: Dover, 1944.
———. *Grundzüge der Mengenlehre*. New York: Chelsea, 1949.
HEATH, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2d ed., 3 vols. New York: Dover, 1956.
HEYTING, A., *Intuitionism: An Introduction*. Amsterdam, Holland: North-Holland Publishing Company, 1956.
HILBERT, DAVID, *The Foundations of Geometry*. 10th ed., revised and enlarged by Paul Bernays. Translated by Leo Unger. Chicago: Open Court, 1971.
———, and WILHELM ACKERMANN, *Principles of Mathematical Logic*. Translated by L. M. Hammond, et al. New York: Chelsea, 1950.

INFELD, LEOPOLD, *Albert Einstein: His Work and Its Influence on Our World*. New York: Charles Scribner's, 1950.
JAMES, GLENN, ed., *The Tree of Mathematics*. Pacoima, Calif.: The Digest Press, 1957.
JOHNSON, P. E., *A History of Set Theory*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1972.
KAMKE, E., *Theory of Sets*, Translated by F. Bagemihl. New York: Dover, 1950.
KELLY, J. L., *General Topology*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1955.
KENELLY, J. W., *Informal Logic*. Boston: Allyn and Bacon, 1967.
KEYSER, C. J., *Mathematical Philosophy: A Study of Fate and Freedom*. New York: E. P. Dutton 1922

———, *Mathematics and the Question of Cosmic Mind, with Other Essays*. New York: *Scripta Mathematica*, 1935.
———, *Thinking about Thinking*. New York: *Scripta Mathematica*, 1942.
KING, AMY, and C. B. READ, *Pathways to Probability*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1963.
KLEENE, S. C., *Introduction to Metamathematics*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1952.
KNEALE, WILLIAM and MARTHA, *The Development of Logic*. New York: Oxford University Press, 1962.
KNEEBONE, G. T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1963.
KÖRNER, STEPHAN, *The Philosophy of Mathematics: An Introduction*. New York: Harper & Row, 1962.
LANGER, S. K., *An Introduction to Symbolic Logic*. 2d rev. ed. New York: Dover, 1953.
LASALLE, J. P., and SOLOMON LEFSCHETZ, eds., *Recent Soviet Contributions to Mathematics*. New York: Macmillan, 1962.
LEIBNIZ, G. W., *Logical Papers*, ed. and translated by G. A. R. Parkinson. New York: Oxford University Press, 1966.
LE LIONNAIS, F., ed., *Great Currents of Mathematical Thought*. 2 vols. Translated by R. A. Hall and H. G. Bergmann. New York: Dover, 1971.
LUCHINS, A. S. and E. H., *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
LUKASIEWICZ, JAN, *Elements of Mathematical Logic*. Translated by O. Wojtasiewicz. New York: Macmillan, 1963.
MACH, ERNST, *Space and Geometry*. Translated by T. J. McCormack. Chicago: Open Court, 1943.
MANHEIM, J. H., *The Genesis of Point Set Topology*. New York: Macmillan, 1964.
MAZIARZ, E. A., *The Philosophy of Mathematics*. New York: Philosophical Library, 1950.
MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. Translated by John Dyer-Bennet. San Francisco: Holden-Day, 1964.
———, *Evolution of Mathematical Thought*. Translated by J. H. Gayl. San Francisco: Holden-Day, 1965.
MORRISON, PHILIP and EMILY, *Charles Babbage and His Calculating Engines (selected writings of Charles Babbage and others)*. New York: Dover, 1961.
MOSTOWSKI, ANDRZEJ, *Thirty Years of Foundational Studies*. New York: Barnes & Noble, 1966.
NAGEL, ERNEST, and J. R. NEWMAN, *Gödel's Proof*. New York: New York University Press, 1958.
NEWMAN, M. H. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. New York: Cambridge University Press, 1939.
NEWSOM, C. V., *Mathematical Discourses: The Heart of Mathematical Science*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.
NICOD, JEAN, *Foundations of Geometry and Induction*. New York: The Humanities Press, 1950.
POINCARÉ, HENRI, *The Foundations of Science*. Translated by G. B. Halsted. Lancaster, Pa.: The Science Press Printing Company, 1913.
POLYA, GEORGE, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945.
———, *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1954.
———, *Patterns of Plausible Inference*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1954.
———, *Mathematical Discovery*. 2 vols. New York: John Wiley, 1962 and 1965.
PRASAD, GANESH, *Mathematical Research in the Last Twenty Years*. Berlin: Walter de Gruyter, 1923.
QUINE, W. V., *Mathematical Logic*. New York: W. W. Norton, 1940.
———, *Elementary Logic*. Rev. ed. Cambridge Mass.: Harvard University Press, 1980.
———, *Methods of Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1950.
RAMSEY, F. P., *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. New York: The Humanities Press, 1950.

RASHEVSKY, N., *Looking at History Through Mathematics*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press, 1968.
REICHENBACH, HANS, *The Theory of Probability: An Inquiry into the Logical and Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1949.
REID, CONSTANCE, *Hilbert*. New York: Springer-Verlag, 1970.
———, *Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician*. New York: Springer-Verlag, 1976.
RESCHER, NICHOLAS, *Hypothetical Reasoning*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1964.
ROBB, A. A., *A Theory of Time and Space*. New York: Cambridge University Press, 1914.
ROBINSON, G. DE B., *The Foundations of Geometry*. 2d ed. Toronto: University of Toronto Press, 1946.
ROSENBLOOM, P. C., *The Elements of Mathematical Logic*. New York: Dover, 1950.
ROSSER, J. B., *Logic for Mathematicians*. New York: McGraw-Hill, 1953.
———, and A. R. TURQUETTE, *Many-valued Logics*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1951.
RUSSELL, BERTRAND, *Introduction to Mathematical Philosophy*. 2d ed. New York: Macmillan, 1924.
———, *Mysticism and Logic*. New York: W. W. Norton, 1929.
———, *Principles of Mathematics*. 2d ed. New York: W. W. Norton, 1937.
———, *An Essay on the Foundations of Geometry*. New York: Dover, 1956.
SCHAAF, W. L., *Mathematics, Our Great Heritage: Essays on the Nature and Cultural Significance of Mathematics*. Rev. ed. New York: Collier Books, 1963.
SCHOLZ, HEINRICH, *Concise History of Logic*. Translated by K. F. Leidecker. New York: Philosophical Library, 1961.
SIERPÍNSKI, WACLAW, *Introduction to General Topology*. Translated by C. C. Krieger. Toronto: University of Toronto Press, 1934.
SINGH, JAGJIT, *Great Ideas of Modern Mathematics: Their Nature and Use*. New York: Dover, 1959.
STABLER, E. R., *An Introduction to Mathematical Thought*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1953.
STIBITZ, G. R., and J. A. LARRIVEE, *Mathematics and Computers*. New York: McGraw-Hill, 1957.
STOLL, R. R., *Sets, Logic and Axiomatic Theories*. San Francisco: W. H. Freeman, 1961.
STYAZHKIN, N. I., *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press, 1969.
SUPPES, PATRICK, *Axiomatic Set Theory*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1960.
TARSKI, ALFRED, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Translated by O. Helmer, New York: Oxford University Press, 1954.
VAN HEIJENOORT, JEAN, *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.
VON NEUMANN, JOHN, *The Computer and the Brain*. New Haven: Yale University Press, 1959.
WAISMANN, FRIEDRICH, *Introduction to Mathematical Thinking*. Translated by T. J. Benac. New York: Frederick Ungar, 1951.
WEDBERG, ANDERS. *Plato's Philosophy of Mathematics*. Stockholm, Sweden: Almqvist and Wiksell, 1955.
WEYL, HERMANN, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Revised and augmented English ed., based on tr. by O. Helmer. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1949.
WHITEHEAD, A. N. and BERTRAND RUSSELL. *Principia mathematica*. 2 vols. New York: Cambridge University Press, 1925 and 1927.
WIENER, NORBERT, *I Am a Mathematician: The Later Life of a Prodigy*. Garden City, N.Y.: Doubleday, 1956.
WILDER, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2d ed. New York: John Wiley, 1965.
———, *The Evolution of Mathematical Concepts: A Historical Approach*. New York: John Wiley, 1968.

WOLFF, PETER, *Breakthroughs in Mathematics*. New York: New American Library, 1963.
WOODGER, J. H., *The Axiomatic Method in Biology*. New York: Cambridge University Press, 1937.
YOUNG, J. W., *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*. New York: Macmillan, 1936.
YOUNG, J. W. A., ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. New York: Dover, 1955.

کتابنامۀ عمومی

ARCHIBALD, R. C., "*Outline of the History of Mathematics.*" Herbert Ellsworth Slaught Memorial Paper No. 2, Buffalo, N.Y.: The Mathematical Association of America, 1949.

BALL, W. W. R., *A Primer of the History of Mathematics.* 4th ed. New York: Macmillan, 1895.

———, *A Short Account of the History of Mathematics.* 5th ed. New York: Macmillan, 1912.

BELL, E. T., *The Development of Mathematics.* 2d ed. New York: McGraw-Hill, 1945.

———, *Mathematics, Queen and Servant of Science.* New York: McGraw-Hill, 1951.

BOCHNER, SALOMON, *The Role of Mathematics in the Rise of Science.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1966.

BOYER, C. B., *A History of Mathematics.* New York: John Wiley, 1968.

CAJORI, FLORIAN, *A History of Elementary Mathematics.* Rev. ed. New York: Macmillan, 1924.

———, *A History of Mathematics.* 2d ed. New York: Macmillan, 1919.

CARRUCCIO, ETTORE, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought.* Translated by Isabel Quigly, Chicago: Adline, 1964.

EVES, HOWARD, *Great Moments in Mathematics (Before 1650).* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1981.

———, *Great Moments in Mathematics (After 1650).* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1982.

FINK, KARL, *A Brief History of Mathematics.* Translated by W. W. Beman and D. E. Smith, Chicago: Open Court, 1900.

FREEBURY, H. A., *A History of Mathematics.* New York: Macmillan, 1961.

GITTLEMAN, ARTHUR, *History of Mathematics.* Columbus, Ohio: Charles E. Merrill, 1975.

HOFMANN, J. E., *The History of Mathematics.* New York: Philosophical Library, 1957.

———, *Classical Mathematics, A Concise History of the Classical Era in Mathematics.* New York: Philosophical Library, 1959.

HOGBEN, L. T., *Mathematics for the Million.* New York: W. W. Norton, 1937.

HOOPER, ALFRED, *Makers of Mathematics.* New York: Random House, 1948.

KLINE, MORRIS. *Mathematics in Western Culture.* New York: Oxford University Press, 1953.

———, *Mathematics and the Physical World.* New York: Thomas Y. Crowell, 1959.

———, *Mathematics, a Cultural Approach.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.

———, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press, 1972.

KRAMER, E. E., *The Main Stream of Mathematics.* Greenwich, Conn.: Fawcett Publications, 1964.

———, *The Nature and Growth of Modern Mathematics.* New York: Hawthorn Books, 1970.
KUZAWA, SISTER MARY GRACE, *Modern Mathematics, The Genesis of a School in Poland.* New Haven, Conn.: College & University Press, 1968.
LARRETT, DENHAM, *The Story of Mathematics.* New York: Greenberg Publishers, 1926.
MAY, K. O., *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics.* Toronto: University of Toronto Press, 1973.
MIDONICK, H. O., *The Treasury of Mathematics.* New York: Philosophical Library, 1965.
MORITZ, R. E., *On Mathematics and Mathematicians.* New York: Dover Publications, 1958.
NEWMAN, JAMES, ed., *The World of Mathematics.* 4 vols. New York: Simon and Schuster, 1956.
OSEN, L. M., *Women in Mathematics.* Cambridge, Mass.: MIT Press, 1974.
SANFORD, VERA. *A Short History of Mathematics.* Boston: Houghton Mifflin, 1930.
SARTON, GEORGE, *The Study of the History of Mathematics.* New York: Dover Publications, 1954.
SCOTT, J. F., *A History of Mathematics from Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century.* London: Taylor & Francis, 1958.
SMITH, D. E., *History of Mathematics.* 2 vols. Boston: Ginn & Company, 1923–25.
———, and JEKUTHIEL GINSBURG, *A History of Mathematics in America Before 1900* (Carus Mathematical Monograph No. 5). Chicago: Open Court, 1934.
———, *A Source Book in Mathematics.* New York: McGraw-Hill, 1929.
STRUIK, D. J., *A Concise History of Mathematics.* Rev. ed. New York: Dover Publications, 1967.
———, *A Source Book in Mathematics, 1200–1800.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969.
TARWATER, D., Editor, *The Bicentennial Tribute to American Mathematics, 1776–1976.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1977.
WILLERDING, MARGARET, *Mathematical Concepts, A Historical Approach.* Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1967.

نوشته‌های مندرج در مجلات دربارهٔ تاریخ ریاضیات گسترده‌اند . برای یافتن مطلبی عالی در شروع ، می‌توان به‌نوشته‌های زیر رجوع کرد:

READ, C. B., "The History of Mathematics—A Bibliography of Articles in English Appearing in Six Periodicals." *School Science and Mathematics* (Feb 1966):147–59. This is a bibliography of over 1000 articles devoted to the history of mathematics and appearing prior to Sept. 15, 1965 in the six journals: *The American Mathematical Monthly, The Mathematical Gazette* (New Series), *The Mathematics Teacher, National Mathematics Magazine* (vols. 1–8 were published as *Mathematics News Letter*; starting with vol. 21 the title became *Mathematics Magazine*), *Scripta Mathematica,* and *School Science and Mathematics.* The articles are classified into some thirty convenient categories.

چیزی که برای محققان تاریخ ریاضیات و کسانی که در این رشته فعالیت دارند ارزش ویژه‌ای دارد ، مجلهٔ بین‌المللی هیستوریکا ماتماتیکا است (که مجلد اول آن در ماه مه۱۹۷۴منتشر شده‌است) و در دانشگاه‌تورنتو ی کانادا چاپ می‌شود.
مجموعهٔ زیر برای هر معلم ریاضی ارزش بالایی دارد.

Clas *Historical Topics for the Mathematics Classroom* (thirty-first yearbook), National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C.

برای داستانها و حکایاتی دربارهٔ ریاضیات و ریاضیدانان نگاه کنید به:

EVES, HOWARD, *In Mathematical Circles.* 2 vols. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1969.
———, *Mathematical Circles Revisited.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1971.
———, *Mathematical Circles Squared,* Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1972.
———, *Mathematical Circles Adieu.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1977.

فیلمها و نوارهای ویدیوئی در بارهٔ تاریخ ریاضیات موجودند. بسیاری از آنها را می‌توان در نوشتهٔ زیر یافت:

SCHNEIDER, D. I., *An Annotated Bibliography of Films and Videotapes for College Mathematics.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1980.

یك جدول گاهشناختی *

۶۰۰۰— تاریخ تقریبی استخوان ایشانگو.

۴۷۰۰— شروع احتمالی تقویم بابلی.

۴۲۲۸— آغاز احتمالی تقویم مصری.

۴۰۰۰— کشف فلز.

۳۵۰۰— استفاده ازکتابت.

۳۱۰۰— تاریخ تقریبی یك گرز سلطنتی در موزه‌ای در آکسفورد.

۲۹۰۰— بنای هرم بزرگ جیزه.

۲۴۰۰— لوحهای بابلی‌اور[1].

۲۲۰۰— تاریخ لوحهای متعدد ریاضی که در نیپور پیدا شده‌اند، تاریخ اسطوره‌ای لوشو، قدیمیترین مورد معلوم از یك مربع جادویی.

۱۹۵۰— عصر حمورابی، پادشاه بابل.

۱۸۵۰— پاپیروس مسکو(۲۵ مسئلهٔ عددی، «بزرگترین هرم مصری»)؛ قدیمیترین ابزار نجومی موجود.

۱۷۵۰— پلیمپتون ۳۲۲ که تاریخش بین ۱۹۰۰— و ۱۶۰۰— است.

۱۶۵۰— پاپیروس، ریند یا احمس (۸۵ مسئلهٔ عددی).

۱۶۰۰— تاریخ تقریبی اغلب لوحهای بابلی در مجموعهٔ ییل.

۱۵۰۰— بزرگترین مسئلهٔ موجود؛ قدیمیترین ساعت آفتابی مصری موجود.

۱۳۵۰— تاریخ لوحهای ریاضی بعدی که در نیپور پیدا شده؛ پاپیروس رولن (مسائل ماهرانه‌ای دربارهٔ نان).

۱۱۶۷— پاپیروس هریس (فهرست دارایی معبد).

۱۱۰۵— تاریخ احتمالی چوئو - پی، قدیمیترین اثر ریاضی چینی.

۷۵۳— بنای رم.

