

مؤسسه فرهنگی هنری  
دییاکران تهران

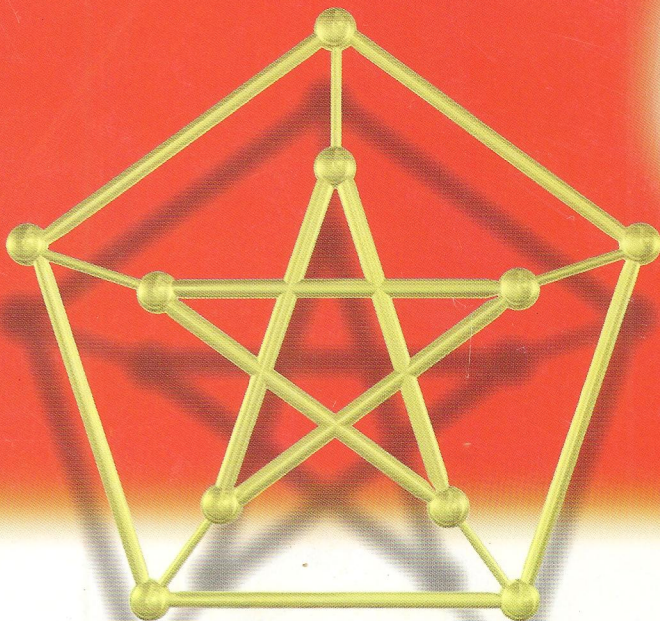
# نظریهٔ گرافها و کاربردهای آن

کتابی مرجع و معتبر در  
سطح دانشگاهها

قابل استفاده علاقمندان به  
شرکت در المپیادهای ریاضی  
و کامپیوتر

همراه با صدها مسئله چالاب  
توجه و راهنمایی برای حل آنها

به انضمام واژهنامه اصطلاحات  
مربوط به نظریهٔ گرافها و  
ترکیبیات



مؤلفین: جی. ای. باندی

یو. اس. ار. مورتی

مترجم: حمید ضرابی زاده

به نام خدا

# نظریهٔ گراف‌ها و کاربردهای آن

مترجم:

حمید ضرابی زاده



مؤسسه فرهنگی هنری  
دیباگان تهران

---

تهران - بهار ۱۳۷۸

## پیشگفتار

شاید زمانی که اوایل در سال ۱۹۷۴ اولین مقاله خود را در زمینه گراف‌ها منتشر می‌نمود، تصور نمی‌کرد که این مبحث در طول کمتر از سه قرن، به یکی از بزرگترین شاخه‌های ریاضیات مبدل شود.

امروزه مباحث مربوط به نظریه گراف‌ها ریاضی دانان بسیاری را به خود مشغول کرده است و وجود مسائل حل نشده فراوان در این زمینه - که نمونه‌هایی از آن‌ها را در پیوست کتاب ملاحظه خواهید نمود - گویای این مطلب است که تا مدت‌ها، شاهد پویایی و تحرک در این شاخه از ریاضیات خواهیم بود.

خوشبختانه طی سال‌های اخیر، این شاخه نسبتاً نوپای علوم ریاضی توانسته است به خوبی جای خود را در بین مجامع علمی، دانش‌جویان و دانش‌آموزان کشورمان باز کند، تا آن‌جا که حتی در میان کتاب‌های درسی نظام جدید آموزش متوسطه نیز مطالبی در زمینه نظریه گراف‌ها به چشم می‌خورد.

باتوجه به علاقه فراوان و روزافزون جامعه علمی کشور به این شاخه جدید از ریاضیات و عدم وجود یک منبع نسبتاً کامل در این زمینه به زبان فارسی، و از سوی دیگر احساس نیاز شدید دانش‌آموزان علاقمند به شرکت در المپیادهای علمی به یک منبع خوب برای مطالعه مرا بر آن داشت تا به ترجمه این کتاب بپردازم. کتاب حاضر در نظریه گراف‌ها آن قدر معروف است که نیازی به معرفی نداشته باشد و سال‌هاست که در دانشگاه‌های معتبر کشور از جمله دانشگاه صنعتی شریف، از این کتاب به‌عنوان مرجع اصلی درس نظریه گراف‌ها استفاده می‌شود. از سوی دیگر، طی چندین سال گذشته برای آموزش و آماده‌سازی تیم‌های ملی المپیادهای کامپیوتر و ریاضی نیز از کتاب مزبور استفاده گردیده است.

با این‌که کتاب حاضر، یک کتاب دانشگاهی است و برای تدریس به دانش‌جویان علوم ریاضی و کامپیوتر توصیه می‌شود، ولی دانش‌آموزان علاقمند نیز می‌توانند با اندکی پشتکار از این کتاب به خوبی بهره‌مند شوند. نباید انتظار داشت که در مدت زمان کوتاهی بتوان به تمام مطالب این کتاب تسلط یافت، بلکه نکته اساسی برای موفقیت در بهره‌برداری از این کتاب، مداومت و صرف وقت فراوان برای فهم مطالب و تلاش برای حل مسائل گوناگون کتاب می‌باشد.

امید آن‌که کتاب حاضر بتواند سهم کوچکی در برآوردن گوشه‌ای از نیازهای علمی دانش‌جویان و دانش‌آموزان میهن عزیزمان داشته باشد.

## تشکر و قدردانی

پیش از هر چیز لازم می‌دانم که از استادان ارجمندم، جناب آقای دکتر سیّد عبداله محمودیان و جناب آقای دکتر مهدی بهزاد که واژه‌نامهٔ پیشنهادی ایشان همه‌جا، طی ترجمهٔ کتاب مورد استفاده قرار گرفته است، همچنین از آقایان دکتر محمد قدسی، مهندس محمد مهدیان و آقای علی اصغر خانبان که هریک به نحوی در آشنایی من با نظریه‌گراف‌ها مؤثر بوده‌اند و همچنین از آقای مهندس سعید سعادت به خاطر تشویق‌ها و پی‌گیری‌های فراوانشان، تشکر و قدردانی نمایم.

مسلماً تلاش‌های بی‌دریغ جناب آقای سیّد مسیح آیت که کار ویراستاری علمی کتاب را برعهده داشتند، بیشترین نقش را در آماده‌سازی این کتاب داشته است که در این جا از ایشان نیز صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.

همچنین سپاسگزارم از دوستان خوبی که مرا در غلط‌گیری و بازبینی نسخه‌های اولیه کتاب یاری نمودند، از جمله آقایان وحید اسدی، سیّد امین تروهید، امین شکری پور، احسان کلاچی و خانم‌ها سارا شریفی، الهه جوادی و صفورا صیفی‌کار و سایر دوستان ارجمندم در مجمع قرآنی مشکوٰه که خالصانه مرا در انجام این کار یاری نمودند، به‌ویژه آقای علی‌رضا فنّادان که آماده‌سازی تصاویر کتاب را به بهترین نحو به انجام رساندند.

علاوه بر این از پرسنل واحدهای مختلف مجتمع فنی تهران، خانم ته‌مین کاشانیان (اسکن و برش تصاویر و صفحه‌آرایی کامپیوتری)، آقایان صمد راد اخلاقی (طراحی جلد)، حیدر شفیعی (پشتیبانی فنی) و کریم براغ (ناظر چاپ) سپاسگزاری نموده و موفقیتشان را در کلیه امور زندگی آرزومندم.

بی‌شک چنین کتابی، با این حجم بالای عبارات و نمادهای ریاضی، عاری از اشکال نخواهد بود، لذا از دوستان بزرگواری که این کتاب را مطالعه می‌کنند خواهشمندم با ارسال نظرات اصلاحی خود به ناشر، ما را در تصحیح کتاب جهت چاپ‌های آتی یاری نمایند.

حمید ضرابی زاده

فروردین ۱۳۷۸

## مقدمه مؤلفین

هدف از کتاب حاضر، ارائه مقدمه‌ای در نظریه گراف‌هاست. در این کتاب علاوه بر تکیه بر مفاهیم اولیه، گستره وسیعی از کاربردها، چه از شاخه‌های دیگر ریاضیات و چه از مسائل موجود در جهان واقعی ارائه گردیده‌اند. در اثبات قضایا از جدیدترین و ساده‌ترین اثبات‌های متعلق به بروکس، چویتال، تات و ویزینگ استفاده شده است. کاربردها با نهایت دقت انتخاب شده‌اند و از ارائه کاربردهایی که صرفاً از زبان گراف‌ها بهره برده و جنبه نظری قوی نداشته‌اند، صرف‌نظر نموده‌ایم. کاربردهایی که در انتهای هر بخش آمده‌اند، درحقیقت از نظریه‌ای که قبلاً در همان بخش تکامل یافته است، استفاده می‌کنند. ما همچنین در حل مسائل، بر اهمیت کارایی روش‌ها، تأکید فراوانی داشته‌ایم. چندین الگوریتم خوب در این کتاب بیان شده و کارایی آن‌ها مورد تحلیل قرار گرفته است. از طرفی قصد نداشته‌ایم که وارد مسائل مربوط به پیاده‌سازی کامپیوتری این الگوریتم‌ها بشویم.

تمرین‌های ارائه شده در انتهای هر بخش، از درجه دشواری متفاوتی برخوردارند. مسائل سخت‌تر با علامت (\*) مشخص شده و راهنمایی‌هایی برای حل آن‌ها در پیوست اول کتاب آمده است. در برخی تمرین‌ها، تعریف‌های جدیدی ارائه شده است که به خواننده توصیه می‌شود با این تعاریف کاملاً آشنایی پیدا نماید. تمرین‌هایی که با اعداد سیاه‌تر مشخص شده‌اند، در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، از این رو حل همگی آن‌ها باید حتماً مورد توجه قرار بگیرد.

در پیوست دوم، ویژگی‌های اصلی چهار گراف را در جدولی فهرست کرده‌ایم. هنگامی که یک تعریف جدید ارائه می‌شود، خواننده می‌تواند با مراجعه به جدول مذکور، فهمیده‌های خود را مورد آزمون قرار دهد. پیوست سوم شامل برگزیده‌ای از گراف‌های جالب توجه است که هر یک دارای ویژگی‌های خاصی می‌باشند. این گراف‌ها برای ارزیابی حدس‌های جدید بسیار سودمندند. در پیوست چهارم تعدادی مسئله حل نشده را جمع‌آوری نموده‌ایم که برخی از آن‌ها بسیار سخت قلمداد شده و برخی دیگر مسائل امیدوارانه‌تری هستند. برای مطالعه بیشتر، پیشنهادهایی در پیوست پنجم ارائه شده است.

افراد زیادی چه به صورت مستقیم و چه غیرمستقیم، در این تهیه این کتاب همکاری داشته‌اند. ما به‌ویژه بسیار مدیون سی. برگ و دی. جی. ای. ولش هستیم، به این خاطر که ما را با نظریه گراف‌ها آشنا نمودند، و از جی. ای. دیراک، جی. ادموندز، ال. لاواژ و و. تی. تات به خاطر تأثیر زیادی که بر کار ما داشته‌اند، و همچنین از وی. چانگ‌فیزن و سی. ای. نش - ویلیامز به خاطر مطالعه بسیار دقیق پیش‌نویس کتاب و نظریات ارزشمندشان سپاسگزاریم. همواره از جی. ا. ام. به خاطر محبت‌ها و تشویق‌های همیشگی‌اش ممنونیم. ما همچنین باید از اس. بی. مورر، پی. جی. اهلوران، سی. توماسن، بی. تافت و دانشجویانمان در دانشگاه واترلو به خاطر انتقادهای مؤثرشان و همچنین از انجمن تحقیقات ملی کانادا به خاطر حمایت‌های مالی‌شان سپاسگزاری نماییم. در نهایت علاقمندیم که نهایت سپاسگزاری خود را از جوان سلوود به خاطر تایپ دقیق و از دایانا راینویچ به خاطر کارهای هنری زیبایش داشته باشیم.

جی. ای. باندی

یو. اس. ار. مورتی

# فهرست مطالب

## فصل ۱ گرافها و زیرگرافها

۱۳	گرافها و گرافهای ساده	۱-۱
۱۶	یکریختی گرافها	۲-۱
۲۱	ماتریس وقوع و ماتریس مجاورت	۳-۱
۲۲	زیرگرافها	۴-۱
۲۴	درجه رأسها	۵-۱
۲۶	مسیرها و همبندی	۶-۱
۲۹	دورها	۷-۱
	کاربردها	
۳۱	مسأله کوتاهاترین مسیر	۸-۱
۳۸	لم اشپرنر	۹-۱

## فصل ۲ درختها

۴۳	درختها	۱-۲
۴۶	یالهای برشی و باندها	۲-۲
۵۰	رأسهای برشی	۳-۲
۵۲	فرمول کیلی	۴-۲
	کاربردها	
۵۶	مسأله ارتباط دهی	۵-۲

## فصل ۳ همبندی

۶۵	همبندی	۱-۳
۶۸	بلوکها	۲-۳
	کاربردها	
۷۲	ساخت شبکههای ارتباطی قابل اعتماد	۳-۳

## فصل ۴ تورهای اویلری و دورهای همیلتنی

۷۷	تورهای اویلری	۱-۴
۷۹	دورهای همیلتنی	۲-۴
	کاربردها	
۹۰	مسأله پستچی چینی	۳-۴
۹۴	مسأله فروشنده دورهگرد	۴-۴

## فصل ۵ تطابق‌ها

۹۹	تطابق‌ها	۱-۵
۱۰۲	تطابق‌ها و پوشش‌ها در گراف‌های دوبخشی	۲-۵
۱۰۷	تطابق کامل	۳-۵
	کاربردها	
۱۱۲	مسئله تخصیص شغل	۴-۵
۱۱۸	مسئله تخصیص بهینه	۵-۵

## فصل ۶ رنگ‌آمیزی یالی

۱۲۵	عدد رنگی یالی	۱-۶
۱۲۸	قضیه ویزینگ	۲-۶
	کاربردها	
۱۳۲	مسئله زمان‌بندی	۳-۶

## فصل ۷ مجموعه‌های مستقل و خوشه‌ها

۱۳۹	مجموعه‌های مستقل	۱-۷
۱۴۲	قضیه رمزی	۲-۷
۱۴۹	قضیه توران	۳-۷
	کاربردها	
۱۵۲	قضیه شور	۴-۷
۱۵۴	یک مسئله هندسی	۵-۷

## فصل ۸ رنگ‌آمیزی رأسی

۱۵۹	عدد رنگی	۱-۸
۱۶۵	قضیه بروکس	۲-۸
۱۶۶	حدس هایوش	۳-۸
۱۶۹	چند جمله‌ای‌های رنگی	۴-۸
۱۷۴	کمر و عدد رنگی	۵-۸
	کاربردها	
۱۷۷	یک مسئله ذخیره‌سازی	۶-۸

## فصل ۹ گراف‌های مسطح

۱۸۱	گراف‌های مسطح و مسطح‌شده	۱-۹
۱۸۶	گراف‌های دوگان	۲-۹
۱۹۱	فرمول اویلر	۳-۹
۱۹۴	پل‌ها	۴-۹
۲۰۰	قضیه کوراتوفسکی	۵-۹
۲۰۶	قضیه پنج رنگ و حدس چهاررنگ	۶-۹



۲۱۱	گراف‌های مسطح ناهمبالتنی.....	۷-۹
	کاربردها	
۲۱۵	الگوریتمی برای تعیین مسطح بودن گراف‌ها.....	۸-۹

## فصل ۱۰ گراف‌های جهت‌دار

۲۲۳	گراف‌های جهت‌دار.....	۱-۱۰
۲۲۷	مسیرهای جهت‌دار.....	۲-۱۰
۲۳۰	دوره‌های جهت‌دار.....	۳-۱۰
	کاربردها	
	مسألهٔ دنبالهٔ کارها	۴-۱۰
۲۳۷	طراحی یک استوانه کامپیوتری کارآمد.....	۵-۱۰
۲۴۰	یک طرفه کردن جاده‌ها.....	۶-۱۰
۲۴۲	رتبه‌بندی شرکت کنندگان در یک تورنمنت.....	۷-۱۰

## فصل ۱۱ شبکه‌ها

۲۴۹	شاره‌ها.....	۱-۱۱
۲۵۳	برش‌ها.....	۲-۱۱
۲۵۶	قضیهٔ شارۀ ماکزیمم-برش مینیمم.....	۳-۱۱
	کاربردها	
۲۶۴	قضیه‌های منجر.....	۴-۱۱
۲۶۸	شاره‌های امکان پذیر.....	۵-۱۱

## فصل ۱۲ فضای دورها و فضای باندها

۲۷۷	گردش‌ها و اختلاف پتانسیل‌ها.....	۱-۱۲
۲۸۴	تعداد درخت‌های فراگیر.....	۲-۱۲
	کاربردها	
۲۸۷	مربع‌های تام.....	۳-۱۲

۲۹۵	راهنمایی تمرین‌های ستاره‌دار.....	پیوست اوّل
۳۰۲	چهار گراف و جدولی از ویژگی‌های آن‌ها.....	پیوست دوّم
۳۰۴	گراف‌های جالب توجه.....	پیوست سوّم
۳۱۷	مسائل حل نشده.....	پیوست چهارم
۳۲۹	پیشنهاداتی برای مطالعه بیشتر.....	پیوست پنجم

۳۳۱	مجموعهٔ نمادها.....	
۳۳۵	واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی.....	
۳۴۷	واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی.....	
۳۶۷	فهرست راهنما.....	

# فصل ۱

## گراف‌ها و زیرگراف‌ها

### ۱-۱ گراف‌ها و گراف‌های ساده

در دنیای اطراف ما، وضعیت‌های فراوانی وجود دارند که می‌توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه نقاط، به علاوه خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می‌کنند، به توصیف آن‌ها پرداخت. به عنوان مثال، برای نشان دادن رابطه دوستی بین یک دسته از انسان‌ها می‌توانیم هر شخص را با یک نقطه مشخص کنیم و نقاط متناظر با هر دو دوست را با یک خط به یکدیگر وصل نماییم، یا در جای دیگر ممکن است برای نشان دادن یک شبکه ارتباطی، از نموداری استفاده کنیم که در آن، نقاط نمایانگر مراکز ارتباطی و خطوط، نشان‌دهنده پیوندهای ارتباطی بین مراکز باشند. توجه داشته باشید که در این‌گونه نمودارها، آن‌چه بیشتر مورد توجه است این است که آیا دو نقطه داده شده، به وسیله یک خط به یکدیگر متصل هستند یا نه و طریقه اتصال آن‌ها اهمیتی ندارد. تجرید ریاضی این وضعیت‌ها به مفهوم گراف منتهی می‌شود.

گراف  $G$ ، یک سه تایی مرتب  $(V(G), E(G), \psi_G)$  است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی  $V(G)$  از رأس‌ها، یک مجموعه  $E(G)$  - مجزای از  $V(G)$  - از یال‌ها و یک تابع وقوع  $\psi_G$  که به هر یال  $G$ ، یک زوج نامرتب از رأس‌های  $G$  را - که الزاماً متمایز نیستند - نسبت می‌دهد. اگر  $e$  یک یال و  $u$  و  $v$  دو رأس باشند به طوری که  $\psi_G(e) = uv$ ، در این صورت گفته می‌شود که  $e$ ، رأس‌های  $u$  و  $v$  را به یکدیگر وصل کرده است و رأس‌های  $u$  و  $v$ ، دو سر یال  $e$  نامیده می‌شوند.

دو مثال از گراف‌ها می‌توانند در روشن شدن تعاریف فوق به ما کمک کنند.

مثال ۱:

$$G = (V(G), E(G), \psi_G)$$

که در آن:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

و  $\psi_G$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\psi_G(e_1) = v_1v_2, \psi_G(e_2) = v_2v_3, \psi_G(e_3) = v_3v_4, \psi_G(e_4) = v_4v_1$$

$$\psi_G(e_5) = v_1v_4, \psi_G(e_6) = v_2v_5, \psi_G(e_7) = v_3v_5, \psi_G(e_8) = v_4v_5$$

$$H = (V(H), E(H), \psi_H)$$

مثال ۲:

که در آن:

$$V(H) = \{u, v, w, x, y\}$$

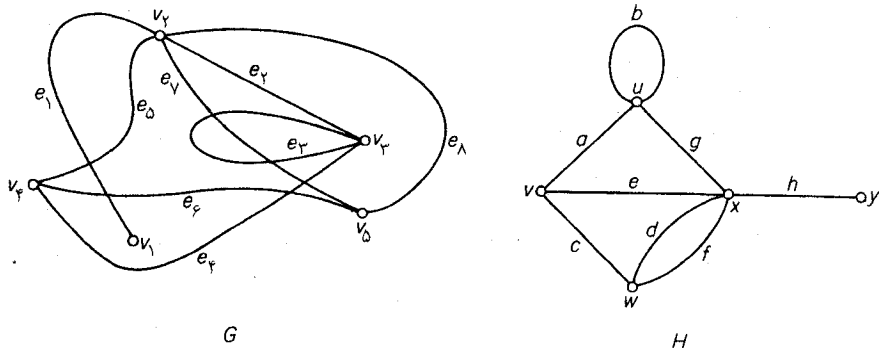
$$E(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

و  $\psi_H$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\psi_H(a) = uv, \psi_H(b) = uu, \psi_H(c) = vw, \psi_H(d) = wx$$

$$\psi_H(e) = vx, \psi_H(f) = wx, \psi_H(g) = ux, \psi_H(h) = xy$$

دلیل نامگذاری گراف‌ها بدین نام، این است که می‌توان آن‌ها را به صورت گرافیکی نمایش داد و همین نمایش گرافیکی است که ما را در درک بسیاری از خواص گراف‌ها یاری می‌کند. در این گونه نمایش گرافیکی، هر رأس با یک نقطه و هر یال با یک خط، که نقاط نمایانگر دو سر خود را به یکدیگر وصل می‌کند، نمایش داده می‌شود.\* نمودار گراف‌های  $G$  و  $H$  در شکل ۱-۱ نشان داده شده‌اند.

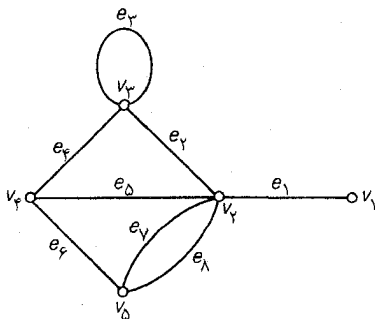


شکل ۱-۱. نمودار گراف‌های  $G$  و  $H$

\* به هنگام رسم نمودار، باید توجه داشته باشیم که هیچ خطی خودش را قطع نکند و همچنین خط مربوط به یک یال نباید از روی نقطه‌ای که نمایانگر یک رأس است، ولی مربوط به رأس‌های دو سر آن یال نیست، عبور کند. -مسلماً چنین کاری همیشه امکان‌پذیر است.

برای رسم یک گراف، روش یکتایی وجود ندارد، بدین دلیل که موقعیت نسبی نقاط و خطوط که به ترتیب نمایانگر رأس‌ها و یال‌های گراف هستند، برای ما اهمیتی ندارد. به عنوان مثال، نمودار دیگری از گراف  $G$  در

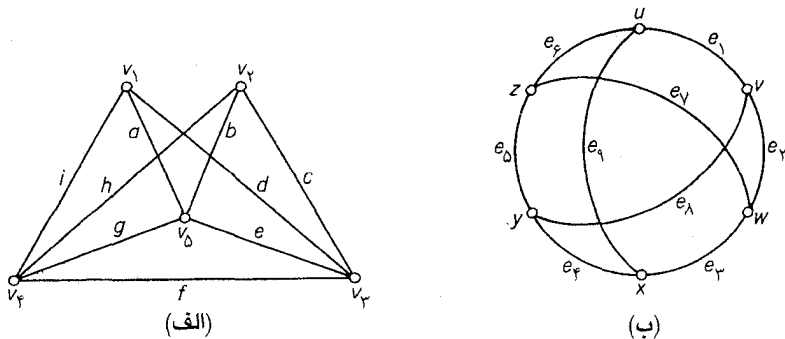
شکل ۲-۱ آمده است.



شکل ۲-۱. نمودار دیگری از  $G$

نمودار یک گراف، فقط رابطه وقوعی را که بین رأس‌ها و یال‌ها برقرار است، نشان می‌دهد. با این حال در غالب اوقات، نموداری از یک گراف را رسم کرده، به جای خود گراف، به نمودار آن اشاره می‌کنیم. به همین منوال نقطه‌های آن را «رأس» و خطوط آن را «یال» می‌نامیم.

توجه داشته باشید که در نمودار یک گراف، ممکن است دو یال، یکدیگر را در نقطه‌ای که یک رأس نیست، قطع کنند مانند  $e_1$  و  $e_6$  در گراف  $G$  شکل ۱-۱. اگر یک گراف، نموداری داشته باشد که در آن، یال‌ها تنها در رأس‌های دو سر خود متقاطع باشند، مسطح نامیده می‌شود، چون می‌توان به سادگی این گونه گراف‌ها را روی یک صفحه مسطح رسم کرد. گراف شکل ۳-۱ الف مسطح است، گرچه این مطلب از روی نمایش خاص نشان داده شده در شکل، چندان مشخص نیست. (تمرین ۱-۱-۲ را ملاحظه نمایید). در عوض گراف شکل ۳-۱ ب نامسطح است (این مطلب در فصل ۹ اثبات خواهد شد).



شکل ۳-۱. گراف‌های مسطح و نامسطح

بسیاری از تعاریف و مفاهیم نظریهٔ گراف‌ها، به وسیلهٔ همین نمایش گرافیکی بنا نهاده شده‌اند. به‌طور مثال می‌گوییم که یک یال، بر روی دو سر خود واقع است و برعکس، دو سر یک یال، بر روی آن یال واقعند. دو رأس که بر روی یال مشترکی واقعند، مجاور نامیده می‌شوند. به همین ترتیب دو یال واقع بر روی یک رأس مشترک نیز مجاورند. یک یال با دو سر یکسان، طوقه و یک یال با دو سر متمایز، یال پیوندی نامیده می‌شود. به‌طور مثال یال  $e_3$  از  $G$  (شکل ۲-۱) یک طوقه است و سایر یال‌های  $G$ ، یال پیوندی می‌باشند.

اگر مجموعهٔ رأس‌ها و مجموعهٔ یال‌های یک گراف، متناهی باشند، گراف مزبور را متناهی می‌نامند. در این کتاب فقط گراف‌های متناهی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. از این رو لفظ «گراف» را همیشه به معنی «گراف متناهی» به کار می‌بریم. گرافی را که یک رأس داشته باشد، بدیهی و سایر گراف‌ها را غیربدیهی می‌نامیم.

یک گراف، ساده است، اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال نباشد. گراف شکل ۱-۱ ساده نیست در صورتی که گراف‌های شکل ۳-۱ ساده‌اند. قسمت اعظم نظریهٔ گراف‌ها، بر روی مطالعهٔ گراف‌های ساده متمرکز است.

نمادهای  $\nu(G)$  و  $\varepsilon(G)$  را به ترتیب برای نشان دادن تعداد رأس‌ها و تعداد یال‌های گراف  $G$  به کار می‌بریم. در طی این کتاب، همیشه حرف  $G$  نشان‌دهندهٔ یک گراف است. همچنین زمانی که فقط یک گراف مورد بحث است، معمولاً این گراف را با  $G$  نشان می‌دهیم، سپس حرف  $G$  را از نمادهای مربوط به آن حذف می‌کنیم. به‌عنوان مثال به جای  $\nu(G)$ ،  $\varepsilon(G)$ ،  $V$ ،  $E$ ،  $\nu$  و  $\varepsilon$ .

## تمرین‌ها

- ۱-۱-۱ پنج وضعیت از زندگی روزمره را نام ببرید که در آن‌ها به‌طور طبیعی با گراف‌ها مواجه هستیم.
- ۲-۱-۱ نمودار متفاوتی از گراف شکل ۳-۱ الف رسم کنید که نشان دهد این گراف مسطح است.
- ۳-۱-۱ نشان دهید اگر  $G$  ساده باشد، در این صورت  $\nu \leq \varepsilon$ .

## ۲-۱ یکریختی گراف‌ها

دو گراف  $G$  و  $H$  همسان‌اند (و نوشته می‌شود  $G = H$ )، اگر  $E(G) = E(H)$ ،  $V(G) = V(H)$  و

$\psi_G = \psi_H$ . مسلماً اگر دو گراف همسان باشند، می‌توان آن‌ها را با نمودارهای یکسانی نمایش داد. به هر حال این امکان نیز وجود دارد که دو گراف ناهمسان، نمودارهای یکسانی داشته باشند. به طور مثال نمودار  $G$  در شکل ۱-۲ و  $H$  در شکل ۱-۱، دقیقاً یکسان به نظر می‌رسند، با این تفاوت که رأس‌ها و یال‌ها، برجسب‌های متفاوتی دارند. در حقیقت گراف‌های  $G$  و  $H$  همسان نیستند ولی یکرخیختند. در حالت کلی دو گراف  $G$  و  $H$ ، یکرخیخت نامیده می‌شوند (و نوشته می‌شود  $G \cong H$ )، اگر نگاشت‌های دوسویی  $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$  و  $\phi: E(G) \rightarrow E(H)$  وجود داشته باشند، به طوری که داشته باشیم:  $\psi_G(e) = uv$ ، اگر و تنها اگر  $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ . این زوج  $(\theta, \phi)$  از نگاشت‌ها، یک یکرخیختی بین  $G$  و  $H$  نامیده می‌شود.

برای اینکه نشان دهیم دو گراف یکرخیختند، باید یک یکرخیختی بین آن‌ها مشخص نماییم. زوج نگاشت  $(\theta, \phi)$  که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\theta(v_1) = y, \theta(v_2) = x, \theta(v_3) = u, \theta(v_4) = v, \theta(v_5) = w$$

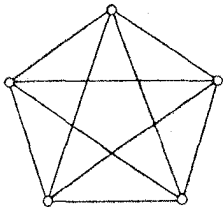
$$\phi(e_1) = h, \phi(e_2) = g, \phi(e_3) = b, \phi(e_4) = a$$

$$\phi(e_5) = e, \phi(e_6) = c, \phi(e_7) = d, \phi(e_8) = f$$

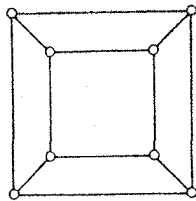
یک یکرخیختی بین  $G$  و  $H$  از مثال‌های ۱ و ۲ می‌باشد. روشن است که  $G$  و  $H$  ساختارهای یکسانی دارند و فقط در نام رأس‌ها و یال‌ها متفاوتند. چون توجه ما اساساً به خواص ساختاری گراف‌ها معطوف است، اغلب هنگام رسم گراف‌ها، برجسب‌ها را حذف می‌کنیم. یک گراف بدون برجسب می‌تواند به عنوان نماینده‌ای از یک کلاس هم‌ارزی گراف‌های یکرخیخت در نظر گرفته شود. اصولاً برجسب‌ها را فقط به منظور اشاره به رأس‌ها و یال‌ها، به آن‌ها نسبت می‌دهیم. به عنوان مثال هنگامی که با گراف‌های ساده سروکار داریم، اغلب مناسب‌تر است که به یک یال، با دو سر  $u$  و  $v$ ، به عنوان «یال  $uv$ » اشاره نمائیم. (این قرارداد موجب هیچگونه ابهامی نخواهد شد، زیرا در گراف‌های ساده، هر دو رأس حداکثر توسط یک یال به یکدیگر متصل شده‌اند.

این بخش را با معرفی چند رده‌ خاص از گراف‌ها به پایان می‌بریم. گراف ساده‌ای که در آن هر دو رأس متمایز، با یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن یکرخیختی، فقط یک گراف کامل با  $n$  رأس می‌تواند وجود داشته باشد که آن را با  $K_n$  نمایش می‌دهیم. ترسیمی از  $K_5$  در شکل

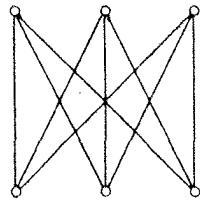
۴-۱ الف نشان داده شده است. از طرف دیگر گراف تهی، گرافی است که هیچ یالی نداشته باشد. گراف دوبخشی، گرافی است که می‌توان مجموعهٔ رأس‌های آن را به دو زیرمجموعهٔ  $X$  و  $Y$  چنان افراز کرد که یک سر تمام یال‌های آن در  $X$  و سر دیگر آن‌ها در  $Y$  باشد. گراف دوبخشی کامل، یک گراف دوبخشی با بخش‌های  $X$  و  $Y$  است که در آن هر رأس  $X$ ، به هر رأس  $Y$  وصل شده باشد. اگر  $|X|=m$  و  $|Y|=n$ ، گراف دوبخشی کامل را با  $K_{m,n}$  نمایش می‌دهیم. گراف متناظر با مکعب که در شکل ۴-۱ ب نشان داده شده است، یک گراف دوبخشی است. گراف شکل ۴-۱ ج نیز گراف دوبخشی کامل  $K_{3,3}$  می‌باشد. گراف‌های بسیار دیگری نیز وجود دارند که هریک از لحاظ خاصی مورد توجه‌اند. پیوست سوم، شامل گزیده‌ای از این‌گونه گراف‌هاست.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴-۱. (الف)  $K_5$  (ب) مکعب (ج)  $K_{3,3}$ 

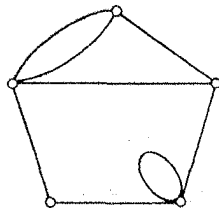
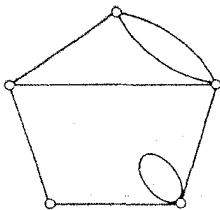
### تمرین‌ها

۱-۲-۱ یک یکرختی بین گراف‌های  $G$  و  $H$  از مثال‌های ۱ و ۲، متفاوت با آنچه داده شده است پیدا کنید.

۲-۲-۱ الف) نشان دهید اگر  $G \cong H$ ، در این صورت  $v(G)=v(H)$  و  $\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$ .

ب) با ذکر یک مثال نشان دهید که عکس گزاره فوق درست نیست.

۳-۲-۱ نشان دهید که دو گراف زیر یکرخت نیستند.



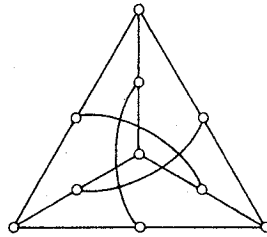
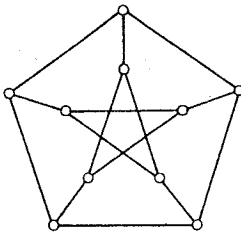
۴-۲-۱ نشان دهید که یازده گراف ساده چهار رأسی غیر یکرخت وجود دارد.

۵-۲-۱ نشان دهید دو گراف ساده  $G$  و  $H$  یکرختند، اگر و تنها اگر یک نگاشت دوسویی

$\theta: V(G) \rightarrow V(H)$  وجود داشته باشد، به طوری که داشته باشیم:  $uv \in E(G)$  اگر و تنها اگر

$$\theta(u)\theta(v) \in E(H)$$

۶-۲-۱ نشان دهید که دو گراف زیر یکرختند.



۷-۲-۱ فرض کنید  $G$  یک گراف ساده باشد. نشان دهید  $\varepsilon = \binom{v}{2}$ ، اگر و تنها اگر  $G$  کامل باشد.

۸-۲-۱ نشان دهید:

$$\varepsilon(K_{m,n}) = mn \quad (\text{الف})$$

(ب) اگر  $G$  ساده و دوبخشی باشد، آنگاه  $\varepsilon \leq \frac{v^2}{4}$ .

۹-۲-۱ گراف  $k$ -بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه رأس‌های آن را به  $k$  زیرمجموعه، طوری افزایش

کرد که دوسر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد. گراف  $k$ -بخشی کامل، یک گراف ساده  $k$

-بخشی است که در آن، هر رأس به تمام رأس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیریکسان با آن قرار

دارند، وصل شده است. گراف  $m$ -بخشی کامل با  $n$  رأس، که در آن هر بخش  $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$  یا  $\lceil \frac{n}{m} \rceil$

رأس داشته باشد، با  $T_{m,n}$  نمایش داده می‌شود. نشان دهید:

$$\varepsilon(T_{m,n}) = \binom{n-k}{2} + (m-1) \binom{k+1}{2} \quad (\text{الف})$$

که در آن  $k = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ .

(ب) اگر  $G$  یک گراف  $m$ -بخشی کامل با  $n$  رأس باشد، آنگاه  $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(T_{m,n})$  و تساوی

هنگامی برقرار است که  $G \cong T_{m,n}$ .

۱۰-۲-۱  $k$ -مکعب، گرافی است که رأس‌های آن  $k$ -تایی‌های مرتبی از  $0$  و  $1$  هستند و در آن دو رأس به

یکدیگر متصلند، اگر و تنها اگر دقیقاً در یک مؤلفه با یکدیگر تفاوت داشته باشند. (گراف شکل

۱-۴، یک ۳-مکعب است). نشان دهید که  $k$ -مکعب،  $2^k$  رأس و  $k \cdot 2^{k-1}$  یال دارد و همچنین



دوبخشی است.

۱۱-۲-۱ الف) مکمل گراف ساده  $G$ ، که آن را با  $G^c$  نمایش می‌دهیم، گراف ساده‌ای است با مجموعه رأس‌های  $V$ ، که در آن دو رأس مجاورند، اگر و تنها اگر آن رأس‌ها در  $G$  مجاور نباشند. گراف‌های  $K_n^c$  و  $K_{m,n}^c$  را توصیف نمایید.

ب) گراف ساده  $G$ ، که در شرط  $G \cong G^c$  صدق می‌کند، خود مکمل نامیده می‌شود. نشان دهید اگر  $G$  خود مکمل باشد، در این صورت  $1 \equiv 0$  و  $2 \equiv 4$  (به پیمانه ۴).

۱۲-۲-۱ خودریختی، یک یکرختی از گراف بر روی خودش می‌باشد.

الف) با استفاده از تمرین ۱-۲-۵ نشان دهید که یک خودریختی از گراف ساده  $G$  را می‌توان به عنوان یک جایگشت از  $V$  در نظر گرفت، به طوری که مجاورت‌ها را حفظ کند و مجموعهٔ چنین جایگشت‌هایی، تحت عمل ترکیب معمولی یک گروه  $\Gamma(G)$  که گروه خودریختی  $G$  نامیده می‌شود، تشکیل دهد.

ب)  $\Gamma(K_n)$  و  $\Gamma(K_{m,n})$  را بیابید.

ج) یک گراف سادهٔ غیربدیهی پیدا کنید که گروه خودریختی آن همانی باشد.

د) نشان دهید که برای هرگراف ساده  $G$ ، رابطهٔ  $\Gamma(G) = \Gamma(G^c)$  برقرار است.

ه) گروه جایگشت‌های  $\Lambda$  را با عناصر  $(1)(2)(3)$ ،  $(1, 2, 3)$  و  $(1, 3, 2)$  در نظر بگیرید. نشان دهید هیچ گراف ساده‌ای با مجموعه رأس‌های  $\{1, 2, 3\}$  وجود ندارد، به طوری که  $\Gamma(G) = \Lambda$ .

و) یک گراف ساده  $G$  پیدا کنید به طوری که  $\Gamma(G) \cong \Lambda$  باشد. (فراکت<sup>۱</sup> در سال ۱۹۳۹ نشان داد که هر گروه مجرد، با گروه خودریختی یک گراف، یکرخت است.)

۱۳-۲-۱ گراف ساده  $G$ ، رأس-ترایا است، اگر برای هر دو رأس  $u$  و  $v$ ، عنصری مانند  $g$  از  $\Gamma(G)$  با شرط  $g(u) = v$  وجود داشته باشد، همچنین  $G$  یال-ترایا نامیده می‌شود اگر برای هر دو یال  $u_1v_1$  و  $u_2v_2$ ، عنصری مانند  $h$  از  $\Gamma(G)$  با شرط  $h(\{u_1, v_1\}) = \{u_2, v_2\}$  موجود باشد.

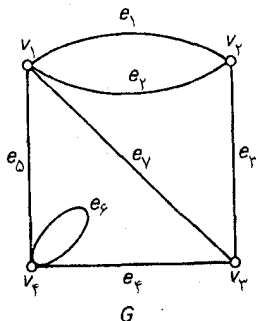
الف) گرافی پیدا کنید که رأس-ترایا باشد ولی یال-ترایا نباشد.

ب) گرافی پیدا کنید که یال-ترایا باشد ولی رأس-ترایا نباشد.

## ۳-۱ ماتریس وقوع و ماتریس مجاورت

متناظر با هر گراف  $G$ ، یک ماتریس  $v \times e$  وجود دارد که ماتریس وقوع  $G$  نامیده می‌شود. اگر رأس‌های  $G$  را با  $v_1, v_2, \dots, v_n$  و یال‌های آن را با  $e_1, e_2, \dots, e_m$  نمایش دهیم، آنگاه ماتریس وقوع  $G$ ، ماتریسی مانند  $\mathbf{M}(G) = [m_{ij}]$  است که در آن  $m_{ij}$  برابر با تعداد دفعاتی است که  $(v_i, e_j)$  (یا  $(e_j, v_i)$ ) واقع شده است. در حقیقت ماتریس وقوع یک گراف، طریقه دیگری برای معین نمودن آن گراف است.

راه دیگر معین نمودن یک گراف، استفاده از ماتریس مجاورت آن است که ماتریسی است  $v \times v$  مانند  $\mathbf{A}(G) = [a_{ij}]$  و در آن  $a_{ij}$  برابر تعداد یال‌هایی است که  $v_i$  را به  $v_j$  وصل می‌کند. یک گراف به همراه ماتریس وقوع و ماتریس مجاورت آن در شکل ۵-۱ نشان داده شده است.



	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$v_1$	1	1	0	0	1	0	1
$v_2$	1	1	1	0	0	0	0
$v_3$	0	0	1	1	0	0	1
$v_4$	0	0	0	1	1	2	0

 $\mathbf{M}(G)$ 

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$	0	2	1	1
$v_2$	2	0	1	0
$v_3$	1	1	0	1
$v_4$	1	0	1	1

 $\mathbf{A}(G)$ 

شکل ۵-۱

در حالت کلی، ماتریس مجاورت یک گراف، به‌طور قابل ملاحظه‌ای از ماتریس وقوع آن کوچکتر است و روی همین اصل برای نگهداری و پردازش یک گراف در کامپیوتر، معمولاً از ماتریس مجاورت آن استفاده می‌شود.

## تمرین‌ها

۱-۳-۱ فرض کنید  $\mathbf{M}$ ، ماتریس وقوع و  $\mathbf{A}$ ، ماتریس مجاورت گراف  $G$  باشد.

(الف) نشان دهید مجموع هر ستون  $\mathbf{M}$  برابر با ۲ است.

(ب) مجموع هر ستون  $\mathbf{A}$  برابر چند است؟

۲-۳-۱ فرض کنید  $G$  دوبخشی است. نشان دهید رأس‌های  $G$  را می‌توان طوری شماره‌گذاری کرد که ماتریس مجاورت آن دارای شکل زیر باشد.

$$\begin{bmatrix} \circ & A_{12} \\ A_{21} & \circ \end{bmatrix}$$

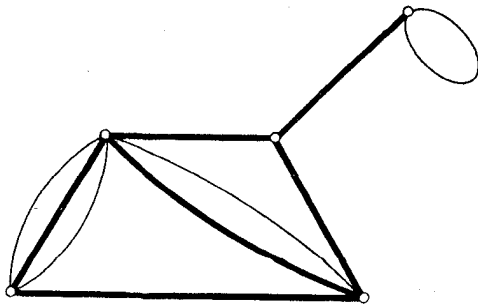
که در آن  $A_{21}$ ، ترانزپوز  $A_{12}$  است.

۳-۳-۱\* نشان دهید اگر  $G$  ساده بوده و مقادیر ویژه  $A$  متمایز باشند، در این صورت گروه خودریختی  $G$  اَبَلی است.

## ۴-۱ زیرگراف‌ها

می‌گوئیم گراف  $H$ ، زیرگراف  $G$  است (نوشته می‌شود  $H \subseteq G$ )، اگر  $E(H) \subseteq E(G)$ ،  $V(H) \subseteq V(G)$  و  $\psi_H$  از محدود کردن  $\psi_G$  به  $E(H)$  حاصل شده باشد. اگر  $H \subseteq G$ ، ولی داشته باشیم  $H \neq G$ ، می‌نویسیم  $H \subset G$  و می‌گوئیم  $H$  یک زیرگراف سره از  $G$  است. اگر  $H$  یک زیرگراف  $G$  باشد، در آن صورت  $G$  را یک زیرگراف  $H$  می‌نامیم. در صورتی که زیرگراف (یا زیرگراف)  $H$  از  $G$  در شرط  $V(H) = V(G)$  صدق کند، آن را یک زیرگراف فراگیر (یا زیرگراف فراگیر) از  $G$  خواهیم نامید.

اگر در یک گراف ساده، تمام طوقه‌ها را حذف کنیم و همچنین از بین هر دو رأس مجاور، تمام یال‌های پیوندی به جز یکی را حذف نماییم، به زیرگراف فراگیر ساده‌ای از  $G$  می‌رسیم که گراف سادهٔ زمینهٔ  $G$  نامیده می‌شود. شکل ۶-۱، یک گراف به همراه گراف سادهٔ زمینهٔ آن را نشان می‌دهد.



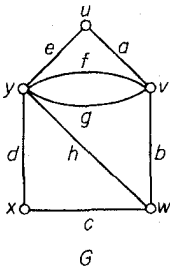
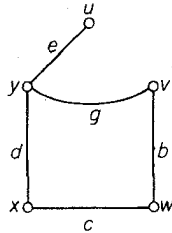
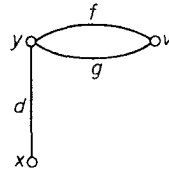
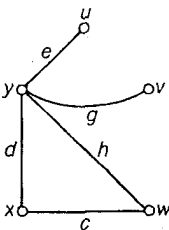
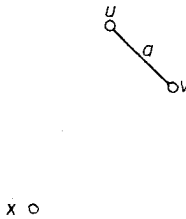
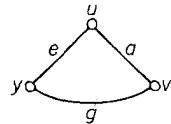
شکل ۶-۱. یک گراف به همراه گراف سادهٔ زمینهٔ آن

فرض کنید  $V'$ ، یک زیرمجموعهٔ ناتهی از  $V$  باشد. زیرگرافی از  $G$  که مجموعهٔ رأس‌های آن  $V'$  و مجموعهٔ یال‌هایش برابر مجموعهٔ یال‌هایی از  $G$  باشد که هر دو سر آن‌ها در  $V'$  واقع است، زیرگراف

القاء شده توسط  $V'$  نامیده شده، با  $G[V']$  نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوئیم  $G[V']$  یک زیرگراف القایی  $G$  می‌باشد. زیرگراف القایی  $G[VV']$  که با  $G-V'$  نمایش داده می‌شود، زیرگرافی است که با حذف رأس‌های  $V'$  و یال‌های واقع بر آن‌ها، از  $G$  به دست می‌آید. اگر  $V' = \{v\}$ ، به جای  $G - \{v\}$  می‌نویسیم  $G-v$ .

فرض کنید که  $E'$  یک زیرمجموعهٔ ناتهی از  $E$  باشد. زیرگرافی از  $G$  که مجموعه رأس‌های آن، برابر مجموعه رأس‌های دو سر یال‌های  $E'$  و مجموعهٔ یال‌هایش برابر  $E'$  باشد، زیرگراف القاء شده توسط  $E'$  نامیده شده، با  $G[E']$  نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوئیم  $G[E']$ ، یک زیرگراف القایی یالی  $G$  می‌باشد. زیرگراف فراگیری از  $G$  که مجموعهٔ یال‌های آن  $E|E'$  باشد، به طور ساده به صورت  $G-E'$  نوشته می‌شود و می‌توان آن را با حذف یال‌های  $E'$  از  $G$  به دست آورد. به طور مشابه گرافی که با افزودن مجموعهٔ یال‌های  $E'$  به  $G$  به دست می‌آید، با  $G+E'$  نمایش داده می‌شود. اگر  $E' = \{e\}$ ، به جای  $G - \{e\}$  و  $G + \{e\}$  می‌نویسیم  $G-e$  و  $G+e$ .

انواع مختلف زیرگراف‌ها در شکل ۷-۱ نشان داده شده‌اند.

 $G$ یک زیرگراف فراگیر از  $G$  $G - \{u, w\}$  $G - \{a, b, f\}$ زیرگراف القایی  
 $G[\{u, v, x\}]$ زیرگراف القایی یالی  
 $G[\{a, c, e, g\}]$

فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  زیرگراف‌هایی از  $G$  باشند. می‌گوئیم  $G_1$  و  $G_2$  مجزا هستند، اگر هیچ رأس مشترکی نداشته باشند و آن‌ها را یال-مجزا می‌نامیم، اگر هیچ یال مشترکی نداشته باشند.  $G_1 U G_2$  (اجتماع  $G_1$  و  $G_2$ ) زیرگرافی است با مجموعه رأس‌های  $V(G_1) \cup V(G_2)$  و مجموعهٔ یال‌های  $E(G_1) \cup E(G_2)$ . اگر  $G_1$  و  $G_2$  مجزا باشند، گاهی اوقات اجتماع آن‌ها را به صورت  $G_1 + G_2$  نمایش می‌دهیم.  $G_1 \cap G_2$  (اشتراک  $G_1$  و  $G_2$ ) نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود ولی در این حالت  $G_1$  و  $G_2$  باید حداقل دارای یک رأس مشترک باشند.

### تمرین‌ها

۱-۴-۱ نشان دهید که هر گراف سادهٔ  $n$  رأسی، با زیرگرافی از  $K_n$  یکرिخت است.

۲-۴-۱ نشان دهید:

(الف) هر زیرگراف القایی از گراف کامل، خود نیز کامل است.

(ب) هر زیرگراف از یک گراف دوبخشی، خود نیز دوبخشی است.

۳-۴-۱ توضیح دهید چگونه می‌توان  $M(G-E')$  و  $M(G-V')$  را از  $M(G)$  به‌دست آورد؟ همچنین

طریقهٔ به‌دست آوردن  $A(G-V')$  از  $A(G)$  را توضیح دهید.

۴-۴-۱ یک گراف دوبخشی پیدا کنید که با هیچ زیرگرافی از  $k$ -مکعب‌ها یکرिخت نباشد.

۵-۴-۱\* فرض کنید  $G$  یک گراف ساده و  $n$ ، عددی صحیح با شرط  $1 < n < v-1$  باشد. نشان دهید اگر

$v \geq 4$  و تمام زیرگراف‌های القایی  $G$  با  $n$  رأس، تعداد یال‌های یکسانی داشته باشند، آنگاه

$$G \cong K_n^c \text{ یا } G \cong K_n.$$

### ۵-۱ درجهٔ رأس‌ها

درجهٔ رأس  $v$  در گراف  $G$ ،  $d_G(v)$ ، برابر تعداد یال‌های واقع بر  $v$  می‌باشد. در این تعریف، هر طوقه

به‌عنوان دو یال شمرده می‌شود.

کمترین و بیشترین درجهٔ رأس‌های  $G$  را به ترتیب با  $\delta(G)$  و  $\Delta(G)$  نمایش می‌دهیم.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon \quad \text{قضیهٔ ۱-۱}$$

**اثبات** ماتریس وقوع  $M$  را در نظر بگیرید. مجموع درایه‌های سطر متناظر با رأس  $v$  دقیقاً برابر  $d(v)$  است و بنابراین  $\sum_{v \in V} d(v)$  برابر مجموع تمام درایه‌های  $M$  می‌باشد که این جمع برابر  $2\varepsilon$  است زیرا (طبق تمرین ۱-۳-۱ الف) مجموع هر یک از  $\varepsilon$  ستون  $M$  برابر ۲ می‌باشد. □

**نتیجه ۱-۱** در هر گراف، تعداد رأس‌های فرد\*، زوج است.

**اثبات** فرض کنید  $V_1$  و  $V_2$  به ترتیب مجموعه رأس‌های فرد و زوج در  $G$  باشند در این صورت عبارت

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$$

طبق قضیه ۱-۱، زوج است. از آن جایی که  $\sum_{v \in V_2} d(v)$  زوج است، بنابراین  $\sum_{v \in V_1} d(v)$  نیز باید زوج باشد و در نتیجه  $|V_1|$  زوج است. □

می‌گوییم گراف  $G$ ،  $k$ -منتظم است اگر درجه تمام رأس‌های آن برابر  $k$  باشد. گراف منتظم، گرافی است که به ازای یک مقدار  $k$ ،  $k$ -منتظم باشد. گراف‌های کامل، گراف‌های دوبخشی کامل  $K_{n,n}$  و همچنین  $k$ -مکعب‌ها منتظم هستند.

### تمرین‌ها

- ۱-۵-۱ نشان دهید  $\delta \leq \frac{2\varepsilon}{v} \leq \Delta$ .
- ۲-۵-۱ نشان دهید اگر  $G$  ساده باشد، درایه‌های واقع بر قطر ماتریس‌های  $MM'$  و  $A^2$  برابر درجه رأس‌های  $G$  می‌باشد.
- ۳-۵-۱ نشان دهید اگر  $G$  یک گراف دوبخشی  $k$ -منتظم با بخش‌های  $X$  و  $Y$  باشد، آنگاه  $|X| = |Y|$ .
- ۴-۵-۱ نشان دهید در هر جمع دو یا چندنفره، همیشه دو نفر وجود دارند که تعداد دوستانشان در این جمع برابر است.
- ۵-۵-۱ اگر  $G$  شامل رأس‌های  $v_1, v_2, \dots, v_r$  و  $v_r$  باشد، دنباله  $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_r))$  دنباله درجه‌های  $G$  نامیده می‌شود. نشان دهید دنباله  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  از اعداد صحیح نامنفی دنباله درجه‌های یک گراف است اگر و تنها اگر  $\sum_{i=1}^n d_i$  زوج باشد.

\* رأسی که درجه آن فرد باشد، یک رأس فرد می‌نامیم. رأس زوج نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود. م.

۶-۵-۱ دنباله  $\mathbf{d}=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ، گرافی نامیده می‌شود، اگر یک گراف ساده با دنباله درجه‌های  $\mathbf{d}$  وجود داشته باشد. نشان دهید:

الف) دنباله‌های  $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$  و  $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$  گرافی نیستند.

ب) اگر  $\mathbf{d}$  گرافی و  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  باشد، آنگاه  $\sum_{i=1}^n d_i$  زوج بوده و به‌ازای  $1 \leq k \leq n$  داریم:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$$

(اردیش<sup>۱</sup> و گالای<sup>۲</sup> در سال ۱۹۶۰ نشان داده‌اند که این شرط، برای گرافی بودن  $\mathbf{d}$  علاوه بر لازم بودن، کافی نیز هست).

۷-۵-۱ فرض کنید  $\mathbf{d}=(d_1, d_2, \dots, d_n)$  یک دنبالهٔ غیر صعودی از اعداد صحیح نامنفی باشد. دنبالهٔ  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  را با  $\mathbf{d}'$  نمایش می‌دهیم.

الف) \* نشان دهید  $\mathbf{d}$  گرافی است اگر و تنها اگر  $\mathbf{d}'$  گرافی باشد.

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف)، الگوریتمی برای ساختن یک گراف ساده با دنباله درجه‌های  $\mathbf{d}$  (اگر وجود داشته باشد) ارائه دهید. (V. Havel, S. Hakimi)

۸-۵-۱ \* نشان دهید گراف بدون طوقه  $G$  شامل یک زیرگراف فراگیر  $H$  است به‌طوری‌که برای هر  $v \in V$  داریم:

$$d_H(v) \geq \frac{1}{2} d_G(v)$$

۹-۵-۱ \* فرض کنید  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشد، به‌طوری‌که فاصلهٔ بین هر دو نقطه حداقل یک است. نشان دهید حداکثر  $3n$  زوج نقطه، با فاصلهٔ دقیقاً یک وجود دارد.

۱۰-۵-۱ \* گراف یالی گراف  $G$ ، گرافی با مجموعه رأس‌های  $E(G)$  است که در آن دورأس به هم متصلند اگر و تنها اگر آن‌ها، یال‌های مجاوری از  $G$  باشند. اگر  $G$  ساده باشد، نشان دهید که:

الف) گراف یالی گراف  $G$ ،  $\varepsilon(G)$  رأس و  $\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$  یال دارد.

ب) گراف یالی  $K_n$ ، با مکمل گراف نشان داده شده در تمرین ۶-۲-۱ یکریخت است.

## ۶-۱ مسیرها و همبندی

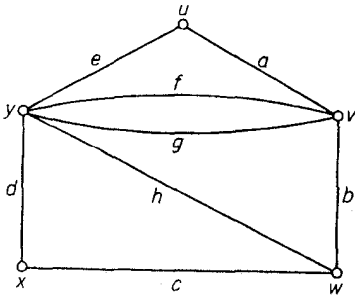
یک گشت از  $G$ ، دنبالهٔ ناصفر متناهی  $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$  است به‌طوری‌که جملات آن

یک درمیان از رأس‌ها و یال‌ها بوده و به ازای  $1 \leq i \leq k$ ،  $v_i$  و  $v_{i-1}$  دو سر  $e_i$  باشند. در این صورت می‌گوییم  $W$ ، یک گشت از  $v$  تا  $v_k$  یا به عبارتی دیگر یک  $(v, v_k)$ -گشت است. رأس‌های  $v$  و  $v_k$  به ترتیب ابتدا و انتهای  $W$  و  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  رأس‌های داخلی آن نامیده می‌شوند. همچنین عدد صحیح  $k$  را طول  $W$  می‌نامیم.

اگر  $W = v.e_1.v_1 \dots e_k.v_k$  و  $W' = v_k.e_{k+1}.v_{k+1} \dots e_l.v_l$  دو گشت باشند، گشت  $v.e_1.v_1 \dots e_k.v_k.v_{k+1} \dots e_l.v_l$  را که از معکوس کردن  $W$  به دست می‌آید، با  $W^{-1}$  نمایش می‌دهیم. همچنین گشت  $W = v.e_1.v_1 \dots e_l.v_l$  را که از به هم پیوستن  $W$  و  $W'$  در رأس  $v_k$  به دست می‌آید با  $WW'$  نمایش می‌دهیم. یک قسمت از گشت  $W = v.e_1.v_1 \dots e_k.v_k$ ، گشتی است مانند  $v_i.e_{i+1}.v_{i+1} \dots e_j.v_j$ ، که زیر دنباله‌ای از جملات متوالی  $W$  می‌باشد و این زیر دنباله را  $(v_i, v_j)$ -قسمت  $W$  می‌نامیم.

در یک گراف ساده، گشت  $v.e_1.v_1 \dots e_k.v_k$  با دنباله رأس‌های  $v, v_1, v_2, \dots, v_k$  معین می‌گردد. بنابراین در یک گراف ساده به سادگی می‌توان یک گشت را با دنباله رأس‌های آن مشخص نمود. گاهی اوقات در گراف‌هایی که ساده نیستند نیز دنباله‌ای از رأس‌ها را که در آن، هر دو رأس متوالی مجاورند، به عنوان یک گشت، قلمداد می‌کنیم. در چنین حالاتی باید توجه داشت که بحث، در مورد تمامی گشت‌هایی که دارای چنین دنباله رأس‌هایی هستند، صادق است.

اگر یال‌های  $e_1, e_2, \dots, e_k$  در گشت  $W$  متمایز باشند،  $W$  یک گذرگاه نامیده می‌شود. در این حالت، طول  $W$  برابر با  $\varepsilon(W)$  می‌باشد. اگر علاوه بر یال‌ها، رأس‌های  $v, v_1, \dots, v_k$  نیز متمایز باشند،  $W$  یک مسیر نامیده می‌شود، در شکل ۸-۱ یک گشت، یک گذرگاه و یک مسیر در یک گراف مشخص شده‌اند. علاوه بر این کلمه مسیر را برای نشان دادن گراف یا زیرگرافی که رأس‌ها و یال‌های آن، جملات یک مسیر هستند به کار خواهیم برد.



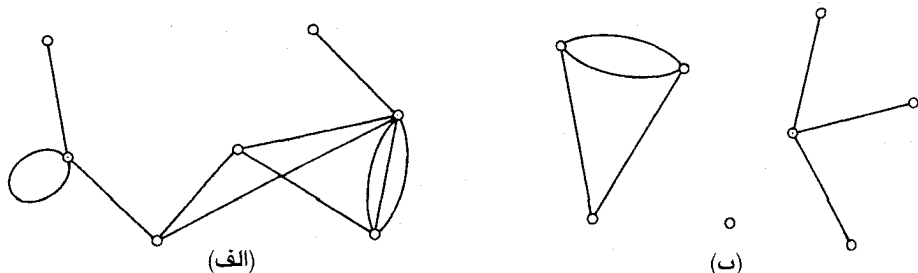
- گشت:  $uavfyfvgyhwbv$
- گذرگاه:  $wcxdyhwbvgy$
- مسیر:  $xcwhyueauv$

شکل ۸-۱



می‌گوئیم دو رأس  $u$  و  $v$  از  $G$  همبند یا متصلند، اگر یک  $(u, v)$ -مسیر در  $G$  وجود داشته باشد. همبندی، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعه رأس‌های  $V$  تشکیل می‌دهد. بنابراین افزایش از  $V$  به زیرمجموعه‌های ناتهی  $V_1, V_2, \dots, V_\omega$  وجود دارد که در آن دو رأس  $u$  و  $v$  همبندند اگر و تنها اگر  $u$  و  $v$  هر دو متعلق به مجموعهٔ  $V_i$  یکسانی باشند.

زیرگراف‌های  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$  مؤلفه‌های  $G$  نامیده می‌شوند. اگر گراف  $G$  دقیقاً یک مؤلفه داشته باشد، همبند است و در غیراین صورت ناهمبند خواهد بود. تعداد مؤلفه‌های  $G$  را با  $\omega(G)$  نمایش می‌دهیم. دو گراف همبند و ناهمبند در شکل ۹-۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۹-۱. (الف) یک گراف همبند، (ب) یک گراف ناهمبند با سه مؤلفه

## تمرین‌ها

- ۱-۶-۱ نشان دهید اگر یک  $(u, v)$ -گشت در  $G$  وجود داشته باشد، آنگاه یک  $(u, v)$ -مسیر نیز در  $G$  وجود دارد.
- ۱-۶-۲ نشان دهید تعداد  $(v_i, v_j)$ -گشت‌های به طول  $k$  در  $G$ ، برابر  $(i, j)$ -امین درایهٔ  $A^k$  است.
- ۱-۶-۳ نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\delta \geq k$  باشد، آنگاه  $G$  دارای مسیری به طول  $k$  است.
- ۱-۶-۴ نشان دهید که  $G$  همبند است اگر و تنها اگر برای هر افزایش  $V$  به مجموعه‌های ناتهی  $V_1$  و  $V_2$  یک یال وجود داشته باشد به طوری که یک سر آن در  $V_1$  و سر دیگر آن در  $V_2$  باشد.
- ۱-۶-۵ (الف) نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\varepsilon > \binom{v-1}{2}$  باشد، آنگاه  $G$  همبند است.  
(ب) به ازای  $v > 1$ ، یک گراف ناهمبند سادهٔ  $G$  با  $\varepsilon = \binom{v-1}{2}$  پیدا کنید.
- ۱-۶-۶ (الف) نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\delta > \lfloor \frac{v}{3} \rfloor - 1$  باشد، آنگاه  $G$  همبند است.  
(ب) یک گراف سادهٔ  $(\lfloor \frac{v}{3} \rfloor - 1)$ -منتظم ناهمبند برای  $v$ ‌های زوج پیدا کنید.
- ۱-۶-۷ نشان دهید اگر  $G$  ناهمبند باشد، آنگاه  $G^c$  همبند است.

۱-۶-۱ الف) نشان دهید اگر  $e \in E$ ، آنگاه  $\omega(G) \leq \omega(G-e) \leq \omega(G)+1$ .

ب) فرض کنید  $v \in V$ . نشان دهید در حالت کلی نمی‌توان در نامساوی بالا،  $G-v$  را جایگزین  $G-e$  نمود.

۱-۶-۲ نشان دهید اگر  $G$  همبند و تمام درجه‌های  $G$  زوج باشند، آنگاه برای هر  $v \in V$  داریم:  

$$\omega(G-v) \leq \frac{1}{2}d(v)$$

۱-۶-۳ نشان دهید در یک گراف همبند، هر دو مسیر دارای بلندترین طول، یک رأس مشترک دارند.

۱-۶-۴ اگر  $u$  و  $v$  در  $G$  همبند باشند، فاصله بین  $u$  و  $v$  که با  $d_G(u,v)$  نمایش داده می‌شود عبارت است از طول کوتاه‌ترین  $(u,v)$ -مسیر در  $G$ : اگر هیچ مسیری بین  $u$  و  $u$  وجود نداشته باشد،  $d_G(u,v)$  طبق تعریف نامتناهی خواهد بود. نشان دهید برای هر سه رأس  $u$ ،  $v$  و  $w$  داریم:  

$$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$$

۱-۶-۵ قطر  $G$  عبارت است از بیشترین فاصله بین دو رأس از  $G$ . نشان دهید اگر قطر  $G$  بیشتر از سه باشد، آنگاه قطر  $G^c$  کمتر از سه خواهد بود.

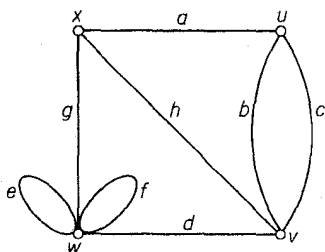
۱-۶-۶ نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با قطر دو باشد و  $\Delta = v-2$ ، آنگاه  $\varepsilon \geq 2v-4$ .

۱-۶-۷ نشان دهید اگر  $G$  ساده و همبند باشد ولی کامل نباشد آنگاه می‌توان سه رأس  $u$ ،  $v$  و  $w$  در  $G$  پیدا کرد، به طوری که  $uv, vw \in E$  و  $uw \notin E$ .

## ۷-۱ دورها

می‌گوئیم یک گشت، بسته است، اگر طول آن مثبت بوده، ابتدا و انتهای آن یکسان باشند. یک گذرگاه بسته، که ابتدا و رأس‌های داخلی آن متمایز باشند، دور نامیده می‌شود. همانند مسیرها، گاهی اوقات لفظ «دور» را به منظور اشاره به گرافی که متناظر با یک دور است به کار می‌بریم. یک دور با طول  $k$  را  $k$ -دور می‌نامیم.

یک  $k$ -دور را بسته به اینکه  $k$  زوج یا فرد باشد، یک دور زوج یا فرد می‌نامیم. غالباً به ۳-دور، مثلث گفته می‌شود. مثال‌هایی از یک گذرگاه بسته و یک دور در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده‌اند. اکنون با استفاده از مفهوم دور، می‌توانیم به بررسی یک ویژگی اصلی از گراف‌های دوبخشی بپردازیم.

گذرگاه بسته :  $ucvuhxgfwdvubu$ دور :  $xaubvuhx$ 

شکل ۱۰-۱

**قضیهٔ ۲-۱** یک گراف، دوبخشی است اگر و تنها اگر هیچ دور فردی نداشته باشد.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف دوبخشی با دو بخش  $X$  و  $Y$  و  $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$  یک دور از  $G$  باشد. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم که  $v_0 \in X$ . چون  $v_0, v_1 \in E$  و  $G$  دوبخشی است، بنابراین  $v_1 \in Y$ . به همین دلیل  $v_2 \in X$  و در حالت کلی داریم:  $v_{2i} \in X$  و  $v_{2i+1} \in Y$ . از آن جایی که  $v_k \in Y$  پس  $v_k \in Y$ ، در نتیجه به ازای یک مقدار  $i$ ، داریم  $k = 2i + 1$  و بنابراین  $C$  زوج خواهد بود. واضح است که اثبات عکس، برای گراف‌های همبند کافی است. فرض کنید  $G$  یک گراف همبند باشد که هیچ دور فردی ندارد یک رأس دلخواه مانند  $v$  را انتخاب کرده، افراز  $(X, Y)$  از  $V$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \{ x \in V \mid d(u, x) \text{ زوج است} \}$$

$$Y = \{ y \in V \mid d(u, y) \text{ فرد است} \}$$

نشان خواهیم داد که  $G$  یک گراف دوبخشی با دو بخش  $X$  و  $Y$  است. فرض کنید  $v$  و  $w$  دو رأس  $X$  باشند.  $P$  را به عنوان کوتاهترین  $(u, v)$ -مسیر و  $Q$  را به عنوان کوتاهترین  $(u, w)$ -مسیر در نظر می‌گیریم. آخرین رأس مشترک  $P$  و  $Q$  را با  $u_1$  نشان می‌دهیم. چون  $P$  و  $Q$  کوتاهترین مسیرها هستند،  $(u, u_1)$ -قسمت‌های  $P$  و  $Q$  نیز کوتاهترین  $(u, u_1)$ -مسیرها می‌باشند و بنابراین طول برابری خواهند داشت. از آن جایی که طول‌های  $P$  و  $Q$  هر دو زوج هستند، طول  $(u_1, v)$ -قسمت  $P_1$  از  $P$  و  $(u_1, w)$ -قسمت  $Q_1$  از  $Q$  باید از نظر زوج و فرد بودن، یکسان باشند. از اینجا نتیجه می‌شود که طول  $(v, w)$ -مسیر  $P_1^{-1} Q_1$  زوج است. اگر  $v$  به  $w$  متصل باشد،  $P_1^{-1} Q_1 v w$  یک دور با طول فرد خواهد بود که با فرض اولیه در تناقض است. بنابراین هیچ دو رأسی در  $X$  مجاور نیستند. به طور مشابه هیچ دو رأسی از  $Y$  نیز مجاور نخواهند بود.  $\square$

## تمرین‌ها

- ۱-۷-۱ نشان دهید اگر یال  $e$  در یک گذرگاه بسته از  $G$  باشد، آنگاه  $e$  در یک دور از  $G$  نیز خواهد بود.
- ۲-۷-۱ نشان دهید اگر  $\delta \geq 2$  آنگاه  $G$  شامل یک دور است.
- ۳-۷-۱\* نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\delta \geq 2$  باشد، آنگاه  $G$  شامل یک دور با طول حداقل  $\delta + 1$  خواهد بود.
- ۴-۷-۱ کمر  $G$ ، طول کوتاهترین دور در  $G$  می‌باشد. اگر  $G$  هیچ دوری نداشته باشد، کمر  $G$  طبق تعریف، بی‌نهایت خواهد بود. نشان دهید:
- الف) یک گراف  $k$ -منتظم با کمر چهار، حداقل  $2k$  رأس دارد و (باتوجه به یکریختی) دقیقاً یک گراف وجود دارد که دارای این مشخصات بوده و  $2k$  رأس داشته باشد.
- ب) یک گراف  $k$ -منتظم با کمر پنج، حداقل  $k^2 + 1$  رأس دارد.
- ۵-۷-۱ نشان دهید یک گراف  $k$ -منتظم با کمر پنج و قطر دو، دقیقاً  $k^2 + 1$  رأس دارد و به‌ازای  $k = 2, 3, 7$  این گراف‌ها را بیابید.
- (هافمن<sup>۱</sup> و سینگلتون<sup>۲</sup> در سال ۱۹۶۰ نشان دادند که این چنین گرافی فقط به‌ازای  $k = 2, 3, 7$  و احتمالاً ۵۷ می‌تواند وجود داشته باشد).
- ۶-۷-۱ نشان دهید:
- الف) اگر  $\varepsilon \geq \nu$ ،  $G$  شامل یک دور خواهد بود.
- ب)\* اگر  $\varepsilon \geq \nu + \varepsilon$ ،  $G$  شامل دو دور یال-مجزا خواهد بود.

(L. Pósa)

## کاربردها

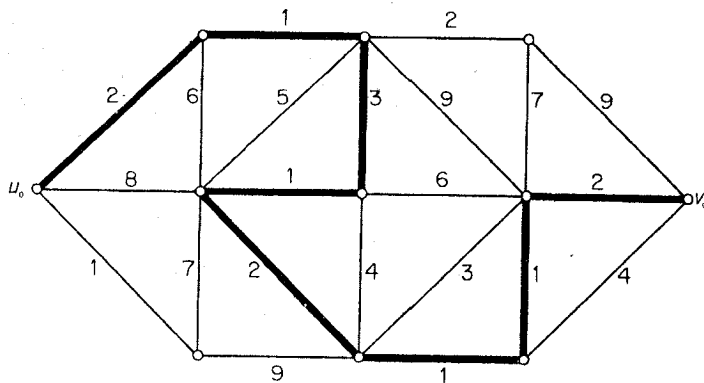
## ۸-۱ مسأله کوتاهترین مسیر

فرض کنید به هر یال  $e$  از  $G$ ، یک عدد حقیقی  $w(e)$ ، که وزن آن نامیده می‌شود، نسبت داده‌ایم. در این صورت  $G$  به‌همراه وزن‌های روی یال‌هایش، یک گراف وزن‌دار نامیده می‌شود. گراف‌های وزن‌دار در بسیاری از کاربردهای نظریه گراف‌ها پدیدار می‌شوند. به‌طور مثال در گراف دوستی، وزن‌ها می‌توانند نمایانگر میزان علاقه و دوستی افراد باشند. در گراف ارتباطات، وزن‌ها می‌توانند نشان‌دهنده هزینه ساخت یا نگهداری

پیوندهای ارتباطی مختلف باشند.

اگر  $H$  زیرگرافی از یک گراف وزندار باشد، وزن  $w(H)$  از  $H$  برابر حاصل جمع وزن‌های روی یال‌های آن است. بسیاری از مسایل بهینه سازی، به یافتن یک زیرگراف خاص با کمترین (بایشتترین) وزن، در یک گراف وزندار منتهی می‌شود. یک نمونه از این مسایل، مسأله کوتاهترین مسیر است که به این صورت تعریف می‌شود: یک شبکه راه‌آهن، تعدادی شهرهای مختلف را به یکدیگر متصل می‌کند. کوتاهترین راه بین دو شهر مشخص را در این شبکه پیدا نمائید.

چیزی که باید به دنبال آن باشیم، یک مسیر با کوتاهترین وزن است که دو رأس مشخص شده  $u_0$  و  $v_0$  را در یک گراف وزندار به یکدیگر متصل می‌کند. وزن‌ها، نشان دهنده فاصلهٔ ریلی بین زوج شهرهایی است که مستقیماً به یکدیگر متصلند، بنابراین وزن‌ها نامنفی هستند. مسیری که در گراف شکل ۱-۱۱ مشخص شده است. یک  $(u_0, v_0)$ -مسیر با کمترین وزن می‌باشد.



شکل ۱-۱۱. یک  $(u_0, v_0)$ -مسیر با کمترین وزن

در ادامه، الگوریتمی برای حل مسأله کوتاهترین مسیر ارائه می‌دهیم. برای سادگی بحث، وزن یک مسیر در گراف وزندار را طول آن مسیر در نظر می‌گیریم، به‌طور مشابه کمترین وزن یک  $(u, v)$ -مسیر را فاصلهٔ بین  $u$  و  $v$  نامیده، آن را با  $d(u, v)$  نمایش می‌دهیم. هنگامی که تمامی وزن‌ها برابر یک باشند، این تعاریف با تعریف‌هایی که در بخش ۱-۶ از طول و مسیر ارائه شدند منطبق می‌گردند.

واضح است که بررسی مسأله کوتاهترین مسیر، برای گراف‌های ساده کافی است. بنابراین در این قسمت فرض خواهیم کرد که  $G$  ساده است. همچنین فرض می‌کنیم که تمامی وزن‌ها مثبت هستند، البته این فرض یک محدودیت جدی محسوب نمی‌شود، زیرا اگر وزن یک یال صفر باشد، می‌توان دوسر آن را روی یکدیگر قرار داد. همچنین این قرارداد را می‌پذیریم که اگر  $uv \notin E$ ، آنگاه  $w(uv) = \infty$ . الگوریتمی که به توضیح آن خواهیم پرداخت، توسط دایسترا<sup>۱</sup> در سال ۱۹۶۰ و به‌طور مستقل توسط وایتینگ<sup>۲</sup> و هیلیر<sup>۳</sup> در سال ۱۹۶۰ کشف شده است. این الگوریتم علاوه بر کوتاهترین  $(u, v)$ -مسیر، کوتاهترین مسیرهای بین  $u$  تا تمام رأس‌های دیگر در  $G$  را پیدا می‌کند. ایده اصلی آن به‌صورت زیر است:

فرض کنید که  $S$  یک زیر مجموعه سره از  $V$  باشد، به‌طوری‌که  $u, \bar{S} \in S$  و  $\bar{S}$  را برای نمایش دادن  $V \setminus S$  به کار می‌بریم. اگر  $P = u, \dots, \bar{u}, \bar{v}$  یکی از کوتاهترین مسیرهای بین  $u$  تا  $\bar{S}$  باشد آنگاه روشن است که  $\bar{u} \in S$  و  $(u, \bar{u})$ -قسمت  $P$  باید کوتاهترین  $(u, \bar{u})$ -مسیر باشد. در نتیجه:

$$d(u, v) = d(u, \bar{u}) + w(\bar{u}, v)$$

و فاصله  $u$  تا  $\bar{S}$  توسط فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$d(u, \bar{S}) = \min_{u \in S, v \in \bar{S}} \{d(u, v) + w(uv)\} \quad (1-1)$$

این فرمول، اساس الگوریتم دایسترا محسوب می‌شود، با شروع از مجموعه  $S_0 = \{u_0\}$  دنباله افزایشی  $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}, S_k, \dots, S_{n-1}$  از زیر مجموعه‌های  $V$  را به این طریق می‌سازیم که در پایان مرحله  $k$ ام، کوتاهترین مسیرها از  $u_0$  تا تمام رأس‌های  $S_k$  معین شده باشند.

مرحله نخست برای تعیین نزدیک‌ترین رأس به  $u_0$  می‌باشد. این عمل با محاسبه  $d(u_0, \bar{S}_0)$  و انتخاب رأسی مانند  $u_1 \in \bar{S}_0$  انجام می‌شود به‌طوری‌که  $d(u_0, u_1) = d(u_0, \bar{S}_0)$ . با توجه به (1-1) داریم:

$$d(u_0, \bar{S}_0) = \min_{u \in S_0, v \in \bar{S}_0} \{d(u_0, u) + w(uv)\} = \min_{v \in \bar{S}_0} \{w(u_0, v)\}$$

بنابراین  $d(u_0, \bar{S}_0)$  به راحتی محاسبه می‌گردد. اکنون قرار می‌دهیم  $S_1 = \{u_0, u_1\}$  و فرض می‌کنیم  $P_1$  نشان‌دهنده مسیر  $u_0, u_1$  باشد که به‌وضوح کوتاهترین  $(u_0, u_1)$ -مسیر است. در حالت کلی اگر مجموعه  $u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+1}$  و کوتاهترین مسیرهای متناظر  $P_k, \dots, P_2, P_1$  تاکنون معین شده باشند،  $d(u_0, \bar{S}_k)$  را توسط (1-1) محاسبه کرده، رأس  $u_{k+1} \in \bar{S}_k$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \bar{S}_k)$ . بنا بر (1-1) به ازای یک مقدار  $k \leq j$  داریم:

$$d(u_{i_0}, u_{k+1}) = d(u_{i_0}, u_j) + w(u_j, u_{k+1})$$

بافزودن  $u_j$  به مسیر  $P_j$  به کوتاهترین  $(u_{i_0}, u_{k+1})$ -مسیر می‌رسیم.

این فرآیند بر روی گراف شکل ۱-۱۲ الف نشان داده شده است. کوتاهترین مسیرها از  $u$  تا رأس‌های دیگر طی هفت مرحله معین شده‌اند. در هر مرحله، رأس‌هایی را که کوتاهترین مسیر تا آن‌ها پیدا شده است، به وسیلهٔ نقاط توپر مشخص می‌کنیم و فاصلهٔ آن‌ها از  $u$  را به عنوان برچسب رأس‌های مذکور قرار می‌دهیم. در آغاز، برچسب  $u$  را به رأس  $u$  نسبت می‌دهیم. کوتاهترین مسیرهای واقعی، توسط خطوط توپر مشخص شده‌اند. توجه داشته باشید که در هر مرحله، کوتاهترین مسیرها بر روی هم، یک گراف همبند بدون دور را تشکیل می‌دهند که درخت نامیده می‌شود. بنابراین می‌توانیم این الگوریتم را یک فرآیند «رشد یابندهٔ درختی» به حساب آورده، درخت نهایی، در شکل ۱-۱۲ ح دارای این خاصیت است که برای هر رأس  $v$  مسیر بین  $u$  و  $v$  کوتاهترین  $(u, v)$ -مسیر می‌باشد.

الگوریتم دایسترا، بهبود یافته فرآیند فوق می‌باشد. این بهبود ناشی از توجه به این مطلب است که اگر قرار باشد مینیمم (۱-۱) را در هر مرحله با جستجوی همهٔ حالت‌ها محاسبه کنیم، بسیاری از مقایسه‌ها بی‌جهت تکرار خواهند شد. برای اجتناب از این تکرارها و برای اینکه بتوانیم اطلاعات هر مرحله را به مرحله بعد منتقل کنیم، روش برچسب‌زنی زیر را به کار می‌بریم. در طی الگوریتم، هر رأس  $v$  دارای یک برچسب  $l(v)$  است که کران بالایی برای  $d(u, v)$  می‌باشد. در آغاز  $l(u) = 0$  و برای هر رأس  $u$ ،  $v \neq u$  قرار می‌دهیم:  $l(v) = \infty$  (در محاسبات واقعی  $\infty$  توسط یک عدد به اندازه کافی بزرگ جایگزین می‌شود). همین‌طور که الگوریتم پیش می‌رود، برچسب‌ها طوری اصلاح می‌شوند که در پایان مرحله  $i$  ام داشته باشیم:

$$u \in S_i \text{ برای هر } l(u) = d(u, u)$$

9

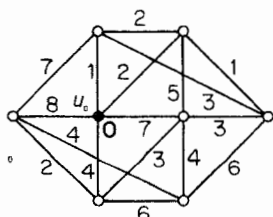
$$v \in \bar{S}_i \text{ برای هر } l(v) = \min_{u \in S_{i-1}} \{d(u, v) + w(u, v)\}$$

## الگوریتم دایسترا

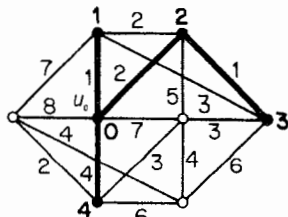
(۱) قرار بده  $S_i = \{u_i\}$ ،  $l(u_i) = 0$  و همچنین برای هر  $v \neq u_i$  قرار بده  $l(v) = \infty$ .

(۲) برای هر  $v \in \bar{S}_i$ ،  $l(v)$  را با  $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i, v)\}$  جایگزین کن  $\min_{v \in \bar{S}_i} \{l(v)\}$  را محاسبه کن،

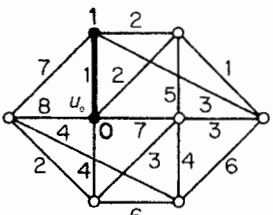
اگر  $u_{i+1}$  رأسی باشد که این مینیمم را به دست می‌دهد، قرار بده  $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$



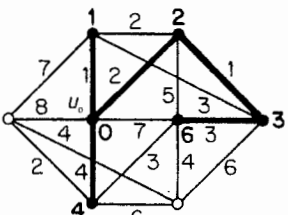
(الف)



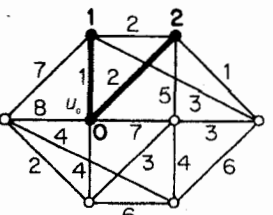
(هـ)



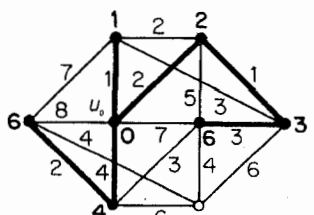
(ب)



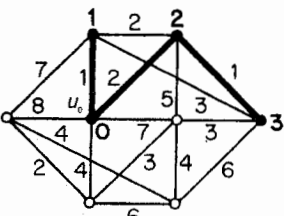
(و)



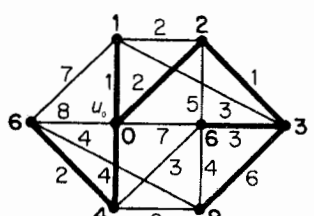
(ج)



(ز)



(د)



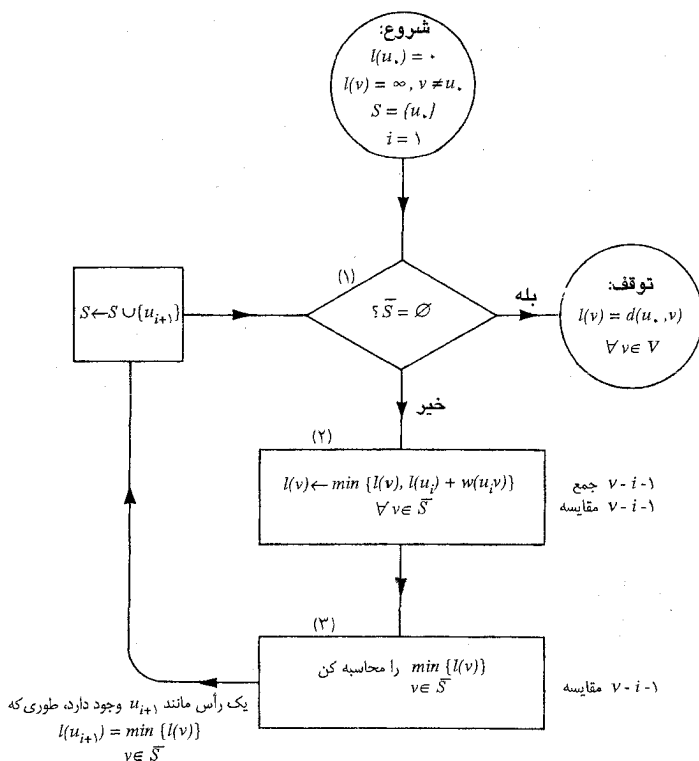
(ح)

شکل ۱۲-۱. الگوریتم کوتاهترین مسیر

(۳) اگر  $i = v - 1$  توقف کن، اگر  $i, i < v - 1$  را با  $i + 1$  جایگزین کرده به مرحله ۲ برو.

هنگامی که الگوریتم به پایان برسد، فاصله  $u_i$  تا  $v$  به وسیله مقدار نهایی برچسب  $l(v)$  مشخص می‌گردد. (اگر قصد ما فقط تعیین فاصله  $u_i$  تا رأس خاصی مثلاً  $v_i$  باشد، به محض اینکه  $u_j$  برابر  $v_i$  شد توقف می‌کنیم). نمودار گردش این الگوریتم در شکل ۱۳-۱ آمده است.





شکل ۱-۱۳. الگوریتم دایسترا

همان‌طور که در بالا توضیح داده شد، الگوریتم دایسترا فقط فاصله بین  $u_s$  تا تمام رأس‌های دیگر را تعیین می‌کند و خود کوتاهترین مسیرها را مشخص نمی‌نماید، به هر حال می‌توان این کوتاهترین مسیرها را با نگهداری رأس‌های سابق درخت و دنبال کردن آن‌ها، به راحتی به دست آورد (تمرین ۱-۸-۲).