۶۵۰— زمان رواج پاپیروس در یونان.

---

* علامت منفی قبل از یك تاریخ نشانهٔ آن است که تاریخ ق. م. است.

1. Ur

۶۰۰— تالس (آغاز هندسهٔ برهانی).
۵۴۰— فیثاغورس (هندسه، حساب، موسیقی).
۵۰۰— تاریخ احتمالی شولوسوترها (نوشته‌های مذهبی که نشان از آشنایی با اعداد فیثاغورسی و ساختمانهای هندسی دارند)، پیدایش ارقام میله‌ای چینی.
۴۸۰— نبرد ترموپیل.
۴۶۰— پارمنیدس (کرویت زمین).
۴۵۰— زنون (پارادوکسهای حرکت).
۴۴۰— سقراط خیوسی (تحویل مسئلهٔ تضعیف، هلالها، تنظیم قضایای هندسه به سبك علمی)، آناکساگوراس (هندسه).
۴۳۰— آنتیفون (روش افنا).
۴۲۵— هیپیاس الیسی (تثلیث به‌کمك مربع‌ساز)؛ تئودورس کورنه‌ای (اعدادناگویا)؛ سقراط .
۴۱۰— دموکریتوس (نظریهٔ اتمی).
۴۰۴— شکست نهایی آتن به دست اسپارت.
۴۰۰— آرخوتاس (رهبر مکتب فیثاغورسی در تارنتوم، کاربرد ریاضیات درمکانیك).
۳۸۰— افلاطون (ریاضیات در پرورش ذهن، آکادمی افلاطون).
۳۷۵— تئایتتوس (کمیتهای نامتوافق، اجسام منتظم).
۳۷۰— ائودوکسوس (کمیتهای نامتوافق، روش افنا، نجوم).
۳۵۰— منایخموس (مقاطع مخروطی)؛ دینوستراتوس (تربیع با مربع‌ساز، برادر منایخموس)؛ کسنوکراتس[1] (تاریخ هندسه)؛ توماریداس (حل دستگاههای معادلات ساده).
۳۴۰— ارسطو (سازمان‌دهندهٔ منطق قیاسی).
۳۳۶— آغاز فرمانروایی اسکندرکبیر.
۳۳۵— ائودموس (تاریخ ریاضیات).
۳۳۲— بنای اسکندریه.
۳۲۳— مرگ اسکندرکبیر.
۳۲۰— آریستائوس (مقاطع، اجسام منتظم).
۳۰۰— اقلیدس (اصول، اعداد تام، رسالهٔ نور، داده‌ها).
۲۸۰— آریستارخوس (دستگاه کپرنیکی).
۲۶۰— کونون (نجوم، مارپیچ ارشمیدسی)، دوسیتئوس (مخاطب چندین‌نامه از سوی ارشمیدس).
۲۵۰— ستونهای سنگی برپا شده توسط شاه آشوکا و متضمن قدیمیترین مثالهای معلوم از علائم عددی کنونی ما.

---

1. Xenocrates

۲۴۰ — نیکومدس (تثلیث به‌کمك کونکوئید).
۲۳۰ — اراتستن (غربال اعداد اول، اندازهٔ زمین).
۲۲۵ — آپولونیوس(مقاطع مخروطی، مکانهای مسطح، تماسیها، دایرهٔ آپولونیوس)؛ ارشمیدس(بزرگترین ریاضیدان‌عهدباستان، اندازه‌گیری دایره وکره، محاسبهٔ π، مساحت قطعهٔ سهموی، مارپیچ ارشمیدس، سریهای نامتناهی، روش‌تعادل، مکانیك، ئیدروستاتیك).
۲۱۳ — کتابسوزی چین.
۱۸۰ — هوپسکلیس (نجوم، نظریهٔ اعداد)؛ دیوکلس (تضعیف به‌کمك سیسوئید).
۱۴۰ — هیپارخوس (مثلثات، نجوم، فهرست ستارگان).
۱۰۰ — تاریخ احتمالی کنده‌کاریهایی بر دیوار غاری نزدیك پونا.
۷۵ — سالی که سیسرون قبر ارشمیدس را کشف کرد.
۵۰ — سون تزی (معادلات نامعین).
۷۵ زمان احتمالی هرون (ماشینها،یافتن مساحت اجسام مسطحه وصلب،استخراج جذر، مساحی).
۱۰۰ نیکوماخوس(نظریهٔ اعداد) ؛ منلائوس (مثلثات کروی)؛ تئودوسیوس (هندسه، نجوم)؛ حساب در نه بخش، پلوتارك.
۱۵۰ بطلمیوس(مثلثات، جدول اوتار، نظریهٔ منظومهٔ خورشیدی، فهرست ستارگان، زمینسنجی، مجسطی).
۲۰۰ تاریخ احتمالی کتیبه‌هایی که در غارهای ناسیك حکاکی شده.
۲۵۰ تاریخ احتمالی رونق دیوفانتوس (نظریهٔ اعداد، اختصاری‌کردن جبر).
۲۶۵ وانگ‌فان (نجوم،$\pi = ۱۴۲/۴۵$)؛ لیوهوی (شرحی بر حساب در نه بخش).
۳۰۰ پاپوس (مجموعهٔ ریاضی،شروح،هم‌محیطی، پایداری‌تصویری نسبت ناتوافقی، مسئلهٔ‌کاستیون ـ کرامر، قضیهٔ آربلوس، تعمیم قضیهٔ فیثاغورس، قضایای مربوط به‌مرکز هندسی، قضیهٔ پاپوس).
۳۲۰ یامبلیخوس (نظریهٔ اعداد).
۳۹۰ تئون اسکندرانی (شارح، اصول اقلیدس را ویرایش‌کرد).
۴۱۰ هوپاتیای اسکندرانی (شارح، اولین‌زنی که نامش درتاریخ ریاضیات ذکر شده است. دختر تئون اسکندرانی).
۴۶۰ پروکلوس (شارح).
۴۸۰ تقریب تسوچونگ‌ـ چی برای π برابر با ۳۵۵/۱۱۳.
۵۰۰ مترودوروس وآنتولوژی یونانی.
۵۰۵ وراهمیهیره (نجوم هندی).
۵۱۰ بوئتیوس (نوشته‌هایش دربارهٔ هندسه و حساب به‌صورت متون استانده‌ای در مدارس رهبانی در آمد)؛ آریبهطه بزرگ (نجوم وحساب).
۵۲۹ بسته شدن مدرسهٔ آتن

۵۳۰ سیمپلیکیوس (شارح).
۵۶۰ ائوتوکیوس (شارح).
۶۲۲ هجرت محمد [ص] از مکه.
۶۲۵ وانگ هسیائوتونگ (معادلات درجهٔ سوم).
۶۲۸ برهمگوپته (جبر، چهارضلعیهای محاطی).
۶۴۱ آخرین کتابخانه در اسکندریه به آتش کشیده شد.
۷۱۰ بد (تقویم، محاسبهٔ سرانگشتی).
۷۱۱ هجوم مسلمانان به‌اسپانیا.
۷۶۶ آثار برهمگوپته به‌بغدادآورده شد.
۷۷۵ آلکوین به دربار شارلمانی فرا خوانده شد.
۷۹۰ هارون‌الرشید (خلیفهٔ‌حامی علم).
۸۲۰ محمدبن‌موسی الخوارزمی (رسالهٔ مؤثری دربارهٔ جبر و کتابی دربارهٔ ارقام هندسی، نجوم، «جبر»، «الگوریتم») ؛ مأمون (خلیفهٔ حامی علم).
۸۵۰ مهاویره (حساب، جبر).
۸۷۰ ثابت‌ابن‌قره (مترجم آثار یونانی ، مقاطع مخروطی، جبر، مربعهای جادویی، اعداد متحابه).
۸۷۱ آغاز حکومت آلفرد کبیر.
۹۰۰ ابوکامل (جبر).
۹۲۰ البتانی، یا آلباتگنیوس (نجوم).
۹۵۰ دستنویس بخشالی (با تاریخ کاملاً نامعلوم).
۹۸۰ ابوالوفا (ساختمانهای هندسی‌با پرگارهای با فرجهٔ ثابت، جداول مثلثاتی).
۱۰۰۰ ابن‌هیثم (اپتیك، جبرهندسی)؛ ژربر، یا پاپ سیلوستر II (حساب، کره‌ها).
۱۰۲۰ کرخی (جبر).
۱۰۴۲ به سلطنت رسیدن ادوارد معترف.
۱۰۶۶ پیروزی نورمانها.
۱۰۹۵ آغاز اولین جنگ صلیبی.
۱۱۰۰ عمرخیام (حل هندسی معادلات درجهٔ سوم، تقویم).
۱۱۱۵ چاپ ویرایش مهمی از حساب‌در نه بخش.
۱۱۲۰ پلاتوی تیوولیائی (مترجم از عربی)؛ آدلاردباثی (مترجم‌ازعربی).
۱۱۳۰ جابربن‌افلح، یاجبر (مثلثات).
۱۱۴۰ یوهانس‌هیسپالنسیس (مترجم ازعربی)، رابرت چستری (مترجم از عربی).
۱۱۴۶ آغاز دومین جنگ صلیبی.
۱۱۵۰ گراردوی‌کرمونایی (مترجم از عربی)؛ بهاسکره (جبر، معادلات نامعین).
۱۲۰۲ فیبوناتچی (حساب، جبر، هندسه، دنبالهٔ فیبوناتچی، لیبرآباکی).

۱۲۲۵ یوردانوس نموراریوس (جبر).
۱۲۵۰ ساکروبوسکو (ارقام هندی-عربی، کره)؛ نصیرالدین (مثلثات، اصل توازی)؛ راجر بیکن (ستایشگر ریاضیات)؛ چئین کیو-شائو (معادلات نامعین، نماد برای صفر، روش هورنر)؛ لی‌یه (نماد برای اعداد منفی)؛ پیدایش دانشگاههای اروپایی.
۱۲۶۰ کمپانوس (ترجمهٔ اصول اقلیدس، هندسه)؛ یانگ‌هوی (کسرهای اعشاری، قدیمترین نمایش موجود از مثلث حسابی پاسکال)؛ آغاز فرمانروایی قوبلای قا آن.
۱۲۷۱ آغاز سفرهای مارکوپولو.
۱۳۰۳ چوشی - کیئه (جبر، حل عددی معادلات، مثلث حسابی پاسکال).
۱۳۲۵ تامس برادوردین (حساب، هندسه، چند ضلعیهای ستاره‌ای).
۱۳۴۹ مرگ سیاه بخش عظیمی از جمعیت اروپا را نابود کرد.
۱۳۶۰ نیکول اورم (مختصات، نماهای کسری).
۱۴۳۱ ژاندارك سوزانده شد.
۱۴۳۵ الغ بیگ (جداول مثلثاتی).
۱۴۵۰ نیکولاس کوزایی (هندسه، اصلاح تقویم)؛ چاپ از نوع متحرك.
۱۴۵۳ سقوط قسطنطنیه.
۱۴۶۰ گئورگ فون‌پویرباخ (حساب، نجوم، جداول سینوسی).
۱۴۷۰ رگیومونتانوس، یا یوهان‌مولر (مثلثات).
۱۴۷۸ اولین کتاب حساب چاپ شده، درترویزو، ایتالیا.
۱۴۸۲ اولین چاپ اصول اقلیدس.
۱۴۸۴ نیکولاس‌شوکه (حساب، جبر)؛ حساب بورگی.
۱۴۸۹ یوهان‌ویدمان (حساب، جبر، علامات + و −).
۱۴۹۱ حساب کالاندری.
۱۴۹۲ کریستف کلمب آمریکا را کشف کرد.
۱۴۹۴ پاچولی (سوما، حساب، جبر، حسابداری دوبل).
۱۵۰۰ لئوناردو داوینچی (اپتیك، هندسه).
۱۵۰۶ شیپیونه دل فرو (معادلات درجهٔ‌سوم)؛ آنتونیوماریافیور (معادلات درجهٔ‌سوم).
۱۵۱۰ آلبرشت دورر (منحنیها، مناظر ومرایا، تثلیث تقریبی، الگویی برای تاکردن چندوجهیهای منتظم).
۱۵۱۴ یاکوب کوبل (حساب).
۱۵۱۸ آدام‌ریز (حساب).
۱۵۲۱ تکفیر شدن لوتر.
۱۵۲۲ حساب تونستال.

۱۵۲۵ رودلف (جبر، ارقام اعشاری)؛ شتیفل (جبر، رازگرایی عددی)؛ بوتئو (حساب).
۱۵۳۰ داکوی (معادلات درجهٔ سوم)؛ کوپرنیکوس (مثلثات، نظریهٔ سیاره‌ای).
۱۵۴۵ فراری (معادلات درجهٔ چهارم)؛ تارتاگلیا (معادلات درجهٔ سوم، حساب، علوم آتشباری)؛ کاردان (جبر).
۱۵۵۰ رائتیکوس (جداول توابع مثلثاتی)؛ شئوبل[1] (جبر)، کوماندینو (مترجم، هندسه).
۱۵۵۶ چاپ اولین اثر ریاضی در ینگه دنیا.
۱۵۵۷ رابرت رکورد (حساب، جبر، هندسه، علامت =).
۱۵۵۸ الیزابت ملکهٔ انگلیس شد.
۱۵۷۰ بیلینگزلی و دی[2] (اولین ترجمهٔ انگلیسی اصول).
۱۵۷۲ بومبلی (جبر، حالت تحویل ناپذیر معادلات درجهٔ سوم).
۱۵۷۳ والنتین‌اوتو مقدار چینی قدیمی برای π، ۱۱۳/۳۵۵ را پیدا کرد.
۱۵۷۵ کسیلاندر، یا ویلیام هولتسمان (مترجم).
۱۵۸۰ فرانسوا ویت، یاویتا (جبر، هندسه، مثلثات، نمادگذاری، حل عددی معادلات، نظریهٔ معادلات، حاصلضربهای نامتناهی همگرا به $\pi/2$).
۱۵۸۳ کلاویوس (حساب، جبر، هندسه، تقویم).
۱۵۹۰ کاتالدی (کسور مسلسل)، استوین (کسرهای اعشاری، جدول ربح مرکب، استاتیك، ئیدروستاتیك).
۱۵۹۳ آدریانوس رومانوس (محاسبهٔ مقدار π، مسئلهٔ آپولونیوس).
۱۵۹۵ پیتیسکوس (مثلثات).
۱۶۰۰ تامس هاریوت (جبر، نمادگرایی)؛ یوبست بورگی (لگاریتم)؛ گالیله (سقوط اجسام، آونگ، پرتابه‌ها، نجوم، تلسکوپ، سیکلوئید)؛ شکسپیر[3].
۱۶۰۳ تأسیس آکادمیا دای لینچئی (درزم).
۱۶۰۸ اختراع تلسکوپ.
۱۶۱۰ کپلر (قوانین حرکت سیاره‌ای، احجام، چند ضلعیهای ستاره‌ای، اصول پیوستگی)؛ لودلف‌وان سویلن (محاسبهٔ π).
۱۶۱۲ باشه‌دومزیریاك (تفریحات ریاضی، ویرایش آریثمتیکای دیوفانتوس).
۱۶۱۴ نپر (لگاریتم، قاعدهٔ اجزاء مستدیر، میله‌های محاسبه).
۱۶۱۵ هنری بریگز (لگاریتم طبیعی، جداول).
۱۶۱۹ استادی ساویلی در آکسفورد دایر شد.
۱۶۲۰ گانتیر (مقیاس لگاریتمی، زنجیر گانتیر درمساحی)؛ پل گولدین (قضایای مربوط به مرکز هندسی پاپوس)؛ اسنل (هندسه، مثلثات، تنقیح روشهای کلاسیك محاسبهٔ π، لوکسودرومها).

---

1. Scheubel 2. Dee 3. Shakespeare

۱۶۳۰ مرسن (نظریهٔ اعداد، اعدادمرسن، خانه تکانی برای ایده‌های ریاضی)؛ اوترد (جبر، نمادگذاری، خط کش محاسبه، اولین جدول لگاریتم طبیعی)؛ میدورژ (اپتیك، هندسه)؛ آلبرت ژیرار (جبر، هندسهٔ کروی).
۱۶۳۵ فرما (نظریهٔ اعداد، ماکزیموم و مینیموم، احتمالات، هندسهٔ تحلیلی، آخرین «قضیهٔ» فرما)؛کاوالیری (روش تقسیم ناپذیرها).
۱۶۳۷ دکارت (هندسهٔ تحلیلی، فولیوم، مرغانه، قانون علامات).
۱۶۴۰ دزارگ (هندسهٔ تصویری)؛ دوبون (هندسهٔ دکارتی)؛ توریچلی (فیزیك، هندسه، مرکزهمزاویه‌ای)؛ فرنیکل دوبسی (هندسه)؛ روبروال (هندسه، مماسها، تقسیم ناپذیرها)؛ دولالوبر (منحنی‌ها، مربعهای جادویی).
۱۶۴۳ تاجگذاری لوئی چهاردهم.
۱۶۴۹ اعدام چارلز اول.
۱۶۵۰ بلزپاسکال (مقاطع مخروطی، سیکلوئید، احتمالات، مثلث پاسکال، ماشینهای محاسبه)؛ جان والیس (جبر، اعداد موهومی، طول قوس، نماها، علامت برای بی‌نهایت، حاصلضرب نامتناهی همگرا به $\pi/2$، آغازانتگرالگیری)؛ فرانس وان‌سخوتن (آثار دکارت و ویت را ویرایش کرد)؛ گرگوار دو سن‌ونسان (تربیع کنندهٔ دایره، سایرتربیعها)؛ وینگیت (حساب)؛ نیکولاس‌مرکاتور (مثلثات، نجوم، محاسبهٔ لگاریتمها از طریق سریها)؛ جان‌پل (جبر، انتساب نابجای به‌اصطلاح معادلهٔ پل به او).
۱۶۶۰ اسلوزه (مارپیچها، نقاط عطف)؛ ویویانی (هندسه)؛ برونکر (اولین رئیس انجمن سلطنتی، محاسبهٔ طول قوس سهمی و سیکلوئید، سریهای نامتناهی کسرهای مسلسل).
۱۶۶۲ تأسیس انجمن سلطنتی (لندن).
۱۶۶۳ تأسیس کرسی استادی لوکاسی درکیمبریج.
۱۶۶۶ تأسیس آکادمی فرانسه (پاریس).
۱۶۷۰ برو (مماسها، قضیهٔ اساسی حسابان)؛ جیمزگریگوری (اپتیك، قضیهٔ دوجمله‌ای، بسط توابع به‌صورت سری، نجوم)؛ هویگنس (تربیع دایره، احتمالات، گستره‌ها، ساعتهای آونگ‌دار، اپتیك)؛ سرکریستوفررن (معماری، نجوم، فیزیك، مولدهای هیپربولوئید یك‌دامنه، طول قوس سیکلوئید).
۱۶۷۱ جیووانی دومنیکو کاسینی (نجوم، منحنی‌های کاسینی).
۱۶۷۲ موهر (ساختمانهای هندسی با ابزارهای محدود).
۱۶۷۵ تأسیس رصدخانهٔ گرینویچ.
۱۶۸۰ سرآیزك نیوتن (فلوکسیونها، دینامیك، ئیدروستاتیك، ئیدرودینامیك، جاذبه، منحنی‌های درجهٔ سوم، سریها، حل عددی معادلات، مسائل چلنجاری)؛ یوهان‌هود (نظریهٔ معادلات)؛ رابرت‌هوك (فیزیك، ساعتهای فنری)؛ سکی کووا

(دترمینانها، حسابان).
۱۶۸۲ لایبنیتز (حسابان، دترمینانها، قضیهٔ‌چند جمله‌ای، منطق علامتی، نمادگذاری، ماشینهای محاسبه).
۱۶۸۵ کوخانسکی (محاسبهٔ تقریبی طول محیط دایره).
۱۶۹۰ مارکی دولوپیتال (حسابان کاربردی، صور مبهم)؛ هالی (نجوم، جداول زاد و میر و بیمهٔ عمر، مترجم)؛ یاکوب (جیمز، ژاك) برنولی (منحنیهای همزمان، کلوتوئید[1]، مارپیچ لگاریتمی، احتمالات)؛ دولاهیر (منحنیها، مربعهای جادویی، نقشه‌ها)؛ چرنهاوزن (اپتیك، منحنی‌ها، نظریهٔ معادلات).
۱۷۰۰ یوهان (جان، ژان) برنولی (حسابان کاربردی)؛ جیووانی‌سوا (هندسه)؛ دیوید گرگوری (اپتیك، هندسه)؛ پارن (هندسهٔ تحلیلی فضایی).
۱۷۰۶ ویلیام‌جونز (اولین استفاده از π به نشانهٔ نسبت دایره).
۱۷۱۵ تیلر (بسط به صورت سری، هندسه).
۱۷۲۰ دموآور (ریاضیات آماری، احتمالات، اعداد مختلط، فرمول استرلینگ).
۱۷۳۱ آلکسی کلرو (هندسهٔ تحلیلی فضایی).
۱۷۳۳ ساکری (پیشگام هندسهٔ نااقلیدسی).
۱۷۴۰ ماکلورن (منحنیهای مسطحهٔ از درجات بالا، فیزیك)؛ فردریك‌کبیر پادشاه پروس شد.
۱۷۵۰ اویلر (نمادگذاری، $e^{i\pi}=-1$، خط اویلر، معادلات درجهٔ چهارم، تابع ϕ، تابعهای بتا و گاما، ریاضیات کاربردی).
۱۷۷۰ لامبرت (هندسهٔ نااقلیدسی، توابع هیپربولیك، تصویر نقشه، ناگویایی π)؛ قاعدهٔ کرامر.
۱۷۷۶ استقلال آمریکا.
۱۷۷۷ کنت دوبوفون (محاسبهٔ π به‌کمك احتمالات).
۱۷۸۰ لاگرانژ (حساب تغییرات، هندسهٔ دیفرانسیل، مکانیك، حل‌عددی معادلات، تلاش برای تدقیق حسابان (۱۷۹۷)، نظریهٔ اعداد).
۱۷۸۹ انقلاب فرانسه.
۱۷۹۰ مونیه (سطوح).
۱۷۹۴ تأسیس مدرسهٔ‌پلی‌تکنیك ومدرسهٔ نرمال؛ مونژ (هندسهٔ تصویری، سطوح هندسهٔ دیفرانسیل).
۱۷۹۷ ماسکرونی (هندسهٔ پرگار)؛ وسل[2] (نمایش هندسی اعداد مختلط).
۱۷۹۹ جمهوری فرانسه دستگاه متری اوزان و مقادیر را پذیرفت.
۱۸۰۰ گاوس (ساختمان‌چند ضلعیها، نظریهٔ‌اعداد، هندسهٔ‌دیفرانسیل، هندسهٔ‌نااقلیدسی،

---

1. clothoid 2. Wessel

قضیهٔ اساسی جبر، نجوم، زمینسنجی).
۱۸۰۳ کارنو (هندسهٔ جدید).
۱۸۰۴ انتخاب ناپلئون به امپراطوری.
۱۸۰۵ لاپلاس (مکانیك سماوی، احتمالات، معادلات دیفرانسیل)؛ لژاندر (اصول هندسه (۱۷۹۴)، نظریهٔ اعداد، تابعهای بیضوی، روش کمترین مربعات، انتگرال).
۱۸۰۶ آرگاند (نمایش هندسی اعداد مختلط).
۱۸۱۰ ژرگون (هندسه، سردبیر مجلهٔ آنالز[1]).
۱۸۱۵ تأسیس «انجمن تحلیلی[2]» در کیمبریج.
۱۸۱۹ هورنر (حل عددی معادلات).
۱۸۲۰ پوانسو[3] (هندسه).
۱۸۲۲ فوریه (نظریهٔ ریاضی حرارت، سری فوریه)؛ پونسله (هندسهٔ تصویری، ساختمانهای با خطکش)؛ قضیهٔ فوئرباخ.
۱۸۲۴ تامس کارلایل (ترجمهٔ انگلیسی هندسهٔ لژاندر).
۱۸۲۶ مجلهٔ کوله؛ اصل دوگانی (پونسله، پلوکر، ژرگون)؛ توابع بیضوی (آبل، گاوس، یاکوبی).
۱۸۲۷ کوشی (تدقیق آنالیز، توابع متغیرهای مختلط، سریهای نامتناهی، دترمینانها)؛ آبل (جبر، آنالیز).
۱۸۲۸ گرین (فیزیك ریاضی).
۱۸۲۹ لباچفسکی (هندسهٔ نااقلیدسی)؛ پلوکر (هندسهٔ تحلیلی عالی).
۱۸۳۰ پواسون (فیزیك ریاضی، احتمالات)؛ پیکاك (جبر)؛ بولتسانو (سریها)؛ بابیج (ماشینهای محاسبه)؛ یاکوبی (توابع بیضوی، دترمینانها).
۱۸۳۲ بویوئی (هندسهٔ نااقلیدسی)؛ گالوا (گروهها، نظریهٔ معادلات).
۱۸۳۴ اشتاینر (هندسهٔ ترکیبی عالی).
۱۸۳۶ مجلهٔ لیوویل.
۱۸۳۷ اثبات غیر ممکن بودن تثلیث زاویه و تضعیف مکعب.
۱۸۳۹ مجلهٔ ریاضی کیمبریج[4]، که درسال ۱۸۵۵ به فصلنامهٔ ریاضیات محض وکاربسته تبدیل شد.
۱۸۴۱ آرشیو ریاضیات و فیزیك.
۱۸۴۲ مجلهٔ جدید ریاضیات.
۱۸۴۳ همیلتن (کواترنیونها).
۱۸۴۴ گراسمن (حساب توسیع).
۱۸۴۷ اشتاوت (هندسه را از مبنای مادی آن رهانید).

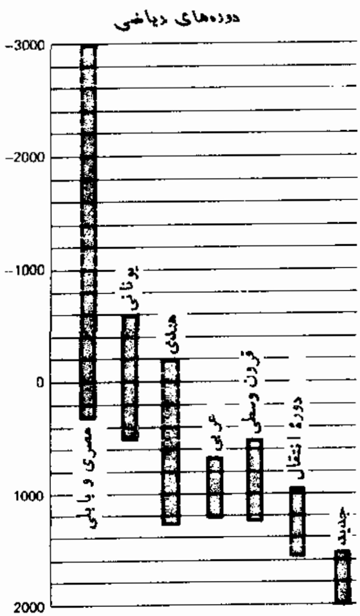
1. Annales 2. Analytical Society 3. Poinsot
4. Cambridge Mathematical Journal

۱۸۴۹ دیریکله (نظریهٔ اعداد، سریها).
۱۸۵۰ مانایم (خط‌کش‌محاسبهٔ جدید استانده شده).
۱۸۵۲ شال (هندسهٔ عالی، تاریخ هندسه).
۱۸۵۴ ریمان (آنالیز، هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ ریمانی)؛ بول (منطق).
۱۸۵۵ زاخاریاس دازه (محاسب برق‌آسا).
۱۸۵۷ کیلی (ماتریسها، جبر، هندسهٔ بعدهای بالاتر).
۱۸۶۵ تأسیس انجمن ریاضی لندن، گزارشهای انجمن ریاضی لندن[1].
۱۸۷۲ انجمن ریاضی فرانسه تأسیس شد، برنامهٔ ارلانگن کلاین؛ ددکیند (اعداد ناگویا).
۱۸۷۳ ارمیت متعالی بودن e را ثابت کرد؛ بروکار (هندسهٔ مثلث).
۱۸۷۴ گئورگ کانتور (نظریهٔ مجموعه‌ها، اعداد ناگویا، اعداد متعالی، اعداد ترانسفینی).
۱۸۷۷ سیلوستر (جبر، نظریهٔ پایا)
۱۸۷۸ مجلهٔ آمریکایی ریاضی.
۱۸۸۱ گیبس (آنالیز برداری).
۱۸۸۲ لیندمان (متعالی بودن π، اثبات امتناع تربیع دایره).
۱۸۸۴ تأسیس محفل ریاضی پالرمو.
۱۸۸۷ تأسیس خلاصهٔ گزارشها.
۱۸۸۸ لموآن (هندسهٔ مثلث، هندسه‌نگاری)؛ انجمن آمریکایی ریاضی (بدواً با نام دیگری) تأسیس شد؛ بولتن انجمن ریاضی آمریکا.
۱۸۸۹ پئانو (اصول موضوعهٔ اعداد طبیعی).
۱۸۹۰ وایرشتراس (حسابیدن ریاضیات)؛ انجمن ریاضی آلمان سازمان یافت.
۱۸۹۲ تأسیس گزارش سالانه.
۱۸۹۵ پوانکاره (هندسهٔ وضع).
۱۸۹۶ اثبات قضیهٔ اعداد اول توسط آدامار و دولاواله پوسن.
۱۸۹۹ هیلبرت (مبانی هندسه، صوری گرایی).
۱۹۰۰ انتشار کارنامهٔ انجمن ریاضی آمریکا؛ راسل و وایتهد (پرینسیپیا ماتماتیکا، منطق گرایی).
۱۹۰۳ انتگرال لبگ.
۱۹۰۶ فرشه (فضاهای مجرد، آنالیز تابعی).
۱۹۰۷ براوئر (شهودگرایی).
۱۹۱۶ اینشتین (نظریهٔ نسبیت عام).
۱۹۱۷ هاردی و رمنوجن (نظریهٔ تحلیلی اعداد)؛ انقلاب روسیه.
۱۹۲۳ فضای باناخ.

---

1. Proceedings of the London Mathematical Society

۱۹۲۷ پرواز لیندبرگ بر فراز اقیانوس اطلس.
۱۹۳۱ قضیهٔ گودل.
۱۹۳۳ رسیدن هیتلر به صدر اعظمی آلمان.
۱۹۳۴ قضیهٔ گلفوند[1].
۱۹۳۹ آغاز کارهای بورباکی[2].
۱۹۴۱ بمباران بندر پرل‌هاربر[3].
۱۹۴۴ IBM Automatic Sequence Controlled Calculator (ASCC).
۱۹۴۵ Electronic Numerical Integrator and Computer (ENIAC)؛ بمباران هیروشیما.
۱۹۴۸ ASCC اصلاح شده درآزمایشگاههای نیروی دریایی آمریکا، در دالگرن، ویرجینیا، نصب شد.
۱۹۶۳ پ. ج. کوهن دربارهٔ فرض پیوستار؛ قتل کندی.
۱۹۷۴ م. ژ. گیو و همکارانش π را با ۱۰۰۰۰۰۰ رقم اعشار بر یک CD۷۶۰۰ حساب کردند.
۱۹۷۶ حدس چهار رنگ توسط ک. اپل و و. هیکن ثابت شد.



شکل ۱۲۸

---

1. Gelfond 2. Bourbaki 3. Pearl Harbor

جوابها و راهنماییها برای حل مطالعه‌های مسئله‌ای

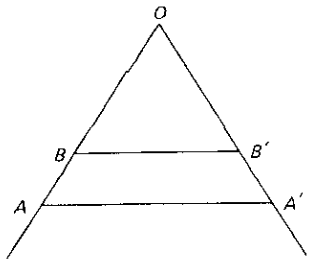
۱۰۹ (الف) تقریباً به‌هر کتاب درس جبر یا مثلثات دبیرستانی می‌توانید مراجعه کنید.
(ب) ۱. قراردهید $y = \log_b N$، $z = \log_a N$، $w = \log_a b$. در این صورت $b^y = N$، $a^z = N$، $a^w = b$، که ازآنجا $a = b^{1/w}$، یا $a^z = b^{z/w} = b^y$. بنابراین $y = z/w$.
۲. قراردهید $y = \log_b N$ و $z = \log_N b$. دراین‌صورت $b^y = N$، $N^z = b$، که ازآنجا $N = b^{1/z} = b^y$. بنابراین $y = 1/z$.
۳. قرار دهید $y = \log_N b$ و $z = \log_{1/N}(1/b)$. در این صورت $N^y = b$، $(1/N)^z = 1/b$، که ازآنجا $N = b^{1/z} = b^{1/y}$. بنابراین $z = y$.
(ج) $\log 4.26 = 1/2 + 1/8 + 1.256 + \dots = 0.6294 \dots$.

۲۰۹ (ب) $\cos c = \cos a \cos b$.
(ج) (۱) $A = 122^\circ 39'$، $C = 83^\circ 5'$، $b = 109^\circ 22'$. (۲) $A = 105^\circ 36'$، $b = 44^\circ 0'$، $c = 78^\circ 46'$.

۳۰۹ از چوب‌بستنیهای چوبی یا چوبهایی که پزشکان درمعاینهٔ گلو استفاده می‌کنند،می‌توان میله‌های موردنظر را ساخت.

۵۰۹ شتاب افزایش سرعت است درواحد زمان.