الگوریتم دایسترا نمونه‌ای از آن چیزی است که ادموندز<sup>۱</sup> آن را یک الگوریتم خوب نامیده است. یک الگوریتم نظریه گرافی، خوب است اگر تعداد مراحل محاسباتی مورد نیاز برای پیاده سازی آن روی هر گراف  $G$  از بالا توسط یک چند جمله‌ای بر حسب  $v$  و  $\varepsilon$  مثلاً  $3v^2\varepsilon$  محدود شده باشد. یک الگوریتم که پیاده سازی آن، نیازمند یک عدد نمایی از مراحل (مثلاً  $2^v$ ) باشد. برای گراف‌های بزرگ بسیار غیر کارآمد خواهد بود. برای اینکه نشان دهیم الگوریتم دایسترا خوب است. دقت می‌کنیم که محاسبات انجام شده در کادرهای

۲ و ۳ از نمودار گردشی، روی هم رفته، به  $\frac{v(v-1)}{2}$  عمل جمع و  $v(v-1)$  مقایسه نیازمندند. یکی از سؤال‌هایی که در مورد این نمودار گردشی چندان دور از ذهن نیست این است که چگونه می‌توان فهمید یک رأس به  $S$  تعلق دارد یا خیر (کادر ۱). دریفاس<sup>۱</sup> (در سال ۱۹۶۹) تکنیکی را برای انجام این کار ارائه داده که در مجموع به  $(v-1)^2$  مقایسه نیاز دارد. بنابراین اگر هر مقایسه یا عمل جمع را به عنوان یک واحد محاسباتی اصلی در نظر بگیریم، مجموع محاسبات مورد نیاز برای این الگوریتم تقریباً  $\frac{5v^2}{2}$  بوده و در نتیجه از مرتبه  $v^2$  خواهد بود. می‌گوئیم تابع  $f(v, \varepsilon)$  از مرتبه  $g(v, \varepsilon)$  است، اگر عدد ثابت مثبتی مانند  $c$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $v, \varepsilon$  داشته باشیم:  $(\frac{f(v, \varepsilon)}{g(v, \varepsilon)}) \leq c$ .

گرچه مسأله کوتاهترین مسیر، با یک الگوریتم خوب قابل حل است، ولی مسایل فراوان دیگری در نظریه گراف‌ها وجود دارند که هیچ الگوریتم خوبی برای آن‌ها در دست نیست. برای درک جزئیات بیشتر، می‌توانید به [Aho, Hopcroft and Ullman ; 1974] مراجعه نمایید.

## تمرین‌ها

- ۱-۸-۱ کوتاهترین مسیرهای بین  $u$  تا تمام رأس‌های دیگر را در گراف وزندار شکل ۱-۱۱ پیدا کنید.
- ۲-۸-۱ برای اینکه بتوان توسط الگوریتم دایسترا، علاوه بر فاصله‌ها، کوتاهترین مسیرها را نیز معین نمود، چه دستوراتی را باید به الگوریتم اضافه کرد؟
- ۳-۸-۱ یک شرکت درشش شهر  $C_1, C_2, \dots, C_6$  نمایندگی دارد. قیمت بلیط پرواز مستقیم از  $C_i$  تا  $C_j$  توسط  $(i, j)$  (مبنی درایهٔ ماتریس زیر داده شده است)  $\infty$  بدین معنی است که پرواز مستقیم وجود ندارد):

۰	۵۰	$\infty$	۴۰	۲۵	۱۰
۵۰	۰	۱۰	۲۰	$\infty$	۲۵
$\infty$	۱۵	۰	۱۰	۲۰	$\infty$
۴۰	۲۰	۱۰	۰	۱۰	۲۵
۲۵	$\infty$	۲۰	۱۰	۰	۲۵
۱۰	۲۵	$\infty$	۲۵	۵۵	۰

این شرکت مایل است که جدولی از ارزان‌ترین راه‌ها بین هر جفت شهر تهیه نماید. این جدول را آماده کنید.

۴-۸-۱ یک گرس، یک بز و یک کلم در یک طرف رودخانه‌ای قرار دارند، مرد قایقرانی می‌خواهد آن‌ها را از عرض رودخانه عبور دهد، ولی به خاطر کوچکی قایقش، هر بار می‌تواند فقط یکی از آن‌ها را با خود ببرد. به دلایل واضح، گرس و بز یا بز و کلم را نمی‌توان بدون نگهبان رها کرد. مرد قایقران چگونه می‌تواند همهٔ آن‌ها را سالم از رودخانه عبور دهد؟

۵-۸-۱ دو نفر، یک ظرف هشت لیتری پر از شربت و همچنین دو ظرف خالی پنج لیتری و سه لیتری دارند. ساده‌ترین راه برای تقسیم شربت به‌طور مساوی بین آن‌ها چیست؟

۶-۸-۱ یک الگوریتم خوب برای تعیین موارد زیر پیدا کنید.

الف) مؤلفه‌های یک گراف؛

ب) کمر یک گراف

الگوریتم خود را از لحاظ کارایی و میزان خوب بودن، تحلیل نمایید.

## ۹-۱ لم اشپرنر

هر نگاشت پیوسته  $f$  از یک  $n$ -قرص بر روی خودش، یک نقطه ثابت دارد (یعنی نقطه‌ای مثل  $x$  وجود دارد به طوری که  $f(x) = x$ ). این قضیهٔ نیرومند که به‌عنوان قضیهٔ نقطه ثابت برآور مشهور است، کاربردهای وسیعی در ریاضیات مدرن دارد. شگفت‌انگیزتر آنکه این قضیه، نتیجهٔ آسانی از یک لم ترکیباتی ساده است که به اشپرنر<sup>۱</sup> (۱۹۲۸) تعلق دارد و همان‌طور که در این قسمت خواهیم دید، لم اشپرنر نیز نتیجهٔ مستقیمی از نتیجهٔ ۱-۱ است.

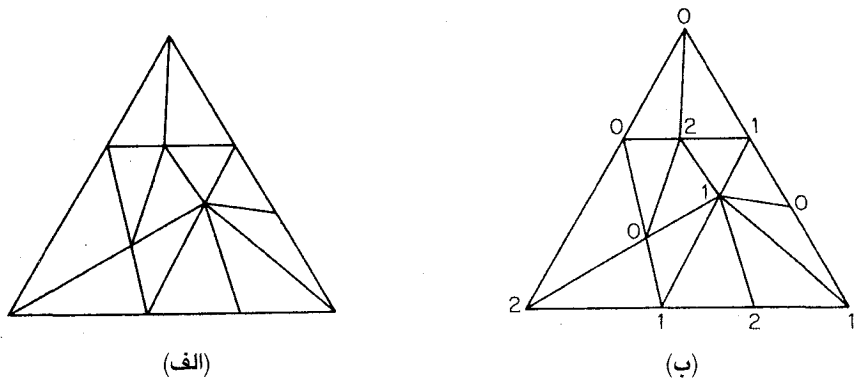
لم اشپرنر به تجزیه یک سادک (پاره خط، مثلث، چهاروجهی و غیره) به سادک‌های کوچکتر مربوط می‌گردد. به خاطر سادگی کار، فقط حالت‌های دو بعدی را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید  $T$  یک مثلث بسته در صفحه باشد. یک زیرتقسیم از  $T$  به تعداد متناهی مثلث کوچکتر، ساده نامیده می‌شود هرگاه هر دو مثلث متقاطع، یا در یک رأس مشترک باشند یا در یک ضلع کامل اشتراک داشته باشند. (شکل ۱۴-۱ الف را ملاحظه نمایید).

فرض کنید یک زیرتقسیم ساده از  $T$  داده شده باشد. می‌خواهیم رأس‌های مثلث‌های درون این زیرتقسیم را با سه نماد  $0$ ،  $1$  و  $2$  برچسب بزنیم. این برچسب‌زنی، مجاز نامیده می‌شود اگر:

(الف) سه رأس  $T$  (به ترتیب دلخواه) دارای برچسب‌های  $0$ ،  $1$  و  $2$  باشند؛

(ب) به ازای  $0 \leq i < j \leq 2$ ، رأس‌های روی آن ضلع از  $T$  که رأس‌های دارای برچسب‌های  $i$  و  $j$  را به هم متصل می‌کند، صرفاً دارای برچسب  $i$  یا  $j$  باشند.



شکل ۱-۴. (الف) یک زیرتقسیم ساده از یک مثلث؛ (ب) یک برچسب‌زنی مجاز زیرتقسیم

مثلی از زیرتقسیم که رأس‌های آن دارای سه برچسب مختلف باشند، یک مثلث مشخص نامیده می‌شود. در برچسب‌زنی مجاز شکل ۱-۴ ب سه مثلث مشخص دیده می‌شود.

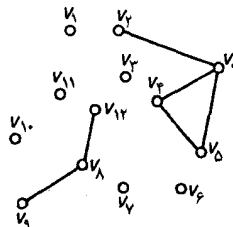
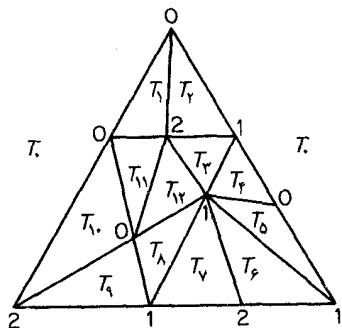
**قضیه ۱-۳ (لم اشپرنر)** هر برچسب‌زنی مجاز برای هر زیرتقسیم ساده از یک مثلث، تعداد فردی مثلث مشخص دارد.

**اثبات** فرض کنید  $T_0$  نمایانگر ناحیه بیرونی  $T$  و  $T_1, T_2, \dots, T_n$  مثلث‌های زیرتقسیم باشند. یک گراف با مجموعه رأس‌های  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  می‌سازیم به طوری که  $v_i$  به  $v_j$  متصل باشد هرگاه مرز مشترک بین  $T_i$  و  $T_j$  یالی با برچسب‌های  $0$  باشد (شکل ۱-۵ را ملاحظه نمایید).

در این گراف درجه  $v_0$  مسلماً فرد خواهد بود (تمرین ۱-۹). بنابراین با توجه به نتیجه ۱-۱، تعداد فردی از رأس‌های  $v_1, v_2, \dots, v_n$  از درجه فرد خواهند بود. به آسانی دیده می‌شود که هیچ رأسی نمی‌تواند درجه سه داشته باشد و بنابراین رأس‌هایی که درجه فرد دارند همگی باید از درجه یک باشند. ولی می‌دانیم که رأس  $v_i$  از درجه فرد است اگر و تنها اگر مثلث  $T_i$  مشخص باشد. □

اکنون به طور مختصر نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از لم اشپرنر برای اثبات قضیه نقطه ثابت برآور استفاده کرد. مجدداً به خاطر سادگی، فقط حالت دوبعدی را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که یک ۲-قرص

بسته، همسانریخت با یک مثلث بسته است، بنابراین کافی است ثابت کنیم که یک نگاشت پیوسته از یک مثلث بسته به خودش، یک نقطه ثابت دارد.



شکل ۱۵-۱

فرض کنید  $T$  یک مثلث بسته، با رأس‌های  $x_0, x_1, x_2$  باشد. هر نقطه  $x$  از  $T$  را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت  $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$  نوشت به‌طوری‌که  $a_i \geq 0$  و  $\sum_{i=0}^2 a_i = 1$ . بنابراین می‌توانیم  $x$  را با بردار  $(a_0, a_1, a_2)$  نمایش دهیم. عددهای حقیقی  $a_0, a_1, a_2$ ، مختصات مرکز ثقل نقطه  $x$  نامیده می‌شوند. اکنون فرض کنید که  $f$  یک نگاشت پیوسته دلخواه از  $T$  به خودش باشد و همچنین فرض کنید:

$$f(a_0, a_1, a_2) = (a'_0, a'_1, a'_2)$$

$S_i$  را به‌عنوان مجموعهٔ نقاط  $(a_0, a_1, a_2)$  در  $T$ ، که در آن‌ها شرط  $a'_i \leq a_i$  برقرار است، تعریف می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم  $f$  یک نقطه ثابت دارد، کافی است که نشان دهیم  $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ . چون اگر فرضاً  $(a_0, a_1, a_2) \in S_0 \cap S_1 \cap S_2$ ، آنگاه بنا بر تعریف  $S_i$ ، برای هر  $i$  داریم:  $a'_i \leq a_i$ . از طرفی می‌دانیم که در نتیجه:

$$(a'_0, a'_1, a'_2) = (a_0, a_1, a_2)$$

به‌عبارت دیگر  $(a_0, a_1, a_2)$  یک نقطه ثابت  $f$  خواهد بود.

بنابراین یک زیرتقسیم دلخواه  $T$  را در نظر گرفته، یک برچسب‌زنی مجاز برای آن پیدا می‌کنیم، به‌طوری‌که هر رأس دارای برچسب  $i$ ، متعلق به  $S_i$  باشد. به راحتی می‌توان دید که این‌گونه برچسب‌زنی حتماً امکان‌پذیر است (تمرین ۹-۱ الف). با توجه به لم اشپرنر یک مثلث در زیرتقسیم وجود دارد به‌طوری‌که رأس‌های آن متعلق به  $S_0, S_1, S_2$  و  $S_2$  باشند. از آن جایی که می‌توانیم زیرتقسیم‌ها را طوری انتخاب کنیم که در

آن، قطر مثلث‌های کوچکتر به هر اندازه دلخواه کوچک باشند، در نتیجه سه نقطه از  $S_0$ ،  $S_1$  و  $S_2$  وجود دارند که به هر اندازه دلخواه به یکدیگر نزدیکند. چون مجموعه‌های  $S_i$  بسته هستند (تمرین ۱-۹-۲ب)، می‌توان نتیجه گرفت که  $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ .

برای درک جزئیات بیشتر اثبات فوق و سایر کاربردهای لم اشپرنر، می‌توانید به [Tompkins; 1964] مراجعه نمائید.

### تمرین‌ها

۱-۹-۱ در اثبات لم اشپرنر، نشان دهید که رأس  $v$  از درجه فرد است.

۲-۹-۱ در اثبات قضیه نقطه ثابت براور، نشان دهید:

الف) یک برجسب‌زنی مجاز وجود دارد به طوری که هر رأس دارای برجسب  $i$ ، متعلق به  $S_i$  باشد.  
 ب) مجموعه‌های  $S_i$  بسته‌اند.

۳-۹-۱ لم اشپرنر را برای سادک‌های دارای ابعاد بیشتر شرح داده، اثبات نمائید.

## مراجع

- Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D. (1974). *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Dijkstra, E. W. (1959). *A note on two problems in connexion with graphs*. *Numer. Math.*, 1, 269-71
- Dreyfus, S. E. (1969). *An appraisal of some shortest-path algorithms*. *Operations Res.*, 17, 395-412
- Edmonds, J. (1965). *Paths, trees and flowers*. *Canad. J. Math.*, 17, 449-67
- Erdős, P. and Gallai, T. (1960). *Graphs with prescribed degrees of vertices* (Hungarian). *Mat. Lapok*, 11, 264-74
- Frucht, R. (1939). *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*. *Compositio Math.*, 6, 239-50
- Hoffman, A. J. and Singleton, R. R. (1960). *On Moore graphs with diameters 2 and 3*. *IBM J. Res. Develop.*, 4, 497-504
- Sperner, E. (1928). *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*. *Hamburger Abhand.*, 6, 265-72
- Tompkins, C. B. (1964). *Sperner's lemma and some extensions*, in *Applied Combinatorial Mathematics*, ch. 15 (ed. E. F. Beckenbach), Wiley, New York, pp. 416-55
- Whiting, P. D. and Hillier, J. A. (1960). *A method for finding the shortest route through a road network*. *Operational Res. Quart.*, 11, 37-40

# فصل ۲

## درخت‌ها

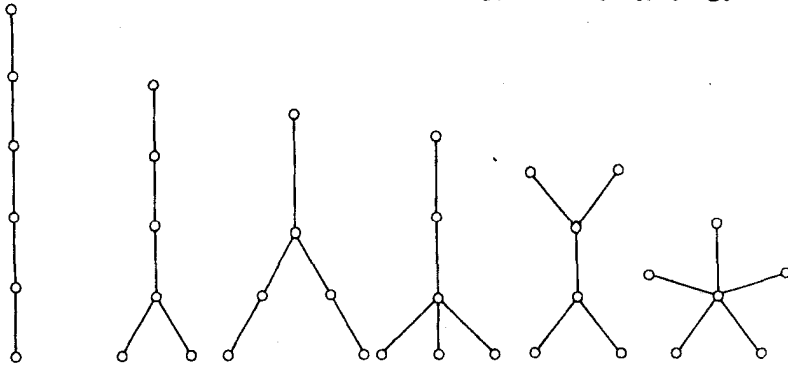
### ۱-۲ درخت‌ها

گراف بی‌دور، گرافی است که هیچ دوری نداشته باشد. درخت یک گراف بی‌دور همبند است. کلیه درخت‌های شش رأسی در شکل ۱-۲ نشان داده شده‌اند.

**قضیه ۱-۲** در درخت، هر دو رأس با یک مسیر یکتا به یکدیگر متصلند.

**اثبات** از طریق تناقض. فرض کنید  $G$  یک درخت باشد و دو  $(u, v)$ -مسیر متمایز  $P_1$  و  $P_2$  در  $G$  وجود داشته باشند. از آنجایی که  $P_1$  و  $P_2$  متمایزند، یالی مانند  $e=xy$  در  $P_1$  وجود دارد که در  $P_2$  نیست. از طرفی به وضوح گراف  $(P_1 \cup P_2) - e$  همبند است و بنابراین شامل یک  $(x, y)$ -مسیر مانند  $P$  می‌باشد. اما در این صورت  $P + e$  یک دور در گراف بی‌دور  $G$  خواهد بود که این یک تناقض است.  $\square$

عکس قضیه فوق، در مورد گراف‌های بدون طوقه صادق است (تمرین ۱-۲).



شکل ۱-۲. درخت‌های شش رأسی



با اندکی دقت می‌توان دید که درخت‌های شش رأسی شکل ۲-۱ همگی پنج یال دارند. به‌طور کلی داریم:

**قضیهٔ ۲-۲** اگر  $G$  یک درخت باشد در این صورت  $\varepsilon = v - 1$ .

**اثبات** از استقراء روی  $v$  استفاده می‌کنیم. زمانی که  $v = 1$  داریم:  $G \cong K_1$  و  $\varepsilon = 0 = v - 1$ .

اکنون فرض کنید که قضیه به‌ازای تمامی درخت‌های با کمتر از  $v$  رأس درست باشد و  $G$  را یک درخت با  $v \geq 2$  رأس در نظر می‌گیریم. اگر  $uv \in E$  آنگاه  $G - uv$  شامل هیچ  $(u, v)$ -مسیری نخواهد بود زیرا  $uv$  تنها

$(u, v)$ -مسیر در  $G$  می‌باشد. بنابراین  $G - uv$  ناهمبند است و در نتیجه داریم:

$$\omega(G - uv) = 2 \quad (\text{تمرین ۱-۶ الف}).$$

مؤلفه‌های  $G_1$  و  $G_2$  از  $G - uv$  بی‌دور بوده و در نتیجه درخت هستند و هر کدام کمتر از  $v$  رأس دارند بنابراین طبق فرض استقراء داریم:

$$\varepsilon(G_i) = v(G_i) - 1 \quad \text{به‌ازای } i = 1, 2$$

پس:

$$\square \cdot \varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = v(G_1) + v(G_2) - 1 = v(G) - 1$$

**نتیجهٔ ۲-۲** هر درخت غیربدیهی، حداقل دو رأس درجهٔ یک دارد.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک درخت غیربدیهی باشد در این صورت

$$d(v) \geq 1 \quad \text{به‌ازای هر } v \in V$$

همچنین از قضایای ۱-۱ و ۲-۲ نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon = 2v - 2$$

در نتیجه درجهٔ حداقل دو رأس درخت برابر ۱ است.  $\square$

روش دیگری که معمولاً برای اثبات نتیجهٔ ۲-۲ به کار می‌رود این است که نشان دهیم رأس‌های ابتدا و

انتهای بلندترین مسیر در درخت غیربدیهی، هر دو از درجهٔ یک هستند (تمرین ۲-۱).

## تمرین‌ها

۱-۱-۲ نشان دهید که اگر در گراف بدون طوقهٔ  $G$ ، هر دو رأس با یک مسیر یکتا به یکدیگر متصل باشند،

در این صورت  $G$  یک درخت است.

۲-۱-۲ نتیجه ۲-۲ را با نشان دادن این‌که رأس‌های ابتدا و انتهای بلندترین مسیر در یک درخت غیربدیهی هر دو از درجه یک هستند، ثابت کنید.

۳-۱-۲ نتیجه ۲-۲ را با استفاده از تمرین ۱-۷-۲ ثابت کنید.

۴-۱-۲ نشان دهید درختی که دقیقاً دو رأس درجه یک دارد، یک مسیر است.

۵-۱-۲ فرض کنید  $G$  یک گراف با  $v-1$  یال باشد. نشان دهید که سه گزاره زیر هم‌ارزند.

(الف)  $G$  همبند است

(ب)  $G$  بی‌دور است.

(ج)  $G$  یک درخت است.

۶-۱-۲ نشان دهید اگر  $G$  یک درخت با شرط  $\Delta \geq k$  باشد، در این صورت  $G$  حداقل  $k$  رأس درجه یک دارد.

۷-۱-۲ گراف بی‌دور را جنگل نیز می‌نامند. نشان دهید:

(الف) هر مؤلفه از جنگل یک درخت است.

(ب)  $G$  یک جنگل است، اگر و تنها اگر  $\varepsilon = v - w$ .

۸-۱-۲ مرکز  $G$ ، رأسی مانند  $u$  است به طوری که  $\max_{v \in V} d(u, v)$ ، کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. نشان دهید که هر درخت یا دقیقاً یک مرکز دارد و یا دارای دو مرکز مجاور است.

۹-۱-۲ نشان دهید که اگر جنگل  $G$  دقیقاً  $2k$  رأس درجه فرد داشته باشد، آنگاه  $k$  مسیر یال-مجزای  $P_1, P_2, \dots, P_k$  وجود دارند به طوری که:

$$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_k)$$

۱۰-۱-۲\* نشان دهید که دنباله اعداد صحیح مثبت  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ ، دنباله درجه‌های یک درخت است اگر و

$$\text{تنها اگر شرط } \sum_{i=1}^v d_i = 2(v-1) \text{ برقرار باشد.}$$

۱۱-۱-۲ فرض کنید  $T$  یک درخت دلخواه با  $k+1$  رأس باشد. نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\delta \geq k$  باشد، آنگاه  $G$  یک زیرگراف یکرخت با  $T$  دارد.

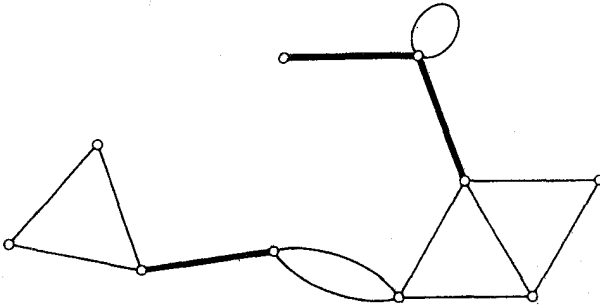
۱۲-۱-۲ هیدروکربن اشباع شده، مولکولی به صورت  $C_m H_n$  است که در آن، هر اتم کربن چهار پیوند و هر اتم هیدروژن یک پیوند دارد و هیچ دنباله‌ای از پیوندها تشکیل دور نمی‌دهند. نشان دهید به ازای

هر عدد صحیح مثبت  $m$ ،  $C_m H_n$  فقط در صورتی می‌تواند وجود داشته باشد که شرط

$$n = 2m + 2 \text{ برقرار باشد.}$$

## ۲-۲ یال‌های برشی و باندها

یک یال برشی از  $G$ ، یالی مانند  $e$  است که شرط  $\omega(G-e) > \omega(G)$  را برآورده سازد. گراف شکل ۲-۲ دارای سه یال برشی است که در شکل مشخص شده‌اند.



شکل ۲-۲. یال‌های برشی یک گراف

**قضیهٔ ۳-۲** یال  $e$  یک یال برشی از  $G$  است، اگر و تنها اگر  $e$  درون هیچ دوری از  $G$  نباشد.

**اثبات** فرض کنید  $e$  یک یال برشی از  $G$  باشد. با توجه به شرط  $\omega(G-e) > \omega(G)$ ، دور  $u$  مانند  $u$  و  $v$  وجود دارند که در  $G$  به یکدیگر متصلند، ولی در  $G-e$  متصل نیستند. بنابراین یک  $(u,v)$ -مسیر مانند  $P$  در  $G$  وجود دارد که الزاماً از  $e$  عبور می‌کند. فرض کنید  $x$  و  $y$  دو سر  $e$  باشند و در  $x$  قبل از  $y$  قرار گرفته باشد. در  $G-e$ ،  $u$  توسط قسمتی از  $P$  به  $x$  و  $y$  نیز با قسمت دیگری از  $P$  به  $v$  متصل می‌باشد. اگر  $e$  درون یک دور مانند  $C$  قرار گرفته باشد،  $x$  و  $y$  در  $G-e$  توسط مسیر  $C-e$  به یکدیگر متصل خواهند بود و در نتیجه  $u$  و  $v$  در  $G-e$  متصل خواهند بود که این یک تناقض است.

بر عکس، فرض کنید  $e=xy$  یک یال برشی از  $G$  نباشد. در این صورت داریم:  $\omega(G-e) = \omega(G)$ . چون یال  $xy$  یک  $(x,y)$ -مسیر در  $G$  است بنابراین  $x$  و  $y$  در یک مؤلفه از  $G$  قرار دارند. در نتیجه  $x$  و  $y$  در همان مؤلفه از  $G-e$  قرار داشته و یک  $(x,y)$ -مسیر  $P$  در  $G-e$  وجود دارد. در نتیجه  $e$  درون دور  $P+e$  از  $G$  قرار خواهد داشت. □

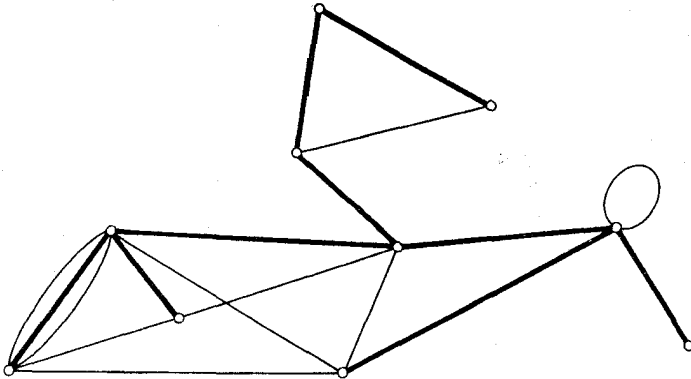
**قضیهٔ ۴-۲** یک گراف همبند درخت است، اگر و تنها اگر هر یال آن یک یال برشی باشد.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک درخت و  $e$  یک یال از  $G$  باشد. چون  $G$  بی‌دور است،  $e$  در هیچ دوری از  $G$  نیست و بنابراین طبق قضیهٔ ۳-۲، یک یال برشی از  $G$  است.

برعکس، فرض کنید  $G$  همبند بوده ولی درخت نباشد. بنابراین  $G$  شامل دوری مانند  $C$  خواهد بود. طبق قضیه ۲-۳ هیچ یالی از  $C$  نمی‌تواند یک یال برشی از  $G$  باشد. □  
 زیرگراف فراگیری از  $G$  که درخت باشد، یک درخت فراگیر از  $G$  نامیده می‌شود.  
**نتیجه ۲-۴-۱** هرگراف همبند دارای یک درخت فراگیر است.

**اثبات** فرض کنید  $G$  همبند و  $T$  یک زیرگراف فراگیر همبند مینیمال از  $G$  باشد. بنابر تعریف  $\omega(T) = 1$  و به ازای هر یال  $e$  از  $T$  داریم:  $\omega(T - e) > 1$ . در نتیجه هر یال  $T$  یک یال برشی است و بنابراین طبق قضیه ۲-۴،  $T$  یک درخت می‌باشد. □

در شکل ۲-۳ یک گراف همبند، به همراه یکی از درخت‌های فراگیر آن نشان داده شده است.



شکل ۲-۳. درختی فراگیر از یک گراف همبند

**نتیجه ۲-۴-۲** اگر  $G$  همبند باشد، آنگاه  $\varepsilon \geq v - 1$ .

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف همبند باشد. طبق نتیجه ۲-۴-۱،  $G$  شامل یک درخت فراگیر مانند  $T$  است. بنابراین:

$$\square. \varepsilon(G) \geq \varepsilon(T) = v(T) - 1 = v(G) - 1$$

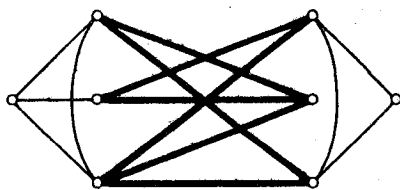
**قضیه ۲-۵** اگر  $T$  یک درخت فراگیر از گراف همبند  $G$  بوده و  $e$  یک یال از  $G$  باشد که در  $T$  نیست، آنگاه  $T + e$  شامل یک دور یکتا خواهد بود.

**اثبات** چون  $T$  بی‌دور است، هر دور از  $T + e$  شامل  $e$  خواهد بود. همچنین  $C$  یک دور از  $T + e$  است، اگر و تنها اگر  $C - e$  یک مسیر از  $T$  باشد که دوسر  $e$  را به یکدیگر متصل می‌کند. طبق قضیه ۲-۱ این چنین

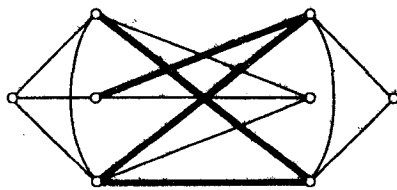
مسیری در  $T$  یکتاست و بنابراین  $T+e$  شامل یک دور یکتا می‌باشد.  $\square$

به‌ازای زیرمجموعه‌های  $S$  و  $S'$  از  $V$ ، مجموعهٔ تمام یال‌هایی را که یک سر آن‌ها در  $S$  و سر دیگرشان در  $S'$  باشد، با  $[S, S']$  نمایش می‌دهیم. یک برش یالی  $G$ ، زیرمجموعه‌ای از  $E$  به صورت  $[S, \bar{S}]$  است که در آن،  $S$  یک زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی از  $V$  و  $\bar{S}$  معادل  $V \setminus S$  می‌باشد. هر برش یالی ناتهی مینیمال از  $G$ ، یک باند نامیده می‌شود. به‌طور مثال، هر یال برشی  $e$ ، یک باند  $\{e\}$  را تشکیل می‌دهد. اگر  $G$  همبند باشد، در این صورت هر باند  $B$  از  $G$ ، زیرمجموعهٔ مینیمالی از  $E$  است، طوری که  $G-B$  ناهمبند باشد. در شکل ۴-۲ یک برش یالی و یک باند مشخص شده‌اند.

اگر  $H$  یک زیرگراف از  $G$  باشد، زیرگراف  $G-E(H)$ ، مکمل  $H$  در  $G$  نامیده شده و با  $\bar{H}(G)$  نمایش داده می‌شود. اگر  $G$  همبند و  $T$  یک زیرگراف فراگیر از آن باشد،  $\bar{T}$  را یک همدرخت از  $G$  می‌نامیم.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲. (الف) یک برش یالی (ب) یک باند

قضیهٔ ۴-۲ اگر  $T$  یک درخت فراگیر از گراف همبند  $G$  بوده و  $e$ ، یالی از  $T$  باشد، در این صورت:

(الف) همدرخت  $\bar{T}$ ، شامل هیچ بانندی از  $G$  نیست.

(ب)  $\bar{T}+e$  شامل یک باند یکتا از  $G$  است.

### اثبات

(الف) فرض کنید  $B$  یک باند از  $G$  باشد. در این صورت  $G-B$  ناهمبند بوده و نمی‌تواند شامل درخت

فراگیر  $T$  باشد. در نتیجه  $B$  در  $\bar{T}$  نیست.

(ب) مجموعه رأس‌های یکی از دو مؤلفهٔ  $T-e$  را با  $S$  نمایش می‌دهیم. به‌وضوح برش یالی  $B=[\bar{S}, S]$

یک باند از  $G$  است که در  $\bar{T}+e$  قرار دارد. از طرفی به‌ازای هر  $b \in B$ ،  $T-e+b$  یک درخت فراگیر از  $G$  است.

بنابراین هر بانندی از  $G$  که در  $\bar{T}+e$  قرار دارد، باید شامل تمام یال‌های مانند  $b$  باشد. از اینجا نتیجه می‌شود

که  $B$  تنها بانندی از  $G$  است که در  $\bar{T}+e$  قرار دارد.  $\square$

ارتباط بین باندها و همدرخت‌ها مشابه ارتباط بین دورها و درخت‌های فراگیر است. گزاره (الف) از قضیه ۲-۶ مشابه این مطلب است که درخت فراگیر، شامل هیچ دوری نیست و گزاره (ب) مشابه قضیه ۲-۵ است. خاصیت «دوگانی» موجود بین دورها و باندها به صورت کامل‌تر در فصل ۱۲ بررسی خواهد شد (در این خصوص تمرین ۲-۲-۱۰ را نیز ملاحظه نمایید).

## تمرین‌ها

۱-۲-۲ نشان دهید که  $G$  یک جنگل است، اگر و تنها اگر تمام یال‌های آن برشی باشند.

۲-۲-۲ فرض کنید  $G$  یک گراف همبند و  $e \in E$  باشد. نشان دهید که:

(الف)  $e$  در هر درخت فراگیر از  $G$  خواهد بود، اگر و تنها اگر  $e$  یک یال برشی از  $G$  باشد.

(ب)  $e$  در هیچ درخت فراگیری از  $G$  نخواهد بود، اگر و تنها اگر  $e$  یک طوقه از  $G$  باشد.

۳-۲-۲ نشان دهید که اگر  $G$  بدون طوقه بوده و دقیقاً یک درخت فراگیر  $T$  داشته باشد، در این صورت  $G=T$ .

۴-۲-۲ فرض کنید  $F$ ، یک جنگل ماکزیمال از  $G$  باشد. نشان دهید که:

(الف) به ازای هر مؤلفه  $H$  از  $G$ ،  $F \cap H$  یک درخت فراگیر از  $H$  است.

(ب)  $\varepsilon(F) = \nu(G) - \omega(G)$

۵-۲-۲ نشان دهید که  $G$  حداقل شامل  $\varepsilon - \nu + \omega$  دور متمایز است.

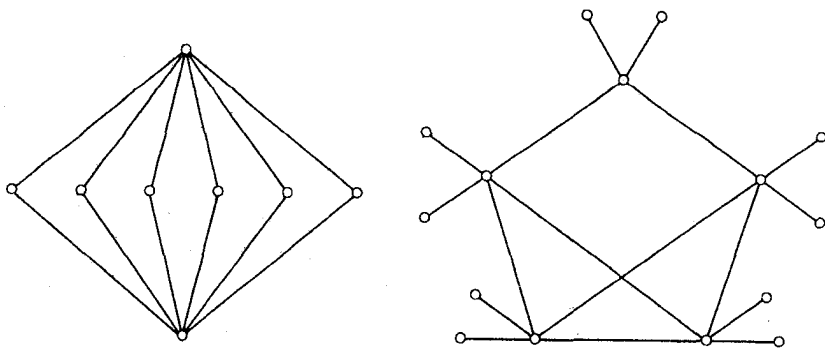
۶-۲-۲ نشان دهید:

(الف) اگر تمام درجه‌ها در  $G$  زوج باشد، آنگاه  $G$  دارای هیچ یال برشی نیست.

(ب) اگر  $G$  یک گراف دوبخشی  $k$ -منتظم باشد، آنگاه  $G$  دارای هیچ یال برشی

نیست.

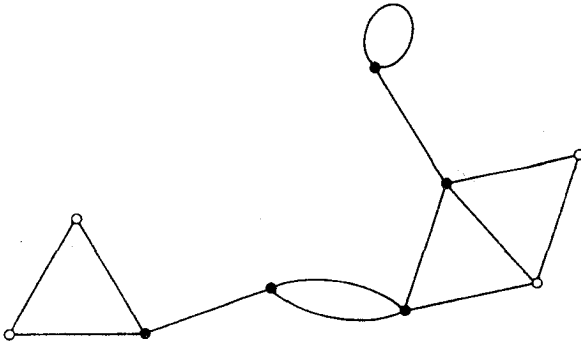
۷-۲-۲ تعداد درخت‌های فراگیر غیریکریخت را در گراف‌های زیر به دست آورید.



- ۸-۲-۲ فرض کنید  $G$  همبند بوده و  $S$  یک زیرگراف سرهٔ ناتهی از  $V$  باشد. نشان دهید که برش یالی  $[S, \bar{S}]$ ، یک باند از  $G$  است اگر و تنها اگر  $G[S]$  و  $G[\bar{S}]$  هر دو همبند باشند.
- ۹-۲-۲ نشان دهید هر برشی یالی، اجتماع مجزایی از باندهاست.
- ۱۰-۲-۲ فرض کنید  $B_1$  و  $B_2$ ، دو باند و  $C_1$  و  $C_2$  دو دور (که به صورت مجموعه‌هایی از یال‌ها در نظر گرفته می‌شوند) در یک گراف باشند. نشان دهید که:
- (الف)  $B_1 \Delta B_2$  اجتماع مجزایی از باندهاست.
- (ب)  $C_1 \Delta C_2$  اجتماع مجزایی از دورهاست.
- تذکر: منظور از  $\Delta$  تفاضل متقارن دو مجموعه است.
- (ج) به ازای هر یال  $e$ ،  $(B_1 \cup B_2) \setminus \{e\}$  شامل یک باند است.
- (د) به ازای هر یال  $e$ ،  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$  شامل یک دور است.
- ۱۱-۲-۲ نشان دهید اگر گراف  $G$  شامل  $k$  درخت فراگیر یال-مجزا باشد، آنگاه برای هر افزایش  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  از  $V$ ، تعداد یال‌هایی که دو سر آن‌ها در بخش‌های متفاوتی از افزایش باشند، حداقل برابر است با  $k(n-1)$ .
- (تات<sup>۱</sup> و نش-ویلیامز<sup>۲</sup> در سال ۱۹۶۱ نشان دادند که شرط داشتن  $k$  درخت فراگیر یال-مجزا، علاوه بر لازم بودن، کافی نیز هست).
- \*۱۲-۲-۲ فرض کنید  $S$  یک مجموعهٔ  $n$  عضوی و  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  یک خانواده از  $n$  زیرمجموعهٔ متمایز از  $S$  باشد. نشان دهید که عضوی از  $S$  مانند  $x$  وجود دارد به طوری که کلیهٔ مجموعه‌های  $A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \dots, A_n \cup \{x\}$  متمایز از یکدیگر باشند.

## ۲-۳ رأس‌های برشی

- رأس  $v$  از  $G$ ، یک رأس برشی نامیده می‌شود، اگر بتوان  $E$  را به دو زیر مجموعهٔ ناتهی  $E_1$  و  $E_2$  طوری افزایش کرد که  $G[E_1]$  و  $G[E_2]$  فقط در رأس  $v$  مشترک باشند. اگر  $G$  بدون طوقه و غیربدیهی باشد در این صورت  $v$  یک رأس برشی از  $G$  است اگر و تنها اگر شرط  $\omega(G-v) > \omega(G)$  برقرار باشد. گراف شکل
- ۵-۲ پنج رأس برشی دارد که در شکل مشخص شده‌اند.



شکل ۵.۲. رأس‌های برشی یک گراف

**قضیه ۷.۲** رأس  $v$  از درخت  $G$ ، یک رأس برشی از  $G$  است اگر و تنها اگر  $d(v) > 1$ .

**اثبات** اگر  $d(v) = 0$ ، در این صورت  $G \cong K_1$  و واضح است که  $v$  یک رأس برشی نیست.

اگر  $d(v) = 1$ ،  $G - v$  یک گراف بی‌دور با  $1 - v(G - v)$  یال و در نتیجه یک درخت خواهد بود (تمرین

۵.۱-۲). بنابراین  $\omega(G - v) = 1 = \omega(G)$  و در نتیجه  $v$  یک یال برشی از  $G$  نیست.

اگر  $d(v) > 1$ ، دو رأس متمایز  $u$  و  $w$  وجود دارند که با رأس  $v$  مجاورند. مسیر  $uvw$  یک  $(u, w)$ -مسیر

در  $G$  می‌باشد. طبق قضیه ۱.۲، تنها  $uvw$ -مسیر یکتا در  $G$  است. در نتیجه هیچ  $(u, w)$ -مسیری در

$G - v$  وجود ندارد و داریم:  $\omega(G - v) > 1 = \omega(G)$ . بنابراین  $v$  یک رأس برشی از  $G$  است.

**نتیجه ۷.۲** هر گراف همبند بدون طوقه غیربدیهی، حداقل دو رأس غیربرشی دارد.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف همبند بدون طوقه غیربدیهی باشد. بنابر نتیجه ۱.۴-۱،  $G$  شامل یک

درخت فراگیر مانند  $T$  است. طبق نتیجه ۲.۲ و قضیه ۷.۲،  $T$  حداقل دو رأس درجه یک دارد که رأس‌های

برشی نیستند. فرض کنید  $v$  یکی از این رأس‌ها باشد. در این صورت:

$$\omega(T - v) = 1$$

چون  $T$  یک زیرگراف فراگیر  $G$  و  $T - v$  یک زیرگراف فراگیر  $G - v$  است، پس:

$$\omega(G - v) \leq \omega(T - v)$$

در نتیجه  $\omega(G - v) = 1$ . بنابراین  $v$  یک رأس برشی  $G$  نیست. از آنجایی که حداقل دو رأس مانند  $v$  وجود

دارند، اثبات کامل است.  $\square$



## تمرین‌ها

۱-۳-۲ فرض کنید  $G$  یک گراف همبند با شرط  $v \geq 3$  باشد. نشان دهید:

(الف) اگر  $G$  یک یال برشی داشته باشد، آنگاه  $G$  دارای رأسی مانند  $v$  است که در شرط

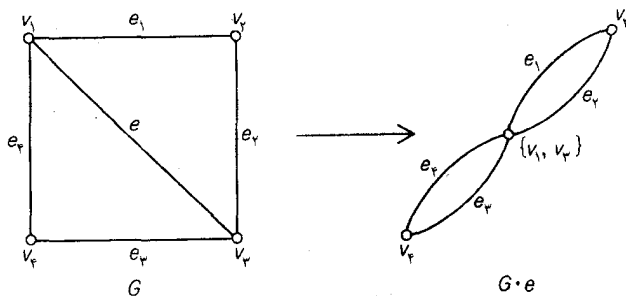
$$\omega(G-v) > \omega(G)$$

(ب) عکس گزارهٔ (الف) الزاماً درست نیست.

۲-۳-۲ نشان دهید گراف همبند ساده‌ای که دقیقاً دو رأس غیر برشی دارد، یک مسیر است.

۴-۲ فرمول کیلی<sup>۱</sup>

فرمول بازگشتی ساده و جالبی برای تعیین تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف وجود دارد. این فرمول متضمن عمل انقباض یک یال است که اینک به معرفی آن می‌پردازیم. می‌گوییم یال  $e$  از  $G$ ، منقبض شده است، اگر آن یال حذف شده، دو سر آن روی هم قرار گیرند. گراف به دست آمده، با  $G.e$  نمایش داده می‌شود. در شکل ۶-۲ اثر انقباض یک یال نشان داده شده است.



شکل ۶-۲. انقباض یک یال

روشن است که اگر  $e$  یک یال پیوندی از  $G$  باشد، در این صورت:

$$v(G.e) = v(G) - 1, \quad \varepsilon(G.e) = \varepsilon(G) - 1, \quad \omega(G.e) = \omega(G)$$

بنابراین اگر  $T$  یک درخت باشد،  $T.e$  نیز یک درخت خواهد بود. تعداد درخت‌های فراگیر  $G$  را با  $\tau(G)$

نمایش می‌دهیم.

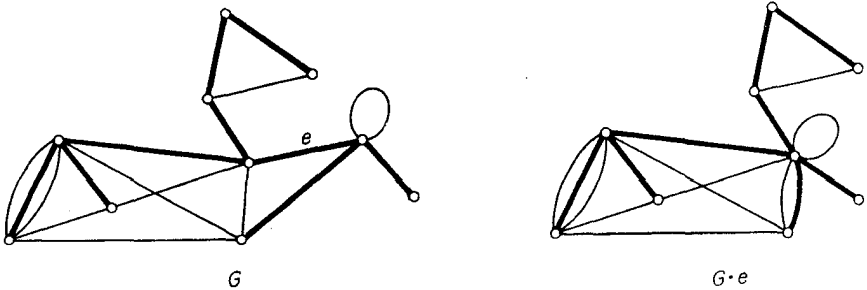
**قضیه ۸-۲** اگر  $e$  یک یال پیوندی از  $G$  باشد، داریم:  $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$ .

**اثبات** از آن جایی که هر درخت فراگیر  $G$  که شامل  $e$  نباشد، یک درخت فراگیر از  $G-e$  هم هست و بالعکس، بنابراین تعداد درخت‌های فراگیر  $G$  که شامل  $e$  نیستند، برابر  $\tau(G-e)$  می‌باشد.

همچنین هر درخت فراگیر  $T$  از  $G$  که شامل  $e$  باشد، متناظر با درخت فراگیر  $T.e$  از  $G.e$  می‌باشد. این تناظر به روشنی یک نگاشت دو سوئی است (شکل ۷-۲ را ملاحظه نمایید). بنابراین تعداد درخت‌های فراگیر

$G$  که شامل  $e$  هستند، دقیقاً برابر است با  $\tau(G.e)$ . از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\square. \tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$$



شکل ۷-۲

شکل ۸-۲ طریقه محاسبه  $\tau(G)$  را با استفاده از قضیه ۸-۲ نشان می‌دهد. در این شکل، تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف به طور نمادین توسط خود گراف نمایش داده شده است.

گرچه قضیه ۸-۲ روشی را برای محاسبه تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف معرفی می‌کند، ولی متأسفانه این روش برای گراف‌های بزرگ چندان مناسب نیست. در عین حال فرمول بسته‌ای برای  $\tau(G)$  وجود دارد که  $\tau(G)$  را به صورت یک دترمینان مشخص می‌کند. این مطلب را در فصل ۱۲ خواهیم دید.

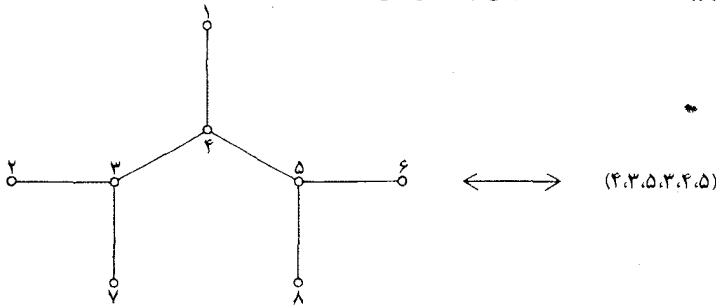
در یک حالت خاص، یعنی هنگامی که  $G$  کامل باشد، فرمول ساده‌ای برای  $\tau(G)$  توسط کیلی در سال ۱۸۸۹ کشف شده است. اثباتی که در اینجا آورده‌ایم، متعلق به پروفر<sup>۱</sup> می‌باشد که در سال ۱۹۱۸ ارائه شده است.

$$\begin{aligned}
\tau(G) &= \begin{array}{c} \text{Square with diagonal} \\ + \text{Square} \\ + \text{Two parallel edges} \end{array} = \left( \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \text{Triangle} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \text{Loop} \end{array} \right) \\
&= \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \left( \begin{array}{c} \text{Triangle} \\ + \text{Loop} \end{array} \right) \end{array} + \left( \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \text{Loop} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \text{Loop} \end{array} \right) \\
&= \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \text{Triangle} \\ + \left( \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \text{Loop} \end{array} \right) \end{array} + \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \text{Loop} \end{array} + \begin{array}{c} \text{U-shape} \\ + \text{Loop} \end{array} \\
&= 8
\end{aligned}$$

شکل ۸.۲. محاسبه بازگشتی  $\tau(G)$

قضیه ۹-۲  $\tau(K_n) = n^{n-2}$ 

**اثبات** فرض کنید که مجموعه رأس‌های  $K_n$  برابر با  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  باشد. یادآوری می‌کنیم که تعداد دنباله‌هایی به طول  $n-2$  که می‌توان از  $N$  ساخت، برابر با  $n^{n-2}$  می‌باشد. بنابراین برای اثبات قضیه کافی است که یک تناظر یک به یک بین مجموعه درخت‌های فراگیر  $K_n$  و مجموعه چنین دنباله‌هایی پیدا کنیم. به هر درخت فراگیر  $T$  از  $K_n$ ، دنبالهٔ یکتای  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$  را به صورت زیر نسبت می‌دهیم:  $N$  را به صورت یک مجموعه مرتب در نظر گرفته، فرض می‌کنیم  $s_1$  اولین رأس درجهٔ یک  $T$  باشد. رأس مجاور به  $s_1$  را به عنوان  $t_1$  در نظر می‌گیریم. سپس  $s_1$  را از  $T$  حذف کرده و اولین رأس درجهٔ یک در  $T - s_1$  را  $s_2$  می‌نامیم. این عمل را تا زمانی که به  $t_{n-2}$  برسیم و درختی فقط با دو رأس باقی بماند، ادامه می‌دهیم. به عنوان مثال درخت شکل ۹-۲، به دنبالهٔ  $(4, 3, 5, 3, 4, 5)$  منتهی خواهد شد. به راحتی می‌توان دید که درخت‌های فراگیر متفاوت از  $K_n$ ، دنباله‌های متفاوتی را معین می‌کنند.



شکل ۹-۲

عکس فرایند فوق نیز بسیار ساده است. پیش از هر چیز، مشاهده می‌کنید که هر رأس  $v$  از  $T$ ، به تعداد  $d_T(v) - 1$  دفعه در دنبالهٔ  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$  تکرار شده است. بنابراین رأس‌های درجهٔ یک در  $T$  دقیقاً آن‌هایی هستند که در این دنباله ظاهر نمی‌شوند. برای بازسازی  $T$  از  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$s_1$  را به عنوان اولین رأسی از  $N$  که در  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$  نیست در نظر گرفته، و  $s_1$  را به  $t_1$  وصل می‌کنیم. سپس  $s_2$  را به عنوان اولین رأس از  $N \setminus \{s_1\}$  که در  $(t_2, \dots, t_{n-2})$  نیست در نظر گرفته،  $s_2$  را به  $t_2$  وصل می‌کنیم. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا  $n-2$  یال  $t_1, s_1, t_2, s_2, \dots, t_{n-2}, s_{n-2}$  مشخص شوند. اکنون می‌توانیم با افزودن یالی که دو رأس باقیمانده را به هم وصل می‌کند، به  $T$  برسیم. به راحتی می‌توان تحقیق

نمود که دنباله‌های متفاوت به درخت‌های فراگیر متفاوتی از  $K_n$  منتهی می‌شوند. بدین ترتیب تناظر یک به یک موردنظر را به دست آورده‌ایم. □

یادآوری می‌شود که  $n^{n-2}$ ، تعداد درخت‌های فراگیر غیریکریخت  $K_n$  نیست، بلکه نمایانگر تعداد درخت‌های فراگیر متمایز  $K_n$  می‌باشد، به عنوان مثال، فقط شش درخت فراگیر غیریکریخت برای  $K_۴$  وجود دارد (شکل ۱-۲ را ملاحظه نمایید). درحالی‌که تعداد درخت‌های فراگیر متمایز  $K_۴$  برابر است با  $۶^۴ = ۱۲۹۶$ .

## تمرین‌ها

۱-۴-۲ با استفاده از فرمول بازگشتی (قضیهٔ ۸-۲)، تعداد درخت‌های فراگیر  $K_{۳,۳}$  را محاسبه کنید.

\*۲-۴-۲ چرخ، گرافی است که از یک دور، با افزودن یک رأس جدید و یال‌هایی که این رأس را به تمام رأس‌های دور متصل می‌کند، تشکیل می‌شود. یال‌های جدید، پره‌های چرخ نامیده می‌شوند. فرمولی برای تعداد درخت‌های فراگیر یک چرخ با  $n$  پره به دست آورید.

۳-۴-۲ هر شانزده درخت فراگیر  $K_۴$  را رسم نمایید.

۴-۴-۲ نشان دهید که اگر  $e$  یک یال  $K_n$  باشد، در این صورت داریم:  $T(K_n - e) = (n-2)n^{n-3}$ .

۵-۴-۲ الف) فرض کنید  $H$  گرافی است که در آن هر دو رأس مجاور با  $k$  یال به یکدیگر متصلند و  $G$  را

گراف سادهٔ زمینهٔ  $H$  در نظر بگیرید. نشان دهید:  $\tau(H) = k^{\nu-1} \tau(G)$ .

ب) فرض کنید  $H$  گرافی باشد که از جایگزین نمودن هر یال گراف  $G$ ، با یک مسیر به طول  $k$

به دست آمده است. نشان دهید:  $\tau(H) = k^{\nu-1} \tau(G)$ .

ج) از قسمت (ب) تساوی  $\tau(K_{۲,n}) = n^{۲n-1}$  را نتیجه بگیرید.

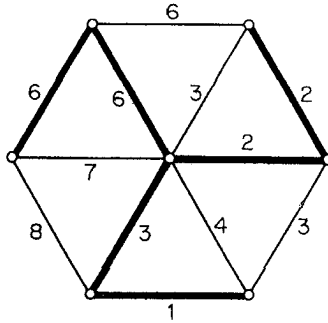
## کاربردها

### ۵-۲ مسأله ارتباط دهی

یک شبکهٔ راه آهن که تعدادی شهر را به یکدیگر متصل می‌کند، در دست احداث است. می‌خواهیم با داشتن هزینهٔ  $C_{ij}$  مربوط به احداث خط مستقیم بین شهرهای  $V_i$ ،  $V_j$ ، شبکه را طوری طراحی کنیم که مجموع هزینهٔ ساخت به کمترین مقدار خود برسد. این مسأله به مسألهٔ ارتباط دهی مشهور است.

با در نظر گرفتن هر شهر به‌عنوان یک رأس از گراف وزندار با وزن‌های  $w(v_i v_j) = C_{ij}$ ، مسأله به یافتن یک زیرگراف فراگیر همبند با کمترین وزن، در یک گراف وزندار  $G$  منجر می‌شود.

از آن جایی که وزن‌ها نمایانگر هزینه‌ها هستند، به طور حتم منفی نیستند، بنابراین می‌توانیم تصور کنیم که زیرگراف فراگیر با کمترین وزن، یک درخت فراگیر  $T$  از  $G$  می‌باشد. درخت فراگیر با کمترین وزن در یک گراف وزندار، درخت بهینه نامیده می‌شود. درخت فراگیری که در گراف وزندار شکل ۲-۱۰ مشخص شده یک درخت بهینه است تمرین ۲-۵.



شکل ۲-۱۰. درخت بهینه در یک گراف وزندار

در ادامه با ارائه یک الگوریتم خوب برای یافتن درخت بهینه در یک گراف همبند وزندار غیربدیهی، به مسأله ارتباط دهی پاسخ خواهیم داد.

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که وزن تمام یال‌ها، برابر با یک باشد. در این صورت درخت بهینه، یک درخت فراگیر با کمترین یال‌های ممکن خواهد بود. ولی از آن جایی که تمام درخت‌های فراگیر یک گراف، تعداد یال‌های مساوی دارند قضیه ۲-۲ در این حالت خاص کافی است تنها یکی از درخت‌های فراگیر گراف را بسازیم. یک الگوریتم استقرایی ساده برای یافتن چنین درختی به صورت زیر است:

- ۱- یک یال پیوندی مانند  $e_1$  را انتخاب کن.
- ۲- اگر یال‌های  $e_1, e_2, \dots, e_i$  انتخاب شده‌اند، یال  $e_{i+1}$  را از میان  $E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  به گونه‌ای انتخاب کن که  $G[\{e_1, e_2, \dots, e_{i+1}\}]$  بی‌دور باشد.
- ۳- در صورتی که مرحله ۲ دیگر قابل اجرا نیست، توقف کن.

از آن جایی که یک زیرگراف بی‌دور ماکزیمال از یک گراف همبند، الزاماً یک درخت فراگیر است، الگوریتم فوق به درستی کار می‌کند. کروسکال<sup>۱</sup> در سال ۱۹۵۶ این الگوریتم را به گونه‌ای توسعه داد که برای وزن‌های حقیقی دلخواه نیز درست باشد.

## الگوریتم کروسکال

۱- یال پیوندی  $e_1$  را طوری انتخاب کن که  $w(e_1)$  کوچکترین مقدار ممکن باشد.

۲- اگر یال‌های  $e_1, e_2, \dots, e_i$  انتخاب شده‌اند، یال  $e_{i+1}$  را از میان  $E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  به گونه‌ای انتخاب کن که:

الف)  $G[\{e_1, e_2, \dots, e_{i+1}\}]$  بی‌دور باشد.

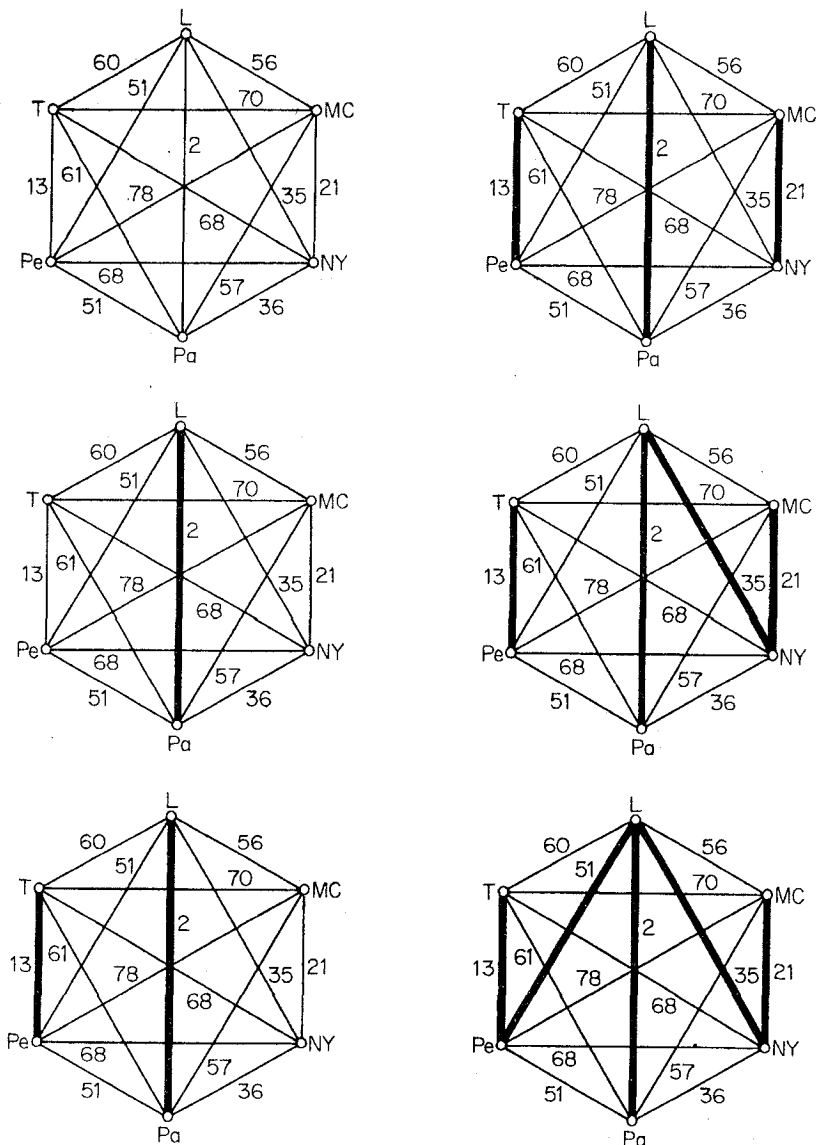
ب) از میان یال‌های صادق در شرط الف)،  $w(e_{i+1})$  دارای کمترین مقدار ممکن باشد.

۳- در صورتی که مرحلهٔ ۲ دیگر قابل اجرا نیست، توقف کن.

به عنوان مثال به جدول زیر که فاصلهٔ خطوط هوایی بین ۶ شهر بزرگ جهان یعنی لندن، مکزیکوسیتی، نیویورک، پاریس، پکن، و توکیو را برحسب مایل مشخص می‌کند، توجه نمایید.

	<i>L</i>	<i>MC</i>	<i>NY</i>	<i>Pa</i>	<i>Pe</i>	<i>T</i>
<i>L</i>	---	۵۵۵۸	۳۴۶۹	۲۱۴	۵۰۷۴	۵۹۵۹
<i>MC</i>	۵۵۵۸	---	۲۰۹۰	۵۷۲۵	۷۷۵۳	۷۰۳۵
<i>NY</i>	۳۴۶۹	۲۰۹۰	---	۳۶۳۶	۶۸۴۴	۶۷۵۷
<i>Pa</i>	۲۱۴	۵۷۲۵	۳۶۳۶	---	۵۱۲۰	۶۰۵۳
<i>Pe</i>	۵۰۷۴	۷۷۵۳	۶۸۴۴	۵۱۲۰	---	۱۳۰۷
<i>T</i>	۵۹۵۹	۷۰۳۵	۶۷۵۷	۶۰۵۳	۱۳۰۷	---

این جدول یک گراف کامل وزندار با رأس‌های  $L, MC, NY, Pa, Pe, T$  را مشخص می‌کند. طریقهٔ ساخت یک درخت بهینه در این گراف در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده است (البته برای سهولت بیشتر، فاصله‌ها در این شکل با مقیاس صد مایل مشخص شده‌اند).



شکل ۲-۱۱

واضح است که الگوریتم کروسکال یک درخت فراگیر تولید می‌کند (به همان دلیل که الگوریتم ساده‌تر قبلی این کار را انجام می‌داد). قضیه زیر این اطمینان را به ما می‌دهد که درخت به دست آمده همواره بهینه است.



**قضیهٔ ۱۰-۲** هر درخت فراگیر  $T^* = G[\{e_1, e_2, \dots, e_{v-1}\}]$  که با الگوریتم کروسکال ساخته شود، یک درخت بهینه است.

**اثبات** از طریق تناقض. به‌ازای هر درخت فراگیر  $T$  از  $G$  به غیر از  $T^*$ ، کوچکترین مقدار  $i$  را به‌طوری‌که  $e_i$  در  $T$  نباشد، با  $f(T)$  نمایش می‌دهیم. اکنون فرض کنید که  $T^*$  یک درخت بهینه نباشد و  $T$  را به‌عنوان درخت بهینه‌ای در نظر بگیرید که در آن  $f(T)$  دارای بزرگترین مقدار ممکن باشد.

فرض کنید  $f(T) = k$ . این بدان معنی است که  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  هم در  $T$  و هم در  $T^*$  هستند، ولی  $e_k$  در  $T$  نیست. طبق قضیهٔ ۵-۲،  $T + e_k$  شامل یک دور یکتای  $C$  می‌باشد. فرض کنید  $e_k$  یالی از  $C$  باشد که در  $T$  هست ولی در  $T^*$  نیست. طبق قضیهٔ ۳-۲،  $e_k$  یک یال برشی از  $T + e_k$  نیست. بنابراین  $T' = (T + e_k) - e_k$  یک گراف همبند با  $v-1$  یال بوده، در نتیجه درخت فراگیر دیگری برای  $G$  خواهد بود (تمرین ۵-۱-۲). روشن است که:

$$w(T') = w(T) + w(e_k) - w(e_k) \quad (۱-۲)$$

ولی در الگوریتم کروسکال،  $e_k$  به‌عنوان یالی با کمترین وزن طوری انتخاب شده است که  $G[\{e_1, e_2, \dots, e_k\}]$  بی‌دور باشد. چون  $G[\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k\}]$  زیر گرافی از  $T$  است. بنابراین آن هم بی‌دور است و نتیجه می‌گیریم که:

$$w(e_k) \geq w(e_k) \quad (۲-۲)$$

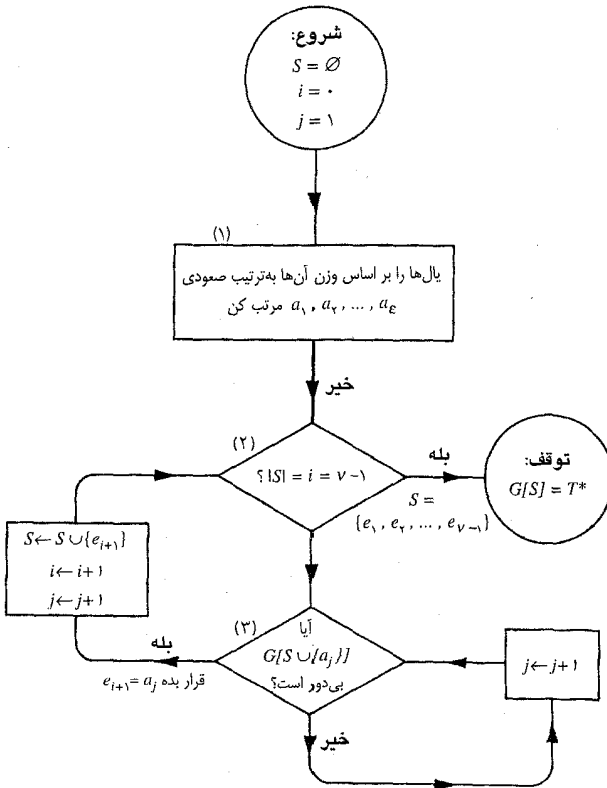
$$w(T') \leq w(T) \quad \text{با ترکیب روابط (۱-۲) و (۲-۲) داریم:}$$

بنابراین  $T'$  هم یک درخت بهینه خواهد بود. در صورتی که داریم:

$$f(T') > k = f(T)$$

که این با انتخاب  $T$  در تناقض است. بنابراین  $T = T^*$  و در نتیجه  $T^*$  یک درخت بهینه است.  $\square$

یک نمودار گردش برای الگوریتم کروسکال در شکل ۱۲-۲ نشان داده شده است. ابتدا یال‌ها، به ترتیب صعودی وزن‌ها مرتب می‌شوند. (کادر ۱) این عمل تقریباً به  $\epsilon \log_e$  مقایسه نیازمند است [Knuth; 1973]. کادر ۲ فقط کنترل می‌کند که چند یال انتخاب شده‌اند ( $S$  مجموعه یال‌هایی است که تاکنون انتخاب شده‌اند و  $i$  برابر تعداد آن‌هاست). هنگامی که  $i = v-1$ ، مجموعه  $\{e_1, e_2, \dots, e_{v-1}\}$ ، مجموعهٔ یال‌های یک درخت بهینهٔ  $T^*$  از  $G$  خواهد بود. در کادر ۳ برای کنترل اینکه آیا  $G/SU\{a_j\}$  بی‌دور است، باید ببینیم که آیا دو سر  $a_j$  در مؤلفه‌های متفاوتی از جنگل  $G/S$  قرار دارند یا خیر. این عمل را می‌توان به روش زیر انجام داد.



شکل ۲-۱۲. الگوریتم کروسکال

رأس‌ها را طوری برچسب‌گذاری می‌کنیم که در هر مرحله، دو رأس به یک مؤلفهٔ یکسان از  $G[S]$  تعلق داشته باشند اگر و تنها اگر این رأس‌ها برچسب‌های یکسانی داشته باشند. در ابتدا به ازای  $1 \leq i \leq v$  برچسب  $i$  را به رأس  $i$  نسبت می‌دهیم.

با این شیوهٔ برچسب‌گذاری،  $G[S \cup \{a_j\}]$  بی‌دور خواهد بود اگر و تنها اگر دو سر  $a_j$  برچسب‌های متفاوتی داشته باشند. اگر این طور باشد،  $a_j$  به عنوان  $e_{i+1}$  برگزیده می‌شود. در غیر این صورت از  $e_j$  صرف‌نظر شده و  $e_{j+1}$  به عنوان نامزد بعدی برای  $e_{i+1}$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. به محض اینکه  $e_{i+1}$  به  $S$  افزوده شد، رأس‌های دو مؤلفه‌ای از  $G[S]$  که شامل دو سر  $e_{i+1}$  می‌باشند، مجدداً با برچسب کوچکتر از میان برچسب‌های خودشان برچسب‌گذاری می‌شوند. برای هر یال با یک مقایسه می‌توان فهمید که برچسب‌های دو سر آن یکسان یا

متفاوتند. این عمل در مجموع به  $\varepsilon$  مقایسه نیازمند است. پس از آنکه  $e_{i+1}$  به  $S$  افزوده شد، برچسب‌گذاری مجدد رأس‌ها حداکثر به  $\nu$  مقایسه نیاز خواهد داشت. بنابراین برای  $\nu-1$  یال  $e_1, e_2, \dots, e_{\nu-1}$  و در کل به  $\nu(\nu-1)$  مقایسه نیازمندیم. در نتیجه الگوریتم کروسکال الگوریتم خوبی محسوب می‌شود.

## تمرین‌ها

۱-۵-۲ با استفاده از الگوریتم کروسکال نشان دهید که درخت شکل ۲-۱۰ واقعاً بهینه است.

۲-۵-۲ الگوریتم کروسکال را طوری تغییر دهید که بتواند برای مسألهٔ ارتباط دهی با مقادیر اولیه مورد استفاده قرار گیرد. صورت مسأله این گونه است که با کمترین هزینه ممکن، شبکه‌ای بسازید که تعدادی شهر را به یکدیگر پیوند دهد، با این شرط اضافی که جفت شهرهای انتخاب شدهٔ خاصی مستقیماً به یکدیگر متصل باشند.

۳-۵-۳ آیا می‌توان با تغییر الگوریتم کروسکال، از آن برای یافتن موارد زیر استفاده کرد؟ اگر می‌شود چگونه؟

(الف) یک درخت با بیشترین وزن در یک گراف همبند وزندار.

(ب) یک جنگل ماکزیمال با کمترین وزن در یک گراف وزندار.

۴-۵-۲ نشان دهید که الگوریتم شبه کروسکال زیر الزاماً یک مسیر فراگیر با کمترین وزن در یک گراف کامل وزندار را نتیجه نمی‌دهد.

۱- یال پیوندی  $e_1$  را به گونه‌ای انتخاب کن که  $w(e_1)$  دارای کوچکترین مقدار ممکن باشد.

۲- اگر یال‌های  $e_1, e_2, \dots, e_i$  و  $e_i$  انتخاب شده‌اند، یال  $e_{i+1}$  را از میان  $E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  به گونه‌ای انتخاب کن که:

(الف)  $G[\{e_1, e_2, \dots, e_{i+1}\}]$  اشتراکی از مسیرهای مجزا باشد.

(ب) از میان یال‌های صادق در شرط (الف)،  $w(e_{i+1})$  دارای کوچکترین مقدار ممکن باشد.

۳- در صورتی که مرحلهٔ ۲ دیگر قابل اجرا نیست، توقف کن.

۵-۲-۲ گراف درختی. یک گراف همبند  $G$ ، گرافی است که رأس‌های آن درخت‌های فراگیر  $T_1, T_2, \dots$  و

$T_i$  از  $G$  می‌باشند و  $T_i$  به  $T_j$  متصل است اگر و تنها اگر آن دو، دقیقاً  $\nu-2$  یال مشترک داشته باشند. نشان دهید که گراف درختی هر گراف همبند، خود نیز همبند است.

## مراجع

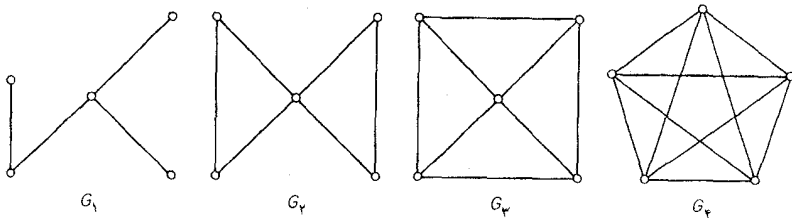
- Cayley, A. (1889). *A theorem on trees*. *Quart. J. Math.*, 23, 376–78
- Knuth, D. E. (1973). *The Art of Computer Programming*, vol. 3: *Sorting and Searching*, Addison–Wesley, Reading, Mass., p. 184
- Kruskal, J. B. Jr. (1956). *On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7, 48–50
- Nash–Williams, C. St. J. A. (1961). *Edge–disjoint spanning trees of finite graphs*. *J. London Math. Soc.*, 36, 445–50
- Prüfer, H. (1918). *Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen*. *Arch. Math. Phys.*, 27, 742–44
- Tutte, W. T. (1961). *On the problem of decomposing a graph into  $n$  connected factors*. *J. London Math. Soc.*, 36, 221–30

# فصل ۳

## همبندی

### ۱-۳ همبندی

در بخش ۱-۶ مفهوم همبندی در گراف‌ها را معرفی کردیم. اینک چهار گراف همبند شکل ۱-۳ را در نظر بگیرید.  $G_1$  یک درخت و همچنین یک گراف همبند مینیمال است، زیرا برداشتن هر یال باعث ناهمبند شدن گراف می‌گردد.  $G_2$  نمی‌توان با برداشتن یک یال ناهمبند کرد، ولی با برداشتن یک رأس، یعنی همان رأس برشی آن ناهمبند می‌شود. در  $G_3$  هیچ یال برشی یا رأس برشی وجود ندارد، با این همه روشن است که همبندی  $G_3$  به اندازه  $G_2$  یعنی گراف کامل پنج رأسی نیست. بنابراین می‌بینیم که در شکل ۱-۳ همبندی هر گراف از گراف قبلی آن قوی‌تر است. اینک به معرفی دو پارامتر از یک گراف می‌پردازیم: همبندی و همبندی یالی گراف که برای اندازه‌گیری میزان همبندی آن به کار می‌روند.



شکل ۱-۳

یک برش رأسی از  $G$  زیرمجموعه‌ای مانند  $V'$  از  $V$  است به طوری که  $G - V'$  ناهمبند باشد. یک برش رأسی با  $k$  عنصر را یک  $k$ -برش رأسی می‌نامیم. گراف کامل هیچ برش رأسی ندارد.

در حقیقت، تنها گراف‌هایی که برش رأسی ندارند، آن‌هایی هستند که زیرگراف فراگیری به صورت گراف کامل دارند. اگر  $G$  حداقل دو رأس متمایز غیرمجاور داشته باشد، همبندی  $G$ ،  $\kappa(G)$  را به عنوان کوچکترین  $k$  ای تعریف می‌کنیم که به ازای آن،  $G$  یک  $k$ -برش رأسی داشته باشد. در غیراین صورت  $\kappa(G)$  برابر  $\nu - 1$  تعریف می‌شود.

باتوجه به مطالب بالا  $\kappa(G)$  در صورتی برابر صفر خواهد بود که  $G$  بدیهی یا ناهمبند باشد. اگر  $\kappa(G) \geq k$  را  $k$ -همبند می‌نامیم. بنابراین تمام گراف‌های همبند غیربدیهی،  $1$ -همبند هستند. به خاطر دارید که یک برش یالی  $G$ ، زیرمجموعه‌ای از  $E$  به شکل  $[S, \bar{S}]$  بود که در آن،  $S$  یک زیرمجموعه سره غیرتهی از  $V$  می‌باشد. یک برش یالی با  $k$  عنصر را یک  $k$ -برش یالی می‌نامیم. اگر  $G$  غیربدیهی و  $E'$  یک برش یالی از  $G$  باشد، آنگاه  $G - E'$  ناهمبند خواهد بود. بنابراین همبندی یالی  $G$ ،  $\kappa'(G)$  را به عنوان کوچکترین  $k$  ای تعریف می‌نماییم که به ازای آن،  $G$  دارای یک  $k$ -برش یالی باشد. اگر  $G$  بدیهی باشد  $\kappa'(G)$  برابر صفر تعریف می‌شود. بنابراین  $\kappa'(G) = 0$ ، اگر  $G$  بدیهی یا ناهمبند باشد و همچنین  $\kappa'(G) = 1$ ، اگر  $G$  گراف همبند با یک یال برشی باشد. اگر  $\kappa'(G) \geq k$ ،  $G$  را  $k$ -همبند یالی می‌نامیم. بنابراین تمام گراف‌های همبند غیربدیهی،  $1$ -همبند یالی هستند.

### قضیه ۱-۳ $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

**اثبات** اگر  $G$  بدیهی باشد، آنگاه  $\delta \leq \kappa' = 0$ . در غیراین صورت مجموعه‌ای از یال‌های پیوندی واقع بر رأسی با درجه  $\delta$ ، یک  $\delta$ -برش یالی از  $G$  را تشکیل می‌دهند. در نتیجه داریم:  $\kappa' \leq \delta$

برای اثبات نامساوی  $\kappa \leq \kappa'$ ، از استقراء روی  $\kappa'$  استفاده می‌کنیم. اگر  $\kappa' = 0$ ، نتیجه درست است، زیرا در این حالت  $G$  باید بدیهی یا ناهمبند باشد. اکنون فرض کنید که نامساوی به ازای تمامی گراف‌های با همبندی یالی کمتر از  $k$  درست باشد و  $G$  را به عنوان یک گراف با  $\kappa'(G) = k > 0$  در نظر می‌گیریم. اگر  $e$  یالی از یک  $k$ -برش یالی  $G$  باشد، آنگاه در گراف  $H = G - e$  داریم:

$$\kappa'(H) = k - 1$$

و بنابراین طبق فرض استقراء  $\kappa(H) \leq k - 1$ . اگر  $H$  و در نتیجه  $G$  دارای زیرگراف فراگیری به شکل گراف کامل باشد، داریم:

$$\kappa(G) = \kappa(H) \leq k - 1$$

در غیر این صورت، فرض کنید  $S$  یک برش رأسی از  $H$  با  $\kappa(H)$  عنصر باشد. از آن جایی که  $H-S$  ناهمبند می باشد، بنابراین یا  $G-S$  ناهمبند است، که در نتیجه داریم:

$$\kappa(G) \leq \kappa(H) \leq k-1$$

و یا  $G-S$  همبند است و  $e$  یک یال برشی از  $G-S$  می باشد. در حالت اخیر یا  $\nu(G-S)=2$  است و

$$\kappa(G) \leq \nu(G)-1 = \kappa(H)+1 \leq k$$

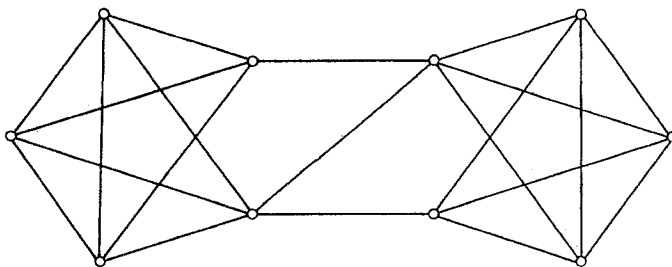
یا  $G-S$  دارای ۱-برش رأسی  $\{v\}$  است. (تمرین ۲-۳ الف). در نتیجه  $S \cup \{v\}$  یک برش رأسی از  $G$  خواهد بود و داریم:

$$\kappa(G) \leq \kappa(H) + 1 \leq k$$

بنابراین در تمام حالت ها  $\kappa(G) \leq k = \kappa'(G)$  و طبق اصل استقرای نتیجه مورد نظر به دست می آید. □

غالباً نامساوی موجود در قضیه ۱-۳، یک نامساوی اکید است. به طور مثال در گراف  $G$  شکل ۲-۳ داریم:

$$\delta = 4, \quad \kappa' = 3, \quad \kappa = 2$$



شکل ۲-۳

### تمرین ها

۱-۱-۳ الف) نشان دهید اگر  $G, k$ -همبند یالی با شرط  $k > 0$  و  $E'$  یک مجموعه  $k$  عضوی از یال های  $G$

$$\omega(G-E') \leq 2$$
 باشد، آنگاه

ب) به ازای  $k < 0$  یک گراف  $k$ -همبند  $G$  و یک مجموعه  $V'$  از  $k$  رأس  $G$  را طوری بیابید که

$$\omega(G-V') > 2$$

۲-۱-۳ نشان دهید اگر  $G, k$ -همبند یالی باشد، آنگاه  $\varepsilon \geq \frac{k\nu}{4}$ .

۳-۱-۳ الف) نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\delta \geq \nu-2$  باشد، آنگاه  $\kappa = \delta$ .

(ب) یک گراف ساده  $G$  با شرط  $\delta = \nu - 3$  و  $\delta < \kappa$  پیدا کنید.

۴-۱-۳ الف) نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\delta \geq \frac{\nu}{3}$  باشد، آنگاه  $\delta = \kappa'$ .

(ب) یک گراف ساده  $G$  با شرط  $\delta = \lfloor \frac{\nu}{3} - 1 \rfloor$  و  $\delta < \kappa'$  پیدا کنید.

۵-۱-۳ نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\delta \geq \frac{\nu + \kappa - 2}{3}$  باشد، آنگاه  $G$ ،  $k$ -همبند خواهد بود.

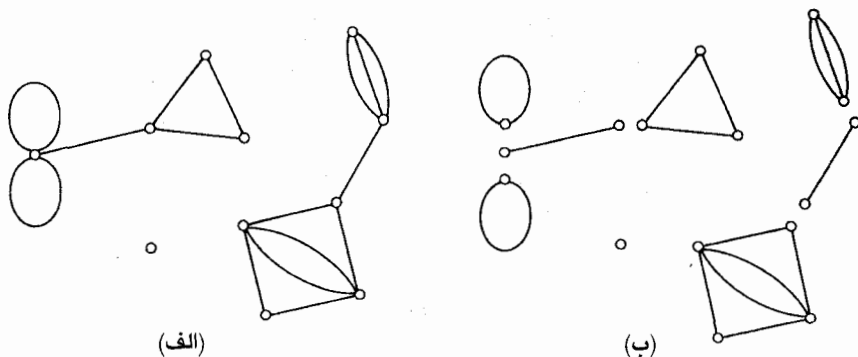
۶-۱-۳ نشان دهید اگر  $G$  ساده و  $3$ -منتظم باشد، آنگاه  $\kappa = \kappa'$ .

۷-۱-۳ نشان دهید اگر  $l, m$  و  $n$  سه عدد صحیح باشند به طوری که  $0 < l \leq m \leq n$ ، آنگاه یک گراف ساده

وجود دارد به طوری که  $\delta = n$  و  $\kappa' = m$ ،  $\kappa = l$  (*G. Chartrand and F. Harary*).

### ۲-۳ بلوک‌ها

یک گراف همبند که هیچ رأس برشی ندارد، بلوک نامیده می‌شود. هر بلوکی که حداقل سه رأس داشته باشد،  $2$ -همبند است. یک بلوک از گراف، زیرگرافی همبند و ماکزیمال از آن گراف است و هر گراف، اجتماعی از بلوک‌هایش می‌باشد. این مطلب در شکل ۳-۳ نشان داده شده است.



شکل ۳-۳. الف)  $G$  (ب) بلوک‌های  $G$

یک خانواده از مسیرهای  $G$ ، **مسیرهای مجزای داخلی** نامیده می‌شوند اگر هیچ رأسی از  $G$ ، به‌عنوان رأس داخلی بیش از یک مسیر از آن خانواده نباشد. قضیهٔ زیر متعلق به وایتنی<sup>۱</sup> (۱۹۳۲) است.

**قضیهٔ ۲-۳** گراف  $G$  با شرط  $\nu \geq 3$ ،  $2$ -همبند است، اگر و تنها اگر هر دو رأس  $G$  حداقل توسط دو مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصل باشند.

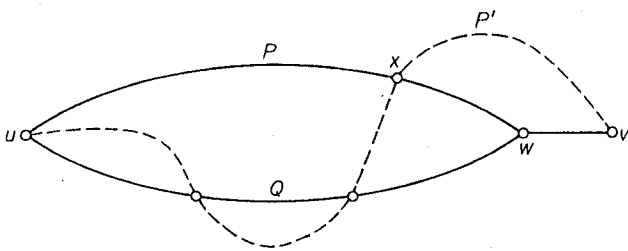


**اثبات** اگر هر دو رأس  $G$  حداقل توسط دو مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصل باشند، آنگاه واضح است که  $G$  همبند بوده، دارای هیچ ۱-برش رأسی نیست. بنابراین  $G$  ۲-همبند است.

برعکس فرض کنید که  $G$  یک گراف ۲-همبند باشد. با استقراء روی  $d(u, v)$ ، فاصله بین  $u$  و  $v$  ثابت خواهیم کرد که هر دو رأس  $u$  و  $v$  توسط حداقل دو مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصلند.

ابتدا فرض کنید که  $d(u, v) = 1$ . چون  $G$  ۲-همبند است، یال  $uv$  یال برشی نیست و بنابراین طبق قضیه ۲-۳، این یال در یک دور قرار دارد. از اینجا نتیجه می‌شود که  $u$  و  $v$  به وسیله دو مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصلند.

اکنون فرض کنید که قضیه به ازای هر دو رأس با فاصله کمتر از  $k$  درست باشد و  $d(u, v) = k \geq 2$  را برابر  $k$  در نظر می‌گیریم. یک  $(u, v)$ -مسیر به طول  $k$  در نظر گرفته، فرض می‌کنیم  $w$  رأس قبل از  $v$  این مسیر باشد. چون  $d(u, w) = k - 1$ ، طبق فرض استقراء دو مسیر مجزای داخلی  $P$  و  $Q$  در  $G$  وجود دارند. همچنین چون  $G$  ۲-همبند است،  $G - w$  همبند و بنابراین دارای یک  $(u, v)$ -مسیر  $P'$  می‌باشد. فرض کنیم  $x$  آخرین رأسی از  $P'$  باشد که در  $PUQ$  نیز قرار دارد (شکل ۳-۴ را ملاحظه نمایید).



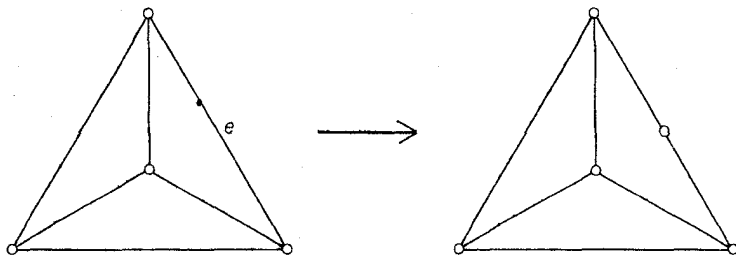
شکل ۳-۴

چون  $u$  در  $PUQ$  قرار دارد، بنابراین این چنین  $x$  ای حتماً وجود دارد؛ چون حالت  $x=v$  را از مجموعه حالات ممکن حذف نکرده‌ایم.

بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم که  $x$  در  $P$  قرار دارد. بنابراین  $G$  شامل دو  $(u, v)$ -مسیر مجزای داخلی خواهد بود. یکی از مسیرها تشکیل شده از قسمتی از  $P$  که  $u$  را به  $x$  وصل می‌کند، به علاوه قسمتی از  $P'$  که بین  $x$  و  $v$  قرار دارد و دیگری از  $Q$  به علاوه مسیر  $wv$  تشکیل شده است. □

**نتیجهٔ ۱-۲-۳** اگر  $G$  ۲-همبند باشد، آنگاه هر دو رأس  $G$  روی یک دور مشترک قرار دارند.

**اثبات** این مطلب بلافاصله از قضیهٔ ۲-۳ نتیجه می‌شود زیرا دو رأس روی یک دور مشترک قرار دارند اگر و تنها اگر آن دو به وسیلهٔ دو مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصل باشند. □  
 اکنون موقع آن است که عمل اشتقاق یک یال را معرفی کنیم. می‌گوییم یال  $e$  مشتق شده، هرگاه آن یال را برداشته، به جای آن مسیر جدیدی به طول دو قرار دهیم که دو سر یال را به یکدیگر متصل می‌کند. رأس داخلی این مسیر یک رأس جدید خواهد بود. این عمل در شکل ۵-۳ نشان داده شده است.  
 به راحتی می‌توان دید که کلاس بلوک‌هایی که حداقل سه رأس دارند، تحت عمل اشتقاق بسته است. در اثبات نتیجه بعد از این مطلب استفاده کرده‌ایم.