۶۰۹ (الف) پرگار را طوری باز کنید که قطعه‌خط‌مفروض AA' بین درجهٔ ۱۰۰ برروی دو مقیاس سادهٔ پرگار قرار گیرد (نگاه کنید به‌شکل ۱۲۹). در این صورت فاصلهٔ بین دو درجهٔ ۲۰ یك‌پنجم طول‌قطعه خط مفروض است. درصورتی که طول پاره‌خط مفروض بزرگتر ازآن باشد که بین دوساق این ابزار قرار گیرد، چه باید کرد؟
(ب) پرگار را طوری بازکنید که AA'/OA نسبت مطلوب مقیاس باشد. دراین صورت BB' طول‌جدیدی است که باید باطول قدیم OB وابسته گردد.
(ج) نقطهٔ a را برروی یك‌بازو به نقطهٔ b در روی بازوی دیگر وصل کنید. ازنقطهٔ



شکل ۱۲۹

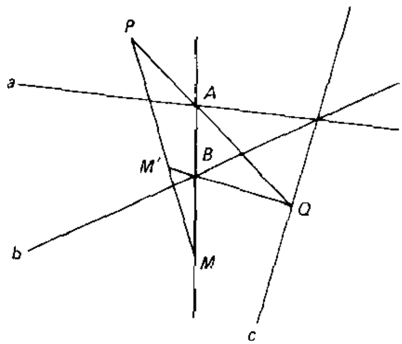
c برروی بازوی اول خطی به‌موازات خطی که هم‌اکنون رسم‌شده، رسم نمایید تا بازوی دیگر را درجزء چهارم تناسب که مطلوب مسئله است، قطع کند.
(د) پرگار را طوری بازکنید که فاصلهٔ بین درجه‌های ۱۰۶ برابر ۱۵۰ باشد. در این‌صورت فاصلهٔ بین درجه‌های ۱۰۰ نمایش مقدار سرمایه‌گذاری درسال قبل‌است. این عمل را پنج‌بار تکرار کنید تا مقدار مطلوب به‌دست آید.

۷.۹ (ب) نشان‌دهید که $(HG)^۲=(HB)^۲=(BF)^۲-(HF)^۲=(HE)^۲-(HF)^۲$، و الخ.
(ج) دومجموعه راکه بتوان دریك تناظر یك‌به‌یك قرارداد، **معادل**، یا دارای یك **عدد اصلی** می‌نامند. فرق بین یك مجموعهٔ متناهی و نامتناهی آن‌است که یك‌مجموعهٔ نامتناهی معادل با جزئی از خودش است.

۸.۹ (ج) ۱۰۰۰ سال.
(د) ۲۵ A·U.
(و) ۱ساعت و ۲۴ دقیقه.

۱۰.۹ (الف) صفحهٔ π' را صفحه‌ای به‌موازات صفحهٔ مار بر O و خط l بگیرید.
(ج) خط OU را بر بینهایت تصویر کنید.
(د) خط LMN را بر بینهایت تصویر کنید وازایــن حقیقت مقدماتی استفاده کنید که خطوط واصل بین رأسهای متناظر دومثلث متشابه ومتشابه وضع همرس‌اند.
(ه) صفحه‌ای مانند π' به‌موازات محور اقصر بیضی وطوری‌انتخاب کنید که‌زاویهٔ θ بین π' وصفحهٔ بیضی‌مفروض‌چنان‌باشد که $\cos\theta=b/a$، که‌درآن a و b به‌ترتیب نیم قطرهــای اطول و اقصر بیضی هستند. حال بیضی را به‌طــور عمودی بر π' تصویر کنید.
(ز) فرض‌کنید که c خط‌دلخواهی مار برمحل تلاقی a و b باشد (نگاه کنید به‌شکل ۱۳۰). فرض‌کنید PA، c را در Q قطع کند و QB، MP را در M'.

۱۲.۹ (الف) فرض کنید نقاط ۱ و ۶ طوری برهــم منطبق شوند که خط ۱۶ به‌مماس



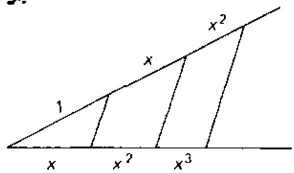
شکل ۱۳۰

برمقطع مخروطی درنقطهٔ ۱ بدل شود.
(ب) ازقسمت (الف) استفاده کنید.
(ج) فرض کنید ۱، ۲، ۳، ۴ چهار نقطه باشند و ۴۵ مماس در ۵≡۴ باشد، و فرض کنید ۱۲، ۴۵ را در P قطع کند. بر ۱ خط دلخواهی مانند ۱۶ بگذرانید تا ۳۴ را در R قطع کند، و سپس خط پاسکال PR را رسم کنید تا ۲۳ را در Q قطع کند. دراین‌صورت $5Q$، ۱۶ را درنقطهٔ ۶ واقع برمقطع مخروطی قطع می‌کند.
(د) ۶≡۱ و ۴≡۳ اختیار کنید، و سپس ۳≡۲ و ۶≡۵ اختیار کنید.
(ه) اختیار کنید ۲≡۱، ۴≡۳ و ۶≡۵.
(و) از قسمت (ه) استفاده کنید.

۱۳.۹ (الف) این، ازتعریف مثلث حسابی به‌صورتی که دربخش ۹ـ۹ داده شده نتیجه می‌شود.
(ب) باکاربردهای متوالی قسمت (الف).
(ج) از استقراء ریاضی‌وقسمت (الف) استفاده کنید.
(د) بنابرقسمت (ج).
(ه) بنابرقسمت (الف).
(و) بنابرقسمت (ه).
(ز) بنابرقسمت(ج).

۱.۱۰ (الف) به‌شکل ۱۳۱ نگاه کنید.
(ج) بنابرقسمتهای (الف) و (ب)، و ۹.۳ (ج).
(د) داریم $r+s=g$ و $rs=h$.
(ه) داریم $-r+s=-g$ و $-rs=-h$.

۲.۱۰ (الف) $x^3-2ax^2-a^2x+2a^3=axy$.



شکل ۱۳۱

(ب) نگاه کنید به ۱۰۱۰ (ج).
(ج) معادله‌های $L_۱$، $L_۲$، $L_۳$ و $L_۴$ را در شکل نرمال، یا قائم درنظر بگیرید. در این صورت به‌آسانی می‌بینید که معادلهٔ مکان هندسی از درجهٔ چهارم است.
(د) داریم $x_۲ - x_۱ = m$.

۴۰۱۰ (ب) $r = (۳a \sin\theta \cos\theta)/(\sin^۳\theta + \cos^۳\theta)$.
(ج) $x = ۳at/(۱+t^۳)$، $y = ۳at^۲/(۱+t^۳)$؛ حلقه $(۰, \infty)$، بازوی تحتانی $(-\infty, -۱)$، بازوی فوقانی $(-۱, ۰)$.
(د) $y = \pm x\sqrt{\dfrac{۳ - x\sqrt{۲}}{۳x\sqrt{۲}+۳}}$.
(ه) داریم $h+m-k^۲ = -۲$، $k(m-h) = ۸$، $mh = -۳$. با حذف m و h، از طریق حل دومعادلهٔ اول برای h و m برحسب k، و سپس قراردادن آنها در معادلهٔ سوم، به‌دست می‌آوریم

$$k^۶ - ۴k^۴ + ۱۶k^۲ - ۶۴ = ۰,$$

که یك معادلهٔ درجهٔ سوم برحسب $k^۲$ است.

۵۰۱۰ (الف) $\phi(n)$، به ازای $n = ۲$، ...، ۱۲ برابر است با ۱، ۲، ۲، ۴، ۲، ۶، ۴، ۶، ۴، ۱۰، ۴.
(ب) تنها اعداد صحیح مثبت نابیشتر از p^a وغیراول نسبت به p^a مضارب $p^{a-۱}$ از p هستند،

$$p\ ,\ ۲p\ ,\ \cdots\ ,\ p^{a-۱}p.$$

(ه) فرض کنید $n = ab$. در این صورت، اگر $x^n + y^n = z^n$، داریم $(x^a)^b + (y^a)^b = (z^a)^b$.
(و) فرض کنید که نقطهٔ $(a/b\ ,\ c/d)$، که در آن a، b، c، d اعداد صحیح هستند، برمنحنی واقع باشند. دراین صورت $(ad)^n + (bc)^n = (bd)^n$.
(ز) مثلث قائم‌الزاویه‌ای را درنظر بگیرید که اضلاع آن به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$a = ۲mn,\ \ b = m^۲ - n^۲,\ \ c = m^۲ + n^۲.$$

مساحت این مثلث برابر است با

$$A=(۱/۲)ab=mn(m^۲-n^۲).$$

با اختیار $m=x^۲$ و $n=y^۲$، و قرار دادن $x^۴-y^۴=z^۲$، خواهیم داشت

$$A=x^۲y^۲(x^۴-y^۴)=x^۲y^۲z^۲.$$

بنابراین اگر $x^۴-y^۴=z^۲$ جوابی درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، مانند x، y، z داشته‌باشد، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع صحیح وجودخواهدداشت که مساحت آن عدد مربعی است.

سرانجام اگر $x^۴+y^۴=z^۴$، آنگاه $z^۴-y^۴=(x^۲)^۲$.

(ج) فرض‌کنید $\sqrt{۳}=a/b$، که درآن a و b اعداد صحیح مثبت‌اند. داریم

$$\sqrt{۳}+۱=۲/(\sqrt{۳}-۱).$$

با گذاشتن a/b به‌جای $\sqrt{۳}$ درطرف دوم، به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt{۳}=(۳b-a)/(a-b).$$

چون $۳/۲<a/b<۲$، نتیجه می‌شود که $۳b-a$ و $a-b$ اعدادصحیح مثبت‌اند با $۳b-a<a$ و $a-b<b$.

۶.۱۰ (الف) ۱: ۱۵.

(ب) ۱۱: ۲۱.

۸.۱۰ (ج) زیرا، بنابرتعریف سیسوئید (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ‌مسئله‌ای ۴.۴)،

$$r=OP=AB.$$

بنابرقاعدهٔ سینوسها که درمورد مثلث OBC (نگاه‌کنید به‌شکل ۱۳۲) به‌کار گرفته شود،

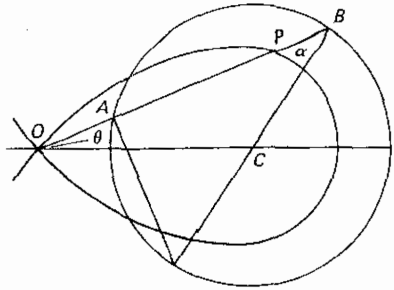
$$\frac{\sin\alpha}{\frac{a\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{\sin\theta}{\frac{a}{۲}}.$$

که ازآنجا

$$r=AB=a\cos\alpha=a\sqrt{۱-۲\sin^۲\theta},$$

و

$$r^۲=a^۲\cos ۲\theta.$$



شکل ۱۳۲

۹.۱۵ (ب) فرض کنید عدد انتخاب شده x باشد. دراین‌صورت

$$x=۳a'+a=۴b'+b=۵c'+c\ ,$$

که از آنجا

$$\frac{۴۰a+۴۵b+۳۶c}{۶۰}=\frac{۲(x-۳a')}{۳}+\frac{۳(x-۴b')}{۴}+\frac{۳(x-۵c')}{۵}$$

$$=۲x-(۲a'+۳b'+۳c')+\frac{x}{۶۰}.$$

(ج) درحالت کلی، به B، $q(p+۱)$ مهره می‌رسد.

۱۰.۱۵ (الف) درمورد بیضی، نقطه‌ای بر منحنی را متحرك فرض‌کنید که از یك کانون به‌طرف کانون دیگرحرکت می‌کند؛ درمورد هذلولی، نقطه‌ای را بر منحنی متحرك فرض‌کنیدکه از هردوکانون دور یا به‌آنها نزدیك می‌شود. درمورد اول، مجموع شعاعهای حامل نقاط متحرك ثابت است، و درمورد دوم، تفاضل شعاعهای حامل ثابت است.

(ب) یك **هلال** بخشی از سطح کرهٔ محصور بین دو نیمدایره از دو دایرهٔ عظیمه می‌باشد؛ زاویهٔ هلال، زاویهٔ بین این دو نیمدایره است.

(ج) اضلاع مثلث ABC را امتداد دهید تا دوایر عظیمه کامل شوند، فرض کنید A'، B'، C' به‌ترتیب نقاط‌متقاطر A، B، C باشند. مثلثهای $A'BC$ و $AB'C'$ متقارن هستند، و بنابراین معادل‌اند. نتیجه می‌شود که

$$\triangle ABC+\triangle AB'C'=ABA'C\ \text{هلال}.$$

همچنین

$$\triangle ABC + \triangle AB'C = BAB'C \text{ هلال},$$
$$\triangle ABC + \triangle ABC' = CAC'B \text{ هلال}.$$

اما

$$ABC + AB'C' + AB'C + ABC' = \text{۳۶۰ درجهٔ کروی}$$

و

$$ABA'C + BAB'C + CAC'B = \text{۲}(A+B+C) \text{ درجهٔ کروی}.$$

بنابراین

$$\text{۲}ABC + \text{۳۶۰ درجهٔ کروی} = \text{۲}(A+B+C) \text{ درجهٔ کروی}$$

(د) فرض کنید S مساحت کره باشد. در این صورت $A : S = E : ۷۲۰$. اما $S = ۴\pi r^۲$.

(ه) ۹۸π اینچ مربع.

۱۱۰۱۰ (الف) $\ln ۲ = ۰٫۶۹۳۱۵$.

(ب) $\ln ۳ = ۱٫۰۹۸۶۱$.

(ج) $\ln ۴ = ۲\ln ۲ = ۱٫۳۸۶۳$.

۱۰۱۱ (الف) فرض کنید M کمیت مفروض و m، که کوچکتر از M اختیار می‌شود، هر کمیت تخصیص یافته از همان نوع باشد. بنابر اصل ارشمیدس عدد صحیحی مانند $n \geqslant ۲$ وجود دارد به‌طوری که $nm > M$. چون $n \geqslant ۲$، نتیجه می‌شود که $n/۲ \leqslant n-۱$. فرض کنید $M_۱$ کمیتی باشد که بعد از تفریق کردن جزئی از M که کمتر از نصف آن نیست، باقی می‌ماند. در این‌صورت

$$M_۱ \leqslant \frac{M}{۲} < \frac{nm}{۲} \leqslant (n-۱)m.$$

با ادامهٔ این عمل سرانجام به‌دست می‌آوریم $M_{n-۱} < m$.

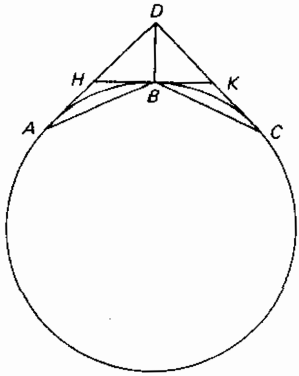
(ب) درشکل ۱۳۳، $HA = HB < HD$. بنابراین $\triangle HBD > \triangle HBA$، یا $\triangle HKD > ۱/۲(ABCD)$.

۲۰۱۱ (الف) داریم $(OM)(AO) = (OP)(AC)$. در این‌صورت با جمع کردن رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم،

$$(HK)(\text{مساحت قطعه}) = (\triangle AFC)\, KC/۳\,.$$

۳۰۱۱ (الف) $۲\pi rh$

(ب) به یك كتاب حسابان مراجعه کنید.



شکل ۱۴۳

(ج) $V=۲r^۲h/۳$ ، $r=$ شعاع استوانه و $h=$ ارتفاع گاوه.
(د) $V=۱۶r^۳/۳$.

۴۰۱۱ (الف) منشورمثلث‌القاعدهٔ $ABC-A'B'C'$ را درنظر گیرید. منشور را باصفحات $B'AC$ و $B'A'C$ قطع کنید.
(ج) $V=۲r^۲h/۳$.
(د) $V=\pi h^۳/۶$.
(ه) به‌قسمت (د) نگاه کنید.
(ز) $V=۲\pi^۲cr^۲$.
(ح) $A=\pi a^۲$.
(ط) طول وترهای همفاصله بین دوضلع یـک چندضلعی به‌طور یکنواخت تغییر می‌کند، درحالی‌که درمورد وترهای همفاصله در یك دایره وضع چنین نیست.