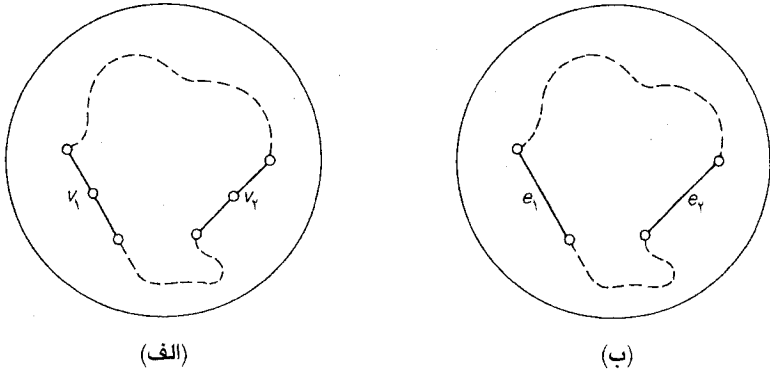
شکل ۵-۳. اشتقاق یک یال

**نتیجهٔ ۲-۲-۳** اگر  $G$  یک بلوک با شرط  $v \geq 3$  باشد، آنگاه هر دو یال  $G$  روی یک دور مشترک قرار دارند.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک بلوک با شرط  $v \geq 3$  و  $e_1$  و  $e_2$  دو یال از  $G$  باشند. با اشتقاق یال‌های  $e_1$  و  $e_2$  گراف جدیدی مانند  $G'$  می‌سازیم و رأس‌های جدید را  $v_1$  و  $v_2$  می‌نامیم. به روشنی  $G'$  یک بلوک با حداقل پنج رأس است و بنابراین ۲-همبند می‌باشد. بنابراین نتیجهٔ ۱-۲-۳  $v_1$  و  $v_2$  روی یک دور مشترک از  $G'$  قرار دارند، در نتیجه  $e_1$  و  $e_2$  نیز روی دور مشترکی از  $G$  قرار خواهند داشت (شکل ۶-۳ را ملاحظه نمایید). □

قضیهٔ ۲-۳ دارای تعمیمی برای گراف‌های  $k$ -همبند است که به عنوان قضیهٔ منجر<sup>۱</sup> معروف است: گراف  $G$  با  $v \geq k+1$ ،  $k$ -همبند است اگر و تنها اگر هر دو رأس متمایز  $G$  به وسیلهٔ حداقل  $k$  مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصل باشند. یک مشابه یالی نیز برای این قضیه وجود دارد: گراف  $G$ ،  $k$ -همبند یالی است اگر و

تنها اگر هر دو رأس متمایز  $G$  به وسیله  $k$  مسیر یال-مجزا به یکدیگر متصل باشند. اثبات این قضایا در فصل ۱۱ آمده است.



شکل ۳-۶. (الف)  $G'$  (ب)  $G$

### تمرین‌ها

۱-۲-۳ نشان دهید که گراف  $G$ ، ۲-همبند یالی است اگر و تنها اگر هر دو رأس آن به وسیله دو مسیر یال-مجزا به یکدیگر متصل باشند.

۲-۲-۳ طی یک مثال نشان دهید که اگر  $P$  یک  $(u, v)$ -مسیر در گراف ۲-همبند  $G$  باشد، آنگاه  $G$  الزاماً دارای یک  $(u, v)$ -مسیر  $Q$  که مجزای داخلی از  $P$  باشد، نیست.

۳-۲-۳ نشان دهید اگر  $G$  دارای هیچ دور زوجی نباشد، آنگاه هر بلوک  $G$ ، یا  $K_1$  یا  $K_2$  یا یک دور فرد است.

۴-۲-۳ نشان دهید گراف همبندی که بلوک نباشد حداقل دارای دو بلوک است، به طوری که هر بلوک دقیقاً شامل یک رأس برشی از گراف اصلی باشد.

۵-۲-۳ نشان دهید که تعداد بلوک‌های  $G$  برابر است با  $\omega + \sum_{v \in V} (b(v) - 1)$  که در آن  $b(v)$  نمایانگر تعداد بلوک‌هایی از  $G$  است که شامل  $v$  باشند.

\*۶-۲-۳ فرض کنید  $G$  یک گراف ۲-همبند باشد و  $X$  و  $Y$  را دو زیرمجموعه مجزای از  $V$  در نظر بگیرید به طوری که هر یک حداقل شامل دو رأس باشند. نشان دهید  $G$  شامل دو مسیر متمایز  $P$  و  $Q$  است به طوری که:

(۱) ابتدای  $P$  و  $Q$  متعلق به  $X$  است،

(۲) انت‌های  $P$  و  $Q$  متعلق به  $Y$  است و

(۳) هیچ رأس داخلی از  $P$  یا  $Q$  متعلق به  $XUY$  نیست.

۳-۲-۷\* گراف ناتهی  $G$ ،  $\kappa$ -بحرانی است، اگر به‌ازای هر یال  $e$  داشته باشیم  $\kappa(G-e) < \kappa(G)$ .

الف) نشان دهید که هرگراف  $\kappa$ -بحرانی ۲-همبند، یک رأس از درجه دو دارد.

(هالین<sup>۱</sup> در سال ۱۹۶۹ نشان داده است که در حالت کلی هر گراف  $\kappa$ -بحرانی و  $\kappa$ -همبند یک رأس از درجه  $\kappa$  دارد).

ب) نشان دهید اگر  $G$  یک گراف ۲-همبند  $\kappa$ -بحرانی با شرط  $\nu \geq 4$  باشد، آنگاه

$$(G. A. Dirac) \quad \varepsilon \leq 2\nu - 4$$

۳-۲-۸ یک الگوریتم خوب برای پیدا کردن بلوک‌های یک گراف توضیح دهید.

## کاربردها

### ۳-۳ ساخت شبکه‌های ارتباطی قابل اعتماد

اگر گراف  $G$  نمایانگر یک شبکه ارتباطی باشد، همبندی (یا همبندی یالی) گراف، نشان‌دهنده کمترین تعداد ایستگاه‌های ارتباطی (یا پیوندهای ارتباطی) خواهد بود که از کار افتادن آن‌ها ارتباطات را در سیستم به مخاطره می‌اندازد. هر اندازه که همبندی یا همبندی یالی بیشتر باشد، شبکه قابل اعتمادتر خواهد بود. به همین خاطر یک شبکه درختی، همانند آنچه توسط الگوریتم کروسکال به دست آوردیم، چندان قابل اعتماد نیست. بنابراین تعمیم زیر از مسأله ارتباط دهی را در نظر می‌گیریم:

فرض کنید  $k$  یک عدد صحیح مثبت و  $G$  یک گراف وزندار باشد. یک زیرگراف فراگیر  $\kappa$ -همبند با کمترین وزن در  $G$  معین نماید.

به‌ازای  $k=1$  این مسأله به مسأله ارتباط دهی تبدیل می‌شود که می‌توان توسط الگوریتم کروسکال به آن پاسخ داد. به‌ازای مقادیر بزرگتر  $k$ ، مسأله حل نشده است و انتظار می‌رود که حل آن دشوار باشد. به هر حال اگر  $G$  گراف کاملی باشد که در آن به هر یال وزن واحد نسبت داده باشیم، مسأله راه‌حل ساده‌ای خواهد داشت که در زیر آمده است.

روشن است که در یک گراف کامل وزندار با  $n$  رأس که به هریال آن وزن واحد نسبت داده شده است، یک زیرگراف فراگیر  $m$ -همبند با کمترین وزن، در حقیقت یک زیرگراف  $m$ -همبند و  $n$  رأسی با کمترین تعداد یال ممکن است. کمترین تعداد یال‌هایی که یک گراف  $m$ -همبند  $n$ -رأسی می‌تواند داشته باشد را با  $f(m, n)$  نمایش می‌دهیم (البته فرض می‌کنیم که  $m < n$ ). بنابر قضیه‌های ۱-۳ و ۱-۱ داریم:

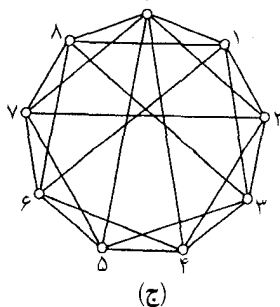
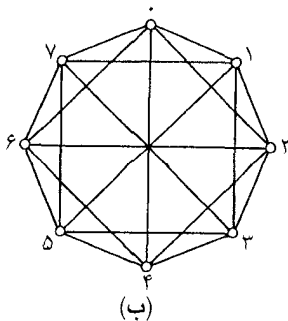
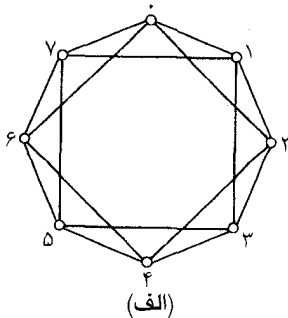
$$f(m, n) \geq \left\lceil \frac{mn}{3} \right\rceil \quad (۱-۳)$$

نشان خواهیم داد که در رابطه (۱-۳) تساوی برقرار است به این ترتیب که یک گراف  $m$ -همبند  $H_{m,n}$  با  $n$ -رأس می‌سازیم به طوری که دقیقاً  $\left\lceil \frac{mn}{3} \right\rceil$  یال داشته باشد. ساختن  $H_{m,n}$  بستگی به زوجیت  $m$  و  $n$  دارد. بنابراین سه حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت (۱)  $m$  زوج باشد. اگر  $m=2r$ ، آنگاه  $H_{2r,n}$  گرافی خواهد بود با رأس‌های  $0, 1, \dots, n-1$  که در آن دو رأس  $i$  و  $j$  متصلند، اگر  $i-r \leq j \leq i+r$  (عمل جمع به پیمانه  $n$  انجام می‌گیرد). در شکل ۷-۳ الف نشان داده شده است.

حالت (۲)  $m$  فرد و  $n$  زوج باشد. اگر  $m=2r+1$ ، آنگاه  $H_{2r+1,n}$  را این‌گونه می‌سازیم: ابتدا  $H_{2r,n}$  را رسم می‌کنیم و سپس به ازای  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ ، یال‌هایی را که رأس  $i$  را به رأس  $i + (\frac{n}{2})$  وصل می‌کنند، اضافه می‌نماییم. در شکل ۷-۳ ب نشان داده شده است.

حالت (۳)  $m$  و  $n$  هر دو فرد باشند. اگر  $m=2r+1$ ، آنگاه  $H_{2r+1,n}$  را بدین صورت می‌سازیم: ابتدا  $H_{2r,n}$  را رسم می‌کنیم و سپس یال‌هایی که رأس  $0$  را به رأس‌های  $(\frac{n-1}{2})$  و  $(\frac{n+1}{2})$  وصل می‌کنند و همچنین به ازای  $1 \leq i < \frac{n-1}{2}$ ، یال‌هایی را که رأس  $i$  را به رأس  $i + \frac{n+1}{2}$  متصل می‌کنند، اضافه می‌نماییم. در شکل ۷-۳ ج نشان داده شده است.



شکل ۷-۳. (الف)  $H_{4,8}$  (ب)  $H_{5,8}$  (ج)  $H_{5,9}$

**قضیهٔ ۳-۳** (هراری ۱۹۶۲<sup>۱</sup>) گراف  $H_{m,n}$ ،  $m$ -همبند است.

**اثبات** حالت  $m=2r$  را در نظر بگیرید. نشان خواهیم داد که  $H_{2r,n}$  دارای برشی رأسی با کمتر از  $2r$  رأس نیست. فرض می‌کنیم در صورت امکان  $V'$  یک برش رأسی باشد شرط  $|V'| < 2r$  و  $i$  و  $j$  دو رأس در مؤلفه‌های متفاوتی از  $H_{2r,n}-V'$  باشند. دو مجموعه از رأس‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$$

9

$$T = \{j, j+1, \dots, i-1, i\}$$

با فرض اینکه جمع‌ها به پیمانه  $n$  انجام می‌گیرند. چون  $|V'| < 2r$ . بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم که  $|V' \cap S| < r$ . در این صورت واضح است که دنباله‌ای از رأس‌های متمایز در  $S \setminus V'$  وجود دارد که با  $i$  شروع شده و به  $j$  ختم می‌شود و تقاض هر دو جملهٔ متوالی حداکثر  $r$  است. ولی این چنین دنباله‌ای یک  $(i, j)$ -مسیر در  $H_{2r,n}-V'$  می‌باشد که یک تناقض است. بنابراین  $H_{2r,n}$ ،  $2r$ -همبند است.

حالت  $m=2r+1$  را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۳-۳-۱). □

به راحتی می‌توان دید که  $\varepsilon(H_{m,n}) = \lceil \frac{mn}{4} \rceil$ . زیرا طبق قضیهٔ ۳-۳ داریم:

$$f(m, n) \leq \lceil \frac{mn}{4} \rceil \quad (2-3)$$

از رابطه‌های (۱-۳) و (۲-۳) نتیجه می‌شود که:

$$f(m, n) \leq \lceil \frac{mn}{4} \rceil$$

و  $H_{m,n}$  یک گراف  $m$ -همبند  $n$  رأسی با حداقل تعداد یال‌های ممکن است.

یادآوری می‌کنیم که چون در هر گراف  $G$ ، رابطهٔ  $\kappa \leq \kappa'$  برقرار است (قضیهٔ ۱-۳).  $H_{m,n}$ ،  $m$ -همبند یالی

نیز هست. بنابراین اگر کمترین تعداد یال‌های ممکن برای یک گراف  $m$ -همبند یالی  $n$  رأسی را با  $g(m, n)$

نمایش دهیم به‌ازای  $1 < m < n$  داریم:

$$g(m, n) = \lceil \frac{mn}{4} \rceil \quad (3-3)$$

## تمرین‌ها

- ۱-۳-۳ نشان دهید  $H_{2r+1, n}$ ،  $(2r+1)$ -همبند است.
- ۲-۳-۳ نشان دهید که  $\kappa(H_{m, n}) = \kappa'(H_{m, n}) = m$ .
- ۳-۳-۳ یک گراف با ۹ رأس و ۲۳ یال بیابید به طوری که ۵-همبند باشد، ولی با گراف  $H_{5, 9}$  شکل ۳-۷ ج یکرخت نباشد.
- ۴-۳-۳ نشان دهید رابطه (۳-۳) به ازای تمامی مقادیر  $m$  و  $n$  با شرط  $m > 1$  و  $n > 1$  برقرار است.
- ۵-۳-۳ به ازای هر  $v \geq 5$ ، یک گراف ۲-همبند  $G$  با قطر دو پیدا کنید که در آن رابطه  $\varepsilon = 2v - 5$  برقرار باشد.
- (مورتی<sup>۱</sup> در سال ۱۹۶۹ نشان داد که هر گراف با ویژگی‌های فوق، حداقل  $5 - 2v$  یال دارد).

## مراجع

- Halin, R. (1969). *A theorem on  $n$ -connected graphs*. *J. Combinatorial Theory*, 7, 150–54
- Harary, F. (1962). *The maximum connectivity of a graph*. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 48, 1142–46
- Murty, U. S. R. (1969). *Extremal nonseparable graphs of diameter 2*, in *Proof Techniques in Graph Theory* (ed. F. Harary), Academic Press, New York. pp.111–18
- Whitney, H. (1932). *Non-separable and planar graphs*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 34, 339–62

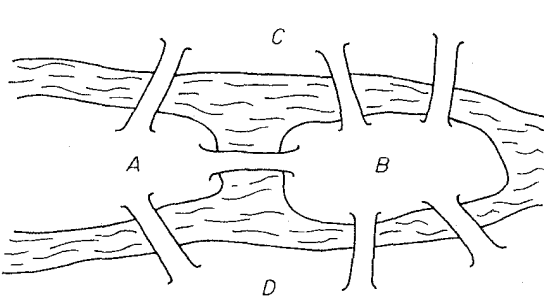


## تورهای اویلری و دورهای همیلتنی

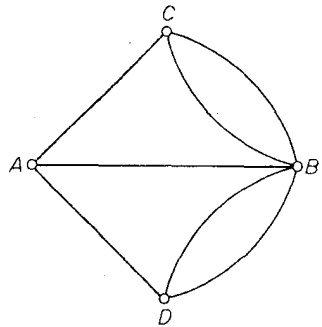
### ۱-۴ تورهای اویلری

گذرگاهی که از تمام یال‌های  $G$  عبور کند، یک گذرگاه اویلری نامیده می‌شود. اویلر اولین کسی بود که وجود چنین گذرگاه‌هایی را در گراف‌ها مورد بررسی قرار داد. او در اولین مقاله‌ای که در زمینه نظریه گراف منتشر شد [Euler; 1736] نشان داد که نمی‌توان با یک گشت در شهر، از روی هر هفت پل کونیگسبرگ<sup>۱</sup> یک بار و فقط یک بار عبور کرد. نقشه کونیگسبرگ و رودخانه پرجل<sup>۲</sup> در شکل ۴-۱ الف نشان داده شده است. گراف شکل ۴-۱ ب دارای گذرگاه اویلری نیست.

یک تور از  $G$ ، گشت بسته‌ای است که از هر یال  $G$  حداقل یک بار عبور می‌کند. تور اویلری توری است که از هر یال دقیقاً یک بار عبور می‌کند (به عبارت دیگر، یک گذرگاه اویلری بسته است). می‌گوییم یک گراف اویلری است، اگر شامل یک تور اویلری باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱. پل‌های کونیگسبرگ و گراف آنها

**قضیهٔ ۱-۳** یک گراف همبند ناتهی، اوپلری است اگر و تنها اگر دارای هیچ رأس فردی نباشد.

**اثبات** فرض کنید  $G$  اوپلری بوده و  $C$  یک تور اوپلری از  $G$  با ابتدا (و انتهای)  $u$  باشد. هرگاه از یک رأس  $v$  به عنوان رأس داخلی تور  $C$  عبور می‌کنیم، دو یال مجاور  $v$  شمردن می‌شوند. از آن جایی که تور اوپلری شامل تمام یال‌های  $G$  می‌باشد، به‌زای هر  $v \neq u$ ،  $d(v)$  زوج است. به‌طور مشابه چون  $C$  از  $u$  شروع شده و به  $u$  ختم می‌گردد،  $d(u)$  نیز زوج است. بنابراین  $G$  دارای هیچ رأس فردی نیست.

برعکس فرض کنید  $G$  یک گراف همبند غیر اوپلری با حداقل یک یال باشد که هیچ رأس فردی ندارد. گراف  $G$  را طوری انتخاب می‌کنیم که کمترین یال‌های ممکن را داشته باشد. چون درجهٔ هر رأسی حداقل دو می‌باشد،  $G$  شامل یک گذرگاه بسته است (تمرین ۱-۷-۲). فرض کنید  $C$  یک گذرگاه بسته با بیشترین طول ممکن در  $G$  باشد. طبق فرض،  $C$  یک تور اوپلری از  $G$  نیست و بنابراین  $G-E(C)$  دارای مؤلفه‌ای مانند  $G'$  با  $\varepsilon(G') > 0$  می‌باشد. چون خود  $C$  اوپلری است، پس دارای هیچ رأس فردی نیست. بنابراین گراف همبند هم دارای هیچ رأس فردی نمی‌باشد. از آن جایی که  $\varepsilon(G') < \varepsilon(G)$ ، با توجه به چگونگی انتخاب  $G$  نتیجه می‌شود که  $G'$  دارای یک تور اوپلری مانند  $C$  است. اکنون چون  $G$  همبند است، رأسی مانند  $v$  در  $V(C) \cap V(C')$  وجود دارد و بدون این‌که به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم که  $v$  ابتدا و انتهای  $C$  و  $C'$  می‌باشد. اما در این صورت  $CC'$  یک گذرگاه بسته  $G$  با شرط  $\varepsilon(CC') > \varepsilon(C)$  می‌باشد که با چگونگی انتخاب  $C$  در تناقض است.  $\square$

**نتیجهٔ ۱-۴** یک گراف همبند دارای گذرگاه اوپلری است اگر و تنها اگر حداکثر دو رأس فرد داشته باشد.

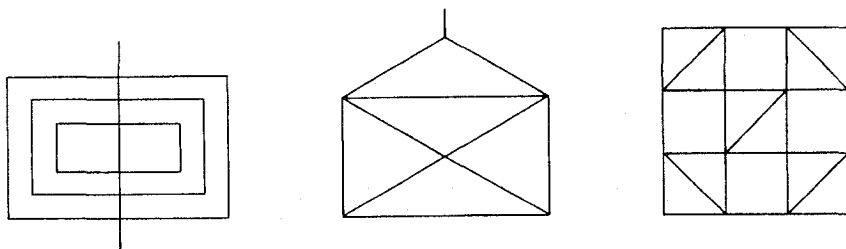
**اثبات** اگر  $G$  دارای یک گذرگاه اوپلری باشد، در این صورت همانند آنچه در اثبات قضیهٔ ۱-۴ گفته شد، هر رأسی به غیر از ابتدا و انتهای این گذرگاه از درجهٔ زوج خواهد بود.

برعکس فرض کنید که  $G$  یک گراف همبند غیربدیهی با حداکثر دو رأس از درجهٔ فرد باشد. اگر  $G$  دارای هیچ رأس فردی نباشد، طبق قضیهٔ ۱-۳ شامل یک گذرگاه اوپلری بسته خواهد بود.

در غیراین صورت  $G$  دقیقاً دارای دو رأس  $u$  و  $v$  از درجهٔ فرد خواهد بود. در این حالت، فرض کنید  $G+e$  گرافی باشد که از افزودن یال جدیدی که  $u$  و  $v$  را به یکدیگر وصل می‌کند، ایجاد شده است. واضح است که تمام رأس‌های  $G+e$  زوج‌اند و بنابراین قضیهٔ ۱-۴،  $G+e$  دارای یک تور اوپلری مانند  $C = v_0 e_1 v_1 \dots e_{\varepsilon+1} v_{\varepsilon+1}$  می‌باشد که در آن رابطهٔ  $e_1 = e$  برقرار است. گذرگاه  $v_1 e_2 v_2 \dots e_{\varepsilon+1} v_{\varepsilon+1}$  یک گذرگاه اوپلری در  $G$  خواهد بود.  $\square$

## تمرین‌ها

۱-۴-۱ کدامیک از اشکال زیر را می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم نمود به شرط اینکه از روی یک خط بیش از یک بار عبور نکنیم.



۲-۴-۱ در صورت امکان یک گراف اویلری  $G$  با  $v$  زوج و  $\varepsilon$  فرد رسم کنید. اگر چنین گرافی وجود ندارد، علت را بیان کنید.

۳-۴-۱ نشان دهید اگر  $G$  اویلری باشد، آنگاه هر بلوک  $G$  اویلری است.

۴-۴-۱ نشان دهید اگر  $G$  شامل هیچ رأس فردی نباشد، آنگاه دورهای یال-مجزای  $C_1, C_2, \dots, C_m$  و  $C_m$  وجود دارند به طوری که  $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_m)$ .

۵-۴-۱ نشان دهید اگر گراف همبند  $G$ ،  $\forall k > 0$  رأس از درجه فرد داشته باشد، آنگاه  $k$  گذرگاه یال-مجزای  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  وجود دارند. به طوری که:

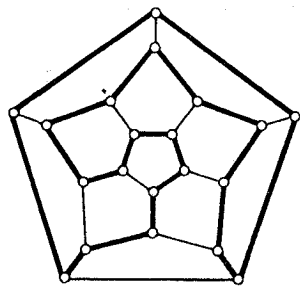
$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \dots \cup E(Q_k)$$

\*۶-۴-۱ فرض کنید  $G$  غیربدیهی و اویلری و  $v \in V$  باشد. نشان دهید هر گذرگاه  $G$  با ابتدای  $v$  را می‌توان (O. Ore) به یک تور اویلری  $G$  توسعه داد اگر و تنها اگر  $G-v$  جنگل باشد.

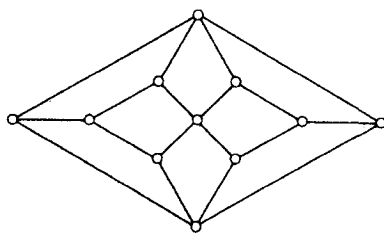
## ۲-۴ دورهای همیلتنی

مسیری که شامل تمام رأس‌های  $G$  باشد، یک مسیر همیلتنی از  $G$  نامیده می‌شود. به طور مشابه، یک دور همیلتنی از  $G$  دوری است که شامل تمام رأس‌های  $G$  باشد. این گونه مسیرها و دورها به افتخار همیلتن<sup>(۱۸۵۶)</sup> نامگذاری شده‌اند. او در نامه‌ای به دوست خود گریوز<sup>۲</sup>، به تشریح یک بازی ریاضیاتی روی دوازدهوجهی (شکل ۲-۴ الف) پرداخت که در آن یک نفر پنج میخ کوچک را در پنج رأس متوالی دلخواه قرار

می‌دهد و نفر دوم باید مسیر را طوری کامل کند که یک دور فراگیر تشکیل شود. گرافی که شامل یک دور همیلمنتی باشد، گراف همیلمنتی نامیده می‌شود. دوازده‌وجهی همیلمنتی است (شکل ۴-۲ الف را ملاحظه نمایید). در عوض گراف هرشل<sup>۱</sup> (شکل ۴-۲) ناهمیلمنتی می‌باشد، چون دویخشی است و تعداد رأس‌های آن فرد است.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲. (الف) دوازده وجهی (ب) گراف هرشل

برخلاف گراف‌های اوپلری، تاکنون هیچ شرط لازم و کافی غیربديهی، برای همیلمنتی بودن گراف‌ها شناخته نشده است. در حقیقت مسأله پیدا کردن این چنین شرطی یکی از مهم‌ترین مسائل حل نشده در نظریه گراف‌ها می‌باشد.

ابتدا به بررسی یک شرط لازم ساده و در عین حال مفید می‌پردازیم:

**قضیهٔ ۲-۴** اگر  $G$  همیلمنتی باشد، آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعه سرهٔ ناتهی  $S$  از  $V$  داریم:

$$\omega(G-S) \leq |S| \quad (۴-۱)$$

**اثبات** فرض کنید  $C$  یک دور همیلمنتی از  $G$  باشد. آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی  $S$  از  $V$  داریم:

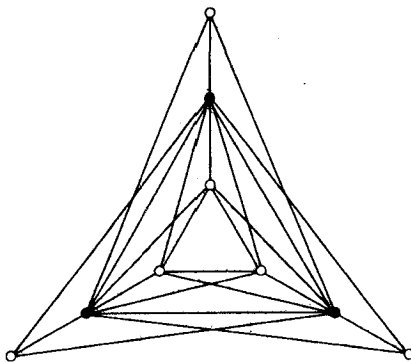
$$\omega(C-S) \leq |S|$$

همچنین  $C-S$  یک زیرگراف فراگیر از  $G-S$  است. بنابراین:

$$\omega(G-S) \leq \omega(C-S)$$

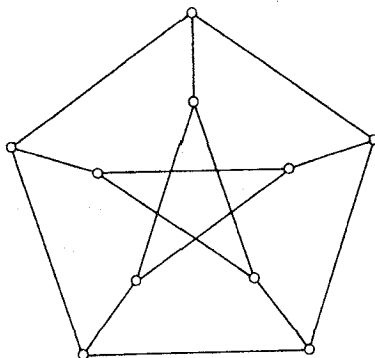
بدین ترتیب درستی قضیه نتیجه می‌گردد.  $\square$

به عنوان توضیحی برای قضیه فوق، گراف شکل ۳-۴ را در نظر بگیرید. این گراف نه رأس دارد. با برداشتن سه رأس که با رنگ سیاه مشخص شده‌اند، چهار مؤلفه باقی می‌ماند. بنابراین رابطه (۱-۴) برقرار نیست و در نتیجه طبق قضیه ۲-۴ این گراف ناهمیلتنی است.



شکل ۳-۴

همان طور که دیدیم گاهی اوقات می‌توان از قضیه ۲-۴ برای نشان دادن این که گراف خاصی ناهمیلتنی است، استفاده کرد. به هر حال این روش همیشه کارآمد نیست. به عنوان مثال گراف پترسن (شکل ۴-۴) ناهمیلتنی است. ولی این مطلب را نمی‌توان از قضیه ۲-۴ نتیجه گرفت.



شکل ۴-۴. گراف پترسن

حال به بررسی یک شرط کافی برای همیلتنی بودن گراف  $G$  می‌پردازیم. از آنجایی که یک گراف همیلتنی است اگر و تنها گراف ساده زمینهٔ آن همیلتنی باشد، کافی است بحث خود را بر روی گراف‌های ساده متمرکز کنیم. برای شروع، نتیجه‌ای را که متعلق به دیراک<sup>۱</sup> (۱۹۵۲) است بررسی می‌نماییم.

**قضیهٔ ۳-۴** اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $v \geq 3$  و  $\delta \geq \frac{v}{3}$  باشد، در این صورت  $G$  همیلتنی است.

**اثبات** از طریق تناقض. فرض کنید قضیه نادرست باشد و  $G$  را به‌عنوان یک گراف ساده ناهمیلتنی ماکزیمال با  $v \geq 3$  و  $\delta \geq \frac{v}{3}$  در نظر بگیرید. با توجه به شرط  $v \geq 3$ ،  $G$  نمی‌تواند کامل باشد. فرض کنید  $u$  و  $v$  دو رأس غیر مجاور در  $G$  باشند. با توجه به انتخاب  $G$ ،  $G+uv$  همیلتنی است. به‌علاوه چون  $G$  ناهمیلتنی است، هر دور همیلتنی از  $G+uv$  باید شامل یال  $uv$  باشد. بنابراین یک مسیر همیلتنی  $v_1 v_2 \dots v_r$  در  $G$  وجود دارد که ابتدای آن  $u=v_1$  و انتهای آن  $v=v_r$  می‌باشد. قرار می‌دهیم:

$$S = \{v_i | uv_{i+1} \in E\} \text{ و } T = \{v_i | v_i v \in E\}$$

با توجه به شرط  $v_r \notin S \cup T$  داریم:

$$|S \cup T| < v \quad (2-4)$$

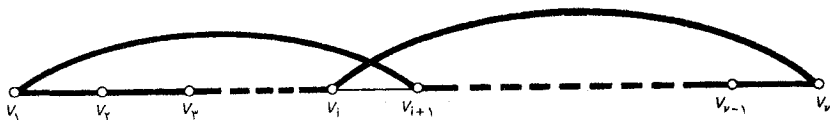
همچنین

$$|S \cap T| = 0 \quad (3-4)$$

زیرا اگر  $S \cap T$  شامل رأسی مانند  $v_i$  باشد، آنگاه  $G$  باید دارای دور همیلتنی زیر باشد:

$$v_1 v_2 \dots, v_i v_r v_{r-1} \dots, v_{i+1} v_1$$

که با فرض اولیه در تناقض است (شکل ۵-۴ را ملاحظه نمایید).



شکل ۵-۴

با استفاده از روابط (۲-۴) و (۳-۴) خواهیم داشت:

$$d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| < v \quad (4-4)$$

ولی این رابطه با فرض  $\delta \geq \frac{v}{3}$  متناقض است.  $\square$

باندی<sup>۱</sup> و چویتال<sup>۲</sup> (۱۹۷۴) توانستند با اصلاح روش به کار رفته در اثبات قضیه ۳-۴ شرط کافی قوی تری به دست بیاورند. ایده اصلی کار را لم زیر تشکیل می دهد.

**لم ۴-۱-۱** فرض کنید  $G$  یک گراف ساده بوده  $u$  و  $v$  دو رأس غیرمجاور  $G$  باشند، به طوری که

$$d(u) + d(v) \geq v \quad (۵-۴)$$

آنگاه  $G$  همیلتنی خواهد بود اگر و تنها اگر  $G+uv$  همیلتنی باشد.

**اثبات** اگر  $G$  همیلتنی باشد، بدیهی است که  $G+uv$  هم همیلتنی خواهد بود. برعکس فرض کنید  $G+uv$  همیلتنی باشد، ولی  $G$  همیلتنی نباشد. آنگاه همانند اثبات قضیه ۳-۴ به رابطه (۴-۴) می رسیم که با فرض (۵-۴) در تناقض است.  $\square$

با توجه به لم ۴-۱-۴ تعریف زیر را ارائه می نماییم:

اگر در گراف  $G$ ، زوج رأس های غیرمجاوری که مجموع درجات آن ها حداقل  $v$  است، به یکدیگر وصل کنیم و این کار را به طور بازگشتی تکرار کنیم تا دیگر چنین دو رأسی باقی نمانده باشد، به گرافی می رسیم که آن را **یستار**  $G$  نامیده، با  $c(G)$  نمایش می دهیم.

**لم ۴-۲-۱**  $c(G)$  خوش تعریف است.

**اثبات** فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف باشند که از وصل کردن زوج رأس های غیرمجاور  $G$  که مجموع درجات آن ها حداقل  $v$  است، به دست آمده باشند و این کار را تا آن جا ادامه داده ایم که هیچ دو رأسی با شرط فوق باقی نمانده باشند. دنباله یال هایی را که طی این عمل به  $G$  افزوده شده اند تا  $G_1$  و  $G_2$  به دست آیند، به ترتیب با  $e_1, e_2, \dots, e_m$  و  $f_1, f_2, \dots, f_n$  نمایش می دهیم. نشان خواهیم داد که هر  $e_i$  یالی از  $G_2$  و هر  $f_i$  یالی از  $G_1$  است.

فرض کنید در صورت امکان  $e_{k+1} = uv$  اولین یال در دنباله  $e_1, e_2, \dots, e_m$  باشد که در  $G_2$  نیست. اگر  $H = G + \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ، از تعریف نتیجه می شود که:

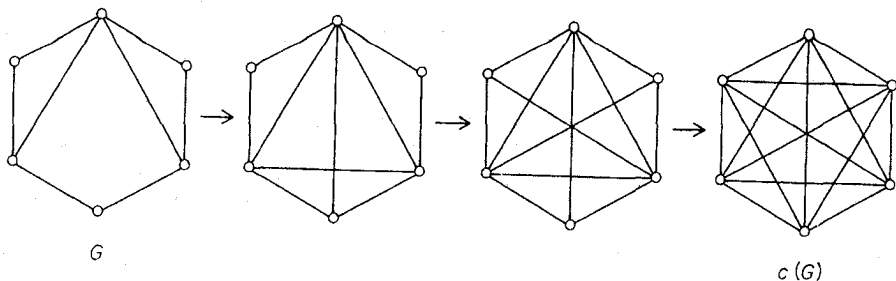
$$d_H(u) + d_H(v) \geq v$$

با توجه به انتخاب  $e_{k+1}$ ،  $H$  زیرگرافی از  $G_2$  می باشد. بنابراین:

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq v$$

این یک تناقض است. زیرا  $u$  و  $v$  در  $G_2$  غیرمجاور هستند. بنابراین هر  $e_i$  یک یال از  $G_2$  است. به طور مشابه هر  $f_i$  نیز یک یال از  $G_1$  می باشد. در نتیجه  $G_1 = G_2$  و  $c(G)$  خوش تعریف است.  $\square$

شکل ۶-۴ چگونگی ساخت بستار گراف شش رأسی  $G$  را نشان می‌دهد. در این مثال  $c(G)$  یک گراف کامل است، ولی باید توجه داشت این حالت، الزاماً همیشه رخ نمی‌دهد.



شکل ۶-۴. بستار یک گراف

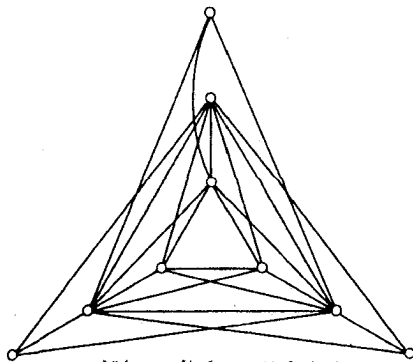
**قضیهٔ ۴-۳** یک گراف ساده، همیلتنی است اگر و تنها اگر بستار آن همیلتنی باشد.

**اثبات** هنگام ساختن بستار، هرگاه یالی افزوده شد، لم ۴-۱ را به کار می‌گیریم. □

قضیهٔ ۴-۴ چندنتیجهٔ جالب به دنبال دارد. اول آنکه چون گراف‌های کامل با حداقل سه رأس، همیلتنی هستند، بلافاصله نتیجهٔ زیر عاید ما می‌شود.

**نتیجهٔ ۴-۵** اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $v \geq 3$  و  $c(G)$  یک گراف کامل باشد، در این صورت  $G$  همیلتنی است.

به طور مثال گراف شکل ۷-۴ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان دید که بستار این گراف کامل است. بنابراین طبق نتیجهٔ ۴-۴ گراف مزبور همیلتنی است. شاید تذکر این نکته جالب باشد که گراف شکل ۷-۴ را می‌توان با جابجا کردن فقط یک یال در گراف شکل ۳-۴ به دست آورد و هنوز نتیجه‌هایی داریم (نتیجهٔ ۴-۴ و قضیهٔ ۲-۴) که به ما می‌گوید گراف جدید همیلتنی است، درحالی که دیگری همیلتنی نیست.



شکل ۷-۴. یک گراف همیلتنی



با استفاده از نتیجه ۴-۴ می توان شرطهای کافی گوناگونی برای همیلتنی بودن یک گراف، براساس درجه رأس های آن به دست آورد. به طور مثال، اگر  $\delta \geq \frac{2}{3}v$ ، واضح است که  $c(G)$  کامل خواهد بود. بنابراین می توان شرط دیراک (قضیه ۴-۳) رانتيجه مستقیمی از این قضیه دانست. چویتال (۱۹۷۲) شرطی به دست آورد که از شرط دیراک کلی تر است.

**قضیه ۴-۵** فرض کنید  $G$  یک گراف ساده با دنباله درجه های  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  باشد، به طوری که  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  و  $v \geq 3$ . اگر هیچ مقدار  $m$  ای کوچکتر از  $\frac{v}{3}$  وجود نداشته باشد که  $d_m \leq m$  و  $d_{v-m} < v-m$ ، آنگاه  $G$  همیلتنی خواهد بود.

**اثبات** فرض کنید  $G$  در فرض قضیه صدق کند. نشان خواهیم داد که بستر  $c(G)$  کامل است و در این صورت با توجه به نتیجه ۴-۴ اثبات کامل خواهد بود. درجه رأس  $v$  در  $c(G)$  را با  $d'(v)$  نمایش می دهیم.

فرض کنید  $c(G)$  کامل نباشد و  $u$  و  $v$  دو رأس غیرمجاور در  $c(G)$  باشند به طوری که:

$$d'(u) \leq d'(v) \quad (۶-۴)$$

و همچنین  $d'(u) + d'(v)$  بزرگترین مقدار ممکن را دارا باشد. چون هیچ دو رأس غیرمجاوری در  $c(G)$  نمی توانند مجموعی به اندازه  $v$  یا بیشتر داشته باشند، داریم:

$$d'(u) + d'(v) < v \quad (۷-۴)$$

اکنون مجموعه رأس هایی از  $V \setminus \{v\}$  را که در  $c(G)$ ، مجاور  $v$  نیستند با  $S$  نمایش می دهیم. همچنین مجموعه رأس هایی از  $V \setminus \{u\}$  را که در  $c(G)$  مجاور  $u$  نیستند با  $T$  نمایش می دهیم. روشن است که:

$$|S| = v - 1 - d'(v) \quad \text{و} \quad |T| = v - 1 - d'(u) \quad (۸-۴)$$

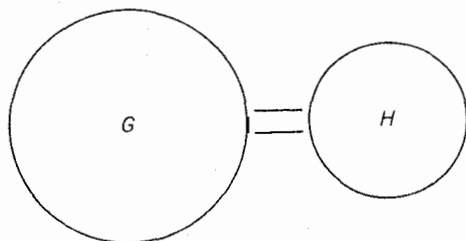
به علاوه با توجه به انتخاب  $u$  و  $v$  درجه هر رأس در  $S$  حداکثر  $d'(u)$  و درجه هر رأس در  $T \cup \{u\}$  حداکثر  $d'(v)$  می باشد. با قراردادن  $d'(u) = m$  و استفاده از روابط (۷-۴) و (۸-۴) در می یابیم که  $c(G)$  دارای حداقل  $m$  رأس از درجه حداکثر  $m$  و حداقل  $v - m$  رأس با درجه کمتر از  $v - m$  می باشد.

چون  $G$  زیرگراف فراگیری از  $c(G)$  است، عبارت فوق در مورد  $G$  نیز صدق می کند. بنابراین  $d_m \leq m$  و  $d_{v-m} < v - m$  ولی این با فرض ما تناقض دارد، چون طبق روابط (۷-۴) و (۶-۴) داریم  $m < \frac{2}{3}v$ . بنابراین  $c(G)$

کامل و بنابر نتیجه ۴-۴،  $G$  همیلتنی است.  $\square$

اغلب با محاسبهٔ دنباله درجه‌های یک گراف و به کاربردن قضیهٔ ۵-۴ می‌توان نتیجه گرفت که گراف داده شده همبلمنتی است یا نه. این روش را می‌توان در مورد گراف شکل ۷-۴ به کار برد. ولی روش مزبور در مورد گراف  $G$  در شکل ۶-۴ کارآمد نیست، هرچند که بستار گراف اخیر کامل است. از این مثال ساده نتیجه می‌گیریم که قضیهٔ ۵-۴ از قضیهٔ ۳-۴ قوی‌تر است، ولی قدرت آن به اندازهٔ نتیجهٔ ۴-۴ نیست.

می‌گوییم دنبالهٔ اعداد حقیقی  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ، فراگرفته شده توسط دنبالهٔ  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  است، اگر به‌ازای هر  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم؛  $p_i \leq q_i$ . همچنین می‌گوییم گراف  $G$ ، فراگرفتهٔ درجه‌ای توسط گراف  $H$  است، اگر  $\nu(G) = \nu(H)$  و دنبالهٔ درجه‌های غیرنزولی  $G$  توسط دنباله درجه‌های غیرنزولی  $H$  فراگرفته شده باشد. به‌طور مثال ۵-۵، فراگرفتهٔ درجه‌ای توسط  $K_{2,3}$  می‌باشد، زیرا  $(2, 2, 2, 2)$  فراگرفته شده توسط  $(2, 2, 2, 3)$  است. خانواده گراف‌های ناهمبلمنتی با درجهٔ ماکزیمال (آن‌هایی که توسط هیچ گراف ناهمبلمنتی دیگری فراگرفتهٔ درجه‌ای نیستند). ویژگی ساده‌ای دارند. ابتدا نماد اتصال دوگراف را معرفی می‌کنیم. اتصال گراف‌های مجزای  $G$  و  $H$  که آن‌را با  $G \vee H$  نمایش می‌دهیم، گرافی است که از  $G+H$  با وصل نمودن هر رأس  $G$  به هر رأس  $H$  به‌دست می‌آید و آن‌را به‌صورت نموداری، مانند شکل ۸-۴ نشان می‌دهیم.



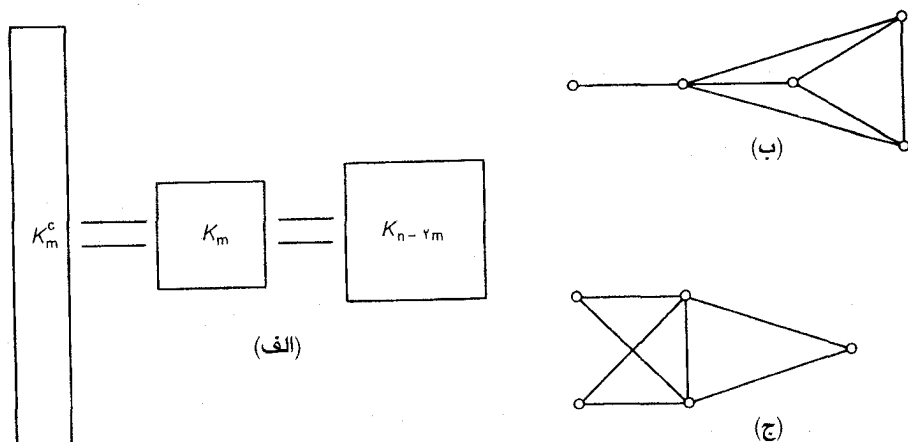
شکل ۸-۴. اتصال  $G$  و  $H$

اکنون فرض کنید که به‌ازای هر  $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$ ، نشان دهندهٔ گراف  $C_{m,n} \vee (K_m^c + K_{n-2m})$  باشد.  $C_{m,n}$  به‌همراه دو مثال خاص آن  $C_{2,5}$  و  $C_{1,5}$  در شکل ۹-۴ نشان داده شده‌اند.

ناهمبلمنتی بودن  $C_{m,n}$  بلافاصله از قضیهٔ ۲-۴ نتیجه می‌شود. چون اگر  $S$  نشان دهندهٔ مجموعهٔ  $m$  رأس

از درجهٔ  $n-1$  در  $C_{m,n}$  باشد، داریم:

$$\omega(C_{m,n}-S) = m+1 > |S|$$

شکل ۹-۴. (الف)  $C_{m,n}$ ، (ب)  $C_{1,5}$ ، (ج)  $C_{2,5}$ 

**قضیه ۴-۶** (چویتال، ۱۹۷۲) اگر  $G$  یک گراف ساده ناهمیلتنی با شرط  $v \geq 3$  باشد، آنگاه  $G$  توسط یک  $C_{m,v}$  فراگرفته درجه‌ای است.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف ساده ناهمیلتنی با دنباله درجه‌های  $(d_1, d_2, \dots, d_v)$  باشد که در آن داریم:  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_v$  و  $v \geq 3$ . طبق قضیه ۵-۴ یک  $m < \frac{v}{2}$  وجود دارد که به‌ازای آن داریم:  $d_m \leq m$  و  $d_{v-m} < v-m$ . در این صورت  $(d_1, d_2, \dots, d_v)$  توسط دنباله:

$$(m, \dots, m, v-m-1, \dots, v-m-1, v-1, \dots, v-1)$$

فراگرفته درجه‌ای می‌باشد که در آن  $m$  جمله اول برابر  $m$ ،  $v-2m$  جمله بعد برابر  $v-m-1$  و  $m$  جمله آخر برابر  $v-1$  است. از طرف دیگر دنباله مذکور، دنباله درجه‌های گراف  $C_{m,v}$  است.  $\square$

نتیجه زیر که متعلق به آر (۱۹۶۱) و باندی (۱۹۷۲) است از قضیه ۴-۶ به‌دست می‌آید.

**نتیجه ۴-۶** اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط‌های  $v \geq 3$  و  $\varepsilon > \binom{v-1}{2} + 1$  باشد، آنگاه  $G$  همیلتنی است. همچنین تنها گراف‌های ساده ناهمیلتنی با  $v$  رأس و  $\binom{v-1}{2} + 1$  یال،  $C_{1,v}$  و  $C_{2,5}$  می‌باشند.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف ساده ناهمیلتنی با  $v \geq 3$  باشد. طبق قضیه ۴-۶ به‌ازای یک عدد صحیح مثبت  $m < \frac{v}{2}$  توسط  $C_{m,v}$  فراگرفته درجه‌ای است. بنابراین طبق قضیه ۱-۱ داریم:

$$\varepsilon(G) \leq \varepsilon(C_{m,v}) \quad (۹-۴)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{v} (m^2 + (v-2m)(v-m-1) + m(v-1)) \\ &= \binom{v-1}{2} + 1 - \frac{1}{v} (m-1)(m-2) - (m-1)(v-2m-1) \\ &= \binom{v-1}{2} + 1 \end{aligned} \quad (۱۰-۴)$$

در رابطه (۹-۴) تساوی فقط وقتی برقرار است که دنباله درجه‌های  $G$  با دنباله درجه‌های  $C_{m,v}$  یکسان باشد و در رابطه (۱۰-۴) تساوی در صورتی برقرار می‌گردد که یا شرط  $m=2$  و  $v=5$  برقرار باشد یا  $m=1$  در نظر گرفته شود. بنابراین  $\varepsilon(G)$  تنها در صورتی می‌تواند برابر  $\binom{v-1}{2} + 1$  باشد که دنباله درجه‌های  $G$  برابر دنباله درجه‌های  $C_{1,v}$  یا  $C_{2,5}$  باشد و به آسانی دیده شود که در این صورت  $G \cong C_{1,v}$  یا  $G \cong C_{2,5}$ .

## تمرین‌ها

۱-۲-۴ نشان دهید در هر دو حالت زیر،  $G$  ناهمبندی است.

(الف)  $G$ ، ۲-همبند نباشد.

(ب)  $G$ ، یک گراف دوبخشی با دو بخش  $X$  و  $Y$  باشد به طوری که  $|X| \neq |Y|$ .

۲-۲-۴ موشی می‌خواهد با خوردن مسیر خود در یک مکعب قالب پنیر  $3 \times 3 \times 3$  سوراخی حفر کند که از

میان تمام ۲۷ زیرمکعب  $1 \times 1 \times 1$  آن بگذرد. اگر این موش از یک گوشه مکعب شروع کرده همواره به طرف یک زیرمکعب خورده نشده حرکت کند، آیا می‌تواند در مرکز مکعب به کار خود خاتمه دهد؟

۳-۲-۴ نشان دهید اگر  $G$  دارای یک مسیر همبندی باشد آنگاه به ازای هر زیرمجموعه سره  $S$  از  $V$  داریم:

$$\omega(G-S) \leq |S| + 1$$

۴-۲-۴ فرض کنید  $G$  یک گراف ساده غیر بدیهی با دنباله درجه‌های  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  باشد که در آن

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  نشان دهید اگر هیچ مقدار  $m$  ای کوچکتر از  $\frac{v+1}{2}$  وجود نداشته باشد که به ازای

آن  $d_m < m$  و  $d_{v-m+1} < v-m$ ، آنگاه  $G$  دارای یک مسیر همبندی خواهد بود.

۵-۲-۴ (الف) فرض کنید  $G$  یک گراف ساده غیر بدیهی با دنباله درجه‌های  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  و  $G^c$  دارای

دنباله درجه‌های  $(d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$  باشد به طوری که  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  و  $d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_n$

نشان دهید اگر به ازای هر  $m \leq \frac{v}{2}$ ، داشته باشیم:  $d_m \geq d'_m$ ، آنگاه  $G$  یک مسیر همبندی

خواهد داشت.

(ب) نتیجه بگیرید که اگر  $G$  خود مکمل باشد، در این صورت دارای یک مسیر همبندی است.

۶-۲-۴ فرض کنید  $G$  یک گراف ساده دوبخشی با دو بخش  $X$  و  $Y$  باشد به طوری که  $|X|=|Y| \geq 2$  و فرض کنید دنباله درجه‌های  $G$  برابر  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  با شرط  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$  باشد. نشان دهید اگر هیچ مقدار  $m$  ای کوچکتر یا مساوی  $\frac{v}{4}$  وجود نداشته باشد به طوری که  $d_m \leq m$  و  $d_{v/4} \leq \frac{v}{4} - m$  آنگاه  $G$  همیلتنی خواهد بود.

۷-۲-۴ نتیجه ۴-۶ را مستقیماً از نتیجه ۴-۴ به دست آورید.

۸-۲-۴ نشان دهید اگر  $G$  ساده با شرط‌های  $v \geq 6\delta$  و  $\left(\frac{v-\delta}{4}\right) + \delta^2 < \varepsilon$  باشد، آنگاه  $G$  همیلتنی خواهد بود.

۹-۲-۴ نشان دهید اگر  $G$  یک گراف همبند با شرط  $v > 2\delta$  باشد آنگاه  $G$  دارای مسیری به طول حداقل  $2\delta$  است.

(ضمناً دیراک در سال ۱۹۵۲ نشان داد که اگر  $G$  یک گراف ساده  $k$ -همبند با  $v \geq 2\delta$  باشد آنگاه  $G$  دارای دوری به طول حداقل  $2\delta$  است).

۱۰-۲-۴ با استفاده از یادداشت تمرین ۴-۹ نشان دهید که هر گراف ساده  $2k$ -منتظم با  $k+1$  رأس،  $(k \geq 1)$  همیلتنی است.

۱۱-۲-۴  $G$  همیلتن-همبند نامیده می‌شود اگر هر دو رأس  $G$  با یک مسیر همیلتنی به یکدیگر متصل باشند.

(الف) نشان دهید اگر  $G$  همیلتن-همبند و  $v \geq 4$  باشد آنگاه  $\left\lfloor \frac{1}{4}(3v+1) \right\rfloor \leq \varepsilon$ .

(ب) به ازای  $v \geq 4$  یک گراف همیلتن-همبند  $G$  با شرط  $\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{4}(3v+1) \right\rfloor$  بسازید.

(J. W. Moon)

۱۲-۲-۴  $G$  را درون-همیلتنی می‌نامیم اگر  $G$  همیلتنی نباشد، ولی به ازای هر  $v \in V$ ،  $G-v$  همیلتنی باشد. نشان دهید که گراف پترسن (شکل ۴-۴) درون-همیلتنی است.

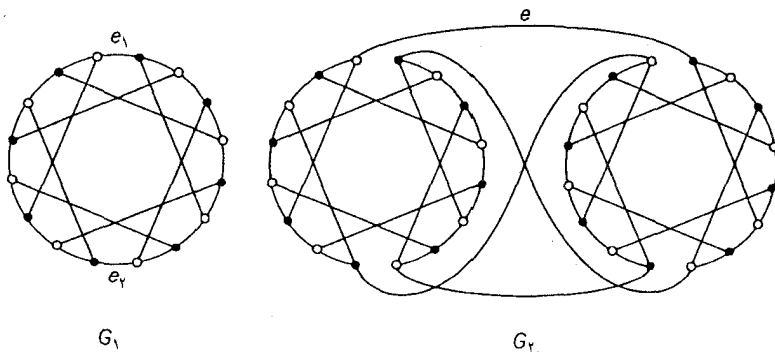
(هرز<sup>۱</sup>، دوبای<sup>۲</sup> و ویگو<sup>۳</sup> (۱۹۶۷) نشان دادند که این گراف در حقیقت کوچکترین گراف با این ویژگی است).

۱۳-۲-۴  $G$  را درون-دنبال شذنی می‌نامیم اگر  $G$  مسیر همیلتنی نداشته باشد ولی به ازای هر  $v \in V$ ،  $G-v$  دارای مسیر همیلتنی باشد. نشان دهید که گراف توماسن<sup>۴</sup> (پیوست سوم) درون-دنبال شذنی است.

۱۴-۲-۴ الف) نشان دهید هیچ دور همیلتنی در گراف  $G_1$  وجود ندارد به طوری که دقیقاً شامل یکی از دو یال  $e_1$  و  $e_2$  باشد.

ب) با استفاده از قسمت الف) نشان دهید که هر دور همیلتنی در  $G_2$  شامل یال  $e$  است.

ج) نتیجه بگیرید که گراف هر تن<sup>۱</sup> (پیوسته سوم) ناهمیلتنی است.



۱۵-۲-۴ یک الگوریتم خوب برای موارد زیر بیان کنید:

الف) ساختن بستار یک گراف؛

ب) یافتن یک دور همیلتنی، اگر بستار گراف کامل باشد.

## کاربردها

### ۳-۴ مسأله پستچی چینی

یک پستچی هر روز، نامه‌ها را از اداره پست تحویل می‌گیرد و پس از رسانیدن نامه‌ها به مقصد به اداره پست برمی‌گردد. البته او باید از تمام خیابان‌های حوزه خود حداقل یک بار بگذرد. با توجه به این شرایط او می‌خواهد مسیرش را به طریقی انتخاب کند که کمترین طول ممکن را طی کند. این مسأله به مسأله پستچی چینی مشهور است، زیرا این مسأله برای اولین بار توسط کوان<sup>۲</sup> (۱۹۶۲) ریاضی دان چینی مورد بررسی قرار گرفت.

وزن تور  $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_0$  در یک گراف وزندار عبارت است از  $\sum_{i=1}^n w(e_i)$ . در این صورت، واضح است که مسأله پستچی چینی به پیدا کردن یک تور با کمترین وزن در یک گراف همبند وزندار با وزن‌های نامنفی برمی‌گردد. یک تور با این ویژگی‌ها را تور بهینه می‌نامیم.

اگر  $G$  اویلری باشد، آنگاه هر تور اویلری از  $G$  یک تور بهینه خواهد بود. زیرا یک تور اویلری، توری است که از تمام یال‌ها دقیقاً یک بار عبور می‌کند. در این حالت مسأله پستچی چینی به راحتی حل می‌شود. زیرا الگوریتم خوبی برای این کار توسط فلوری<sup>۱</sup> ارائه شده است. ([Lucas; 1921] را ملاحظه نمایید). این الگوریتم با دنبال کردن یک گذرگاه به ساختن تور اویلری می‌پردازد، با این شرط که در هر مرحله یک یال برشی از زیرگراف دنبال نشده فقط در صورتی برداشته می‌شود که هیچ انتخاب دیگری وجود نداشته باشد.

### الگوریتم فلوری

- ۱- یک رأس دلخواه  $v_0$  را انتخاب کن و قرار بده  $W_0 = v_0$ ؛
- ۲- در صورتی که گذرگاه  $W_i = v_0 e_1 v_1 \dots e_i v_i$  انتخاب شده باشد، آنگاه یال  $e_{i+1}$  را از میان  $E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  به گونه‌ای انتخاب کن که:  
الف)  $e_{i+1}$  مجاور  $v_i$  باشد،  
ب)  $e_{i+1}$  یک یال برشی از  $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  نباشد مگر اینکه انتخاب دیگری باقی نمانده باشد.

۳- در صورتی که مرحله (۲) دیگر قابل اجرا نیست، توقف کن.

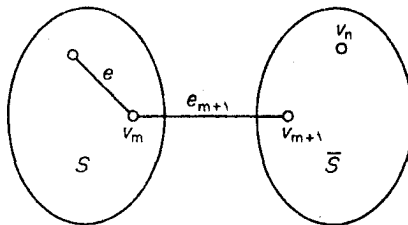
الگوریتم فلوری بنابر تعریف آن، یک گذرگاه در  $G$  می‌سازد.

**قضیه ۴-۷** اگر  $G$  اویلری باشد، آنگاه هر گذرگاهی که توسط الگوریتم فلوری در  $G$  ساخته شود یک تور اویلری در  $G$  است.

**اثبات** فرض کنید  $G$  اویلری باشد و  $W_n = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$  گذرگاهی در  $G$  باشد که توسط الگوریتم

فلوری ساخته شده است. به روشنی رأس انتهایی گذرگاه یعنی  $v_n$  باید در  $G_n$  از درجه صفر باشد. با توجه به این مطلب داریم:  $v_n = v_0$  و به عبارت دیگر  $W_n$  یک گذرگاه بسته است.

اکنون فرض کنید که  $W_n$  یک تور اویلری از  $G$  نباشد و  $S$  را به عنوان مجموعهٔ رأس‌هایی از  $G$  در نظر بگیرید که درجهٔ مثبت دارند. در این صورت  $S$  ناتهی بوده، داریم  $v_n \in \bar{S}$  که  $\bar{S} = V \setminus S$ . فرض کنید  $m$  بزرگترین عدد صحیحی باشد که به‌ازای آن داریم:  $v_m \in S$  و  $v_{m+1} \in \bar{S}$ . چون انتهای  $W_n$  در  $\bar{S}$  است،  $e_{m+1}$  تنها یال در  $[S, \bar{S}]$  و بنابراین یک یال برشی از  $G_m$  است. (شکل ۱۰-۴ را ملاحظه نمایید).



شکل ۱۰-۴

فرض کنید  $e$  یک یال دیگر مجاور با  $v_m$  در  $G_m$  باشد. با توجه به مرحلهٔ (۲) نتیجه می‌گیریم که  $e$  هم باید یک یال برشی از  $G$  و بنابراین یک یال برشی از  $G_m[S]$  باشد. ولی چون  $G_m[S] = G_n[S]$ ، هر رأس  $G_m[S]$  از درجهٔ زوج می‌باشد. به هر حال این مطلب نشان می‌دهد که  $G_m[S]$  هیچ یال برشی ندارد (تمرین ۲-۲-۶ الف و این یک تناقض است). □

اثبات این نکته که الگوریتم فلوری، یک الگوریتم خوب است، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۳-۳-۴).

اگر  $G$  اویلری نباشد، هر تور  $G$ ، و به‌طور خاص هر تور بهینه در  $G$ ، از چند یال، بیش از یک‌بار عبور می‌کند. به‌طور مثال در گراف شکل ۱۰-۴ الف  $xuywvzwyxuwvzxyx$  یک تور بهینه است (تمرین ۳-۳-۴).

توجه کنید که چهاریال  $ux$ ،  $xy$ ،  $yw$  و  $wv$  دوبار در این تور تکرار شده‌اند.

در این جا به معرفی عمل تضعیف یک یال می‌پردازیم. می‌گوییم یال  $e$  تضعیف شده است، هرگاه دو سر آن بایک یال جدید به وزن  $w(e)$  به یکدیگر متصل شوند. با تضعیف یال‌های  $ux$ ،  $xy$ ،  $yw$  و  $wv$  در گراف شکل ۱۰-۴ الف، گراف شکل ۱۰-۴ ب به دست می‌آید.

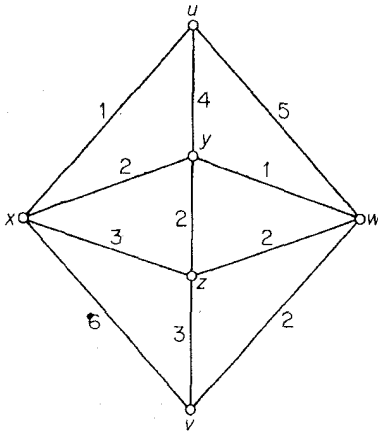
اکنون می‌توانیم مسأله پستیچی چینی را به این صورت بیان کنیم: یک گراف وزندار  $G$  با وزن‌های نامنفی داده شده است.



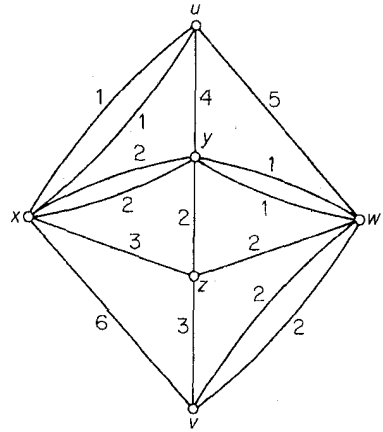
(۱) با تضعیف یال‌ها یک زیرگراف وزندار اویلری  $G^*$  از  $G$  طوری بیابید که  $w(e)$  تا حد ممکن کوچک باشد.

(۲) یک تور اویلری در  $G^*$  پیدا کنید.

صورت اخیر، هم ارز با مسأله پستچی چینی می‌باشد زیرا یک تور  $G$  که در آن از یال  $e$   $m(e)$  بار عبور شود، متناظر با یک تور اویلری در گرافی است که در آن یال  $e$ ،  $m(e)-1$  بار تضعیف شده است و بالعکس.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۱

پیش از این، الگوریتم خوبی برای حل قسمت (۲) ارائه کردیم که همان الگوریتم فلوری می‌باشد. الگوریتم خوبی نیز برای حل قسمت (۱) توسط ادموندز<sup>۱</sup> و جانسون<sup>۲</sup> (۱۹۷۳) ارائه شده است، ولی متأسفانه این راه‌حل آن قدر پیچیده است که در این مجال نمی‌گنجد.

در این جا یک حالت خاص را که حل ساده‌ای دارد، مورد بررسی قرار می‌دهیم و آن حالتی است که  $G$  دقیقاً دو رأس فرد داشته باشد.

فرض کنید  $G$  دقیقاً دارای دو رأس  $u$  و  $v$  از درجه فرد باشد و  $G^*$  یک زیرگراف فراگیر اویلری از  $G$  باشد که با تضعیف یال‌ها به دست آمده است. برای راحتی کار، به جای  $E(G^*)$  می‌نویسیم  $E^*$ . به وضوح در زیرگراف  $G^*[E^*|E]$  از  $G^*$  (زیرگراف القایی توسط یال‌هایی از  $G^*$  که در  $G$  نیستند). فقط دو رأس  $u$  و  $v$  از درجه فرد هستند. بنابر نتیجه ۱-۱ و  $u$  و  $v$  در یک مؤلفه یکسان از  $G^*[E^*|E]$  قرار دارند و بنابراین توسط یک

$(u, v)$ -مسیر مانند  $P^*$  به یکدیگر متصلند. واضح است که:

$$\sum_{e \in E \setminus E} w(e) \geq w(P^*) \geq w(P)$$

که در آن،  $P$  یک  $(u, v)$ -مسیر با کمترین وزن در  $G$  می‌باشد. بنابراین  $\sum_{e \in E \setminus E} w(e)$  هنگامی مینیمم خواهد بود که  $G^*$  از تضعیف تمام یال‌های روی یک  $(u, v)$ -مسیر با کمترین وزن در  $G$  به دست آمده باشد. یک الگوریتم خوب برای یافتن چنین مسیری در بخش ۸-۱ ارائه شده است.

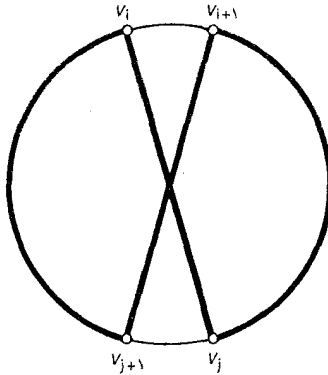
### تمرین‌ها

- ۱-۳-۴ نشان دهید که  $xywvzwyxuwvzyx$  یک تور بهینه در گراف وزندار شکل ۱۱-۴ الف است.
- ۲-۳-۴ یک نمودار گردشی برای الگوریتم فلوری رسم کنید و نشان دهید که این الگوریتم، یک الگوریتم خوب است.

### ۴-۴ مسأله فروشنده دوره گرد

یک فروشنده دوره گرد می‌خواهد به چند شهر سرکشی کند و سپس به نقطه اولش برگردد. با داشتن زمان مسافرت بین شهرها این فروشنده چگونه برنامه مسافرت خود را تنظیم کند به طوری که هر شهر را دقیقاً یک بار ملاقات کند و زمان مسافرت او به کمترین حد ممکن باشد؟ این مسأله به مسأله فروشنده دوره گرد مشهور است. به زبان گراف‌ها، هدف ما پیدا کردن یک دور همیلتنی با کمترین وزن در یک گراف کامل وزندار می‌باشد. این چنین دوری را یک دور بهینه می‌نامیم. برخلاف مسأله کوتاهترین مسیر و مسأله ارتباط دهی تاکنون هیچ الگوریتم کارآیی برای حل مسأله فروشنده دوره گرد شناخته نشده است. بنابراین در این بخش منظور اصلی یافتن روشی است که یک جواب نسبتاً خوب (ولی نه الزاماً بهینه) به ما بدهد. در ادامه نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان برخی از نظریه‌های قبلی را برای رسیدن به این منظور مورد استفاده قرار داد. یک روش ممکن این است که ابتدا یک دور همیلتنی  $C$  پیدا کنیم و سپس با تغییر مناسب  $C$ ، به دنبال یک دور دیگر با وزن کمتر بگردیم. شاید ساده‌ترین راه این تغییر به صورت زیر باشد:

فرض کنید  $C = v_1 v_2 \dots v_p v_1$ . در این صورت به ازای هر  $i$  و  $z$  به طوری که  $1 < i+1 < z < p$ ، می‌توانیم با حذف یال‌های  $v_i v_{i+1}$  و  $v_z v_{z+1}$  و افزودن یال‌های  $v_i v_z$  و  $v_{z+1} v_{i+1}$  دور همیلتنی جدید  $C_{ij} = v_1 v_2 \dots v_i v_z v_{z+1} \dots v_{i+1} v_{z+1} v_{z+2} \dots v_p v_1$  را همانند شکل ۱۲-۴ به دست آوریم.



شکل ۱۲-۴

اگر به‌ازای برخی مقادیر  $i$  و  $j$  داشته باشیم:

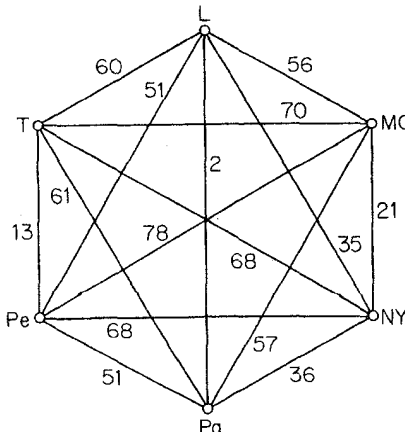
$$w(v_i v_j) + w(v_{i+1} v_{j+1}) < w(v_i v_{i+1}) + w(v_j v_{j+1})$$

آنگاه دور  $C_{ij}$ ، بهبود یافته  $C$  محسوب می‌گردد.

پس از انجام دنباله‌ای از تغییرات فوق، دوری باقی خواهد ماند که دیگر با این روش قابل بهبود نخواهد بود. این دور نهایی غالباً بهینه نیست، ولی می‌توانیم فرض کنیم که در اکثر موارد، جواب به‌دست آمده نسبتاً خوب است. برای دقت بیشتر می‌توان فرآیند فوق را چندین بار، با شروع از دوره‌های متفاوت تکرار نمود.

به‌عنوان مثال، گراف وزندار شکل ۱۳-۴ را در نظر بگیرید؛ این همان گرافی است که برای توضیح الگوریتم

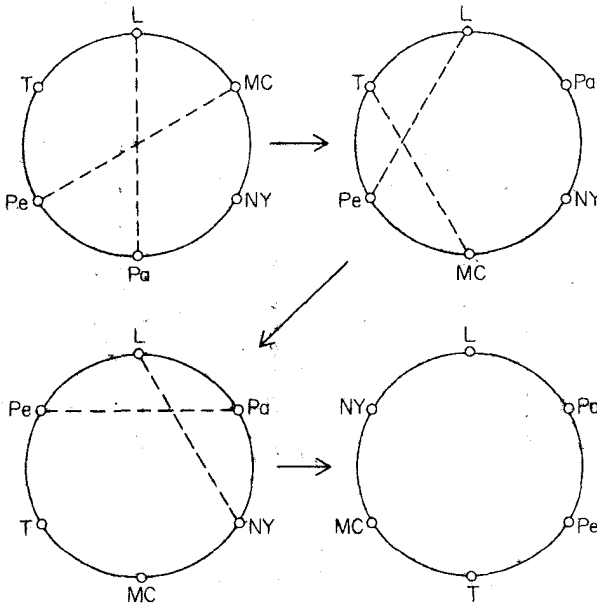
کروسکال در بخش ۲-۵ از آن استفاده کردیم.



شکل ۱۳-۴

با شروع از دور  $L MC NY Pa Pe T L$  می‌توانیم با سه تغییر متوالی همانند شکل ۱۴-۴ به دور

$L NYMCTPe Pa L$  با وزن ۱۹۲ برسیم.



شکل ۱۴-۴

گاهی اوقات برای اینکه ببینیم راه حل ما تا چه حد خوب است، می‌توانیم از الگوریتم کروسکال استفاده

کنیم. فرض کنید  $C$  یک دور بهینه در  $G$  باشد، آنگاه به‌ازای هر رأس  $v$ ،  $C-v$  یک مسیر همبستگی در  $G-v$  است و در نتیجه، یک درخت فراگیر از  $G-v$  می‌باشد. بنابراین اگر  $T$  یک درخت بهینه در  $G-v$  باشد و  $f$  و  $e$  دو یال مجاور  $v$  باشند به طوری که  $w(e) + w(f)$  کوچکترین مقدار ممکن باشد، آنگاه  $w(T) + w(e) + w(f)$  یک حد پایین برای  $w(C)$  خواهد بود. در مثال ما، با گرفتن  $NY$  به‌عنوان رأس  $v$  خواهیم داشت:

$$w(T) = 122, w(e) = 21, w(f) = 35$$

(شکل ۱۵-۴ را ملاحظه نمایید). بنابراین نتیجه می‌گیریم که وزن  $w(C)$  برای یک دور بهینه در گراف

شکل ۱۳-۴ در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$178 \leq w(C) \leq 192$$

روشی که در اینجا توضیح داده شده توسط لن<sup>۱</sup> (۱۹۶۵) و هلد<sup>۲</sup> و کارپ<sup>۳</sup> (۱۹۷۱ و ۱۹۷۰) توسعه یافته است. به عنوان مثال، لن دریافت که فرآیند تغییر دور را می‌توان به نحو موثرتری انجام داد، بدین ترتیب که در هر مرحله به جای دو یال، سه یال را جایگزین می‌کنیم و جالب‌تر آن‌که، توسعهٔ بیشتر این ایده مفید نخواهد بود. به منظور بررسی بیشتر مسأله فروشنده دوره‌گرد، به [Bellmore and Nemhauser; 1968] مراجعه نمایید.

### تمرین

۴-۱\* فرض کنید  $G$  یک گراف کامل وزندار باشد که وزن‌های آن در نامساوی مثلثی صدق می‌کنند یعنی به ازای هر  $x, y, z \in V$  داریم:  $w(xy) + w(yz) \geq w(xz)$ . نشان دهید که اگر  $T$  یک درخت بهینه در  $G$  باشد، آنگاه وزن هر دور بهینه در  $G$  حداکثر  $2w(T)$  خواهد بود.

(D. J. Rosenkrantz, R. E. Stearns, P. M. Lewis)

## مراجع

- Bellmore, M. and Nemhauser, G. L. (1968). *The traveling salesman problem: a survey. Operations Res.*, 16, 538–58
- Bondy, J. A. (1972). *Variations on the hamiltonian theme. Canad. Math. Bull.*, 15, 57–62
- Bondy, J. A. and Chvátal, V. (1974). *A method in graph theory (in press)*
- Chvátal, V. (1972). *On Hamilton's ideals. J. Combinatorial Theory B*, 12, 163–68
- Dirac, G. A. (1952). *Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc.*, 2, 69–81
- Edmonds, J. and Johnson, E. L. (1973). *Matching, Euler tours and the Chinese postman. Math. Programming*, 5, 88–124
- Euler, L. (1736). *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae*, 8, 128–40
- Hamilton, W. R. (1856). *Letter to John T. Graves on the Icosian, 17 Oct., 1856, in The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton (eds. H. Halberstam and R. E. Ingram), vol.3 (Algebra), Cambridge University Press, 1931, pp. 612–25*
- Held, M. and Karp, R. M. (1970). *The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. Operations Res.*, 18, 1138–62
- Held, M. and Karp, R. M. (1971). *The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II, Math. Programming*, 1, 6–25
- Herz, J. C., Duby, J. J. and Vigué, F. (1976). *Recherche systématique des graphes hypohamiltoniens, in Théorie des Graphes (ed. P. Rosenstiehl), Dunod-Gordon and Breach, pp. 153–59*
- Kuan, M. K. (1962). *Graphic programming using odd or even points. Chinese Math.*, 1, 273–77
- Lin, S. (1965). *Computer solutions of the traveling salesman problem, Bell System Tech. J.*, 44, 2245–69
- Lucas, E. (1921). *Récréations Mathématiques IV, Paris*
- Ore, O. (1961). *Arc coverings of graphs. Ann. Mat. Pura Appl.*, 55, 315–21

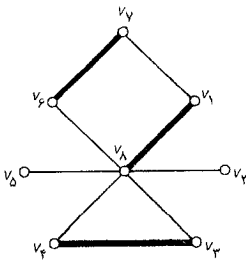
# فصل ۵

## تطابق‌ها

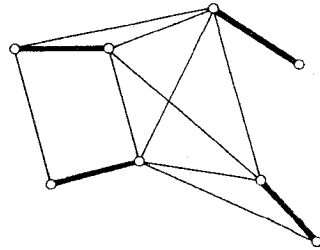
### ۱-۵ تطابق‌ها

زیرمجموعه  $M$  از  $E$  یک تطابق در  $G$  نامیده می‌شود، اگر عضوهای آن، یال‌های پیوندی بوده، هیچ دوتای آن‌ها در  $G$  مجاور نباشند و این‌طور بیان می‌شود که دو سر یال‌های  $M$  تحت  $M$  مطابق شده‌اند. اگر یالی از  $M$  مجاور رأس  $v$  باشد، می‌گوییم  $M$  رأس  $v$  را آلوده کرده است و  $v$  را نیز  $M$ -آلوده می‌نامیم، در غیراین صورت  $v$ ،  $M$ -ناآلوده نامیده می‌شود.

اگر هر رأس  $G$ ،  $M$ -آلوده باشد، تطابق  $M$  کامل است.  $M$  یک تطابق ماکزیمم است اگر هیچ تطابق  $M'$  با شرط  $|M'| > |M|$  در  $G$  وجود نداشته باشد. به‌وضوح هر تطابق کامل ماکزیمم نیز هست. تطابق‌های کامل و ماکزیمم در گراف‌های شکل ۱-۵ مشخص شده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۱-۵. (الف) یک تطابق ماکزیمم (ب) یک تطابق کامل

فرض کنید  $M$  یک تطابق در  $G$  باشد. یک مسیر  $M$ -متناوب در  $G$ ، مسیری است که یال‌های آن یک‌درمیان در  $E \setminus M$  و  $M$  باشند. به‌طورمثال، مسیر  $v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$  در گراف شکل ۱-۵ الف یک مسیر  $M$ -متناوب است. مسیر  $M$ -افزوده یک مسیر  $M$ -متناوب است که ابتدا و انتهای آن  $M$ -نالوده می‌باشند.

**قضیهٔ ۱-۵** (Berge, ۱۹۵۷) تطابق  $M$  در  $G$  یک تطابق ماکزیمم است اگر و تنها اگر  $G$  شامل هیچ مسیر  $M$ -افزوده‌ای نباشد.

**اثبات** فرض کنید  $M$  یک تطابق در  $G$  باشد و همچنین  $G$  شامل یک مسیر  $M$ -افزوده  $v_1 \dots v_{m+1}$  باشد.  $M' \subseteq E$  را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

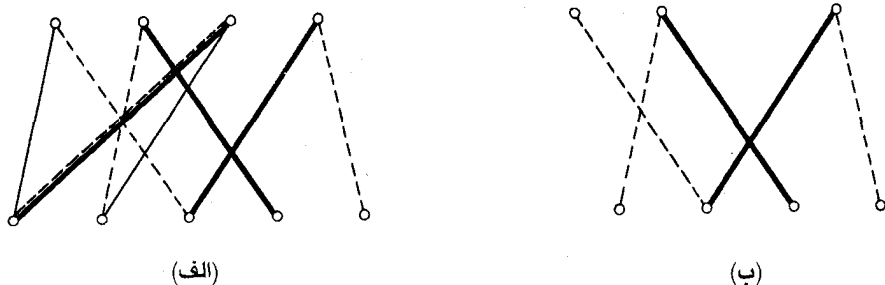
$$M' = (M \setminus \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{m-1} v_m\}) \cup \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_m v_{m+1}\}$$

در این صورت  $M'$  یک تطابق در  $G$  است و داریم:  $|M'| = |M| + 1$ . بنابراین  $M$  یک تطابق ماکزیمم نیست.

برعکس، فرض کنید  $M$  یک تطابق ماکزیمم نباشد و  $M'$  را یک تطابق ماکزیمم در  $G$  در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$|M'| > |M| \quad (۱-۵)$$

گراف  $H$  را به‌صورت  $H = G[M \Delta M']$  تعریف می‌کنیم که در آن  $M \Delta M'$  نمایانگر تفاضل متقارن  $M$  و  $M'$  است (شکل ۲-۵ را ملاحظه نمایید).



شکل ۲-۵. (الف)  $G$  با  $M$  ضخیم و  $M'$  مقطع (ب)  $G[M \Delta M']$

درجهٔ هر رأس  $H$  برابر یک یا دو است، زیرا هر رأس آن می‌تواند حداکثر با یک یال از  $M$  و یک یال از  $M'$  مجاور باشد. بنابراین هر مؤلفه  $H$  یا یک دور زوج است که یال‌های آن یک‌درمیان در  $M$  و  $M'$  قرار دارند و یا



مسیری است که یال‌های آن به‌طور متناوب متعلق به  $M$  و  $M'$  هستند. طبق رابطهٔ ۱-۵، تعداد یال‌های  $M'$  موجود در  $H$  بیشتر از  $M$  است و بنابراین یک مؤلفه مسیری  $P$  از  $H$  باید با یال‌های  $M'$  شروع شده و با یال‌های  $M'$  خاتمه پذیرد. ابتدا و انتهای  $P$  در  $H$ ،  $M'$ -آلوده و در  $G$ ،  $M$ -ناآلوده می‌باشند. بنابراین یک مسیر  $M$ -افزوده در  $G$  می‌باشد. □

## تمرین‌ها

۱-۱-۵ الف) نشان دهید که هر  $k$ -مکعب دارای یک تطابق کامل است. ( $k \geq 2$ )

ب) تعداد تطابق‌های کامل متفاوت در  $K_{2n}$  و  $K_{n,n}$  را بیابید.

۲-۱-۵ نشان دهید که هر درخت، حداکثر یک تطابق کامل دارد.

۳-۱-۵ به‌ازای هر  $k > 1$ ، مثالی از یک گراف ساده  $k$ -منتظم بیابید، به‌طوری‌که تطابق کامل نداشته باشد.

۴-۱-۵ دو نفر بر روی یک گراف  $G$  با انتخاب متناوب رأس‌های متمایز  $v, v_1, v_2, \dots$  بازی می‌کنند،

به‌طوری‌که به‌ازای هر  $i > 0$  مجاور  $v_i$  باشد. بازیکنی که بتواند آخرین رأس را انتخاب کند،

برنده محسوب می‌شود. نشان دهید که بازیکن اول، دارای یک استراتژی برد است اگر و تنها اگر  $G$

تطابق کامل نداشته باشد.

۵-۱-۵ یک  $k$ -عامل از  $G$ ، یک زیرگراف فراگیر  $k$ -منتظم از آن است و  $G$ ،  $k$ -تجزیه پذیر نامیده

می‌شود، اگر  $k$ -عامل‌های یال-مجزای  $H_1, H_2, \dots, H_n$  وجود داشته باشند، به‌طوری‌که

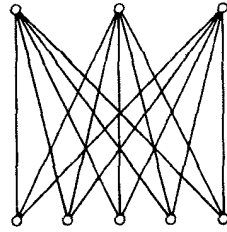
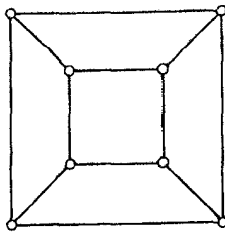
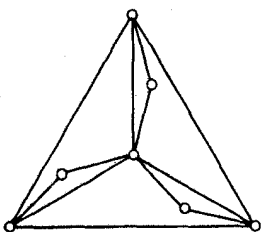
$$G = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n.$$

الف) نشان دهید:

(۱)  $K_{2n}$  و  $K_{n,n}$  ۱-تجزیه پذیرند.

(۲) گراف پترسن ۱-تجزیه پذیر نیست.

ب) کدامیک از گراف‌های زیر دارای ۲-عامل هستند.



ج) با استفاده از قضیهٔ دیراک (۳-۴)، نشان دهید که اگر یک  $G$  یک گراف ساده با  $\nu$  زوج و  $\delta \geq \frac{\nu}{4} + 1$  باشد، در این صورت  $G$  یک ۳-عامل دارد.

۱-۵\* نشان دهید  $K_{2m-1}$  را می‌توان به صورت اجتماعی از  $n$  ( $n \geq 1$ ) ۲-عامل همبند در نظر گرفت.

## ۲-۵ تطابق‌ها و پوشش‌ها در گراف‌های دوبخشی

به‌ازای هر مجموعه  $S$  از رأس‌های  $G$  مجموعهٔ تمام رأس‌های مجاور به رأس‌های  $S$  را مجموعهٔ همسایهٔ  $S$  در  $G$  می‌نامیم و آن را با  $N_G(S)$  نمایش می‌دهیم. حال فرض کنید که  $G$  یک گراف دوبخشی با دو بخش  $Y$  و  $X$  باشد.

در بسیاری کاربردها، پیدا کردن تطابقی از  $G$  که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده کند، مورد نظر ماست؛ مسألهٔ تخصیص شغل که در بخش ۴-۵ به آن خواهیم پرداخت، نمونه‌ای از این مسائل است. شرط لازم و کافی برای وجود چنین گراف‌هایی نخستین بار توسط هال<sup>۱</sup> (۱۹۳۵) ارائه شده است.

**قضیهٔ ۲-۵** فرض کنید  $G$  یک گراف دوبخشی با بخش‌های  $X$  و  $Y$  باشد. در این صورت  $G$  دارای تطابق کاملی است که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده می‌کند اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{به‌ازای هر } S \subseteq X \quad (۲-۵)$$

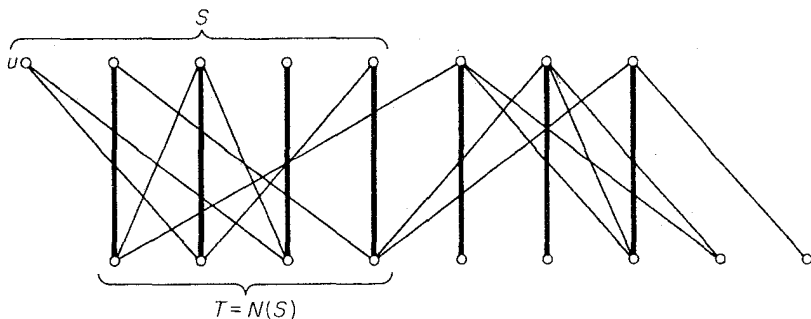
**اثبات** فرض کنید  $G$  شامل تطابقی مانند  $M$  است که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده می‌کند. چون رأس‌های  $S$  به‌وسیلهٔ رأس‌های متمایز  $N(S)$ ، تحت  $M$  مطابق شده‌اند، به روشنی داریم:

$$|N(S)| \geq |S|$$

برعکس، فرض کنید  $G$  یک گراف دوبخشی باشد که در رابطهٔ (۲-۵) صدق می‌کند ولی دارای تطابقی که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده می‌کند، نباشد. در ادامه به یک تناقض خواهیم رسید. فرض کنید  $M^*$  یک تطابق ماکزیمال در  $G$  باشد. طبق فرض اولیه،  $M^*$  تمام رأس‌های  $X$  را آلوده نمی‌کند.

فرض کنید  $u$  یک رأس  $M^*$ -ناآلوده در  $X$  باشد. مجموعهٔ تمام رأس‌هایی که توسط مسیره‌های  $M^*$ -متناوب به  $u$  متصل هستند، را با  $Z$  نمایش می‌دهیم. چون  $M^*$  یک تطابق ماکزیمم است، بنابراین قضیهٔ ۱-۵،  $u$  تنها رأس  $M^*$ -ناآلوده در  $Z$  می‌باشد. قرار می‌دهیم:  $T = Z \cap Y$  و  $S = Z \cap X$ . (شکل ۳-۵ را ملاحظه

نمایید).



شکل ۳-۵

واضح است که رأس‌های  $S \setminus \{u\}$  تحت  $M^*$ ، با رأس‌های  $T$  مطابق‌اند. بنابراین:

$$|T| = |S| - 1 \quad (۳-۵)$$

و  $T \subseteq N(S)$  در حقیقت داریم:

$$N(S) = T \quad (۴-۵)$$

چون هر رأس  $N(S)$  به وسیله یک مسیر  $M^*$ -متناوب به  $u$  متصل است. ولی از روابط (۳-۵) و (۴-۵) نتیجه می‌شود که:

$$|N(S)| = |S| - 1 < |S|$$

که با فرض (۲-۵) در تناقض است. □

اثبات فوق‌الگوریتم خوبی را برای یافتن تطابق ماکزیم در گراف‌های دوبخشی پایه‌ریزی می‌کند. این

الگوریتم در بخش ۴-۵ ارائه خواهد شد.