۵۰۱۱ (ب) فرض کنید O نقطه‌ای دلخواه دربخش میانی باشد و هرمهای P_U و P_L را که رأس آنها O و قاعده‌های آنها، به‌ترتیب قاعده‌های فوقانی وتحتانی منشوروار باشد، ازآن جداکنید. دراین‌صورت‌حجمهای P_U و P_L با $hU/۶$ و $hL/۶$ داده می‌شوند. حال قطرهای وجوه را ، درصورت لزوم ، رسم کنید به‌طوری که همهٔ وجوه جانبی منشوروار مثلث باشند، و صفحاتی بر O و یالهای جانبی بگذرانید، تا قطعهٔ باقیماندهٔ منشوروار را به مجموعه‌ای از هرمها تقسیم‌کندکه رأس هر یك ازآنها O و قاعدهٔ مقابل به‌آن یك وجه مثلث شکل جانبی منشوروار باشد. نشان دهیدکه حجم یکی از این هرمها $۴hS/۶$ است که درآن S مساحت بخش‌میانی منشوروار گنجیده در هرم است.
(ج) هرمقطع، ازآنجاکه تابع درجهٔ دومی از فاصله تا یکـی از قاعده‌هاست ،

برابر است با جمع جبری مساحت یك مقطع ثابت منشور، مساحت مقطعی (متناسب با فاصله از قاعده) از یك گاوه، و مساحت مقطعی (متناسب با مربع فاصله از قاعده) از یك هرم. بنابراین منشوروار برابر است با جمع جبری حجمهای یك متوازی السطوح، یك گاوه، یك هرم. حال قسمت (الف) را به کار برید.
(د) فرض کنید $A(x)=ax^{۲}+bx+c$. نشان دهید که

$$V=\int_{\circ}^{h} A(x)dx=\frac{h}{۶}\left[A(\circ)+۴A\left(\frac{h}{۲}\right)+A(h)\right]$$

۶۰۱۱ (ب) از استقراء ریاضی استفاده کنید.

۸۰۱۱ (ب) قرار دهید $x=y+h$ ، دراین‌صورت، بنابرقسمت (الف)،

$$f(x)\equiv f(y+h)\equiv f(h)+f'(h)y+\cdots+f^{(n)}(h)\frac{y^n}{n!}.$$

اگر h چنان باشد که $f(h)$، $f'(h)$، ... ، $f^{(n)}(h)$ همه مثبت باشند، دراین‌صورت معادلهٔ $f(y+h)=\circ$ برحسب y نمی‌تواند ریشهٔ مثبتی داشته باشد. یعنی ، $f(x)=\circ$ هیچ ریشهٔ بزرگتر از h ندارد، و h کران بالایی برای ریشه‌های $f(x)$ است.
(ج) داریم

$$f^{(n-k)}(a+h)\equiv f^{(n-k)}(a)+f^{(n-k+۱)}(a)h+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{h^k}{k!}$$

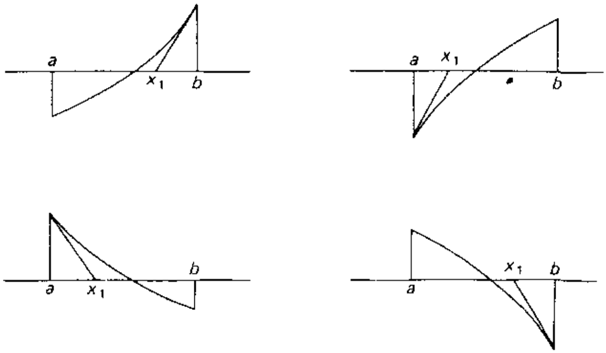
که نشان می‌دهد اگر $f^{(n-k)}(a)$ ، $f^{(n-k+۱)}(a)$ ، ... ، $f^{(n)}(a)$ همه مثبت باشند، و h نیز مثبت باشد، آنگاه $f^{(n-k)}(a+h)$ باید مثبت باشد. به‌طورمشابه، سایر تابعها نیز به‌ازای $x=a+h$ مثبت‌اند.
(د) بزرگترین ریشهٔ بین ۳ و ۴ قرار دارد.

۹۰۱۱ (الف) چهارحالتی را که درشکل ۱۳۴ نشان داده شده‌اند، درنظر بگیرید.
(ب) ۲٫۰۹۴۵۵۱۴ ، که تا هفت رقم اعشار درست است.
(ج) ۴٫۴۹۳۴.
(ح) نگاه کنید، مثلاً، به و. و. لاویت[1]، نظریه مقدماتی معادلات[2]، صفحهٔ ۱۴۴ [متن انگلیسی].

۱۰۱۲ (الف) $B_۱=۱/۶$، $B_۲=۱/۳۰$، $B_۳=۱/۴۲$ ، $B_۴=۱/۳۰$ ، $B_۵=۵/۶۶$.
(ب) ۲۰۸۳۶۰۰۲۸۱۴۱)۳۷=۷۷۰۹۳۲۱۰۴۱۲۱۷ .

---

1. W. V. Lovitt 2. Elementary Theory of Equations



شکل ۱۳۴

(ج) $B_{۴}=-۱+۱/۲+۱/۳+۱/۵$؛ $B_{۸}=۶+۱/۲+۱/۳+۱/۵+۱/۱۷$.

۲.۱۲ (الف) از استقراء ریاضی استفاده کنید.

(ب) $\cos ۴x=۸\cos^{۴}x-۸\cos^{۲}x+۱$،
$\sin ۴x=۴\sin x\cos x-۸\sin^{۳}x\cos x$.

(ج)
$$(-۱-i)^{۱۵}=۲^{۱۵/۲}(\cos ۲۲۵^\circ+i\sin ۲۲۵^\circ)^{۱۵}$$
$$=۲^{۱۵/۲}(\cos ۳۳۷۵^\circ+i\sin ۳۳۷۵^\circ)$$
$$=۲^{۱۵/۲}(\cos ۱۳۵^\circ+i\sin ۱۳۵^\circ)$$
$$=۲^{۷}(-۱+i).$$

(د) $\cos(n\pi/۲)+i\sin(n\pi/۲)=[\cos(\pi/۲)+i\sin(\pi/۲)]^{n}=i^{n}$.

(ه) ± ۱، $\pm(\sqrt{۲}+i\sqrt{۲})/۲$، $\pm i$، $\pm(\sqrt{۲}-i\sqrt{۲})/۲$.

۳.۱۲ (ج) ۲٫۹۹۶ شیر در هر پرتاب.

(د) ۲ شیر در هر پرتاب.

(ه) ۳ شیر در هر پرتاب.

(و) میانگین افزایش زیادی می‌یابد، میانه کمی تغییر می‌کند، مد تغییر نمی‌کند.

(ز) مد.

(ح) همه یکسان هستند.

۴.۱۲ (الف) $\sin z=z-z^{۳}/۳!+z^{۵}/۵!-z^{۷}/۷!+\cdots,$
$\cos z=۱-z^{۲}/۲!+z^{۴}/۴!-z^{۶}/۶!+\cdots,$
$e^{z}=۱+z+z^{۲}/۲!+z^{۳}/۳!+z^{۴}/۴!+\cdots.$

۷.۱۲ نگاه کنید، مثلاً، به کادول[1]، مباحثی در تفریحات ریاضی[2]، فصل ۱۵.

---

1. Cadwell　　2. Topics in Recreational Mathematics

۸۰۱۲ نگاه کنید، مثلاً، به بال، تفریحات و مقالههای ریاضی (ویرایش‌یازدهم)، صفحات ۲۵۴–۲۴۲ [متن انگلیسی].

۱۰۰۱۲ (ب) داریم $du=xdy-ydx$ که در مورد دایره به‌صورت زیر درمی‌آید

$$du=xd(1-x^2)^{1/2}-(1-x^2)^{1/2}dx=-\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}},$$

که از آنجا

$$u=\int_1^x \frac{-dx}{(1-x^2)^{1/2}}=\cos^{-1}(x).$$

درمورد هذلولی داریم

$$du=xd(x^2-1)^{1/2}-(x^2-1)^{1/2}dx=\frac{dx}{(x^2-1)^{1/2}},$$

که ازآنجا

$$u=\int_1^x \frac{dx}{(x^2-1)^{1/2}}=\ln[x+(x^2-1)^{1/2}].$$

۱۵۰۱۲ برای بررسی ترکیبی قسمتهای (ب)، (ج)، (د)، (و) نگاه کنید، به‌ترتیب، به‌بخشهای ۲۲۸، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۹۹ کتاب هندسهٔ فضایی محض نوین[1]، اثر آلتشیلر-کورت[2] (ویرایش دوم) شرکت چاپ چلسی[3]. بررسی تحلیلی قسمتهایی از این مطالعهٔ مسئله‌ای پروژهٔ تحقیقی کوچك مناسبی در هندسهٔ تحلیلی فضایی‌است.

۱۶۰۱۲ (الف) سه حالت زیر را درنظر بگیرید: (۱) C بین A و B، (۲) B بین A و C، (۳) A بین C و B.

(ب) از قسمت (الف) استفاده‌کنید.

(ج) بنابرقسمت (ب)، برای طرف چپ، داریم

$$AD(DC-DB)+BD(DA-DC)+CD(DB-DA).$$

(د) با $AM=MB$ شروع‌کنید وسپس‌مبدئی در P درج‌کنید.

(ه) یك مبدأ در P درج‌کنید.

---

1. Modern Pure Solid Geometry
2. Altshiller-Court
3. Chelsea Publishing Company

(و) قرار دهید $AA' = OA' - OA = (O'A' - O'O) - OA$، و به‌همین قیاس.
(ز) مبدأیی در O درج و فرض کنید M و N معرف اوساط CR و PQ باشند. دراین صورت $۴OM = ۲OR + ۲OC = OA + OB + ۲OC = OB + OC$ $+ ۲OQ = ۲OP + ۲OQ = ۴ON$.یا ، M و N در صورتی که A ، B ، C همخط نباشند آشکارا منطبق‌اند؛ حال C را به‌سوی همخطی با A و B میل دهید.

۱۷۰۱۲ (الف) اگر اضلاع BC ، CA ، AB از مثلث ABC یك منحنی درجهٔ nم را در $P_۱$ ، $P_۲$ ، ... ، P_n ؛ $Q_۱$ ، $Q_۲$ ، ... ، Q_n ؛ $R_۱$ ، $R_۲$ ، ... ، R_n تلاقی کنند ، آنگاه

$$(AR_۱)(AR_۲)\cdots(AR_n)(BP_۱)(BP_۲)\cdots(BP_n)(CQ_۱)(CQ_۲)\cdots(CQ_n)$$
$$=(AQ_۱)(AQ_۲)\cdots(AQ_n)(BR_۱)(BR_۲)\cdots(BR_n)(CP_۱)(CP_۲)\cdots(CP_n).$$

(ب) اگر اضلاع AB ، BC ، CD ، ... ازچند ضلعی یك مقطع‌مخروطی را در $A_۱$ و $A_۲$ ، $B_۱$ و $B_۲$ ، $C_۱$ و $C_۲$ ، ... قطع کنند، آنگاه

$$(AA_۱)(AA_۲)(BB_۱)(BB_۲)(CC_۱)(CC_۲)\cdots$$
$$=(BA_۱)(BA_۲)(CB_۱)(CB_۲)(DC_۱)(DC_۲)\cdots .$$

(ج) نشان دهیدکه تحت انتقالی‌که درآن مبدأ به‌نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ منتقل می‌شود ، ضرایب جملات با بالاترین درجهٔ یك چند جمله‌ای $f(x,y)$ بدون تغییر باقی می‌مانند، و جملهٔ ثابت به $f(x_۰, y_۰)$ تبدیل می‌شود.
(د) از هر نقطهٔ دلخواهی مانند O برصفحهٔ چندضلعی خطوطی به‌موازات اضلاع چندضلعی رسم کنید. حال قسمت (ج) را درمورد هریك از اضلاع مجاور چندضلعی به‌کار برید.

۱۰۱۳ (الف) دوخط $x \pm y = ۰$ و سهمی $xy = ۲$ را داریم.
(ب) دوسهمی $x^۲ - y^۲ - ۲y = ۰$ و $xy + x - y + ۱ = ۰$ را داریم.

۲۰۱۳ نگاه کنید، مثلاً، به د. م. برتون ، نظریهٔ مقدماتی اعداد[1] (چاپ تجدیدنظرشده)، فصل ۴ .

۳۰۱۳ (الف) $n(a+l)/۲$.
(ج) فرض کنید $p = ۴m + ۳$ ، $q = ۴n + ۳$. دراین‌صورت $P = (p-۱)/۲$، $Q = (q-۱)/۲$ هردو فرد هستند، که ازآنجا $(-۱)^{PQ} = -۱$.

۵۰۱۳ (الف) (۱) همگرا، (۲) مطلقاً همگرا، (۳) واگرا .

1. D. M. Burton, Elementary Number Theory

(ب) (۱) همگرا، (۲) واگرا.
(ج) (۱) همگرا، (۲) واگرا.

۶.۱۳ (الف) بنابر گ ۳، c^{-1} موجود است. دراین صورت با توجه به $a*c=b*c$، داریم $(a*c)*c^{-1}=(b*c)*c^{-1}$،یا بنابر گ۱، $a*(c*c^{-1})=b*(c*c^{-1})$. با به‌کار بردن گ ۳، اکنون داریم $a*i=b*i$،که سرانجام از آن، بنابر گ ۲، داریم $a=b$.
(ب) بنابر گ ۳، a^{-1} موجود است. بنابراین، با به‌کاربردن گ ۱، گ ۳، گ۲ گ۳به‌نوبهٔ‌خود،داریم $(i*a)*a^{-1}=i*(a*a^{-1})=i*i=i=a*a^{-1}$.دراین صورت بنابر قسمت (الف) داریم $i*a=a$. اما، بنابر گ ۲، داریم $a*i=a$. اکنون نتیجه می‌شود که $i*a=a*i$.
(ج) فرض‌کنید i و j دوعنصرهمانی‌برای‌گروه باشند. دراین‌صورت، بنابر گ۲ که برای عنصر همانی j به‌کار گرفته شود، $i*j=i$. همچنین، بنابر قسمت (ب)، $i*j=j*i$. اما، بنابر گ۲که درموردعنصرهمانی i به‌کارگرفته شود،$j*i=j$. اکنون نتیجه می‌شود که $i=j$.
(د) بنابـر گ ۱ ، گ ۳ ، و قسمت (ب)، کـه به‌نوبت به کار گرفته شوند ، $(a^{-1}*a)*a^{-1}=a^{-1}*(a*a^{-1})=a^{-1}*i=i*a^{-1}$. بنابراین، طبق قسمت (الف)، $a^{-1}*a=i$. اما، بنابرگ ۳، داریم $a*a^{-1}=i$. اکنون نتیجه می‌شود که $a^{-1}*a=a*a^{-1}$.

۸.۱۳ همان گروههای قسمتهای (الف)، (ب)، (ج)، (د)، (ه).

۹.۱۳ (الف) فرض‌کنید M وسط قاعدهٔ AB باشد. DM و CM را رسم‌کنید.
(ج) عمودی از رأس مثلث برخط واصل بین اوساط دوضلع مثلث وارد کنید.

۱۵.۱۳ (الف) عمل $*$ نه جابجایـی ونه شرکتپذیـر است ؛ عمـل | هم جابجایی و هم شرکتپذیر است؛ قانون توزیعپذیری برقراراست.
(ب) هیچیك ازقوانین برقرارنیست.
(ج) تنها دوقاعدهٔ جابجایی برقراراست.
(د) | شرکتپذیر وتوزیعپذیراست.

۱۸.۱۳ (و) هیچ مقسوم علیه صفر موجود نیست ؛ قانون اسقاط ازچپ برای ضرب.

(ز) نشان دهید تساوی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ایجاب‌می‌کند: (۱) $b(a+d)=۱$،

(۲) $c(a+d)=۰$، (۳) $a^{۲}+bc=۰$، (۴) $cb+d^{۲}=۰$. از (۱) نتیجه می‌شود که $a+d\neq ۰$. این با نتیجه $a+d=۰$ متناقض است.

۱۹.۱۳ نگاه‌کنید، مثلاً به هـ. ایوز، نظریهٔ مقدماتی ماتریسها[1]، بخش ۷.۱ (الف) و ۷.۶.

۲۰.۱۳ (ج) این را می‌توان به‌چند طریق‌نشان‌داد، اما همهٔ آنها حیله‌آمیزند. به‌برهانهایی که در کتب آنالیزبرداری داده شده مراجعه‌کنید.

۲.۱۴ (ب) نگاه کنید، مثلاً، به‌آلتیشلر ـ کورت، هندسهٔ فضایی محض نوین، ویرایش دوم، بخش ۱۷۰، صفحهٔ ۵۷ [متن انگلیسی].
(ج) نگاه‌کنید به همانجا، بخش ۱۷۲، صفحهٔ ۵۸.
(د) نگاه‌کنید به همانجا، بخش ۱۷۶ .۱، صفحهٔ ۵۹.

۳.۱۴ تنها به‌شرطی‌که هر یال چهار وجهی بر یال مقابل عمود باشد. (چنین چهار وجهیی را **چهار وجهی اورتوسنتریك** می‌نامند.)

۵.۱۴ (ج) به جای خطوط مزدوج همزاویهٔ یك زاویهٔ مسطحه، صفحات مزدوج همزاویه یك‌فرجه را درنظر بگیرید.

۶.۱۴ (الف) $\cos\theta=\cos(۲\theta/۳+\theta/۳)$.
(ب) زاویهٔ مرکزی یك نه‌ضلعی‌منتظم برابراست با $(۲/۳)۶۰^\circ=۴۰^\circ$.
(د) فرض‌کنید $۷\theta=۳۶۰^\circ$. دراین‌صورت $\cos۳\theta=\cos۴\theta$، یا با قراردادن $x=\cos\theta$، داریم $۸x^۳+۴x^۲-۴x-۱=۰$.
(و) $m^۳=۲s^۳$.
(ح) فرض‌کنید c محیط دایره‌ای به‌شعاع واحد باشد. دراین‌صورت $c=۲\pi$.
(ط) $\angle AOB=۹۰^\circ$ اختیار و فرض‌کنید M و N پای‌عمودهایی‌مرسوم‌از P بر OA و OB باشند. فرض‌کنید R مرکزمستطیل $OMPN$ باشد. حال اگر CDخط فیلون برای زاویهٔ AOB ونقطهٔ P باشد، نشان دهید که $RE=RP$، و بنابراین $RD=RC$. اکنون راه‌حل‌آپولونیوس برای مسئلهٔ تضعیف را داریم (نگاه‌کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۳.۴).

۷.۱۴ (ب)، (د)، (ه) نگاه‌کنید به ر.س. ییتز[2]، مسئلهٔ تثلیث.

۸.۱۴ نگاه‌کنید به‌هاورد ایوز، بررسی هندسه، جلد ۱، بخش ۴ـ۴.

۹.۱۴ نگاه‌کنید به ا.ا. هالربرگ[3]، «هندسهٔ پرگارثابت[4]» مجلهٔ معلم ریاضیات[5]، (آوریل ۱۹۵۹)، ص ص ۲۳۰ ـ ۲۴۴ و ا. ا. هالربرگ «گئورگ‌موهر و شگفتیهای‌اقلیدس[6]» مجلهٔ معلم ریاضیات، (فوریه ۱۹۶۰)، ص ص ۱۲۷ـ۱۳۲.

---

1. H. Eves, Elementary Matrix Theory 2. R. C. Yates
3. A. E. Hallerberg 4. The geometry of the fixed-compass
5. The Mathematics Teacher 6. Georg Mohr and Euclids Curiosi

۱۴.۱۰ (الف) سهولت ۱۳، دقت ۸.
(ب) سهولت ۹، دقت ۶.
(ج) سهولت ۹، دقت ۵.
(د) سهولت ۹، دقت ۵.
(ه) سهولت ۸، دقت ۵.

۱۴.۱۱ (ز) قضیه، خوددوگان است.

۱۴.۱۴ (الف) (۱) $\alpha=\beta$, (۲) $\alpha+\beta=k$.
(ب) $x=a(\cot\alpha-\cot\beta)/۲(\cot\alpha+\cot\beta)$، $y=a/(\cot\alpha+\cot\beta)$،
$\alpha=\cot^{-۱}[(a+۲x)/۲y]$ ، $\beta=\cot^{-۱}[(a-۲x)/۲y]$، که در آن
$a=AB$.
(ج) (۱) یك بیضی، (۲) یك خط مستقیم قائم، (۳) یك خط مستقیم.
(د) (۱) $(x^۲+y^۲)^۲=a^۲(x^۲-y^۲)$، (۲) $x^۲+y^۲+ax=a\sqrt{x^۲+y^۲}$
(و) $z=r\cos\phi$، $y=r\cos\phi\sin\theta$، $x=r\cos\phi\cos\theta$.

۱۴.۱۶ (و) ۲؛ (ز) ۲؛ (ح) ۲؛ (ط) ۴؛ (ی) ۳؛ (ك) ۳؛ (ل) ۶؛ (م) ۴؛ (ن) ۳؛ (س) ۲.

۱۴.۱۷ نگاه کنید، مثلاً به، ه. ایوز، بررسی هندسه، جلد ۲، بخش ۹.۲ .

۱۴.۱۸ (ب) $(b,-a,۰)$.
(د) $۲x+y+k=۰$.
(ه) $x^۲+y^۲+۲fyz+۲gxz+cz^۲=۰$.
(ز) نگاه کنید، مثلاً به، ه. ایوز، بررسی هندسه، جلد ۲ ، قضیهٔ ۹.۳.۱۰ (صفحهٔ ۸۳) [متن انگلیسی].

۱۴.۲۰ (الف) مجموعهٔ کلیهٔ نقاط z بهطوری که

$$z_i=(۱-t)x_i+ty_i,$$

که درآن t عدد حقیقی دلخواهی است.
(ب) مجموعهٔ مرتب اعداد $(y_i-x_i)/d$، $i=۱,۲,\dots,n$، که در آن d فاصلهٔ بین دونقطهٔ مفروض است.
(ج) درقسمت (الف) t را به $۰<t<۱$ محدودکنید.
(د) نقطهٔ z بهطوری که $z_i=(x_i+y_i)/۲$.
(و) (۱)، (۲)، و (۳) بدیهیاند. برایاثبات (۴)، ابتدا نشان دهیدکه فاصلهٔبین دونقطه تحت انتقال پایاست. درنتیجه (۴) در صورتی که نقاط x و y و z براثر انتقالیکه y را به مبدأ میبرد، تبدیل شوند، همچنان معتبر خواهد بود. بنابراین (۴) بهنامساوی

$$[\sum (x_i - z_i)^۲]^{۱/۲} \leqslant (\sum x_i^۲)^{۱/۲} + (\sum z_i^۲)^{۱/۲},$$

تبدیل می‌شود که می‌توان آن را با اعمال سادهٔ جبری ثابت کرد.

۲۲.۱۴ (الف) از رابطه‌های مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۱۲ استفاده کنید.
(ج) این یك پیامد بلافصلی از قسمتهای (الف) و (ب) است.
(ه) $K = -(۱/QP)(۱/QT) = -۱/(QF)^۲ = -۱/k^۲$.

۲۶.۱۴ (الف) $\log(۱/۲) < ۰$.
(ج) اگر دو کسر برابر باشند و مخرجهای غیرصفر برابر داشته باشند، صورتهای آنها هم برابرند.
(د) مرحلهٔ ۲ را برای $k = ۲$ امتحان کنید.
(ه) مرحلهٔ ۲ را برای $a = ۱$ یا $b = ۱$ امتحان کنید.

۲۷.۱۴ (الف) انتگرال توسعی است، چون انتگراند در $x = ۰$ ناپیوسته است.
(ب) وجود ماکزیموم ومینیمومهای انتهایی را امتحان کنید.
(ج) وجود ماکزیموم ومینیمومهای انتهایی را امتحان کنید.
(د) ثابت انتگرالگیری را فراموش نکنید.

۲۸.۱۴ نگاه کنید، مثلاً، به‌هاوردایوز، بررسی هندسه، جلد ۲، بخش ۴.۱۳.

۲۹.۱۴ (ب) نه. مثلاً $\sqrt{۲}$ جبری است، زیرا یك ریشهٔ $x^۲ - ۲ = ۰$ است.
(ج) جبری. یك ریشهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ است.
(د) اگر $\pi/۲$ یك ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای $f(x) = ۰$ باشد، در این صورت π یك ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای $f(x/۲) = ۰$ است.
(ه) اگر $\pi + ۱$ یك ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای $f(x) = ۰$ باشد، آنگاه π یك ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای $f(x+۱) = ۰$ است.
(و) اگر $\sqrt{\pi}$ یك ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای $f(x) = ۰$ باشد، آنگاه π یك ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای $f(\sqrt{x}) = ۰$ است والخ.

۳۰.۱۴ (ب) اگر p مرکب باشد، آنگاه $p = ab$، که در آن $a \leqslant b$ و، درنتیجه، $a^۲ \leqslant p$.
(ج) برای $n = ۱۰^۹$ داریم ... $A_n \log_e n / n = ۱٫۰۵۳$.
(د) $(n+۱)! + ۲$، $(n+۱)! + ۳$، ...، $(n+۱)! + (n+۱)$ را درنظر بگیرید.

۴.۱۵ تحقیق صحت چهار اصل موضوع اول چندان دشوار نیست. برای تحقیق صحت و سقم اصل موضوع پنجم کافـی است نشان دهیم که دو خط مستقیم متقاطع، کـه هر یك توسط دونقطه، بامحدودیت مذکور،معین می‌شوند، یکدیگر را در یك نقطه با همان محدودیت قطـع می‌کنند. این کار را می‌توان بدین طریق نشان داد که معادلهٔ خط مستقیمی که توسط

دو نقطهٔ با مختصات گویا تعیین می‌شود ضرایب گویا دارد، و اینکه چنین دوخطی، اگر متقاطع باشند، باید یکدیگر را در نقطه‌ای با مختصات گویا قطع کنند. برای آخرین قسمت مسئله، دایرهٔ واحد به‌مرکز مبدأ، و خط مار برمبدأ با شیب یك را درنظر بگیرید.

۶.۱۵ (الف) فرض‌کنید که این خط از رأس A وارد مثلث شود. نقطهٔ دلخواهی مانند U را بر آن وخارج ازمثلث اختیار وفرض‌کنید V نقطه‌ای برقطعه خط AC باشد، وخط UV را رسم کنید. بنابراصل موضوع پاش، UV (۱) خط AB، یا (۲) خط BC را قطع خواهد کرد، یا (۳) بر B خواهد گذشت. اگر UV، AB را قطع کند، محل تلاقی را با W نشان دهید و WC را رسم کنید؛ حال اصل پاش را، به‌نوبت، برای مثلثهای VWC و BWC به‌کار برید. اگر UV، BC را قطع‌کند، محل تلاقی را با R نشان دهید؛ حال اصل موضوع پاش را درمورد مثلث VRC به‌کاربرید. اگر UV بر B بگذرد، اصل موضوع پاش را در مورد مثلث VBC به‌کاربرید.

۷.۱۵ **T۱** فرض کنید هم داشته باشیم $R(a,b)$ و هم $R(b,a)$. در این صورت بنابر P۳، داریم $R(a,a)$. اما بنابر P۲ ، این غیرممکن است. بنابراین، قضیه با برهان خلف ثابت می‌شود.

T۲ چون $c\neq a$ ، داریم ، بنابر P۱، یا $R(a,c)$ یا $R(c,a)$. اگر داشته باشیم $R(c,a)$ ، چون همچنین $R(a,b)$ را داریـم ، بنابر P۳ داریم $R(c,b)$. بنابراین قضیه حاصل می‌شود.

T۳ فرض‌کنید قضیه‌نادرست باشد وفرض‌کنید a هرعنصر K باشد. دراین‌صورت عنصری مانند b از K وجود دارد به‌طوری‌که $R(a,b)$. بنابر P۲، $a\neq b$. بنابراین a و b اعضای متمایز K هستند. بنابر فرض ما ، عنصری مانند c از K وجود دارد به‌طوری‌که داریم $R(b\ ,\ c)$. بنابر P۲ ، $b\neq c$. بنابر P۳، همچنین داریم $R(a,c)$. بنابر P۲ ، $a\neq c$. لذا، a، b، c عناصر متمایز K هستند.

بنابرفرض ما ، عنصری مانند d از K وجود دارد به‌طوری که داریم $R(c,d)$. بنابر P۲، $c\neq d$، بنابر P۳، همچنین‌داریم $R(b,d)$ و $R(a,d)$. بنابر P۲ ، $b\neq d$ ، $a\neq d$. بنابراین a، b، c، d عناصر متمایز K هستند. بنابر فرض ما ، عنصری مانند e در K موجـود است به قسمی کـه داریم $R(d,e)$. بنابر P۲، $d\neq e$. بنابر P۳ همچنین داریم $R\ (c,e)$، $R(b,e)$ ، $R(a,e)$. بنابر P۲ ، $c\neq e$ ، $b\neq e$، $a\neq e$. بنابراین a، b، d، e عناصر متمایز K هستند. اکنون تناقضی بـرای P۴ داریم. بنابراین ، قضیه بنابر برهان خلف ثابت می‌شود.

T۴ بنابر T۳ حداقل یك‌چنین عضوی، مثلاً a، وجود دارد فرض کنید $b\neq a$ هر عنصر دیگر K باشد. بنابر P۱داریم $R(a,b)$ یا $R(b,a)$. اما، بنابرفرض، $R(a,b)$ راانداریم. بنابراین، باید داشته‌باشیم $R(b,a)$، وقضیه‌ثابت می‌شود.

T۵ بنابر تعریف ۱ داریم $R(b,a)$ و $R(c,b)$. در این صورت بنابر P۳ داریم

$R(c,a)$، یا، بنابرتعریف ۱، داریم $D(a,c)$.

T۶ فرض‌کنید $a \neq b$. دراین‌صورت، بنابر P۱، یا داریم $R(a,b)$ یا $R(b,a)$. فرض‌کنید داشته باشیم $R(a,b)$ ، چون داریم $F(b,c)$ ، همچنین داریم ، بنابر تعریف ۲، $R(b,c)$. این غیرممکن است زیرا $F(a,c)$ را داریم. فرض‌کنید داشته باشیم $R(b,a)$. چون داریم $F(a,c)$ ، همچنین‌داریم، بنابرتعریف ۲ ، $R(a,c)$. این غیرممکن است زیرا $F(b,c)$ را داریم. بنابراین ، درهرحالت به تناقضی با فرض خود می‌رسیم. بنابراین، قضیه با برهان‌خلف ثابت می‌شود.

T۷ زیرا، بنابر تعریف ۲، داریم $R(a,b)$ و $R(b,c)$. لذا ، بنابر تعریف ۲ ، نمی‌توانیم $F(a,c)$ را داشته باشیم.

۸.۱۵ (ب) T۱ اگر a جد b باشد، آنگاه b جد a نیست.

T۲ اگر a جد b باشد و اگر c عضو سومی از K متمایز از a و b باشد، آنگاه یا a یك جد c است یا c یك جد b است.

T۳ مردی در K وجود داردکه جد هیچکس در K نیست.

T۴ تنها یك مرد در K وجود داردکه جد هیچکس در K نیست.

تعریف ۱ اگر b یك جد a باشد گوییم که a یك زادهٔ b است.

T۵ اگر a یك زادهٔ b باشد، و b یك زادهٔ c، آنگاه a زادهٔ c است.

تعریف ۲ اگر a یك جد b باشد و فردی مانند c از K موجود نباشد به‌قسمی که a یك جد c و c یك جد b باشد، آنگاه‌گوییم که a پدر b است.

T۶ هرمرد در K حداکثر یك پدر در K دارد.

T۷ اگر a پدر b و b پدر c باشد، آنگاه a پدر c نیست.

تعریف ۳ اگر a پدر b و b پدر c باشد، گوییم که a پدربزرگ c است.

(د) چون T۱ از P۱ ، P۲ ، P۳ ، P۴ نتیجه گرفته شده‌است، آنچه باقی ماند تنها نتیجه‌گرفتن P۲ از P۱، T۱، P۲، P۴ است.

۹.۱۵ (ب) عکس «اگر A آنگاه B» «اگر B آنگاه A» است.

(ج) متقابل «اگر A آنگاه B» «اگر نه A آنگاه نه B» است.

۱۰.۱۵ (الف) ۴۸ مایل درهرساعت.

(ب) ۴ر۲ روز

(د) $67\frac{1}{2}$ سنت.

(ه) دومی.

(و) درپایان دقیقهٔ ۵۹.

(ز) مزد بسیارخوبی است.
(ح) ۱۱ ثانیه.
(ط) پنج سنت.
(ی) هیچکدام؛ مقادیرمساوی‌اند.
(ك) کپهٔ نهایی بالغ بر ۱۷۰۰۰۰۰۰ مایل بلندی خواهدداشت.
(ل) نه.
(م) ثلث.
(ن) بلی.

۱۳۰۱۵ (الف) اعضای S را به‌عنوان مجموعه‌ای‌ازکلیهٔ چارچوبهای ارجاع متعامد تعبیر کنیدکه با یکدیگر موازی‌اند ولی هیچ محوری ازیك چارچوب ارجاع منطبق بر محور چارچوب دیگر نیست، و فرض کنید bFa به‌معنی این باشد که مبدأ چارچوب b درربع‌اول‌چارچوب a باشد. یا، عناصر S را مجموعهٔهمهٔ زوجهای مرتب از اعداد حقیقی مانند $(m\ ,\ n)$ تعبیر، و فرض کنید $(m,n)\ F\ (u,v)$ به معنی $m>u$ و $n>v$ باشد.