**نتیجه ۲-۵** اگر  $G$  یک گراف دوبخشی  $k$ -منتظم با شرط  $k > 0$  باشد، در این صورت دارای یک تطابق کامل است.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف دوبخشی  $k$ -منتظم با دو بخش  $X$  و  $Y$  باشد. چون  $G$ ،  $k$ -منتظم است،

پس  $|X| = |E| = k|Y|$ ، و چون  $k > 0$  داریم:  $|X| = |Y|$ . اکنون فرض می‌کنیم  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $X$

باشد و مجموعه‌های یال‌های مجاور به رأس‌های  $S$  و  $N(S)$  را به ترتیب با  $E_1$  و  $E_2$  نمایش می‌دهیم. بنابر

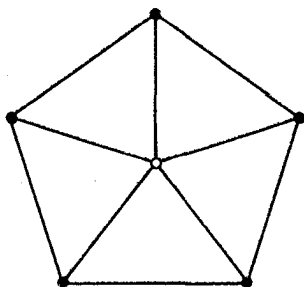
تعریف  $N(S)$ ،  $E_1 \subseteq E_2$ ، و بنابراین داریم:

$$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$$

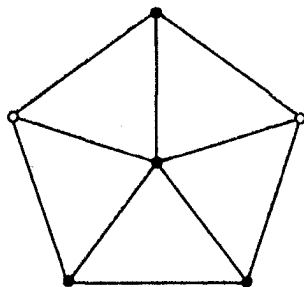
از این جا نتیجه می‌شود که  $|N(S)| \geq |S|$  و بنابراین طبق قضیهٔ ۲-۵،  $G$  دارای یک تطابق  $M$  است که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده می‌کند. چون  $|X| = |Y|$ ،  $M$  یک تطابق کامل است. □

گاهی اوقات نتیجهٔ ۲-۵ را قضیهٔ ازدواج هم می‌نامند، از آن جایی که می‌توان آن را پرآب و تاب‌تر به این صورت بیان کرد: اگر در یک دهکده هر دختر دقیقاً  $k$  پسر و هر پسر دقیقاً  $k$  دختر را بشناسد، آنگاه هر دختر می‌تواند با یک پسر که می‌شناسد ازدواج کند و همچنین هر پسر هم می‌تواند با هر دختری که می‌شناخته ازدواج نماید.

یک پوشش از گراف  $G$ ، زیرمجموعه‌ای مانند  $K$  از  $V$  است به طوری که حداقل یک سر هر یال  $G$  در  $K$  باشد. پوشش  $K$  را پوشش مینیمم می‌نامیم اگر هیچ پوشش  $K'$  در  $G$  با شرط  $|K'| < |K|$  وجود نداشته باشد. (شکل ۴-۵ را ملاحظه نمایید).



(الف)



(ب)

شکل ۴-۵. (الف) یک پوشش (ب) یک پوشش مینیمم

اگر  $K$  یک پوشش و  $M$  یک تطابق از  $G$  باشد، در این صورت  $K$  شامل حداقل یک سر از هر یال  $M$  است. بنابراین، به ازای هر تطابق  $M$  و هر پوشش  $K$  داریم:  $|M| \leq |K|$ . به ویژه اگر  $M^*$  یک تطابق ماکزیمم و  $\bar{K}$  یک پوشش مینیمم باشد، داریم:

$$|M^*| \leq |\bar{K}| \quad (۵-۵)$$

به طور کلی در رابطهٔ (۵-۵) تساوی برقرار نیست. (به عنوان مثال شکل ۴-۵ را ملاحظه نمایید). ولی اگر  $G$  دوبخشی باشد،  $|\bar{K}| \leq |M^*|$ . این نتیجه که متعلق به کونینگ<sup>۱</sup> (۱۹۳۱) است ارتباط نزدیکی با قضیهٔ هال دارد. قبل از این که اثبات آن را ذکر کنیم، یک لم ساده و در عین حال مهم را از نظر می‌گذرانیم.

لم ۳-۵ فرض کنید  $M$  یک تطابق و  $K$  یک پوشش با شرط  $|M| = |K|$  باشد. در این صورت  $M$  یک تطابق ماکزیمم و  $K$  یک پوشش مینیمم است.

**اثبات** اگر  $M^*$  یک تطابق ماکزیمم و  $\bar{K}$  یک پوشش مینیمم باشد. آنگاه بنا بر (۵-۵) داریم:

$$|M| \leq |M^*| \leq |\bar{K}| \leq |K|$$

از طرفی با توجه به تساوی  $|M| = |K|$  داریم:  $|M| = |M^*|$  و  $|\bar{K}| = |K|$ .

**قضیه ۳-۵** در یک گراف دوبخشی تعداد یال‌ها در یک تطابق ماکزیمم برابر تعداد رأس‌ها در یک پوشش مینیمم است.

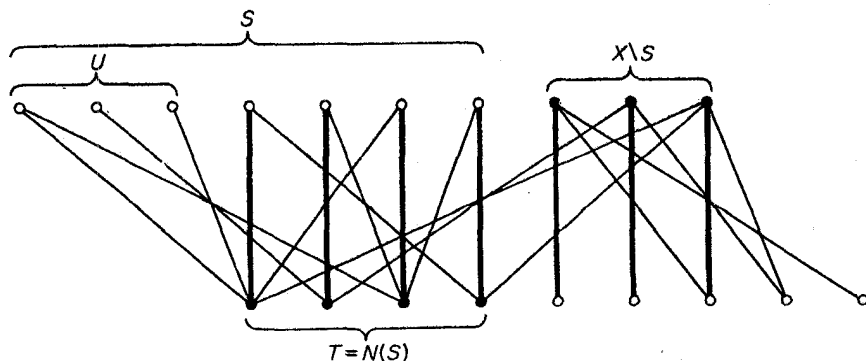
**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف دوبخشی با دو بخش  $X$  و  $Y$  و همچنین  $M^*$  یک تطابق ماکزیمم از  $G$  باشد. مجموعه رأس‌های  $M^*$  ناآلوده در  $X$  را با  $U$  و مجموعه تمام رأس‌هایی را که به وسیله مسیرهای  $M^*$  متناوب به رأس‌های  $U$  متصلند را با  $Z$  نمایش می‌دهیم. قرار می‌دهیم:

$$S = Z \cap Y \quad \text{و} \quad T = Z \cap X$$

همانند آنچه در اثبات قضیه ۲-۵ دیدیم هر رأس  $T$ ،  $M^*$  آلوده است و  $N(S) = T$ .  $\bar{K}$  را برابر  $(X \setminus S) \cup T$  تعریف می‌کنیم (شکل ۵-۵ را ملاحظه نمایید). حداقل یک سر هر یال  $G$  باید در  $\bar{K}$  باشد، چون در غیراین صورت حتماً یک یال وجود دارد که یک سر آن در  $S$  و سر دیگرش در  $Y \setminus T$  باشد و این با شرط  $N(S) = T$  در تناقض است. بنابراین  $\bar{K}$  یک پوشش از  $G$  می‌باشد و همچنین واضح است که:

$$|M^*| = |\bar{K}|$$

طبق لم ۳-۵،  $\bar{K}$  یک پوشش مینیمم بوده و در نتیجه اثبات کامل است. □



شکل ۵-۵

## تمرین‌ها

۱-۲-۵ نشان دهید که نمی‌توان یک مربع  $8 \times 8$  که دو مربع  $1 \times 1$  از دو گوشه مقابل آن برداشته شده‌اند را به وسیلهٔ مستطیل‌های  $1 \times 2$  به‌طور کامل پوشانید.

۲-۲-۵ الف) نشان دهید که گراف دوبخشی  $G$  دارای تطابق کامل است اگر و تنها اگر به‌ازای هر  $S \subseteq V$  داشته باشیم:

$$|N(S)| \geq |S|$$

ب) با ذکر یک مثال نشان دهید که گزاره فوق با حذف شرط دوبخشی بودن  $G$  دیگر معتبر نخواهد بود.

۳-۲-۵ به‌ازای هر  $k > 0$  نشان دهید:

الف) هرگراف دوبخشی  $k$ -منتظم،  $1$ -تجزیه پذیر است.

ب) \* هرگراف  $2k$ -منتظم،  $1$ -تجزیه پذیر است. (J. Petersen)

۴-۲-۵ فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_m$  زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند  $S$  باشند. یک دستگاه

نماینده‌های متمایز برای خانواده  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ ، زیرمجموعه‌ای مانند  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  از  $S$

است به‌طوری که به‌ازای هر  $1 \leq i \leq m$ ،  $a_i \in A_i$  و به‌ازای  $i \neq j$ ،  $a_i \neq a_j$ . نشان دهید که

$(A_1, A_2, \dots, A_m)$  دارای یک دستگاه نماینده‌های متمایز است اگر و تنها اگر به‌ازای تمام

زیرمجموعه‌های  $J$  از  $\{1, 2, \dots, m\}$ ، داشته باشیم:  $| \bigcup_{i \in J} A_i | \geq |J|$ . (P. Hall)

۵-۲-۵ هر سطر یا هر ستون از یک ماتریس را یک خط از آن ماتریس می‌نامیم. نشان دهید که کمترین

تعداد خط‌هایی که در برگیرندهٔ تمام  $1$ ‌های یک  $(1, 0)$ -ماتریس هستند برابر است با بیشترین

تعداد  $1$ ‌هایی که هیچ دوتای آن‌ها در یک خط نباشند.

۶-۲-۵ الف) این تعمیم از قضیهٔ هال (قضیهٔ ۲-۵) را اثبات نمایید: اگر  $G$  یک گراف دوبخشی با دو بخش

$X$  و  $Y$  باشد، در این صورت تعداد یال‌ها در یک تطابق ماکزیم  $G$  برابر است با:

(D. König, O. Ore)  $|X| - \max_{S \subseteq X} \{|S| - |N(S)|\}$

ب) نتیجه بگیرید که اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط‌های  $|X| = |Y| = n$  و  $|E| > (k-1)n$  باشد،

آنگاه  $G$  دارای یک تطابق با  $k$  عنصر است.

۷-۲-۵ قضیهٔ هال (۲-۵) را از قضیهٔ کونینگ (۴-۵) نتیجه بگیرید.

\* ۸-۲-۵ یک ماتریس  $Q$  از اعداد حقیقی نامنفی، تصادفی مضاعف نامیده می‌شود. اگر مجموع درایه‌های

روی هر سطر و همچنین مجموع درایه‌های روی هر ستون  $Q$  برابر  $1$  باشد. ماتریس جایگشت،

یک  $(1, 0)$ -ماتریس است که در هر سطر و هر ستون آن دقیقاً یک  $1$  وجود داشته باشد. (بنابراین

هر ماتریس جایگشت، تصادفی مضاعف است). نشان دهید که:

(الف) هر ماتریس تصادفی مضاعف، الزاماً مربع است.  
 (ب) هر ماتریس تصادفی مضاعف  $Q$  را می‌توان به‌عنوان یک ترکیب خطی محدب از ماتریس‌های جایگشت بیان نمود. به عبارت دیگر

$$Q = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + c_k P_k$$

که در آن هر  $P_i$ ، یک ماتریس جایگشت و هر  $c_i$ ، یک عدد حقیقی نامنفی است و  $\sum_{i=1}^k c_i = 1$ .

(G. Birkhoff, J. Von Neumann)

۹-۲-۵ فرض کنید  $H$  یک گروه متناهی و  $K$  یک زیرگروه از  $H$  باشد. نشان دهید که عناصر  $h_1, h_2, \dots, h_n \in H$  وجود دارند به‌طوری‌که  $h_1 K, h_2 K, \dots, h_n K$  هم‌دسته‌های چپ  $K$  و  $Kh_1, Kh_2, \dots, Kh_n$  هم‌دسته‌های راست  $K$  باشند.  
 (P. Hall)

### ۳-۵ تطابق کامل

یک شرط لازم و کافی برای وجود تطابق کامل در یک گراف، توسط تات (۱۹۴۷) ارائه شده است. اثباتی که در اینجا آمده، متعلق به لاواژ (۱۹۷۲) است.

باتوجه به زوج یا فرد بودن تعداد رأس‌های یک مؤلفه، آن مؤلفه را زوج یا فرد می‌نامیم. تعداد مؤلفه‌های فرد  $G$  را با  $o(G)$  نمایش می‌دهیم.

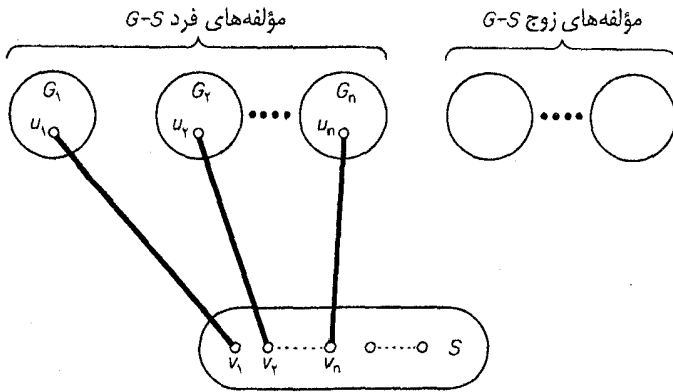
**قضیه ۴-۵**  $G$  دارای تطابق کامل است اگر و تنها اگر

$$o(G-S) \leq |S| \quad \text{به‌ازای هر } S \subseteq V. \quad (۴-۵)$$

**اثبات** واضح است که اثبات قضیه برای گراف‌های ساده کافی است.

ابتدا فرض کنید که  $G$  دارای یک تطابق کامل  $M$  است.  $S$  را یک زیر مجموعهٔ سره از  $V$  و  $G_1, G_2, \dots, G_n$  را به‌عنوان مؤلفه‌های فرد  $G-S$  در نظر بگیرید. چون فرد است، رأسی مانند  $u_i$  از  $G_i$  باید تحت  $M$  با رأسی مانند  $v_i$  از  $S$  مطابق شده باشد (شکل ۴-۵ ملاحظه نمایید). بنابراین چون  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq S$ ، داریم:

$$o(G-S) = n = |\{v_1, v_2, \dots, v_n\}| \leq |S|$$



شکل ۶-۵

برعکس، فرض کنید  $G$  در رابطهٔ (۶-۵) صدق کند ولی هیچ تطابق کاملی نداشته باشد. آنگاه  $G$  زیرگراف فراگیری از یک گراف ماکزیمال  $G^*$  است که هیچ تطابق کاملی ندارد. چون  $G-S$  زیرگراف فراگیری از

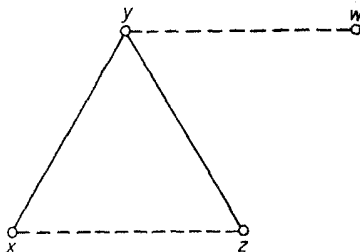
$G^*-S$  است داریم:  $o(G^*-S) \leq o(G-S)$  و بنابراین طبق رابطهٔ (۶-۵):

$$SCV(G^*) : \text{به‌ازای هر } S \quad o(G^*-S) \leq |S| \quad (۷-۵)$$

در حالت خاص، با قراردادن  $S = \emptyset$  می‌بینیم که  $o(G^*) = 0$  و  $v(G^*)$  زوج است.

مجموعهٔ رأس‌های دارای درجهٔ  $1-v$  در  $G^*$  را با  $U$  نمایش می‌دهیم. اگر  $U=V$ ، به‌وضوح  $G^*$  دارای تطابق کامل خواهدبود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که  $U \neq V$ . در ادامه نشان می‌دهیم که  $G^*-U$  اجتماع مجزایی از گراف‌های کامل است. فرض کنید این‌طور نباشد، یعنی مؤلفه‌ای از  $G^*-U$  وجود داشته باشد که کامل نباشد. آنگاه در این مؤلفه سه رأس  $x, y$  و  $z$  وجود دارند به‌طوری‌که  $xz \notin E(G^*)$ ،  $yz \in E(G^*)$  و  $xy \in E(G^*)$ .

علاوه براین چون  $y \notin U$ ، رأسی مانند  $w$  در  $G^*-U$  وجود دارد به‌طوری‌که  $yw \notin E(G^*)$ . این وضعیت در شکل ۷-۵ نشان داده شده است.

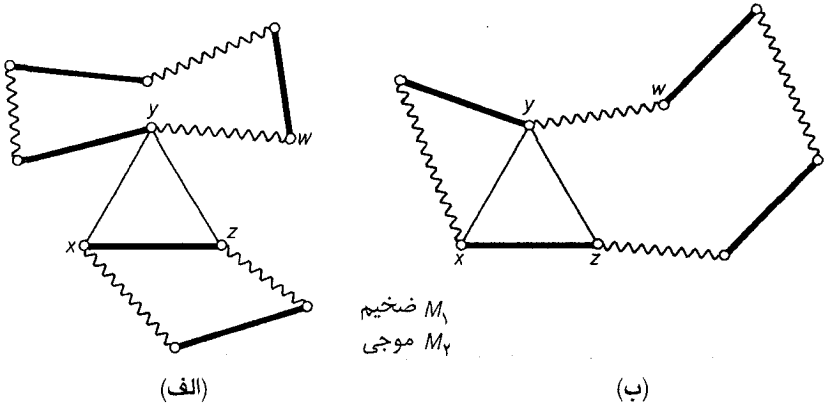


شکل ۷-۵



از آنجایی که  $G^*$  گراف ماکزیمالی است که هیچ تطابق کاملی ندارد، به ازای هر  $e \in E(G^*)$  دارای  $G^* + e$  یک تطابق کامل است. فرض کنید  $M_1$  و  $M_2$  به ترتیب تطابق‌های کامل در  $G^* + xz$  و  $G^* + yw$  باشند. زیرگراف القایی توسط  $M_2 \Delta M_1$  از  $G^* \cup \{xz, yw\}$  را با  $H$  نمایش می‌دهیم. چون درجه هر رأس  $H$  برابر دو است، بنابراین  $H$  اجتماع مجزایی از دورهاست. به علاوه تمام این دورها زوجند. چون یال‌های  $M_1$  یکدرمیان توسط یال‌های  $M_2$  احاطه شده است. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت (۱)  $xy$  و  $yw$  در مؤلفه‌های متفاوتی از  $H$  باشند (شکل ۸-۵ الف)، آنگاه اگر  $yw$  در دور  $C$  از  $H$  باشد، یال‌های  $M_1$  درون  $C$  به همراه یال‌های  $M_2$  که در  $C$  نیستند، یک تطابق کامل در  $G^*$  تشکیل می‌دهند که با تعریف  $G^*$  در تناقض است.



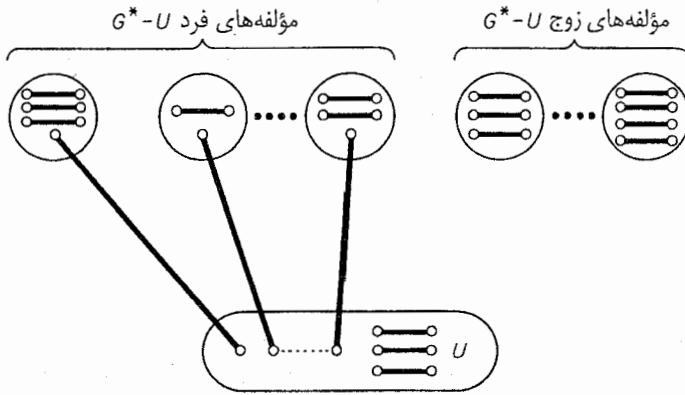
شکل ۸-۵

حالت (۲)  $xz$  و  $yw$  در یک مؤلفه یکسان  $C$  از  $H$  قرار دارند. با توجه به تقارن  $x$  و  $z$  می‌توانیم فرض کنیم که رأس‌های  $x, y, w, z$  به ترتیب ذکر شده در  $C$  قرار گرفته‌اند (شکل ۸-۵ ب). در این صورت یال‌های  $M_1$  در قسمت  $zw...z$  از  $C$  به همراه یال  $yz$  و یال‌هایی از  $M_2$  که در قسمت  $zw...z$  از  $C$  نیستند، یک تطابق کامل در  $G^*$  تشکیل می‌دهند که مجدداً با تعریف  $G^*$  در تناقض است.

چون هر دو حالت (۱) و (۲) به تناقض می‌رسند، نتیجه می‌گیریم که  $G^* - U$  مسلماً اجتماع مجزایی از گراف‌های کامل است.

اکنون طبق رابطه (۵-۷)،  $|U| \leq o(G^* - U)$ . پس حداکثر  $|U|$  مؤلفه از  $G^* - U$  فرد هستند. ولی

در این صورت  $G^*$  دارای یک تطابق کامل خواهد بود، بدین صورت که یک رأس از هر مؤلفهٔ فرد  $G^* - U$  با یک رأس از  $U$  مطابق می‌شود، بقیهٔ رأس‌هایی که در  $U$  و در مؤلفه‌های  $G^* - U$  قرار دارند، همانند شکل ۹-۵ مطابق می‌گردند.



شکل ۹-۵

از آنجایی که فرض شده بود  $G^*$  هیچ تطابق کاملی ندارد، به تناقض موردنظر دست یافته‌ایم. بنابراین نتیجه می‌شود که  $G$  دارای یک تطابق کامل است. □

قضیهٔ فوق را می‌توان به کمک قضیهٔ هال نیز اثبات نمود ([Anderson ; 1974] را ملاحظه نمایید). اکنون با استفاده از قضیهٔ تات به نتیجه‌ای می‌رسیم که نخستین بار توسط پترسن (۱۸۹۱) به دست آمده است.

**نتیجهٔ ۵-۴** هرگراف ۳-منتظم بدون یال برشی، دارای یک تطابق کامل است.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف ۳-منتظم بدون یال برشی و  $S$  یک زیرمجموعه از  $V$  باشد. مؤلفه‌های فرد  $G - S$  را با  $G_1, G_2, \dots, G_n$  نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم که به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  تعداد یال‌هایی باشد که یک سر آن‌ها در  $G_i$  و سر دیگر آن‌ها در  $S$  است. چون  $G$  ۳-منتظم است داریم:

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v) = 3v(G_i) \quad \text{به‌ازای هر } 1 \leq i \leq n \quad (۸-۵)$$

9

$$\sum_{v \in S} d(v) = 3|S| \quad (۹-۵)$$

طبق رابطه (۸-۵)،  $m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d(v) - 2\varepsilon(G_i)$  فرد است. ولی  $m_i \neq 1$  زیرا  $G$  دارای یال برشی نیست. بنابراین:

$$m_i \geq 3 \quad \text{به‌ازای هر } 1 \leq i \leq n \quad (۱۰-۵)$$

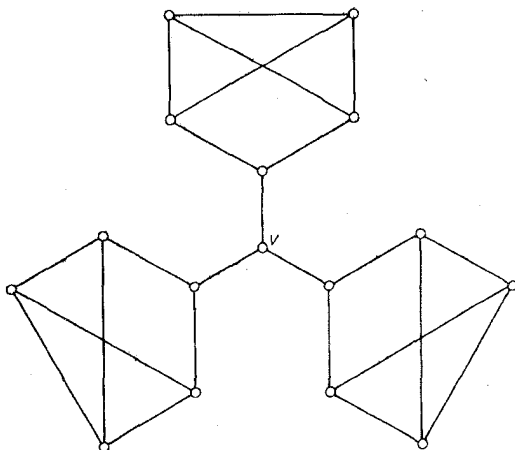
از روابط (۱۰-۵) و (۹-۵) نتیجه می‌شود که:

$$o(G-S) = n \leq \left(\frac{1}{3}\right) \sum_{i=1}^n m_i \leq \left(\frac{1}{3}\right) \sum_{v \in S} d(v) = |S|$$

در نتیجه طبق قضیه ۴-۵،  $G$  دارای یک تطابق کامل است. □.

یک گراف ۳-منتظم که یال‌های برشی داشته باشد، الزاماً دارای تطابق کامل نخواهد بود. به‌طور مثال از

قضیه ۴-۵ نتیجه می‌شود که گراف  $G$  در شکل ۱۰-۵ دارای تطابق کامل نیست زیرا  $o(G-v) = 3$ .



شکل ۱۰-۵

### تمرین‌ها

۱-۳-۵\* قضیه هال (۲-۵) را از قضیه تات (۴-۵) نتیجه بگیرید.

۲-۳-۵ این تعمیم از نتیجه ۴-۵ را اثبات کنید: اگر  $G$  یک گراف  $k$ -منتظم  $(k-1)$ -همبند یالی با  $v$  زوج باشد، آنگاه  $G$  دارای یک تطابق کامل است.

۳-۳-۵ نشان دهید که درخت  $G$  دارای تطابق کامل است اگر و تنها اگر به‌ازای هر  $v \in V$  داشته باشیم:

(V. Chungphaisan)

$$o(G-v) = 1$$

۳-۴\* این تعمیم از قضیهٔ تات (۴-۵) را اثبات نمایید: تعداد یال‌ها در یک تطابق ماکزیمم از  $G$  برابر است

با  $\frac{1}{\nu}(n-d)$  که در آن  $d = \max_{S \subset V} \{o(G-S) - |S|\}$  (G. Berge)

۳-۵ الف) با استفاده از قضیهٔ تات (۴-۵) گراف‌های ساده ماکزیممی که دارای هیچ تطابق کاملی

نیستند، توصیف نمایید.

ب) فرض کنید  $G$  یک گراف ساده با  $\nu$  زوج و  $\delta < \frac{\nu}{2}$  باشد. نشان دهید اگر

$$\delta + \delta(\nu - \delta) - \binom{\delta}{2} - (\nu - 2\delta - 1) < \varepsilon, \text{ در این صورت } G \text{ دارای یک تطابق کامل است.}$$

## کاربردها

### ۴-۵ مسأله تخصیص شغل

در یک شرکت معین،  $n$  کارگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  و برای  $n$  کار  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  موجودند و هر کارگر قادر است که یک یا تعداد بیشتری کار را انجام دهد. آیا می‌توان تمام کارها را بین این افراد طوری تقسیم کرد به طوری که هرکس قادر به انجام کاری که به آن گماشته شده، باشد؟ این مسأله به مسأله تخصیص شغل معروف است.

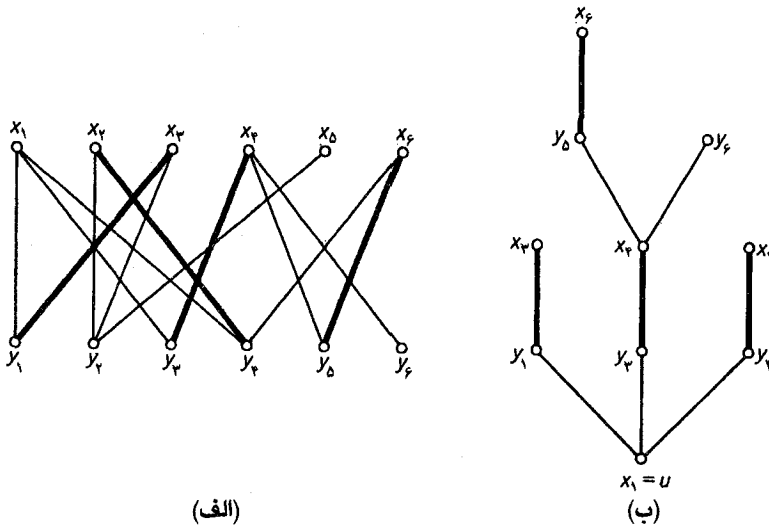
یک گراف دوبخشی  $G$  با دو بخش  $X$  و  $Y$  می‌سازیم به طوری که  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  و  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  و  $X_i$  به  $Y_j$  متصل باشد اگر و تنها اگر کارگر  $X_i$  قادر به انجام کار  $Y_j$  باشد. بدین ترتیب مسأله ما تبدیل می‌شود به تعیین این که آیا  $G$  دارای یک تطابق کامل هست یا خیر؟ طبق قضیه هال (۲-۵)، یا  $G$  دارای چنین تطابقی هست یا زیر مجموعه‌ای مانند  $S$  در  $X$  وجود دارد که  $|N(S)| < |S|$ . در ادامه الگوریتمی برای حل مسأله تخصیص شغل ارائه می‌دهیم.

یک گراف دوبخشی  $G$  با دو بخش  $X$  و  $Y$  داده شده است. الگوریتم مورد نظر، یا یک تطابق از  $G$  که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده می‌کند پیدا می‌نماید یا در صورت عدم وجود چنین تطابقی زیرمجموعه‌ای مانند  $S$  از  $X$  پیدا می‌کند به طوری که  $|N(S)| < |S|$ .

ایده اصلی که در پشت این الگوریتم نهفته است، بسیار ساده می‌باشد. ابتدا با یک تطابق دلخواه  $M$  شروع می‌کنیم. اگر  $M$  تمام رأس‌های  $X$  را آلوده کرده باشد، آنگاه تطابق مورد نظر را یافته‌ایم. در غیر این صورت یک رأس  $M$  ناآلوده مثل  $u$  از  $X$  را انتخاب می‌کنیم و به طور سیستماتیک به دنبال یک مسیر  $M$ -افزوده  $P$  با ابتدای  $u$  می‌گردیم. روش جستجویی که در زیر مفصلاً توضیح داده خواهد شد، مسیر  $P$

موردنظر را در صورت وجود پیدا می‌کند. در این حالت  $\hat{M} = M \Delta E(P)$  تطابق است که از  $M$  بزرگتر است و در نتیجه تعداد رأس‌های بیشتری را آلوده می‌کند. این بار فرآیند فوق را با  $\hat{M}$  به جای  $M$  تکرار می‌کنیم. اگر چنین مسیری وجود نداشته باشد، مجموعهٔ تمام رأس‌هایی که توسط مسیره‌های  $M$ -متناوب یافته شده، به  $u$  متصل شده‌اند را  $Z$  می‌نامیم. در این صورت (مانند آنچه در اثبات قضیهٔ ۵-۲ مشاهده کردید)،  $S = Z \cap X$  در شرط  $|N(S)| < |S|$  صدق می‌کند.

فرض کنید  $M$  یک تطابق در  $G$  و  $u$  یک رأس  $M$ -ناآلوده در  $X$  باشد. درخت  $H \subseteq G$  یک درخت  $M$ -متناوب ریشه‌دار در  $u$  نامیده می‌شود اگر (۱)  $u \in V(H)$  و (۲) برای هر رأس  $v$  از  $H$  مسیر یکتای بین  $u$  و  $v$  در  $H$ ، یک مسیر  $M$ -متناوب باشد. یک درخت  $M$ -متناوب در گراف شکل ۵-۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۵-۱۱. (الف) یک تطابق  $M$  در  $G$ ; (ب) یک درخت  $M$ -متناوب در  $G$

جستجوی مسیر  $M$ -افزوده با ابتدای  $u$  براساس «رشد یافتن» یک درخت  $M$ -متناوب  $H$  است که در  $u$  ریشه‌دار می‌باشد. این فرآیند نخستین بار توسط ادمندنز<sup>۱</sup> در سال ۱۹۶۵ ارائه شده است. در آغاز  $H$  فقط شامل رأس  $u$  می‌باشد و در ادامه طوری رشد می‌یابد که در هر مرحله، یا

(۱) تمام رأس‌های  $H$  به غیر از  $u$ ،  $M$ -آلوده بوده و تحت  $M$  مطابق شده باشند (همانند شکل

۱۲-۵ الف) یا

(۲) شامل یک رأس  $M$ -ناآلوده دیگر، متفاوت با  $u$  باشد (مانند شکل ۱۲-۵ ب).

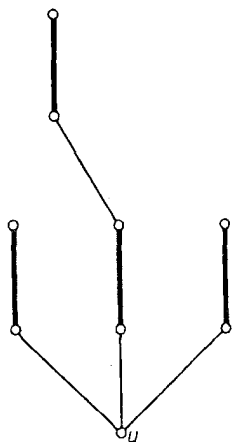
اگر حالت (۱) رخ دهد (همانند آغاز کار) آنگاه با قراردادن  $T=V(H)\cap Y$  و  $S=V(H)\cap X$  خواهیم

داشت  $T\subseteq N(S)$  بنابراین  $N(S)=T$  یا  $T\subset N(S)$ .

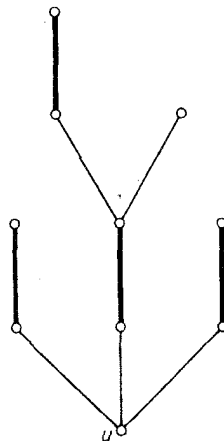
الف) اگر  $N(S)=T$ ، در این صورت چون رأس‌های  $S\setminus\{u\}$  با رأس‌های  $T$  مطابق شده‌اند، داریم:

$|N(S)| = |S| - 1$  و این بدان مفهوم است که  $G$  دارای هیچگونه تطابقی که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده کند،

نیست.



(الف)



(ب)

شکل ۱۲-۵. الف) حالت (۱) ب) حالت (۲)

ب) اگر  $T\subset N(S)$ ، رأسی مانند  $y$  در  $Y\setminus T$  وجود دارد که مجاور رأس  $x$  از  $S$  می‌باشد. چون تمام

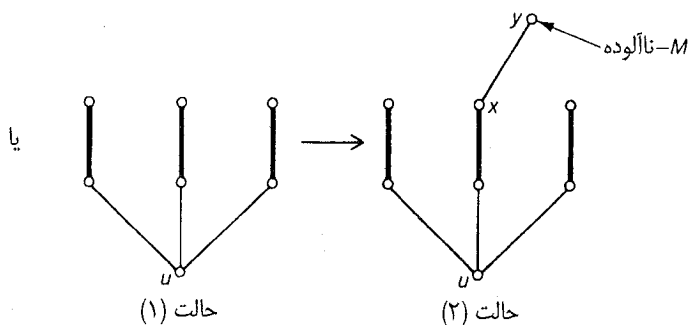
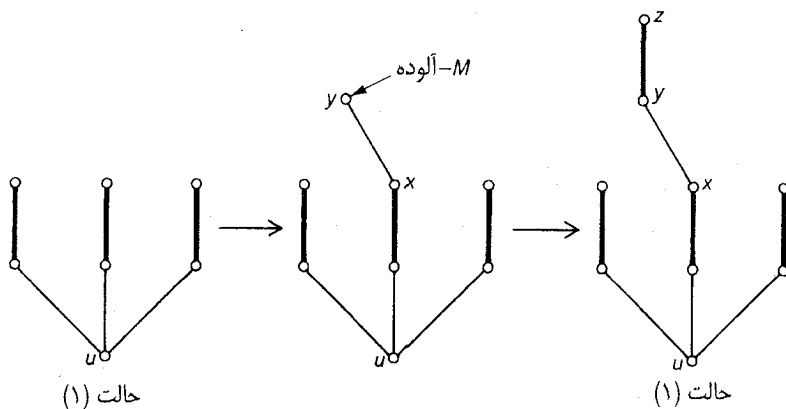
رأس‌های  $H$  به جز  $u$  تحت  $M$  مطابق شده‌اند یا  $x=u$ ، یا اینکه  $x$  با یک رأس از  $H$  مطابق شده است.

بنابراین  $xy\notin M$ .

اگر  $y$ ،  $M$ -آلوده و  $yz\in M$  باشد،  $H$  را با افزودن رأس‌های  $y$  و  $z$  و همچنین یال‌های  $xy$  و  $yz$  رشد

می‌دهیم. سپس به مرحلهٔ (۱) برمی‌گردیم.

اگر  $y$ ،  $M$ -نالوده باشد،  $H$  را با افزودن رأس  $y$  و یال  $xy$  رشد می‌دهیم، که منجر به حالت (۲) می‌شود. در این صورت مسیر بین  $u$  و  $y$  از  $H$ ، یک مسیر  $M$ -افزوده یا ابتدای  $u$  خواهد بود که همان مسیر مورد نظر است. شکل ۵-۱۳ فرآیند رشد یابنده درختی فوق را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱۳. فرآیند رشد یابنده درختی

الگوریتمی که در بالا به توضیح آن پرداختیم، به روش مجارستانی مشهور است و می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه نمود:

با یک تطابق دلخواه  $M$  شروع کن.

(۱) اگر  $M$  تمام رأس‌های  $X$  را آلوده کرده است، توقف کن. در غیر این صورت با فرض اینکه  $u$  یک رأس

$M$ -نالوده در  $X$  باشد قرار بده:  $S = \{u\}$  و  $T = \emptyset$ .

(۲) اگر  $N(S) = T$ ، از آن جایی که  $|T| = |S| - 1$ ، داریم:  $|N(S)| < |S|$ . چون در این حالت طبق

قضیهٔ هال هیچ تطابقی که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده کند وجود ندارد، توقف کن. در غیراین صورت فرض کن:

$$y \in N(S) \setminus T$$

(۳) اگر  $y, M$  ناآلوده باشد، با فرض اینکه  $S, yz \in M$  را با  $SU\{z\}$  و  $T$  را با  $TU\{y\}$  جایگزین کن. به مرحلهٔ (۲) برگرد. (توجه داشته باشید که شرط  $|T| = |S| - 1$  بعد از این جایگزینی همچنان به قوت خود باقی خواهد بود). در غیراین صورت با فرض اینکه  $P$  یک  $(u, v)$ -مسیر  $M$ -افزوده می‌باشد.  $M$  را با  $\hat{M} = M \Delta E(P)$  جایگزین کن و به مرحلهٔ (۱) برو.

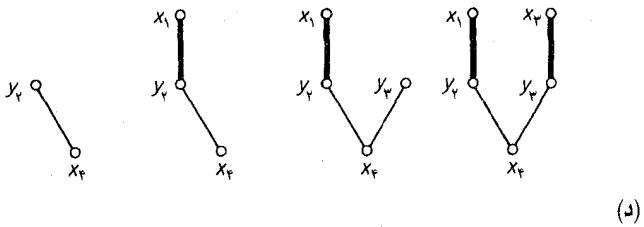
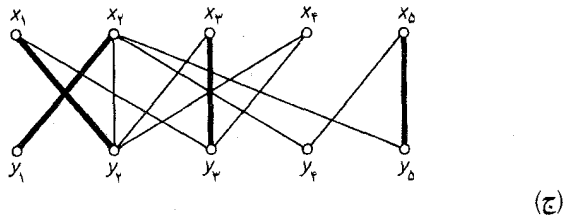
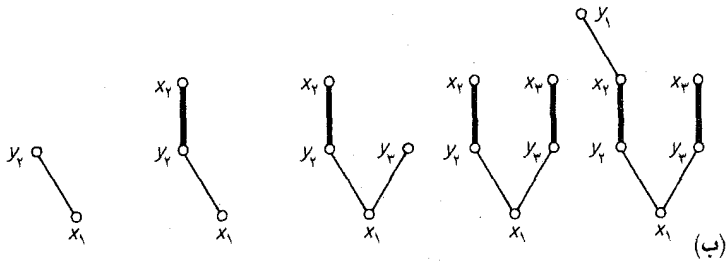
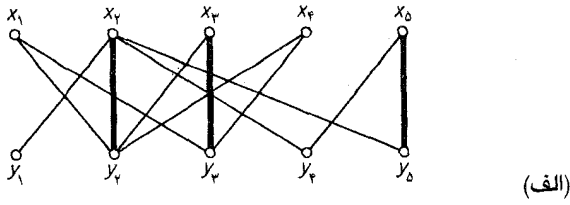
به‌عنوان مثال، گراف شکل ۱۴-۵ الف را با تطابق اولیه  $M = \{x_1v_2, x_2v_3, x_3v_4, x_4v_5\}$  در نظر بگیرید. در شکل ۱۴-۵ ب با شروع از  $x_1$  یک درخت  $M$ -متناوب، رشد یافته و مسیر  $M$ -متناوب  $x_1v_2x_3v_4x_4v_5$  پدیدار شده است. با استفاده از این مسیر، به تطابق جدید  $\hat{M} = \{x_1v_2, x_2v_1, x_3v_3, x_4v_5\}$  می‌رسیم و این بار درخت  $M$ -متناوب، مطابق شکل‌های ۱۴-۵ ج و ۱۴-۵ د با شروع از  $x_4$  رشد می‌یابد. چون هیچ مسیر  $M$ -افزوده‌ای با ابتدای  $x_4$  وجود ندارد، الگوریتم خاتمه می‌یابد. مجموعهٔ  $S = \{x_1, x_3, x_4\}$  با مجموعهٔ همسایه  $N(S) = \{y_2, y_3\}$  نشان می‌دهد که  $G$  دارای تطابق کامل نیست.

یک نمودار گردش برای روش مجارستانی، در شکل ۱۵-۵ نشان داده شده است. از آن جایی که این الگوریتم می‌تواند حداکثر  $|X|$  دفعه قبل از پیدا کردن یک مجموعه  $S \subseteq X$  با شرط  $|S| < |N(S)|$ ، یا یک مسیر  $M$ -افزوده، درون فرآیند رشد یابندهٔ درختی  $T$ ، بگردد و چون حداکثر  $|X|$  دفعه قبل از یافتن تطابق موردنظر می‌توان فرآیند  $II$  تکرار کرد، بنابراین واضح است که روش مجارستانی، یک الگوریتم خوب است. با تغییر اندکی در فرآیند فوق می‌توان تطابق‌های ماکزیمم در گراف‌های دوبخشی را نیز به‌دست آورد. (تمرین ۱-۴-۵) یک الگوریتم خوب که می‌تواند چنین تطابقی را در هر گراف معین کند توسط ادمنودز در سال ۱۹۶۵ ارائه شده است.

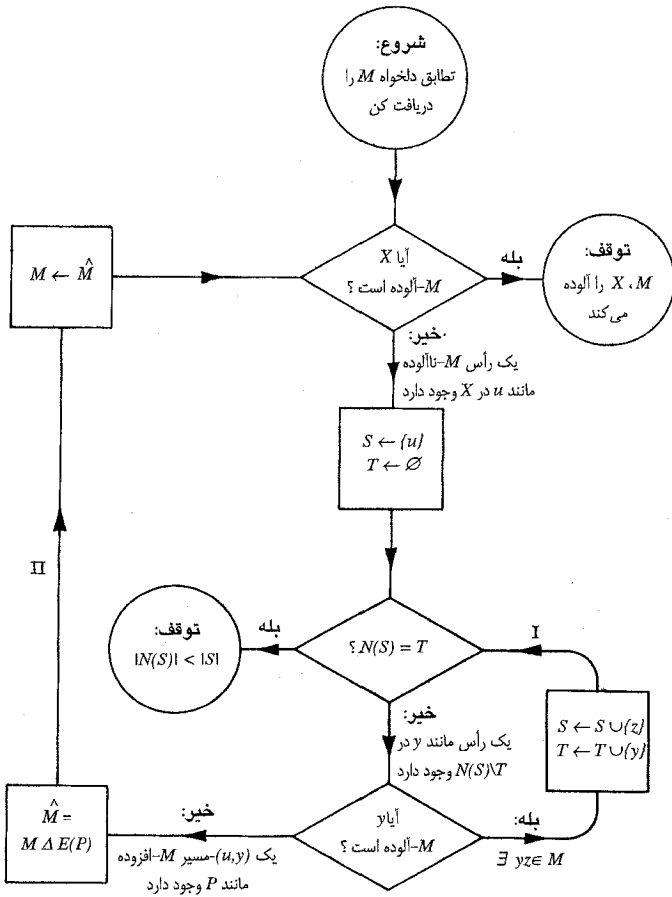
## تمرین

۱-۴-۵ توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از روش مجارستانی، یک تطابق ماکزیمم در یک گراف دوبخشی به‌دست آورد.





شکل ۵-۱۴. (الف) تطابق  $M$  (ب) یک درخت  $M$  متناوب (ج) تطابق  $\hat{M}$  (د) درخت  $\hat{M}$  متناوب



شکل ۵-۵. روش مجارستانی

## ۵-۵ مسأله تخصیص بهینه

روش مجارستانی که در بخش ۴-۵ توضیح داده شد، روش کارآمدی برای تخصیص عملی کارها به کارگرها بود. در برخی کاربردها ممکن است بخواهیم کارایی کارگرها برای شغل‌های مختلف را نیز به حساب آوریم. به عنوان مثال این کارایی را می‌توان بر اساس سودی که عاید شرکت می‌شود محاسبه نمود. در این حالت هدف کلی در تخصیص کارها این است که به بیشترین مجموعه کارایی‌ها کارگرها برسیم. مسأله یافتن

چنین تخصیصی به عنوان مسأله تخصیص بهینه شناخته می‌شود.

یک گراف دوبخشی کامل وزندار با دو بخش  $X$  و  $Y$  را در نظر بگیرید که در آن  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  و  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  و هر یال  $x_i y_j$  دارای وزن  $w_{ij} = w(x_i y_j)$  است که مقدار کارایی کارگر  $X_i$  برای شغل  $Y_j$  تلقی می‌گردد. به‌وضوح، مسأله تخصیص بهینه با پیدا کردن یک تطابق کامل با بیشترین وزن، در این گراف وزندار هم‌ارز است. از این به بعد، چنین تطابقی را یک تطابق بهینه می‌نامیم.

برای حل مسأله تخصیص بهینه، می‌توانیم تمام  $n!$  تطابق کامل مختلف را بشمریم و از میان آن‌ها تطابق بهینه را انتخاب کنیم. البته این روش برای  $n$  های بزرگ کاملاً غیرکارآمد است. در ادامه این بخش، الگوریتم خوبی برای یافتن تطابق بهینه در یک گراف دوبخشی کامل وزندار ارائه می‌کنیم. برچسب زنی رأسی امکان‌پذیر را به‌عنوان یک تابع حقیقی  $l$ ، روی مجموعه رأسی‌های  $X \cup Y$  تعریف می‌کنیم به طوری که در آن به‌ازای هر  $y \in Y, x \in X$  داشته باشیم:

$$l(x) + l(y) \geq w(xy) \quad (۱۱-۵)$$

(عدد حقیقی  $l(v)$  برچسب رأس  $v$  نامیده می‌شود). در این صورت برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر به‌گونه‌ای است که مجموع برچسب‌های دو سر یک یال حداقل به بزرگی وزن آن یال باشد. بدون توجه به وزن یال‌ها، همیشه یک برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر وجود دارد که یک نمونه آن تابع  $l$  زیر است:

$$\begin{cases} l(x) = \max_{y \in Y} w(xy) & \text{اگر } x \in X \\ l(y) = 0 & \text{اگر } y \in Y \end{cases} \quad (۱۲-۵)$$

اگر  $l$  یک برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر باشد، مجموعه یال‌هایی را که به‌ازای آن‌ها در رابطه (۱۱-۵) تساوی برقرار است با  $E_l$  نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر:  $E_l = \{xy \in E \mid l(x) + l(y) = w(xy)\}$ . زیرگراف فراگیری از  $G$  که با مجموعه یال‌های آن  $E_l$  است را زیرگراف تساوی متناظر با برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر  $l$  نامیده، آن را با  $G_l$  نمایش می‌دهیم. ارتباط بین زیرگراف‌های تساوی و تطابق‌های بهینه توسط قضیه زیر بیان می‌شود.

**قضیه ۵-۵** فرض کنید  $l$  یک برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر از  $G$  باشد. اگر  $G_l$  شامل یک تطابق کامل مانند  $M^*$  باشد آنگاه  $M^*$  یک تطابق بهینه از  $G$  خواهد بود.

**اثبات** فرض کنید که  $G_l$ ، شامل یک تطابق کامل مانند  $M^*$  باشد. چون  $G_l$  زیرگراف فراگیری از  $G$  است، بنابراین  $M^*$  یک تطابق کامل از  $G$  نیز هست. همچنین داریم:

$$w(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V} l(v) \quad (۱۳-۵)$$

زیرا هر یال  $e \in M^*$  متعلق به زیرگراف تساوی است و دو سر یال‌های  $M^*$  هر رأس را دقیقاً یکبار می‌پوشانند. از طرف دیگر اگر  $M$  یک تطابق دلخواه از  $G$  باشد، در این صورت داریم:

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{v \in V} l(v) \quad (۱۴-۵)$$

از روابط (۱۳-۵) و (۱۴-۵) نتیجه می‌شود که  $w(M^*) \geq w(M)$ . بنابراین  $M^*$  یک تطابق بهینه است. □  
قضیهٔ فوق پایه و اساس الگوریتمی را برای پیدا کردن تطابق بهینه در یک گراف دوبخشی کامل و زنده تشکیل می‌دهد. این الگوریتم متعلق به کان<sup>۱</sup> (۱۹۵۵) و مانکرز<sup>۲</sup> (۱۹۵۷) است. برای توضیح الگوریتم از روش ادموندز (۱۹۶۷) استفاده می‌کنیم.

با شروع از یک برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر دلخواه  $l$  (به‌عنوان مثال، تابع داده شده در (۱۲-۵)) را  $G_l$  مشخص می‌نماییم. سپس یک تطابق دلخواه  $M$  را در  $G_l$  انتخاب کرده، روش مجارستانی را روی آن اعمال می‌کنیم. اگر یک تطابق بهینه در  $G_l$  پیدا شد، طبق قضیهٔ ۵-۵ آن تطابق بهینه است. در غیراین صورت روش مجارستانی در یک تطابق  $M'$  که بهینه نیست خاتمه می‌یابد و در این حالت یک درخت  $M'$ -مناوب  $H$  وجود دارد که شامل هیچ مسیر  $M$ -افزوده‌ای نیست. بنابراین نمی‌تواند بیش از آن در  $G_l$  رشد نماید. هرگاه لازم باشد، چنین تغییراتی را روی برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر انجام می‌دهیم تا در یک زیرگراف تساوی، تطابق کامل پیدا شود.

### الگوریتم کان-مانکرز

با شروع از برچسب‌زنی رأسی دلخواه  $l$ ،  $G_l$  را مشخص نموده و یک تطابق دلخواه  $M$  را در  $G_l$  انتخاب کن.  
۱- اگر  $X, M$ -آلوده است، در این صورت  $M$  یک تطابق کامل می‌باشد. (زیرا  $|X| = |Y|$ ) و در نتیجه طبق قضیهٔ ۵-۵،  $M$  یک تطابق بهینه نیز هست و در این حالت توقف کن. در غیر این صورت با فرض اینکه  $u$  یک رأس  $M$ -ناآلوده است، قرار بده:  $S = \{u\}$  و  $T = \emptyset$ .

۲- اگر  $TCN_{G_1}(s)$  به مرحله ۳ برو. در غیراین صورت  $TCN_{G_1}(s) = N_{G_1}(s)$ . محاسبه کن:

$$\alpha_l = \min_{\substack{x \in S \\ y \in T}} \{l(x) + l(y) - w(xy)\}$$

و برچسب‌زنی رأسی عمل  $\hat{l}$  را که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l & v \in S \text{ اگر} \\ l(v) + \alpha_l & v \in T \text{ اگر} \\ l(v) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(توجه داشته باشید که  $\alpha_l > 0$  و  $TCN_{G_1}(S)$  را با  $\hat{l}$  و  $G_1$  را با  $G_1$  جایگزین کن.)

۳- رأسی مانند  $y$  از  $T \setminus TCN_{G_1}(S)$  انتخاب کن. همانند آنچه در فرآیند رشد یابنده درختی بخش

۴- دیدیم،  $y$  یا  $M$ -آلوده هست یا نیست. اگر  $y$ ،  $M$ -آلوده و  $yz \in M$  باشد،  $S$  را با  $S \cup \{z\}$  و  $T$  را با

$T \cup \{y\}$  جایگزین کن و به مرحله ۲ برو. در غیراین صورت با فرض اینکه  $P$  یک  $(y, u)$ -مسیر

$M$ -افزوده در  $G$  است،  $M$  را با  $\hat{M} = M \Delta E(P)$  جایگزین کن و به مرحله ۱ برو.

برای نشان دادن طرز کار الگوریتم کان-مانکرز، راحت‌تر است که گراف دوبخشی کامل و زنده  $G$  را با یک

ماتریس  $W = [w_{ij}]$  نشان دهیم که در آن  $w_{ij}$  برابر با وزن یال  $x_i z_j$  در  $G$  می‌باشد. با ماتریس شکل

۵-۱۶ الف شروع می‌کنیم. در شکل ۵-۱۶ ب برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر ۵-۱۲ نشان داده شده است (با

قراردادن برچسب  $x_i$  در سمت راست سطر  $i$ ام ماتریس و برچسب  $z_j$  در زیر ستون  $j$ ام) و درایه‌هایی که

متناظر با یال‌های زیرگراف تساوی مربوطه هستند مشخص شده‌اند و خود زیرگراف تساوی بدون وزن‌هایش

در شکل ۵-۱۶ ج نشان داده شده است.

در بخش قبل دیدیم که این گراف، تطابق کامل ندارد (مجموعه  $S = \{x_1, x_3, x_4\}$  دارای مجموعه همسایه

$\{y_2, y_3\}$  است). بنابراین برچسب‌زنی اولیه خود را به آن چیزی که در شکل ۵-۱۶ د داده شده است تغییر

می‌دهیم. با به کار بردن روش مجارستانی، این بار می‌بینیم که زیرگراف تساوی مربوطه (شکل ۵-۱۶ ه) دارای

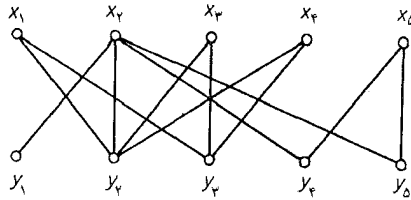
تطابق کامل  $\{x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, y_4, x_4, y_5\}$  و در نتیجه یک تطابق بهینه در  $G$  است.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(الف)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

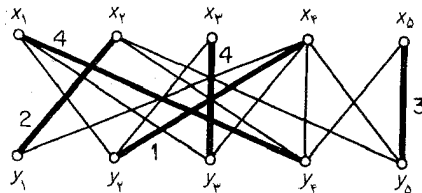
(ب)



(ج)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(د)



شکل ۵-۱۶

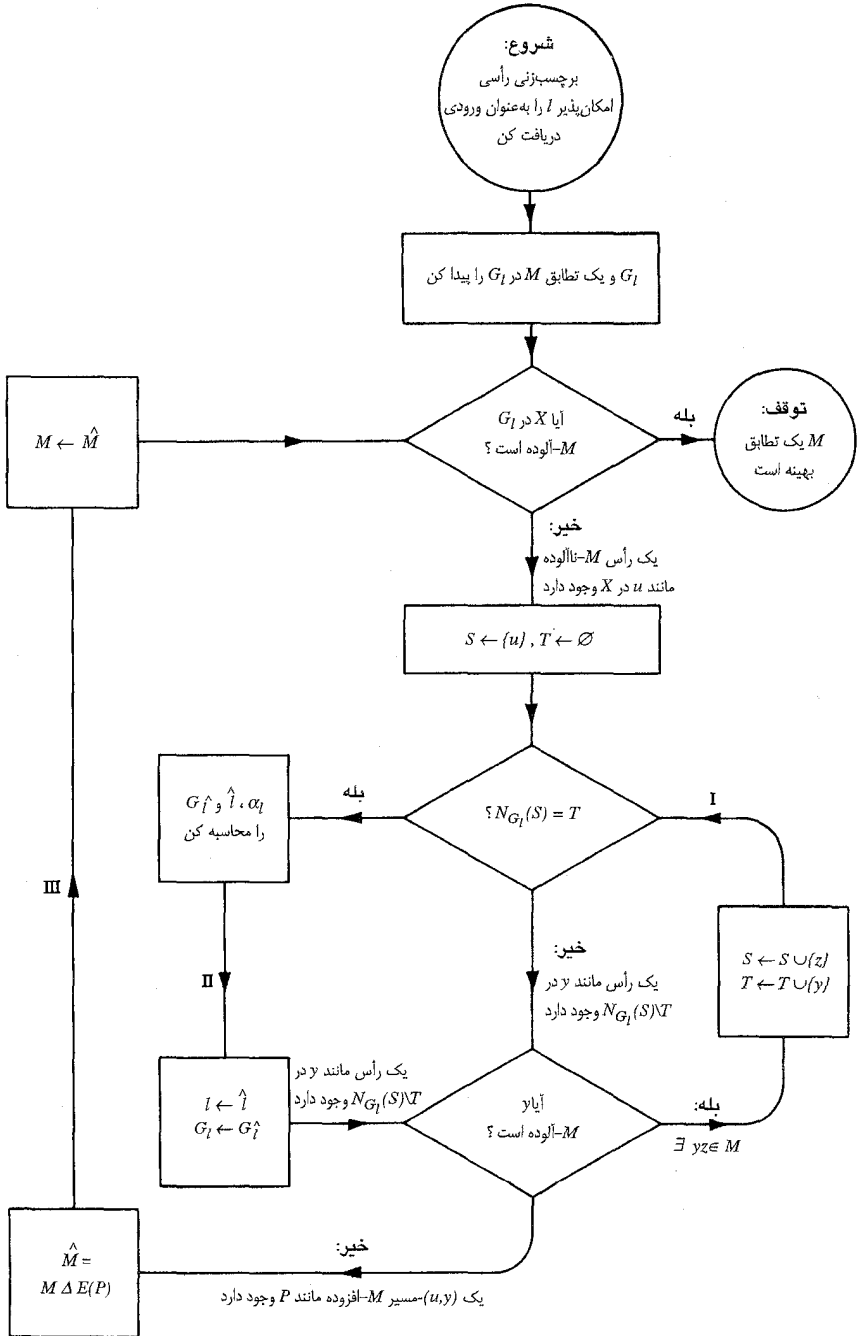
(ه)

نمودار گردش الگوریتم کان-مانکرز در شکل ۵-۱۷ نشان داده شده است. در حلقهٔ II تعداد محاسباتی که برای محاسبهٔ  $G_i$  مورد نیاز است از درجهٔ  $v^2$  است. از آن جایی که الگوریتم پیش از یافتن مسیر  $M$ -افزوده، می‌تواند حداکثر  $|X|$  دفعه در حلقه‌های I و II گردش نماید و همچنین قبل از یافتن تطابق بهینه، حداکثر می‌توان  $|X|$  دفعه فرآیند III را تکرار کرد، بنابراین می‌بینیم که الگوریتم کان-مانکرز یک الگوریتم خوب است.

### تمرین

۱-۵-۵ یک قطر از یک ماتریس  $n \times n$  مجموعه‌ای از  $n$  درایه است که هیچ دوتای آن‌ها متعلق به یک سطر یا یک ستون نیستند. وزن یک قطر برابر با مجموع درایه‌های آن می‌باشد. یک قطر با کمترین وزن در ماتریس زیر پیدا کنید.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$



شکل ۵-۱۷. الگوریتم کانمانکرز

## مراجع

- Anderson, I. (1971). *Perfect matchings of a graph*. *J. Combinatorial Theory*, 10, B 183–86
- Berge, C. (1957). *Two theorems in graph theory*, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 43, 842–44
- Edmonds, J. (1965). *Paths, trees and flowers*. *Canad. J. Math.*, 17, 449–67
- Edmonds, J. (1967). *'An Introduction to Matchings'*, notes of lectures delivered at the University of Michigan (unpublished)
- Hall, P. (1935). *On representatives of subsets*. *J. London Math. Soc.*, 10, 26–30
- König, D. (1931). *Graphs and matrices* (Hungarian). *Math. Fiz. Lopok*, 38, 116–119
- Kuhn, H. W. (1955). *The Hungarian method for the assignment problem*. *Naval Res. Logist. Quart.*, 2, 83–97
- Lovász, L. (1975). *Three short proofs in graph theory*, *J. Combinatorial Theory*, B, 19, 111–13
- Munkres, J. (1957). *Algorithms for the assignment and transportation problems*. *J. Soc. Indus. Appl. Math.*, 5, 32–38
- Petersen, J. (1891). *Die theorie der regulären graphs*, *Acta Math.*, 15, 193–220
- Tutt, W. T. (1974). *The factorization of linear graphs*. *J. London Math. Soc.*, 22, 107–11



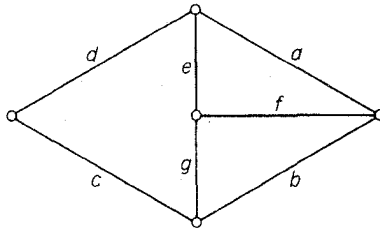
# فصل ۶

## رنگ آمیزی یالی

### ۶-۱ عدد رنگی یالی

یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی  $\mathcal{C}$  از گراف بدون طوقه  $G$  عبارت است از تخصیص  $k$  رنگ  $۱, ۲, \dots, k$  به یال های  $G$ . اگر در رنگ آمیزی  $\mathcal{C}$  هیچ دو یال مجاورى هم رنگ نباشند آن را یک رنگ آمیزی مجاز می نامیم.

یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی را می توان به عنوان افراز  $(E_1, E_2, \dots, E_k)$  از  $E$  در نظر گرفت که در آن  $E_i$  برابر مجموعه ای (احتمالاً تهی) از یال های  $E$  است که دارای رنگ  $i$  می باشند. در این صورت یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی مجاز، یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی  $(E_1, E_2, \dots, E_k)$  است که در آن هر زیر مجموعه  $E_i$  یک تطابق است. گراف شکل ۶-۱ دارای ۴-رنگ آمیزی یالی مجاز  $(\{a, g\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d\})$  است.



شکل ۶-۱

اگر  $G$  دارای یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی مجاز باشد، آن را  $k$ -رنگ پذیر یالی می نامند. مسلماً هر گراف بدون طوقه  $G$ ،  $\mathcal{E}$ -رنگ پذیر یالی است و اگر  $G$ ،  $k$ -رنگ پذیر یالی باشد، به ازای هر  $l > k$ ،  $l$ -رنگ پذیر یالی

نیز هست. عدد رنگی یالی  $(G)$  برای یک گراف بدون طوقه  $G$ ، برابر با کوچکترین  $k$  ای است که به‌ازای آن  $G$ ،  $k$ -رنگ پذیر یالی می‌باشد. اگر  $\chi'(G) = k$  باشد،  $G$  را  $k$ -رنگی یالی می‌نامند. به‌راحتی می‌توان دید که گراف شکل ۱-۶ دارای هیچ ۳-رنگ آمیزی یالی مجاز نیست، بنابراین گراف مزبور ۴-رنگی یالی است. واضح است که در هر رنگ آمیزی یالی مجاز، یال‌های واقع بر یک رأس باید دارای رنگ‌های متفاوتی باشند در نتیجه داریم:

$$\chi' \geq \Delta \quad (۱-۶)$$

باتوجه به مثال شکل ۱-۶ می‌بینیم که نامساوی (۱-۶) می‌تواند اکید باشد. به هر حال نشان خواهیم داد که اگر  $G$  دوبخشی باشد، آنگاه  $\chi' = \Delta$ . لم ساده زیر، اساس اثبات ما می‌باشد. اگر حداقل یکی از یال‌های واقع بر رأس  $v$  دارای رنگ  $i$  باشد، می‌گوییم که رنگ  $i$  در رأس  $v$  آشکار شده است.

**لم ۱-۱-۶** فرض کنید  $G$  گراف همبندی باشد که یک دور فرد نیست. در این صورت  $G$  دارای یک ۲-رنگ آمیزی یالی است به طوری که در هر رأس با درجهٔ حداقل دو، هر دو رنگ آشکار شوند.

**اثبات** می‌توانیم فرض کنیم که  $G$  غیربدیهی است. نخست فرض کنید که  $G$  اوپلری است. اگر  $G$  یک دور زوج باشد، ۲-رنگ آمیزی یالی مجاز  $G$  دارای خاصیت موردنظر است. در غیر این صورت، درجهٔ رأسی مانند  $v$  در  $G$  حداقل ۴ است. فرض کنید  $v, e_1 v, \dots, e_r v$  یک تور اوپلری در  $G$  باشد و قرار دهید:

$$E_1 = \{e_i \mid i \text{ زوج باشد}\} \quad \text{و} \quad E_2 = \{e_i \mid i \text{ فرد باشد}\} \quad (۲-۶)$$

در این صورت ۲-رنگ آمیزی یالی  $(E_1, E_2)$  از  $G$  خاصیت موردنظر را خواهد داشت، زیرا هر رأس  $v$  در  $G$  یک رأس داخلی از  $v, e_1 v, \dots, e_r v$  می‌باشد.

اگر  $G$  اوپلری نباشد، گراف جدید  $G^*$  را با افزودن یک رأس جدید مانند  $v$  و متصل نمودن آن به تمام رأس‌های دارای درجهٔ فرد در  $G$  می‌سازیم. به‌وضوح  $G^*$  اوپلری است. فرض کنید  $v, e_1 v, \dots, e_r v$  یک تور اوپلری در  $G^*$  باشد و  $E_1$  و  $E_2$  را همانند (۲-۶) تعریف کرده‌ایم. به راحتی می‌توان تحقیق نمود که ۲-رنگ آمیزی یالی  $(E_1 \cap E, E_2 \cap E)$  از  $G$  دارای خاصیت موردنظر است.  $\square$

در یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی  $\mathcal{C}$  از  $G$ ، تعداد رنگ‌های متمایزی که در  $v$  آشکار شده‌اند را با  $c(v)$  نمایش می‌دهیم. به‌وضوح همیشه داریم:

$$c(v) \leq d(v) \quad (۳-۶)$$

علاوه بر این،  $\mathcal{C}$  یک  $k$ -رنگ آمیزی مجاز است اگر و تنها اگر به ازای هر رأس  $v$  از  $G$  در رابطه (۳-۶) تساوی برقرار باشد.  $k$ -رنگ آمیزی یالی  $\mathcal{C}'$  را یک بهبود روی  $\mathcal{C}$  می نامیم، اگر داشته باشیم:

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$$

که در آن،  $c'(v)$  برابر با تعداد رنگ های متمایزی است که در رنگ آمیزی  $\mathcal{C}'$  در رأس  $v$  آشکار شده اند. یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی که قابل بهبود نباشد، بهینه نامیده می شود.

**لم ۲-۱-۶** فرض کنید که  $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \dots, E_k)$  یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی بهینه از  $G$  باشد. اگر رأسی مانند  $u$  در  $G$  و دورنگ  $i$  و  $z$  وجود داشته باشند، به طوری که  $i$  در  $u$  آشکار نشده و  $z$  حداقل دوبار در  $u$  آشکار شده باشد، آنگاه مؤلفه ای از  $G[E_i \cup E_z]$  که شامل  $u$  است، یک دور فرد است.

**اثبات** فرض کنید که  $u$  رأسی باشد که در فرض لم صدق می کند. مؤلفه ای از  $G[E_i \cup E_z]$  که شامل  $u$  است را با  $H$  نمایش می دهیم. فرض کنید که  $H$  یک دور فرد نباشد، در این صورت طبق لم ۱-۶-۱،  $H$  دارای یک ۲-رنگ آمیزی یالی است به طوری که در تمام رأس هایی که درجه آن ها در  $H$  حداقل برابر دو است، هر دو رنگ آشکار شده اند. هنگامی که یال های  $H$  را با رنگ های  $i$  و  $z$  به این صورت رنگ آمیزی مجدد می کنیم، به یک  $k$ -رنگ آمیزی یالی جدید  $\mathcal{C}' = (E'_1, E'_2, \dots, E'_k)$  از  $G$  دست می یابیم. با توجه به اینکه  $c'(v)$  نمایانگر تعداد رنگ های متمایز آشکار شده در  $v$ ، در رنگ آمیزی  $\mathcal{C}'$  است، داریم:

$$c'(u) = c(u) + 1$$

زیرا هم اکنون هر دورنگ  $i$  و  $z$  در  $u$  آشکار شده اند و همچنین داریم:

$$c'(v) \geq c(v) \quad \text{به ازای هر } v \neq u$$

در نتیجه  $\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$  که این با انتخاب  $\mathcal{C}$  در تناقض است. بنابراین  $H$  حتماً یک دور فرد است.  $\square$

**قضیه ۱-۶** اگر  $G$  دوبخشی باشد، آنگاه  $\chi' = \Delta$ .

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف با  $\chi' > \Delta$  و  $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \dots, E_\Delta)$  یک  $\Delta$ -رنگ آمیزی یالی بهینه از  $G$  باشد. اگر  $u$  رأسی باشد که در آن رابطه  $c(u) < d(u)$  برقرار است. به وضوح،  $u$  در فرض لم ۱-۶-۲ صدق می کند. بنابراین  $G$  شامل یک دور فرد است و در نتیجه دوبخشی نیست. از رابطه (۱-۶) نتیجه می شود که اگر

$G$  دوبخشی باشد آنگاه  $\chi' = \Delta$ .  $\square$

اثبات دیگری برای قضیهٔ ۱.۶ با استفاده از تمرین ۳-۲-۵ الف وجود دارد که مختصراً در تمرین ۱.۶-۳ شرح داده شده است.

## تمرین‌ها

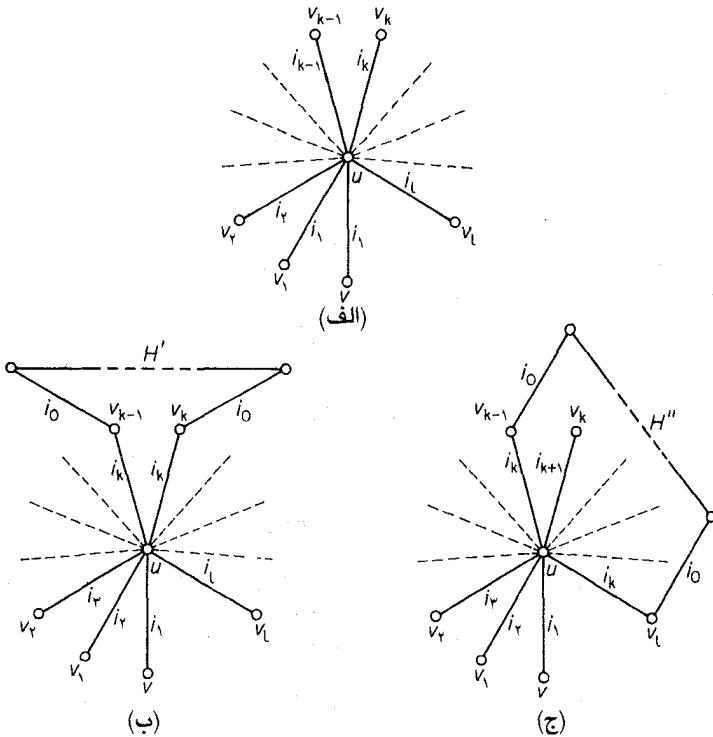
- ۱-۱.۶ با یافتن یک رنگ‌آمیزی یالی مناسب نشان دهید که  $\chi'(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})$ .
- ۲-۱.۶ نشان دهید که گراف پترسن ۴-رنگی یالی است.
- ۳-۱.۶ الف) نشان دهید که اگر  $G$  دوبخشی باشد، آنگاه  $G$  دارای یک زیرگراف دوبخشی  $\Delta$ -منتظم است.
- ب) با استفاده از قسمت الف) و تمرین ۳-۲-۵ الف اثبات دیگری برای قضیهٔ ۱.۶ ارائه نمایید.
- ۴-۱.۶ الگوریتم خوبی برای یافتن یک  $\Delta$ -رنگ‌آمیزی یالی مجاز از گراف دوبخشی  $G$  توضیح دهید.
- ۵-۱.۶ با استفاده از تمرین ۱-۵-۸ و قضیهٔ ۱.۶ نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف بدون طوقه باشد  $\Delta = 3$  باشد آنگاه  $\chi' \leq 4$ .
- ۶-۱.۶ نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف دوبخشی با شرط  $\delta > 0$  باشد، آنگاه  $G$  دارای یک  $\delta$ -رنگ‌آمیزی یالی است به طوری که تمام  $\delta$  رنگ، در هر رأس آشکار می‌شود. (R. P. Gupta)

## ۲-۶ قضیهٔ ویزینگ<sup>۱</sup>

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، اگر  $G$  دوبخشی نباشد، الزاماً نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که  $\chi' = \Delta$ . قضیهٔ مهمی که متعلق به ویزینگ (۱۹۶۴) و به‌طور مستقل گاپتا<sup>۲</sup> (۱۹۶۶) است اثبات می‌کند که برای هر گراف ساده  $G$  یا  $\chi' = \Delta$  یا  $\chi' = \Delta + 1$ . اثباتی که در اینجا آمده، توسط فورنیه<sup>۳</sup> (۱۹۷۳) ارائه شده است.

**قضیهٔ ۲-۶** اگر  $G$  ساده باشد، در این صورت یا  $\chi' = \Delta$  یا  $\chi' = \Delta + 1$ .

**اثبات** فرض کنید که  $G$  یک گراف ساده باشد با اتکا به رابطهٔ (۱-۶) کافی است که فقط نشان دهیم که  $\chi' \leq \Delta + 1$ . فرض کنید که  $\chi' > \Delta + 1$ . اگر  $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \dots, E_{\Delta+1})$  یک  $(\Delta + 1)$ -رنگ‌آمیزی یالی بهینه از  $G$  و  $u$  رأسی باشد که به‌ازای آن  $c(u) < d(u)$ ، آنگاه دورنگ مانند  $i_1$  و  $i_2$  وجود دارند به طوری که  $i_1$  در  $u$  آشکار نشده و  $i_2$  حداقل دوبار در  $u$  آشکار شده است. فرض کنید که  $uv_1$ ، همانند شکل ۲-۶ الف دارای  $i_1$  رنگ باشد.



شکل ۶-۲

از آن جایی که  $d(v_1) < \Delta + 1$ ، رنگی مانند  $i_4$  در  $v_1$  آشکار نشده است. از طرفی  $i_4$  باید در  $u$  آشکار شده باشد، زیرا در غیر این صورت با رنگ آمیزی مجدد  $uv_1$  با رنگ  $i_4$  به یک بهبود روی  $\mathcal{C}$  دست می یابیم. بنابراین یالی مانند  $uv_4$  دارای رنگ  $i_4$  است. مجدداً چون  $d(v_4) < \Delta + 1$ ، رنگی مانند  $i_3$  در  $v_4$  آشکار نشده است و این رنگ  $i_3$  باید در  $u$  آشکار شده باشد، زیرا در غیر این صورت با رنگ آمیزی  $uv_1$  با  $i_4$  و  $uv_4$  با  $i_3$  به یک  $(\Delta + 1)$ -رنگ آمیزی یالی بهبود یافته می رسیم. در نتیجه یالی مانند  $uv_3$  دارای رنگ  $i_3$  است. با ادامه دادن این روند به یک دنباله  $v_1, v_4, \dots$  از رأس ها و یک دنباله از رنگ های  $i_1, i_4, \dots$  می رسیم، به طوری که:

$$(۱) uv_j \text{ دارای رنگ } i_j \text{ است و}$$

$$(۲) \text{ در } i_{j+1} \text{ در } v_j \text{ آشکار نشده است.}$$

از آن جایی که درجه  $u$  متناهی است یک عدد صحیح مینیمم همانند  $l$  وجود دارد به طوری که به ازای یک

مقدار  $k$  کوچکتر از  $l$  داریم:

$$(۳) i_{l+1} = i_k$$

این وضعیت در شکل ۲-۶ الف نشان داده شده است.

اینک  $G$  را بدین طریق رنگ‌آمیزی مجدد می‌نماییم: به‌ازای  $1 < j < k-1$ ،  $uv_j$  را با رنگ  $i_{j+1}$  رنگ‌آمیزی می‌کنیم تا  $(\Delta+1)$ -رنگ‌آمیزی جدید  $\mathcal{C}' = (E'_1, E'_2, \dots, E'_{\Delta+1})$  به‌دست آید (شکل ۲-۶ ب). واضح است که:

$$v \in V \text{ هر به‌ازای } c'(v) \geq c(v)$$

و بنابراین  $\mathcal{C}'$  هم یک  $(\Delta+1)$ -رنگ‌آمیزی بهینه از  $G$  است. طبق لم ۲-۶ مؤلفهٔ  $H'$  از  $G[E'_i \cup E'_{i_k}]$  شامل  $u$  است، یک دور فرد است.

اکنون به‌ازای  $1 \leq j \leq k$ ،  $uv_j$  را با رنگ  $i_{j+1}$  رنگ‌آمیزی می‌کنیم تا  $(\Delta+1)$ -رنگ‌آمیزی یالی  $\mathcal{C}'' = (E''_1, E''_2, \dots, E''_{\Delta+1})$  به‌دست آید (شکل ۲-۶ ج). همانند بالا داریم:

$$v \in V \text{ هر به‌ازای } c''(v) \geq c(v)$$

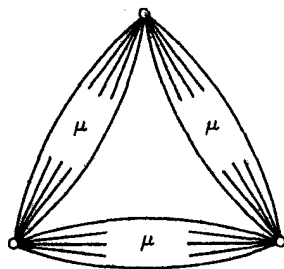
و مؤلفهٔ  $H''$  از  $G[E''_i \cup E''_{i_k}]$  شامل  $u$  است، یک دور فرد می‌باشد. چون درجهٔ  $v_k$  در  $H'$  برابر با ۲ است، درجهٔ آن در  $H''$  باید برابر با ۱ باشد که این یک تناقض است.  $\square$

ویزینگ در حقیقت قضیهٔ کلی‌تری از آنچه در بالا دیدیم، اثبات نمود که این قضیه برای تمامی گراف‌های بدون طوقه صادق است. بیشترین تعداد یال‌هایی که دور رأس  $G$  را به یکدیگر متصل می‌کنند تکرر  $G$  نامیده با  $\mu(G)$  نمایش می‌دهیم. اکنون می‌توانیم قضیهٔ ویزینگ را در حالت کلی خود بیان کنیم:

اگر  $G$  گرافی بدون طوقه باشد، آنگاه  $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + \mu$ .

به‌ازای هر  $\mu$ ، گرافی مانند  $G$  وجود دارد که در آن تساوی  $\chi' = \Delta + \mu$  برقرار است. به‌طورمثال در گراف  $G$

شکل ۳-۶، داریم:  $\Delta = 2\mu$  و چون هر دو یال  $G$  مجاورند بنابراین  $\chi' = \Delta + \mu = 3\mu$ .



شکل ۳-۶. گراف  $G$  با  $\chi' = \Delta + \mu$

با وجود این که قضیه ۲.۶ بسیار قوی است، ولی یک سوال جالب را بدون پاسخ می گذارد: چه گراف های ساده ای در شرط  $\chi = \Delta$  صدق می کنند؟ اهمیت این سوال در فصل ۹، هنگامی که رنگ آمیزی یالی گراف های مسطح را مورد بررسی قرار می دهیم، مشخص می گردد.

## تمرین ها

۲.۶\*۱ با پیدا کردن رنگ آمیزی های یالی مناسب نشان دهید که  $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n - 1$ .

۲.۶۲ نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف ساده منتظم ناتهی با  $v$  فرد باشد، آنگاه  $\chi' = \Delta + 1$ .

۲.۶۳ الف) فرض کنید  $G$  یک گراف ساده باشد. نشان دهید که اگر  $v = 2n + 1$  و  $\Delta > n$ . آنگاه

$$\chi' = \Delta + 1 \quad (V. G. Vising)$$

ب) با استفاده از قسمت الف) نشان دهید که:

(۱) اگر  $G$  گرافی باشد که از اشتقاق یک یال در یک گراف ساده منتظم با تعداد زوجی رأس،

$$\chi' = \Delta + 1$$

(۲) اگر  $G$  گرافی باشد که با حذف کمتر از  $\frac{k}{4}$  یال از یک گراف  $k$ -منتظم ساده با تعداد فردی

$$\chi' = \Delta + 1 \quad (L. W. beineke and R. J. Wilson)$$

۲.۶۴ الف) نشان دهید که اگر  $G$  بدون طوقه باشد، در این صورت دارای یک زیرگراف  $\Delta$ -منتظم بدون طوقه است.

ب) با استفاده از قسمت الف) و تمرین ۲.۵-۳ ب نشان دهید که اگر  $G$  بدون طوقه و  $\Delta$  زوج باشد،

$$\chi' \leq \frac{3}{4}\Delta$$

(شانون ۱۹۴۹ نشان داد که این نامساوی در حالتی که  $\Delta$  فرد است هم برقرار است.)

۲.۶۵  $G$  را یکتا  $k$ -رنگ پذیر یالی می نامیم، اگر هر دو  $k$ -رنگ آمیزی یالی مجاز از  $G$  به یک افزایش

یکسان از  $E$  منتهی شوند. نشان دهید که هر گراف ۳-منتظم یکتا ۳-رنگ پذیر یالی، همیلتنی است.  $(D. L. Greenwell and H.V.Kronk)$

۲.۶۶ حاصل ضرب گراف های ساده  $G$  و  $H$  گراف ساده  $G \times H$  با مجموعه رأس های  $V(G) \times V(H)$

می باشد که در آن  $(u, v)$  با رأس  $(u', v')$  مجاور است اگر و تنها اگر یا  $u = u'$  و  $vv' \in E(H)$

$$v = v' \text{ و } uu' \in E(G)$$

الف) با استفاده از قضیهٔ ویزینگ (۲۶) نشان دهید که  $\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2)$ .

ب) نتیجه بگیرید که اگر  $H$  یک گراف غیربدیهی با شرط  $\chi'(H) = \Delta(H)$  باشد، آنگاه

$$\chi'(G \times H) = \Delta(G \times H)$$

۷-۲۶ الگوریتم خوبی برای پیدا کردن یک  $(\Delta + 1)$ -رنگ‌آمیزی یالی مجاز از گراف ساده  $G$  توضیح دهید.

۸-۲۶\* نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\delta > 1$  باشد، آنگاه  $G$  دارای یک  $(\delta - 1)$ -رنگ‌آمیزی یالی است به طوری که تمام  $\delta - 1$  رنگ در هر رأس  $G$  آشکار شوند.

(R. P. Gupta)

## کاربردها

### ۳-۶ مسأله زمان بندی

در یک مدرسه  $m$  آموزگار  $X_1, X_2, \dots, X_m$  و  $n$  کلاس  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  وجود دارند. اگر بنا باشد که آموزگار  $X_i$  ساعت به کلاس  $Y_j$  درس بدهد، می‌خواهیم یک برنامه درسی کامل با کمترین تعداد ساعت‌ها طراحی نماییم.

مسأله فوق به مسأله زمان بندی مشهور است و می‌توان با استفاده از نظریهٔ رنگ‌آمیزی یالی گراف‌ها، به طور کامل به آن پاسخ داد. برای این کار یک گراف دوبخشی  $G$  را با بخش‌های  $X$  و  $Y$  در نظر می‌گیریم که در آن  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  و  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  و رأس  $x_i$  توسط  $P_{ij}$  یال به رأس  $y_j$  متصل است. می‌دانیم که یک آموزگار در هر ساعت می‌تواند حداکثر به یک کلاس درس بدهد و یک کلاس در هر ساعت می‌تواند حداکثر یک آموزگار داشته باشد. بنابراین طرح درسی برای یک ساعت، متناظر با یک تطابق در گراف است و برعکس هر تطابق متناظر با یک حالت ممکن برای تخصیص آموزگاران به کلاس‌ها در یک ساعت می‌باشد. در نتیجه، مسأله ما عبارت است از افزایش یال‌های  $G$  به کمترین تطابق‌های ممکن یا به عبارت دیگر اینکه  $G$  را با کمترین رنگ‌های ممکن به صورت مجاز رنگ‌آمیزی می‌نماییم. از آنجایی که  $G$  دوبخشی است، طبق قضیهٔ ۱۶ می‌دانیم که  $\chi' = \Delta$ . بنابراین اگر هیچ آموزگاری بیش از  $P$  ساعت درس ندهد و اگر هیچ کلاسی بیش از  $P$  ساعت درس نداشته باشد، می‌توانیم برنامهٔ درسی را به صورت یک جدول زمانی  $P$  ساعتی طرح‌ریزی نماییم. ضمناً همان طور که در تمرین ۱۶-۴ دیدیم الگوریتم خوبی برای ساختن چنین جدولی وجود دارد و در نتیجه یک راه‌حل کامل برای مسألهٔ زمان بندی در دست داریم.



در حالت کلی ممکن است مسأله به این سادگی نباشد. مثلاً فرض کنید که تعداد اتاق‌های درس محدود باشد. با این محدودیت اضافی، تعداد ساعت‌های مورد نیاز برای طراحی یک برنامه درسی کامل چقدر خواهد بود؟

فرض کنید روی هم رفته  $l$  درس داریم که در یک برنامه درسی  $P$  ساعتی زمان بندی شده‌اند. این برنامه درسی ایجاب می‌کند که در هر ساعت به طور متوسط  $\frac{l}{P}$  درس گرفته شوند. بنابراین واضح است که حداقل  $\lceil \frac{l}{P} \rceil$  اتاق درس مورد نیاز است. از طرف دیگر ثابت می‌شود که همواره می‌توان  $l$  درس را در یک برنامه درسی  $P$  ساعتی طوری چید که در هر ساعت حداکثر  $\lceil \frac{l}{P} \rceil$  اتاق مورد نیاز باشد. این مطلب در قضیه ۳-۶ اثبات شده است. اثبات را با لم زیر شروع می‌کنیم.

**لم ۳-۶** فرض کنید که  $M$  و  $N$  دو تطابق مجزا از  $G$  با شرط  $|M| > |N|$  باشند. در این صورت تطابق‌های

مجزای  $N'$  و  $M'$  از  $G$  وجود دارند به طوری که  $|M'| = |M| - 1$ ،  $|N'| = |N| + 1$  و  $M'UN' = MUN$ .

**اثبات** گراف  $H = G[MUN]$  را در نظر بگیرید. همانند آنچه در اثبات قضیه ۱-۵ دیدیم، هر مؤلفه از

$H$ ، یا یک دور زوج است که یال‌های آن یک درمیان، در  $N$  و  $M$  هستند یا یک مسیر است که یال‌های آن متناوباً در  $M$  و  $N$  قرار دارند. چون  $|M| > |N|$ ، مؤلفه‌ای مانند  $P$  از  $H$  وجود دارد که با یالی از  $M$  شروع

شده و با یالی از  $M$  نیز خاتمه می‌یابد. فرض کنید  $P = v_0 e_1 v_1 \dots e_{2n} v_{2n+1}$  و قرار دهید:

$$M' = (M \setminus \{e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}\}) \cup \{e_2, e_4, \dots, e_{2n}\}$$

$$N' = (N \setminus \{e_2, e_4, \dots, e_{2n}\}) \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}\}$$

در این صورت  $M'$  و  $N'$  تطابق‌هایی از  $G$  هستند که در شرط‌های لم صدق می‌کنند.  $\square$

**قضیه ۳-۶** اگر  $G$  یک گراف دوبخشی با شرط  $\Delta \leq p$  باشد، آنگاه  $p$  تطابق مجزای  $M_1, M_2, \dots, M_p$  از  $G$  وجود دارند به طوری که:

$$E = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p \quad (۴-۶)$$

و به ازای هر  $1 \leq i \leq p$ ،

$$\left\lfloor \frac{\varepsilon}{p} \right\rfloor \leq |M_i| \leq \left\lceil \frac{\varepsilon}{p} \right\rceil \quad (۵-۶)$$

(شرط (۵-۶) این نکته را بیان می‌کند که اختلاف اندازه تطابق‌های  $M_i$  و  $M_j$  حداکثر برابر یک است).

**اثبات** فرض کنید که  $G$  یک گراف دوبخشی است. طبق قضیه ۱-۶، یال‌های  $G$  را می‌توان به  $\Delta$  تطابق  $M'_1, M'_2, \dots, M'_\Delta$  افزایش نمود. بنابراین به ازای هر  $p, p \geq \Delta$  تطابق مجزای  $M'_1, M'_2, \dots, M'_p$  وجود

دارند به طوری که به ازای هر  $i > \Delta$ ،  $M'_i = \emptyset$  و داریم:

$$E = M'_1 \cup M'_2 \cup \dots \cup M'_p$$

با به کاربردن پی‌درپی لم ۳-۶ بر روی زوج تطابق‌هایی که اختلاف اندازه آن‌ها بیش از یک است، بالاخره

به  $p$  تطابق مجزای  $M_1, M_2, \dots, M_p$  خواهیم رسید که در شرط‌های (۴-۶) و (۵-۶) صدق می‌کنند. □

به عنوان مثال فرض کنید که چهار آموزگار و پنج کلاس داریم و تعداد ساعت‌های تدریس هر آموزگار به

هر کلاس توسط ماتریس  $P = [P_{ij}]$  در شکل ۴-۶ الف مشخص شده است. یک برنامه درسی ۴ ساعته برای

این مثال، در شکل ۴-۶ ب نشان داده شده است.

برنامه درسی فوق را می‌توان با تجزیه مجموعه یال‌های گراف دوبخشی  $G$  متناظر با  $P$ ، به تطابق‌های

مجزا نمایش داد. این مطلب در شکل ۴-۶ الف نشان داده شده است.

		ساعت				
		۱	۲	۳	۴	
$P = X_1 \left  \begin{array}{ccccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & \\ Y_3 & Y_4 & Y_5 & & \\ Y_4 & Y_5 & & & \end{array} \right $	۲	۰	۱	۱	۰	$X_1 \begin{array}{ c c c c } \hline Y_1 & Y_1 & Y_3 & Y_4 \\ \hline Y_2 & - & Y_4 & - \\ \hline Y_3 & Y_3 & - & Y_4 \\ \hline Y_4 & Y_5 & - & - \\ \hline \end{array}$
	۰	۱	۰	۱	۰	
	۰	۱	۱	۱	۰	
	۰	۰	۰	۱	۱	
	۰	۰	۰	۱	۱	

(الف)

(ب)

شکل ۴-۶

(یال‌های معمولی متناظر با ساعت اول، یال‌های مقطع متناظر با ساعت دوم، یال‌های موجی متناظر با

ساعت سوم و یال‌های ضخیم متناظر با ساعت چهارم می‌باشند).

با نگاهی به برنامه درسی می‌بینیم که در ساعت اول، چهار کلاس درس دارند و بنابراین چهار اتاق درس

مورد نیاز است. از طرفی  $\varepsilon = 11$  و طبق قضیهٔ ۳-۶ می‌توانیم یک برنامه درسی، طوری طراحی کنیم که در هر

ساعت یا  $2 = \lfloor \frac{11}{4} \rfloor$  یا  $3 = \lceil \frac{11}{4} \rceil$  کلاس، درس داشته باشند. فرض کنید که  $M_1$  نمایانگر تطابق معمولی و

$M_4$  نمایانگر تطابق ضخیم باشد. در این صورت  $|M_1| = 4$  و  $|M_4| = 2$ . اکنون می‌توانیم با در نظر گرفتن

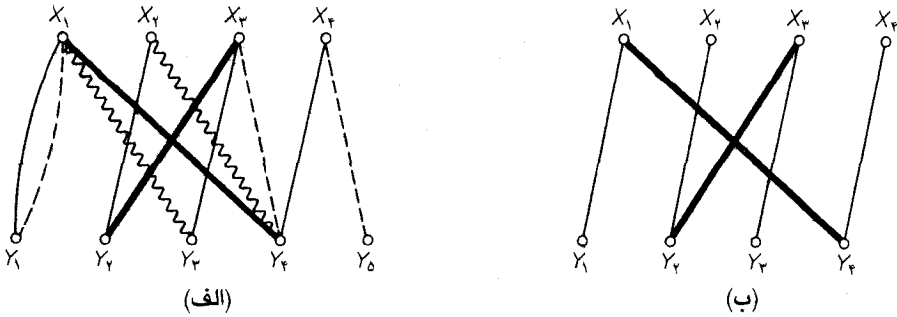
$G[M_4 \cup M_1]$  (شکل ۴-۵ ب) یک برنامه درسی ۴ ساعته طراحی کنیم که در آن فقط به سه اتاق درس نیاز

داریم.  $G[M_4 \cup M_1]$  دارای دو مؤلفه است که هر یک از آن‌ها، مسیری به طول سه هستند. هر دو مسیر، با

یال‌های معمولی شروع شده و خاتمه می‌پذیرند و بنابراین با معاوضه کردن تطابق‌های روی یکی از مسیرها،

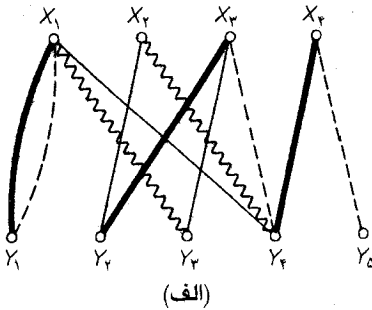
تطابق معمولی به یک تطابق سه یالی کاهش می‌یابد و همزمان، تطابق ضخیم نیز به یک تطابق سه یالی

تبدیل می شود.



شکل ۵-۶

اگر مسیر  $x_1 x_2 x_3 x_4$  را انتخاب کنیم و یال های  $y_1 x_1$  و  $x_4 y_4$  را ضخیم و یال  $x_2 y_2$  را معمولی نماییم، به تجزیه ای از  $E$  که در شکل ۶-۶ الف نشان داده شده، خواهیم رسید. این تغییر و اصلاح، به برنامه درسی شکل ۶-۶ ب منتهی می شود که در آن فقط سه اتاق درسی مورد نیاز خواهد بود.



ساعت

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$X_1$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	-	$Y_1$	$Y_1$
$X_2$	$Y_2$	$Y_3$	-	-	-	-
$X_3$	-	-	$Y_3$	$Y_3$	$Y_2$	-
$X_4$	-	-	-	$Y_4$	-	$Y_4$

(ب)

شکل ۶-۶

حال فرض کنید که فقط دو اتاق درس در دسترس است. قضیه ۶-۳ ما می گوید که یک برنامه درسی ۶ ساعتی وجود دارد به طوری که خواسته های ما را برآورده می سازد (چون  $\lceil \frac{11}{6} \rceil = 2$ ). این برنامه درسی در شکل ۶-۷ نشان داده شده است.

ساعت

	۱	۲	۳	۴
$X_1$	$Y_3$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_4$
$X_2$	$Y_2$	-	$Y_4$	-
$X_3$	$Y_3$	$Y_4$	-	$Y_2$
$X_4$	-	$Y_5$	-	$Y_3$

شکل ۶-۷

در عمل، بسیاری از مسائل زمان‌بندی به واسطه مقداردهی‌های اولیه، پیچیده می‌شوند. (منظور از مقدار، دهی‌های اولیه، شرط‌هایی است که معین می‌کند در برخی ساعت‌ها، آموزگاران خاصی باید کلاس‌های خاصی را تدریس کنند). این‌گونه حالت‌های کلی از مسألهٔ زمان‌بندی، توسط دمپستر<sup>۱</sup> (۱۹۷۱) و دی ورا<sup>۲</sup> (۱۹۷۰) مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

## تمرین

۱-۳-۶ در یک مدرسه، هفت آموزگار و دوازده کلاس وجود دارند که هر آموزگار  $X_i$  باید بر طبق ماتریس زیر، در طول یک هفته پنج روزه،  $P_{ij}$  ساعت به کلاس  $Y_j$  درس بدهد.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$Y_8$	$Y_9$	$Y_{10}$	$Y_{11}$	$Y_{12}$
$X_1$	۳	۲	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳
$X_2$	۱	۳	۶	۰	۴	۲	۵	۱	۳	۳	۰	۴
$X_3$	۵	۰	۵	۵	۰	۰	۵	۰	۵	۰	۵	۵
$X_4$	۲	۴	۲	۴	۲	۴	۲	۴	۲	۴	۲	۳
$X_5$	۳	۵	۲	۲	۰	۳	۱	۴	۴	۳	۲	۵
$X_6$	۵	۵	۰	۰	۵	۵	۰	۵	۰	۵	۵	۰
$X_7$	۰	۳	۴	۳	۴	۳	۴	۳	۴	۳	۳	۰

(الف) در یک برنامه درسی کامل، هر روز را باید به چند ساعت تقسیم نمود.

(ب) اگر یک برنامه درسی طراحی نماییم که در هر روز، هشت ساعت داشته باشد، در این صورت

چند اتاق درس مورد نیاز خواهد بود؟

## مراجع

- Dempster, M. A. H.(1971). Two algorithms for time-table problem, in *Combinatorial Mathematics and its Applications* (ed. D. J. A. Welsh), Academic Press, New York, pp. 63-85
- Fournier, J. C.(1973). Colorations des arêtes d'un graphe. *Cahiers du CERO*, 15, 311-14
- Gupta, R. P.(1966). The chromatic index and the degree of a graph, *Notices Amer. Math. Soc.*, 13, abstract 66T-429
- Shannon, C. E.(1949). A theorem on coloring the lines of a network, *J. Math. Phys.*, 28, 148-51
- Vizing, V. G.(1964). On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph, (Russian). *Diskret. Analiz.*, 3, 25-30
- de Werra, D.(1970). On some combinatorial problems arising in scheduling., *INFOR*, 8, 165-75

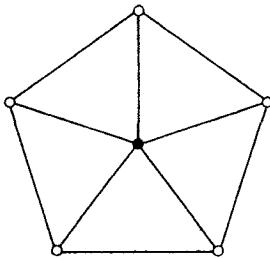
# فصل ۷

## مجموعه‌های مستقل و خوشه‌ها

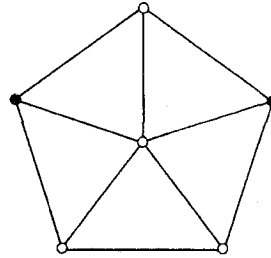
### ۱-۷ مجموعه‌های مستقل

زیرمجموعه  $S$  از  $V$  را که هیچ دو رأس آن در  $G$  مجاور نیستند، یک مجموعه مستقل از  $G$  می‌نامیم. می‌گوئیم مجموعه مستقل  $S$ ، ماکزیمم است اگر هیچ مجموعه مستقل  $S'$  با شرط  $|S'| > |S|$  وجود نداشته باشد. مثال‌هایی از مجموعه‌های مستقل در شکل ۱-۷ نشان داده شده‌اند.

اگر به خاطر داشته باشید، زیرمجموعه  $K$  از  $V$  را که حداقل یک سر هر یال  $G$  در آن باشد، یک پوشش از  $G$  نامیدیم. هر یک از مجموعه‌های مستقلی که در شکل ۱-۷ نشان داده شده‌اند، مکمل یک پوشش می‌باشند. به راحتی می‌توان دید که این حالت، همیشه برقرار است.



(الف)



(ب)

شکل ۱-۷. (الف) یک مجموعه مستقل (ب) یک مجموعه ماکزیمم

**قضیه ۱-۷** مجموعه  $S \subseteq V$  یک مجموعه مستقل از  $G$  است، اگر و تنها اگر  $V \setminus S$  یک پوشش از  $G$  باشد.

**اثبات** طبق تعریف،  $S$  یک مجموعه مستقل از  $G$  است اگر و تنها اگر دو سر هیچ یالی از  $G$ ، توأمأ در  $S$

نباشند یا به عبارت دیگر، اگر و تنها اگر حداقل یک سر هر یال  $G$  در  $V \setminus S$  باشد و این در حالتی است که  $V \setminus S$  یک پوشش از  $G$  باشد. □

تعداد رأس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم از  $G$ ، عدد استقلال  $G$  نامیده شده با  $\alpha(G)$  نمایش داده می‌شود. به طور مشابه، تعداد رأس‌ها در یک پوشش مینیمم از  $G$  پوشانه  $G$  نامیده شده، با  $\beta(G)$  نمایش داده می‌شود.

### نتیجه ۱-۷ $\alpha + \beta = \nu$

**اثبات** فرض کنید که  $S$ ، یک مجموعه مستقل ماکزیمم و  $K$  یک پوشش مینیمم از  $G$  باشد. در این صورت، طبق قضیه ۱-۷،  $|VK|$  یک مجموعه مستقل و  $V \setminus S$  یک پوشش از  $G$  است. در نتیجه داریم:

$$\nu - \beta = |VK| \leq \alpha \quad (۱-۷)$$

و

$$\nu - \alpha = |V \setminus S| \geq \beta \quad (۲-۷)$$

با ترکیب روابط (۱-۷) و (۲-۷) به رابطه  $\alpha + \beta = \nu$  می‌رسیم. □

مشابه یالی یک مجموعه مستقل، مجموعه‌ای از یال‌های پیوندی است، که هیچ دو تای آن‌ها مجاور نباشند که همان تطابق است. مشابه یالی یک پوشش، پوشش یالی نامیده می‌شود. یک پوشش یالی از  $G$ ، زیرمجموعه‌ای مانند  $L$  از  $E$  است به طوری که هر رأس  $G$ ، بر یک یال از  $L$  واقع شده باشد. توجه داشته باشید که پوشش یالی، همیشه وجود ندارد. گراف  $G$  دارای یک پوشش یالی است اگر و تنها اگر  $\delta > 0$  باشد. تعداد یال‌ها در یک تطابق ماکزیمم از  $G$  را با  $\alpha'(G)$  و تعداد یال‌ها در یک پوشش یالی مینیمم را با  $\beta'(G)$  نمایش می‌دهیم.  $\alpha'(G)$ ، عدد استقلال یالی و  $\beta'(G)$ ، پوشانه یالی  $G$  نامیده می‌شود.

ارتباط تطابق‌ها و پوشش‌های یالی به سادگی ارتباط مجموعه‌های مستقل و پوشش‌ها نیست، زیرا مکمل یک تطابق، الزاماً یک پوشش یالی نخواهد بود و برعکس، مکمل یک پوشش یالی، الزاماً یک تطابق نیست. با این حال، پارامترهای  $\alpha'$  و  $\beta'$  دقیقاً به همان نحوی که  $\alpha$  و  $\beta$  مرتبند، به یکدیگر وابسته می‌باشند.

**قضیه ۲-۷** (گالای، ۱۹۵۹) اگر  $\delta > 0$  آنگاه:  $\beta' + \alpha' = \nu$ .

**اثبات** فرض کنید که  $M$  یک تطابق ماکزیمم از  $G$  و  $U$  مجموعه رأس‌های  $M$ -ناآلوده باشد. چون  $\delta > 0$  و  $M$  ماکزیمم است، مجموعه‌ای مانند  $E'$  با  $|U|$  یال وجود دارد که هر یال آن بر روی یک رأس از  $U$  واقع است. به وضوح،  $M \cup E'$  یک پوشش یالی از  $G$  می‌باشد و در نتیجه داریم:

$$\beta' \leq |MUE'| = \alpha' + (v - 2\alpha') = v - \alpha'$$

$$\beta' + \alpha' \leq v \quad (۳-۷) \quad \text{یا}$$

حال فرض کنید که  $L$  یک پوشش یالی مینیمم از  $G$  باشد. با فرض  $H = G[L]$ ،  $M$  را یک تطابق ماکزیمم از  $H$  در نظر می‌گیریم. مجموعه رأس‌های  $M$  ناآلوده در  $H$  را با  $U$  نمایش می‌دهیم. از آنجایی که  $M$  ماکزیمم است،  $H[U]$  دارای هیچ یال پیوندی نیست و در نتیجه:

$$|L| - |M| = |L \setminus M| \geq |U| = v - 2|M|$$

چون  $H$  زیرگرافی از  $G$  است،  $M$  یک تطابق از  $G$  می‌باشد و بنابراین:

$$\beta' + \alpha' \geq |L| + |M| \geq v \quad (۴-۷)$$

با ترکیب روابط (۳-۷) و (۴-۷) به رابطه  $\beta' + \alpha' = v$  می‌رسیم. □

اینک قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که شباهت صوری فوق‌العاده‌ای با قضیه کونینگ (۳-۵) دارد.

**قضیه ۳-۷** در گراف دوبخشی  $G$  با  $\delta > 0$ ، تعداد رأس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم با تعداد یال‌ها در یک پوشش یالی مینیمم برابر است.

**اثبات** فرض کنید که  $G$  یک گراف دوبخشی با  $\delta > 0$  باشد. طبق قضایای ۱-۷ و ۲-۷ داریم:

$$\beta' + \alpha' = \beta + \alpha$$

و چون  $G$  دوبخشی است، از قضیه ۳-۵ نتیجه می‌شود که  $\beta = \alpha'$  و در نتیجه  $\beta' = \alpha$ . □

گرچه مفهوم مجموعه مستقل و تطابق مشابه است، ولی هیچ نظریه‌ای در مورد مجموعه‌های مستقل که قابل مقایسه با نظریه تطابق‌های ارائه شده در فصل ۵ باشد، وجود ندارد. به‌طور مثال هیچ الگوریتم خوبی برای یافتن یک مجموعه مستقل ماکزیمم در یک گراف، شناخته نشده است. به‌هرحال، دو قضیه جالب وجود دارند که تعداد رأس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم از یک گراف را با دو پارامتر دیگر از گراف مرتبط می‌سازند. این قضایا در بخش‌های ۲-۷ و ۳-۷ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

## تمرین‌ها

۱-۱-۷ الف) نشان دهید که  $G$  دوبخشی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرگراف  $H$  از  $G$ ، داشته باشیم:

$$\alpha(H) \geq \frac{1}{4}v(H)$$

ب) نشان دهید که  $G$  دوبخشی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرگراف  $H$  از  $G$  با شرط



$$\alpha(H) = \beta'(H) \text{، داشته باشیم: } \delta(H) > 0.$$

۲-۱-۱. گراف  $G$ ،  $\alpha$ -بحرانی نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر  $e \in E$  داشته باشیم:  $\alpha(G-e) > \alpha(G)$  نشان دهید که گراف  $\alpha$ -بحرانی همبند، رأس برشی ندارد.

۳-۱-۱. گراف  $G$ ،  $\beta$ -بحرانی نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر  $e \in E$  داشته باشیم:  $\beta(G-e) < \beta(G)$  نشان دهید:

الف) گراف  $\beta$ -بحرانی همبند، رأس برشی ندارد.

ب) \* اگر  $G$  همبند باشد، آنگاه  $\beta \leq \frac{1}{4}(\varepsilon + 1)$ .

## ۲-۷. قضیهٔ رمزی

در این بخش فقط با گراف‌های ساده، سر و کار خواهیم داشت. یک خوشه از گراف ساده  $G$ ، زیرمجموعه‌ای مانند  $S$  از  $V$  است به طوری که  $G[S]$  کامل باشد. به‌وضوح،  $S$  یک خوشه از  $G$  است اگر و تنها اگر  $S$  یک مجموعهٔ مستقل از  $G^c$  باشد و بنابراین این دو مفهوم، متمم یکدیگر می‌باشند.

اگر  $G$ ، خوشه‌های بزرگ نداشته باشد می‌توان انتظار داشت که  $G$ ، دارای یک مجموعهٔ مستقل بزرگ باشد. درستی مطلب فوق نخستین بار توسط رمزی<sup>۱</sup> (۱۹۳۰) اثبات شد. او نشان داد که به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت  $k$  و  $l$ ، یک عدد صحیح  $r(k, l)$  وجود دارد به طوری که هر گراف  $r(k, l)$  رأسی، شامل یک خوشهٔ  $k$  رأسی یا یک مجموعهٔ مستقل  $l$  رأسی است. به‌طور مثال، به‌راحتی می‌توان دید که:

$$r(1, l) = r(k, 1) = 1 \quad (۵-۷)$$

و

$$r(2, l) = l \text{ و } r(k, 2) = k \quad (۶-۷)$$

اعداد  $r(l, k)$  به اعداد رمزی مشهورند. قضیهٔ زیر در مورد اعداد رمزی، متعلق به اردیش<sup>۲</sup> و جکرز<sup>۳</sup> (۱۹۳۵) و گرینوود<sup>۴</sup> و گلیسن<sup>۵</sup> (۱۹۵۵) می‌باشد.

**قضیهٔ ۷-۸.** به‌ازای هر دو عدد صحیح  $k \geq 2$  و  $l \geq 2$  داریم:

$$r(k, l) \leq r(k, l-1) + r(k-1, l) \quad (۷-۷)$$

به‌علاوه، اگر  $r(k, l-1)$  و  $r(k-1, l)$  هر دو زوج باشند، در رابطه (۷-۷)، نامساوی اکید برقرار است.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف با  $r(k, l-1) + r(k-1, l)$  رأس و  $v \in V$  باشد. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

(۱)  $v$  با یک مجموعه  $S$ ، با حداقل  $r(k, l-1)$  رأس غیرمجاور است.

(۲)  $v$  با یک مجموعه  $T$ ، با حداقل  $r(k-1, l)$  رأس مجاور است.

توجه داشته باشید که یا حالت (۱) یا حالت (۲) باید برقرار باشد، زیرا تعداد رأس‌هایی که مجاور  $v$  است به‌علاوه تعداد رأس‌هایی که مجاور  $v$  نیستند برابر با  $r(k, l-1) + r(k-1, l) - 1$  است.

در حالت (۱)،  $G(S)$  شامل یک خوشه  $k$  رأسی یا یک مجموعه مستقل  $l-1$  رأسی می‌باشد. در نتیجه  $|G[SU\{v\}]|$  نیز شامل یک خوشه  $k$  رأسی یا یک مجموعه مستقل  $l$  رأسی خواهد بود. در حالت (۲)،  $|G[TU\{v\}]|$  شامل یک خوشه  $k$  رأسی یا یک مجموعه مستقل  $l$  رأسی است. پس در هر دو حالت (۱) و (۲)، وجود یک خوشه  $k$  رأسی یا یک مجموعه مستقل  $l$  رأسی در  $G$  الزامی است و بدین ترتیب رابطه (۷-۷) به اثبات می‌رسد.

اینک فرض کنید که  $r(k-1, l)$  و  $r(k, l-1)$  هر دو زوج باشند و  $G$  را یک گراف با  $r(k, l-1) + r(k-1, l) - 1$  رأس در نظر بگیرید. چون تعداد رأس‌های  $G$  فرد است، بنابر نتیجه ۱-۱، رأسی مانند  $v$  با درجه زوج وجود دارد. علاوه‌براین،  $v$  نمی‌تواند با دقیقاً  $r(k-1, l) - 1$  رأس مجاور باشد. در نتیجه یا حالت (۱) یا حالت (۲) برقرار خواهد بود. بنابراین  $G$  شامل یک خوشه  $k$  رأسی یا یک مجموعه مستقل  $l$  رأسی می‌باشد. در این صورت داریم:

$$r(k, l) \leq r(k, l-1) + r(k-1, l) - 1$$

□ همان نتیجه مورد نظر است.

تعیین اعداد رمزی در حالت کلی، یکی از دشوارترین مسایل حل نشده می‌باشد. با ساختن گراف‌های مناسب می‌توان مرزهای پایینی خوبی برای این اعداد به دست آورد. به‌طور مثال گراف‌های شکل ۷-۲ را در نظر بگیرید.

۵-۲ شکل دارای هیچ خوشه ۳ رأسی و همچنین هیچ مجموعه مستقل ۳ رأسی نیست. در

نتیجه داریم:

$$r(3, 3) \geq 6 \quad (۸-۷)$$

گراف شکل ۷-۲ شامل هیچ خوشه ۳ رأسی و هیچ مجموعه مستقل ۴ رأسی نیست. بنابراین داریم:

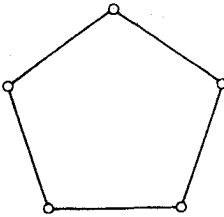
$$r(3, 4) \geq 9 \quad (9-7)$$

به‌طور مشابه، گراف شکل ۷-۲ ج نشان می‌دهد که:

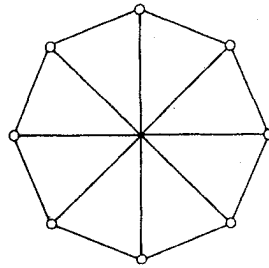
$$r(3, 5) \geq 14 \quad (10-7)$$

و گراف شکل ۷-۲ د مؤید این است که:

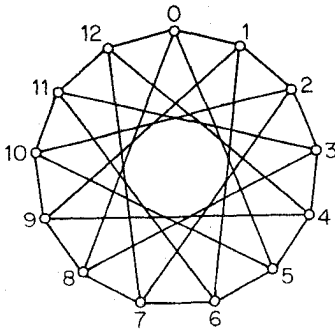
$$r(4, 4) \geq 18 \quad (11-7)$$



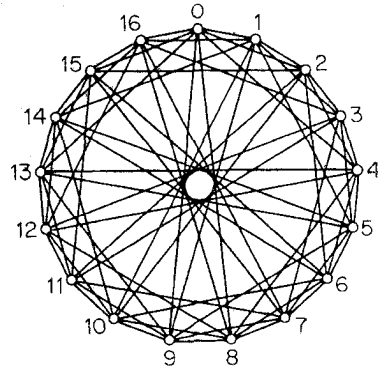
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۷-۲. (الف) یک گراف (۳,۳)-رمزی (ب) یک گراف (۳,۴)-رمزی

(ج) یک گراف (۳,۵)-رمزی (د) یک گراف (۴,۴)-رمزی

با استفاده از قضیهٔ ۷-۴ و تساوی‌های (۷-۶) و (۷-۷) می‌توانیم نشان بدهیم که در رابطه‌های (۷-۸)،

(۹-۷)، (۱۰-۷)، (۱۱-۷) تساوی برقرار است. ابتدا از روابط (۷-۷) و (۶-۷) نتیجه می‌گیریم که:

$$r(3, 3) \leq r(3, 2) + r(2, 3) = 6$$

سپس با استفاده از رابطه  $(۸-۷)$ ، تساوی  $r(۳,۳)=۶$  به دست می‌آید. با توجه به اینکه  $r(۳,۳)$  و  $r(۲,۴)$  هر دو زوج هستند، قضیه  $۴-۷$  و رابطه  $(۶-۷)$  نشان می‌دهد که:

$$r(۳,۴) \leq r(۳,۳) + r(۲,۴) - ۱ = ۹$$

مطلب فوق به همراه رابطه  $(۹-۷)$ ، تساوی  $r(۳,۴)=۹$  را نتیجه می‌دهد. با به کارگیری مجدد روابط  $(۷-۷)$  و  $(۶-۷)$  خواهیم داشت:

$$r(۴,۴) \leq r(۴,۳) + r(۳,۴) = ۱۴$$

$$r(۳,۵) \leq r(۲,۵) + r(۳,۴) = ۱۸$$

که این روابط به همراه نامساوی‌های  $(۱۰-۷)$  و  $(۱۱-۷)$ ، به تساوی‌های  $r(۳,۵)=۱۴$  و  $r(۴,۴)=۱۸$  منجر می‌شود.

جدول زیر کلیه اعداد رمزی  $r(k,l)$  را که تا امروز شناخته شده‌اند، نمایش می‌دهد.<sup>۱</sup>

$l:$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$k: ۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۳	۱	۳	۶	۹	۱۴	۱۸	۲۳
۴	۱	۴	۹	۱۸			

گراف  $(k,l)$ -رمزی، یک گراف با  $r(k,l) - ۱$  رأس است که نه دارای خوشه  $k$  رأسی و نه شامل مجموعه مستقل  $l$  رأسی باشد. با توجه به تعریف  $r(k,l)$ ، چنین گراف‌هایی به‌ازای همه  $۲ \leq k$  و  $۲ \leq l$  وجود دارند. به نظر می‌رسد که گراف‌های رمزی، اغلب دارای ساختارهای جالب توجهی هستند. تمام گراف‌های شکل  $۲-۷$ ، رمزی هستند و دو تای آخر آن‌ها را می‌توان به طریق زیر، از میدان‌های متناهی به دست آورد. در مورد گراف  $(۵,۳)$ -رمزی، سیزده رأس را به‌عنوان عناصر میدان اعداد صحیح به پیمانه ۱۳ در نظر می‌گیریم و دو رأس را در صورتی به یکدیگر وصل می‌کنیم که تفاضل آن‌ها، مانده یک عدد مکعب به پیمانه  $(۱, ۵, ۸, ۱۲)$  باشد. برای به دست آوردن گراف  $(۴,۴)$ -رمزی، رأس‌ها را به‌عنوان عناصر میدان اعداد صحیح به پیمانه ۱۷ در نظر می‌گیریم و دو رأس را در صورتی وصل می‌کنیم که تفاضل آنها، مانده یک عدد مربع به پیمانه

۱- مک کی و رادزیس زوفسکی در سال ۱۹۹۵ نشان دادند که  $r(۴,۵)=۲۵$ . برای آگاهی از جزئیات بیشتر به مقاله زیر مراجعه نمایید: (مترجم)

۱۷) (۱، ۲، ۴، ۸، ۹، ۱۳، ۱۵ یا ۱۶) باشد. این حدس وجود دارد که گراف‌های  $(k, k)$ -رمزی، همواره خود-مکمل هستند. (یعنی با مکمل‌های خود یکرختند). این حدس به‌ازای  $k=۲, ۳, ۴$  درست است. در حالت کلی، قضیه ۴-۷ کران بالایی زیر را برای  $r(k, l)$  نتیجه می‌دهد:

$$\text{قضیه ۵-۷} \quad r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

**اثبات** از استقرا روی  $k+l$  استفاده می‌کنیم. با به‌کارگیری روابط (۵-۷) و (۶-۷) می‌بینیم که قضیه به‌ازای  $k+l \leq 5$  برقرار است. فرض کنید که  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح مثبت باشند و همچنین قضیه به‌ازای تمام اعداد صحیح مثبت  $k$  و  $l$  با شرط  $5 \leq k+l \leq m+n$  برقرار باشد. در این صورت، طبق قضیه ۴-۷ و فرض استقرا داریم:

$$r(m, n) \leq r(m, n-1) + r(m-1, n) \leq \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

بنابراین قضیه به‌ازای تمامی مقادیر  $k$  و  $l$  برقرار است. □

یک کران پایینی برای  $r(k, l)$  در قضیه بعد ارائه شده است. این کران با استفاده از یک تکنیک قوی که به‌عنوان روش احتمالی شناخته می‌شود قابل دستیابی است. [Erdős and Spencer; 1974] روش احتمالی، اساساً یک استدلال شمارشی نادقیق است. گرچه این روش ساختار گراف را مشخص نمی‌کند، ولی می‌توان از آن برای اثبات وجود یک گراف با ویژگی‌های مشخص استفاده نمود.

$$\text{قضیه ۶-۷} \quad r(k, k) \geq 2^{k/2} \quad (\text{اردیش، ۱۹۴۷})$$

**اثبات** از آن جایی که  $r(1, 1) = 1$  و  $r(2, 2) = 2$ ، می‌توانیم فرض کنیم که شرط  $k \geq 3$  برقرار است. مجموعه تمام گراف‌های ساده با مجموعه رأس‌های  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  را با  $\mathcal{G}_n$  نمایش می‌دهیم و مجموعه گراف‌هایی از  $\mathcal{G}_n$  را که دارای یک خوشه  $k$  رأسی هستند با  $\mathcal{G}_n^k$  نشان می‌دهیم. به‌وضوح داریم:

$$|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}} \quad (۱۲-۷)$$

چون هر زیرمجموعه از  $(n, 2)$  یال ممکن  $v_i v_j$ ، یک گراف را در  $\mathcal{G}_n$  مشخص می‌سازد. به‌طور مشابه، تعداد گراف‌هایی از  $\mathcal{G}_n$  که در آن‌ها، مجموعه ای از  $k$  رأس خاص تشکیل خوشه می‌دهد برابر است با  $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$ . از آن جایی که  $\binom{n}{k}$  زیرمجموعه  $k$  عنصری متمایز از  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  وجود دارد، در نتیجه داریم:

$$|\mathcal{G}_n^k| \leq \binom{n}{k} \times 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} \quad (۱۳-۷)$$

از روابط (۱۲-۷) و (۱۳-۷) نتیجه می‌شود:

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \binom{n}{k} \times 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k \times 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} \quad (۱۴-۷)$$

اکنون فرض کنید که رابطه  $n < 2^{k/2}$  برقرار باشد. از رابطه (۷-۱۴) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{2^{k/2} \times 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$$

بنابراین، کمتر از نصف گراف‌ها در  $\mathcal{G}_n$  دارای خوشه  $k$  رأسی هستند. چون  $\mathcal{G}_n = \{G \mid G \in \mathcal{G}_n\}$ ، کمتر از نصف گراف‌های  $\mathcal{G}_n$  نیز دارای مجموعه مستقل  $k$  رأسی هستند. در نتیجه تعدادی گراف در  $\mathcal{G}_n$  نه دارای خوشه  $k$  رأسی هستند و نه دارای مجموعه مستقل  $k$  رأسی می‌باشند. چون این مطلب به‌ازای هر  $n < 2^{k/2}$  صادق است، در نتیجه داریم:  $r(k, k) \geq 2^{k/2}$ .  $\square$

با توجه به قضیه ۷-۶ می‌توانیم بلافاصله یک کران پایینی برای  $r(k, l)$  به‌دست آوریم.

**نتیجه ۷-۶** اگر  $m = \min\{k, l\}$  آنگاه داریم:  $r(k, l) \geq 2^{m/2}$ .

تمام کران‌های پایینی که به‌وسیله روش‌های ساختاری برای  $r(k, l)$  به‌دست می‌آیند، به مراتب ضعیف‌تر از نتیجه ۷-۶ می‌باشند. بهترین آن‌ها متعلق به ابوت<sup>۱</sup> (۱۹۷۲) است که نشان می‌دهد  $r(2n+1, 2n+1) \geq 5^n + 1$  (تمرین ۷-۲-۴).

گاهی اوقات، اعداد رمزی  $r(k, l)$ ، اندکی متفاوت با آنچه در ابتدای بخش دیدیم، تعریف می‌شوند. به‌طور مثال  $r(k, l)$  را می‌توان به‌عنوان کوچکترین عدد صحیح  $n$  ای در نظر گرفت که هر  $2$ -رنگ‌آمیزی یالی  $(E_1, E_2)$  از  $K_n$ ، یا دارای یک زیرگراف کامل  $k$  رأسی باشد که تمام یال‌های آن به رنگ ۱ هستند، یا شامل یک زیرگراف کامل  $l$  رأسی باشد که تمام یال‌های آن به رنگ ۲ هستند. اعداد رمزی، در صورتی که بدین شکل بیان شوند، دارای یک تعمیم طبیعی خواهند بود.  $r(k_1, k_2, \dots, k_m)$  را به‌عنوان کوچکترین عدد صحیح  $n$  ای تعریف می‌کنیم که هر  $m$ -رنگ‌آمیزی یالی  $(E_1, E_2, \dots, E_m)$  از  $K_n$ ، به‌ازای یک مقدار  $n$  دارای زیرگراف کامل  $k_i$  رأسی با یال‌های به رنگ  $i$  باشد.

قضیه و نتیجه زیر، تعمیم‌یافته رابطه (۷-۷) و قضیه ۷-۵ می‌باشند و به طریقه مشابه می‌توان آن‌ها را اثبات نمود. این کار به‌عنوان تمرین ۷-۲-۲ به خواننده واگذار می‌شود.

**قضیه ۷-۷**

$$r(k_1, k_2, \dots, k_m) \leq r(k_1 - 1, k_2, k_3, \dots, k_m) + r(k_1, k_2 - 1, \dots, k_m) + \dots + r(k_1, k_2, \dots, k_m - 1) - m + 2$$

**نتیجه ۷-۷**

$$r(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_m + 1) \leq \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

## تمرین‌ها

۱-۲-۷ نشان دهید که به ازای هر  $k$  و  $l$   $r(l, k) = r(k, l)$ .

۲-۲-۷ قضیهٔ ۷-۷ و نتیجهٔ ۷-۷ را ثابت کنید.

۳-۲-۷ فرض کنید که  $r_n$  نمایانگر عدد رمزی  $r(k_1, k_2, \dots, k_n)$  باشد که در آن به ازای تمام مقادیر  $i$  داریم:  
 $k_i = 3$ .

الف) ثابت کنید  $r_n \leq n(r_{n-1} - 1) + 2$ .

ب) با توجه به اینکه  $r_4 = 6$  و با استفاده از الف) نشان دهید که  $r_n \leq \lfloor n/e \rfloor + 1$ .

ج) نتیجه بگیرید که  $r_3 \leq 17$ .

(گرینوود و گلیسن در سال ۱۹۵۵ نشان دادند که تساوی  $r_3 = 17$  برقرار است).

۴-۲-۷ ترکیب گراف‌های ساده  $G$  و  $H$ ، گراف سادهٔ  $G[H]$  با مجموعهٔ رأس‌های  $V(G) \times V(H)$  است که در آن  $(u, v)$  مجاور  $(u', v')$  است اگر و تنها اگر یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$(1) \quad uu' \in E(G) \quad \text{یا}$$

$$(2) \quad vv' \in E(H) \quad \text{و} \quad u = u'$$

الف) نشان دهید که  $\alpha(G[H]) \leq \alpha(G)\alpha(H)$ .

ب) با استفاده از الف) نشان دهید که:

$$r(kl+1, kl+1) \geq (r(k+1, k+1) - 1) \times (r(l+1, l+1) - 1)$$

ج) نتیجه بگیرید که به ازای هر  $n \geq 0$  داریم:  $r(2^n + 1, 2^n + 1) \geq 5^n + 1$  (H. L. Abbott).

۵-۲-۷ نشان دهید که اتصال یک ۳-دور و یک ۵-دور زیرگرافی به شکل  $K_6$  ندارد، ولی هر ۲-رنگ آمیزی یالی آن به یک مثلث تک‌رنگ می‌رسد.  
 (R. L. Graham)

(فالکمن<sup>۱</sup> در سال ۱۹۷۰ گرافی ساخت که شامل  $K_4$  نبود و هر ۲-رنگ آمیزی یالی آن، به یک مثلث تک رنگ می‌رسید. این گراف تعداد بسیار زیادی رأس داشت).

۶-۲-۷ فرض کنید که  $G_1, G_2, \dots, G_m$  گراف‌های ساده‌ای باشند. عدد رمزی تعمیم یافته

$r(G_1, G_2, \dots, G_m)$ ، کوچکترین عدد صحیح  $n$  است به طوری که هر  $m$ -رنگ آمیزی یالی

$(E_1, E_2, \dots, E_m)$  از  $K_n$ ، به ازای لااقل یک مقدار  $i$ ، شامل زیرگرافی یکریخت با  $G_i$  با رنگ  $i_1$

باشد. نشان دهید که:

الف) اگر  $G$  یک مسیر به طول ۳ و  $H$  یک ۴-دور باشد آنگاه  $r(G, G) = 5$ ،  $r(G, H) = 5$  و  
 $r(H, H) = 6$ .

ب) \* اگر  $T$  یک درخت دلخواه با  $m$  رأس باشد و اگر  $n-1$  بر  $m-1$  بخشپذیر باشد، آنگاه  
 $r(T, K_{1,n}) = m+n-1$ .

ج) \* اگر  $T$  یک درخت دلخواه با  $m$  رأس باشد، آنگاه  $r(T, K_n) = (m-1)(n-1) + 1$ .

(V. Chvátal)

### ۷-۳ قضیه توران<sup>۱</sup>

در این بخش، قضیه معروفی را اثبات خواهیم کرد که متعلق به توران (۱۹۴۱) است. این قضیه معین می‌کند که یک گراف ساده  $v$  رأسی که دارای هیچ خوشه‌ای به اندازه  $m+1$  نیست، حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد. قضیه توران پایه و اساس مهمی از نظریه گرافهاست که به عنوان نظریه گراف‌های اکستریمال شناخته می‌شود [Erdős; 1967]. نتیجه زیر از اردیش مقدمه اثبات قضیه اصلی است.

**قضیه ۷-۸** اگر  $G$  گراف ساده‌ای باشد که شامل هیچ  $K_{m+1}$  ای نیست، در این صورت  $G$  توسط یک گراف  $m$ -بخشی کامل  $H$ ، فراگرفته درجه‌ای خواهد بود. علاوه بر این اگر دنباله درجه‌های  $G$  و  $H$  یکسان باشند آنگاه داریم:  $G \cong H$ .

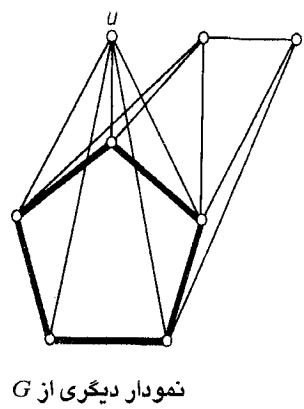
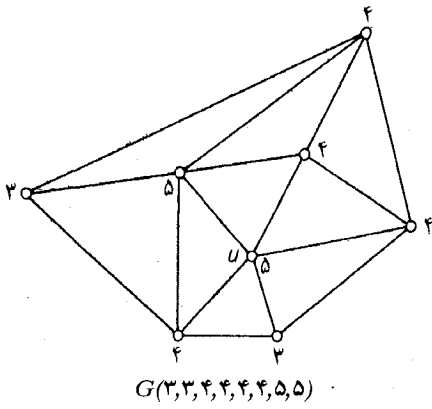
**اثبات** از استقرا روی  $m$  استفاده می‌کنیم. قضیه به‌ازای  $m=1$  بدیهی است. فرض کنید که قضیه به‌ازای هر  $m < n$  صادق باشد و  $G$  گراف ساده‌ای باشد که دارای هیچ  $K_{m+1}$  ای نیست. رأسی مانند  $u$  با درجه  $\Delta$  در  $G$  انتخاب کنید و قرار دهید:  $G_1 = G[N(u)]$ . چون  $G$  شامل هیچ  $K_{m+1}$  ای نیست بنابراین  $G_1$  شامل هیچ  $K_n$  ای نخواهد بود و در نتیجه طبق فرض استقرا توسط یک گراف  $(n-1)$ -بخشی کامل  $H_1$  فراگرفته درجه‌ای است.

سپس قرار دهید:  $V_1 = N(u)$  و  $V_2 = V \setminus V_1$  و گرافی که مجموعه رأس‌های آن برابر  $V_2$  و مجموعه یال‌های آن تهی است را  $G_2$  بنامید. اتصال  $G_1$  و  $G_2$  یعنی  $G_1 \vee G_2$  را به‌دست آورید. از آن جایی که داریم:

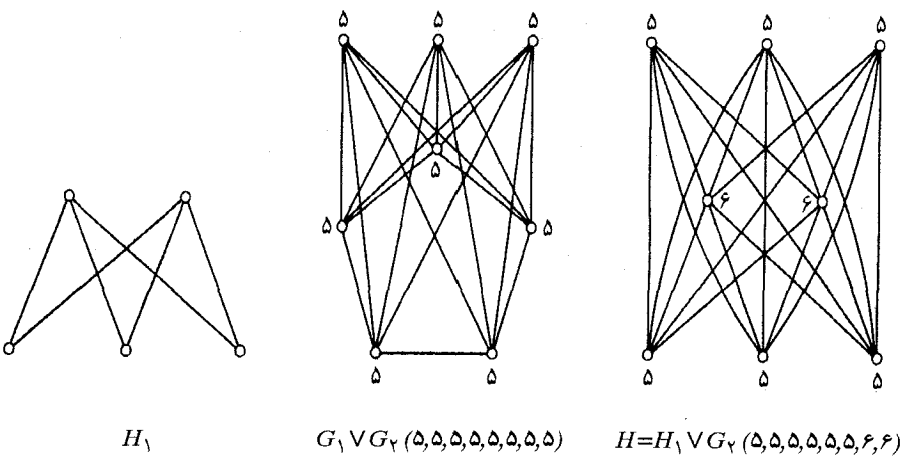
$$v \in V_1 \text{ تمام رؤس } N_G(v) \subseteq N_{G_1 \vee G_2}(v) \quad (15.7)$$



و چون درجه هر رأس  $V_2$  در  $G_1 \vee G_2$  برابر با  $\Delta$  است، در نتیجه  $G$  توسط  $G_1 \vee G_2$  فراگرفته درجه‌ای است و بدین ترتیب  $G$  توسط گراف  $n$ -بخشی کامل  $H = H_1 \vee G_2$  نیز فراگرفته درجه‌ای خواهد بود. برای روشن شدن مطلب، شکل ۳-۷ را ملاحظه نمایید.



به همراه  $G[N(u)]$  القاء شده



شکل ۳-۷

اکنون فرض کنید که دنباله درجه‌های  $H$  و  $G$  یکسان باشند. در این صورت دنباله درجه‌های  $G$  و  $G_1 \vee G_2$  نیز یکسان خواهند بود و این بدان معنی است که در رابطه (۱۵-۷) تساوی برقرار است. بنابراین در  $G$ ، هر رأس از  $V_1$  باید به رأسی از  $V_2$  متصل باشد و به عبارتی دیگر،  $G = G_1 \vee G_2$  است. چون دنباله درجه‌های

فرض استقرایاً  $H = H_1 \vee G_2$  و  $G = G_1 \vee G_2$  یکسانند، باید دنباله درجه‌های  $G_1$  و  $H_1$  نیز یکسان باشند و در نتیجه، طبق

فرض استقرایاً یکریخت باشند. از اینجا نتیجه می‌شود که  $G \cong H$ .

جالب است بدانید که بین قضیه فوق و قضیه ۴-۶ شباهت زیادی وجود دارد.

فرض کنید که  $T_{m,n}$  نمایانگر یک گراف  $m$ -بخشی کامل با  $n$  رأس باشد که در آن، اندازه بخش‌ها تا حد ممکن به هم نزدیکند. گراف  $H$  در شکل ۷-۳،  $T_{3,8}$  است.

**قضیه ۹-۷** اگر  $G$  یک گراف ساده باشد که شامل هیچ  $K_{m+1}$  ای نیست در این صورت  $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(T_{m,n})$  و به علاوه داریم  $\varepsilon(G) = \varepsilon(T_{m,n})$ ، اگر و تنها اگر  $G \cong T_{m,n}$ .

**اثبات** فرض کنید  $G$  گراف ساده‌ای باشد که شامل هیچ  $K_{m+1}$  ای نیست. طبق قضیه ۸-۷،  $G$  توسط یک گراف  $m$ -بخشی کامل مانند  $H$ ، فراگرفته درجه‌ای است. از قضیه ۱-۱ نتیجه می‌شود که:

$$\varepsilon(G) \leq \varepsilon(H) \quad (۱۶-۷)$$

از طرفی (طبق تمرین ۱-۹-۲) داریم:

$$\varepsilon(H) \leq \varepsilon(T_{m,n}) \quad (۱۷-۷)$$

با ترکیب روابط (۱۶-۷) و (۱۷-۷) به دست می‌آید:

$$\varepsilon(G) \leq \varepsilon(T_{m,n}) \quad (۱۸-۷)$$

که قسمت اول قضیه را اثبات می‌کند.

اکنون فرض کنید که در رابطه (۱۸-۷) تساوی برقرار باشد. بنابراین باید در هر دو رابطه (۱۶-۷) و (۱۷-۷) نیز تساوی برقرار باشد. چون  $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$  و  $G$  توسط  $H$ ، فراگرفته درجه‌ای است، باید دنباله درجه‌های  $H$  و  $G$  یکسان باشند. در نتیجه طبق قضیه ۸-۷ داریم:  $G \cong H$ . همچنین رابطه  $\varepsilon(H) \leq \varepsilon(T_{m,n})$  نتیجه می‌دهد که:  $H \cong T_{m,n}$  (تمرین ۱-۹-۲). از اینجا نتیجه می‌گیریم که  $G \cong T_{m,n}$ .

## تمرین‌ها

- ۱-۳-۷ در یک گروه  $n$  نفری، یک نفر دو نفر دیگر را می‌شناسد، دو نفر، هریک چهار نفر دیگر را می‌شناسند، چهار نفر، هریک پنج نفر دیگر را می‌شناسند و دو نفر باقیمانده، هرکدام شش نفر دیگر را می‌شناسند. نشان دهید که در این جمع، سه نفر وجود دارند که یکدیگر را می‌شناسند.
- ۲-۳-۷ در یک باشگاه اسب سواری، اسب سواران در گروه‌های چهار نفری با یکدیگر به رقابت می‌پردازند. قانونی در این باشگاه وجود دارد مبنی بر اینکه چهار نفر فقط در صورتی می‌توانند هم گروه شوند که

هیچ دوتایی از آن‌ها، قبلاً هم گروه نبوده باشند. یک روز چهارده نفر در باشگاه حاضر بودند که هر کدام از آن‌ها قبلاً با پنج نفر دیگر هم گروه شده بود. سه مسابقه صورت گرفت و پس از آن به خاطر قانون باشگاه، رقابت‌ها به حالت تعلیق درآمد. درست در لحظه‌ای که اسب سواران مشغول ترک باشگاه بودند، یک اسب سوار جدید، که قبلاً با هیچ کسی در یک گروه مسابقه نداده بود، وارد باشگاه شد. نشان دهید که با این وضعیت، حداقل یک مسابقهٔ دیگر قابل انجام است.

۳-۳-۷ الف) نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\varepsilon > \frac{v^2}{4}$  باشد، در این صورت  $G$  شامل یک مثلث است.

ب) یک گراف ساده  $G$  با شرط  $\varepsilon = \lfloor \frac{v^2}{4} \rfloor$  پیدا کنید که هیچ مثلثی نداشته باشد.

ج) \* نشان دهید که اگر  $G$ ، یک گراف ساده غیر دوبخشی با شرط  $1 + \lfloor \frac{(v-1)^2}{\varepsilon} \rfloor > \varepsilon$  باشد، آنگاه  $G$  شامل یک مثلث است.

د) یک گراف ساده غیر دوبخشی  $G$  با شرط  $1 + \lfloor \frac{(v-1)^2}{\varepsilon} \rfloor = \varepsilon$  بیابید که شامل مثلث نباشد.

۴-۳-۷ الف) \* نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2} > (m-1) \binom{v}{2}$  باشد، آنگاه  $G$  شامل  $K_{\nu, m}$  ( $m \geq 2$ ) است.

ب) نتیجه بگیرید که اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\frac{(m-1)v}{2} + \frac{(m-1)^{1/2} v^{3/2}}{2} > \varepsilon$  باشد، در این صورت  $G$  شامل  $K_{\nu, m}$  ( $m \geq 2$ ) خواهد بود.

ج) نشان دهید که به ازای هر مجموعهٔ دلخواه از  $n$  نقطه در صفحه، تعداد جفت نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر دقیقاً یک است، برابر است با:  $\frac{n}{4} + \frac{n^{3/2}}{\sqrt{3}}$

۵-۳-۷ نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\frac{(m-1)v}{2} + \frac{(m-1)^{1/m} v^{2-1/m}}{2} > \varepsilon$  باشد، آنگاه  $G$  شامل  $K_{m, m}$  است.

## کاربردها

### ۴-۷ قضیهٔ شور

افراز  $\{1, 4, 10, 13\}$ ،  $\{2, 3, 11, 12\}$ ،  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$  از مجموعهٔ اعداد صحیح  $\{1, 2, \dots, 13\}$  را در نظر بگیرید. در هیچ زیرمجموعه‌ای از این افراز نمی‌توان اعداد  $z$ ،  $y$  و  $x$  را (که الزاماً متمایز نیستند) به نحوی

پیدا کرد که در رابطه زیر صدق کنند:

$$x+y=z \quad (19-7)$$

در عوض، به هر صورتی که مجموعه  $\{1, 2, \dots, 14\}$  را به سه زیرمجموعه افراز کنیم، همیشه زیرمجموعه‌ای وجود خواهد داشت که شامل جوابی برای معادله (۱۹-۷) باشد. شور در سال ۱۹۱۶ ثابت کرد که در حالت کلی، برای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، عدد صحیح  $f_n$  وجود دارد به طوری که در هر افراز  $\{1, 2, \dots, f_n\}$  به  $n$  زیرمجموعه، یک زیرمجموعه شامل جوابی برای معادله (۱۹-۷) موجود است. در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان قضیه شور را از وجود اعداد رمزی  $r_n$  (که در تمرین ۳-۲-۷ تعریف شده‌اند). نتیجه گرفت.

**قضیه ۱۰-۷** فرض کنید  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  یک افراز دلخواه از مجموعه  $\{1, 2, \dots, r_n\}$  باشد. در این صورت

به ازای یک مقدار  $i$ ، شامل سه عدد صحیح  $x, y, z$  است که در معادله  $x+y=z$  صدق می‌کنند.

**اثبات** یک گراف کامل را که مجموعه رأس‌های آن برابر  $\{1, 2, \dots, r_n\}$  است، در نظر بگیرید. یال‌های این گراف را با رنگ‌های  $1, 2, \dots, n$  رنگ آمیزی می‌کنیم با این شرط که یال  $uv$  دارای رنگ  $z$  خواهد بود اگر و تنها اگر  $|u-v| \in S_z$ . طبق قضیه رمزی (۷-۷)، یک مثلث تک‌رنگ در این گراف وجود دارد یعنی سه رأس  $a, b, c$  وجود دارند که دارای یک رنگ یکسان، مثلاً  $i$ ، هستند. بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم که  $a > b > c$  و متغیرهای  $x, y, z$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x = a - b, \quad y = b - c, \quad z = a - c$$

در این صورت  $x, y, z$  هر سه متعلق به  $S_i$  هستند و از طرفی معادله  $x+y=z$  نیز برقرار است.  $\square$

فرض کنید  $S_n$  کوچکترین عددی است که به ازای آن، در هر افراز دلخواه از  $\{1, 2, \dots, S_n\}$  به  $n$  زیرمجموعه، یک زیرمجموعه دارای جوابی برای معادله (۱۹-۷) باشد. به راحتی می‌توان دید که  $S_1 = 2$ ،  $S_2 = 5$  و  $S_3 = 14$  (تمرین ۱-۴-۷). همچنین از قضیه ۱۰-۷ و تمرین ۳-۲-۷، کران بالایی زیر به دست می‌آید:

$$S_n \leq r_n \leq [n!e] + 1$$

یک کران پایین برای  $S_n$  در تمرین ۲-۴-۷ ارائه شده است.

**تمرین‌ها**

۱-۴-۷ نشان دهید  $S_1 = 2$ ،  $S_2 = 5$  و  $S_3 = 14$ .

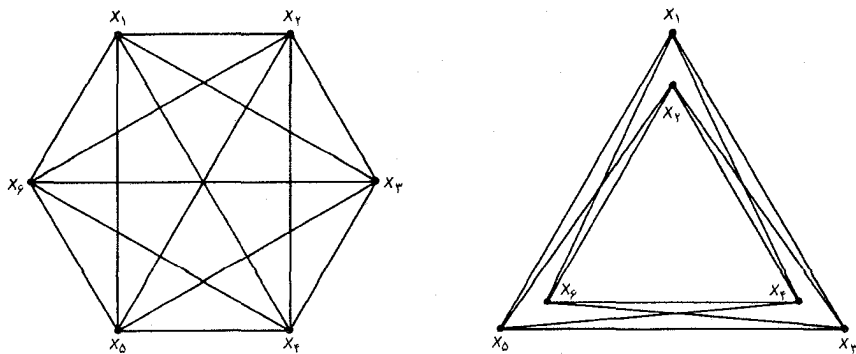
۲-۴-۷ الف) نشان دهید  $S_n \geq 3S_{n-1}$ .

ب) با استفاده از قسمت الف) و با توجه به رابطه  $S_3 = 14$ ، نشان دهید  $S_n \geq \frac{1}{4}(27)^n - 3 + 1$ .  
(یک کران پایین بهتر توسط ابوت و موزر<sup>۱</sup> در سال ۱۹۶۶ ارائه شده است).

## ۵-۷ یک مسأله هندسی

قطر یک مجموعه  $S$  از نقاط در صفحه، به عنوان بزرگترین فاصلهٔ بین دو نقطه از  $S$  تعریف می‌شود. باید توجه داشت که این تعریف، یک نماد هندسی محض است و هیچگونه ارتباطی با مفاهیم قطر و فاصله در نظریه گراف‌ها ندارد. ما بحث خود را بر روی مجموعه‌هایی که قطر آن‌ها ۱ است، متمرکز می‌کنیم. یک مجموعه با  $n$  نقطه،  $\binom{n}{2}$  فاصله را بین جفت نقاط خود مشخص می‌کند. واضح است که اگر  $n$  «بزرگ» باشد در این صورت چند تا از این فاصله‌ها باید «کوچک» باشند. بنابراین به ازای هر عدد  $d$  بین ۰ تا ۱، این سؤال مطرح است که در مجموعهٔ نقاط  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  با قطر ۱، فاصلهٔ بین چند زوج نقطه، می‌تواند از  $d$  بیشتر باشد. در ادامه به یک حالت خاص از این مسأله، یعنی وقتی که  $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$  است، پاسخ خواهیم داد.

برای روشن شدن مطلب، حالت  $n = 6$  را در نظر بگیرید. در این صورت شش نقطه با برچسب‌های  $x_1$  تا  $x_6$  داریم. اگر این نقاط را به ترتیب بر روی رأس‌های یک شش ضلعی قرار دهیم به طوری که زوج‌های  $(x_1, x_4)$ ،  $(x_2, x_5)$  و  $(x_3, x_6)$  همانند شکل ۷-۱۴ الف در فاصلهٔ ۱ از یکدیگر باشند، آنگاه این شش نقطه، مجموعه‌ای با قطر ۱ تشکیل می‌دهند.



شکل ۴-۷

فاصله بین زوج نقاط  $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_7), (x_7, x_8), (x_8, x_9), (x_9, x_{10}), (x_{10}, x_{11}), (x_{11}, x_{12})$  برابر  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  و فاصله بین زوج نقاط  $(x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_8), (x_7, x_9), (x_8, x_{10}), (x_9, x_{11}), (x_{10}, x_{12})$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  است. چون  $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  بنابراین در این مجموعه که قطر آن ۱ است، ۹ زوج نقطه با فاصله بیشتر از  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  وجود دارد. با این حال، ۹ بهترین عددی نیست که می‌توان با شش به دست آورد. اگر نقاط را به شکل ۷-۴ ب قرار دهیم، فاصله تمام زوج نقاط، به جز زوج‌های  $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)$  بیشتر از  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  خواهد بود. در این صورت ۱۲ زوج نقطه با فاصله بیشتر از  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  خواهیم داشت که در حقیقت، بهترین حالت ممکن است. قضیه زیر به این مسأله در حالت کلی پاسخ می‌دهد.

**قضیه ۷-۱۱** اگر  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  مجموعه‌ای از نقاط با قطر ۱ در صفحه باشد، آنگاه بیشترین تعداد زوج نقاطی که فاصله آن‌ها بیشتر از  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  است برابر  $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$  است. به علاوه، به ازای هر عدد  $n$ ، مجموعه‌ای به صورت  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  با قطر ۱ وجود دارد که فاصله بین دقیقاً  $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$  زوج نقطه آن بیشتر از  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  است.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف ساده با مجموعه رأس‌های

$$V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

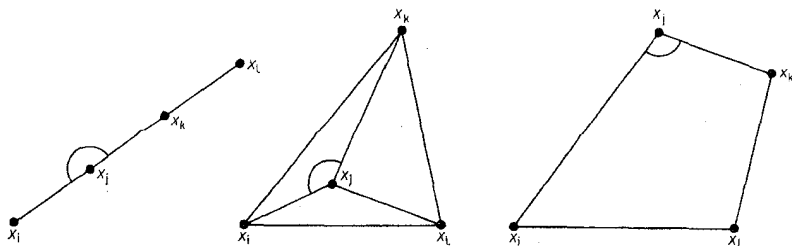
و مجموعه یال‌های

$$E(G) = \{x_i x_j \mid d(x_i, x_j) > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$$

باشد که در آن  $d(x_i, x_j)$  نمایانگر فاصله «اقلیدسی» بین  $x_i$  و  $x_j$  می‌باشد. در ادامه نشان خواهیم داد که  $G$  نمی‌تواند شامل  $K_4$  باشد.

نخست، دقت کنید که هر چهار نقطه در صفحه باید زاویه‌ای به اندازه حداقل ۹۰ درجه را مشخص کنند. زیرا پوسته کوژ این نقاط از سه حالت زیر خارج نیست:

(الف) یک خط، (ب) یک مثلث، (ج) یک چهارضلعی (شکل ۵-۷ را ملاحظه کنید).



شکل ۵-۷

واضح است که در هر حالت، یک زاویه  $x_k$ ،  $x_j$  و  $x_i$  با اندازه حداقل  $90^\circ$  درجه وجود دارد.

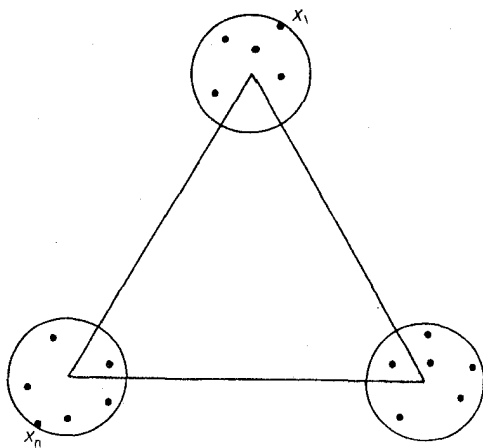
اکنون سه نقطه  $x_i$ ،  $x_j$  و  $x_k$  را که مشخص کننده این زاویه است در نظر بگیرید. همه فاصله‌های  $d(x_i, x_j)$ ،  $d(x_i, x_k)$  و  $d(x_j, x_k)$  نمی‌توانند به‌طور همزمان از  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  بزرگتر و از ۱ کوچکتر باشند. زیرا که اگر  $d(x_i, x_j)$  و  $d(x_i, x_k)$  بزرگتر از  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  باشند، آنگاه  $d(x_j, x_k)$  بزرگتر از ۱ خواهد بود، در صورتی که فرض کرده بودیم قطر مجموعه  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  برابر ۱ است.

در نتیجه به‌ازای هر چهار نقطه در  $G$ ، حداقل دو رأس نمی‌توانند با یک یال به یکدیگر متصل گردند و بنابراین  $G$  نمی‌تواند شامل  $K_4$  باشد. طبق قضیه ۹-۷ داریم:

$$\varepsilon(G) \leq \varepsilon(T_{r,n}) = \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$$

مجموعه‌ای مانند  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  با قطر ۱ را که در آن دقیقاً  $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$  زوج نقطه فاصله‌ای بیشتر از  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  دارند، به صورت زیر می‌توان ساخت:

عددی مانند  $r$  با شرط  $0 < r < (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})/4$  انتخاب کنید و سه دایره با شعاع  $r$  رسم کنید که فاصله بین مراکز آن‌ها  $1-2r$  باشد (شکل ۶-۷).  $x_1, x_2, \dots, x_{\lfloor n/3 \rfloor}$  را در یک دایره قرار دهید،  $x_{\lfloor n/3 \rfloor + 1}, x_2, \dots, x_{\lfloor 2n/3 \rfloor}$  را در دایره دیگر و بالاخره  $x_{\lfloor 2n/3 \rfloor + 1}, x_2, \dots, x_n$  را در دایره سوم قرار دهید به طوری که  $d(x_1, x_n) = 1$  باشد. قطر این مجموعه مسلماً برابر ۱ است، همچنین  $d(x_i, x_j) > 1/\sqrt{3}$ ، اگر و تنها اگر  $x_j$  و  $x_i$  در دایره‌های متفاوتی باشند و بنابراین دقیقاً  $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$  زوج  $(x_i, x_j)$  با شرط  $d(x_i, x_j) > \frac{1}{\sqrt{3}}$  وجود خواهد داشت. □



شکل ۶-۷

## تمرین‌ها

۱-۵-۷\* فرض کنید که  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  یک مجموعه با قطر ۱ در صفحه است.

الف) نشان دهید که بیشترین تعداد زوج نقاطی که فاصله آنها ۱ است برابر  $n$  می‌باشد.

ب) یک مجموعه  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  با قطر ۱ در صفحه بسازید که در آن دقیقاً فاصله  $n$  زوج نقطه

برابر ۱ باشد.

(E. Pannwitz)

۲-۵-۷ یک شهر دایره‌ای مسطح با شعاع شش مایل، توسط هیجده ماشین پلیس پوششی داده می‌شود و

این ماشین‌ها توسط بی‌سیم با یکدیگر ارتباط برقرار می‌کنند. اگر برد بی‌سیم‌ها ۹ مایل باشد،

نشان دهید که در هر زمان، حداقل دو ماشین وجود دارند که هر یک می‌توانند با حداقل پنج ماشین

دیگر ارتباط داشته باشند.



## مراجع

- Abbott, H. L. (1972). Lower bounds for some Ramsey numbers. *Discrete Math.*, 2, 289–93
- Abbott, H. L. and Moser, L. (1966). Sum-free sets of integers. *Acta Arith.*, 11, 392–96
- Erdős, P. (1947). Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53, 292–94
- Erdős, P. (1967). Extremal problems in graph theory. in *A Seminar on Graph Theory* (ed. F. Harary). Holt, Rinehart and Winston, New York, pp.54–59
- Erdős, P. (1970). On the graph-theoreme of Turán (Hungarian). *Mat. Lapok*, 21, 249–51
- Erdős, P. and Spencer, J. (1974). *Probabilistic Methods in Combinatorics*, Akadémiai Kiadó. Budapest
- Erdős, P. and Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry, *Composito Math.*, 2, 463–70
- Folkman, J. (1970). Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring. *SIAM J. appl. Math.*, 18, 19–24
- Gallai, T. (1959). Über extreme Punkt-und Kantenmengen. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 2, 133–38
- Greenwood, R. E. and Gleason, A. M. (1955). Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J. Math.*, 7, 1–7
- Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, 30, 264–86
- Schur, I. (1916). Über die Kongruenz  $xm + ym = zm \pmod{p}$ . *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 25, 114–17
- Turán, P. (1941). An extremal problem in graph theory (Hungarian). *Mat. Fiz. Lapok*, 48, 436–52

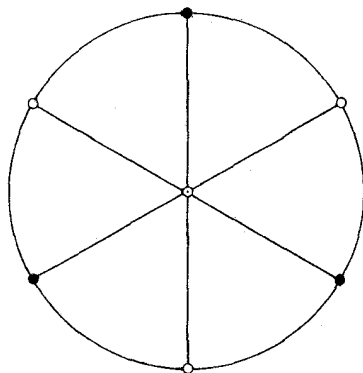
# فصل ۸

## رنگ آمیزی رأسی

### ۸-۱ عدد رنگی

در فصل ۶، رنگ آمیزی یالی گراف‌ها را مطالعه کردیم. اکنون به بررسی مفهومی مشابه در زمینه رنگ آمیزی رأسی می‌پردازیم.

یک  $k$ -رنگ آمیزی رأسی از  $G$  عبارت است از تخصیص  $k$  رنگ ۱، ۲، ... و  $k$  به رأس‌های  $G$ . اگر هیچ دو رأس مجاور متمایزی دارای رنگ یکسان نباشند، رنگ آمیزی را مجاز می‌نامیم. بنابراین یک  $k$ -رنگ آمیزی رأسی مجاز از گراف بدون طوقه  $G$ ، عبارت است از افزایشی مانند  $(V_1, V_2, \dots, V_k)$  از  $V$  به  $k$  مجموعه مستقل که می‌توانند تهی نیز باشند. اگر  $G$  دارای یک  $k$ -رنگ آمیزی رأسی مجاز باشد آنگاه  $G$ ،  $k$ -رنگ پذیر رأسی نامیده می‌شود. برای راحتی کار، یک «رنگ آمیزی رأسی مجاز» را به‌طور ساده، یک رنگ آمیزی و یک « $k$ -رنگ آمیزی رأسی مجاز» را یک  $k$ -رنگ آمیزی می‌نامیم. همچنین « $k$ -رنگ پذیر رأسی» را به اختصار  $k$ -رنگ پذیر می‌گوئیم. به‌وضوح، یک گراف،  $k$ -رنگ پذیر است اگر و تنها اگر گراف ساده زمینه آن  $k$ -رنگ پذیر باشد. بنابراین در بحث رنگ آمیزی، فقط به گراف‌های ساده خواهیم پرداخت. یک گراف ساده، ۱-رنگ پذیر است اگر و تنها اگر تهی باشد و ۲-رنگ پذیر است اگر و تنها اگر دوبخشی باشد. عدد رنگی  $G$ ،  $\chi(G)$ ، کوچکترین  $k$  ای است که به‌ازای آن،  $G$ ،  $k$ -رنگ پذیر است. اگر  $\chi(G) = k$ ، در این صورت  $G$  را  $k$ -رنگی می‌نامیم. یک گراف ۳-رنگی در شکل ۸-۱ نشان داده شده است. این گراف دارای یک ۳-رنگ آمیزی است که در شکل مشخص شده است و چون گراف دوبخشی نیست، بنابراین نمی‌تواند ۲-رنگ پذیر باشد.



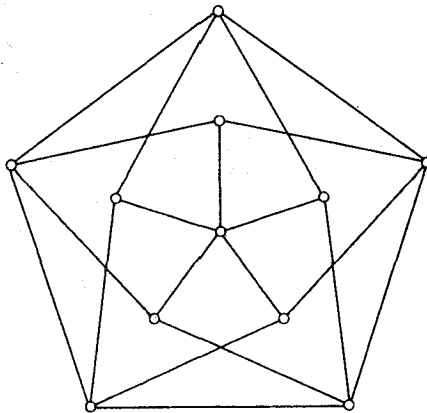
شکل ۱-۸. یک گراف ۳-رنگی

هنگامی که با مسأله رنگ آمیزی سروکار داریم، مطالعه خواص ردهٔ خاصی از گراف‌ها که گراف‌های بحرانی نامیده می‌شوند، می‌تواند بسیار سودمند باشد. گراف  $G$  را بحرانی می‌نامیم اگر به‌ازای هر زیرگراف  $H$  از  $G$  داشته باشیم:  $\chi(H) < \chi(G)$ . این‌گونه گراف‌ها برای نخستین بار توسط دیراک در سال ۱۹۵۲ مورد مطالعه قرار گرفتند. گراف  $k$ -بحرانی، گرافی است که  $k$ -رنگی و بحرانی باشد؛ هر گراف  $k$ -رنگی دارای یک زیرگراف  $k$ -بحرانی است. یک گراف ۴-بحرانی، منتسب به گروتز<sup>۱</sup> (۱۹۵۸) در شکل ۲-۸ نشان داده شده است.

نتیجهٔ مستقیمی که از تعریف به‌دست می‌آید، این است که هر گراف بحرانی، همبند است. قضایای زیر، برخی از خواص عمدهٔ گراف‌های بحرانی را بیان می‌کنند.

**قضیهٔ ۱-۸** اگر  $G$ ،  $k$ -بحرانی باشد، آنگاه  $\delta \geq k-1$ .

**اثبات** از طریق تناقض. فرض کنیم که در صورت امکان،  $G$  یک گراف  $k$ -بحرانی با شرط  $\delta < k-1$  باشد و  $v$  را یک رأس با درجهٔ  $\delta$  در این گراف در نظر می‌گیریم. چون  $G$ ،  $k$ -بحرانی است، پس  $G-v$ ،  $(k-1)$ -رنگ پذیر خواهد بود. فرض کنید که  $(V_1, V_2, \dots, V_{k-1})$ ، یک  $(k-1)$ -رنگ آمیزی از  $G-v$  باشد. طبق تعریف،  $v$  در  $G$  با  $\delta < k-1$  رأس مجاور است و بنابراین  $v$  باید با تمام رأس‌های زیرمجموعه‌ای مانند  $V_j$  غیر مجاور باشد. ولی در این صورت  $(V_1, V_2, \dots, V_j \cup \{v\}, \dots, V_{k-1})$  یک  $(k-1)$ -رنگ آمیزی از  $G$  خواهد بود که تناقض است. پس  $\delta \geq k-1$  می‌باشد.  $\square$



شکل ۲-۸. گراف گروتز؛ یک گراف ۴-بحرانی

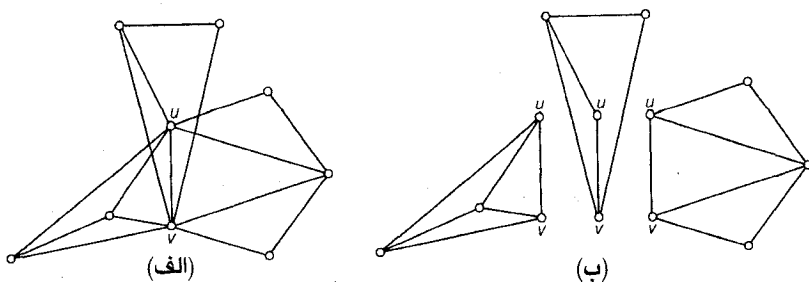
**نتیجه ۱-۱-۸** در هر گراف  $k$ -رنگی، دست کم،  $k$  رأس با درجه حداقل  $k-1$  وجود دارد.

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف  $k$ -رنگی و  $H$  یک زیرگراف  $k$ -بحرانی از  $G$  باشد. طبق قضیه ۱-۸ درجه هر رأس  $H$  در  $H$  و بنابراین در  $G$ ، حداقل برابر  $k-1$  است. از آن جایی که  $H$ ،  $k$ -رنگی است، پس حداقل  $k$  رأس دارد و نتیجه به اثبات می‌رسد.  $\square$

**نتیجه ۲-۱-۸** به ازای هر گراف  $G$  داریم:  $\chi \leq \Delta + 1$

**اثبات** این مطلب، نتیجه مستقیمی از نتیجه ۱-۱-۸ است.  $\square$

فرض کنید که  $S$ ، یک برش رأسی از گراف همبند  $G$  باشد و مؤلفه‌های  $G-S$  دارای مجموعه رأس‌های  $V_1, V_2, \dots, V_n$  باشند. در این صورت زیرگراف‌های  $G_i = G[V_i \cup S]$ ،  $S$ -مؤلفه‌های  $G$  نامیده می‌شوند (شکل ۳-۸ را ملاحظه نمایید). می‌گوئیم رنگ آمیزی‌های  $G_1, G_2, \dots, G_n$  روی  $S$  توافق دارند، اگر به ازای هر  $v \in S$ ، رأس  $v$  در تمام رنگ آمیزی‌ها دارای رنگ یکسان باشد.

شکل ۳-۸. (الف)  $G$ ؛ (ب)  $\{u, v\}$ -مؤلفه‌های  $G$

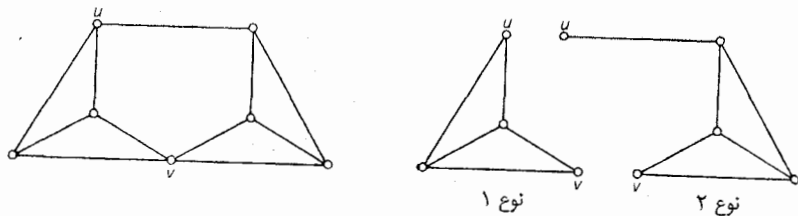
**قضیهٔ ۲.۸** در یک گراف بحرانی، هیچ برش رأسی به صورت خوشه وجود ندارد.

**اثبات** از طریق تناقض. فرض کنید  $G$  یک گراف  $k$ -بحرانی باشد که دارای برش رأسی  $S$  به شکل خوشه است.  $S$ -مؤلفه‌های  $G$  را با  $G_1, G_2, \dots, G_r$  نمایش می‌دهیم. چون  $G$ ،  $k$ -بحرانی است، بنابراین تمام  $G_i$  ها  $(k-1)$ -رنگ‌پذیرند. به علاوه، چون  $S$  یک خوشه است، در هر  $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی از  $G_i$ ، رنگ‌های متمایزی به رأس‌های  $S$  تخصیص می‌یابد. در نتیجه  $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی‌هایی وجود دارند که روی  $S$  توافق دارند. ولی این رنگ‌آمیزی‌ها، بر روی هم یک  $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی از  $G$  خواهند بود که تناقض است.  $\square$ .

**نتیجهٔ ۲.۸** هر گراف بحرانی، یک بلوک است.

**اثبات** اگر  $v$  یک رأس برشی باشد، آنگاه  $\{v\}$  یک برش رأسی است که در ضمن خوشه هم هست. از قضیهٔ ۲.۸ نتیجه می‌شود که هیچ گراف بحرانی نمی‌تواند رأس برشی داشته باشد یا به عبارت دیگر، هر گراف بحرانی، یک بلوک است.  $\square$ .

نتیجهٔ دیگری که از قضیهٔ ۲.۸ به دست می‌آید، این است که اگر گراف  $k$ -بحرانی  $G$ ، دارای  $2$ -برش رأسی  $\{u, v\}$  باشد، در این صورت  $u$  و  $v$  نمی‌توانند مجاور باشند. می‌گوئیم یک  $\{u, v\}$ -مؤلفه  $G_i$  از  $G$  از نوع ۱ است، اگر در هر  $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی از  $G_i$ ، رنگ‌های یکسانی به  $u$  و  $v$  اختصاص یابند. اگر در هر  $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی از  $G_i$  رنگ‌های متفاوتی به  $u$  و  $v$  اختصاص بیابند، در آن صورت  $\{u, v\}$ -مؤلفه  $G_i$  از نوع ۲ خواهد بود (شکل ۴-۸).



شکل ۴-۸

**قضیهٔ ۳.۸** (دیراک، ۱۹۵۳) فرض کنید  $G$  یک گراف  $k$ -بحرانی با  $2$ -برش رأسی  $\{u, v\}$  باشد. در این صورت:

(الف)  $G = G_1 \cup G_2$ ، که در آن  $G_i$ ، یک  $\{u, v\}$ -مؤلفه از نوع  $i$  ( $i=2, 1$ ) است و

(ب) هم  $G_1 + uv$  و هم  $G_1 uv$ ،  $k$ -بحرانی هستند (نمایانگر گرافی است که از روی هم گذاشتن یا به عبارتی منطبق کردن رأس‌های  $u$  و  $v$  در گراف  $G_1$  به دست می‌آید).

**اثبات** (الف) چون  $G$  بحرانی است، هر  $\{u, v\}$ -مؤلفه از آن،  $\{k-1\}$ -رنگ پذیر است. از طرفی  $(k-1)$ -رنگ آمیزی‌های این  $\{u, v\}$ -مؤلفه‌ها، نمی‌توانند همگی روی  $\{u, v\}$  توافق داشته باشند. چون در غیراین صورت، این رنگ آمیزی‌ها، بر روی هم یک  $(k-1)$ -رنگ آمیزی از  $G$  را وجود خواهند آورد. پس دو  $\{u, v\}$ -مؤلفه مانند  $G_1, G_2$  وجود دارند که هیچ  $(k-1)$ -رنگ آمیزی از  $G_1$  با هیچ  $(k-1)$ -رنگ آمیزی از  $G_2$  توافق ندارد. مسلماً یکی از این‌ها، مثلاً  $G_1$  باید از نوع ۱ و دیگری از نوع ۲ باشد. چون  $G_1$  و  $G_2$  از نوع‌های متفاوتی هستند، زیرگراف  $G_1 \cup G_2$ ،  $(k-1)$ -رنگ پذیر نیست. از طرفی، چون  $G$  بحرانی است. پس به ناچار داریم:  $G = G_1 \cup G_2$ .

(ب)  $G_1 + uv$  را  $H_1$  می‌نامیم. چون  $G_1$  از نوع ۱ است، پس  $H_1$ ،  $k$ -رنگی است. در ادامه ثابت می‌کنیم که  $H_1$  بحرانی است. به این طریق که نشان می‌دهیم به ازای هر یال  $e$  از  $H_1 - e$ ،  $(k-1)$ -رنگ پذیر است. اگر  $e = uv$ ، قضیه روشن است، زیرا در این صورت داریم:  $H_1 - e = G_1$ . فرض کنید  $e$  یال دیگری از  $H_1$  باشد. در هر  $(k-1)$ -رنگ آمیزی از  $G - e$ ، رأس‌های  $u$  و  $v$  باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند، زیرا  $G_1$  زیرگرافی از  $G - e$  است. از محدود کردن یکی از این رنگ آمیزی‌ها به رأس‌های  $G_1$ ، یک  $(k-1)$ -رنگ آمیزی از  $H_1 - e$  به دست خواهد آمد. بنابراین  $G_1 + uv$ ،  $k$ -بحرانی است. اثباتی مشابه نشان می‌دهد که  $G_1 uv$  نیز  $k$ -بحرانی است.  $\square$

**نتیجه ۳-۸** فرض کنید که  $G$  یک گراف  $k$ -بحرانی با ۲-برش رأسی  $\{u, v\}$  باشد. در این صورت داریم:

$$d(u) + d(v) \geq 3k - 5 \quad (۱-۸)$$

**اثبات** فرض کنید که  $G_1$  یک  $\{u, v\}$ -مؤلفه از نوع ۱ و  $G_2$  یک  $\{u, v\}$ -مؤلفه از نوع ۲ باشد. قرار می‌دهیم  $H_1 = G_1 + uv$ ،  $H_2 = G_2 uv$ . بنابر قضایای ۳-۸ و ۱-۸ داریم:

$$d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$$

$$d_{H_2}(w) \geq k - 1$$

و

رأسی جدیدی است که از روی هم گذاشتن  $u, v$  به دست می‌آید. در نتیجه داریم:

$$d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) \geq 2k - 4$$

$$d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) \geq k - 1$$

و

با ترکیب دو نامساوی فوق به رابطهٔ (۱-۸) می‌رسیم. □

### تمرین‌ها

- ۱-۱-۸ نشان دهید که اگر  $G$  ساده باشد، آنگاه داریم:  $\chi \geq \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$ .
- ۲-۱-۸ نشان دهید اگر هر دو دور فرد در  $G$ ، یک رأس مشترک داشته باشند، آنگاه  $\chi \leq 5$  است.
- ۳-۱-۸ نشان دهید که اگر  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  دنبالهٔ درجه‌های  $G$  با شرط  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  باشد، آنگاه داریم:  
(D. J. A. Welsh and M. B. Powell)  $\chi \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$
- ۴-۱-۸ با استفاده از تمرین ۳-۱-۸ نشان دهید:  
(الف)  $\chi \leq \lceil \sqrt{2\varepsilon} \rceil$   
(ب)  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq \nu + 1$  (E. A. Nordhaus and J. W. Gaddum)
- ۵-۱-۸ نشان دهید:  $\chi(G) \leq 1 + \max \delta(H)$  که در آن  $H$  تمام زیرگراف‌های القایی  $H$  از  $G$  گرفته شده است.  
(G. Szekeres and H. S. Wilf)
- ۶-۱-۸ اگر گراف  $k$ -رنگی  $G$ ، دارای یک رنگ آمیزی باشد که در آن هر رنگ، حداقل به دو رأس اختصاص یافته باشد، نشان دهید که  $G$  دارای یک  $k$ -رنگ آمیزی به همین گونه است (یعنی هر رنگ از  $k$  رنگ به لااقل دو رأس اختصاص یافته است).  
(T. Gallai)
- ۷-۱-۸ نشان دهید که تنها گراف ۱-بحرانی،  $K_1$ ، تنها گراف ۲-بحرانی،  $K_2$  و تنها گراف‌های ۳-بحرانی،  $k$ -دوره‌های فرد با شرط  $k \geq 3$  هستند.
- ۸-۱-۸ گراف  $G$  را یکتا  $k$ -رنگ پذیر می‌نامیم اگر هر دو  $k$ -رنگ آمیزی دلخواه از  $G$ ، به افزایی یکسان از  $V$  منتهی شوند. نشان دهید که در یک گراف  $k$ -بحرانی، هیچ برش رأسی یک زیرگراف یکتا  $(k-1)$ -رنگ پذیر را القاء نمی‌کند.
- ۹-۱-۸ (الف) نشان دهید که اگر  $u$  و  $v$  دو رأس از یک گراف بحرانی  $G$  باشند. در این صورت داریم:  
 $N(u) \not\subseteq N(v)$   
(ب) نتیجه بگیرید که گراف‌های  $k$ -بحرانی نمی‌توانند دقیقاً  $k+1$  رأس داشته باشند.
- ۱۰-۱-۸ نشان دهید:  
(الف)  $\chi(G_1 \vee G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$   
(ب)  $G_1 \vee G_2$  بحرانی است اگر و تنها اگر  $G_1$  و  $G_2$  هر دو بحرانی باشند.

۱۱-۱۸ فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف  $k$ -بحرانی باشند که دقیقاً در یک رأس  $v$  مشترک هستند و همچنین  $v_1$  و  $v_2$  یال‌هایی از  $G_1$  و  $G_2$  باشند. نشان دهید  $v_1 v_2 + v_1 v_2 \cup (G_1 - v v_1) \cup (G_2 - v v_2)$  گرافی  $k$ -بحرانی است. (G. Hajós)

۱۲-۱۸ به‌ازای  $n=4$  و هر  $n \geq 6$ ، یک گراف  $4$ -بحرانی با  $n$  رأس بسازید.

۱۳-۱۸ الف) فرض کنید  $(X, Y)$  یک افراز از  $V$  باشد به طوری که  $G[X]$  و  $G[Y]$  هر دو  $n$ -رنگ‌پذیر باشند. نشان دهید که اگر برش یالی  $[X, Y]$  حداکثر  $n-1$  یال داشته باشد، در این صورت  $G$  هم  $n$ -رنگ‌پذیر است. (P. C. Kainen)

ب) نتیجه بگیرید که هر گراف  $k$ -بحرانی،  $(k-1)$ -همبند یالی است. (G. A. Dirac)

## ۲-۸ قضیه بروکس<sup>۱</sup>

کران بالایی که در نتیجه ۲-۱۸ برای عدد رنگی ارائه شد، گاهی اوقات بسیار بزرگتر از مقدار واقعی آن است. به‌طورمثال، گراف‌های دوبخشی،  $2$ -رنگی هستند. درحالی‌که در این گراف‌ها،  $\Delta$  می‌تواند به هر اندازه‌ای بزرگ باشد. در این حالت، نتیجه ۲-۱۸ به مراتب ضعیف‌تر از قضیه ویزینگ (۲-۶) است. حالت دیگری هم وجود دارد که در آن نتیجه ویزینگ قوی‌تر است. گراف‌های زیادی وجود دارند که در شرط  $\chi' = \Delta + 1$  صدق می‌کنند (تمرین‌های ۲-۶ و ۳-۲۶ را ملاحظه نمائید). ولی همان‌طور که در قضیه زیر ملاحظه خواهید کرد، فقط دوگونه از گراف‌ها هستند که در آن‌ها تساوی  $\chi = \Delta + 1$  برقرار است.

قضیه زیر متعلق به بروکس (۱۹۴۱) است و اثباتی که در اینجا برای آن ارائه شده، از لاواژ (۱۹۷۳) می‌باشد.

**قضیه ۸-۱** اگر  $G$  یک گراف ساده همبند باشد که نه دور فرد و نه گراف کامل است، در این صورت داریم:  $\chi \leq \Delta$ .

**اثبات** فرض کنید  $G$  یک گراف  $k$ -رنگی باشد که در فرض قضیه صدق می‌کند. بدون این‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم که  $G$ ،  $k$ -بحرانی است. بنابر نتیجه ۲-۸،  $G$  یک بلوک است. از طرفی، چون گراف‌های ۱-بحرانی و ۲-بحرانی کامل و گراف‌های ۳-بحرانی، دور فردند (تمرین ۱-۸)  $k$  را بزرگتر از ۳ در نظر می‌گیریم.



اگر  $G$  دارای ۲-برش رأسی  $\{u, v\}$  باشد، با توجه به نتیجهٔ ۳-۸ داریم:

$$2\Delta \geq d(u) + d(v) \geq 3k - 5 \geq 2k - 1$$

و چون  $2\Delta$ ، زوج است، پس نتیجه می‌شود که:  $\chi = k \leq \Delta$

اکنون فرض کنید که  $G$ ، ۳-همبند است. چون  $G$  کامل نیست، سه رأس مانند  $w, v, u$  در  $G$  وجود دارند به طوری که:  $uv, vw \in E$  و  $uw \notin E$  (تمرین ۱-۶-۱۴). قرار دهید:  $u = v_1, w = v_2$ . حال فرض کنید:  $v_1 = v_2, v_3, \dots, v_p = v$ . یک ترتیب دلخواه از رأس‌های  $G - \{u, w\}$  باشد، به طوری که هر  $v_i$  با رأسی مانند  $v_j$  با شرط  $j > i$  مجاور است (این کار با مرتب کردن رأس‌های  $G - \{u, w\}$  بر حسب ترتیب غیرصعودی فاصلهٔ آن‌ها از  $v$  قابل انجام است). اکنون به تشریح یک  $\Delta$ -رنگ آمیزی از  $G$  می‌پردازیم:

رنگ ۱ را به رأس‌های  $v_1 = u$  و  $v_2 = w$  تخصیص می‌دهیم؛ سپس رأس‌های  $v_3, v_4, \dots, v_p$  را به ترتیب، با اولین رنگ ممکن از درون لیست ۱، ۲، ... و  $\Delta$  رنگ آمیزی می‌کنیم. با توجه به ساختار دنباله  $v_1, v_2, \dots, v_p$ ، هر رأس  $v_i$  با شرط  $1 \leq i \leq p-1$  با رأسی مانند  $v_j$  با شرط  $j > i$  مجاور است و بنابراین، می‌تواند حداکثر با  $\Delta-1$  رنگ مجاور باشد و در نتیجه، یکی از رنگ‌های ۱، ۲، ... و  $\Delta$  برای رأس  $v_i$  قابل استفاده است. در انتها نیز چون  $v_p$  با دو رأس به رنگ ۱ (یعنی  $v_2, v_1$ ) مجاور است، پس حداکثر می‌تواند با  $\Delta-2$  رنگ دیگر مجاور باشد و بنابراین، یکی از رنگ‌های ۲، ۳، ... و  $\Delta$  برای  $v_p$  قابل استفاده خواهد بود.  $\square$

## تمرین‌ها

۱-۲-۸ نشان دهید که قضیهٔ بروکس، با گزارهٔ زیر هم ارز است:

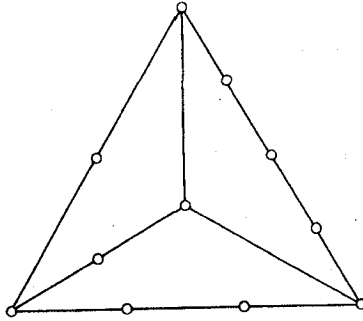
اگر  $G$ ،  $k$ -بحرانی ( $k \geq 4$ ) و غیر کامل باشد، آنگاه داریم:  $2\epsilon \geq v(k-1) + 1$ .