۱۴۰۱۵ (الف) زنبورها را به‌عنوان شش شخص A، B، C، D، E، F، و چهار کندو را به‌عنوان چهارکمیته $(A,\ B,\ C)$، $(A,\ D,\ E)$، $(B,\ E,\ F)$، و$(C\ ,\ F,\ D)$ تعبیرکنید. یا، زنبورها وکندوها رابه‌ترتیب به‌عنوان شش درخت و چهار ردیف از درختهایی‌تعبیرکنیدکه رأسها و اضلاع یك‌چهارضلعی‌کامل را تشکیل می‌دهند.
(ب) برای نشان دادن P۲، زنبورها وکندوها را به‌عنوان چهار درخت و چهار ردیف درختان‌که تشکیل رأسها واضلاع مربعی‌را می‌دهند، تعبیرکنید. برای‌نشان دادن استقلال P۳، زنبورها را به عنوان چهار درختی که در رأسها و پای یك ارتفاع یك مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند، وکندوها را به‌عنوان چهار ردیف درخت درامتداد اضلاع وارتفاع مثلث، تعبیرکنید. برای‌نشان دادن استقلال P۴، زنبورها و کندوها را به‌عنوان سردرخت وسه ردیف درخت که رأسها و اضلاع مثلثی را تشکیل می‌دهند، تعبیرکنید.
(ج) چهارکندو را با a، b، c، d و زنبورها را با اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ... نشان دهید. اصول موضوعه، ضرورتاً، به‌طرح شکل ۱۳۵ منجر می‌شوندکه در آن عدد طبیعی هرخانه زنبورمنحصر به‌فردی را نشان می‌دهدکه در دوکندویی‌که توسط سرستونها وسرسطرهای دربرگیرندهٔآن خانه داده‌شده، مشترك است. اکنون هرسه قضیه ازاین طرح آشکارهستند.

۱۵۰۱۵ (ه) بنابر M۱′ داریم $d(x,y) \leqslant d(y,z)+d(z,x)$ و، با تعویض x و y، $d(y,x)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$. با قراردادن $z=x$ در نامساوی اول و $z=y$ درنامساوی دوم،(وبایادآوری M۲) نامساویهای $d(x,y)\leqslant d(y,x)\leqslant d(x,y)$ را به‌دست می‌آوریم. ازآنجا نتیجه می‌شودکه $d(x,y)=d(y,x)$.

	a	b	c	d
a		1	2	3
b	1		4	5
c	2	4		6
d	3	5	6	

شکل ۱۳۵

در $d(x,z)\leqslant d(z,y)+d(y,x)$ قرار دهید $z=x$. در این صورت، چون بنابر M۲ $d(x,x)=$ ۰ ، بنابر مطالب بالا

$$\circ\leqslant d(x,y)+d(y,x)=۲d(x,y)$$

درنتیجه $d(x,y)\geqslant \circ$، والخ.

(ر-۳) تنها تحقیق نامساوی مثلث کمی مشکل است. $d(y,z)$، $d(z,x)$، $d(x,y)$ را به‌ترتیب با a، b، c نشان دهید. دراین‌صورت داریم

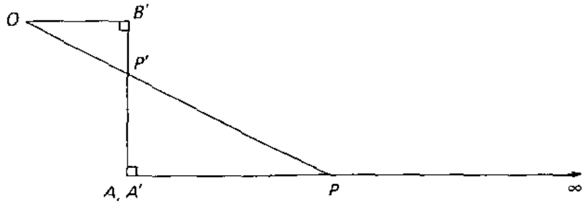
$$\frac{b}{۱+b}=\frac{۱}{\frac{۱}{b}+۱}\leqslant\frac{۱}{\frac{۱}{c+a}+۱}=\frac{c+a}{۱+c+a}$$
$$=\frac{c}{۱+c+a}+\frac{a}{۱+c+a}\leqslant\frac{c}{۱+c}+\frac{a}{۱+a}.$$

(ح) برای قسمت (ج)، یك دایره مربعی است به‌مرکز c وقطرهای آن طولی برابر $۲r$ دارند وبه‌موازات محورها می‌باشند.

۱۶.۱۵ (الف) فرض کنید $M_۱$ وسط AB، $M_۲$ وسط $M_۱B$، $M_۳$ وسط $M_۲B$ باشد والخ. مجموعهٔ‌نقاط $[AB]$ به‌استثنای A، B، $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$، ... را با E نشان دهید. دراین صورت داریم

$$[AB]=E,A,B,M_۱,M_۲,M_۳,\cdots$$
$$[AB]=E,B,M_۱,M_۲,M_۳,\cdots$$
$$[AB]=E,A,M_۱,M_۲,M_۳,\cdots$$
$$[AB]=E,M_۱,M_۲,M_۳,\cdots.$$

اکنون روشن است که چگونه می‌توان نقاط هریك از چهار پاره‌خط را در تناظر



شکل ۱۳۶

یك‌به‌یك با نقاط هر یك از پاره‌خطهای دیگر قرار داد.
(ب) با شکل ۱۳۶ شروع کنید.

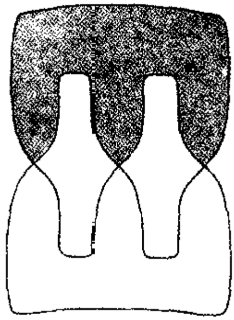
۱۷.۱۵ (ب) ازفکری که دراثبات قضیهٔ ۱ بخش۱۵ــ۴ به‌کار گرفته شد، استفاده کنید.
(ج) ازاستدلال غیرمستقیمی همراه با قسمت (الف) وقضیه۱ بخش ۱۵ــ۴استفاده کنید.
(د) از استدلال غیـرمستقیمی همراه بـا قسمت (الف) و قضیهٔ ۲ بخش ۱۵ــ۴ استفاده کنید.

۲۱.۱۵ (الف) نگاه کنید به‌مسئلهٔ $E۸۳۲$، ماهنامهٔ آمریکایی ریاضی، ۵۶ (۱۹۴۹)،صفحهٔ ۴۰۷.
(ج) نه، زیرا c نقطه وجود دارند که بریك خط مستقیم یا یك دایره قرار دارند، وتنها d عددگویا و d عدد جبری موجود است.
(د) محوری عددی بر خط مستقیم مفروض اختیار کنید. درهر بازه نقطه‌ای بامختصات گویا انتخاب کنید. این نقاط همه متمایزند، وبنا براین درتناظریك‌به‌یك با بازه‌ها قرار دارند، ویك‌زیرمجموعهٔ نامتناهی ازمجموعه شمارای همهٔ اعداد گویا تشکیل می‌دهند.

۲۳.۱۵ (ب) سطح تشکیل شده ازیك نوارکاغذ که به‌اندازهٔ ۵۴۰° تاب داده شده وسپس دوسر آن به‌هم چسبانده شده‌اند.
(ج) نگاه کنید به‌شکل ۱۳۷. این سطح‌توسط ف. فرانکل و ل.س. پونتریاگین[1] درسال ۱۹۳۰ کشف شد.
(د) یك قرص مدور.

۲۵.۱۵ (ب) یك چهاروجهی شش یال دارد ویك هرم مربع‌القاعده هشت یال دارد. فرض کنید یك چندوجهی بستهٔ سادهٔ هفت یالی وجود داشته باشد. توجه خود را به هر وجه خاص چندوجهی معطوف وفرض کنید که این وجه n یال داشته باشد. چون

1. L.S.Pontryagin



شکل ۱۳۷

حداقل سه‌یال از هر رأس این وجه خارج می‌شوند، ملاحظه‌می‌کنیم که $۲n \leqslant ۷$، یا $n < ۴$. نتیجه می‌شود کــه همهٔ وجوه چندوجهی باید مثلث باشند، که از آنجا $۳f = ۲e = ۱۴$. اما این‌کارغیرممکن است‌چون f یك‌عدد صحیح است.

۲۶.۱۵ (الف) روابط (۱) و(۲) بدیهی‌اند. روابط (۳) و(۴) بدین دلیل نتیجه‌می‌شوند که هریال دقیقاً به‌دو وجه متعلق است وهریال دقیقاً از دو رأس بیرون مــی‌آید. برای به‌دست آوردن(۵) توجه‌کنید که $v - e + f = ۲$، یا $۲v + ۲f = ۴ + ۲e$.
با قرار دادن مقادیر (۱)، (۲)، (۳) در (۵) به‌دست می‌آوریم

$$۲(v_۳ + v_۴ + \cdots) + ۲(f_۳ + f_۴ + \cdots) = ۴ + ۳f_۳ + ۴f_۴ + ۵f_۵ + \cdots,$$

یا

$$۲(v_۳ + v_۴ + \cdots) = ۴ + f_۳ + ۲f_۴ + ۳f_۵ + ۴f_۶ + \cdots.$$

برای به‌دست آوردن (۶) به‌طور مشابه (۱)، (۲)، (۳)را در $۲v + ۲f = ۴ + ۲e$ قرارمی‌دهیم. از دو برابر کردن (۶) واضافه‌کردن آن به (۵) نتیجه می‌شود که

$$۴(f_۳ + f_۴ + \cdots) + ۲(v_۳ + v_۴ + \cdots) = ۸ + (۲v_۳ + ۴v_۴ + ۶v_۵ + ۸v_۶ + \cdots) + ۴ + (f_۳ + ۲f_۴ + ۳f_۵ + ۴f_۶ + \cdots)$$

یا

$$۳f_۳ + ۲f_۴ + f_۵ = ۱۲ + (۲v_۴ + ۴v_۵ + ۶v_۶ + \cdots) + (f_۷ + ۲f_۸ + ۳f_۹ + \cdots)$$

که همان (۷) است.

(ب) اینها پیامدهای ساده‌ای از رابطهٔ (۷) قسمت (الف) هستند.

(ج) برای (۱)، رابطهٔ(۷) قسمت(الف) به $f_۵ = ۱۲$ تبدیل می‌شود؛ برای(۲)،

این رابطه به $۱۲ = ۲f_۴$، یا $f_۴ = ۶$ تبدیل می‌شود؛ برای (۳)، این رابطه به $۱۲ = ۳f_۳$، یا $f_۳ = ۴$ تبدیل می‌شود.

۲۷.۱۵ (ه) تحقیق درستی $\mathbf{H}_۱$ و $\mathbf{H}_۲$ که بدیهی است، حذف می‌کنیم.
برای تحقیق $\mathbf{H}_۳$، فرض کنید که $d(x,y)<r$ و قرار دهید $R=r-d(x,y)>0$. طبق نامساوی مثلث درصورتی که $d(y,y')<R$ آنگاه

$$d(x,y')\leqslant d(x,y)+d(y,y')=(r-R)+d(y,y')<r$$

با نشان دادن درون دایرهٔ به مرکز c و شعاع r با $S(c,r)$، نتیجه می‌گیریم که $S(y,R)$ مشمول در $S(x,r)$ است.
برای تحقیق $\mathbf{H}_۴$، فرض کنید که x متمایز از y باشد و قرار دهید $r=d(x,y)>0$.
در این صورت می‌توان به‌آسانی نشان داد که $S(x,r/۳)$ و $S(y,r/۳)$ نقطهٔ مشترکی ندارند.
(و) چون x یك نقطهٔ حدی S است، هر همسایگی N_x از x شامل نقطه‌ای مانند $y_۱$ از S است، که در آن $y_۱\neq x$. دراین‌صورت بنابر $\mathbf{H}_۴$ همسایگیهای مجزایی مانند $N_{y_۱}$ و N'_x از $y_۱$ و x موجودند. مجدداً بنابر $\mathbf{H}_۲$، همسایگیی از x مانند N''_x موجود است که هم مشمول در N_x و هم در N'_x است. نتیجه می‌شود که $y_۱$ در N''_x نیست. اما چون x یك نقطهٔ حدی S است، N''_x، و بنابراین N_x شامل نقطه‌ای مانند $y_۲$ از S است که درآن $y_۲$ هم متمایز از x وهم از $y_۱$ است. با ادامهٔ استدلال به این نحو، نتیجه می‌گیریم که N_x شامل دنباله‌ای نامتناهی از نقاط متمایز $y_۱$، $y_۲$، ... از S است وبنابراین قضیه ثابت می‌شود.

۲۹.۱۵ (الف) سه ارزش درستی‌ممکن یك گزاره را با T (درست)، F (نادرست)، و ? (غیر ازاین‌دو) نشان دهید. می‌توانیم جدول درستی برای ترکیب عطفی را به‌صورتی که درشکل ۱۳۸ نشان‌داده شده، بسازیم که درآن بنابر توافق ما در بارهٔ معنی «p و q»، خانهٔ بالایی سمت چپ درجدول باید شامل یك T باشد، وهیچ خانه‌ای درجدول نمی‌تواند شامل یك T باشد. چون هشت خانهٔ دیگر باقی می‌مانند وهر یك از آنها را می‌توان به‌دوطریق‌ممکن، یعنی یا با یك T یا یك ? پر کرد، مجموعاً $۲^۸ = ۲۵۶$ راه ممکن برای پر کردن هشت خانه وجود دارد.
(ب) جدول درستی برای نقیض را می‌توان به‌صورت شکل ۱۳۹ ساخت، که‌در آن دو طریق برای پرکردن خانهٔ بالایی با نه p (یعنی F یا ?)، سه راه برای پرکردن خانهٔ وسطی با نه p (یعنی با T، F، یا?) و دو راه برای پرکردن خانهٔ تحتانی با نه p (یعنی با T یا ?) وجود دارد.
(ج) $(۲۵۶)\,(۱۲)=۳۰۷۲$.
(د) $m^{m-۲}(m-۱)^{m^۲+۱}$.

q

	∧	T	?	F
p	T	T		
	?			
	F			

شکل ۱۳۸

p	نه p
T	
?	
F	

شکل ۱۳۹

۳۳.۱۵ (الف) نگاه کنید، مثلاً، به هاوردایوز تربیع دوایر ریاضی[1] چاپ پریندل، وبر، وشمیدت[2]، ۱۹۷۲، صفحات ۵۳–۵۵ [متن انگلیسی].
(ب) نگاه کنید، مثلاً، به بال-کاکستر، تفریحات و مقاله‌های ریاضی، مک‌میلان[3] صفحات ۱۶۵–۱۷۰ [متن انگلیسی].

1. Mathematical Circles Squared
2. Prindle, Weber & Schmidt
3. Macmillan

واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی

absurdity	بطلان
algebraic structure	ساختار جبری
algebraic topology	توپولوژی جبری
analysis situs	هندسهٔ وضع
annuity	قسط السنین
anticomplementary tetrahedron	چهاروجهی پاد متمم
antinomy	تعارض (منطق)
antiprism	پاد منشور
Aristotles' wheel	چرخ ارسطو
arithmetization	حسابیدن
array	آرایه
axiom	اصل متعارفی
axiomatics	مبحث اصل موضوعیها
betweennes	بینیت
binary forms	صورتهای دودویی
Bōolean algebra	جبر بولی
brachystochrone	منحنی کوتاهترین زمان
bracket	قلاب
branch	شاخه
calculus of forms	حساب صورتها
calculus of variations	حساب تغییرات
capillary action	عمل مویین
cardinal number	عدد اصلی

cardinal number of continuum	عدد اصلی متصله
cardioid	کاردیوئید
catacaustic curves	منحنیهای محرق
catenary	منحنی زنجیری
centrifugal	گریز از مرکز
centroid	مرکز هندسی
challenging	حریف آزما
characteristic	مفسر (لگاریتم)
characteristic equation	معادلهٔ مشخصه
collinear	همخط
combinatorial topology	توپولوژی ترکیبیاتی
commensurable	متوافق
concurrent	همرس
congruent	همنهشت، مساوی
conicoid	مخروطیوار
conjecture	حدس
conjunction	عطف (منطق)
connectivity	همبندی
construction	ترسیم، ساختمان
continued fraction	کسر مسلسل
continuum hypothesis	فرض متصله
contrapositive	عکس‌نقیض
converse	عکس (گزاره)
corpuscular→emission	
criterion	ملاک
cross	خاج
cross ratio group	گروه نسبت خاجی
cubic curve	منحنی درجهٔ سوم
cuboctahedron	چهارده‌وجهی مرکب
cusp	نقطهٔ بازگشت
defect	کاستی
demonstrative geometry	هندسهٔ برهانی
De Morgan laws	قوانین دمورگن
denumerable	شمارا