۲-۲-۸ با استفاده از قضیهٔ بروکس نشان دهید که اگر  $G$  بدون طوقه و  $\Delta = 3$  باشد، آنگاه  $\chi' \leq 4$ .

## ۳-۸ حدس هایوش<sup>۱</sup>

مشتق گراف  $G$ ، گرافی است که با دنباله‌ای از اشتقاق‌های یالی در  $G$  به دست می‌آید. مشتقی از  $K_4$  در شکل ۵-۸ نشان داده شده است. گرچه هیچ شرط لازم و کافی مناسبی برای  $k$ -رنگی بودن گراف‌ها با شرط  $k \geq 3$  پیدا نشده است، ولی یک شرط لازم محتمل توسط هایوش در سال ۱۹۶۱ ارائه شده است به این

صورت که: اگر  $G$ ،  $k$ -رنگی باشد، در این صورت  $G$  شامل مشتقی از  $K_k$  است. این شرط به حدس هایوش معروف است. البته باید توجه داشت که شرط فوق، کافی نیست. به طور مثال، ۴-دور، مشتقی از  $K_3$  است، ولی ۳-رنگی نیست.

شکل ۵.۸. مشتقی از  $K_3$ 

درستی حدس هایوش به ازای  $k=1$  و  $k=2$ ، کاملاً بدیهی است. درستی حالت  $k=3$  نیز به سادگی قابل بررسی است. زیرا هر گراف ۳-رنگی، الزاماً شامل یک دور فرد است و هر دور فرد، مشتقی از  $K_3$  است. دیراک در سال ۱۹۵۲ حالت  $k=4$  را نیز اثبات نمود.

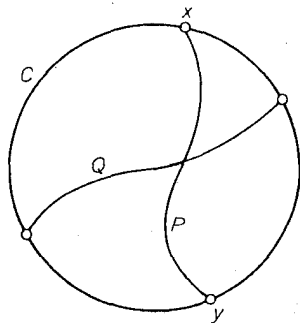
**قضیه ۵.۸** اگر  $G$  یک گراف ۴-رنگی باشد، آنگاه  $G$  شامل مشتقی از  $K_4$  است.

**اثبات** فرض کنید که  $G$  یک گراف ۴-رنگی باشد. توجه داشته باشید که اگر زیرگرافی از  $G$ ، شامل یک مشتق  $K_4$  باشد، آنگاه خود  $G$  نیز شامل آن مشتق خواهد بود. بنابراین بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم که  $G$  بحرانی است. در نتیجه  $G$  یک بلوک با  $\delta \geq 3$  خواهد بود. اگر  $v=4$ ، آنگاه  $G$  برابر  $K_4$  است و به روشنی، این قضیه برقرار خواهد بود. حال فرض کنید که قضیه به ازای تمامی گراف‌های ۴-رنگی با کمتر از  $n$  رأس برقرار باشد و  $v(G)$  را برابر  $n > 4$  در نظر می‌گیریم.

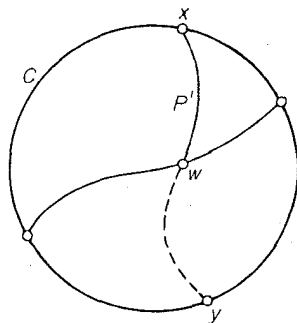
ابتدا فرض می‌کنیم که  $G$  دارای ۲-برش رأسی  $\{u, v\}$  است. طبق قضیه ۳.۸  $G$  دارای دو  $\{u, v\}$ -مؤلفه  $G_1$  و  $G_2$  است به طوری که  $G_1 + uv$ ، ۴-بحرانی است. چون  $v(G_1 + uv) < v(G)$ ، با توجه به فرض استقراء نتیجه می‌شود که  $G_1 + uv$  شامل مشتقی از  $K_4$  است. بنابراین، اگر  $P$  یک  $(u, v)$ -مسیر در  $G_2$  باشد، در آن صورت  $G_1 \cup P$  شامل مشتقی از  $K_4$  است و چون داریم:  $G_1 \cup P \subseteq G$ ، در نتیجه  $G$  نیز دارای مشتقی از  $K_4$  خواهد بود.

اینک فرض کنید که  $G$ ، ۳-همبند باشد. چون  $\delta \geq 3$ ، پس  $G$  دارای دوری مانند  $C$  با طول حداقل ۴ است. فرض کنید  $u$  و  $v$  دو رأس غیر مجاور در  $C$  باشند. چون  $G - \{u, v\}$  همبند است، مسیری مانند  $P$  در  $G - \{u, v\}$  وجود دارد که دو مؤلفه  $C - \{u, v\}$  را به یکدیگر متصل می‌کند. می‌توانیم فرض کنیم که ابتدای مسیر،  $x$  و انتهای آن  $y$ ، تنها رأس‌های  $P$  روی  $C$  هستند. به‌طور مشابه، مسیری مانند  $Q$  در  $G - \{x, y\}$  وجود دارد (شکل ۸-۶ را ملاحظه نمایید).

اگر  $P$  و  $Q$  رأس مشترکی نداشته باشند. آنگاه  $CUPUQ$  مشتقی از  $K_4$  است. در غیر این صورت، فرض کنید که  $w$  اولین رأس  $P$  روی  $Q$  و  $P'$  نمایانگر  $(x, w)$ -قسمت  $P$  باشد. در این صورت  $CUP'UQ$  مشتقی از  $K_4$  است (شکل ۸-۶ب). بنابراین، در هر دو حالت  $G$  شامل مشتقی از  $K_4$  است.  $\square$



(الف)



(ب)

شکل ۸-۶

تاکنون حدس هایوش در حالت کلی اثبات نشده است و انتظار می‌رود که حل آن، مسأله بسیار مشکلی باشد. حدس دیگری در این رابطه وجود دارد که متعلق به هادویگر<sup>۱</sup> (۱۹۴۳) است:

اگر  $G$ ،  $k$ -رنگی باشد، آنگاه  $G$  "انقباض پذیر" به گرافی است که شامل  $K_k$  است.

واگنر<sup>۲</sup> (۱۹۶۴) نشان داده است که حالت  $k=5$  از حدس هادویگر با حدس مشهور چهاررنگ که در

فصل ۹، راجع به آن بحث خواهیم کرد، هم‌ارز است.

## تمرین ها

۱-۳-۸ \* نشان دهید که اگر  $G$  ساده باشد و حداکثر یک رأس با درجه کمتر از ۳ داشته باشد، آنگاه  $G$  شامل مشتقی از  $K_4$  است.

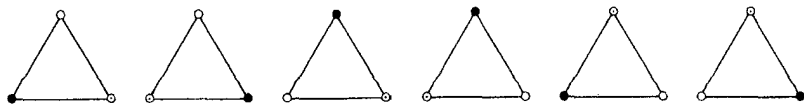
۲-۳-۸ الف) نشان دهید که اگر  $G$  ساده و  $v \geq 4$  و  $\varepsilon \geq 2v - 2$  باشد، در این صورت  $G$  شامل مشتقی از  $K_4$  است.

ب) به ازای هر  $v \geq 4$ ، گراف ساده‌ای با شرط  $\varepsilon = 2v - 3$  پیدا کنید که شامل هیچ مشتقی از  $K_4$  نباشد.

## ۴-۸ چند جمله‌ای‌های رنگی

به هنگام مطالعه رنگ آمیزی‌ها، علاوه بر بررسی وجود یک رنگ آمیزی، شمارش تعداد رنگ آمیزی‌ها نیز می‌تواند مفید واقع شود. این مسأله توسط بیرکهف<sup>۱</sup> (۱۹۱۲) به عنوان وسیله‌ای برای بررسی حدس چهاررنگ گسترش یافته است.

تعداد  $k$ -رنگ آمیزی‌های متمایز گراف  $G$  را با  $\pi_k(G)$  نشان می‌دهیم. بنابراین  $\pi_k(G) > 0$ ، اگر و تنها اگر  $G$ ،  $k$ -رنگ پذیر باشد. دو رنگ آمیزی، متمایز شمرده می‌شوند اگر به یک رأس، در دو رنگ آمیزی، رنگ‌های متفاوتی اختصاص یافته باشد. به عبارت دیگر، اگر  $(V_1, V_2, \dots, V_k)$  و  $(V'_1, V'_2, \dots, V'_k)$  دو رنگ آمیزی باشند، آنگاه  $(V_1, V_2, \dots, V_k) = (V'_1, V'_2, \dots, V'_k)$  اگر و تنها اگر به ازای  $1 \leq i \leq k$ ، داشته باشیم:  $V_i = V'_i$ . به طور مثال، یک مثلث، دارای شش ۳-رنگ آمیزی متمایز است که در شکل ۷-۸ نشان داده شده‌اند. توجه داشته باشید که گرچه در هر رنگ آمیزی، دقیقاً یک رأس از هر رنگ وجود دارد، ولی با این حال، این شش رنگ آمیزی را متمایز در نظر می‌گیریم.



شکل ۷-۸

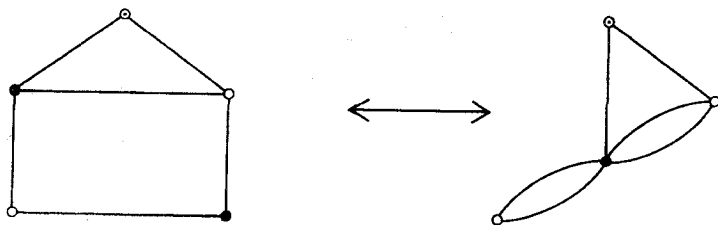
اگر  $G$  تهی باشد، هر یک از  $k$  رنگ ممکن را می‌توان به‌طور مستقل به هر رأس اختصاص داد. بنابراین داریم:  $\pi_k(G) = k^n$ . از طرف دیگر، اگر  $G$  کامل باشد، آنگاه  $k$  انتخاب برای رأس اول وجود دارد،  $k-1$  انتخاب برای رأس دوم،  $k-2$  برای رأس سوم و... بنابراین در این حالت داریم:

$\pi_k(G) = k(k-1)\dots(k-v+1)$ . در حالت کلی، یک فرمول ساده بازگشتی برای  $\pi_k(G)$  وجود دارد که مشابهت بسیاری با فرمول بازگشتی  $\tau(G)$  (تعداد درخت‌های فراگیر  $G$ ) که در قضیهٔ ۲-۸ بررسی شد، دارد.

**قضیهٔ ۶-۸** اگر  $G$  ساده باشد، آنگاه به‌ازای هر یال  $e$  از  $G$  داریم:

$$\pi_k(G) = \Pi_k(G=e) - \Pi_k(G.e)$$

**اثبات** فرض کنید که  $u$  و  $v$  دو سر یال  $e$  باشند. به‌ازای هر  $k$ -رنگ آمیزی از  $G-e$  که رنگ‌های یکسانی را به  $u$  و  $v$  اختصاص دهد، یک  $k$ -رنگ آمیزی از  $G.e$  متناظر می‌شود که در آن به رأسی که از روی هم قرار دادن  $u$  و  $v$  به‌دست آمده است، رنگ مشترک  $u$  و  $v$  اختصاص یافته است. این تناظر به‌وضوح یک نگاشت دوسویی است (شکل ۸-۸ را ملاحظه نمائید). بنابراین دقیقاً برابر است با تعداد  $k$ -رنگ آمیزی‌های  $G-e$  که در آن‌ها  $u$  و  $v$  دارای رنگ‌های یکسانی هستند. از طرفی، چون هر  $k$ -رنگ آمیزی از  $G-e$  که رنگ‌های متفاوتی را به  $u$  و  $v$  اختصاص دهد، یک  $k$ -رنگ آمیزی از  $G$  نیز هست و بالعکس، بنابراین  $\pi_k(G)$  تعداد  $k$ -رنگ آمیزی‌هایی از  $G-e$  است که در آن‌ها، رنگ‌های متفاوتی به  $u$  و  $v$  اختصاص یافته‌اند. از اینجا نتیجه می‌شود که:  $\pi_k(G-e) = \pi_k(G) + \pi_k(G.e)$ .  $\square$



شکل ۸-۸

**نتیجهٔ ۶-۸** به‌ازای هر گراف  $G$ ،  $\pi_k(G)$  یک چند جمله‌ای روی  $k$  از درجهٔ  $v$ ، با ضرایب صحیح می‌باشد که با جمله  $k^n$  شروع شده و جمله ثابت آن برابر صفر است. علاوه‌براین، ضرایب  $\pi_k(G)$  یک درمیان مثبت و منفی می‌باشند.

**اثبات** از استقراء روی  $\varepsilon$  استفاده می‌کنیم. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود، می‌توانیم  $G$  را ساده در نظر بگیریم. اگر  $\varepsilon=0$ ، همان طوری که قبلاً گفته شد داریم:  $\pi_k(G)=k^v$  که مسلماً در شرایط اولیه صدق می‌کند. اینک فرض می‌کنیم که نتیجه فوق به‌ازای تمامی گراف‌های با کمتر از  $m$  یال برقرار باشد و  $G$  را یک گراف با  $m \geq 1$  یال در نظر می‌گیریم. اگر  $e$  یالی از  $G$  باشد، آنگاه  $G-e$  و  $G.e$  هر دو  $m-1$  یال دارند و با استفاده از فرض استقراء نتیجه می‌شود که اعداد صحیح نامنفی  $a_1, a_2, \dots, a_{v-1}$

و  $b_1, b_2, \dots, b_{v-2}$  وجود دارند به طوری که:

$$\pi_k(G-e) = \sum_{i=1}^{v-1} (-1)^{v-i} a_i k^i + k^v$$

9

$$\pi_k(G.e) = \sum_{i=1}^{v-2} (-1)^{v-i-1} b_i k^i + k^{v-1}$$

بنابر قضیه ۶-۸ داریم:

$$\pi_k(G) = \pi_k(G-e) - \pi_k(G.e)$$

$$= \sum_{i=1}^{v-1} (-1)^{v-i} a_i k^i + k^v + \sum_{i=1}^{v-2} (-1)^{v-i-1} b_i k^i + k^{v-1}$$

پس با توجه به اصل استقراء نتیجه می‌شود که  $G$  هم در شرایط اولیه صدق می‌کند.  $\square$

با توجه به نتیجه ۶-۸ می‌توانیم  $\pi_k(G)$  را چند جمله‌ای رنگی  $G$  بنامیم.

نتیجه ۶-۸ روش مناسبی را برای محاسبه چند جمله‌ای رنگی یک گراف، به‌طور بازگشتی فراهم می‌کند.

به دو طریق می‌توان این روش را به کار گرفت:

(الف) با به کارگیری مکرر رابطه بازگشتی  $\pi_k(G) = \pi_k(G-e) - \pi_k(G.e)$  و در نهایت، نشان دادن

$\pi_k(G)$  به صورت یک ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های رنگی گراف‌های تهی، یا

(ب) با به کارگیری مکرر رابطه بازگشتی  $\pi_k(G-e) = \pi_k(G) + \pi_k(G.e)$  و در نهایت، نشان دادن

$\pi_k(G)$  به صورت یک ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های رنگی گراف‌های کامل.

روش (الف) بیشتر برای گراف‌هایی مناسب است که تعداد یال‌های کمی دارند، در حالیکه روش (ب) برای

گراف‌هایی که یال‌های زیادی دارند، به کار گرفته می‌شود. هر دو روش در شکل ۹-۸ نشان داده شده‌اند. (در

این شکل، چند جمله‌ای رنگی یک گراف، به‌طور نمادین توسط خود گراف بیان شده است).

(i)

$$\pi_k(G) = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \quad \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} = \left( \begin{array}{c} \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} \right)$$

$$= \left( \begin{array}{c} \circ \\ \circ \quad \circ \\ \circ \end{array} \right) - 3 \left( \begin{array}{c} \circ \\ \circ \quad \circ \\ \circ \end{array} \right) + 3 \left( \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \circ \end{array} \right) = k^3 - 3k^2 + 3k - k = k(k-1)^2$$

(ii)

$$\pi_k(G) = \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \square \\ \circ \quad \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \square \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \text{loose} \\ \circ \quad \circ \end{array} = \left( \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \square \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \text{loose} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \text{loose} \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \text{loose} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right)$$

$$= \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \square \\ \circ \quad \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \circ \\ \triangle \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} = k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) + k(k-1) = k(k-1)(k^2 - 2k + 3)$$

شکل ۹-۸. محاسبه بازگشتی  $\pi_k(G)$

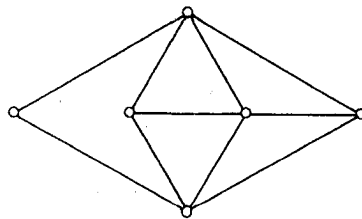
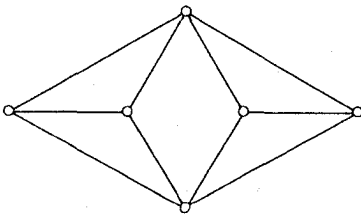
گاهی اوقات برای سهولت در محاسبه چندجمله‌ای‌های رنگی، می‌توان از تعدادی فرمول استفاده کرد که چندجمله‌ای گراف  $G$  را به چندجمله‌ای‌های زیرگراف‌های مختلف آن مرتبط می‌سازند (تمرین‌های ۸-۴-۵، الف، ۸-۴-۶ و ۸-۴-۷ را ملاحظه نمایید). با این حال تاکنون هیچ الگوریتم خوبی برای یافتن چندجمله‌ای رنگی یک گراف شناخته نشده است (این الگوریتم، مسلماً روش کارآمدی برای محاسبه عدد رنگی یک گراف نیز خواهد بود).

گرچه بسیاری از خواص چندجمله‌ای‌های رنگی شناخته شده‌اند، ولی تاکنون کسی کشف نکرده است که کدام چندجمله‌ای‌ها، رنگی هستند. رید<sup>۱</sup> (۱۹۶۸) حدس زده است که دنباله ضرایب هر چندجمله‌ای رنگی، باید ابتدا از لحاظ قدر مطلق صعود کرده، سپس نزول نماید-به عبارت دیگر، هیچ ضریبی نمی‌تواند در میان دو ضریب دیگر که از لحاظ قدر مطلق بزرگتر هستند، قرار گیرد. به هر حال، حتی اگر این شرط هم صحیح باشد، باز به همراه شرایط نتیجه ۸-۶ کافی نخواهند بود. به عنوان مثال، چندجمله‌ای  $3k_2 + 3k_3 - k_4$  در تمام این شرط‌ها صدق می‌کند، ولی باز هم چندجمله‌ای رنگی هیچ گرافی نیست (تمرین ۸-۴-۲ ب).

چندجمله‌ای‌های رنگی، در مطالعه گراف‌های مسطح، جایی که ریشه‌های آن‌ها نظم غیرمنتظره‌ای از خود نشان می‌دهند، توانسته‌اند کاربردهای موفقی داشته باشند [Tutte; 1970]. نتایج بیشتری پیرامون چندجمله‌ای‌های رنگی را می‌توانید در مقاله تحقیقی مفصل رید (۱۹۶۸) ملاحظه نمایید.

## تمرین‌ها

۸-۴-۱ چندجمله‌ای رنگی گراف‌های زیر را محاسبه کنید.



۸-۴-۲ الف) با استفاده از قضیه ۸-۶ نشان دهید که اگر  $G$  ساده باشد، آنگاه ضریب  $k^{v-1}$  در  $\pi_k(G)$  برابر با  $e - 1$  است.



ب) نتیجه بگیرید که هیچ گرافی نمی‌تواند دارای چند جمله‌ای رنگی  $k^3 - 3k^2 + 3k^2$  باشد.

۳-۴-۸ الف) نشان دهید که اگر  $G$  یک درخت باشد، در آن صورت  $\pi_k(G) = k(k-1)^{v-1}$ .

ب) نتیجه بگیرید که اگر  $G$  همبند باشد، آنگاه  $\pi_k(G) \leq k(k-1)^{v-1}$  و تساوی فقط در صورتی برقرار است که  $G$  درخت باشد.

۴-۴-۸ نشان دهید که اگر  $G$  یک دور با طول  $n$  باشد، آنگاه داریم:

$$\pi_k(G) = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)$$

۵-۴-۸ الف) نشان دهید که  $\pi_k(G \vee K_1) = k\pi_{k-1}(G)$ .

ب) با استفاده از قسمت (الف) و تمرین ۴-۴-۸ نشان دهید که اگر  $G$  یک چرخ با  $n$  پره باشد،

$$\pi_k(G) = k(k-2)^n + (-1)^n k(k-2)$$

۶-۴-۸ نشان دهید که اگر  $G_1, G_2, \dots, G_m$  مؤلفه‌های  $G$  باشند، آنگاه داریم:

$$\pi_k(G) = \pi_k(G_1)\pi_k(G_2)\dots\pi_k(G_m)$$

۷-۴-۸ نشان دهید که اگر  $G \cap H$  کامل باشد، آنگاه:

$$\pi_k(G \cup H)\pi_k(G \cap H) = \pi_k(G)\pi_k(H)$$

\*۸-۴-۸ نشان دهید که هیچ ریشه‌ای از  $\pi_k(G)$  نمی‌تواند بزرگتر از  $v$  باشد. (L. Lovász)

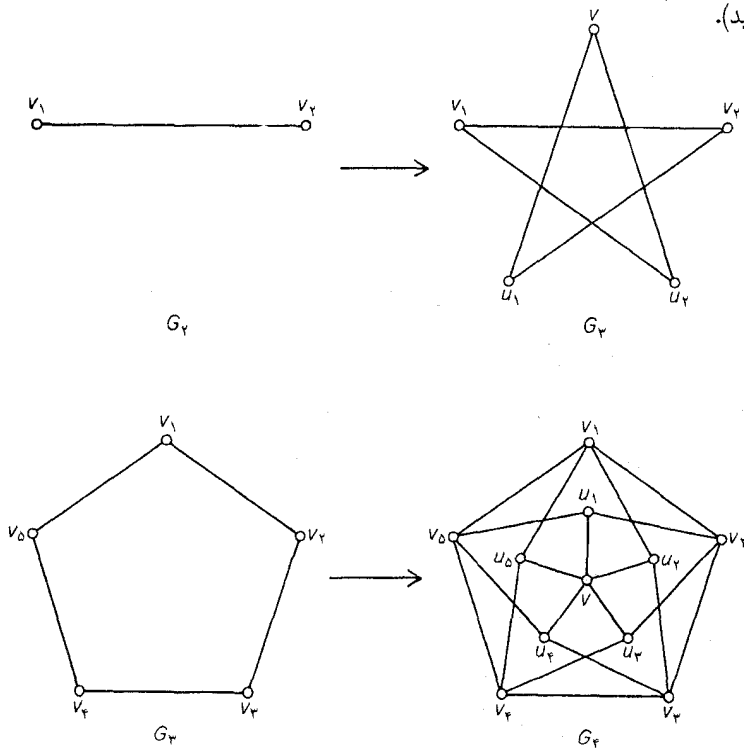
## ۵-۸ کمر و عدد رنگی

در هر رنگ آمیزی از یک گراف، رنگ‌هایی که به رأس‌های یک خوشه اختصاص داده می‌شوند، همگی باید متفاوت باشند. بنابراین گراف‌های شامل خوشه‌های بزرگ، عدد رنگی بالایی دارند. آنچه شگفت‌آور است، این است که گراف‌های بدون مثلثی وجود دارند که عدد رنگی آن‌ها می‌تواند تا هر اندازه دلخواه بزرگ باشد. یک روش ساخت بازگستی برای چنین گراف‌هایی نخستین بار توسط بلنچز دسکارتز<sup>۱</sup> (۱۹۵۴) ارائه شد. روش او در حقیقت گراف‌هایی می‌ساخت که دارای دوری با طول کمتر از شش نبودند. ما در اینجا به توضیح روش ساخت ساده‌تری می‌پردازیم که متعلق به مایشلسکی<sup>۲</sup> (۱۹۵۵) می‌باشد.

**قضیه ۷-۸** به ازای هر عدد صحیح مثبت  $k$ ، یک گراف  $k$ -رنگی وجود دارد که شامل هیچ مثلثی نیست.

**اثبات** به ازای  $k=2$  و  $k=1$ ، گراف‌های  $k_1$  و  $k_2$  دارای خاصیت مورد نظر هستند. در ادامه کار از استقراء

روی  $k$  کمک می‌گیریم. فرض کنید که یک گراف بدون مثلث  $G_k$ ، با عدد رنگی  $k \geq 2$  ساخته‌ایم. رأس‌های  $G_k$  را  $v_1, v_2, \dots, v_n$  می‌نامیم. گراف جدید  $G_{k+1}$  را از روی  $G_k$  به این طریق می‌سازیم:  $n+1$  رأس جدید  $u_1, u_2, \dots, u_n$  را اضافه می‌کنیم و سپس به ازای  $1 \leq i \leq n$ ،  $u_i$  را به همسایگان  $v_i$  و همچنین به  $v$  وصل می‌کنیم. به‌طور مثال، اگر  $G_2$  باشد،  $G_3$  برابر ۵-دور و  $G_4$  برابر گراف گروتز خواهد بود (شکل ۸-۱۰ را ملاحظه نمایید).



شکل ۸-۱۰. روش ساختاری مایشلسکی

مسئلاً گراف  $G_{k+1}$  شامل هیچ مثلثی نیست. زیرا مجموعه  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  یک مجموعه مستقل در  $G_{k+1}$  است و هیچ مثلثی نمی‌تواند شامل بیش از یک  $u_i$  باشد و اگر  $u_i v_j v_k u_i$  یک مثلث در  $G_{k+1}$  باشد، آنگاه  $v_i v_j v_k v_i$  نیز یک مثلث از  $G_k$  خواهد بود که با فرض استقرار در تناقض است.

اکنون نشان می‌دهیم که  $G_{k+1}$ ،  $(k+1)$ -رنگی است. نخست دقت کنید که  $G_{k+1}$ ،  $(k+1)$ -رنگ پذیر است. زیرا هر  $k$ -رنگ آمیزی از  $G_k$  می‌تواند به یک  $(k+1)$ -رنگ آمیزی از  $G_{k+1}$  گسترش یابد؛ بدین

صورت که به ازای  $1 \leq i \leq n$ ، هر  $u_i$  را به رنگ  $v_i$  رنگ آمیزی می‌کنیم و سپس یک رنگ جدید را به  $v$  اختصاص می‌دهیم. فقط باقی می‌ماند که نشان دهیم  $G_{k+1}$ ،  $k$ -رنگ پذیر نیست. فرض کنید که در صورت امکان، یک  $k$ -رنگ آمیزی در  $G_{k+1}$  وجود داشته باشد که بدون کاسته شدن از کلیت مسأله، در این رنگ آمیزی، رنگ  $k$  به  $v$  اختصاص یافته است. مسلماً هیچ یک از  $u_i$ ها نمی‌توانند به رنگ  $k$  باشند. اکنون هر رأس  $v_i$  ای که دارای رنگ  $k$  است، به رنگ  $u_i$  در می‌آوریم و در این صورت، یک  $(k-1)$ -رنگ آمیزی از گراف  $k$ -رنگی  $G_k$  به دست آمده است، که تناقض است. پس  $G_{k+1}$  حتماً  $(k+1)$ -رنگی است و بنابراین استقراء، درستی قضیه نتیجه می‌شود.  $\square$

روش ساختاری فوق، به ازای هر  $k \geq 2$ ، با شروع از  $K_2$ ، یک گراف بدون مثلث  $k$ -رنگی با  $3 \times 2^{k-2} - 1$  رأس به دست می‌دهد.

قبلاً خاطر نشان کردیم که گراف‌هایی با کمر شش و عدد رنگی دلخواه وجود دارند. اردیش (۱۹۶۱) با استفاده از روش احتمالی نشان داد که به ازای هر دو عدد صحیح  $k \geq 2$  و  $l \geq 2$  یک گراف  $k$ -رنگی با کمر  $l$  وجود دارد. متأسفانه توضیح چگونگی این روش احتمالی، به سادگی روشی که در بخش ۲-۷ ارائه شد، نیست و بنابراین از ذکر آن صرف نظر می‌کنیم. یک اثبات ساختاری برای نتیجهٔ اردیش توسط لاواژ (۱۹۶۸) ارائه شده است.

## تمرین‌ها

۱-۵-۸ فرض کنید که  $G_2, G_3, \dots$ ، گراف‌هایی باشند که با استفاده از روش ساختاری مایشلسکی و با شروع از  $G_2 = K_2$  به دست آمده‌اند. نشان دهید که  $G_k$ ،  $k$ -بحرانی است.

۲-۵-۸ (الف) فرض کنید که  $G$  یک گراف  $k$ -رنگی ( $k \geq 2$ ) با کمر حداقل شش است. گراف جدید  $H$  را به این صورت می‌سازیم:  $\binom{k\nu}{\nu}$  نسخهٔ مجزا از  $G$  و مجموعهٔ  $K$  با  $k\nu$  رأس جدید را در نظر می‌گیریم و یک تناظر یک به یک بین نسخه‌های  $G$  و زیرمجموعه‌های  $\nu$ -عضوی  $K$  برقرار می‌کنیم. سپس رأس‌های هر نسخه از  $G$  را با یک تطابق به اعضای زیرمجموعهٔ  $\nu$ -عضوی متناظر با آن وصل می‌کنیم. نشان دهید که عدد رنگی  $H$ ، حداقل  $k+1$  و کمر آن حداقل شش است.

(ب) نتیجه بگیرید که به ازای هر  $k \geq 2$ ، یک گراف  $k$ -رنگی با کمر شش وجود دارد.

## کاربردها

### ۸-۶ یک مسأله ذخیره سازی

کارخانه‌ای،  $n$  ماده شیمیایی  $C_1, C_2, \dots, C_n$  تولید می‌کند. برخی از این مواد شیمیایی نسبت به هم ناسازگارند و اگر در تماس با یکدیگر قرار گیرند، ایجاد انفجار خواهند کرد. این کارخانه به خاطر رعایت امنیت در نظر دارد که محیط کارخانه را به چند بخش تقسیم کند و مواد ناسازگار را در بخش‌های مختلف ذخیره نماید. در این صورت محیط کارخانه باید حداقل به چند بخش تقسیم شود؟

برای حل مسأله فوق یک گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  رسم می‌کنیم که در آن، رأس  $v_i$  به  $v_j$  متصل است اگر و تنها اگر مواد شیمیایی  $C_i$  و  $C_j$  ناسازگار باشند. در این صورت واضح است که، حداقل تعداد بخش‌های مورد نیاز برابر با عدد رنگی  $G$  خواهد بود.

حل بسیاری از مسایل عملی (که مسأله ذخیره سازی یکی از نمونه‌های آن است). در گرو یافتن عدد رنگی یک گراف است. متأسفانه تاکنون هیچ الگوریتم خوبی برای معین کردن عدد رنگی شناخته نشده است. در اینجا به بررسی یک فرآیند سیستماتیک که طبیعت «شمارشی» دارد، می‌پردازیم. البته این روش برای گراف‌های بزرگ چندان کارآمد نیست.

از آن جایی که عدد رنگی یک گراف، برابر با حداقل تعداد مجموعه‌های مستقلی است که رأس‌های گراف را می‌توان به آن‌ها افراز کرد، بنابراین برای شروع، روشی را برای فهرست کردن تمام مجموعه‌های مستقل یک گراف توضیح می‌دهیم. چون هر مجموعه مستقل، زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه مستقل ماکزیمال است، کافی است که تمام مجموعه‌های مستقل ماکزیمال را مشخص نماییم. فرآیند ما نخست، مکمل مجموعه‌های مستقل یعنی پوشش‌های مینیمال را معین می‌کند.

توجه داشته باشید که زیرمجموعه  $K$  از  $V$  یک پوشش مینیمال از  $G$  است اگر و تنها اگر، به‌ازای هر رأس  $v$ ، یا  $v$  متعلق به  $K$  باشد، یا تمامی همسایه‌های  $v$  در  $K$  باشند (هر دو حالت به‌طور هم‌زمان رخ نمی‌دهند). این مطلب فرآیند زیر را برای یافتن پوشش‌های مینیمال در اختیار می‌گذارد:

(۲-۸) "به‌ازای هر رأس  $v$ ، یا  $v$  یا تمام همسایه‌های  $v$  را انتخاب کن."

برای پیاده‌سازی مؤثر این فرآیند، از یک ابزار جبری استفاده می‌کنیم. ابتدا دستور "رأس  $v$  را انتخاب کن"

را به صورت ساده با نماد  $v$  نمایش می‌دهیم. سپس به‌ازای دو دستور  $X$  و  $Y$ ، دستور "یا  $X$  یا  $Y$ " را با  $X+Y$  (جمع منطقی) و دستور "هم  $X$  و هم  $Y$ " را با  $XY$  (ضرب منطقی) نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال، دستور "یا  $u$  و  $v$ ، یا  $w$  و  $v$  را انتخاب کن" را به صورت  $uv+vw$  می‌نویسیم. رفتار جمع و ضرب منطقی، ظاهراً همانند  $\cap$  و  $\cup$  در مجموعه‌هاست و آن‌دسته از قوانین جبری که در مورد  $\cup$  و  $\cap$  برقرار است، در مورد این دو عمل نیز صدق می‌کنند (تمرین ۸-۱۶ را ملاحظه نمایید)، غالباً با استفاده از این قوانین می‌توانیم عبارت‌های منطقی را ساده کنیم؛ در نتیجه داریم:

$$(uv+vw)(u+vx) = uvu + uvvx + vwu + vwx$$

$$= uv + uvx + vwu + vwx$$

$$= uv + vwx$$

اکنون گراف  $G$  شکل ۸-۱۱ را در نظر بگیرید. به‌کارگیری دستور ۸-۲ برای یافتن پوشش مینیمال در  $G$ ،

به عبارت زیر منتهی می‌شود:

$$(a+bd)(b+aceg)(c+bdef)(d+aceg)(e+bcdf)(f+ceg)(g+bcdf) \quad (۳-۸)$$

پس از ساده کردن عبارت فوق، به این عبارت می‌رسیم: (تمرین ۸-۲۶)

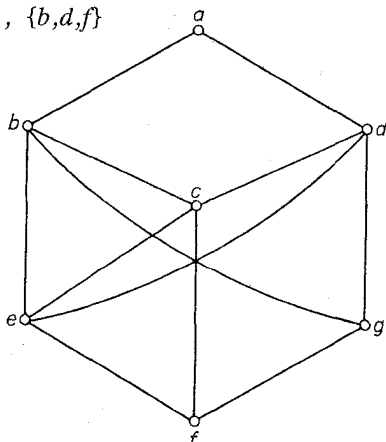
$$aceg + bcdeg + bdef + bcdf$$

به عبارت دیگر، "یا  $a, e, c, b$  یا  $g, e, d, c, b$  یا  $f, e, d, b$  یا  $d, c, b$  را انتخاب کن". بنابراین مجموعه‌های

$\{a, c, e, g\}$ ،  $\{b, c, d, e, g\}$ ،  $\{b, d, e, f\}$  و  $\{b, c, d, f\}$  پوشش‌های مینیمال  $G$  هستند. پس از مکمل‌گیری،

فهرست تمام مجموعه‌های مستقل ماکزیمال  $G$  را به‌دست آورده‌ایم. یعنی:

$\{a, e, g\}$ ،  $\{a, c, g\}$ ،  $\{a, f\}$ ،  $\{b, d, f\}$



شکل ۸-۱۱

حال اجازه بدهید که به مسأله تعیین عدد رنگی گراف برگردیم.  $k$ -رنگ آمیزی  $(V_1, V_2, \dots, V_k)$  از  $G$  را کانونی می نامیم اگر  $V_1$  یک مجموعه مستقل ماکزیمال از  $G$ ،  $V_2$  یک مجموعه مستقل ماکزیمال از  $G - V_1$ ،  $V_3$  یک مجموعه مستقل ماکزیمال از  $G - (V_1 \cup V_2)$  و... باشد. به راحتی می توان دید که اگر  $G$ ،  $k$ -رنگ پذیر باشد، آنگاه یک  $k$ -رنگ آمیزی کانونی از  $G$  وجود خواهد داشت (تمرین ۸-۳۶). با به کارگیری مکرر روش بالا برای یافتن مجموعه ای مستقل ماکزیمال، می توان تمامی رنگ آمیزی های کانونی  $G$  را پیدا کرد. حداقل تعداد رنگ هایی که در این گونه رنگ آمیزی ها استفاده می شود، عدد رنگی  $G$  خواهد بود. در مورد گراف  $G$  شکل ۸-۱۱،  $\chi = 3$  و رنگ آمیزی کانونی متناظر،  $(\{c\}, \{a, e, g\}, \{b, d, f\})$  می باشد.

کریستفایدز<sup>۱</sup> (۱۹۷۱) توسعه هایی روی این فرآیند به عمل آورده است.

### تمرین ها

- ۸-۱۶ صحّت قوانین شرکت پذیری، جابجایی، توزیع پذیری و جذب را برای اعمال جمع و ضرب منطقی بررسی نمایید.
- ۸-۲۶ عبارت (۸-۳) را به  $aceg + bcdeg + bdef + bcdf$  ساده کنید.
- ۸-۳۶ نشان دهید که اگر  $G$ ،  $k$ -رنگ پذیر رأسی باشد، آنگاه  $G$  دارای یک  $k$ -رنگ آمیزی رأسی کانونی خواهد بود.

## مراجع

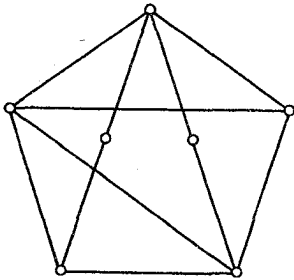
- Birkhoff, G. D. (1912). A determinant formula for the number of ways of coloring a map. *Ann. of Math.*, 14, 42–46
- Brooks, R. L. (1941). On coloring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37, 194–97
- Christofides, N. (1971). An algorithm for the chromatic number of a graph. *The Computer Journal*, 14, 38–39
- Descartes, B. (1954). Solution to advanced problem no. 4526. *Amer. Math. Monthly* 61, 352
- Dirac, G. A. (1952). A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London Math. Soc.*, 27, 85–92
- Dirac, G. A. (1953). The structure of  $k$ -chromatic graphs. *Fund. Math.*, 40, 42–55
- Erdős, P. (1961). Graph theory and probability II. *Canad. J. Math.*, 13, 346–52
- Grötzsch, H. (1958). Ein Dreifarbensatz für dreiecksfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe*, 8, 109–19
- Hadwiger, H. (1943) Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljahr. Naturforsch. Gesellesch. Zürich*, 88, 133–42
- Hajós, G. (1961). Über eine Konstruktion nicht  $n$ -färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin-Lutter-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe.*, 10, 116–17
- Lovász, L. (1968). On chromatic number of finite set systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 19, 59–67
- Lovász, L. (1975). Three short proofs in graph theory. *J. Combinatorial Theory B*, 19, 111–13
- Mycielski, J. (1955). Sur le coloriage des graphs. *Colloq. Math.*, 3, 161–62
- Read, R. C. (1968). An introduction to chromatic polynomials. *J. Combinatorial Theory*, 4, 52–71
- Tutte, W. T. (1970). On chromatic polynomials and the golden ratio. *J. Combinatorial Theory*, 9, 289–96
- Wagner, K. (1964). Beweis einer Abschwächung der Hadwiger-Vermutung. *Math. Ann.*, 153, 139–41

# فصل ۹

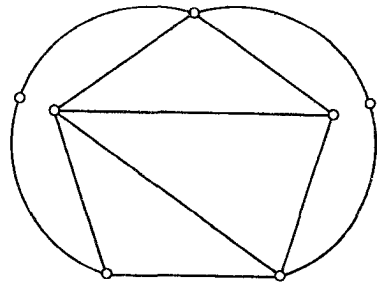
## گراف‌های مسطح

### ۹-۱ گراف‌های مسطح و مسطح‌شده

یک گراف را قابل نشانیدن در صفحه یا مسطح می‌نامیم، اگر بتوان آنرا به طریقه‌ای رسم کرد که هر یال آن، تنها در رأس‌های دو سر خود با یال‌های دیگر برخورد داشته باشد. این طریقه رسم گراف مسطح  $G$ ، یک نشانیدن مسطح از  $G$  نامیده می‌شود. یک نشانیدن مسطح  $\bar{G}$  از  $G$  را می‌توان به‌عنوان گرافی یکریخت با  $G$  در نظر گرفت، مجموعه رأس‌های  $\bar{G}$ ، مجموعه نقاطی است که نشاندهنده رأس‌های  $G$  می‌باشند، مجموعه یال‌های  $\bar{G}$ ، مجموعه خط‌هایی است که نشاندهنده یال‌های  $G$  هستند، و هر رأس  $\bar{G}$  بر روی تمام یال‌هایی از  $\bar{G}$  که شامل آن رأسند، واقع است. با این تفصیلات گاهی اوقات به یک نشانیدن مسطح به‌عنوان یک گراف مسطح شده اشاره می‌کنیم. شکل ۹-۱ب یک نشانیدن مسطح از گراف مسطح شکل ۹-۱الف را نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

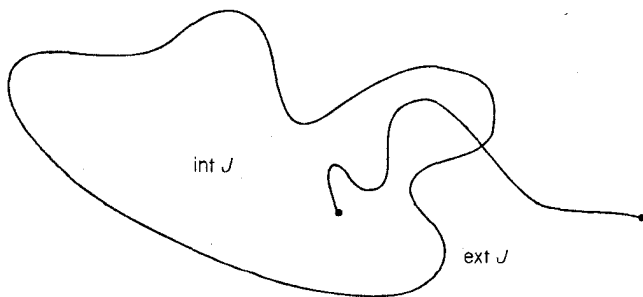
شکل ۹-۱. (الف) گراف مسطح  $G$  (ب) یک نشانیدن مسطح از  $G$



با توجه به تعاریف فوق روشن است که مطالعه گراف‌های مسطح، مستلزم مطالعه توپولوژی صفحه می‌باشد. با این حال ما تأکید بر روی موضوعات توپولوژیکی نخواهیم داشت و به اتخاذ یک نقطه نظر ساده دربارهٔ آن‌ها بسنده می‌کنیم. در هر صورت قصد ما این است که از هدف اصلی، یعنی بررسی مفاهیم ترکیباتی در نظریه گراف‌ها دور نشویم.

مهمترین نتایج توپولوژیکی که به مطالعه گراف‌های مسطح مربوط می‌شوند آن‌هایی هستند که با خم‌های ژوردان<sup>۱</sup> سروکار دارند. (خم ژوردان، یک خم پیوسته خود نامتقاطع است که ابتدا و انتهای آن بر روی هم منطبق است). اجتماع یال‌های یک دور در گراف مسطح، یک خم ژوردان را تشکیل می‌دهند و از همین جاست که خواص خم‌های ژوردان در نظریه گراف‌های مسطح به روی صحنه می‌آیند. در ادامه به یادآوری یک قضیهٔ مشهور دربارهٔ خم‌های ژوردان می‌پردازیم و سپس با استفاده از آن ثابت می‌کنیم که  $K_n$  نامسطح است.

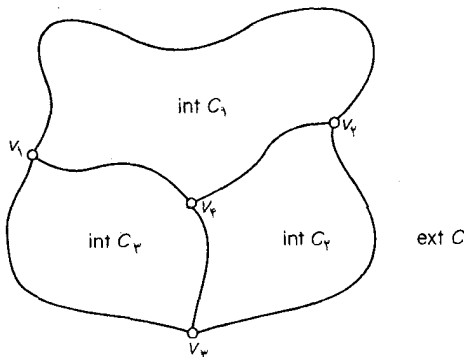
فرض کنید  $J$  یک خم ژوردان در صفحه باشد. در این صورت بقیهٔ صفحه به دو مجموعهٔ باز مجزا تقسیم می‌شود که درون و برون  $J$  نامیده می‌شوند. درون  $J$  را با  $int J$  و برون  $J$  را با  $ext J$  نمایش می‌دهیم و بستر آن‌ها را به ترتیب با  $Int J$  و  $Ext J$  نشان می‌دهیم. به وضوح داریم:  $Ext J \cap Int J = J$ . قضیهٔ خم ژوردان می‌گوید هر خطی که نقطه‌ای در  $int J$  را به نقطه‌ای در  $ext J$  وصل کند، حتماً در یک نقطه با  $J$  برخورد می‌کند (شکل ۲-۹ را ملاحظه نمایید). گرچه این قضیه از لحاظ شهودی کاملاً واضح است، ولی اثبات صوری آن بسیار مشکل می‌باشد.



شکل ۲-۹

قضیه ۹-۱  $K_8$  نامسطح است.

**اثبات** برهان خلف. فرض کنید که در صورت امکان،  $G$  یک گراف مسطح شده متناظر با  $K_8$  باشد. رأس‌های  $G$  را با  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  و  $v_6$  نمایش می‌دهیم. چون  $G$  کامل است، پس هر دو رأس آن به وسیله یک یال به هم متصل‌اند. دور  $C = v_1 v_2 v_3 v_4$  یک خم ژوردان در صفحه است و نقطه  $v_5$  باید یا در  $int C$  و یا  $ext C$  قرار گیرد. فرض کنیم که  $v_5 \in int C$ . (حالت  $v_5 \in ext C$  را نیز می‌توان به طور مشابه بررسی نمود). در این صورت یال‌های  $v_5 v_2, v_5 v_3, v_5 v_4$  را به سه ناحیه  $int C_1, int C_2$  و  $int C_3$  تقسیم می‌کنند به طوری که  $C_1 = v_1 v_2 v_3 v_4$ ،  $C_2 = v_1 v_2 v_5 v_4$  و  $C_3 = v_1 v_3 v_5 v_4$  (شکل ۹-۳ را ملاحظه کنید).



شکل ۹-۳

حال  $v_5$  باید در یکی از چهار ناحیه  $int C_1, int C_2, int C_3, ext C$  قرار بگیرد. اگر  $v_5 \in ext C$  و با توجه به اینکه  $v_5 \in int C$ ، از قضیهٔ خم ژوردان نتیجه می‌شود که یال  $v_5 v_6$  باید در یک نقطه با  $C$  برخورد داشته باشد. ولی این مطلب با فرض مسطح بودن  $G$  در تناقض است. حالت‌های  $v_5 \in int C_i$  نیز به‌ازای مقادیر  $i=1, 2, 3$ ، به نتیجهٔ مشابهی منجر می‌شوند.  $\square$

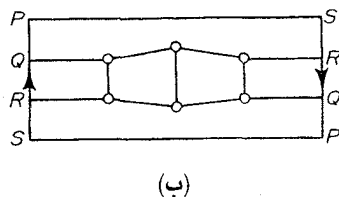
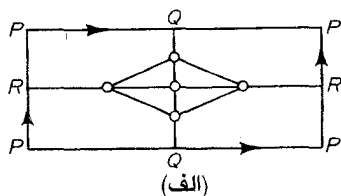
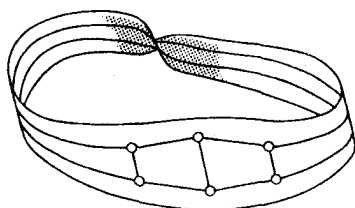
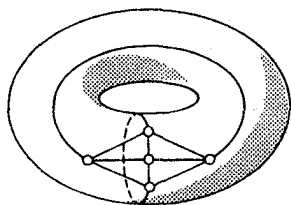
با استدلالی مشابه می‌توان اثبات کرد که  $K_{3,3}$  نیز نامسطح است (تمرین ۹-۱). از سوی دیگر، در

بخش ۹-۵ خواهیم دید که هر گراف نامسطح، شامل مشتقی از  $K_8$  یا  $K_{3,3}$  است.

مفهوم نشانیدن مسطح به سایر رویه‌ها\* نیز گسترش یافته‌است. می‌گوئیم گراف  $G$  بر روی رویهٔ  $S$  قابل نشانیدن است، هرگاه بتوان آنرا روی  $S$  به طریقی رسم کرد که یال‌های آن، تنها در دوسر خود متقاطع

\* رویه، یک خمینهٔ دوبعدی است. رویه‌های بسته به دو رده تقسیم می‌شوند: جهت‌پذیر و جهت‌ناپذیر. کره و چنبره مثال‌هایی از رویه‌های جهت‌پذیر می‌باشند، در صورتی‌که صفحهٔ تصویری و نوار مویوس جهت‌ناپذیر هستند. برای آگاهی از جزئیات نشانیدن گراف‌ها بر روی رویه‌ها به [Fréchet and Fan; 1967] مراجعه‌نمائید.

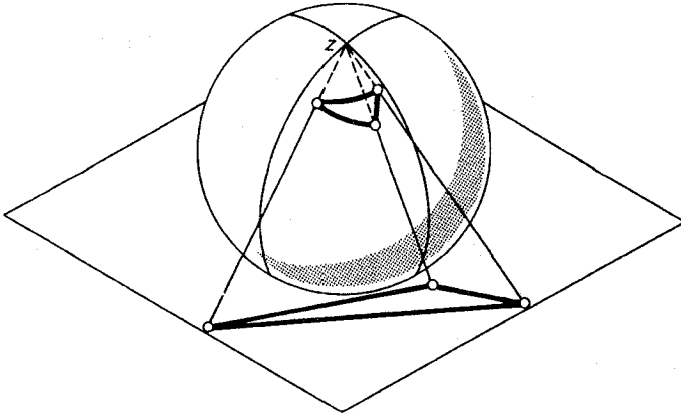
باشند. این طریقہ رسم (در صورت وجود) یک نشانندن از  $G$  روی  $S$  نامیده می‌شود. شکل ۹-۴ الف یک نشانندن از  $K_5$  روی چنبره و شکل ۹-۴ ب یک نشانندن از  $K_{3,3}$  روی نوار موبیوس را نشان می‌دهد. چنبره به صورت یک مستطیل نشان داده شده‌است که ضلع‌های مقابل آن بر روی هم قرار می‌گیرند و نوار موبیوس نیز به صورت مستطیلی نشان داده شده‌است که دو سر آن پس از یک نیم‌پیچش بر روی هم گذاشته می‌شوند.



شکل ۹-۴. (الف) یک نشانندن از  $K_5$  روی چنبره (ب) یک نشانندن از  $K_{3,3}$  روی نوار موبیوس

همان‌طور که قبلاً دیدیم، همهٔ گراف‌ها را نمی‌توان بر روی صفحه نشانند. این مطلب در مورد سایر رویه‌ها نیز برقرار است. می‌توان نشان داد که به‌ازای هر رویهٔ  $S$ ، گراف‌هایی وجود دارند که قابل نشانندن بر روی  $S$  نیستند (به‌طور مثال [Fréchet and Fan; 1967] را ملاحظه نمایید). با وجود این، هر گرافی را می‌توان در فضای سه بعدی  $\mathbb{R}^3$  نشانند (تمرین ۹-۱-۳).

گراف‌های مسطح و گراف‌های قابل نشانندن روی کره، یکسان و دقیقاً یکی هستند. برای نشان دادن این مطلب از نگاشتی معروف به تصویر استریوگرافیک استفاده می‌کنیم. فرض کنید کره  $S$  بر روی صفحه  $P$  قرار گرفته‌است. نقطه‌ای از  $S$  را که به‌طور قطری مقابل نقطه تماس  $S$  و  $P$  قرار دارد،  $z$  می‌نامیم. نگاشت  $\pi: S \setminus \{z\} \rightarrow P$  را به این صورت تعریف می‌کنیم:  $\pi(s) = p$  اگر و تنها اگر  $s$  و  $p$  هم‌راستا باشند و این نگاشت، تصویر استریوگرافیک از نقطه  $z$  نامیده می‌شود و در شکل ۹-۵ نشان داده شده‌است.



شکل ۹-۵. تصویر استریوگرافیک

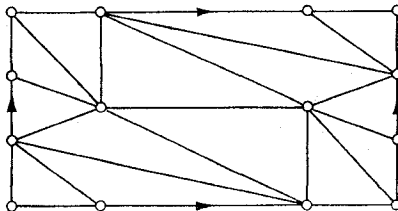
**قضیه ۹-۲** گراف  $G$  قابل نشانیدن در صفحه است اگر و تنها اگر قابل نشانیدن روی کره باشد.

**اثبات** فرض کنید که  $G$  دارای یک نشاندن  $\bar{G}$  روی کره است. نقطه‌ای مانند  $z$  از کره را که در  $\bar{G}$  نیست، انتخاب کنید. در این صورت تصویر  $G$  تحت نگاشت تصویر استریوگرافیک از نقطه  $z$ ، یک نشاندن از  $G$  در صفحه است. عکس این مطلب نیز به‌طور مشابه اثبات می‌شود. □

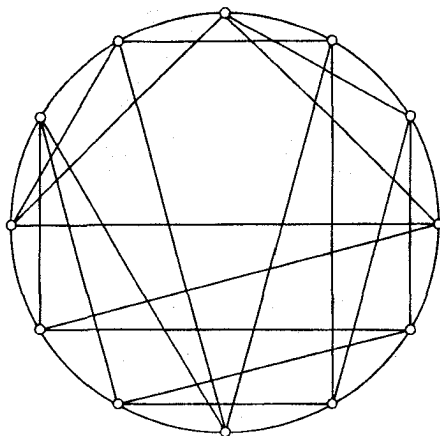
در بسیاری موارد، در نظر گرفتن گراف مسطح نشانده شده بر روی کره می‌تواند سودمند باشد. یکی از این موارد را طی اثبات قضیه ۹-۳ در فصل بعد مشاهده خواهید نمود.

### تمرین‌ها

- ۹-۱-۱ نشان دهید که  $K_{3,3}$  نامسطح است.
- ۹-۱-۲ الف) نشان دهید که به‌ازای هر یال  $e$  از  $K_8$ ،  $K_8 - e$  مسطح است.  
ب) نشان دهید که به‌ازای هر یال  $e$  از  $K_{3,3}$ ،  $K_{3,3} - e$  مسطح است.
- ۹-۱-۳ نشان دهید که همه گراف‌ها در  $\mathcal{P}^3$  قابل نشانیدن هستند.
- ۹-۱-۴ نشان دهید که شکل زیر، یک نشاندن از  $K_7$  بر روی چنبره است.

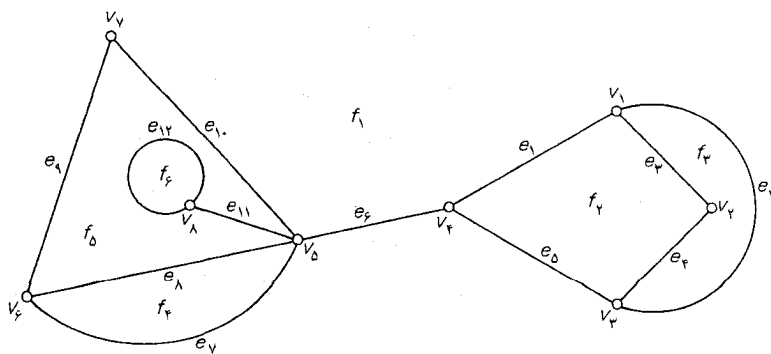


۵-۱-۹ یک نشانندن مسطح از گراف زیر بیابید که در آن هر یال یک خط مستقیم باشد.  
(فری<sup>۱</sup> در سال ۱۹۴۸ نشان داد که هر گراف مسطح دارای چنین نشانندی است).



## ۲-۹ گراف‌های دوگان

گراف مسطح شده  $G$ ، صفحه را به تعدادی ناحیه همبند افزایش می‌کند که بستار این ناحیه‌ها، وجه‌های  $G$  نامیده می‌شوند. شکل ۶-۹ یک گراف مسطح شده با شش وجه  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$  را نشان می‌دهد. مفهوم وجه برای نشانندن گراف‌ها در سایر رویه‌ها نیز به کار می‌رود. مجموعهٔ وجوه و تعداد وجه‌های گراف مسطح شده  $G$  را به ترتیب با  $F(G)$  و  $\phi(G)$  نمایش می‌دهیم.



شکل ۶-۹. یک گراف مسطح شده با شش وجه

هر گراف مسطح شده دقیقاً یک وجه بی‌کران دارد که وجه بیرونی نامیده می‌شود. در گراف مسطح شده شکل ۹-۶،  $f_1$  وجه بیرونی است.

**قضیه ۹-۳** فرض کنید که  $v$  یک رأس از گراف مسطح  $G$  باشد. در این صورت  $G$  را می‌توان به نحوی در صفحه نشانده که  $v$  روی وجه بیرونی نشانده قرار گیرد.

**اثبات** فرض کنید  $\bar{G}$  یک نشانده از گراف  $G$  بر روی کره باشد. طبق قضیه ۹-۲، چنین نشانده‌ای حتماً وجود دارد. فرض کنید  $z$  نقطه‌ای از یک وجه شامل  $v$  و  $\pi(\bar{G})$  تصویر  $\bar{G}$ ، تحت نگاشت تصویر استریوگرافیک از نقطه  $z$  باشد. به روشنی،  $\pi(\bar{G})$  یک نشانده مسطح از  $G$ ، با ویژگی مورد نظر است. □

مرز وجه  $f$  از گراف مسطح شده  $G$  را با  $b(f)$  نمایش می‌دهیم. اگر  $G$ ، همبند باشد،  $b(f)$  را می‌توان به عنوان یک گشت بسته در نظر گرفت که از هر یال برشی  $G$ ، دو بار عبور کند. اگر  $b(f)$  دارای یال برشی نباشد، در آن صورت  $b(f)$  یک دور از  $G$  خواهد بود. به عنوان مثال، در گراف مسطح شده شکل ۹-۶ داریم:

$$b(f_1) = v_1 e_4 v_2 e_3 v_3 e_2 v_4 e_1 v_1$$

و

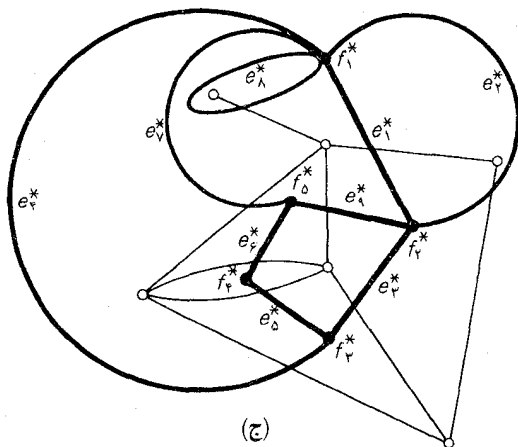
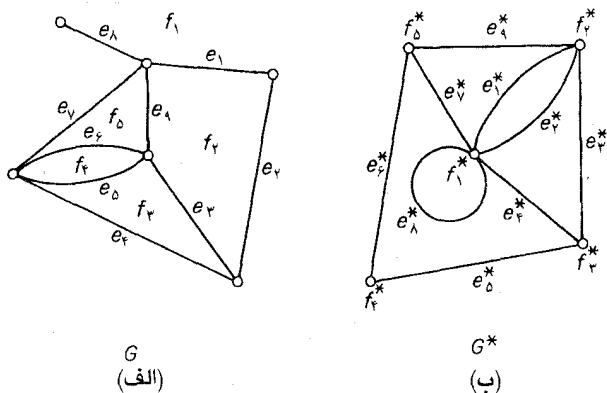
$$b(f_5) = v_4 e_{11} v_8 e_{12} v_7 e_{13} v_6 e_{14} v_5 e_{15} v_4$$

می‌گوئیم وجه  $f$  بر روی رأس‌ها و یال‌های مرز خود واقع است. اگر  $e$  یک یال برشی از گراف مسطح شده باشد، تنها یک وجه بر روی  $e$  واقع خواهد بود، در غیر این صورت دو وجه بر روی  $e$  واقعند. می‌گوئیم هر یال، دو وجه بر خود را جدا می‌کند. درجهٔ وجه  $f$  که آنرا با  $d_G(f)$  نمایش می‌دهیم، برابر تعداد یال‌هایی است که وجه  $f$  بر روی آن‌ها واقع است (یعنی تعداد یال‌ها در  $b(f)$ ). در این تعداد، یال‌های برشی دوبار شمرده می‌شوند. در

شکل ۹-۶،  $f_1$  بر روی رأس‌های  $v_1, v_2, v_3, v_4$  و همچنین بر روی یال‌های  $e_1, e_2, e_3, e_4$  واقع شده و  $f_5$  بر روی رأس‌های  $v_5, v_6, v_7, v_8$  و همچنین بر روی یال‌های  $e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}$  واقع شده است.

$d(f_1) = 4$  و  $d(f_5) = 6$  قرار دارد؛  $f_1$  را از  $f_2$  و  $f_3$  و  $f_4$  جدا می‌کند؛ و بالاخره داریم:  $d(f_1) = 4$  و  $d(f_5) = 6$ .

به‌ازای هر گراف  $G$ ، گراف دیگر  $G^*$  را می‌توان به این صورت تعریف نمود: متناظر با هر وجه  $f$  از  $G$ ، یک رأس  $f^*$  از  $G^*$  و متناظر با هر یال  $e$  از  $G$ ، یک یال  $e^*$  از  $G^*$  وجود دارد و دو رأس  $f^*$  و  $g^*$  با یک یال  $e^*$  از  $G^*$  به یکدیگر وصل می‌شوند، اگر و تنها اگر وجه‌های متناظر  $f$  و  $g$  توسط یال  $e$  در  $G$  جدا شده باشند. گراف  $G^*$  دوگان  $G$  نامیده می‌شود. یک گراف مسطح شده و دوگان آن در شکل‌های ۹-۷ الف و ۹-۷ ب نشان داده شده است.



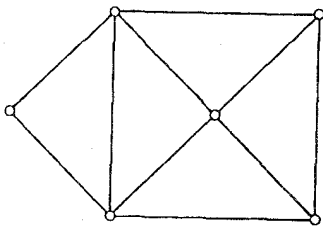
شکل ۹-۷. یک گراف مسطح‌شده و دوگان آن

به راحتی می‌توان دید که دوگان  $G^*$  از گراف مسطح‌شده  $G$ ، خود نیز مسطح است. در واقع یک روش طبیعی برای نشان دادن  $G^*$  در صفحه وجود دارد. هر رأس  $f^*$  را در وجه متناظر  $f$  از  $G$  قرار می‌دهیم و سپس هر یال  $e^*$  را به نحوی رسم می‌کنیم که از یال متناظر  $e$  از  $G$  دقیقاً یکبار بگذرد (و هیچ یال دیگر  $G$  را قطع نکند). این فرآیند در شکل ۹-۷ نشان داده شده است. در این شکل، گراف دوگان با نقطه‌ها و خطوط ضخیم مشخص شده است.

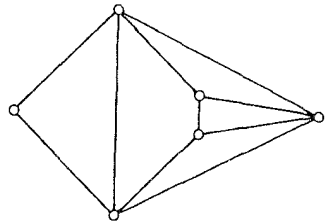
از لحاظ شهودی کاملاً واضح است که رسم دوگان به صورت یک گراف مسطح‌شده، به روش مذکور همیشه امکان پذیر است ولی ما این مطلب را اثبات نخواهیم کرد. توجه داشته باشید که اگر  $e$  یک طوقه از  $G$  باشد، آنگاه  $e^*$  یک یال برشی  $G^*$  خواهد بود و برعکس.

گرچه گراف‌های دوگان را به صورت مجرد تعریف کردیم، ولی گاهی اوقات مناسب‌تر است که دوگان  $G^*$  از گراف مسطح‌شده  $G$  را به‌عنوان یک گراف مسطح‌شده در نظر بگیریم (که به طریقه بالا نشانده شده است). در این صورت خود  $G^*$  نیز دارای دوگان  $G^{**}$  خواهد بود و به راحتی می‌توان اثبات کرد که اگر  $G$  همبند باشد، رابطه  $G^{**} \cong G$  برقرار است (تمرین ۹-۲۴). با یک نگاه به شکل ۹-۷ ج دلیل این امر روشن خواهد شد.

توجه به این نکته ضروری است که گراف‌های مسطح‌شده یکرخت می‌توانند دوگان‌های غیر یکرخت داشته باشند. به‌طور مثال، گراف‌های مسطح‌شده شکل ۹-۸ یکرختند ولی دوگان‌های آن‌ها یکرخت نیستند - گراف مسطح‌شده شکل ۹-۸ الف دارای وجهی از درجه پنج است در صورتی‌که گراف مسطح‌شده شکل ۹-۸ ب دارای چنین وجهی نیست. بنابراین تصور یک دوگان، فقط برای گراف‌های مسطح‌شده معنی دار است و نمی‌توان آنرا در حالت کلی به گراف‌های مسطح توسعه داد.



(الف)



(ب)

شکل ۹-۸. گراف‌های مسطح‌شده یکرخت با دوگان‌های غیر یکرخت

روابط زیر مستقیماً از تعریف  $G^*$  نتیجه می‌شوند:

$$\nu(G^*) = \phi(G)$$

$$\varepsilon(G^*) = \varepsilon(G) \quad (۹-۱)$$

: به‌ازای هر  $f \in F(G)$   $d_{G^*}(f) = d_G(f)$

قضیه ۹-۴ اگر  $G$  یک گراف مسطح‌شده باشد، داریم:

$$\sum_{f \in F} d(f) = 2\varepsilon$$



**اثبات** فرض کنید  $G^*$  دوگان  $G$  باشد. در این صورت:

$$\sum_{f \in \mathcal{E}(G)} d(f) = \sum_{f^* \in \mathcal{E}(G^*)} d(f^*) \quad \text{طبق رابطه (۱-۹):}$$

$$= 2\mathcal{E}(G^*) \quad \text{طبق قضیه ۱-۱:}$$

$$= 2\mathcal{E}(G) \quad \text{طبق رابطه (۱-۹):}$$

### تمرین‌ها

۱-۲-۹ الف) نشان دهید که یک گراف، مسطح است اگر و تنها اگر بلوک‌های آن مسطح باشند.

ب) نتیجه بگیرید که هر گراف نامسطح مینیمال، یک بلوک ساده است.

۲-۲-۹ گراف مسطح شده  $G$  خوددوگان نامیده می‌شود هرگاه با دوگان خود یکریخت باشد.

الف) نشان دهید که اگر  $G$  خوددوگان باشد، آنگاه  $2 - 2v = \mathcal{E}$ .

ب) به ازای هر  $n \geq 4$ ، یک گراف مسطح شده خوددوگان با  $n$  رأس بیابید.

۳-۲-۹ الف) نشان دهید که  $B$ ، یک باند از گراف مسطح شده  $G$  است اگر و تنها اگر  $\{e^* \in E(G^*) \mid e \in B\}$

یک دور از  $G^*$  باشد.

ب) نتیجه بگیرید که دوگان یک گراف مسطح شده اویلری، دوبخشی است.

۴-۲-۹ فرض کنید  $G$  یک گراف مسطح شده باشد. نشان دهید:

الف)  $G^{**} \cong G$  اگر و تنها اگر  $G$  همبند باشد.

ب)  $\chi(G^{**}) = \chi(G)$

۵-۲-۹ فرض کنید  $T$  یک درخت فراگیر از گراف مسطح شده همبند  $G$  و  $E^* = \{e^* \in E(G^*) \mid e \notin E(T)\}$

باشد. نشان دهید  $T^* = G^*[E^*]$  یک درخت فراگیر از  $G^*$  است.

۶-۲-۹ یک گراف مسطح شده که در آن درجهٔ تمام وجه‌ها برابر ۳ است، یک مثلث بندی مسطح شده

نامیده می‌شود. نشان دهید که هر گراف مسطح شده ساده، زیرگراف فراگیری از یک مثلث بندی

مسطح شده ( $v \geq 3$ ) است.

۷-۲-۹ فرض کنید  $G$  یک مثلث بندی مسطح شده ساده با شرط  $v \geq 4$  باشد. نشان دهید که  $G^*$  یک

گراف مسطح شده ۳-منتظم ۲-همبند یالی است.

۹-۲-۸\* نشان دهید که هر مثلث‌بندی مسطح شده  $G$ ، شامل یک زیرگراف دوبخشی با  $\frac{2\varepsilon(G)}{3}$  یال است.

(F. Harary, D. Matula)

### ۹-۳ فرمول اویلر

فرمول ساده‌ای وجود دارد که تعداد رأس‌ها، یال‌ها و وجه‌های یک گراف مسطح شده همبند را به یکدیگر مرتبط می‌سازد. این فرمول به فرمول اویلر مشهور است زیرا اویلر نخستین بار آنرا برای گراف‌های مسطح شده‌ای که نمایانگر رأس‌ها و یال‌ها چند وجهی بودند، اثبات نمود.

**قضیه ۹-۵** اگر  $G$  یک گراف مسطح شده همبند باشد، داریم:

$$v - \varepsilon + \phi = 2$$

**اثبات** از استقراء روی  $\phi$  یعنی تعداد وجوه  $G$  استفاده می‌کنیم. اگر  $\phi = 1$ ، آنگاه هر یال  $G$ ، یک یال برشی است و  $G$ ، یک درخت می‌باشد. در این حالت، بنابر قضیه ۹-۲،  $\varepsilon = v - 1$  است که در صورت قضیه صدق می‌کند. اکنون فرض کنید که قضیه به‌ازای تمامی گراف‌های مسطح شده همبند با  $\phi$  کمتر از  $n$  وجه برقرار است و  $G$  را یک گراف مسطح شده همبند با  $n \geq 2$  وجه در نظر بگیرید. یک یال غیر برشی  $e$  از  $G$  انتخاب کنید. در این صورت  $G - e$  یک گراف مسطح شده همبند با  $n - 1$  وجه خواهد بود زیرا دو وجه  $G$  که توسط  $e$  جدا شده بودند، در هم ادغام شده و یک وجه از  $G - e$  را تشکیل می‌دهند. طبق فرض استقراء داریم:

$$v(G - e) - \varepsilon(G - e) + \phi(G - e) = 2$$

و با استفاده از روابط

$$v(G - e) = v(G) \quad \text{و} \quad \varepsilon(G - e) = \varepsilon(G) - 1, \quad \phi(G - e) = \phi(G) - 1$$

به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$v(G) - \varepsilon(G) + \phi(G) = 2$$

و بنابراین طبق اصل استقراء قضیه به اثبات می‌رسد. □

**نتیجه ۹-۵-۱** هر نشانندن مسطح از یک گراف مسطح همبند، تعداد وجه‌های یکسانی دارد.

**اثبات** فرض کنید  $G$  و  $H$  دو نشانندن مسطح از یک گراف مسطح همبند دلخواه باشند. چون  $G$  و  $H$

یکریختند، پس  $v(G) = v(H)$  و  $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$ . با به‌کارگیری قضیه ۹-۵ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\square. \phi(G) = \varepsilon(G) - v(G) + 2 = \varepsilon(H) - v(H) + 2 = \phi(H)$$

**نتیجه ۲-۵-۹** اگر  $G$  یک گراف مسطح ساده با شرط  $v \geq 3$  باشد، در این صورت داریم:  $\varepsilon \leq 3v - 6$ .

**اثبات** کافی است این مطلب را برای گراف‌های همبند اثبات کنیم. فرض کنید  $G$  یک گراف مسطح

همبند ساده با شرط  $v \geq 3$  باشد. در این صورت به ازای هر  $f \in F$ ، داریم:  $d(f) \geq 3$  و در نتیجه:

$$\sum_{f \in F} d(f) \geq 3\phi$$

طبق قضیه ۴-۹ داریم:

$$2\varepsilon \geq 3\phi$$

بنابراین از قضیه ۵-۹ نتیجه می‌شود که:

$$v - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{3} \geq 2$$

یا به عبارتی دیگر:

$$\square. \varepsilon \leq 3v - 6$$

**نتیجه ۳-۵-۹** اگر  $G$  یک گراف مسطح ساده باشد، آنگاه  $\delta \leq 5$ .

**اثبات** این مطلب به ازای  $v=1, 2$  واضح است. اگر  $v \geq 3$ ، طبق قضیه ۱-۱ و نتیجه ۲-۵-۹ داریم:

$$\delta v \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon \leq 6v - 12$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که  $\delta \leq 5$ .  $\square$

همان‌طور که قبلاً دیدیم  $K_8$  و  $K_{3,3}$  نامسطح هستند (قضیه ۱-۹ و تمرین ۱-۱-۹). در این جا این دو مطلب

را به عنوان نتایج از قضیه ۵-۹ به دست می‌آوریم.

**نتیجه ۴-۵-۹**  $K_8$  نامسطح است.

**اثبات** اگر  $K_8$  مسطح باشد، بنا بر قضیه ۲-۵-۹ خواهیم داشت:

$$10 = \varepsilon(K_8) \leq 3v(K_8) - 6 = 9$$

پس  $K_8$  نمی‌تواند مسطح باشد.  $\square$

**نتیجه ۵-۵-۹**  $K_{3,3}$  نامسطح است.

**اثبات** فرض کنید که  $K_{3,3}$  مسطح باشد و  $G$  را یک نشانندن مسطح از  $K_{3,3}$  در نظر بگیرید. چون  $K_{3,3}$

هیچ دوری با طول کمتر از چهار ندارد، پس درجه هر وجه  $G$ ، حداقل چهار است. در نتیجه طبق قضیه

۴-۹ به دست می‌آید:

$$4\phi \leq \sum_{f \in F} d(f) = 2\varepsilon = 18$$

یعنی:

$$\phi \leq 4$$

از طرفی، قضیه ۵-۹ ایجاب می‌کند که:

$$2 = v - e + \phi \leq 6 - 9 + 4 = 1$$

و این یک تناقض است.  $\square$ 

## تمرین‌ها

۱-۳-۹ الف) نشان دهید اگر  $G$  یک گراف مسطح همبند با کمر  $k \geq 3$  باشد، آنگاه داریم:

$$e \leq k(v-2)/(k-2)$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که گراف پترسن نامسطح است.

۲-۳-۹ نشان دهید که هر گراف مسطح، ۶-رنگ‌پذیر رأسی است.

۳-۳-۹ الف) نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف ساده مسطح با  $v \geq 11$  باشد، در این صورت  $G^c$  نامسطح

است.

ب) یک گراف ساده مسطح با  $v=8$  بیابید که مکمل آن نیز مسطح باشد.۴-۳-۹ ضخامت  $G$  عبارت است از کمترین تعداد گراف‌های مسطحی که اجتماع آن‌ها برابر  $G$  می‌شود.ضخامت  $G$  را با  $\theta(G)$  نمایش می‌دهیم و به‌وضوح داریم  $\theta(G)=1$ ، اگر و تنها اگر  $G$  مسطح

باشد.

$$\theta(G) \geq \lceil \frac{e}{3v-6} \rceil$$

ب) نتیجه بگیرید که  $\theta(K_n) \geq \lceil \frac{v(v-1)}{6(v-2)} \rceil$  و با استفاده از تمرین ۳-۳-۹ ب نشان دهید کهبه‌ازای هر  $v \leq 8$ ، در رابطه فوق، تساوی برقرار است.

۵-۳-۹ با استفاده از تمرین ۵-۲-۹، فرمول اویلر را نتیجه بگیرید.

۶-۳-۹ نشان دهید که اگر  $G$  یک مثلث بندی مسطح شده باشد، آنگاه  $e=3v-6$ .۷-۳-۹ فرض کنید  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  مجموعه‌ای از  $n \geq 3$  نقطه در صفحه باشد به طوری که فاصله هردو نقطه حداقل ۱ باشد. نشان دهید که حداکثر ۳ $n-6$  زوج نقطه با فاصله دقیقاً یک وجود دارند.

## ۴-۹ پل‌ها

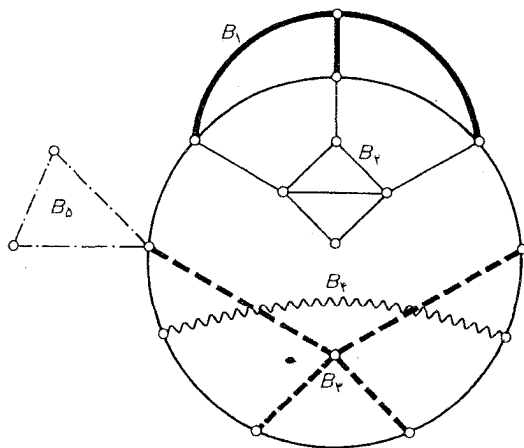
هنگام مطالعه گراف‌های مسطح، زیرگراف‌های خاصی که پل نامیده می‌شوند، نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. در ادامه بخش، به بررسی ویژگی‌های این زیرگراف‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید  $H$  یک زیرگراف دلخواه از  $G$  باشد. رابطه  $\sim$  را بر روی  $E(G) \setminus E(H)$  به این صورت تعریف می‌کنیم که  $e_1 \sim e_2$ ، هرگاه یک گشت  $W$  با ویژگی‌های زیر موجود باشد:

(الف) اولین و آخرین یال  $W$  به ترتیب  $e_1$  و  $e_2$  باشند و

(ب)  $W$  مجزای داخلی از  $H$  باشد (یعنی هیچ رأس داخلی  $W$ ، رأسی از  $H$  نباشد).

به سادگی می‌توان دید که  $\sim$  یک رابطه هم‌ارزی روی  $E(G) \setminus E(H)$  است. یک زیرگراف از  $G - E(H)$  که توسط یک کلاس هم‌ارزی تحت رابطه  $\sim$  القا می‌شود، یک پل از  $H$  در  $G$  نامیده می‌شود. بلافاصله از تعریف فوق، نتیجه می‌شود که اگر  $B$  یک پل از  $H$  باشد، در این صورت  $B$  یک گراف همبند است و علاوه بر این، هر دو رأس  $B$ ، با یک مسیر که مجزای داخلی از  $H$  است به یکدیگر متصلند. همچنین به راحتی می‌توان دید که هر دو پل از  $H$  هیچ رأسی مشترک نیستند مگر احتمالاً در رأس‌های  $H$ . به‌ازای یک پل  $B$  از  $H$ ،  $V(B) \cap V(H)$  را  $V(B, H)$  نامیده و رأس‌های درون این مجموعه را رأس‌های اتصال  $B$  به  $H$  می‌خوانیم. شکل ۹-۹، انواع مختلفی از پل‌های یک دور در یک گراف را نشان می‌دهد. در این شکل، یال‌های مربوطه به پل‌های مختلف، با خطوط متفاوتی مشخص شده‌اند.



شکل ۹-۹. پل‌ها در یک گراف

در این بخش فقط به مطالعه پل‌های یک دور مانند  $C$  می‌پردازیم. بنابراین به منظور اجتناب از تکرار، در ادامه این بخش یک «پل از  $C$ » را به اختصار یک «پل» می‌نامیم و تمام پل‌های مورد بحث باید به عنوان پل‌های دور  $C$  مفروض در نظر گرفته شوند.

در یک گراف همبند، هر پل حداقل دارای یک رأس اتصال است و در یک بلوک، هر پل حداقل دو رأس اتصال دارد. یک پل با  $k$  رأس اتصال رایک  $k$ -پل می‌نامیم. دو  $k$ -پل با رأس‌های اتصال یکسان،  $k$ -پل‌های هم‌ارز نامیده می‌شوند. به‌طورمثال در شکل ۹-۹،  $B_1$  و  $B_2$ ، ۳-پل‌های هم‌ارزند. رأس‌های اتصال  $k$ -پل با  $k \geq 2$ ،  $C$  را به مسیرهای یال-مجزایی که قطعه‌های  $B$  نامیده می‌شوند، افزای می‌کنند. می‌گوئیم دو پل از یکدیگر اجتناب می‌کنند، هر گاه تمام رأس‌های اتصال یک پل، در یک قطعه از پل دیگر قرار گیرند؛ در غیر این صورت دو پل، هم‌پوشانی دارند. در شکل ۹-۹،  $B_3$  و  $B_4$  از یکدیگر اجتناب می‌کنند، در حالیکه  $B_1$  و  $B_2$  هم‌پوشانی دارند. می‌گوئیم پل‌های  $B$  و  $B'$  درگیرند هر گاه چهار رأس  $u, v, u'$  و  $v'$  از  $C$  وجود داشته باشند به طوری که  $u$  و  $v$  رأس‌های اتصال  $B$  و  $u'$  و  $v'$  رأس‌های اتصال  $B'$  باشند و چهار رأس، به ترتیب دوری  $u, u', v, v'$  روی  $C$  ظاهر شده باشند. در شکل ۹-۹،  $B_3$  و  $B_4$  درگیرند ولی  $B_1$  و  $B_2$  درگیر نیستند.

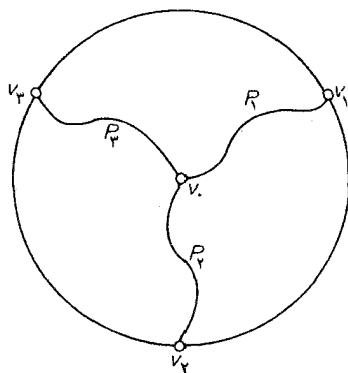
**قضیه ۹-۶** اگر دو پل هم‌پوشانی داشته باشند، یا درگیرند، یا ۳-پل‌های هم‌ارز هستند.

**اثبات** فرض کنید پل‌های  $B$  و  $B'$  هم‌پوشانی داشته باشند. مسلماً هر یک از این پل‌ها باید حداقل دو رأس اتصال داشته باشند. اگر  $B$  یا  $B'$ ، یک ۲-پل باشد، در این صورت واضح است که پل‌ها درگیرند. بنابراین باید فرض کنید که  $B$  و  $B'$  هر یک حداقل سه رأس اتصال دارند. در این صورت دو حالت رخ می‌دهد:

حالت (۱) پل‌های  $B$  و  $B'$  هم‌ارز نیستند، در این حالت  $B'$  باید یک رأس اتصال  $u'$ ، بین دو رأس اتصال متوالی  $u$  و  $v$  از  $B$ ، داشته باشد. چون  $B$  و  $B'$  هم‌پوشانی دارند، یک رأس اتصال مانند  $v$  از  $B'$  نباید در قطعه‌ای از  $B$  که  $u$  و  $v$  در آن هستند، قرار بگیرد. در این صورت نتیجه می‌شود که  $B$  و  $B'$  درگیرند.

حالت (۲)  $B$  و  $B'$  دو  $k$ -پل هم‌ارز با شرط  $k \geq 3$  هستند. اگر  $k \geq 4$ ، به وضوح  $B$  و  $B'$  درگیرند و اگر  $k=3$ ،  $B$  و  $B'$  ۳-پل‌های هم‌ارزند.  $\square$

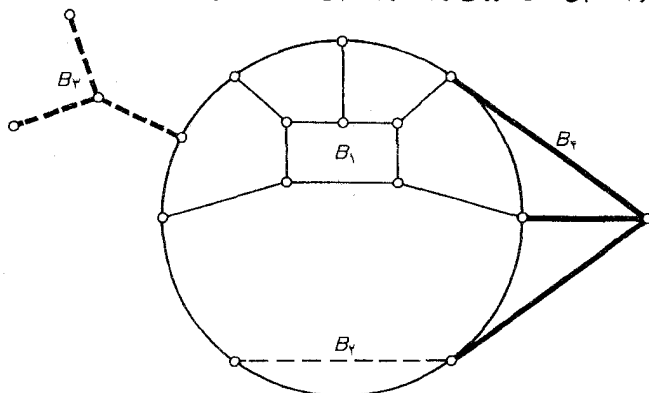
**قضیه ۹-۷** اگر پل  $B$  دارای سه رأس اتصال  $v_1, v_2, v_3$  باشد در این صورت رأسی مانند  $v$  در  $V(B) \setminus V(C)$  و سه مسیر  $P_1, P_2, P_3$  در  $B$  وجود دارند که رأس  $v$  را به ترتیب به  $v_1, v_2, v_3$  وصل می‌کنند و به‌ازای هر  $i, j, i \neq j$ ،  $P_i$  و  $P_j$  فقط در رأس  $v$  مشترک هستند (شکل ۹-۱۰ را ملاحظه نمایید).



شکل ۹-۱۰

**اثبات** فرض کنید  $P$  یک  $(v_1, v_2)$ -مسیر در  $B$  باشد که مجزای داخلی از  $C$  است.  $P$  باید یک رأس داخلی مانند  $v$  داشته باشد زیرا در غیراین صورت پل  $B$  فقط از  $P$  تشکیل شده و نمی‌تواند شامل رأس سومی مثل  $v_3$  باشد. فرض کنید  $Q$  یک  $(v_3, v)$ -مسیر در  $B$  باشد که مجزای داخلی از  $C$  است و فرض کنید که  $v_3, v$  اولین رأس مشترک  $P$  و  $Q$  باشد.  $(v_3, v_1)$ -قسمت  $P^{-1}$  را  $P_1$ ،  $(v_3, v_2)$ -قسمت  $P$  را  $P_2$  و  $(v_3, v_3)$ -قسمت  $Q^{-1}$  را  $P_3$  می‌نامیم. مسیرهای  $P_1, P_2, P_3$  در شرایط موردنظر صدق می‌کنند. □

اکنون به بررسی پل‌ها در گراف‌های مسطح‌شده می‌پردازیم. فرض کنید  $G$  یک گراف مسطح‌شده و  $C$  یک دور از  $G$  باشد. دراین صورت  $C$  یک خم ژوردان در صفحه است و هر یال  $E(G) \setminus E(C)$  در یکی از دو ناحیه  $Int C$  یا  $Ext C$  قرار می‌گیرد. می‌دانیم که هر پل از  $C$ ، یا تماماً در  $Int C$  است و یا تماماً در  $Ext C$ . پلی که در  $Int C$  قرار دارد را یک پل درونی و پلی که در  $Ext C$  قرار دارد را یک پل بیرونی می‌نامیم. در شکل ۹-۱۱،  $B_1$  و  $B_2$ ، پل‌های درونی و  $B_3$  و  $B_4$  پل‌های بیرونی هستند.

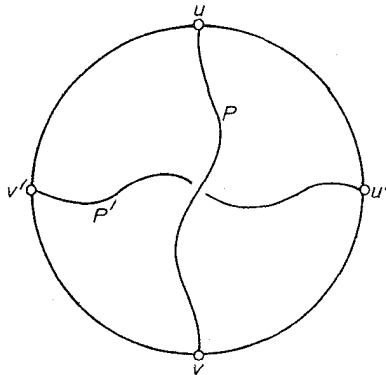


شکل ۹-۱۱. پل‌ها در یک گراف مسطح‌شده

**قضیه ۹-۸** پل‌های درونی (بیرونی) از یکدیگر اجتناب می‌کنند.

**اثبات** از طریق برهان خلف. فرض کنید  $B$  و  $B'$  دو پل درونی باشند که هم‌پوشانی دارند. در این صورت طبق قضیه ۹-۶، این پل‌ها یا باید درگیر باشند یا دو ۳-پل هم‌ارز باشند.