descriptive geometry	هندسهٔ ترسیمی
diagonal process	فرایند قطری‌کردن
dimensionality	بعد-چندی
direction number	مؤلفهٔ هادی
director sphere, syn:Monge sphere	کرهٔ هادی، کرهٔ مونژ
divide	عادکردن
domain of definition	حوزهٔ تعریف
dual	دوگان
elasticity	کشسانی
elliptic geometry	هندسهٔ بیضوی
embedded	نشانده
emission, syn:corpuscular	گسیلش
envelope	پوش
epicycloid	اپی‌سیکلوئید
equiform geometry	هندسهٔ همشکلی
evolute	گسترده
exactitude of construction	دقت ساختمان
extrinsic geometry	هندسهٔ عارضی
factorial	فاکتوریل
fallacy	مغالطه
false	نادرست (منطق)
finite differences	تفاضلات متناهی
folium	فولیوم، چینه
formalist	صوری‌گرا
formal logic.	منطق صوری
four leaved rose	منحنی گل‌چهاربرگی
frame of reference	چارچوب مرجع
frequency distribution	توزیع فراوانی
gauge	کیل
generalized prismoid	منشورگون تعمیم‌یافته
generating	مولد

geodesy	زمینسنجی
geometrography	هندسه‌نگاری
graph	گراف
grating	مشبکه
groupoid	گروهواره
harmonic ranges	تقسیمات توافقی
hexagram	هگزاگرام
homeomorphic	همسانریخت
homographic pencils	دسته خطوط همنگار
homology	هومولوژی
homothetic transform	تبدیل تجانسی
hoof	سم
hyperbolic geometry	هندسهٔ هذلولوی
hypothesis 1	فرض
hypothesis 2	فرضیه
hypothesis of the acute angle	فرض زاویهٔ حاده
hypothesis of the obtuse angle	فرض زاویهٔ منفرجه
hypothesis of the right angle	فرض زاویهٔ قائمه
ideal	آرمانی
identity element	عنصر همانی
impredicative definition	تعریف غیراسنادی
incommensurable	نامتوافق
indicator	نشانگر
integral domain	حوزهٔ صحیح
integral equation	معادلهٔ انتگرالی
interpolation	درونیابی
intrinsic geometry	هندسهٔ ذاتی
intuitionist	شهودگرا
invariant	پایا
involute	گسترنده
isochrone	منحنی همزمان
isogonal	همزاویه
isogonal conjugate	مزدوج همزاویه‌ای

isogonic center	مرکز همزاویه‌ای
isoperimetric	هم‌پیرامون
Jordan algebra	جبر ژوردان
Kleinian geometry	هندسهٔ کلاینی
lattice	شبکه
latus rectum	لاتوس رکتوم، ضلع‌قائم
law of double negation	قانون نفی مضاعف
law of excluded middle	قانون طرد شق وسط
least squares	کمترین مربعات
lie between	میانبود
logistic	منطق‌گرا
logistics	سازوکار
loop	طوقه
manifold	خمینه
mantissa	مانتیس (لگاریتم)
many-valued logic	منطق چندارزشی
mathematical expectation	امید ریاضی
mean curvature	انحنای میانگین
measure curvature	انحنای اندازه
method of abridged notation	روش نماد اختصاری
method of equilibrium	روش تعادل
method of exhaustion	روش افنا
method of infinite descent	روش نزول نامتناهی
metric	متریك
Möbius strip	نوار موبیوس
mode	مد
modulus	هنگ
moment	گشتاور
Monge sphere→director sphere	
monoid	تکواره
mosaic	موزائیك

multicursal graph	گراف چندپیمایه
multiple algebra	جبر چندگانیها
nebular hypothesis of cosmogony	فرضیهٔ سحابی کیهانزایی
nephroid	نفروئید، منحنی کلیه شکل
node	بند
operator	عملگر
opposite	متقابل (گزاره‌ها)
optical	نورشناختی
optics	نورشناسی ،اپتیك
orbiform	مداری شکل
orthocentroidal circle	دایرهٔ مرکز-ارتفاعی
osculating circle	دایرهٔ بوسان
oval	مرغانه
palindromic number	عدد مقلوبی
parabolic geometry	هندسهٔ سهموی
parabolic segment	قطعهٔ سهموی
paradox	پارادوکس
paradromic rings	حلقه‌های همرو
parallel postulate	اصل موضوع توازی
partition	افراز
pedal curve	منحنی پادکی
plane centro-affine geometry	هندسهٔ مسطحهٔ آفین مرکزدار
plane equiform geometry →similarity geometry	
point geometry	هندسهٔ نقطه‌ای
point of inflection	نقطهٔ عطف
polar	قطبی
postulate	اصل موضوع
postulate of order	اصل موضوع ترتیب
power series	سری توانی
principle of duality	اصل دوگانی
prism	منشور

prismatoid	منشوروار
prismoid	منشورگون
projectile	پرتابه
projective geometry	هندسهٔ تصویری
projective plane	صفحهٔ تصویر
quadrature	تربیع
quantics	توابع همگن جبری چند متغیره
quasi group	شبه گروه
quaternion	کواترنیون
quintic equation	معادلهٔ درجهٔ پنجم
range of values	دامنهٔ مقادیر
rational	گویا
reciprocant	عکس‌ساز
reciprocation	عکس‌یابی
rectangular hyperbola	هذلولی متساوی‌الساقین
rectification	راستش
reflexive	انعکاسی
refraction	انکسار
relatively prime	متباین
rhombic dodecahedron	دوازده‌وجهی لوزوی
rhombic triakontahedron	سی‌وجهی لوزوی
Riemann surface	سطح ریمان
roulette	چرخ دندانه‌دار
route	مسیر
rule of signs	قاعدهٔ علامات
runner	عددیاب (خط‌کش محاسبه)
rusty compasses	پرگار با گشادگی ثابت، پرگار زنگ‌زده
sector compasses	پرگار تقسیم
self_consistent	خودسازگار
semigroup	نیمگروه
sensed magnitudes	کمیتهای جهت‌دار
sequence	دنباله

sequential relation	نسبت دنباله‌ای
shift in hypothesis	تصرف در فرض
similarity geometry syn:plane equiform geometry	هندسهٔ تشابه
skew lines	خطوط متنافر
skew symmetric	متقارن چپ
slide rule	خط‌کش محاسبه
spherical zone	منطقهٔ کروی
spiral	مارپیچ
straightedge	ستاره، خط‌کش
subconcious geometry	هندسهٔ ناخودآگاه
subnormal	تحت قائم
subtangent	تحت مماس
summation	مجموعیابی
summit	تارك
symbolic algebra	جبر علامتی
symmedian point	نقطهٔ هم‌میانه
synthetic geometry	هندسهٔ ترکیبی
tautology	راستگو
ternary forms	صورتهای سه‌سه‌یی
three body problem	مسئلهٔ سه‌جسم
transcendental number	عدد متعالی
transfinite	ترانسفینی
transposed	ترانهاده
trident	منحنی سه‌دندانه
trirectangular angle	کنج سه‌وجهی
truth table	جدول راستی
truth value	ارزش راستی
twin primes	اعداد اول توأمان
2_ complexes	دوکومپلکسها
undecidable	غیرقابل تصمیم
unicursal graph	گراف یك‌پیمایه
uniform convergence	همگرایی یکنواخت

union	اجتماع
variation	واریاسیون
Venn diagram	دیاگرام ون
vicious circle principle	اصل دور فاسد
wedge	گوه، گاوه

واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی

آرایه	array
آرمانی	ideal
اپی‌سیکلوئید	epicycloid
اجتماع	union
ارزش راستی	truth value
اصل دور فاسد	vicious circle principle
اصل دوگانی	principle of duality
اصل متعارفی	axiom
اصل موضوع	postulate
اصل موضوع ترتیب	postulate of order
اصل موضوع توازی	parallel postulate
اعداد اول توأمان	twin primes
افراز	partition
امید ریاضی	mathematical expectation
انحنای اندازه	measure curvature
انحنای میانگین	mean curvature
انعکاسی	reflexive
انکسار	refraction
بطلان	absurdity
بعد چندی	dimensionality
بند	node
بینیت	betweenness
پاد منشور	antiprism

پارادوکس	paradox
پایا	invariant
پرتابه	projectile
پرگار باگشادگی ثابت	rusty compasses
متر: پرگار زنگ‌زده	
پرگار تقسیم	sector compasses
پرگار زنگ‌زده ← پرگار باگشادگی ثابت	
پوش	envelope
تارک	summit
تبدیل تجانسی	homothetic transform
تحت قائم	subnormal
تحت مماس	subtangent
ترانسفینی	transfinite
ترانهاده	transpose
تربیع	quadrature
ترسیم، متر: ساختمان	construction
تصرف در فرض	shift in hypothesis
تعارض (منطق)	antinomy
تعریف غیراسنادی	impredicative definition
تفاضلات متناهی	finite differences
تقسیمات توافقی	harmonic ranges
تکواره	monoid
توابع همگن جبری چند متغیره	quantics
توپولوژی ترکیباتی	combinatorial topology
توپولوژی جبری	algebraic topology
توپولوژی ← هندسهٔ وضع	
توزیع فراوانی	frequency distribution
جبر بولی	Boolen algebra
جبر چندگانیها	multiple algebra
جبر ژوردان	Jordan algebra
جبر علامتی	symbolic algebra
جدول ارزش	truth table

چارچوب مرجع	frame of reference
چرخ ارسطو	Aristotles' wheel
چرخ دندانه‌دار	roulette
چهارده‌وجهی مرکب	cuboctahedron
چهاروجهی پاد متمم	anticomplementary tetrahedron
چینه ← فولیوم	

حدس	conjecture
حریف‌آزما	challenging
حساب تغییرات	calculus of variations
حساب صورتها	calculus of forms
حسابیدن	arithmetization
حلقه‌های همرو	paradromic rings
حوزهٔ تعریف	domain of definition
حوزهٔ صحیح	integral domain

خاج	cross
خط‌کش ← ستاره	
خط‌کش محاسبه	slide rule
خطوط متنافر	skew lines
خمینه	manifold
خودسازگار	self-consistent

دامنهٔ مقادیر	range of values
دامنهٔ نوسان	amplitude of oscillation
دایرهٔ بوسان	osculating circle
دایرهٔ مرکز-ارتفاعی	orthocentroidal circle
درونیابی	interpolation
دسته خطوط همنگار	homographic pencils
دقت ساختمان	exactitude of construction
دنباله	sequence
دوازده‌وجهی لوزوی	rhombic dodecahedron
دوکومپلکسها	2_ complexes
دوگان	dual
دیاگرام ون	Venn diagram

rectification	راستش
tautology	راستگو
truth	راستی
method of exhaustion	روش افنا
method of equilibrium	روش تعادل
method of infinite descent	روش نزول نامتناهی
method of abridged notation	روش نماد اختصاری
geodesy	زمینسنجی
algebraic structure	ساختار جبری
logistics	سازوکار
straightedge	ستاره
	متر: خط‌کش
power series	سری توانی
Riemann surface	سطح ریمان
hoof	سم
rhombic triakontahedron	سی‌وجهی لوزوی
branch	شاخه
lattice	شبکه
quasi group	شبه گروه
denumerable	شمارا
intuitionist	شهودگرا
projective plane	صفحهٔ تصویر
binary forms	صورتهای دودویی
ternary forms	صورتهای سه‌سه‌یی
formalist	صوری‌گرا
	ضلع قائم ← لاتوس رکتوم
loop	طوقه
divide	عادکردن
cardinal number	عدد اصلی

عدد اصلی متصله	cardinal number of continuum
عدد متعالی	transcendental number
عدد مقلوبی	palindromic number
عددیاب (خط‌کش محاسبه)	runner
عطف (منطق)	conjunction
عکس (گزاره)	converse
عکس‌ساز	reciprocant
عکس‌یابی	reciprocation
عکس‌نقیض	contrapositive
عملگر	operator
عمل مویین	capillary action
عنصر همانی	identity element
غیرقابل تصمیم	undecidable
فاکتوریل	factorial
فرایند قطری‌کردن	diagonal process
فرض	hypothesis 1
فرض زاویهٔ حاده	hypothesis of the acute angle
فرض زاویهٔ قائمه	hypothesis of the right angle
فرض زاویهٔ منفرجه	hypothesis of the obtuse angle
فرض متصله	continuum hypothesis
فرضیه	hypothesis 2
فرضیهٔ سحابی کیهانزایی	nebular hypothesis of cosmogony
فولیوم	folium
متر: چینه	
قاعدهٔ علامات	rule of signs
قانون طرد شق وسط	law of excluded middle
قانون نفی مضاعف	law of double negation
قسط‌السنین	annuity
قطبی	polar
قطعهٔ سهموی	parabolic segment
قلاب	bracket
قوانین دمورگن	De Morgan laws

کاردیوئید	cardioid
کاستی	defect
کرهٔ مونژ ← کرهٔ هادی	
کرهٔ هادی	director sphere, Monge sphere
متر: کرهٔ مونژ	
کسر مسلسل	continued fraction
کشسانی	elasticity
کمترین مربعات	least squares
کمیتهای جهت‌دار	sensed magnitudes
کنج سه‌وجهی	trirectangular angle
کواترنیون	quaternion
کیل	gauge
گراف	graph
گراف چندپیمایه	multicursal graph
گراف یک‌پیمایه	unicursal graph
گروه نسبت خاجی	cross ratio group
گروهواره	groupoid
گسترده	evolute
گسترنده	involute
گسیلش	emission, corpuscular
گشتاور	moment
گوه	wedge
گویا	rational
لاتوس رکتوم	latus rectum
متر: ضلع قائم	
مارپیچ	spiral
مانتیس (لگاریتم)	mantissa
مؤلفهٔ هادی	direction number
مبحث اصل موضوعیها	axiomatics
متباین	relatively prime
متریک	metric
متقابل (گزاره‌ها)	opposite
متقارن چپ	skew symmetric

متوافق	commensurable
مجموعیابی	summation
مخروطی‌وار	conicoid
مد	mode
مداری شکل	orbiform
مرغانه	oval
مرکز همزاویه‌ای	isogonic center
مرکز هندسی	centroid
مزدوج همزاویه‌ای	isogonal conjugate
مساوی ← همنهشت	
مسئلهٔ سه‌جسم	three body problem
مسیر	route
مشبکه	grating
معادلهٔ انتگرالی	integral equation
معادلهٔ درجهٔ پنجم	quintic equation
معادلهٔ مشخصه	characteristic equation
مغالطه ؟	fallacy
مفسر (لگاریتم)	characteristic
مقدار ویژه	latent root
ملاک	criterion
منحنی پادکی	pedal curve
منحنی درجهٔ سوم	cubic curve
منحنی زنجیری	catenary
منحنی سه‌دندانه	trident
منحنی کلیه‌شکل ← نفروئید	
منحنی کوتاهترین‌زمان	brachistochrone
منحنی گل‌چهاربرگی	four leaved rose
منحنیهای محرق	catacaustic curves
منحنی همزمان	isochrone
منشور	prism
منشورگون	prismoid
منشورگون تعمیم‌یافته	generalized prismoid
منشوروار	prismatoid
منطق چندارزشی	many-valued logic
منطق صوری	formal logic

منطق گرا	logistic
منطقهٔ کروی	spherical zone
موزائیک	mosaic
مولد	generating
میان بود	lie between
نادرست (منطق)	false
نامتوافق	incommensurable
نسبت دنباله‌ای	sequential relation
نشانده	embedded
نشانگر	indicator
نفروئید	nephroid
متر: منحنی کلیه‌شکل	
نقطهٔ بازگشت	cusp
نقطهٔ عطف	point of inflection
نقطهٔ هم‌میانه	symmedian point
نوار موبیوس	Möbius strip
نورشناختی	optical
نورشناسی	optics
نیمگروه	semigroup
واریاسیون	variation
هذلولی متساوی‌الساقین	rectangular hyperbola
هگزاگرام	hexagram
همبندی	connectivity
هم‌پیرامون	isoperimetric
همخط	collinear
همرس	concurrent
همزاویه	isogonal
همسانریخت	homeomorphic
همگرایی یکنواخت	uniform convergence
همنهشت	congruent
متر: مساوی	
هندسهٔ برهانی	demonstrative geometry

هندسهٔ بیضوی	elliptic geometry
هندسهٔ ترسیمی	descriptive geometry
هندسهٔ ترکیبی	synthetic geometry
هندسهٔ تشابه	similarily geometry, plane equiform geometry
هندسهٔ تصویری	projective geometry
هندسهٔ ذاتی	intrinsic geometry
هندسهٔ سهموی	parabolic geometry
هندسهٔ عارضی	extrinsic geometry
هندسهٔ کلاینی	Kleinian geometry
هندسهٔ مسطحهٔ آفین‌مرکزدار	plane centro-affine geometry
هندسهٔ ناخودآگاه	subconcious geometry
هندسهٔ نقطه‌ای	point geometry
هندسه‌نگاری	geometrography
هندسهٔ وضع	analysis situs
متر: توپولوژی	
هندسهٔ هذلولوی	hyperbolic geometry
هندسهٔ همشکلی	equiform geometry
هنگ	modulus
هومولوژی	homology

فهرست راهنما