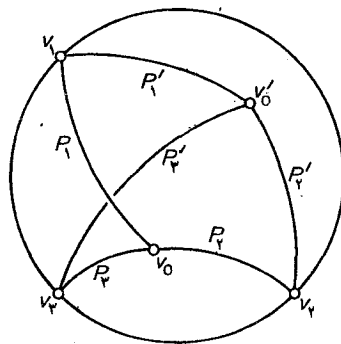
حالت ۱)  $B$  و  $B'$  درگیرند. طبق تعریف، رأس‌های متمایز  $u$  و  $v$  در  $B$  و  $u'$  و  $v'$  در  $B'$  وجود دارند که به ترتیب دوری  $u, u', v, v'$  روی  $C$  قرار گرفته‌اند. فرض کنید  $P$ ، یک  $(u, v)$ -مسیر در  $B$  و  $P'$  یک  $(u', v')$ -مسیر در  $B'$  باشد که هر دو مجزای داخلی از  $C$  هستند. مسیرهای  $P$  و  $P'$  نمی‌توانند دارای یک رأس داخلی مشترک باشند، زیرا متعلق به پل‌های متفاوتی هستند. از طرفی دیگر،  $P$  و  $P'$  باید به‌طور همزمان در  $Int C$  باشند زیرا  $B$  و  $B'$  پل‌های درونی‌اند. بنابراین قضیه ۹-۱۲ هم‌نبردان،  $G$  نمی‌تواند یک گراف مسطح شده باشد و این مطلب با فرض اولیه در تناقض است (شکل ۹-۱۲ را ملاحظه نمایید).



شکل ۹-۱۲

حالت ۲)  $B$  و  $B'$  ۳-پل‌های هم‌ارزند. فرض کنید مجموعه رأس‌های اتصال مشترک این دو پل،  $\{v_1, v_2, v_3\}$  باشد. طبق قضیه ۹-۷، رأسی مانند  $v$  و سه مسیر  $P_1, P_2, P_3$  در  $B$  وجود دارند که این مسیرها به ترتیب  $v$  را به رأس‌های  $v_1, v_2, v_3$  وصل می‌کنند و به‌ازای هر  $P_i, i \neq j$  و  $P_j$  تنها در رأس  $v$  مشترکند. به‌طور مشابه،  $B'$  هم دارای یک رأس  $v_0'$  و سه مسیر  $P_1', P_2', P_3'$  است که رأس  $v_0'$  را به ترتیب به  $v_1, v_2, v_3$  وصل می‌کنند و به‌ازای هر  $P_i', i \neq j$  و  $P_j'$  فقط در رأس  $v_0'$  مشترک هستند (شکل ۹-۱۳ را ملاحظه نمایید).



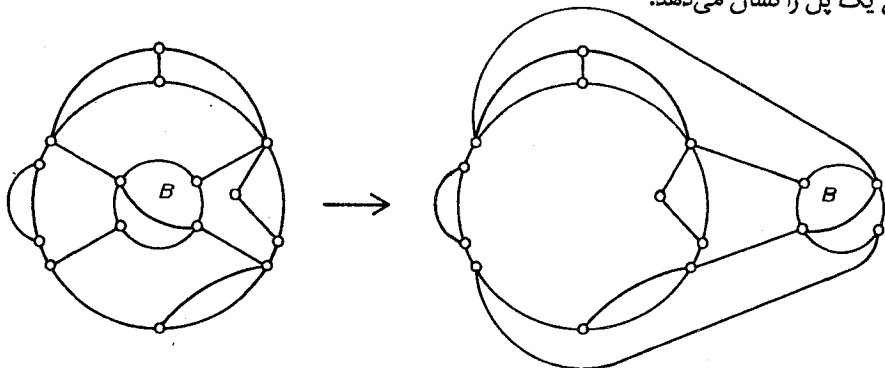


شکل ۹-۱۳

مسیرهای  $P_1, P_2, P_3$  و  $Int C$  را به سه ناحیه تقسیم می‌کنند و  $v_0$  باید درون یکی از این سه ناحیه قرار بگیرد. از آن جایی که فقط دو رأس از سه رأس  $v_1, v_2, v_3$  می‌توانند در مرز ناحیه شامل  $v_0$  قرار داشته باشند و با توجه به تقارن می‌توانیم فرض کنیم که  $v_3$  در مرز این ناحیه قرار ندارد. طبق قضیه خم ژوردان، مسیر  $P_3$  باید از روی  $P_1$  یا  $P_2$  یا  $C$  عبور کند. ولی با توجه به اینکه  $B$  و  $B'$  دو پل درونی هستند، این کار غیر ممکن است.

در نتیجه پل‌های درونی از یکدیگر اجتناب می‌کنند. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که پل‌های بیرونی نیز از یکدیگر اجتناب می‌کنند. □

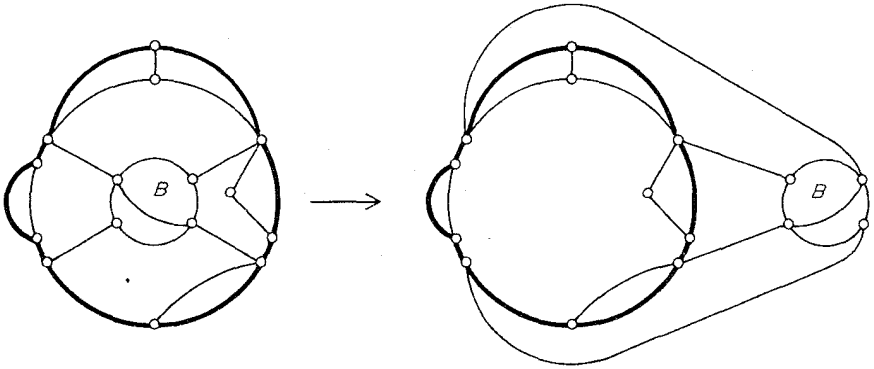
فرض کنید  $G$  یک گراف مسطح شده باشد. می‌گوئیم یک پل درونی  $B$  از دور  $C$  در  $G$ ، انتقال‌پذیر است، اگر یک نشان مسطح  $\bar{G}$  از  $G$  وجود داشته باشد که عیناً همانند خود  $G$  باشد، تنها با این تفاوت که در  $\bar{G}$ ، یک پل بیرونی از  $C$  باشد. همچنین می‌گوئیم که  $\bar{G}$  از  $G$  با انتقال  $B$  به دست آمده است. شکل ۹-۱۴ انتقال یک پل را نشان می‌دهد.



شکل ۹-۱۴. انتقال یک پل

**قضیه ۹-۹** یک پل درونی، که از تمام پل‌های بیرونی اجتناب کند، انتقال پذیر است.

**اثبات** فرض کنید  $B$  یک پل درونی باشد که از تمام پل‌های بیرونی اجتناب می‌کند. در این صورت تمام رأس‌های اتصال  $B$  به  $C$ ، روی مرز یکی از وجه‌های  $G$  که درون  $C$  است، قرار می‌گیرند. اکنون می‌توان  $B$  را همانند شکل ۱۵-۹ درون این وجه رسم کرد. □



شکل ۱۵-۹

در بخش بعد، قضیه ۹-۹ را برای اثبات قضیه کوراتوفسکی به کار خواهیم برد.

### تمرین‌ها

۱-۴-۹ نشان دهید اگر  $B$  و  $B'$  دو پل متمایز باشند، آنگاه داریم:  $V(B) \cap V(B') \subseteq V(C)$ .

۲-۴-۹ فرض کنید  $u, x, v$  و  $y$  (با همین ترتیب دوری)، چهار رأس اتصال متمایز پل  $B$  به دور  $C$ ، در یک گراف مسطح شده باشند. نشان دهید که  $(u, v)$ -مسیری مانند  $P$  و  $(x, y)$ -مسیری چون  $Q$  در  $B$  وجود دارند به طوری که:

(۱)  $P$  و  $Q$  مجزای داخلی از  $C$  هستند و

(۲)  $|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$ .

۳-۴-۹ الف) فرض کنید  $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$  یکی از طولانی‌ترین دورهای گراف همبند ناهمبند  $G$  باشد. نشان دهید:

(۱) پلی مانند  $B$  وجود دارد به طوری که:  $V(B) \cap V(C) \neq \emptyset$ .

(۲) اگر  $v_i$  و  $v_{i+1}$  رأس‌های اتصال  $B$  باشند، آنگاه  $v_i v_{i+1} \notin E$ .

ب) نتیجه بگیرید که اگر  $\alpha \leq k$ ، آنگاه  $G$  همبند است. (V. Chvátal and P. Erdős)

۵-۹ قضیهٔ کوراتوفسکی<sup>۱</sup>

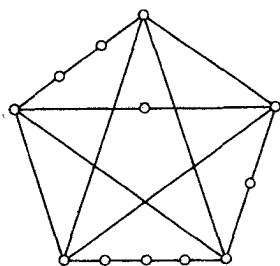
از آن جایی که مسطح بودن، یکی از مهمترین خواص گراف‌ها محسوب می‌شود، بنابراین دانستن اینکه کدام گراف‌ها مسطح هستند و کدام‌ها نیستند، بسیار حائز اهمیت است. قبلاً اشاره کردیم که گراف‌های  $K_5$  و  $K_{3,3}$  مسطح نیستند ولی هر زیرگراف سره از این گراف‌ها مسطح است (تمرین ۹-۱-۲). به‌طور کلی، گراف‌های مسطح مشخصهٔ بسیار ساده‌ای دارند که توسط کوراتوفسکی (۱۹۳۰) بیان شده است. این بخش را به اثبات قضیهٔ کوراتوفسکی اختصاص داده‌ایم.

لم‌های زیر کاملاً بدیهی هستند و اثبات آن‌ها را به‌عنوان تمرین (تمرین ۹-۵-۱) به خواننده واگذار می‌کنیم.

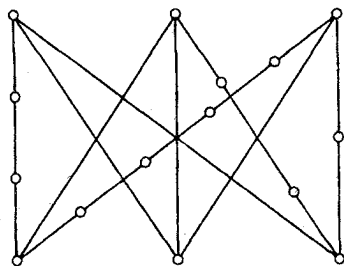
**لم ۹-۱۰-۱** اگر  $G$  نامسطح باشد، هر مشتقی از  $G$  نیز نامسطح خواهد بود.

**لم ۹-۱۰-۲** اگر  $G$  مسطح باشد، هر زیرگراف  $G$  نیز مسطح است.

با توجه به اینکه  $K_5$  و  $K_{3,3}$  نامسطح هستند، از دو لم فوق نتیجه می‌شود که اگر  $G$  مسطح باشد، در این صورت  $G$  نمی‌تواند شامل مشتقی از  $K_5$  یا  $K_{3,3}$  باشد (شکل ۹-۱۶). کوراتوفسکی نشان داد که این شرط، علاوه بر لازم بودن، کافی نیز هست.



(الف)



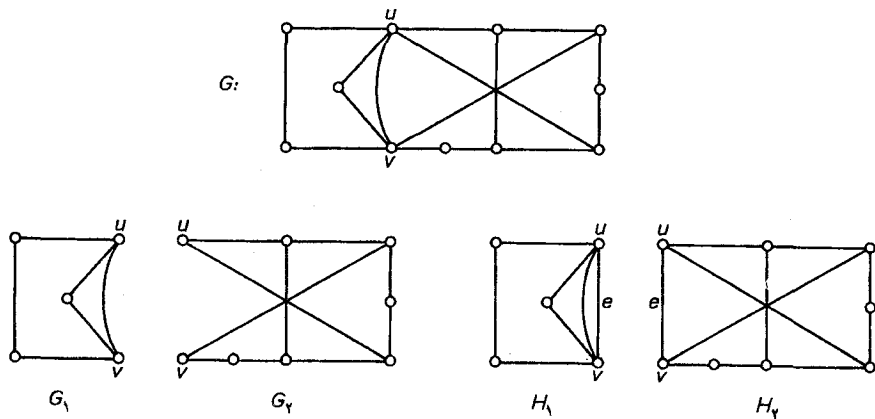
(ب)

شکل ۹-۱۶. (الف) یک مشتق از  $K_5$  (ب) یک مشتق از  $K_{3,3}$

پیش از آنکه به اثبات قضیهٔ کوراتوفسکی بپردازیم، دولم ساده دیگر را اثبات می‌کنیم.

فرض کنید  $G$  یک گراف با یک ۲-برش رأسی  $\{u, v\}$  باشد. در این صورت زیرگراف‌های یال-مجزای

$G_1$  و  $G_2$  وجود دارند به طوری که  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$  و  $G_1 \cup G_2 = G$ . در  $G_1$  و  $G_2$ ، رأس‌های  $u$  و  $v$  را با یک یال جدید به هم وصل می‌کنیم تا گراف‌های  $H_1$  و  $H_2$  به دست آیند (شکل ۹-۱۷). در این حالت داریم:  $G = (H_1 \cup H_2) - e$  و به ازای  $i = 1, 2$ :  $\varepsilon(H_i) < \varepsilon(G)$ .



شکل ۹-۱۷

لم ۹-۱۰-۳ اگر  $G$  نامسطح باشد، آنگاه حداقل یکی از گراف‌های  $H_1$  یا  $H_2$  نیز نامسطح است.

**اثبات** از طریق تناقض. فرض کنید که هر دو گراف  $H_1$  و  $H_2$  مسطح باشند.  $\bar{H}_1$  را یک نشانند مسطح از  $H_1$  و  $f$  را وجهی از  $\bar{H}_1$  که بر روی  $e$  واقع است، در نظر بگیرید. اگر  $\bar{H}_2$  یک نشانند مسطح از  $H_2$  در  $f$  باشد به طوری که  $\bar{H}_1$  و  $\bar{H}_2$  تنها در رأس‌های  $u$  و  $v$  و یال  $e$  مشترک باشند، در این صورت  $(\bar{H}_1 \cup \bar{H}_2) - e$  یک نشانند مسطح از  $G$  خواهد بود و این با فرض نامسطح بودن  $G$  تناقض دارد. □

لم ۹-۱۰-۴ فرض کنید  $G$  گراف همبند نامسطحی است که شامل هیچ مشتقی که از  $K_{8,3}$  یا  $K_{3,3}$  نیست و یال‌های آن به کمترین تعداد ممکن است. در این صورت  $G$ ، ساده و ۳-همبند است.

**اثبات** از طریق تناقض. فرض کنید  $G$  در فرض‌های اولیه لم صدق می‌کند. در این صورت،  $G$  به وضوح یک گراف نامسطح مینیمال و در نتیجه یک بلوک ساده است (تمرین ۹-۲-ب). اگر  $G$ ، ۳-همبند نباشد، فرض می‌کنیم که  $\{u, v\}$  یک ۲-برش رأسی از  $G$  باشد و  $H_1$ ،  $H_2$  گراف‌هایی باشند که به طریقه فوق به دست آمده‌اند. طبق لم ۹-۱۰-۳ یکی از دو گراف  $H_1$  و  $H_2$ ، مثلاً  $H_1$  نامسطح است. چون  $\varepsilon(H_1) < \varepsilon(G)$ ،  $H_1$  باید شامل زیرگرافی مانند  $K$  باشد که مشتقی از  $K_{8,3}$  یا  $K_{8,3}$  است. علاوه بر این  $K \not\subseteq G$  و یال  $e$  در  $K$  قرار دارد. فرض کنید  $P$  یک  $(u, v)$ -مسیر در  $H_2 - e$  باشد. در این صورت  $G$  شامل زیرگراف  $(K \cup P) - e$  است

که مشتقی از  $K$  و در نتیجه مشتقی از  $K_{۳,۳}$  یا  $K_8$  است. این تناقض، صحت لم را به اثبات می‌رساند. □  
 به منظور سهولت در بیان اثبات قضیه کوراتوفسکی مناسب دیدیم که نماد زیر را تعریف کنیم. فرض کنید  $C$  یک دور در گرافی مسطح شده است. در این صورت دو جهت برای  $C$  می‌توان در نظر گرفت: یکی در جهت گردش عقربه‌های ساعت و دیگری برعکس جهت گردش عقربه‌های ساعت. به‌ازای هر دو رأس  $u$  و  $v$  از  $C$ ،  $(u, v)$ -مسیری از  $C$  که در جهت گردش عقربه‌های ساعت است را با  $C[u, v]$  نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه از نمادهای  $C(u, v)$ ،  $C[u, v]$  و  $C(u, v)$ ، برای نشان دادن مسیره‌های  $C[u, v] - u$ ،  $C[u, v] - v$  و  $C[u, v] - \{u, v\}$  استفاده می‌کنیم. اکنون آماده‌ایم که به سراغ اثبات قضیه کوراتوفسکی برویم. اثبات ما براساس روش دیراک و شوستر<sup>۱</sup> (۱۹۵۴) استوار است.

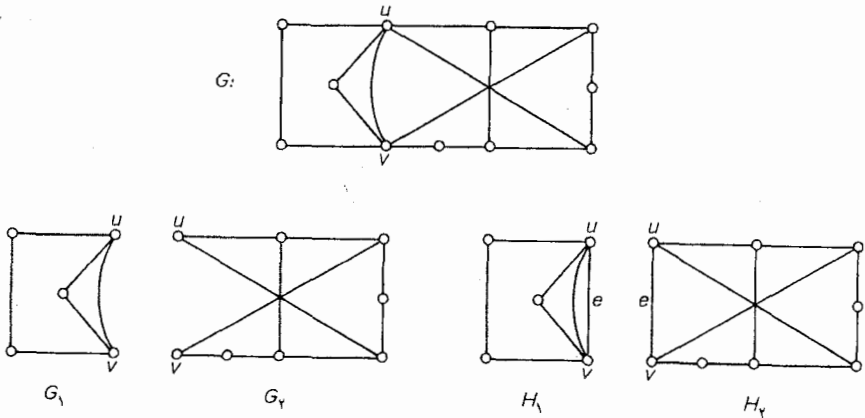
**قضیه ۹-۱۰** یک گراف، مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیرگرافی از  $K_{۳,۳}$  یا  $K_8$  نباشد.

**اثبات** همان طوری که پیش از این اشاره شد، لازم بودن شرط قضیه، از لم‌های ۹-۱۰ و ۹-۱۰ نتیجه می‌شود. در ادامه به اثبات کافی بودن این شرط می‌پردازیم.

در صورت امکان، یک گراف نامسطح  $G$  را که شامل هیچ مشتقی از  $K_{۳,۳}$  یا  $K_8$  نیست و تعداد یال‌های کمترین مقدار ممکن است، در نظر می‌گیریم. با توجه به لم ۹-۱۰ نتیجه می‌شود که  $G$  ساده و ۳-همبند است. همچنین واضح است  $G$  باید یک گراف نامسطح مینیمال باشد.

فرض کنید  $uv$ ، یک یال  $G$  و  $H$  یک نشانندن مسطح از گراف مسطح  $G - uv$  باشد. چون  $G$ ، ۳-همبند است. در نتیجه  $H$ ، ۲-همبند می‌باشد و بنابر نتیجه ۳-۲-۱،  $u$  و  $v$  توأمأ در یک دور از  $H$  قرار دارند. دوری مانند  $C$  از  $H$  که شامل  $u$  و  $v$  باشد را طوری انتخاب می‌کنیم که تعداد یال‌ها در  $Int C$  بیشترین تعداد ممکن باشد.

از آن جایی که  $H$  ساده و ۲-همبند است، هر پل  $C$  در  $H$  باید حداقل دو رأس اتصال داشته باشد. از طرفی، تمام پل‌های بیرونی  $C$  باید ۲-پل‌هایی باشند که با  $uv$  هم‌پوشانی دارند. چون اگر یک پل بیرونی وجود داشته باشد که به‌ازای یک مقدار  $k$ ،  $k \geq 3$ ،  $k$ -پل باشد یا ۲-پلی باشد که از  $uv$  اجتناب می‌کند، در این صورت دوری مانند  $C'$  وجود خواهد داشت که هم شامل  $u$  و  $v$  است و هم تعداد یال‌های درون آن از  $C$  بیشتر است که این با چگونگی انتخاب  $C$  در تناقض است. این دو حالت در شکل ۹-۱۸ نشان داده شده‌اند. در این شکل  $C'$  با خطوط ضخیم‌تر مشخص شده است.



شکل ۹-۱۸

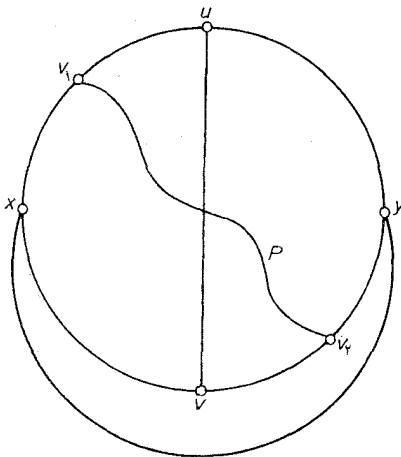
در حقیقت تمام پل‌های خارجی  $C$  در  $H$  باید یک تک یال باشند، برای اینکه اگر یک ۲-پل با اتصال  $y$  و  $x$  بخواهد رأس سومی داشته باشد، در نتیجه مجموعه  $\{x, y\}$  یک ۲-برش رأسی برای  $G$  خواهد بود که با شرط ۳-همبند بودن  $G$  در تناقض است.

طبق قضیه ۹-۸، هیچ دو پل درونی، هم‌پوشانی ندارند. بنابراین یک پل داخلی درگیر با  $uv$  باید با یک پل بیرونی هم‌پوشانی داشته باشد. زیرا در غیر این صورت، طبق قضیه ۹-۹، می‌توان تمام این پل‌ها را یکی یکی انتقال داد و سپس یال  $uv$  را درون  $C$  رسم کرد تا یک نشانند مسطح از  $G$  به دست آید و چون  $G$  نامسطح است، پس این کار غیر ممکن است. بنابراین، یک پل درونی  $B$  وجود دارد که هم با  $uv$  و هم با یک پل بیرونی  $xy$  درگیر می‌باشد.

اینک برحسب اینکه  $B$  دارای یک رأس اتصال متفاوت با رأس‌های  $u, v, x$  و  $y$  باشد یا نباشد، دو حالت پیش می‌آید:

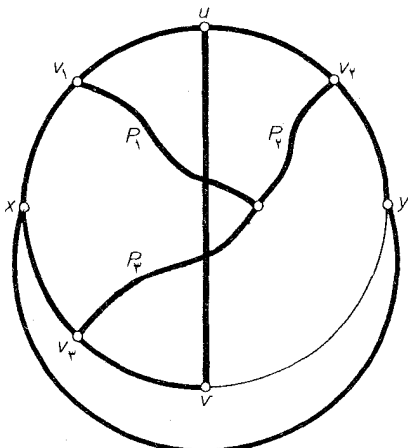
**حالت ۱)**  $B$  دارای یک رأس اتصال متفاوت با رأس‌های  $u, v, x$  و  $y$  است. می‌توانیم طوری نمادها را انتخاب کنیم که  $B$  دارای یک رأس اتصال  $v_1$  در  $C(u, v)$  باشد (شکل ۹-۱۹ را ملاحظه نمایید). برحسب اینکه  $B$  دارای یک رأس اتصال در  $C(y, v)$  هست یا نه، دو حالت جزئی‌تر را می‌توان در نظر گرفت:

**حالت ۱-الف)**  $B$  دارای یک رأس اتصال  $v_2$  در  $C(y, v)$  است. در این حالت یک  $(v_1, v_2)$ -مسیر  $P$  در  $B$  وجود دارد که مجزای داخلی از  $C$  می‌باشد. ولی در این صورت  $\{uv, xy\} + (CUP)$  یک مشتق از  $K_{3,3}$  در  $G$  خواهد بود که تناقض است (شکل ۹-۱۹ را ببینید).



شکل ۱۹-۹

حالت ۱-ب)  $B$  هیچ رأسی اتصالی در  $C(v, v)$  ندارد. از آن جایی که  $B$  با  $uv$  و  $xy$  درگیر است، پس باید یک رأس اتصال  $v_4$  در  $C(u, y)$  و یک رأس اتصال  $v_3$  در  $C(v, x)$  داشته باشد. در نتیجه  $B$  دارای سه رأس اتصال  $v_1, v_2, v_3$  و  $v_4$  است. طبق قضیهٔ ۹-۷، رأسی مانند  $v$  در  $V(B) \setminus V(C)$  و سه مسیر  $P_1, P_2, P_3$  در  $B$  وجود دارند که  $v$  را به ترتیب به  $v_1, v_2, v_3$  وصل می‌کنند و به‌ازای هر  $i \neq j$ ،  $P_i$  و  $P_j$  فقط در رأس  $v$  مشترک هستند. در این صورت  $\{uv, xy\} + (C \cup P_3 \cup P_2 \cup P_1)$  شامل مشتقی از  $K_{3,3}$  خواهد بود که تناقض است. این حالت در شکل ۲۰-۹ نمایش داده شده است. در این شکل مشتق  $K_{3,3}$  با خطوط ضخیم‌تر مشخص شده است.



شکل ۲۰-۹

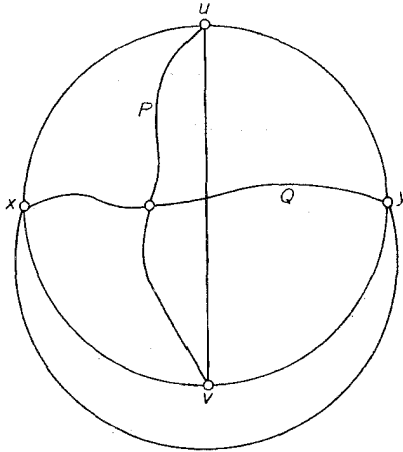
حالت ۲)  $B$  هیچ رأس اتصال دیگری به جز  $u, v, x, y$  ندارد. از آن جایی که  $B$  با  $uv$  و  $xy$  درگیر است، در نتیجه هر چهار رأس  $u, v, x, y$  باید رأس‌های اتصال  $B$  باشند. بنابراین (طبق تمرین ۹-۴-۲) یک  $(u, v)$ -مسیر  $P$  و یک  $(x, y)$ -مسیر  $Q$  در  $B$  وجود دارد به طوری که:

(۱)  $P$  و  $Q$  مجزای داخلی از  $C$  هستند و

$$(۲) \quad |V(P) \cap V(G)| \geq 1$$

برحسب اینکه  $P$  و  $Q$  یک یا تعداد بیشتری رأس مشترک داشته باشند، دو حالت جزئی‌تر را در نظر می‌گیریم.

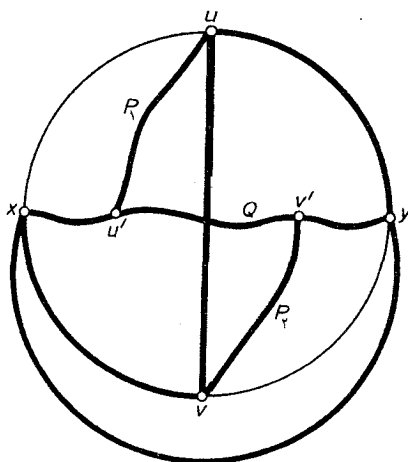
حالت ۲-الف)  $|V(P) \cap V(G)| = 1$ . در این حالت،  $\{uv, xy\} + (C \cup P \cup Q)$ ، مشتقی از  $K_6$  در  $G$  است که مجدداً یک تناقض است (شکل ۹-۲۱ را ملاحظه نمایید).



شکل ۹-۲۱

حالت ۲-ب)  $|V(P) \cap V(G)| \geq 2$ . فرض کنید  $u'$  و  $v'$  اولین و آخرین رأس‌های  $P$  روی  $Q$  باشند و فرض کنید که  $P_1$  و  $P_2$  نمایانگر  $-(u, u')$  و  $-(v', v)$ -قسمت‌های  $P$  باشند. در این صورت  $\{uv\} + (C \cup P_1 \cup P_2 \cup Q)$  شامل یک مشتق از  $K_{3,3}$  در  $G$  خواهد بود که باز هم یک تناقض است (شکل ۹-۲۲ را ملاحظه نمایید).





شکل ۹-۲۲

در نتیجه تمام حالات ممکن به تناقض می‌رسند و اثبات کامل است. □

گراف‌های مسطح دارای مشخصه‌های دیگری هستند. به عنوان مثال، واگنر<sup>۱</sup> (۱۹۳۷) نشان داده است که یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیرگراف انقباض پذیر به  $K_5$  و  $K_{3,3}$  نباشد.

### تمرین‌ها

۱-۵-۹ لم‌های ۹-۱۰-۱ و ۹-۱۰-۲ را اثبات کنید.

۲-۵-۹ با استفاده از قضیهٔ کوراتوفسکی نشان دهید که گراف پترسن نامسطح است.

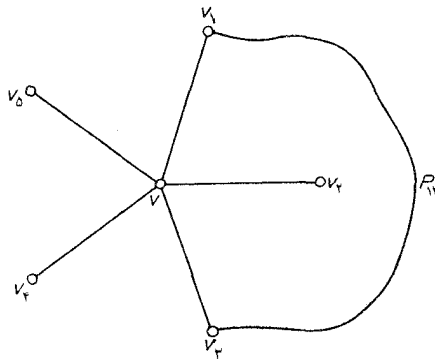
### ۹-۶ قضیهٔ پنج رنگ و حدس چهاررنگ

همان‌طور که قبلاً اشاره شد (تمرین ۹-۳-۲)، هر گراف مسطح، ۶-رنگ پذیر راسی است. هیوود<sup>۲</sup> این نتیجه را بهبود بخشید، بدین ترتیب که نشان داد هر گراف مسطح را می‌توان حداکثر با پنج رنگ، به‌طور مجاز رنگ‌آمیزی نمود. این مطلب به قضیهٔ پنج رنگ مشهور است.

قضیهٔ ۹-۱۱ هر گراف مسطح، ۵-رنگ پذیر راسی است.

**اثبات** از طریق تناقض. فرض کنید که قضیه نادرست باشد، در این صورت باید یک گراف مسطح شده ۶-بحرانی مثل  $G$  وجود داشته باشد. چون گراف‌های بحرانی ساده‌اند با توجه به نتیجه ۹-۳-۵ داریم:  $\delta \leq 5$ . از طرف دیگر طبق قضیه ۱-۸، می‌دانیم که  $\delta \geq 5$ ، بنابراین تساوی  $\delta = 5$  برقرار است. فرض کنید  $v$  یک رأس با درجه پنج در  $G$  باشد و همچنین  $(V_5, V_4, V_3, V_2, V_1)$  یک ۵-رنگ آمیزی رأسی مجاز از  $G-v$  باشد. این رنگ آمیزی حتماً وجود دارد زیرا  $G$ ، ۶-بحرانی است. از آن جایی که خود  $G$ ، ۵-رنگ پذیر رأسی نیست،  $v$  باید با رأس‌هایی به هر پنج رنگ، مجاور باشد. می‌توانیم فرض کنیم که همسایگان  $v$ ، در جهت گردش عقربه‌های ساعت نسبت به  $v$ ، به ترتیب عبارتند از  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  و  $v_i \in V_i$ ، به ازای هر  $1 \leq i \leq 5$ .

زیرگراف  $G[V_iUV_j]$  را که توسط  $V_iUV_j$  القا می‌شود، با  $G_{ij}$  نمایش می‌دهیم. به ازای هر  $v_i$  و  $v_j$  باید متعلق به مؤلفه یکسانی از  $G_{ij}$  باشند زیرا در غیر این صورت، مؤلفه‌ای از  $G_{ij}$  که شامل  $v_i$  است را در نظر بگیرید. با تعویض رنگ  $i$  و  $j$  در این مؤلفه، به یک ۵-رنگ آمیزی رأسی مجاز از  $G-v$  می‌رسیم که در آن فقط چهار رنگ (همه به جز  $i$ ) به همسایگان  $v$  اختصاص یافته‌اند. قبلاً نشان دادیم که این حالت نمی‌تواند رخ دهد. بنابراین  $v_i$  و  $v_j$  باید متعلق به مؤلفه یکسانی از  $G_{ij}$  باشند. فرض کنید  $P_{ij}$  یک  $(v_i, v_j)$ -مسیر در  $G_{ij}$  و  $C$ ، نمایانگر دور  $v_1v_2P_{23}v_3v_4P_{45}v_5$  باشد (شکل ۹-۲۳ را ملاحظه نمایید).



شکل ۹-۲۳

از آن جایی که  $C$ ،  $v_4$  و  $v_2$  را جدا می‌کند (در شکل ۹-۲۳ داریم:  $v_4 \in \text{int } C$  و  $v_2 \in \text{ext } C$ ). از قضیه خم ژوردان نتیجه می‌شود که مسیر  $P_{24}$  باید در نقطه‌ای با  $C$  برخورد داشته باشد. چون  $G$  یک گراف مسطح شده

است، نقطه برخورد باید یک رأس باشد ولی این غیرممکن است، زیرا  $P_{۴}$  دارای رنگ‌های ۲ و ۴ است در صورتی که هیچ رأسی از  $C$  دارای یکی از این دو رنگ نیست. □

اکنون این سوال مطرح می‌شود که آیا قضیه پنج رنگ، بهترین حالت ممکن است. حدسی وجود دارد که هر گراف مسطح، ۴-رنگ پذیر رأسی است. این مطلب به حدس چهاررنگ مشهور است. حدس چهاررنگ با وجود تلاش‌های بسیار ریاضی‌دانان نامی، هنوز پس از یک قرن بدون اثبات باقی مانده است.\* اگر این حدس درست باشد، مسلماً بهترین حالت ممکن خواهد بود. زیرا گراف‌های مسطحی وجود دارند که ۳-رنگ پذیر رأسی نیستند ( $K_4$  ساده‌ترین این گراف‌هاست). به منظور آشنایی با تاریخچه حدس چهاررنگ، [Ore;1987] را ملاحظه کنید.

مسئله تعیین اینکه آیا حدس چهاررنگ درست است یا نه، مسئله چهاررنگ نامیده می‌شود.\*\* چندین مسئله دیگر در نظریه گراف‌ها وجود دارند که هم‌ارز مسئله چهاررنگ می‌باشند. یکی از مسایل، حالت  $n=5$  حدس هادویگر است (بخش ۸-۳ را ملاحظه نمایید). در اینجا به بررسی هم‌ارزی مسایل خاصی که در ارتباط با رنگ‌آمیزی وجهی و یالی هستند با مسئله چهاررنگ می‌پردازیم. یک رنگ‌آمیزی وجهی از گراف مسطح شده  $G$  عبارت است از اختصاص  $k$  رنگ ۱، ۲، ...،  $k$  به وجوه  $G$ . اگر هیچ دو وجهی که با یک یال جدا شده‌اند هم رنگ نباشند، رنگ‌آمیزی مجاز خواهد بود.  $G$  را  $k$ -رنگ پذیر وجهی می‌نامیم اگر یک  $k$ -رنگ‌آمیزی مجاز داشته باشد و کوچکترین  $k$  ای را که به ازای آن  $G$ ،  $k$ -رنگ پذیر وجهی است، عدد رنگی وجهی  $G$  نامیده، آن را با  $\chi^*(G)$  نمایش می‌دهیم. بلافاصله از تعاریف فوق نتیجه می‌شود که به ازای هر گراف مسطح شده  $G$  با دوگان  $G^*$  رابطه زیر برقرار است:

$$\chi^*(G) = \chi(G^*) \quad (۲-۹)$$

**قضیه ۹-۱۲** سه گزاره زیر هم‌ارزند:

(۱) هر گراف مسطح، ۴-رنگ پذیر رأسی است.

\* در سال ۱۹۷۶ ک. آپیل و و. هیکن، با استفاده از قضیه‌های فراوان و ۱۲۰۰ ساعت وقت یکی از سریعترین کامپیوترهای آن دوره، این مساله سرکش را حل نموده و درستی حدس چهاررنگ را اثبات نمودند. اما هنوز بسیاری از ریاضی‌دانان به فکر اثباتی سنتی و حتی الامکان ساده برای آن هستند. (مترجم)

\*\* مسئله چهاررنگ را غالباً به این صورت مطرح می‌کنند: آیا می‌توان کشورهای روی هر نقشه‌ای را با چهار رنگ چنان رنگ آمیزی کرد که دو کشور دارای مرز مشترک به یک رنگ نباشند؟ هم ارزی این مسئله با مسئله چهاررنگ از قضیه ۹-۱۲ و با توجه به این مطلب ناشی می‌شود که یک نقشه را می‌توان به عنوان یک گراف مسطح شده در نظر گرفت که کشورها، وجه‌های آن هستند.

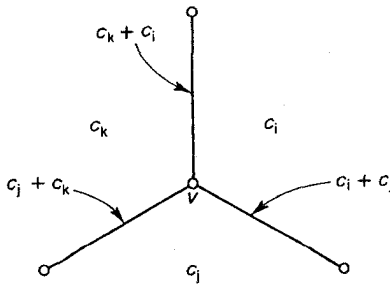
(۲) هر گراف مسطح شده، ۴-رنگ پذیر وجهی است.

(۳) هر گراف مسطح ۳-منتظم ۲-همبند یالی ساده، ۳-رنگ پذیر یالی است.

اثبات نشان می‌دهیم که  $(۱) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$

الف)  $(۱) \Rightarrow (۲)$ . این رابطه، نتیجه مستقیمی از رابطه (۲-۹) است با توجه به این مطلب که دوگان یک گراف مسطح شده، خود مسطح است.

ب)  $(۲) \Rightarrow (۳)$ . فرض کنید (۲) برقرار باشد.  $G$  را یک گراف مسطح ۳-منتظم ۲-همبند یالی ساده در نظر گرفته، فرض می‌کنیم  $\bar{G}$  یک نشاندن مسطح  $G$  باشد. بنابر (۲)،  $\bar{G}$  دارای یک ۴-رنگ آمیزی وجهی مجاز است. مسلماً نمادهایی که به عنوان «رنگ‌ها» استفاده می‌شوند، هیچ اهمیتی ندارند و در این حالت، چهار رنگ را با بردارهای  $(0, 0) = c_0$ ،  $(1, 0) = c_1$ ،  $(0, 1) = c_2$  و  $(1, 1) = c_3$  در حوزه اعداد صحیح به پیمانه ۲ نمایش می‌دهیم. یک ۳-رنگ آمیزی یالی از  $\bar{G}$  بدین ترتیب به دست می‌آوریم که به هر یال، مجموع رنگ‌های دو وجهی را که آن‌ها را از هم جدا کرده است، اختصاص می‌دهیم (شکل ۹-۲۴ را ملاحظه نمایید). اگر  $c_j$  و  $c_k$  سه رنگ اختصاص یافته به سه وجه واقع بر یک رأس مانند  $v$  باشند، آنگاه  $c_j + c_k$  و  $c_i + c_j$  رنگ‌های اختصاص یافته به سه یال واقع بر  $v$  خواهند بود. از آن جایی که  $\bar{G}$ ، ۲-همبند یالی است، هر یال، دو وجه متمایز را جدا می‌کند و روشن است که در این صورت، رنگ  $c_i$  به هیچ یالی اختصاص نخواهد یافت. از طرفی سه یال واقع بر یک رأس دلخواه، دارای رنگ‌های متفاوتی هستند. بنابراین، به یک ۳-رنگ آمیزی یالی مجاز از  $\bar{G}$  (و در نتیجه  $G$ ) رسیده‌ایم.



شکل ۹-۲۴

ج)  $(1) \Rightarrow (3)$ . فرض کنید (۳) برقرار باشد ولی (۱) درست نباشد. در این صورت یک گراف مسطح ۵-بحرانی مانند  $G$  وجود خواهد داشت. فرض کنید  $\bar{G}$  یک نشانندن مسطح از  $G$  باشد. در این صورت  $\bar{G}$  زیرگراف فراگیری از یک مثلث‌بندی مسطح‌شده ساده مانند  $H$  است (تمرین ۹-۲-۶). دوگان  $H, H^*$ ، یک گراف مسطح ۳-منتظم ۲-همبند یالی ساده است (تمرین ۹-۲-۷). طبق (۳)،  $H^*$  دارای یک ۳-رنگ‌آمیزی یالی مجاز مانند  $(E_1, E_2, E_3)$  است. به ازای هر  $i \neq j$ ، زیرگرافی از  $H^*$  که توسط  $E_i \cup E_j$  القا می‌گردد را با  $H^*_{ij}$  نمایش می‌دهیم. چون هر رأس  $H^*$  بر یک یال از  $E_i$  و یک یال از  $E_j$  واقع است،  $H^*_{ij}$  اجتماعی از دوره‌های مجزا و در نتیجه (تمرین ۹-۱۶) ۲-رنگ‌پذیر وجهی است. از طرفی هر وجه  $H^*$ ، اشتراک وجهی از  $H^*_{12}$  و وجهی از  $H^*_{23}$  می‌باشد. اگر ۲-رنگ‌آمیزی‌های وجهی مجازی از  $H^*_{12}$  و  $H^*_{23}$  داده شده باشد، می‌توانیم یک ۴-رنگ‌آمیزی وجهی از  $H^*$  را به این طریق به دست آوریم که به هر وجه  $f$ ، زوج رنگ‌های اختصاص یافته به دورنگی را که  $f$  اشتراک آنهاست، اختصاص می‌دهیم. چون  $H^* = H^*_{12} \cup H^*_{23}$ ، به راحتی می‌توان دید که این ۴-رنگ‌آمیزی وجهی از  $H^*$ ، مجاز هم هست. از آنجایی که  $H$  زیرگرافی از  $G$  است، داریم:

$$5 = \chi(G) \leq \chi(H) = \chi^*(H^*) \leq 4$$

این تناقض نشان می‌دهد که در حقیقت (۱) برقرار است. □

گزارهٔ (۳) از قضیهٔ ۹-۱۲ که هم‌ارز با مسأله چهاررنگ است، نخستین بار توسط تایت (۱۸۸۰) مورد بررسی قرار گرفت. به همین خاطر غالباً یک ۳-رنگ‌آمیزی یالی مجاز از گرافی ۳-منتظم، یک رنگ‌آمیزی تایت نامیده می‌شود. در بخش آینده، در مورد روش ناکام تایت در برخورد با مسأله چهاررنگ، بحث خواهیم کرد. گروتز (۱۹۵۸)<sup>۲</sup> درستی حدس چهاررنگ را در مورد گراف‌های مسطح بدون مثلث بررسی نموده است. در حقیقت او نشان داده است که هر گراف مسطح بدون مثلثی، ۳-رنگ‌پذیر رأسی است.

## تمرین‌ها

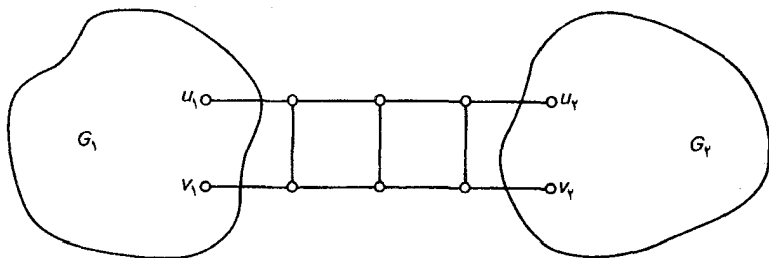
- ۹-۱۶ نشان دهید که گراف مسطح‌شده  $G$ ، ۲-رنگ‌پذیر وجهی است اگر و تنها اگر  $G$  اویلری باشد.  
 ۹-۲۶ نشان دهید که مثلث‌بندی مسطح‌شده  $G$ ، ۳-رنگ‌پذیر رأسی است اگر و تنها اگر  $G$  اویلری باشد.  
 ۹-۳۶ نشان دهید که هر گراف مسطح‌شده همپلتنی، ۴-رنگ‌پذیر وجهی است.

۴-۶-۹ نشان دهید که هر گراف ۳-منتظم همیلتنی دارای یک رنگ‌آمیزی تایت است.

۵-۶-۹ قضیه ۹-۱۲ را با نشان دادن  $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$  ثابت کنید.

۶-۶-۹ فرض کنید که  $G$  یک گراف ۳-منتظم با شرط  $\kappa' = 2$  باشد.

(الف) نشان دهید که زیرگراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  از  $G$  و زوج رأس‌های نامجاور  $u_1, v_1 \in V(G_1)$  و  $u_2, v_2 \in V(G_2)$  وجود دارند به طوری که  $G$  از اتصال گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  به وسیله یک «نردبان» روی رأس‌های  $u_1, v_1, u_2, v_2$  تشکیل شده است.



(ب) نشان دهید که اگر  $G_1 + u_1v_1$  و  $G_2 + u_2v_2$  هر دو دارای رنگ‌آمیزی تایت باشند. آنگاه  $G$  نیز دارای رنگ‌آمیزی تایت است.

(ج) با استفاده از قضیه ۹-۱۲ نتیجه بگیرید که حدس چهاررنگ هم ارز با حدس تایت است که: هر گراف مسطح ۳-همبند ۳-منتظم ساده، یک رنگ‌آمیزی تایت دارد.

۷-۶-۹ برای موارد زیر، مثالی بیاورید:

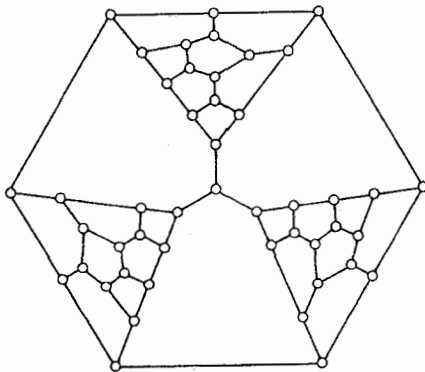
(الف) یک گراف مسطح ۳-منتظم که به هیچ وجه رنگ‌آمیزی تایت نداشته باشد.

(ب) یک گراف ۲-همبند ۳-منتظم که به هیچ وجه، رنگ‌آمیزی تایت نداشته باشد.

## ۷-۹ گراف‌های مسطح ناهمیلتنی

تایت (۱۸۸۰) طی تلاش خود برای اثبات حدس چهاررنگ، مشاهده نمود که کافی است نشان دهد هر گراف مسطح ۳-همبند ۳-منتظم دارای یک رنگ‌آمیزی تایت است (تمرین ۹-۶۶). او با این فرض غلط که هر گراف با مشخصات فوق، همیلتنی است. اثباتی برای حدس چهاررنگ ارائه نمود (تمرین ۹-۴۶ را ملاحظه

نمایید). تقریباً نیم قرن بعد، تات<sup>۱</sup> (۱۹۴۶) نشان داد که اثبات تایت نادرست است بدین ترتیب که یک گراف سطح ۳-همبند ۳-منتظم ساخت که ناهمبندی بود. این گراف در شکل ۲۵-۹ نشان داده شده است. تات با استدلال بسیار ساده‌ای (تمرین ۹-۷-۱) نشان داد که این گراف ناهمبندی است و برای سال‌ها، گراف تات، تنها مثال شناخته شده از یک گراف سطح ۳-همبند ۳-منتظم ناهمبندی بود. پس از آن، گرینبرگ<sup>۲</sup> (۱۹۶۸) یک شرط لازم برای همبندی بودن گراف‌های سطح کشف کرد. این کشف او به ساختن تعداد زیادی گراف سطح ناهمبندی رهنمون گردید.



شکل ۲۵-۹. گراف تات

**قضیه ۱۳-۹** فرض کنید  $G$  یک گراف سطح شده بدون طوقه با یک دور همبندی  $C$  باشد. در این صورت

داریم:

$$\sum_{i=1}^n (i-2)(\phi'_i - \phi''_i) = 0 \quad (۳-۹)$$

که در آن  $\phi'_i$  و  $\phi''_i$ ، به ترتیب برابر تعداد وجه‌های با درجه  $i$  در  $Int C$  و  $Ext C$  می‌باشند.

**اثبات** زیرمجموعه‌ای از  $E(G) \setminus E(C)$  را که در  $Int C$  قرار دارد با  $E'$  نمایش می‌دهیم و فرض

می‌کنیم  $|E'| = \varepsilon'$ . در این صورت  $Int C$  دقیقاً شامل  $\varepsilon' + 1$  وجه خواهد بود (شکل ۲۶-۹ را ملاحظه

نمایید) و همچنین داریم:

$$\sum_{i=1}^n \phi'_i = \varepsilon' + 1 \quad (۴-۹)$$

از طرفی هر یال  $E'$  روی مرز دو وجه از  $Int C$  و هر یال  $C$  دقیقاً بر روی مرز یک وجه از وجوه درون  $Int C$

قرار دارد. در نتیجه داریم:

$$\sum_{i=1}^{\nu} i\phi'_i = 2\varepsilon' + \nu \quad (۵-۹)$$

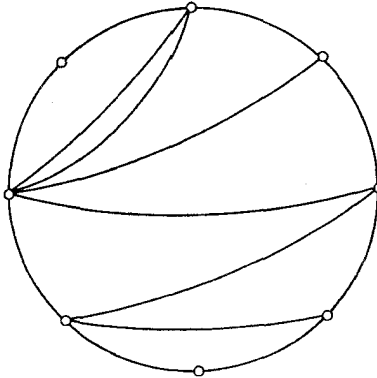
با استفاده از رابطه (۴-۹) می‌توانیم  $\varepsilon'$  را از رابطه (۵-۹) حذف کرده به رابطه زیر برسیم:

$$\sum_{i=1}^{\nu} (i-2)\phi'_i = \nu - 2 \quad (۶-۹)$$

به‌طور مشابه داریم:

$$\sum_{i=1}^{\nu} (i-2)\phi''_i = \nu - 2 \quad (۷-۹)$$

با ترکیب روابط (۶-۹) و (۷-۹)، رابطه (۳-۹) به دست می‌آید. □



شکل ۹-۲۶

به کمک قضیه ۹-۱۳، به سادگی می‌توان نشان داد که مثلاً گراف گرینبرگ (شکل ۹-۲۷) ناهمبندی است. فرض کنید که این گراف همبندی است. در این صورت با توجه به اینکه گراف فقط دارای وجه‌هایی با درجه پنج، هشت و نه است شرط (۳-۹) ایجاب می‌کند که:

$$3(\phi'_5 - \phi''_5) + 6(\phi'_8 - \phi''_8) + 7(\phi'_9 - \phi''_9) = 0$$

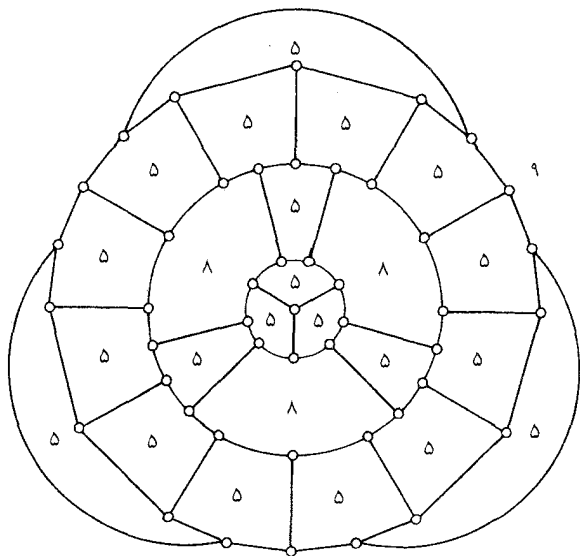
در نتیجه داریم:

$$7(\phi'_9 - \phi''_9) \equiv 0 \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

ولی این مطلب غیرممکن است، زیرا مقدار عبارت سمت چپ، بسته به اینکه وجه با درجه ۹، درون  $C$  یا درون  $Ext C$  باشد، ۷ یا ۷- خواهد بود. در نتیجه گراف نمی‌تواند همبندی باشد.

گرچه گراف‌های مسطح ۳-همبندی وجود دارند که ناهمبندی هستند ولی تا (۱۹۵۶) نشان داده است که تمام گراف‌های مسطح ۴-همبند، همبندی هستند.





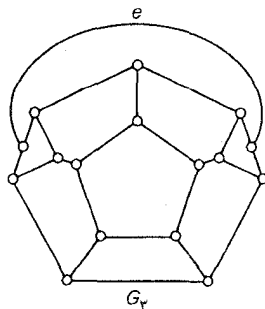
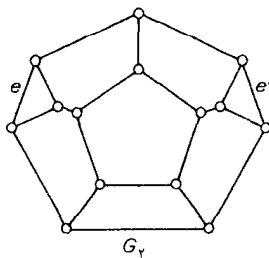
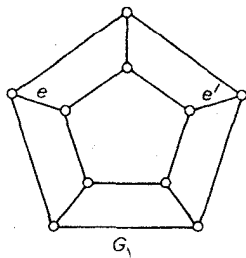
شکل ۹-۲۷. گراف گرینبرگ

### تمرین‌ها

۹-۷-۱ الف) نشان دهید هیچ دور همیلتنی از گراف  $G_1$  در شکل زیر، نمی‌تواند شامل هر دو یال  $e$  و  $e'$  باشد.

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که هیچ دور همیلتنی در گراف  $G_2$  نمی‌تواند شامل هر دو یال  $e$  و  $e'$  باشد.

ج) با استفاده از قسمت (ب) نشان دهید که هر دور همیلتنی در گراف  $G_3$  باید شامل یال  $e$  باشد.



(د) نتیجه بگیرید که گراف تات (شکل ۲۵-۹) ناهمبختی است.

۲-۷-۹. با به کارگیری قضیه ۹-۱۳، نشان دهید که گراف هرشل (شکل ۲-۴ ب) ناهمبختی است (درحقیقت

این گراف، کوچکترین گراف مسطح ۳-همبند ناهمبختی است).

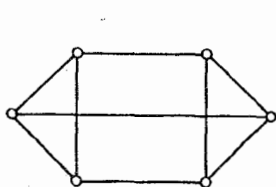
۳-۷-۹. مثالی از یک گراف مسطح ۳-منتظم ناهمبختی ساده با همبندی دو ارائه نمایید.

## کاربردها

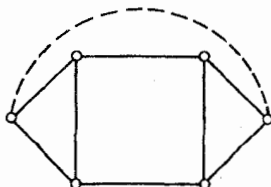
### ۸-۹ الگوریتمی برای تعیین مسطح بودن گراف‌ها

کاربردهای عملی فراوانی وجود دارند که در آن‌ها، تعیین اینکه آیا یک گراف مسطح است، و در صورت مسطح بودن گراف، پیدا کردن یک نشانندن مسطح از آن اهمیت بسیاری دارد. به‌طورمثال، در زمینه طراحی مدارهای چاپی، تشخیص مسطح بودن یک شبکه الکتریکی خاص می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد. در این بخش، برای حل این مسأله الگوریتمی ارائه خواهیم کرد که متعلق به دموکرون<sup>۱</sup>، مالگرانژ<sup>۲</sup> و پرتویست<sup>۳</sup> (۱۹۶۴) می‌باشد.

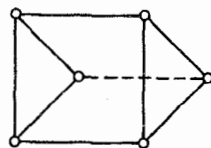
فرض کنید  $H$  یک زیرگراف مسطح از گراف  $G$  و  $\bar{H}$  یک نشانندن مسطح از  $H$  در صفحه باشد. می‌گوئیم  $\bar{H}$ ،  $G$ -مجاز است هرگاه  $G$  مسطح بوده، یک نشانندن مسطح  $\bar{G}$  از  $G$  با شرط  $\bar{H} \subseteq \bar{G}$  وجود داشته باشد. به‌طورمثال در شکل ۲۸-۹، دو نشانندن از یک زیرگراف مسطح  $G$  نشان داده شده‌اند که یکی از آن‌ها  $G$ -مجاز و دیگری  $G$ -نامجاز است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲۸-۹. (الف)  $G$ ، (ب)  $G$ -مجاز، (ج)  $G$ -نامجاز

فرض کنید  $B$  یک پل دلخواه از  $H$  (در  $G$ ) باشد. می‌گوئیم  $B$  در وجه  $f$  از  $\bar{H}$  قابل رسم است، هرگاه رأس‌های اتصال  $B$  به  $H$  همگی روی  $f$  قرار گرفته باشند. مجموعهٔ وجه‌هایی از  $\bar{H}$  که  $B$  قابل رسم در آن‌ها است، با  $F(B, \bar{H})$  نمایش می‌دهیم. قضیهٔ زیر یک شرط لازم برای مسطح بودن  $G$  ارائه می‌نماید.

**قضیهٔ ۹-۱۴** اگر  $\bar{H}$ ،  $G$ -مجاز باشد آنگاه به‌ازای هر پل  $B$  از  $H$  داریم:  $F(B, \bar{H}) \neq \emptyset$ .

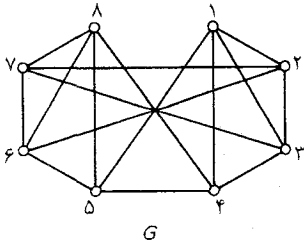
**اثبات** اگر  $\bar{H}$ ،  $G$ -مجاز باشد، در این صورت طبق تعریف، یک نشانندن مسطح  $\bar{G}$  از  $G$  وجود دارد به طوری که  $\bar{H} \subseteq \bar{G}$ . بدیهی است زیرگرافی از  $\bar{G}$  که متناظر با پل  $B$  از  $H$  است، باید به یک وجه از  $\bar{H}$  محدود شده باشد. بنابراین  $\square. F(B, \bar{H}) \neq \emptyset$ .

می‌دانید که یک گراف، مسطح است اگر و تنها اگر هر بلوک از گراف سادهٔ زمینهٔ آن مسطح باشد، بنابراین کافی است فقط بلوک‌های ساده را در نظر بگیریم. فرض کنید یک چنین گراف  $G$  داده شده باشد. الگوریتم زیر یک دنبالهٔ افزایشی  $G_1, G_2, \dots$  از زیرگراف‌های مسطح  $G$  و نشانندن‌های مسطح متناظر  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots$  را تعیین می‌کند. هنگامی که  $G$  مسطح باشد، هر  $\bar{G}_i$ ،  $G$ -مجاز بوده، دنباله  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots$  به یک نشانندن مسطح از  $G$  منتهی می‌شود. در هر مرحله برای امتحان نامسطح بودن  $G$ ، از شرط لازم قضیهٔ ۹-۱۴ استفاده می‌شود.

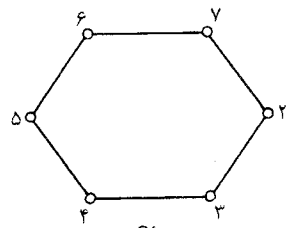
## الگوریتم مسطح بودن

- (۱) با فرض اینکه  $G_1$  یک دور در  $G$  است، یک نشانندن مسطح  $\bar{G}_1$  از  $G_1$  یافته، قرار بده  $i=1$ .
- (۲) اگر  $E(G) \setminus E(G_i) = \emptyset$ ، توقف کن. در غیر این صورت تمام پل‌های  $G_i$  در  $G$  را مشخص نموده، به‌ازای هر کدام از این پل‌ها مانند  $B$ ، مجموعهٔ  $F(B, \bar{G}_i)$  را پیدا کن.
- (۳) اگر پلی مثل  $B$  وجود داشت که به‌ازای آن  $F(B, \bar{G}_i) = \emptyset$ ، توقف کن و طبق قضیهٔ ۹-۱۴،  $G$  نامسطح است. اگر پلی مانند  $B$  وجود داشت که به‌ازای آن  $|F(B, \bar{G}_i)| = 1$  بود، قرار بده  $\{f\} = F(B, \bar{G}_i)$ ، در غیر این صورت،  $B$  را یک پل دلخواه و  $f$  را یک وجه دلخواه با شرط  $f \in F(B, \bar{G}_i)$  در نظر بگیر.
- (۴) یک مسیر  $P_i$  با شرط  $P_i \subseteq B$  پیدا کن که دو رأس اتصال  $B$  به  $G_i$  را به یکدیگر وصل کند. قرار بده  $G_{i+1} = G_i \cup P_i$  و با رسم  $P_i$  در وجه  $f$  از  $\bar{G}_i$  یک نشانندن مسطح  $\bar{G}_{i+1}$  از  $\bar{G}_i$  به دست آور.  $i$  را با  $i+1$  جایگزین نموده، به مرحله ۲ برو.

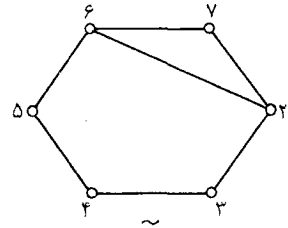
برای نشان دادن این الگوریتم گراف  $G$  در شکل ۹-۲۹ را در نظر می‌گیریم یا دور  $G_1 = 23345672$  و فهرستی از پل‌های آن (که به منظور اختصار، با مجموعهٔ یال‌های آن‌ها نشان داده شده‌اند) شروع می‌کنیم.



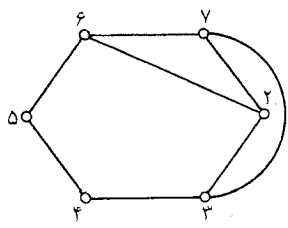
$G$



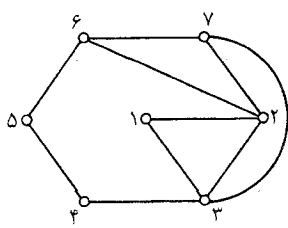
$\tilde{G}_1$   
 $\{12, 13, 14, 15\}, \{26\}$   
 $\{48, 58, 68, 78\}, \{37\}$



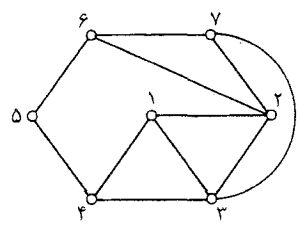
$\tilde{G}_2$   
 $\{12, 13, 14, 15\}$   
 $\{48, 58, 68, 78\}, \{37\}$



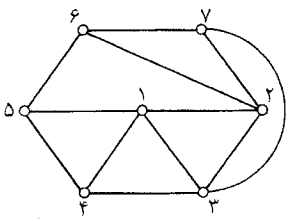
$\tilde{G}_3$   
 $\{12, 13, 14, 15\}$   
 $\{48, 58, 68, 78\}$



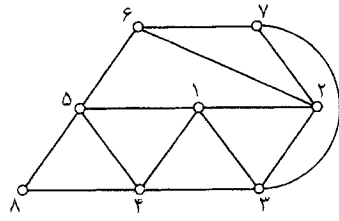
$\tilde{G}_4$   
 $\{14\}, \{15\}, \{48, 58, 68, 78\}$



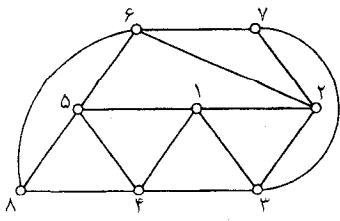
$\tilde{G}_5$   
 $\{15\}, \{48, 58, 68, 78\}$



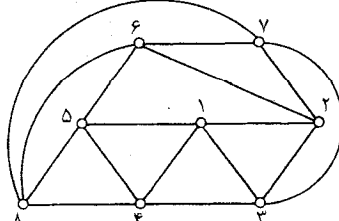
$\tilde{G}_6$   
 $\{48, 58, 68, 78\}$



$\tilde{G}_7$   
 $\{68\}, \{78\}$



$\tilde{G}_8$   
 $\{78\}$

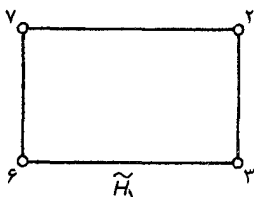
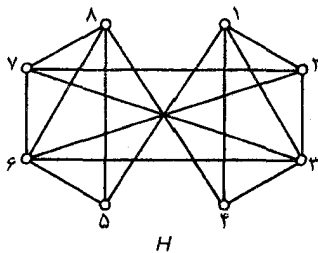


$\tilde{G}_9$

شکل ۹-۲۹

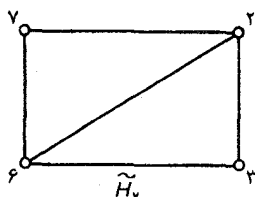
در هر مرحله، پل‌هایی مانند  $B$  که به‌ازای آن‌ها  $|F(B, \bar{G}_i)| = 1$  است را با حروف تیره‌تر مشخص کرده‌ایم. در این مثال، الگوریتم با نشان دادن مسطح  $\bar{G}_9$  از  $G$  خاتمه می‌یابد، پس  $G$  مسطح است.

فرض کنید که می‌خواهیم الگوریتم را بر روی گراف  $H$ ، که از حذف یال ۴۵ و افزودن یال ۳۶ به گراف  $G$  به‌دست آمده است، (شکل ۹-۳۰) اعمال کنیم. این کار را از دور ۲۳۶۷۲ مطابق شکل ۹-۳۰ آغاز می‌کنیم و با ساختن  $\bar{H}_3$ ، به پل  $B = \{12, 13, 14, 15, 34, 48, 56, 58, 68, 78\}$  می‌رسیم که به‌ازای آن داریم:  $F(B, \bar{H}_3) = \phi$ . در این حالت، الگوریتم متوقف می‌شود (مرحله ۳) و نتیجه می‌گیریم که  $H$  نامسطح است.



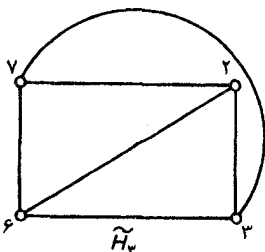
$\{26\}, \{27\}$

$\{12, 13, 14, 15, 34, 48, 56, 58, 68, 78\}$



$\{37\}$

$\{12, 13, 14, 15, 34, 48, 56, 58, 68, 78\}$

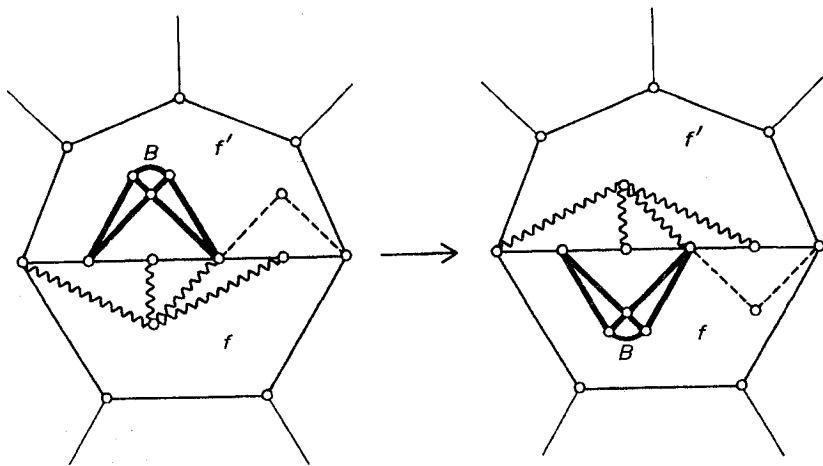


$\{12, 13, 14, 15, 34, 48, 56, 58, 68, 78\}$

?

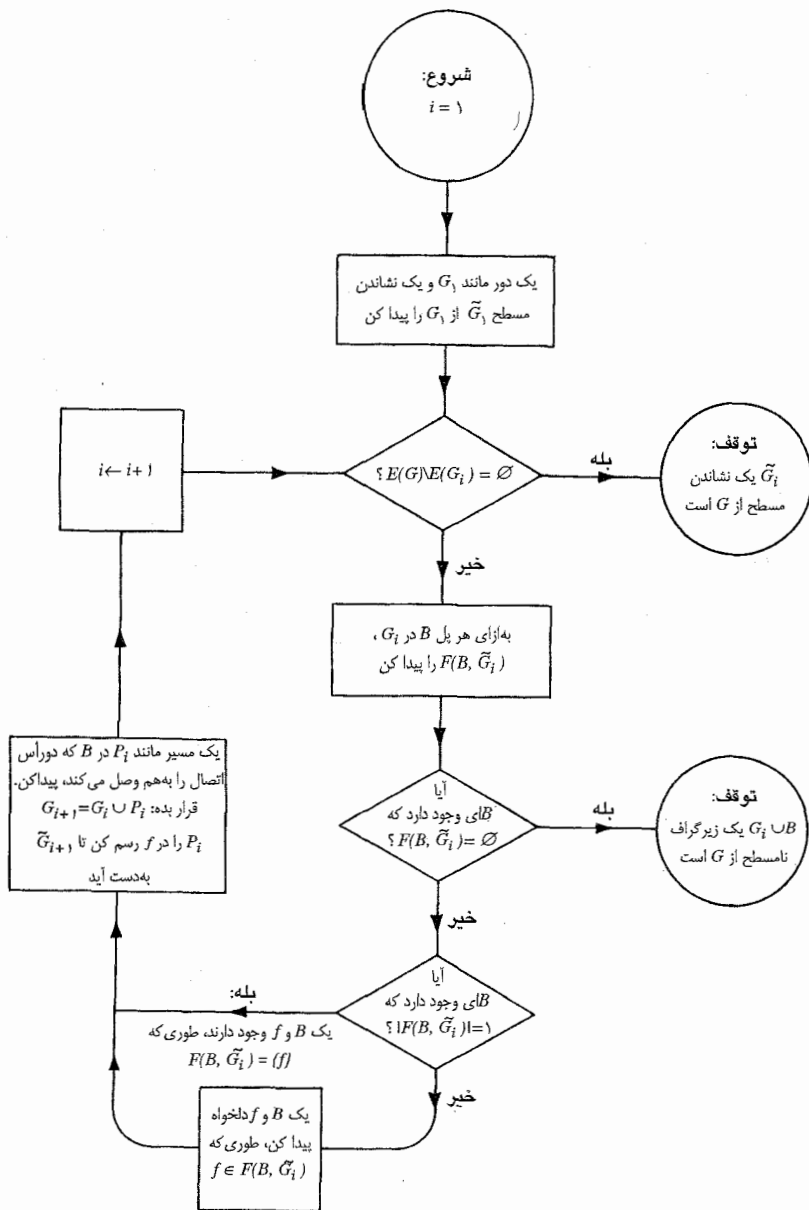
برای اثبات درستی الگوریتم باید نشان دهیم که اگر  $G$  مسطح باشد، آنگاه هر جمله از دنباله  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots$ ،  $\bar{G}_{\varepsilon-\nu+1}$ ، مجاز است. دموکرن، مالگرائز و پرتویست این مطلب را با استقراء ثابت کردند. در ادامه به ذکر رئوس کلی اثبات آن‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید  $G$  مسطح باشد.  $G$ -مجاز بودن  $G_1$  بدیهی است. فرض می‌کنیم که به‌ازای هر  $G$ -مجاز باشد. طبق تعریف، یک نشانندن مسطح  $\bar{G}$  از  $G$  وجود دارد به طوری که  $\bar{G}_k \subset \bar{G}$  می‌خواهیم نشان دهیم که  $\bar{G}_{k+1}$  نیز  $G$ -مجاز است. فرض کنید  $B$  و  $f$  طبق مرحله ۳ الگوریتم تعریف شده باشند. اگر در  $\bar{G}$ ،  $B$  درون  $f$  رسم شده باشد، مسلماً  $\bar{G}_{k+1}$ ،  $G$ -مجاز خواهد بود. بنابراین فرض می‌کنیم که هر پلی از  $G_k$  فقط در یک وجه از  $\bar{G}_k$  قابل رسم نیست و همچنین در  $\bar{G}$ ،  $B$  در وجه دیگری مانند  $f'$  رسم شده است. از آنجایی که هیچ پلی تنها در یک وجه قابل رسم نیست، در نتیجه هر پلی که رأس‌های اتصال آن محدود به مرز مشترک  $f'$  و  $f$  است نمی‌تواند با هر پلی که دارای این خاصیت نیست درگیر باشد. بنابراین می‌توانیم پل‌ها را روی مرز مشترک  $f'$  و  $f$  معاوضه کنیم و به یک نشانندن مسطح از  $G$  برسیم که در آن  $B$  در  $f$  رسم شده است (شکل ۹-۳۱ را ملاحظه نمایید). در نتیجه  $\bar{G}_{k+1}$ ، باز هم  $G$ -مجاز خواهد بود.



شکل ۹-۳۱

الگوریتمی که بررسی شد یک الگوریتم خوب است. از روی نمودار گردش (شکل ۹-۳۲) به راحتی می‌توان دید که عملیات اصلی عبارتند از:



شکل ۹-۳۲. الگوریتم مسطح بودن

(الف) یافتن دوری مثل  $G_1$  در بلوک  $G$

(ب) تعیین پل‌های  $G_i$  در  $G$  و یافتن رأس‌های اتصال آنها به  $G_i$

(ج) تعیین  $b(f)$  برای هر وجه  $f$  از  $\bar{G}_i$

(د) تعیین  $F(B, \bar{G}_i)$  برای هر پل  $B$  از  $G_i$

(ه) یافتن مسیری مانند  $P_i$  در پلی مانند  $B$  از  $G_i$ ، بین دو رأس از  $V(B, G_i)$

برای هر یک از اعمال فوق، الگوریتم خوبی وجود دارد که جزئیات آن را به‌عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

الگوریتم‌های پیچیده‌تر دیگری هم برای آزمون مسطح بودن گراف‌ها وجود دارد. به‌عنوان مثال، [Hopcroft and Tarjan; 1974] را ملاحظه نمایید.

### تمرین

۱.۸.۹ با استفاده از الگوریتم فوق نشان دهید که گراف پترسن نامسطح است.



## مراجع

- emoucron, G., Malgrange, Y. and Pertuiset, R. (1964). *Graphes Planaires: reconnaissance et construction de représentations planaires topologiques*. *Rev. Française Recherche Opérationnelle*, 8, 33–47
- Dirc, G. A. and Schuster, S. (1954). *A theorem of Kuratowski*. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, 57, 343–48
- Fáry, I. (1948). *On straight line representation of planar graphs*. *Acta Sci. Math. Szeged*, 11, 229–33
- Fréchet, M. and Ky Fan (1967). *Initiation to Combinatorial Topology*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston
- Grinberg, È. Ja (1968). *Plane homogeneous graphs of degree three Without Hamiltonian circuits (Russian)*. *Latvian Mat. Yeabook*, 4, 51–58
- Grötzsch, H. (1958). *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*. *Wiss. Z. Martin–Luther–Univ. Halle–Wittenberg. Math.–Nat. Reihe*, 9, 109–19
- Heawood, P. J. (1890). *Map colour theorems*. *Quart. J. Math.*, 24, 332–38
- Hopcroft, J. E. and Tarjan, R. E. (1974). *Efficient Planarity testing*, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 21, 549–568
- Kuratowski, C. (1930). *sur le problème des courbes gauches en topologie*, *Fund. Math.*, 15, 271–83
- Ore, O. (1967). *The Four– Color Problem*, Academic press, New York
- Tait, P. G. (1880). *Remarks on colouring of maps*. *Proc. Royal Soc. Edinburgh Ser. A.*, 10, 729
- Tutte, W. T. (1946). *On Hamiltonian circuits*, *J. London Math. Soc.*, 21, 98–101
- Tutte, W. T. (1956). *A theorem on planar graphs*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82, 99–116
- Wagner, K. (1937). *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*, *Math. Ann.*, 114, 570–90

# فصل ۱۰

## گراف‌های جهت‌دار

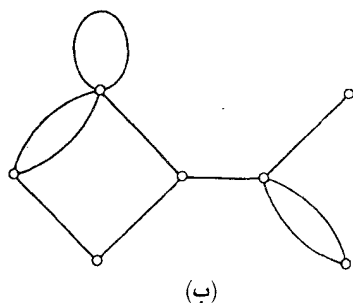
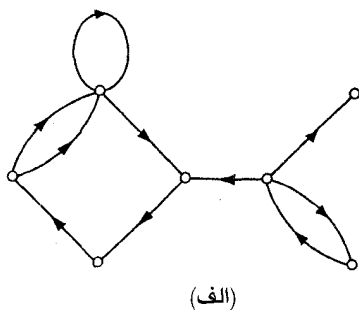
### ۱۰-۱ گراف‌های جهت‌دار

گرچه می‌توان بسیاری از مسائلی را به‌طور طبیعی بر پایه یک فرمول نظریه گراف‌ی بیان نمود، ولی گاهی اوقات مفهوم یک گراف به‌تنهایی برای بیان آن‌ها کافی نیست. به‌عنوان مثال، هنگامی‌که با مسائلی ترافیک سروکار داریم، لازم است بدانیم که کدام خیابان‌ها یک طرفه‌اند و حرکت در چه جهتی مجاز است. مسلماً در چنین وضعیتی نمی‌توان از یک گراف، به‌خوبی بهره گرفت. آن‌چه که در اینجا بدان نیازمندیم، گرافی است که به هر یال آن، یک جهت اختصاص یافته باشد و به عبارت دیگر، یک گراف جهت‌دار مورد نیاز است. **گراف جهت‌دار**  $D$ ، یک سه‌تایی مرتب  $(V(D), A(D), \psi_D)$  است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی  $V(D)$  از رأس‌ها، یک مجموعه  $A(D)$  (مجزای از  $V(D)$ ) از کمان‌ها و یک تابع وقوع  $\psi_D$  که به هر کمان  $D$ ، یک زوج مرتب از رأس‌های  $D$  - که الزاماً متمایز نیستند - را نسبت می‌دهد. اگر  $a$  یک کمان و  $v$  و  $u$  دو رأس باشند به‌طوری‌که  $\psi_D(a) = (u, v)$ ، آنگاه می‌گوئیم که  $a$ ،  $u$  را به  $v$  وصل کرده است؛  $u$ ، دم  $a$  و  $v$ ، سر  $a$  نامیده می‌شود. می‌گوئیم گراف جهت‌دار  $D'$ ، یک زیرگراف جهت‌دار از  $D$  است هرگاه  $V(D') \subseteq V(D)$ ،  $A(D') \subseteq A(D)$  و  $\psi_{D'}$  از محدود کردن  $\psi_D$  به  $A(D')$  حاصل شده باشد. اصطلاحات و نمادهای مربوط به زیرگراف‌های جهت‌دار مشابه همان‌هایی هستند که برای زیرگراف‌ها استفاده می‌شدند.

می‌توانیم به هر گراف جهت‌دار  $D$ ، یک گراف  $G$  با همان مجموعه رأس‌ها متناظر کنیم، به‌طوری‌که به‌ازای هر کمان از  $D$ ، یک یال در  $G$  با همان دو سر وجود داشته باشد. این گراف، گراف زمینه  $D$  نامیده می‌شود. بالعکس، می‌توانیم از هر گراف دلخواه  $G$ ، یک گراف جهت‌دار به‌دست آوریم بدین صورت که برای هر یال، یک ترتیب روی رأس‌های دو سر آن مشخص نماییم. گراف جهت‌دار حاصل را یک جهت‌دهی از  $G$  می‌نامیم.

گراف‌های جهت‌دار هم، مانند گراف‌ها، دارای یک نمایش تصویری ساده هستند. یک گراف جهت‌دار با نموداری از گراف زمینهٔ آن، به‌علاوهٔ پیکان‌هایی که سر کمان متناظر با هر یال آن را مشخص می‌کنند، نمایش داده می‌شود. یک گراف جهت‌دار، به همراه گراف زمینهٔ آن در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده است. هر مفهومی که برای گراف‌ها برقرار باشد به‌طور خودکار برای گراف‌های جهت‌دار نیز معتبر خواهد بود. بنابراین گراف جهت‌دار شکل ۱-۱۰ الف همبند است و هیچ دوری به طول ۳ ندارد، زیرا گراف زمینهٔ آن (شکل ۱-۱۰ ب) دارای این ویژگی‌هاست. به هر حال، مفاهیم بسیاری وجود دارند که شامل مفهوم جهت می‌باشند و تنها برای گراف‌های جهت‌دار معتبرند.

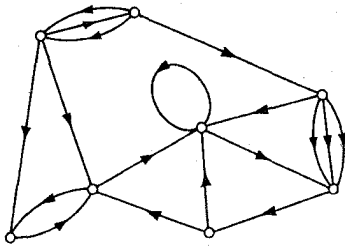
یک گشت جهت‌دار در  $D$  عبارتست از یک دنبالهٔ متناهی ناتهی  $W = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k)$ ، که جمله‌های آن یک‌درمیان، رأس و کمان هستند و به‌ازای  $i = 1, 2, \dots, k$  کمان  $a_i$  دارای سر  $v_i$  و دم  $v_{i-1}$  است. همانند گشت‌ها در گراف‌ها، غالباً گشت جهت‌دار  $(v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k)$  را به‌طور ساده با دنبالهٔ رأس‌های  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  نمایش می‌دهیم. گذرگاه جهت‌دار، گشت جهت‌داری است که گذرگاه باشد. مسیرهای جهت‌دار، دوره‌های جهت‌دار و توره‌های جهت‌دار نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.



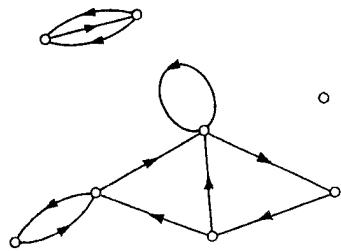
شکل ۱-۱۰. الف) گراف جهت‌دار  $D$  (ب) گراف زمینهٔ  $D$

اگر یک  $(u, v)$ -مسیر جهت‌دار در  $D$  موجود باشد، در این صورت می‌گوئیم رأس  $v$  از رأس  $u$  قابل دستیابی است. ذو رأس در  $D$ ، قویاً همبندند اگر هر یک، از دیگری قابل دستیابی باشد. قویاً همبندی همانند همبندی در گراف‌ها، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ رأس‌های  $D$  می‌باشد. زیرگراف‌های جهت‌دار  $D[V_1]$ ،  $D[V_2]$ ، ... و  $D[V_m]$  که توسط افراز به‌دست آمدهٔ  $(V_1, V_2, \dots, V_m)$  از  $V(D)$  القا شده‌اند،

مؤلفه‌های قوی  $D$  نامیده می‌شوند. می‌گوییم یک گراف جهت‌دار، قویاً همبند است، در صورتی که تنها یک مؤلفه قوی داشته باشد. گراف جهت‌دار شکل ۱۰-۲ الف قویاً همبند نیست، بلکه دارای سه مؤلفه قوی می‌باشد که در شکل ۱۰-۲ ب نشان داده شده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۲. (الف) گراف جهت‌دار  $D$  (ب) سه مؤلفه قوی  $D$ 

درجه ورودی رأس  $v$ ،  $d_D^-(v)$ ، برابر است با تعداد کمان‌هایی که  $v$ ، سر آنهاست و درجه خروجی رأس  $v$ ،  $d_D^+(v)$ ، برابر است با تعداد کمان‌هایی که  $v$ ، دم آنهاست. بیشترین و کمترین درجه خروجی و درجه ورودی در  $D$  را به ترتیب  $\Delta^+(D)$ ،  $\delta^+(D)$ ،  $\Delta^-(D)$  و  $\delta^-(D)$  نمایش می‌دهیم. گراف جهت‌دار دارای هیچ طوقه‌ای نیست و بین هر دو رأس آن، هیچ دو کمان هم جهتی قرار ندارد، یک گراف جهت‌دار قوی نامیده می‌شود.

در طول این فصل،  $D$  نمایانگر یک گراف جهت‌دار و  $G$  نمایانگر گراف زمینه آن خواهد بود. این قرارداد به ما اجازه می‌دهد که به‌طور مثال، مجموعه رأس‌های  $D$  را با  $V$  نشان دهیم (زیرا  $V=V(G)$ ) و همچنین تعداد رأس‌ها و کمان‌های  $D$  را به ترتیب با  $v$  و  $\varepsilon$  نمایش می‌دهیم. همانند کاری که در مورد گراف‌ها انجام می‌دادیم، در اینجا نیز هرگاه امکان داشته باشد، حرف  $D$  را از نمادها حذف می‌کنیم، مثلاً به جای  $A(D)$ ،  $A$ ، به جای  $d_D^+(v)$ ،  $d^+(v)$  و به جای  $\delta^-(D)$ ،  $\delta^-$  را به کار می‌بریم.

### تمرین‌ها

۱-۱-۱۰ یک گراف ساده  $G$ ، چند جهت دهی می‌تواند داشته باشد؟

۲-۱-۱۰ نشان دهید:  $\sum_{v \in V} d^-(v) = \varepsilon = \sum_{v \in V} d^+(v)$

۳-۱-۱۰ فرض کنید  $D$  یک گراف جهت‌دار باشد که هیچ دور جهت‌داری ندارد.

(الف) نشان دهید  $\delta^- = 0$ .

(ب) نتیجه بگیرید که یک ترتیب  $v_1, v_2, \dots, v_n$  از  $V$  وجود دارد به طوری که به ازای  $1 \leq i \leq n$ ، هر کمان  $D$  که سر آن  $v_i$  است، دم آن در مجموعهٔ  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$  قرار داشته باشد.

۴-۱-۱۰ نشان دهید که  $D$  قویاً همبند است اگر و تنها اگر  $D$  همبند بوده و هر بلوک آن قویاً همبند باشد.

۵-۱-۱۰ عکس  $D$  که آن را با  $\bar{D}$  نمایش می‌دهیم، گراف جهت‌داری است که از معکوس کردن جهت هر کمان به دست می‌آید.

(الف) نشان دهید که:

$$\bar{\bar{D}} = D \quad (۱)$$

$$d_{\bar{D}}^+(v) = d_D^-(v) \quad (۲)$$

(۳) در  $\bar{D}$ ،  $v$  قابل دستیابی از  $u$  است اگر و تنها اگر در  $D$ ،  $u$  قابل دستیابی از  $v$  باشد.

(ب) با استفاده از قسمت (۲) فوق و تمرین ۱۰-۱-۳ نشان دهید که اگر  $D$  یک گراف جهت‌دار، بدون دور جهت‌دار باشد، آنگاه  $\delta^+ = 0$ .

۶-۱-۱۰ نشان دهید که اگر  $D$  قوی باشد در این صورت شامل مسیر جهت‌داری به طول حداقل  $\max\{\delta^-, \delta^+\}$  است.

۷-۱-۱۰ نشان دهید که اگر  $D$  قوی باشد و  $\max\{\delta^-, \delta^+\} = k > 0$ ، آنگاه  $D$  شامل یک دور جهت‌دار به طول حداقل  $k+1$  است.

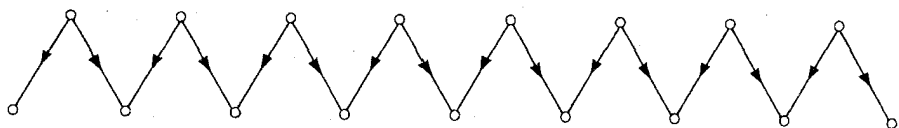
۸-۱-۱۰ فرض کنید  $v_1, v_2, \dots, v_n$  رأس‌های گراف جهت‌دار  $D$  باشند. ماتریس مجاورت  $D$ ،  $A = [a_{ij}]$ ، یک ماتریس  $n \times n$  است که در آن،  $a_{ij}$  برابر تعداد کمان‌هایی از  $D$  است که  $v_i$  را به  $v_j$  وصل می‌کنند. نشان دهید که  $(i, j)$ -امین درایهٔ  $A^k$  برابر با تعداد  $(v_i, v_j)$ -گشت‌های جهت‌دار به طول  $k$  در  $D$  می‌باشد.

۹-۱-۱۰ فرض کنید  $D_1, D_2, \dots, D_m$  مؤلفه‌های قوی  $D$  باشند. تراکم  $D$  که آنرا با  $\hat{D}$  نشان می‌دهیم، گراف جهت‌داری است با  $m$  رأس  $w_1, w_2, \dots, w_m$  که در آن کمانی از  $w_i$  به  $w_j$  وجود دارد اگر و تنها اگر کمانی در  $\hat{D}$  موجود باشد که دم آن در  $D_i$  و سر آن در  $D_j$  است. نشان دهید که  $\hat{D}$  شامل هیچ دور جهت‌داری نیست.

۱۰-۱-۱۰ نشان دهید که  $G$  دارای یک جهت‌دهی مانند  $D$  است که در آن به ازای هر  $v \in V$  شرط  $|d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$  برقرار می‌باشد.

## ۲-۱۰ مسیرهای جهت‌دار

طول مسیرها و مسیرهای جهت‌دار در گراف‌های جهت‌دار، ارتباط مستقیمی با یکدیگر ندارند. این مطلب از گراف جهت‌دار شکل ۳-۱۰ که مسیر جهت‌داری به طول بیشتر از یک ندارد، کاملاً مشهود است.



شکل ۳-۱۰

شگفت‌آور آن‌که، با نگاه به عدد رنگی یک گراف جهت‌دار می‌توان اطلاعاتی راجع به طول مسیرهای جهت‌دار آن به‌دست آورد. قضیه زیر که متعلق به روی<sup>۱</sup> (۱۹۶۷) و گالای<sup>۲</sup> (۱۹۶۸) می‌باشد به توضیح این مطلب می‌پردازد.

**قضیه ۱-۱۰** گراف جهت‌دار  $D$  شامل مسیر جهت‌داری به طول  $k-1$  است.

**اثبات** فرض کنید  $A'$  یک مجموعه مینیمال از کمان‌های  $D$  است به طوری که  $D' = D - A'$  شامل هیچ دور جهت‌داری نیست و فرض کنید که طول بلندترین مسیر جهت‌دار در  $D'$  برابر  $k$  باشد، رنگ‌های ۱، ۲، ... و  $k+1$  را به این ترتیب به رأس‌های  $D'$  اختصاص می‌دهیم که رأس  $v$  دارای رنگ  $i$  است، اگر طول بلندترین مسیر جهت‌دار در  $D'$  با ابتدای  $v$ ، برابر  $i-1$  باشد. مجموعه رأس‌های به رنگ  $i$  را با  $V_i$  نمایش می‌دهیم. در ادامه نشان خواهیم داد که  $(V_1, V_2, \dots, V_{k+1})$ ، یک  $(k+1)$ -رنگ‌آمیزی رأسی مجاز از  $D$  است.

در ابتدا توجه به این مطلب ضروری است که ابتدا و انتهای هر مسیر جهت‌دار در  $D'$ ، رنگ‌های متفاوتی دارند. زیرا فرض کنید که  $P$  یک  $(u, v)$ -مسیر جهت‌دار با طول مثبت در  $D'$  و  $v \in V_i$  می‌باشد. در این صورت یک مسیر جهت‌دار  $Q = (v_1, v_2, \dots, v_i)$  در  $D'$  وجود دارد که در آن  $v_1 = v$ . چون  $D'$  شامل هیچ دور جهت‌داری نیست،  $PQ$  یک مسیر با ابتدای  $u$  و طول حداقل  $i$  می‌باشد. پس داریم:  $u \notin V_i$ .

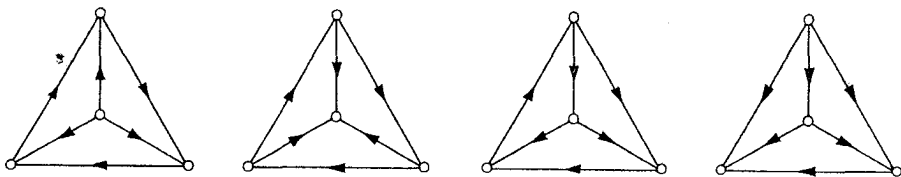
اکنون می‌توانیم نشان دهیم که دو سر هر کمانی از  $D$  رنگ‌های متفاوتی دارند. فرض کنید  $(u, v) \in A(D')$ . اگر  $(u, v) \in A(D')$ ، در این صورت  $(u, v)$  یک مسیر جهت‌دار در  $D'$  است و در نتیجه  $u$  و  $v$  رنگ‌های متفاوتی دارند. در غیر این صورت داریم:  $(u, v) \in A'$ . با توجه به مینیمال بودن  $A'$ ،  $D' + (u, v)$

شامل یک دور جهت‌دار در  $C$  است. در این صورت  $C-(u,v)$  یک  $(v,u)$ -مسیر جهت‌دار در  $D'$  بوده و بنابراین در این حالت هم،  $u$  و  $v$  رنگ‌های متفاوتی دارند.

بنابراین  $(V_1, V_2, \dots, V_{k+1})$  یک رنگ‌آمیزی رأسی مجاز از  $D$  می‌باشد. در نتیجه داریم:  $\chi \leq k+1$  و بنابراین  $D$  دارای مسیر جهت‌داری به طول  $k \geq \chi - 1$  است.  $\square$

نتیجه بهتری که می‌توان از قضیه ۱-۱۰ حاصل نمود، این است که هر گراف  $G$ ، دارای یک جهت‌دهی است که طول بزرگترین مسیر جهت‌دار آن  $\chi - 1$  است. اگر یک  $\chi$ -رنگ‌آمیزی رأسی مجاز  $(V_1, V_2, V_\chi), \dots$  از  $G$  داده شده باشد،  $G$  را بدین صورت جهت‌دهی می‌کنیم: اگر  $u \in V_i$  و  $v \in V_j$  با شرط  $i < j$ ، یال  $uv$  را به کمان  $(u,v)$  تبدیل می‌کنیم. واضح است که در این جهت‌دهی از  $G$ ، هیچ مسیر جهت‌داری نمی‌تواند بیش از  $\chi$  رأس داشته باشد زیرا هیچ دو رأس از مسیر نمی‌توانند هم‌رنگ باشند.

یک جهت‌دهی از گراف کامل را یک تورنمنت می‌نامیم. تورنمنت‌های چهار رأسی، در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده‌اند. هر یک از این تورنمنت‌ها را می‌توان به‌عنوان نتایج بازی‌های یک مسابقه دوره‌ای بین چهار بازیکن در نظر گرفت. به‌طور مثال تورنمنت اول در شکل ۴-۱۰ نشان می‌دهد که یک بازیکن، هر سه بازی خود را برنده شده است و دیگر بازیکنان، هر کدام، فقط یک برد دارند.



شکل ۴-۱۰. تورنمنت‌های چهار رأسی

یک مسیر همیلتنی جهت‌دار از  $D$ ، مسیر جهت‌داری است که تمام رأس‌های  $D$  را شامل می‌گردد. بلافاصله از قضیه ۱-۱۰ نتیجه می‌شود که هر تورنمنت دارای چنین مسیری است. این مطلب نخستین بار توسط ری‌دی<sup>۱</sup> (۱۹۳۴) اثبات شد.

**نتیجه ۱-۱۰** هر تورنمنت دارای یک مسیر همیلتنی جهت‌دار است.

**اثبات** اگر  $D$  یک تورنمنت باشد، در این صورت  $\chi = v$ .  $\square$

مطلب جالب توجه دیگر در مورد تورنمنت‌ها این است که همیشه یک رأس وجود دارد که تمام رأس‌های دیگر با یک مسیر جهت‌دار به طول حداکثر دو، از آن قابل دستیابی هستند. این مطلب را به‌عنوان حالت خاصی از قضیهٔ چویتال<sup>۱</sup> و لاواژ<sup>۲</sup> (۱۹۷۴) به‌دست می‌آوریم. یک همسایه ورودی از رأس  $v$  در  $D$ ، رأسی مانند  $u$  است به طوری که داشته باشیم:  $(u, v) \in A$ . یک همسایه خروجی از رأس  $v$  در  $D$ ، رأسی مانند  $w$  است به طوری که  $(v, w) \in A$ . مجموعهٔ همسایه‌های ورودی و همسایه‌های خروجی  $v$  را به ترتیب با  $N_D^-(v)$  و  $N_D^+(v)$  نمایش می‌دهیم.

**قضیهٔ ۱۰-۲** گراف جهت‌دار بدون طوقه  $D$ ، دارای مجموعهٔ مستقلی مانند  $S$  است، به طوری که هر رأس  $D$  که در  $S$  نیست، توسط مسیر جهت‌داری به طول حداکثر ۲، از یک رأس  $S$  قابل دستیابی است.

**اثبات** از استقراء روی  $v$  استفاده می‌کنیم. درستی قضیه به‌ازای  $v=1$  بدیهی است. فرض کنید که قضیه به‌ازای تمام گراف‌های جهت‌دار با کمتر از  $v$  رأس برقرار باشد و  $v$  را یک رأس دلخواه از  $D$  در نظر بگیرید. طبق فرض استقراء مجموعهٔ مستقلی مانند  $S'$  در  $D - (\{v\} \cup N^+(v))$  وجود دارد به طوری که هر رأس  $D'$  که در  $S'$  نیست، توسط مسیر جهت‌داری به طول حداکثر ۲، از یک رأس  $S'$  قابل دستیابی است. اگر  $v$  یک همسایه خروجی از رأسی مانند  $u$  در  $S'$  باشد، آنگاه هر رأس از  $N^+(v)$  با مسیر جهت‌داری به طول ۲ از  $u$  قابل دستیابی است. بنابراین در این حالت،  $S=S'$  ویژگی مورد نظر را داراست. از طرف دیگر، اگر  $v$  همسایه خروجی هیچ رأسی از  $S'$  نباشد، در این صورت  $v$  به هیچ رأسی از  $S'$  متصل نیست و مجموعهٔ مستقل  $S = S' \cup \{v\}$  دارای ویژگی مورد نظر خواهد بود.  $\square$

**نتیجهٔ ۱۰-۲** هر تورنمنت، شامل رأسی است که تمام رأس‌های دیگر با مسیر جهت‌داری به طول حداکثر ۲ از آن قابل دستیابی می‌باشند.

**اثبات** اگر  $D$  یک تورنمنت باشد، آنگاه  $\alpha=1$ .  $\square$

## تمرین‌ها

۱۰-۲-۱ نشان دهید که هر تورنمنت، یا قویاً همبند است یا می‌توان با تغییر جهت دادن فقط یک یال، آن را به یک تورنمنت قویاً همبند تبدیل نمود.

۱۰-۲-۲\* می‌گوییم گراف جهت‌دار  $D$ ، یک طرفه است، هر گاه به‌ازای هر دو رأس  $u$  و  $v$ ، یا  $u$  از  $v$  قابل



دستیابی باشد و یا  $v$  از  $u$  قابل دستیابی باشد. نشان دهید  $D$  یک طرفه است اگر و تنها اگر دارای یک گشت جهت‌دار فراگیر باشد.

۳-۲-۱۰ الف) فرض کنید  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  یک مسیر جهت‌دار ماکزیمال در تورنمنت  $D$  باشد. با فرض اینکه  $P$  یک مسیر همیلتنی جهت‌دار نیست،  $v$  را یک رأس دلخواه، خارج از  $P$  در نظر بگیرید. نشان دهید که به ازای یک مقدار  $i$ ،  $(v_i, v)$  و  $(v, v_{i+1})$ ، هر دو کمان‌هایی از  $D$  هستند.

ب) با توجه به قسمت الف) قضیه ریدی را نتیجه بگیرید.

۴-۲-۱۰ نتیجه ۲-۱۰ را با در نظر گرفتن یک رأس یا بیشترین درجه خروجی، اثبات نمایید.

۵-۲-۱۰\* الف) فرض کنید  $D$  یک گراف جهت‌دار با شرط  $\chi > mn$  باشد و  $f$  را یک تابع حقیقی تعریف شده روی  $V$  در نظر بگیرید. نشان دهید که  $D$  یا شامل مسیر جهت‌داری مانند  $(u_0, u_1, \dots, u_m)$  با شرط  $f(u_0) \leq f(u_1) \leq \dots \leq f(u_m)$  است و یا دارای مسیر جهت‌داری مثل  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  با شرط  $f(v_0) > f(v_1) > \dots > f(v_n)$  می‌باشد. (V. Chvátal and J. Komlós)

ب) نتیجه بگیرید که هر دنباله از  $mn+1$  عدد صحیح متمایز، یا شامل یک دنباله صعودی  $m$  جمله‌ای است و یا شامل یک دنباله نزولی  $n$  جمله‌ای می‌باشد.

(P. Erdős and G. Szekeres)

۶-۲-۱۰ الف) با استفاده از قضیه ۱-۱۰ و نتیجه ۱۲-۸ نشان دهید که  $G$  دارای یک جهت‌دهی است به طوری که طول هر مسیر جهت‌دار در آن، حداکثر برابر  $\Delta$  باشد.

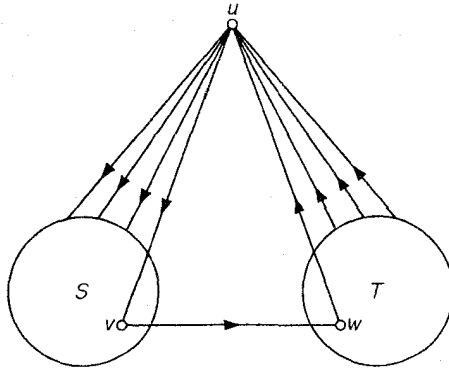
ب) یک اثبات ساختاری برای قسمت الف) ارائه نمایید.

### ۳-۱۰ دورهای جهت‌دار

نتیجه ۱-۱۰ گویای این مطلب بود که هر تورنمنت، شامل یک مسیر همیلتنی جهت‌دار است. اگر فرض کنیم که تورنمنت قویاً همبند است، می‌توانیم نتایج قویتری نیز به دست آوریم. قضیه زیر متعلق به مون<sup>۱</sup> (۱۹۶۶) است. اگر  $S$  و  $T$ ، زیرمجموعه‌هایی از  $V$  باشند، مجموعه کمان‌هایی از  $D$  که دم آن‌ها در  $S$  و سر آن‌ها در  $T$  باشد، با  $(S, T)$  نمایش می‌دهیم.

**قضیه ۱۰-۳** هر رأس از یک تورنمنت قویاً همبند  $D$  با  $v \geq 3$ ، درون یک  $k$ -دور جهت‌دار با شرط  $3 \leq k \leq v$  قرار دارد.

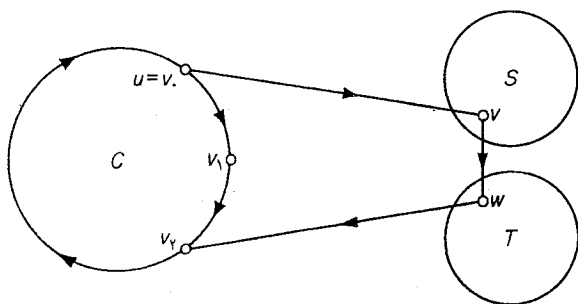
**اثبات** فرض کنید  $D$  یک تورنمنت قویاً همبند با شرط  $v \geq 3$  و  $u$  یک رأس دلخواه از  $D$  باشد. قرار می‌دهیم  $S = N^+(u)$  و  $T = N^-(u)$ . ابتدا نشان می‌دهیم که  $u$  درون یک ۳-دور جهت‌دار قرار دارد. چون  $D$  قویاً همبند است،  $S$  و  $T$  هیچ کدام نمی‌توانند تهی باشند و به همین علت،  $(S, T)$  باید ناتهی باشد (شکل ۱۰-۵ را ملاحظه نمایید). بنابراین کمائی مانند  $(v, w)$  با شرط  $v \in S$  و  $w \in T$  وجود دارد و در ۳-دور جهت‌دار  $(u, v, w, u)$  قرار می‌گیرد.



شکل ۱۰-۵

اینک قضیه را با استقراء روی  $k$  اثبات می‌کنیم. فرض کنید  $u$  درون دورهای جهت‌دار به هر یک از طول‌های ۳ تا  $n$  قرار داشته باشد ( $n < v$ ). در ادامه نشان خواهیم داد که  $u$  در یک  $(n+1)$ -دور جهت‌دار نیز قرار دارد.

فرض کنید  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  یک  $n$ -دور جهت‌دار باشد که در آن  $v_0 = v_n = u$ . اگر رأسی مانند  $v$  در  $V(D) \setminus V(C)$  وجود داشته باشد که سر یک کمان که دم آن روی  $C$  است و دم کمان دیگری که سر آن روی  $C$  است، باشد در این صورت رأس‌های مجاور  $v_i$  و  $v_{i+1}$  روی  $C$  وجود دارند به طوری که  $(v_i, v)$  و  $(v, v_{i+1})$  کمان‌هایی از  $D$  هستند. در این حالت،  $u$  درون  $(n+1)$ -دور جهت‌دار  $(v_0, v_1, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$  قرار دارد. در غیر این صورت، مجموعه رأس‌هایی از  $V(D) \setminus V(C)$  که سر کمان‌های متصل به  $C$  هستند را با  $S$  و مجموعه رأس‌هایی از  $V(D) \setminus V(C)$  که دم کمان‌های متصل به  $C$  هستند را با  $T$  نمایش می‌دهیم (شکل ۱۰-۶ را ملاحظه نمایید).



شکل ۶-۱۰

همانند حالت قبل، با توجه به اینکه  $D$  قویاً همبند است،  $T, S$  و  $(S, T)$  همگی ناتهی هستند و کمائی مانند  $(v, w)$  در  $D$  با شرط  $v \in S$  و  $w \in T$  وجود دارد. بنابراین  $u$  درون  $(n+1)$ -دور جهت‌دار  $(v_0, v, w, v_1, \dots, v_n)$  قرار دارد.  $\square$

یک دور همیلتنی جهت‌دار از  $D$ ، دور جهت‌داری است که تمام رأس‌های  $D$  را شامل می‌شود. با توجه به قضیهٔ ۳-۱۰، هر تورنمنت قویاً همبند، شامل چنین دوری است. این مطلب را نخستین بار، کمیون<sup>۱</sup> (۱۹۵۹) ثابت کرد. قضیه بعد، قضیهٔ دیراک (قضیهٔ ۳-۴) را به گراف‌های جهت‌دار تعمیم می‌دهد. این قضیه، حالت خاصی از قضیه منسوب به قویلا-هوری<sup>۲</sup> (۱۹۶۰) می‌باشد.

**قضیهٔ ۱-۱۰** اگر  $D$  قوی و  $\frac{v}{4} > \min\{\delta^-, \delta^+\} \geq 1$  باشد، آنگاه  $D$  شامل یک دور همیلتنی جهت‌دار است.

**اثبات** فرض کنید که  $D$  در فرض قضیه صدق می‌کند ولی دارای یک دور همیلتنی جهت‌دار نیست. طول یکی از بلندترین دورهای جهت‌دار  $D$  را با  $l$  نمایش داده، فرض می‌کنیم  $C = (v_1, v_2, \dots, v_l, v_1)$ ، دور جهت‌داری با طول  $l$  در  $D$  باشد.

مسئلاً داریم  $l > \frac{v}{4}$  (تمرین ۷-۱۰). فرض کنید  $P$  یکی از بلندترین مسیرهای جهت‌دار در  $D - V(C)$  باشد و فرض کنید ابتدای  $P$ ،  $u$  و انتهای آن،  $v$  و طول آن  $m$  باشد (شکل ۷-۱۰ را ملاحظه نمایید). روشن است که:

$$v \geq l + m + 1 \quad (1-10)$$

و چون  $l > \frac{v}{4}$ ، داریم:

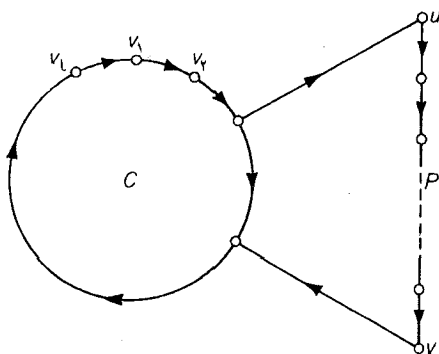
$$m < \frac{v}{4} \quad (2-10)$$

قرار می‌دهیم:

$$S = \{i \mid (v_{i-1}, u) \in A\} \text{ و } T = \{i \mid (v, v_i) \in A\}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که  $S$  و  $T$  مجزا هستند. فرض کنید  $C_{j,k}$  نمایانگر قسمتی از  $C$  باشد که ابتدای آن  $v_j$  و انتهایش  $v_k$  است. اگر عدد صحیحی مانند  $i$  مشترکاً در  $S$  و  $T$  باشد، باید شامل دور جهت‌دار  $C_{i, i-1}(v_{i-1}, u)P(v, v_i)$  به طول  $l+m+1$  باشد که با انتخاب  $C$  در تناقض است. بنابراین داریم:

$$S \cap T = \emptyset \quad (۳-۱۰)$$



شکل ۷-۱۰

با توجه به اینکه  $P$ ، یک مسیر جهت‌دار ماکزیمم در  $D-V(C)$  است، داریم  $N^-(u) \subseteq V(P) \cup V(C)$ . اما تعداد همسایه‌های ورودی  $u$  در  $C$  دقیقاً برابر  $|S|$  است و در نتیجه  $d_{\bar{D}}(u) = d_{\bar{P}}(u) + |S|$ . با توجه به این که  $d_{\bar{P}}(u) \leq m$  و  $d_{\bar{D}}(u) \geq \delta^- \geq \frac{\nu}{\gamma}$  داریم:

$$|S| \geq \frac{\nu}{\gamma} - m \quad (۴-۱۰)$$

استدلال مشابهی نتیجه می‌دهد که:

$$|T| \geq \frac{\nu}{\gamma} - m \quad (۵-۱۰)$$

توجه داشته باشید که طبق رابطه (۲-۱۰)،  $S$  و  $T$  هر دو ناتهی هستند. با جمع کردن رابطه‌های (۴-۱۰) و (۵-۱۰) و با استفاده از رابطه (۱-۱۰) به دست می‌آید:

$$|S| + |T| \geq l - m + 1$$

و بنابراین، طبق رابطه (۳-۱۰) داریم:

$$|S \cup T| \geq l - m + 1 \quad (۶-۱۰)$$

از آن جایی که  $S$  و  $T$  مجزا و ناتهی هستند، اعداد صحیح مثبتی مثل  $i$  و  $k$  وجود دارند، به طوری که داریم:

$$i \in S \text{ و } i+k \in T$$

$$(۷-۱۰) \quad i+j \notin S \cap T : \text{ به ازای } 1 \leq j < k$$

(عمل جمع در پیمانه  $l$  انجام شده است).

با توجه به روابط (۶-۱۰) و (۷-۱۰) می‌بینیم که  $k \leq m$ . بنابراین دور جهت‌دار

$C_{i+k, i-1}(v_{i-1}, u)P(v, v_{i+k})$ ، که طول آن،  $l+m+1-k$  است، طولانی‌تر از  $C$  می‌باشد. این تناقض،

درستی قضیه را اثبات می‌کند.  $\square$

## تمرین‌ها

۱-۳-۱۰ نشان دهید که چگونه می‌توان قضیهٔ ۳-۴ را از قضیهٔ ۴-۱۰ نتیجه گرفت.

۲-۳-۱۰ یک تور اویلری جهت‌دار، از  $D$ ، تور جهت‌داری است که از هر کمان  $D$  دقیقاً یکبار عبور می‌کند.

نشان دهید که  $D$  شامل یک تور اویلری جهت‌دار است اگر و تنها اگر،  $D$  همبند بوده، به‌ازای هر

$$v \in V \text{ داشته باشیم: } d^+(v) = d^-(v)$$

۳-۳-۱۰ فرض کنید  $D$  گراف جهت‌داری باشد که در آن:

$$(۱) \quad d^+(x) - d^-(x) = l = d^-(y) - d^+(y)$$

$$(۲) \quad \text{به‌ازای هر } v \in V \setminus \{x, y\}, \quad d^+(v) = d^-(v)$$

با استفاده از تمرین ۲-۳-۱۰ نشان دهید که به‌تعداد  $l$ ، مسیر جهت‌دار با کمان‌های مجزا در

$D$  وجود دارد.

۴-۳-۱۰ نشان دهید گراف جهت‌دار قویاً همبندی که دارای یک دور فرد است، شامل یک دور فرد جهت‌دار

نیز هست.

۵-۳-۱۰ می‌گوئیم گراف جهت‌دار غیر بدیهی  $D$ ،  $k$ -همبند کمانی است اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ سرهٔ

ناتهی  $S$  از  $V$  داشته باشیم:  $|(S, \bar{S})| \geq k$ . نشان دهید که یک گراف جهت‌دار غیر بدیهی، قویاً

همبند است اگر و تنها اگر ۱-همبند کمانی باشد.

۶-۳-۱۰ گراف جهت‌دار وابستهٔ  $G$  که آن را با  $D(G)$  نمایش می‌دهیم، گراف جهت‌داری است که از

جایگزینی نمودن هر یال  $e$  از  $G$  با دو کمان غیر هم‌جهت بین دو سر  $e$  به‌دست می‌آید. نشان دهید:

(الف) یک تناظر یک‌به‌یک، میان مسیرهای  $G$  و مسیرهای جهت‌دار  $D(G)$  وجود دارد.

(ب)  $D(G)$ ،  $k$ -همبند کمانی است اگر و تنها اگر  $G$ ،  $k$ -همبند یالی باشد.

## کاربردها

### ۴-۱۰ مسأله دنباله کارها

کارهای  $J_1, J_2, \dots, J_n$  باید توسط یک ماشین انجام شوند. هر کار می‌تواند به‌طور مثال سفارش یک نوع بطری یا پارچ شیشه‌ای در یک کارخانه شیشه باشد. پس از اتمام هر کار، ماشین باید برای انجام کار بعدی تنظیم شود. اگر زمان تنظیم کردن ماشین از روی کار  $J_i$  به کار  $J_j$  باشد،  $t_{ij}$  باشد، می‌خواهیم کارها را طوری زمانبندی کنیم که مجموع زمان‌های مورد نیاز برای تنظیم دستگاه به کمترین مقدار ممکن باشد.

این مسأله، به روشنی در ارتباط با مسأله فرسند دوره گرد می‌باشد و تا کنون روش کارآمدی برای حل این مسأله شناخته نشده است. بنابراین آنچه که مورد نظر ماست این است که روشی برای به‌دست آوردن یک جواب نسبتاً خوب - و نه الزاماً بهینه - پیدا کنیم. روشی که در اینجا ارائه می‌کنیم از قضیه ریدی (نتیجه ۱-۱۰) کمک می‌گیرد.

مرحله ۱ گراف جهت‌دار  $D$  با رأس‌های  $v_1, v_2, \dots, v_n$  را به گونه‌ای بساز که  $(v_i, v_j) \in E$ ، اگر و تنها اگر داشته باشیم:  $t_{ij} \leq t_{ji}$ . طبق تعریف،  $D$  شامل یک تورنمنت فراگیر است.

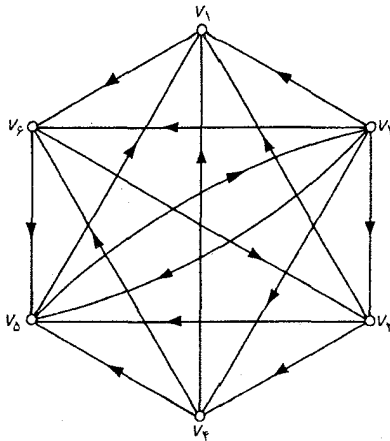
مرحله ۲ یک مسیر همیلتنی جهت‌دار از  $D$  پیدا کرده (تمرین ۱-۴) و کارها را بر طبق آن زمانبندی کن.

از آن جایی که مرحله ۱، از نیمه بزرگتر ماتریس تنظیم  $[t_{ij}]$  صرف‌نظر می‌کند، در حالت کلی می‌توان انتظار داشت که این روش، به یک زمانبندی نسبتاً خوب برای کارها به‌دست آورد. با این حال توجه داشته باشید که اگر ماتریس تنظیم، متقارن باشد، با روش فوق هیچ کمکی به ما نخواهد کرد.

به‌عنوان مثال، فرض کنید که شش کار  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$  دارای ماتریس تنظیم زیر هستند.

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$
$J_1$	۰	۵	۳	۴	۲	۱
$J_2$	۱	۰	۱	۲	۳	۲
$J_3$	۲	۵	۰	۱	۲	۳
$J_4$	۱	۴	۴	۰	۱	۲
$J_5$	۱	۳	۴	۵	۰	۵
$J_6$	۴	۴	۲	۳	۱	۰

دنباله  $J_6 \rightarrow J_8 \rightarrow J_4 \rightarrow J_3 \rightarrow J_2 \rightarrow J_1$  به ۱۳ واحد زمانی برای تنظیم نیاز دارد. برای یافتن دنباله بهتر، گراف جهت‌دار  $D$  را مطابق مرحله ۱ می‌سازیم.



شکل ۸-۱۰

یک مسیر همبستگی جهت‌دار در  $D$  است که به دنباله زیر منتهی می‌شود:

$$J_1 \rightarrow J_6 \rightarrow J_3 \rightarrow J_4 \rightarrow J_8 \rightarrow J_2$$

این دنباله تنها به هشت واحد زمانی جهت تنظیم نیاز دارد. توجه کنید که دنباله معکوس

$$J_2 \rightarrow J_8 \rightarrow J_4 \rightarrow J_3 \rightarrow J_6 \rightarrow J_1$$

بسیار بدتر است و به ۱۹ واحد زمانی جهت تنظیم نیازمند است.

## تمرین‌ها

۱-۴-۱۰ به کمک تمرین ۳-۲-۱۰، الگوریتم خوبی برای یافتن یک مسیر همبستگی جهت‌دار در یک

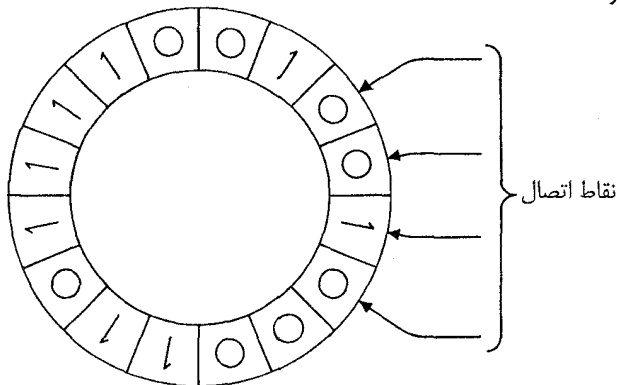
تورنمنت توضیح دهید.

۲-۴-۱۰ با یک مثال نشان دهید که زمانبندی به‌دست آمده از روش فوق، ممکن است با حالت بهینه،

اختلاف زیادی داشته باشد.

## ۵-۱۰ طراحی یک استوانه کامپیوتری کارآمد

موقعیت یک استوانه چرخان\*، به وسیله سیگنال‌های دودویی که در تعدادی نقطه اتصال الکتریکی روی سطح استوانه تولید می‌شوند، تشخیص داده می‌شود. سطح استوانه به  $2^n$  قسمت تقسیم شده است که هر قسمت، از یک مادهٔ رسانا یا نارسانا تشکیل شده است. قسمت‌های نارسانا، سیگنال ۰ (بدون جریان) و قسمت‌های رسانا سیگنال ۱ (جریان) تولید می‌کنند. به‌طور مثال، در شکل ۹-۱۰ موقعیت استوانه که توسط چهار نقطه اتصال خوانده می‌شود، برابر  $0010$  است. اگر استوانه در جهت گردش عقربه‌های ساعت، به اندازه یک قسمت بچرخد، عدد  $1001$  توسط نقاط اتصال خوانده خواهد شد. در نتیجه این دو موقعیت قابل تشخیص‌اند زیرا عدد خوانده شده در هر موقعیت متفاوت است. با این حال اگر به اندازه دو قسمت دیگر استوانه را بچرخانیم، به موقعیت دیگری با عدد  $0010$  می‌رسیم که این موقعیت، از موقعیت اولیه قابل تشخیص نخواهد بود.



شکل ۹-۱۰. یک استوانه کامپیوتری

می‌خواهیم سطح استوانه را به گونه‌ای طراحی کنیم که  $2^n$  موقعیت متفاوت آن، توسط  $k$  اتصال الکتریکی که پشت سرهم، دور استوانه قرار گرفته‌اند قابل تشخیص باشند و ضمناً عدد  $k$  تا حد ممکن، کوچک باشد. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

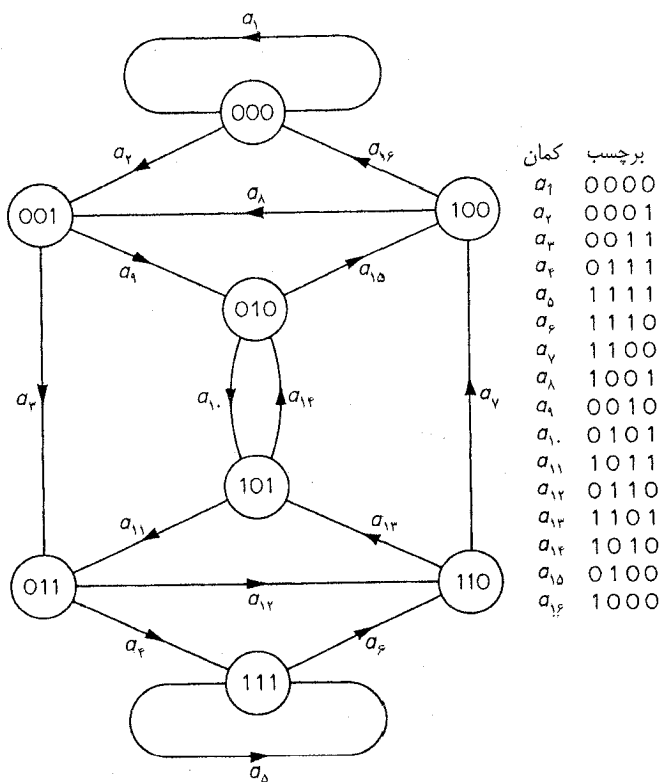
ابتدا توجه داشته باشید که  $k$  اتصال الکتریکی، یک عدد دو دویی  $k$  رقمی را معین می‌کنند که تعداد این عددها،  $2^k$  است. در نتیجه اگر تمام  $2^n$  موقعیت، اعداد متفاوتی را تولید کنند، باید داشته باشیم:  $2^k \geq 2^n$  و

\* استوانه (Drum) نوعی دستگاه ذخیره سازی اطلاعات در کامپیوترهای اولیه بوده است (مترجم).



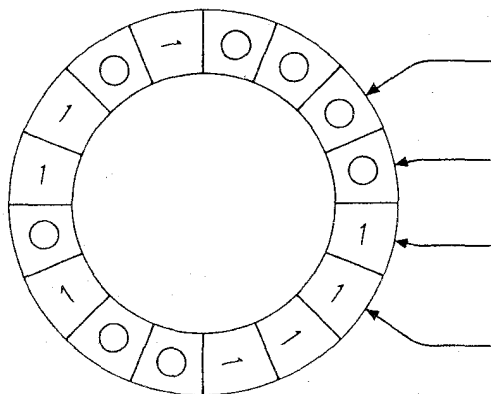
در نتیجه  $k \geq n$ . در ادامه نشان خواهیم داد که سطح استوانه را می‌توان به گونه‌ای طراحی کرد که  $n$  اتصال الکتریکی برای تشخیص تمام  $2^n$  موقعیت کافی باشد.

گراف جهت‌دار  $D_n$  را به این صورت تعریف می‌کنیم: رأس‌های  $D_n$ ، اعداد دودویی  $(n-1)$ -رقمی  $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$  هستند که هر  $p_i$  برابر ۰ یا ۱ است و کماتی از  $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$  به  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$  رسم می‌کنیم، اگر به‌ازای هر  $1 \leq i \leq n-2$ ، داشته باشیم:  $p_{i+1} = q_i$ . به عبارت دیگر، تمام کمان‌های  $D_n$  به‌صورت  $(p_1 p_2 \dots p_{n-1}, p_2 p_3 \dots p_n)$  می‌باشند. ضمناً به هر کمان  $(p_1 p_2 \dots p_{n-1}, p_2 p_3 \dots p_n)$  از  $D_n$ ، برچسب  $p_1 p_2 \dots p_n$  را تخصیص می‌دهیم. در شکل ۱۰-۱۰ نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۱۰

مسئلاً  $D_n$  همبند است و درجهٔ ورودی و درجهٔ خروجی هر رأس  $D_n$  برابر دو می‌باشد. بنابراین  $D_n$  دارای یک تور اویلری جهت‌دار است (تمرین ۱۰-۳-۲). اگر تور اویلری جهت‌دار را به صورت دنباله‌ای از کمان‌های  $D_n$  در نظر بگیرید، به یک رشته دودویی به طول  $2^n$  می‌رسیم که برای طراحی سطح استوانه مناسب است. به‌طور مثال، گراف جهت‌دار  $D_4$  در شکل ۱۰-۱۰ دارای تور اویلری  $(a_1, a_2, \dots, a_{16})$  است که رشته دودویی ۱۶-رقمی  $0000111100101101$  را نتیجه می‌دهد (فقط از رقم اول برجسب‌های  $a_i$  برای تولید رشته استفاده شده است). استوانه‌ای که توسط این رشته ساخته می‌شود در شکل ۱۱-۱۰ نشان داده شده است. کاربرد تورهای اویلری جهت‌دار در مسأله فوق، منسوب به گود (۱۹۴۶) باشد.



شکل ۱۰-۱۱

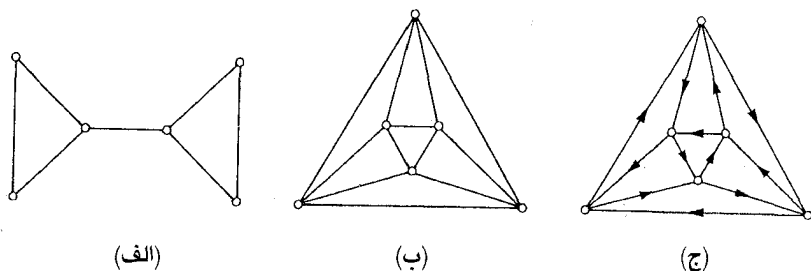
## تمرین‌ها

۱۰-۵-۱ یک دنباله دوری متشکل از هفت ۰ و هفت ۱ پیدا کنید طوری که تمام اعداد دودویی ۴رقمی به جز ۰۰۰۰ و ۱۱۱۱ در این دنباله وجود داشته باشند.

۱۰-۵-۲ فرض کنید که  $S$ ، الفبایی با  $n$  حرف باشد. نشان دهید یک دنباله دوری وجود دارد که هر حرف  $n^3$  بار در آن دنباله تکرار شده و هر «کلمهٔ» چهار حرفی ساخته شده از حروف  $S$ ، به صورت یک بلوک در این دنباله قرار دارد.

## ۱۰-۶ یک طرفه کردن جاده‌ها

فرض کنید یک سیستم جاده‌ای به ما داده شده است. چگونه می‌توان این سیستم را به صورت یک طرفه درآورد طوری که آرایش ترافیک تا حد ممکن حفظ شود؟ مسلماً این مسأله، به مسأله جهت دهی گراف‌ها برمی‌گردد. به‌عنوان مثال، گراف‌های شکل ۱۰-۱۲ الف و ۱۰-۱۲ ب راکه نشان‌دهنده شبکه‌های جاده‌ای هستند در نظر بگیرید.



شکل ۱۰-۱۲. الف)  $G_1$  (ب)  $G_2$  (ج)  $D_2$

به هر طریقی که  $G_1$  را جهت دهی کنیم، گراف جهت‌دار حاصل نمی‌تواند قویاً همبند باشد؛ یعنی ترافیک نمی‌تواند به‌طور آزاد در سیستم جریان داشته باشد. مشکل از آن‌جا ناشی می‌شود که  $G_1$ ، یال برشی دارد. از طرف دیگر  $G_2$  دارای جهت‌دهی «متعادل» است (شکل ۱۰-۱۲ ج) که در آن هر رأس، حداکثر طی دو مرحله از تمامی رأس‌های دیگر قابل دستیابی است و به ویژه  $D_2$  قویاً همبند است.

مسلماً شرط لازم برای اینکه یک جهت‌دهی، قویاً همبند باشد اینست که  $G$  ۲-همبند یالی باشد. رابینز (۱۹۳۹) نشان داد که این شرط، کافی نیز هست.

**قضیه ۱۰-۵** اگر  $G$ ، ۲-همبند یالی باشد، آنگاه  $G$  دارای یک جهت‌دهی قویاً همبند است.

**اثبات** فرض کنید  $G$ ، ۲-همبند یالی باشد. در این صورت  $G$  دارای دوری مثل  $G_1$  است. دنباله  $G_1, G_2, \dots$  از زیرگراف‌های همبند  $G$  را این‌گونه به صورت استقرایی تعریف می‌کنیم: اگر  $G_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) یک زیرگراف فراگیر از  $G$  نباشد، فرض می‌کنیم  $v_i$  رأسی از  $G$  باشد که در  $G_i$  نیست. در این صورت دو مسیر یال-مجزای  $P_i$  و  $Q_i$ ، از  $v_i$  به  $G_i$  وجود دارند (تمرین ۳-۲-۱). تعریف می‌کنیم:

$$G_{i+1} = G_i \cup P_i \cup Q_i$$

از آن جایی که در هر مرحله، شرط  $v(G_{i+1}) > v(G_i)$  برقرار است این دنباله به زیرگراف فراگیری از  $G$  همانند  $G_n$  ختم می‌شود. اکنون  $G_1$  را به صورت یک دور جهت‌دار، هر مسیر  $P_i$  را به صورت مسیر جهت‌داری با ابتدای  $v_i$  و هر مسیر  $Q_i$  را به صورت مسیر جهت‌داری با انتهای  $v_i$  جهت دهی می‌کنیم و بدین ترتیب به یک جهت دهی از  $G_n$  می‌رسیم. در نتیجه به هر  $G_i$  و به‌طور خاص  $G_n$ ، یک جهت دهی قویاً همبند داده شده است. از آن جایی که  $G_n$  یک زیرگراف فراگیر از  $G$  است، نتیجه می‌شود که خود  $G$  هم دارای یک جهت دهی قویاً همبند است. □

نش-ویلیامز<sup>۱</sup> (۱۹۶۰) قضیهٔ رایبیز را بدین صورت تعمیم داد که هر گراف  $2k$ -همبند یالی  $G$ ، یک جهت دهی  $k$ -همبند کمائی دارد.

گرچه اثبات این قضیه مشکل است ولی حالت خاصی از آن، وقتی که  $G$  دارای یک گذرگاه اویلری است، بسیار ساده است.

**قضیهٔ ۱۰-۶** فرض کنید  $G$  یک گراف  $2k$ -همبند یالی با یک گذرگاه اویلری باشد. در این صورت  $G$  دارای یک جهت دهی  $k$ -همبند کمائی است.

**اثبات** فرض کنید  $v_e, v_{e_1}, \dots, v_{e_i}$  یک گذرگاه اویلری از  $G$  باشد. با تبدیل هر یال  $e_i$  با دو سر  $v_{i-1}$  و  $v_i$  ( $1 \leq i \leq e$ ) به کمائی از  $v_{i-1}$  به  $v_i$ ،  $G$  را جهت دهی می‌کنیم. فرض کنید که  $[S, \bar{K}]$  یک  $m$ -برش یالی از  $G$  باشد. تعداد دفعاتی که گذرگاه جهت‌دار  $(v_e, a_1, v_1, \dots, a_e, v_e)$  از  $K$  به  $\bar{K}$  عبور می‌کند، با تعداد دفعاتی که این گذرگاه جهت‌دار از  $\bar{K}$  به  $S$  عبور می‌کند، حداکثر ۱ واحد اختلاف دارد. چون گذرگاه مزبور تمام کمان‌های  $D$  را شامل می‌گردد، هم  $(S, \bar{K})$  و هم  $(\bar{K}, S)$  باید حداقل شامل  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  کمان باشند. با توجه به این مطلب، قضیه اثبات می‌گردد. □

## تمرین‌ها

۱۰-۱۶ با در نظر گرفتن گراف پترسن نشان دهید که گزارهٔ زیر صحیح نیست:

هر گراف  $G$  دارای یک جهت دهی است که در آن، به‌ازای هر  $S \subseteq V$  اندازه  $(S, \bar{K})$  حداکثر ۱ واحد با اندازه  $(\bar{K}, S)$  تفاوت دارد.

۱۰-۲۶ الف) نشان دهید که قضیهٔ نش-ویلیامز با گزارهٔ زیر هم‌ارز است:

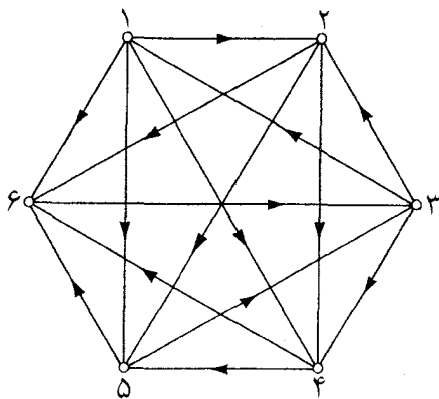
اگر هر باند  $G$  حداقل  $2k$  یال داشته باشد، در این صورت یک جهت دهی از  $G$  وجود دارد که در آن هر باند، حداقل  $k$  کمان در هر جهت دارد.

(ب) با در نظر گرفتن گراف گروتز (شکل ۸-۲) نشان دهید گزارهٔ زیر که مشابه قضیهٔ نش-ویلیامز است، صحیح نیست:

اگر هر دور  $G$ ، حداقل  $2k$  یال داشته باشد در این صورت یک جهت دهی از  $G$  وجود دارد که در آن هر دور، حداقل  $k$  کمان در هر جهت دارد.

### ۷-۱۰ رتبه‌بندی شرکت کنندگان در یک تورنمنت

در یک تورنمنت تیس، تعدادی بازیکن شرکت دارند که هر بازیکن با تمام بازیکنان دیگر مسابقه می‌دهد. اگر نتایج بازی‌ها را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم بازیکنان را رتبه‌بندی کنیم؟ به‌طور مثال، تورنمنت شکل ۱۰-۱۳ را در نظر بگیرید. این تورنمنت، نتایج بازی‌های بین شش بازیکن را نشان می‌دهد. بازیکن ۱، بازیکنان ۲، ۴، ۵، ۶ را شکست داده و مغلوب بازیکن ۳ شده است و الی آخر.



شکل ۱۰-۱۳

یک راه ممکن برای رتبه‌بندی بازیکنان این است که یک مسیر همیلتنی جهت‌دار در تورنمنت پیدا کنیم. (با توجه به نتیجهٔ ۱-۱۰ چنین مسیری حتماً وجود دارد). سپس با توجه به موقعیت بازیکنان در این مسیر، آن‌ها را رتبه‌بندی می‌کنیم. به‌عنوان مثال، مسیر همیلتنی جهت‌دار (۳، ۱، ۲، ۴، ۵، ۶) مشخص می‌کند که بازیکن ۳، قهرمان و بازیکن ۱ نایب قهرمان است و به همین ترتیب. البته این روش رتبه‌بندی، در عمل دچار مشکل می‌شود، زیرا یک تورنمنت در حالت کلی تعداد زیادی مسیر همیلتنی جهت‌دار دارد. در مثال فوق،

مسیرهای  $(1, 2, 4, 5, 6, 3)$ ،  $(1, 4, 6, 3, 2, 5)$  و غیره نیز در تورنمنت وجود دارند.

روش دیگر آن است که امتیازها (تعداد بازی‌های برده توسط هر بازیکن) را محاسبه کرده، آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. اگر این کار را برای مثال بالا انجام دهیم به بردار امتیاز زیر می‌رسیم.

$$S_1 = (4, 3, 3, 2, 2, 1)$$

مشکلی که در اینجا پدیدار می‌شود آنست که این بردار امتیاز، بین بازیکن‌های ۲ و ۳ تمایزی قائل نیست در حالی که بازیکن ۳ بازیکنانی با امتیازات بیشتر را شکست داده است. با توجه به این مطلب از بردار امتیاز مرتبه دوم زیر استفاده می‌کنیم.

$$S_2 = (8, 5, 9, 3, 4, 3)$$

که در این بردار، امتیاز مرتبه دوم هر بازیکن عبارت است از مجموع امتیازات بازیکنانی که از این بازیکن شکست خورده‌اند. در این حالت، بازیکن ۳ رتبه اول را کسب می‌کند. با ادامه دادن این فرآیند، بردارهای دیگر به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$S_3 = (15, 10, 16, 7, 12, 9)$$

$$S_4 = (38, 28, 32, 21, 25, 16)$$

$$S_5 = (90, 62, 87, 41, 48, 32)$$

$$S_6 = (183, 121, 193, 80, 119, 87)$$

به نظر می‌رسد که رتبه‌بندی بازیکنان اندکی بالا و پایین می‌شود. بازیکنان ۱ و ۳ مرتباً برای کسب مقام اول رقابت می‌کنند. در ادامه نشان خواهیم دارد که اگر تورنمنت مورد بحث، قویاً همبند بوده و حداقل چهار رأس داشته باشد، آنگاه فرآیند فوق همیشه به یک رتبه‌بندی ثابت ختم می‌شود سپس با توجه به این مطلب، روشی برای رتبه‌بندی بازیکنان در هر تورنمنتی به دست خواهیم آورد.

در گراف قویاً همبند  $D$ ، طول کوتاهترین  $(u, v)$ -مسیر جهت‌دار را، فاصله  $u$  تا  $v$  نامیده، آن را با  $d_D(u, v)$  نمایش می‌دهیم. بیشترین فاصله از هر رأس دلخواه  $D$  تا هر رأس دیگر را قطر جهت‌دار  $D$  می‌نامیم.

**قضیه ۱۰-۱** فرض کنید که  $D$  یک تورنمنت قویاً همبند با  $v \geq 5$  و  $A$  ماتریس مجاورت  $D$  باشد. در این صورت داریم  $A^{v+2} > 0$  (تمام درایه‌ها مثبتند) که در آن  $d$  برابر قطر جهت‌دار  $D$  می‌باشد.

**اثبات**  $(i, j)$ -امین درایه ماتریس  $A^k$  دقیقاً برابر است با تعداد  $(v_i, v_j)$ -گشت‌های جهت‌دار به طول  $k$  در  $D$  (تمرین ۱۰-۱-۸) اکنون باید نشان دهیم که به‌ازای هر دور رأس  $v_i$  و  $v_j$  (که می‌توانند یکی باشند) یک  $(v_i, v_j)$ -گشت جهت‌دار به طول  $d+3$  وجود دارد.

فرض کنید  $d_{ij} = \vec{d}(v_i, v_j)$ . در این صورت داریم  $0 \leq d_{ij} \leq d \leq v-1$  و در نتیجه:

$$3 \leq d - d_{ij} + 3 \leq v + 2$$

اگر  $d - d_{ij} + 3 \leq v$ ، در این صورت طبق قضیهٔ ۱۰-۳،  $(d - d_{ij} + 3)$ -دور جهت‌داری مانند  $C$  وجود دارد که شامل  $v_j$  است. یک  $(v_i, v_j)$ -مسیر جهت‌دار  $P$  به طول  $d_{ij}$  به همراه دور جهت‌دار  $C$ ، یک  $(v_i, v_j)$ -گشت جهت‌دار به طول  $d+3$  می‌سازند که مورد نظر ماست.

دو حالت خاص وجود دارد: اگر  $d - d_{ij} + 3 = v - 1$ ، در این صورت  $P$  به همراه  $(v-2)$ -دور جهت‌داری که از  $v_j$  می‌گذرد و  $3$ -دور جهت‌داری که از  $v_i$  می‌گذرد، یک  $(v_i, v_j)$ -گشت جهت‌دار به طول  $d+3$  تشکیل می‌دهند (چون  $v \geq 5$ ، پس  $(v-2)$ -دور وجود دارد). اگر  $d - d_{ij} + 3 = v + 2$ ، در این صورت  $P$  به همراه  $(v-1)$ -دور جهت‌داری که از  $v_j$  می‌گذرد و یک  $3$ -دور جهت‌داری که از  $v_i$  می‌گذرد، گشت مورد نظر را تشکیل می‌دهند.  $\square$

ماتریس  $R$  را یک ماتریس اولیه می‌نامیم، هرگاه به‌ازای مقداری مانند  $k$  داشته باشیم:  $R^k > 0$ .

**نتیجهٔ ۱۰-۷** ماتریس مجاورت تورنمنت  $D$  اولیه است اگر و تنها اگر  $D$  قویاً همبند و  $v \geq 4$  باشد.

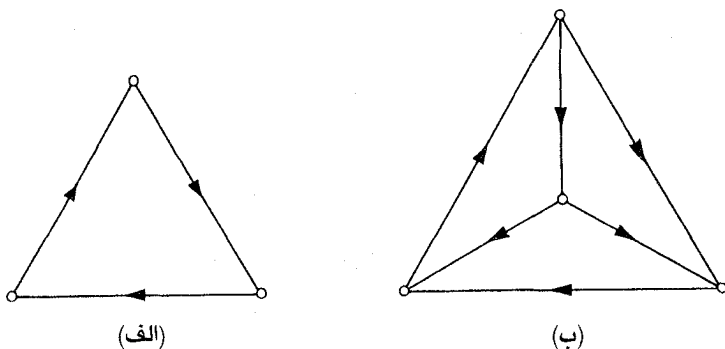
**اثبات** اگر  $D$  قویاً همبند نباشد، رأس‌هایی مانند  $v_i$  و  $v_j$  در  $D$  وجود دارند، به طوری که  $v_j$  از  $v_i$  قابل دستیابی نیست. بنابراین هیچ  $(v_i, v_j)$ -گشت جهت‌داری در  $D$  وجود نخواهد داشت. از اینجا نتیجه می‌شود که  $(i, j)$ -امین درایهٔ  $A^k$  به‌ازای تمامی مقادیر  $k$  صفر است و در نتیجه  $A$  نمی‌تواند اولیه باشد.

بر عکس فرض کنید که  $D$  قویاً همبند است. اگر  $v \geq 5$ ، در این صورت طبق قضیهٔ ۱۰-۷  $A^{d+3} > 0$  و در نتیجه  $A$  اولیه خواهد بود. تنها یک تورنمنت سه رأسی قویاً همبند (شکل ۱۰-۱۴الف) و فقط یک تورنمنت چهار رأسی قویاً همبند (شکل ۱۰-۱۴ب) وجود دارد. به راحتی می‌توان دریافت که ماتریس مجاورت تورنمنت ۳ رأسی، اولیه نیست و در عوض می‌توان نشان داد که درایه‌های توانِ نهمِ ماتریس مجاورت تورنمنت ۴ رأسی، همگی مثبت هستند.  $\square$

اگر به بحث بردارهای امتیاز برگردیم می‌بینیم که بردار امتیاز مرتبه  $i$ ام در یک تورنمنت  $D$  از رابطهٔ زیر

$$S_i = A^i J$$

به دست می‌آید:



شکل ۱۰-۱۴

که  $A$ ، ماتریس مجاورت  $D$  و  $J$  یک بردار ستونی با درایه‌های ۱ می‌باشد. اگر ماتریس  $A$  اولیه باشد. آنگاه طبق قضیه پرن-فروینوس<sup>۱</sup> [Gantmacher ; 1960] را ملاحظه نمایید). بزرگترین مقدار ویژه  $A$  از لحاظ قدر مطلق، عدد حقیقی مثبتی است مانند  $r$  و علاوه بر این داریم:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{r}\right)^i J = s$$

که  $s$  یک بردار ویژه مثبت متناظر با  $r$  از  $A$  می‌باشد. بنابراین طبق نتیجه ۱۰-۷، اگر  $D$  یک تورنمنت قویاً همبند با حداقل چهار رأس باشد، بردار نرمال شده  $\bar{s}$  (با مجموع درایه‌های یک) را می‌توان به عنوان بردار نشاندهنده قدرت نسبی بازیکنان در  $D$  به حساب آورد. در مثال شکل ۱۰-۱۳ مقادیر زیر را (به‌طور تقریبی) به دست آورده‌ایم:

$$r = 2/232 \quad \text{و} \quad \bar{s} = (0/238, 0/164, 0/231, 0/113, 0/150, 0/104)$$

بنابراین طبق این روش، رتبه‌بندی بازیکنان به صورت ۱، ۳، ۲، ۵، ۴ و ۶ می‌باشد.

اگر تورنمنت، قویاً همبند نباشد آنگاه (طبق تمرین‌های ۱۰-۱ و ۱۰-۱ب) می‌توان مؤلفه‌های قوی آن را به صورت خطی طوری مرتب نمود که غلبه‌ها حفظ شوند. اکنون می‌توان شرکت‌کنندگان هر تورنمنت دوره‌ای را مطابق فرآیند زیر رتبه‌بندی نمود.

مرحله ۱ در هر مؤلفه قوی با چهار رأس یا بیشتر، بازیکنان را با استفاده از بردار ویژه  $\bar{s}$  رتبه‌بندی کن؛ در مؤلفه‌های قوی سه رأسی، به هر سه بازیکن رتبه یکسانی اختصاص بده.

مرحله ۲ مؤلفه‌های قوی را به صورت  $D_1, D_2, \dots, D_m$  مرتب کن طوری که به ازای  $i < j$ ، هر کمانی که بین مؤلفه‌های  $D_i$  و  $D_j$  قرار دارد، سر آن در  $D_j$  باشد.



روش رتبه‌بندی فوق متعلق به وی<sup>۱</sup> (۱۹۵۲) و کن‌دال<sup>۲</sup> (۱۹۵۵) می‌باشد. به منظور آگاهی از سایر روش‌های رتبه‌بندی، [Moon and Pullnan ; 1970] را ملاحظه نمایید.

### تمرین‌ها

۱-۷-۱۰ روش رتبه‌بندی که در بخش ۷-۱۰ توضیح داده شد را روی موارد زیر اعمال نمایید.

الف) چهار تورنمنت شکل ۴-۱۰:

ب) تورنمنتی با ماتریس مجاورت زیر:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱
B	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
C	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
D	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰
E	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
F	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
G	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۰
H	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱
I	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
J	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰

۲-۷-۱۰ روش دیگری برای رتبه‌بندی این است که به جای بردار امتیاز، «بردار شکست» را در نظر بگیریم.

الف) نشان دهید که برای رسیدن به رتبه‌بندی مورد نظر از این طریق، باید ابتدا عکس تورنمنت را رتبه‌بندی کنیم و سپس رتبه‌های به دست آمده را معکوس نماییم.

ب) با در نظر گرفتن یک تورنمنت قویاً همبند چهار رأسی، نشان دهید که دو روش رتبه‌بندی

فوق، الزاماً به نتیجه یکسانی منتهی نمی‌شوند.

## مراجع

- Canion, P. (1959). *Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets*, C. R. Acad. Sci. Paris, 249, 2151–52
- Chvátal, V. and Lovász, L. (1974). Every directed graph has a semi-kernel, in *Hypergraph Seminar* (eds. C. Berge and D. K. Ray–Chaudhuri), Springer–Verlag, New York, p. 175
- Gallai, T. (1968). On directed paths and circuits, in *Theory of Graphs* (eds. P. Erdős and G. Katona), Academic Press, New York, pp. 115–18
- Gantmacher F. R. (1960). *Theory of Matrices*, Chelsea, New York
- Ghouila–Hourii, A. (1960). Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien, C. R. Acad. Sci. Paris, 251, 495–97
- Good, I. J. (1946). Normal recurring decimals, J. London Math. Soc., 21, 167–72
- Kendall, M. G. (1955). Further contributions to the theory of paired comparisons, *Biometrics*, 11, 43–62
- Moon. J. W. (1966). On subtournaments of a tournament, *Canad. Math. Bull.*, 9, 297–301
- Moon, J. W. and Pullman, N. J. (1970). On generalised tournament matrices, *SIAM Rev.*, 12, 384–399
- Nash–Williams, C. St. J. A. (1960). On orientations, connectivity and odd–vertex pairings in finite graphs, *Canad. J. Math.*, 12, 555–67
- Rédei L. (1934). Ein kombinatorischer Satz, *Acta Litt. Sci. Szeged*, 7, 39–43
- Robbins, H. E. (1939). A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control, *Amer. Math. Monthly*, 46, 281–83
- Roy, B. (1967). Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe, *Ret. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationelle Sér. Rouge*, 1, 127–32
- Wei, T. H. (1952). *The Algebraic Foundations of Ranking Theory*, PH. D. Thesis, Cambridge University.

# فصل ۱۱

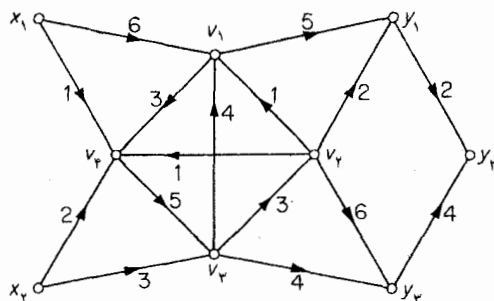
## شبکه‌ها

### ۱-۱۱ شماره‌ها

شبکه‌های حمل و نقل، واسطه‌هایی برای فرستادن کالاها از مراکز تولید به فروشگاه‌ها هستند. این شبکه‌ها را می‌توان به صورت یک گراف جهت‌دار با یک سری ساختارهای اضافی در نظر گرفت و آن‌ها را به صورت کارآیی مورد تحلیل و بررسی قرار داد. این‌گونه گراف‌های جهت‌دار، نظریه‌ای را به وجود آورده‌اند که موضوع مورد بحث ما در این فصل است. این نظریه ابعاد وسیعی از کاربردها را در برمی‌گیرد.

یک شبکه  $N$ ، گراف جهت‌داری است مانند  $D$  (گراف جهت‌دار زمینه  $N$ ) با دوزیرمجموعه متمایز  $X$  و  $Y$  از رأس‌ها و یک تابع مقدار صحیح نامنفی  $c$  که روی مجموعه کمان‌های  $A$  تعریف شده است و فرض بر این است که مجموعه‌های  $X$  و  $Y$  مجزا و ناتهی هستند. هر رأس  $X$  را یک منبع  $N$  و هر رأس  $Y$  را یک چاهک می‌نامیم. این رأس‌ها به ترتیب متناظر با مراکز تولید و فروشگاه‌ها هستند. رأس‌هایی که نه منبع‌اند و نه چاهک، رأس‌های میانی نامیده می‌شوند و مجموعه این رأس‌ها را با  $I$  نمایش می‌دهیم. تابع  $c$  را تابع ظرفیت  $N$  نامیده، مقدار آن را برای هر کمان  $a$ ، ظرفیت  $a$  می‌نامیم. ظرفیت یک کمان را می‌توان به عنوان بیشترین نرخ ممکن انتقال کالا در طول آن در نظر گرفت.

برای نشان دادن یک شبکه، ابتدا گراف جهت‌دار زمینه آن را رسم کرده و سپس ظرفیت هر کمان را به عنوان برچسب آن کمان قرار می‌دهیم. در شکل ۱-۱۱ شبکه‌ای با دومنبع  $x_1$  و  $x_2$ ، سه چاهک  $y_1$ ،  $y_2$  و  $y_3$  و چهار رأس میانی  $v_1$ ،  $v_2$ ،  $v_3$  و  $v_4$  نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۱. یک شبکه

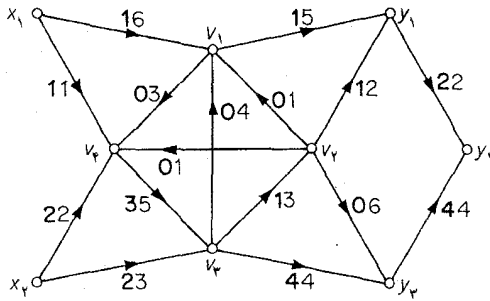
به‌ازای زیرمجموعهٔ  $S$  از  $V$ ،  $V \setminus S$  را با  $\bar{S}$  نمایش می‌دهیم. علاوه‌براین نمادهای زیر نیز می‌توانند مفید واقع شوند. اگر  $f$  یک تابع مقدار حقیقی تعریف شده روی مجموع کمان‌های  $A$  از  $N$  باشد و همچنین اگر  $K \subseteq A$ ، در این صورت  $\sum_{a \in K} f(a)$  را با  $f(K)$  نمایش می‌دهیم. از این گذشته، اگر  $K$  مجموعه‌ای از کمان‌ها به شکل  $(S, \bar{S})$  باشد، به جای  $f(S, \bar{S})$ ،  $f^+(S)$  و به جای  $f(\bar{S}, S)$ ،  $f^-(S)$  را به کار می‌بریم. یک شماره در شبکهٔ  $N$  عبارت است از یک تابع مقدار صحیح  $f$  که بر روی  $A$  تعریف شده است به طوری که:

$$a \in A \text{ هر به‌ازای } 0 \leq f(a) \leq c(a) \quad (۱-۱۱)$$

و

$$v \in I \text{ هر به‌ازای } f^-(v) = f^+(v) \quad (۲-۱۱)$$

مقدار تابع  $f$  برای کمان  $a$ ،  $f(a)$  را می‌توان به نرخ انتقال داده در طول  $a$ ، تحت شمارهٔ  $f$  تشبیه کرد. کران بالایی شرط (۱-۱۱) قید ظرفیت نامیده می‌شود و بیانگر این محدودیت طبیعی است که نرخ شماره در یک کمان نمی‌تواند از ظرفیت کمان تجاوز کند. شرط (۲-۱۱)، شرط بقا نامیده می‌شود و ایجاب می‌کند که نرخ انتقال مواد به درون  $v$  برابر نرخ انتقال مواد به بیرون از  $v$  باشد. توجه داشته باشید که هر شبکه، حداقل دارای یک شماره است، زیرا تابع  $f$  ای که در آن به‌ازای هر  $a \in A$  داشته باشیم:  $f(a) = 0$  در هر دو شرط (۱-۱۱) و (۲-۱۱) صدق می‌کند. این تابع، شمارهٔ صفر نامیده می‌شود. یک مثال غیربدیهی‌تر از شماره‌ها در شکل ۲-۱۲ نشان داده شده است. شمارهٔ هر کمان با اعداد ضخیم‌تر مشخص شده‌اند.



شکل ۱۱-۲. شماره در یک شبکه

اگر  $S$  زیرمجموعه‌ای از رأس‌های شبکه  $N$  و  $f$ ، یک شماره در  $N$  باشد،  $f^+(S) - f^-(S)$ ، شماره برآیند خروجی از  $S$  و  $f^-(S) - f^+(S)$  شماره برآیند ورودی به  $S$  نامیده می‌شود. از آنجایی که شرط بقاء ایجاب می‌کند شماره برآیند خروجی از هر رأس میانی صفر باشد، واضح است که به ازای هر شماره  $f$ ، شماره برآیند خروجی از  $X$  با شماره برآیند ورودی به  $Y$  برابر است (تمرین ۱۱-۳). این کمیت مشترک، مقدار  $f$  نامیده شده، آن را با  $val f$  نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

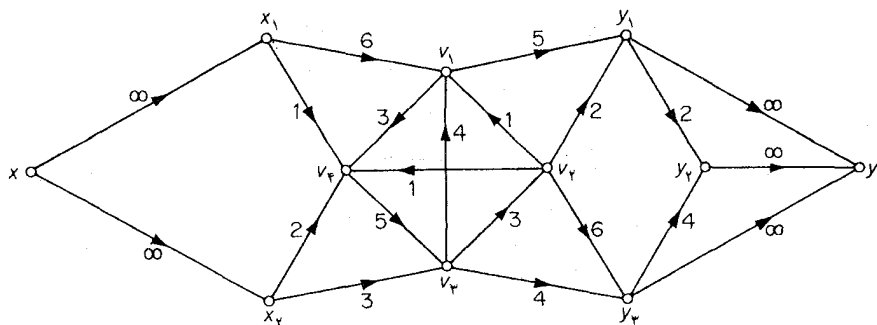
$$val f = f^+(X) - f^-(X)$$

مقدار شماره نشان داده شده در شکل ۱۱-۲ برابر ۶ است.

می‌گوئیم شماره  $f$  در  $N$ ، یک شماره ماکزیمم است، هرگاه هیچ شماره دیگری مانند  $f'$  در  $N$  با شرط  $val f' > val f$  وجود نداشته باشد. مسلماً شماره‌های ماکزیمم در زمینه شبکه‌های حمل و نقل اهمیت فراوانی دارند. مسأله تعیین شماره ماکزیمم در یک شبکه دلخواه را می‌توان به حالتی تبدیل کرد که در آن، فقط یک منبع و یک چاهک داشته باشیم. اگر شبکه دلخواهی مانند  $N$  داده شده باشد، شبکه جدید  $N'$  را به صورت زیر می‌سازیم:

- (۱) دو رأس جدید  $x$  و  $y$  را به  $N$  اضافه می‌کنیم.
- (۲)  $x$  را با کماتی به ظرفیت  $\infty$ ، به تمام رأس‌های  $X$  وصل می‌کنیم.
- (۳) هر رأس  $Y$  را با کماتی به ظرفیت  $\infty$  به  $y$  وصل می‌کنیم.
- (۴)  $x$  و  $y$  را به ترتیب به عنوان منبع و چاهک  $N'$  در نظر می‌گیریم.

اگر فرآیند فوق را برای شبکه شکل ۱۱-۱ به کار ببریم، شبکه شکل ۱۱-۳ به دست می‌آید.



شکل ۳-۱۱

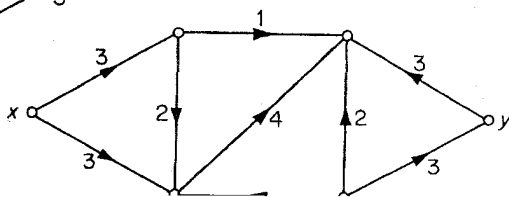
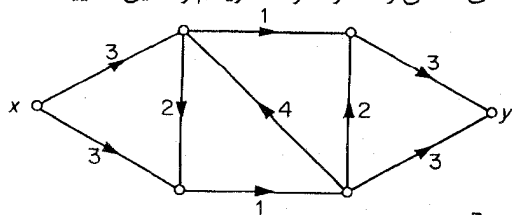
شماره‌های  $N$  و  $N'$  به طریق ساده‌ای به یکدیگر مرتبط می‌باشند. اگر  $f$ ، یک شماره در  $N$  باشد، به طوری که شمارهٔ برآیند خروجی از هر منبع و شمارهٔ برآیند ورودی به هر چاهک، نامنفی باشد (کافی است که بحث خود را به چنین شماره‌هایی محدود کنیم)، در این صورت تابع  $f'$  که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) & \text{اگر } a \text{ کمانی از } N \text{ باشد} \\ f^+(u) - f^-(u) & \text{اگر } a = (x, u) \\ f^-(u) - f^+(u) & \text{اگر } a = (u, y) \end{cases}$$

شماره‌ای است در  $N'$  به طوری که  $val f' = val f$  (تمرین ۱۱-۱-۴) الف. برعکس اگر یک شماره در  $N'$  را به مجموعهٔ کمان‌های  $N$  محدود کنیم، شماره‌ای در  $N$  به دست می‌آید که مقدار آن تغییر نکرده است (تمرین ۱۱-۱-۴ ب). بنابراین در طی سه بخش آینده، بحث خود را فقط بر روی شبکه‌هایی متمرکز می‌کنیم که یک منبع  $x$  و یک چاهک  $y$  دارند.

### تمرین‌ها

۱-۱-۱) برای هر یک از شبکه‌های زیر، تمام شماره‌های ممکن و مقدار شمارهٔ ماکزیمم را معین نمایید.



۲-۱-۱۱ نشان دهید که به ازای هر شماره  $f$  در  $N$  و هر  $S \subseteq V$  رابطه زیر برقرار است.

$$\sum_{v \in S} (f^+(v) - f^-(v)) = f^+(S) - f^-(S)$$

(دقت کنید که در حالت کلی  $\sum_{v \in S} f^-(v) \neq f^-(S)$  و  $\sum_{v \in S} f^+(v) \neq f^+(S)$ )

۳-۱-۱۱ نشان دهید که به ازای هر شماره  $f$  در  $N$ ، شماره برآیند خروجی از  $X$  با شماره برآیند ورودی به  $Y$  برابر است.

۴-۱-۱۱ نشان دهید که:

الف) تابع  $f'$  که توسط رابطه (۳-۱۱) تعریف می‌شود، یک شماره در  $N'$  است و داریم:

$$val f' = val f$$

ب) از محدود کردن یک شماره در  $N'$  به مجموعه کمان‌های  $N$ ، شماره‌ای در  $N$  با همان مقدار

به دست می‌آید.

## ۲-۱۱ برش‌ها

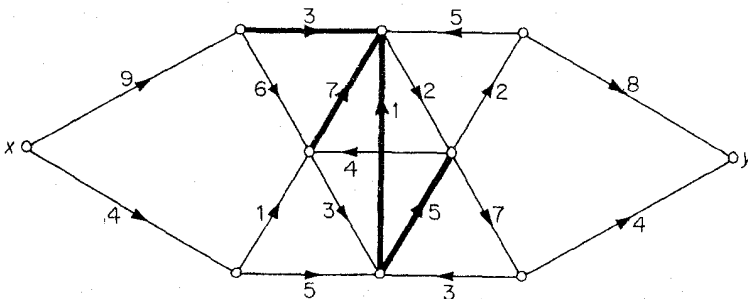
فرض کنید  $N$  یک شبکه با تک منبع  $x$  و تک چاهک  $y$  باشد. مجموعه‌ای از کمان‌ها به شکل  $(S, \bar{S})$  با شرط  $x \in S$  و  $y \in \bar{S}$ ، یک برش در  $N$  نامیده می‌شود. یک برش در شبکه شکل ۴-۱۱ با خطوط ضخیم مشخص شده است.

ظرفیت برش  $K$  عبارت است از مجموع ظرفیت‌های کمان‌های آن. ظرفیت  $K$  را با  $cap K$  نمایش

$$cap K = \sum_{a \in K} c(a)$$

می‌دهیم. در نتیجه داریم:

برش نشان داده شده در شکل ۴-۱۱ دارای ظرفیت ۱۶ است.



شکل ۴-۱۱. یک برش در شبکه

**لم ۱-۱۱** به ازای هر شماره  $f$  و هر برش  $(S, \bar{S})$  در  $N$  داریم:

$$val f = f^+(S) - f^-(S) \quad (۴-۱۱)$$

**اثبات** فرض کنید  $f$  یک شماره و  $(S, \bar{S})$  یک برش در  $N$  باشد. بنابر تعاریف شماره و مقدار یک شماره داریم:

$$f^+(v) - f^-(v) = \begin{cases} val f & \text{اگر } v=x \\ 0 & \text{اگر } v \in S \setminus \{x\} \end{cases}$$

با جمع بستن این تساوی‌ها روی  $S$  و ساده کردن آن (تمرین ۱-۱۱-۲) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\square. val f = \sum_{v \in S} (f^+(v) - f^-(v)) = f^+(S) - f^-(S)$$

برای سادگی کار، اگر  $f(a) = 0$ ، کمان  $a$  را  $f$ -صفر، اگر  $f(a) > 0$ ،  $a$  را  $f$ -مثبت، اگر  $f(a) < c(a)$ ،  $a$  را

$f$ -اشباع نشده و اگر  $f(a) = c(a)$ ،  $a$  را  $f$ -اشباع شده می‌خوانیم.

**قضیه ۱-۱۱** به ازای هر شماره  $f$  و هر برش  $K = (S, \bar{S})$  در  $N$  داریم:

$$val f \leq cap K \quad (۵-۱۱)$$

علاوه بر این در رابطه (۵-۱۱) تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر هر کمان  $(S, \bar{S})$ ،  $f$ -صفر باشد و  $(\bar{S}, S)$ ،  $f$ -صفر باشد.

**اثبات** بنابر رابطه (۱-۱۱) داریم:

$$f^+(S) \leq cap K \quad (۶-۱۱)$$

و

$$f^-(S) \geq 0 \quad (۷-۱۱)$$

با جایگزینی روابط (۶-۱۱) و (۷-۱۱) در رابطه (۴-۱۱) به رابطه (۵-۱۱) می‌رسیم. گزاره دوم نیز از اینجا نتیجه می‌شود که در رابطه (۶-۱۱) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر هر کمان  $(S, \bar{S})$ ،  $f$ -اشباع شده باشد و

همچنین در رابطه (۷-۱۱) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر هر کمان  $(\bar{S}, S)$ ،  $f$ -صفر باشد.  $\square$

برش  $K$  در  $N$ ، یک برش مینیمم است، اگر هیچ برش دیگری مانند  $K'$  در  $N$  با شرط  $cap K' < cap K$

وجود نداشته باشد.

اگر  $f^*$  یک شماره ماکزیمم و  $\bar{K}$  یک برش مینیمم باشد، به عنوان حالت خاصی از قضیه ۱-۱۱ داریم:

$$val f^* \leq cap \bar{K} \quad (۸-۱۱)$$



**نتیجه ۱-۱۱** فرض کنید  $f$  یک شاره و  $K$  یک برش باشد، به طوری که  $val f = cap K$ . در این صورت  $f$  یک شارهٔ ماکزیمم و  $K$  یک برش مینیمم است.

**اثبات** فرض کنید  $f^*$  یک شارهٔ ماکزیمم و  $\bar{K}$  یک برش مینیمم باشد. در این صورت بنا بر رابطه (۸-۱۱) داریم:

$$val f \leq val f^* \leq cap \bar{K} \leq cap K$$

و چون طبق فرض،  $val f = cap K$ ، نتیجه می‌گیریم که  $val f = val f^*$  و  $cap K = cap \bar{K}$ . در نتیجه  $f$  یک شارهٔ ماکزیمم و  $K$  یک برش مینیمم است.  $\square$

در بخش آینده، عکس نتیجه ۱-۱۱ را اثبات خواهیم کرد، یعنی این که در رابطه (۸-۱۱) همواره تساوی برقرار است.

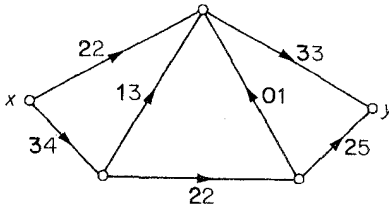
## تمرین‌ها

۱-۲-۱۱ در شبکهٔ زیر:

(الف) تمام برش‌ها را معین کنید.

(ب) ظرفیت برش مینیمم را پیدا کنید.

(ج) نشان دهید که شارهٔ نشان داده شده، یک شارهٔ ماکزیمم است.



۲-۲-۱۱ نشان دهید که اگر هیچ  $(x, y)$ -مسیر جهت‌داری در  $N$  وجود نداشته باشد، آنگاه مقدار شارهٔ

ماکزیمم و ظرفیت برش مینیمم، هر دو صفر می‌باشند.

۳-۲-۱۱ اگر  $(S, \bar{S})$  و  $(T, \bar{T})$  دو برش مینیمم در  $N$  باشند، نشان دهید که  $(S \cup T, \overline{S \cup T})$  و

$(S \cap T, \overline{S \cap T})$  نیز دو برش مینیمم در  $N$  هستند.

## ۳-۱۱ قضیهٔ شمارهٔ ماکزیمم-برش مینیمم

در این بخش الگوریتمی برای تعیین یک شمارهٔ ماکزیمم در شبکه‌ها ارائه می‌نمائیم. یکی از اساسی‌ترین ملزومات چنین الگوریتمی این است که در صورت دیدن یک شماره، بتواند تشخیص دهد آیا این شمارهٔ ماکزیمم هست یا خیر. بنابراین در شروع کار، نگاهی به این مسأله می‌اندازیم.

فرض کنید  $f$  یک شماره در شبکهٔ  $N$  باشد. به هر مسیر  $P$  در  $N$ ، یک عدد صحیح نامنفی  $u(P)$  به صورت

$$u(P) = \min_{a \in A(P)} u(a) \quad \text{روبه‌رو نسبت می‌دهیم:}$$

که در آن:

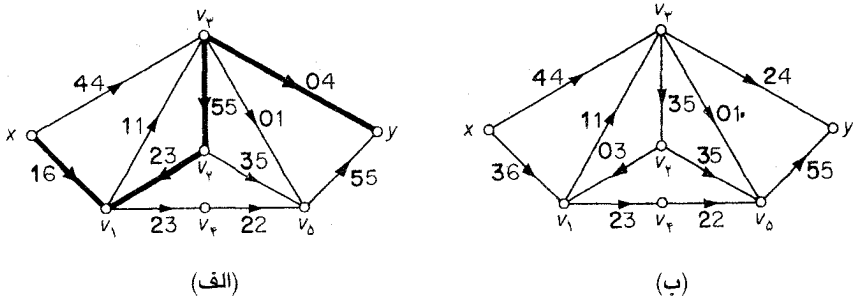
$$u(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{اگر } a \text{ یک کمان رو به جلو از } P \text{ باشد} \\ f(a) & \text{اگر } a \text{ یک کمان معکوس از } P \text{ باشد} \end{cases}$$

به‌راحتی می‌توان دید که  $u(P)$ ، بیشترین میزان ممکن برای افزایش شماره در طول  $P$  (تحت  $f$ ) است، بدون اینکه به شرط (۱-۱۱) آسیبی وارد شود. اگر  $u(P) = 0$ ، مسیر  $P$  را  $f$ -اشباع شده و اگر  $u(P) > 0$ ،  $P$  را  $f$ -اشباع نشده می‌نامیم (حالت اخیر معادل با این است که هر کمان رو به جلو از  $P$ ،  $f$ -اشباع نشده و هر کمان معکوس از  $P$ ،  $f$ -مثبت باشد). به طور ساده می‌توان گفت که یک مسیر  $f$ -اشباع نشده، مسیری است که از تمام ظرفیتش استفاده نشده است. مسیر  $f$ -افزایشی یک مسیر  $f$ -اشباع نشده از منبع  $x$  به چاهک  $y$  می‌باشد. به طور مثال، اگر  $f$  شمارهٔ مشخص شده در شبکهٔ شکل ۱۱-۵الف باشد، در این صورت  $P = xv_1v_2v_3y$  یک مسیر  $f$ -افزایشی خواهد بود.  $(x, v_1)$  و  $(v_3, y)$  کمان‌های رو به جلوی  $P$  هستند و داریم:  $u(P) = 2$ .

وجود یک مسیر  $f$ -افزایشی در شبکهٔ حائز اهمیت است، زیرا نشان می‌دهد که  $f$  شمارهٔ ماکزیمم نیست. در حقیقت با فرستادن یک شمارهٔ اضافی  $u(P)$  در طول  $P$ ، می‌توان به شمارهٔ جدید  $f$ ، به صورت زیر رسید:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + u(P) & \text{اگر } a \text{ یک کمان رو به جلو از } P \text{ باشد} \\ f(a) - u(P) & \text{اگر } a \text{ یک کمان معکوس از } P \text{ باشد} \\ f(a) & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (9-11)$$

و در این حال داریم:  $val \hat{f} = val f + u(P)$  (تمرین ۱۱-۳-۱).  $\hat{f}$  را شمارهٔ اصلاح شده بر پایه  $P$  می‌خوانیم. در شکل ۱۱-۵ب شمارهٔ اصلاح شده شبکهٔ شکل ۱۱-۵الف بر پایه مسیر  $f$ -افزایشی  $xv_1v_2v_3y$  نشان داده شده است.



شکل ۱۱-۵. (الف) مسیر  $f$ -افزایشی  $P$  (ب) شارده اصلاح شده بر پایه  $f$

نقش مسیرهای افزایشی در نظریه شارها همانند مسیرهای افزوده در نظریه تطابق هاست. قضیه زیر مؤید این مطلب است (آن را با قضیه ۱-۵ مقایسه نمایید).

**قضیه ۱۱-۲** شارده  $f$  در  $N$  ماکزیمم است، اگر و تنها اگر  $N$  دارای هیچ مسیر  $f$ -افزایشی نباشد.

**اثبات** اگر  $N$  شامل یک مسیر  $f$ -افزایشی  $P$  باشد، در این صورت  $f$  نمی‌تواند یک شارده ماکزیمم باشد. زیرا  $f$ ، شارده اصلاح شده بر پایه  $P$ ، دارای مقدار بزرگتری است.

برعکس، فرض کنید که  $N$  شامل هیچ مسیر  $f$ -افزایشی نباشد. می‌خواهیم نشان دهیم که  $f$  یک شارده ماکزیمم است. فرض کنید  $S$  مجموعه تمام رأس‌هایی باشد که  $x$  توسط مسیرهای  $f$ -اشباع نشده در  $N$  به آن‌ها متصل است. به وضوح داریم:  $x \in S$ . از طرفی چون  $N$  دارای هیچ مسیر  $f$ -افزایشی نیست، پس  $y \in \bar{S}$ . بنابراین  $K = (S, \bar{S})$  یک برش در  $N$  است. در ادامه نشان خواهیم داد که هر کمان  $(S, \bar{S})$ ،  $f$ -اشباع شده و هر کمان  $(\bar{S}, S)$ ،  $f$ -صفر است.

فرض کنید  $a$  کمانی با دم  $u \in S$  و سر  $v \in \bar{S}$  باشد. از آنجایی که  $u \in S$ ، پس یک  $(x, u)$ -مسیر  $f$ -اشباع نشده مانند  $Q$  وجود دارد. اگر  $a$ ،  $f$ -اشباع نشده باشد، در این صورت  $Q$  را می‌توان با افزودن کمان  $a$  به مسیر  $Q$ ، به یک  $(x, v)$ -مسیر  $f$ -اشباع نشده گسترش داد. ولی با توجه به اینکه  $v \in \bar{S}$ ، چنین مسیری وجود ندارد و بنابراین  $a$  باید  $f$ -اشباع شده باشد. با استدلال مشابهی می‌توان نتیجه گرفت که اگر  $a \in (\bar{S}, S)$ ، آنگاه  $a$  باید  $f$ -صفر باشد.

با به کارگیری قضیه ۱-۱۱ نتیجه می‌شود:

$$val f = cap K$$

و اکنون با توجه به نتیجه ۱-۱۱ روشن می‌گردد که  $f$ ، یک شارده ماکزیمم (و  $K$  یک برش مینیمم است).

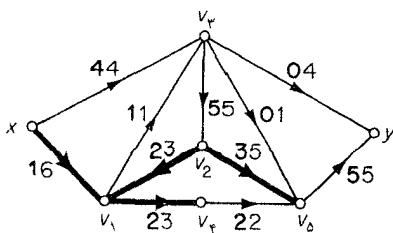
طی اثبات فوق، وجود یک شارهٔ ماکزیمم  $f$  و یک برش مینیمم  $K$  که در آن‌ها شرط  $val f = cap K$  برقرار است، به اثبات رسید. بنابراین قضیهٔ زیر که متعلق به فورد<sup>۱</sup> و فالکرسن<sup>۲</sup> (۱۹۵۶) است، نیز مستقیماً به اثبات می‌رسد:

**قضیهٔ ۳-۱۱** در هر شبکه، مقدار یک شارهٔ ماکزیمم با ظرفیت یک برش مینیمم برابر است.

قضیهٔ ۳-۱۱، به قضیهٔ شارهٔ ماکزیمم-برش مینیمم مشهور است و از قضایای بسیار مهم در نظریهٔ گراف‌ها به شمار می‌آید. بسیاری از نتایج مربوط به گراف‌ها را می‌توان با به‌کارگیری این قضیه روی شبکه‌های مناسب، به دست آورد. در بخش‌های ۴-۱۱ و ۵-۱۱ به شرح دو نمونه از این کاربردها خواهیم پرداخت. اثبات قضیهٔ ۳-۱۱ دارای طبیعت ساختاری است و ما از آن، الگوریتمی برای یافتن شاره‌های ماکزیمم در شبکه‌ها استخراج نموده‌ایم. این الگوریتم که باز هم مدیون فورد و فالکرسن (۱۹۵۷) می‌باشد، به روش **برجسب‌زنی** مشهور است. این الگوریتم با شروع از یک شارهٔ شناخته شده، مثلاً شارهٔ صفر، به ساختن دنباله‌ای از شاره‌ها با مقدار افزایشی می‌پردازد و در نهایت به یک شارهٔ ماکزیمم ختم می‌شود. پس از ساخت هر شارهٔ جدید  $f$ ، زیر روالی که فرآیند **برجسب‌زنی** نامیده می‌شود، برای یافتن یک مسیر  $f$ -افزایشی (در صورت وجود) مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر چنین مسیری  $P$  پیدا شد، در این صورت  $f^+$ ، شارهٔ اصلاح شده بر پایه  $P$ ، ساخته شده و به‌عنوان شارهٔ بعدی دنباله، در نظر گرفته می‌شود. اگر چنین مسیری وجود نداشت، الگوریتم خاتمه می‌یابد زیرا طبق قضیهٔ ۲-۱۱،  $f$  یک شارهٔ ماکزیمم است.

برای توضیح چگونگی فرآیند برجسب‌زنی، به تعریف زیر نیازمندیم. درخت  $T$  در  $N$  یک درخت  $f$ -اشباع نشده نامیده می‌شود، اگر (۱)  $x \in V(T)$ ؛ و (۲) به‌ازای هر رأس  $v$  از  $T$ ،  $(x, v)$ -مسیر یکتا در  $T$ ، یک مسیر  $f$ -اشباع نشده باشد.

یک نمونه از این درخت‌ها در شبکهٔ شکل ۶-۱۱ نشان داده شده است.

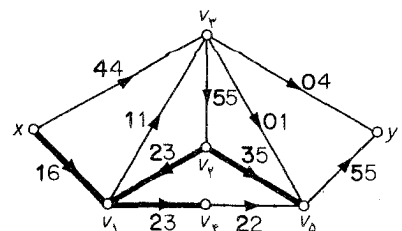
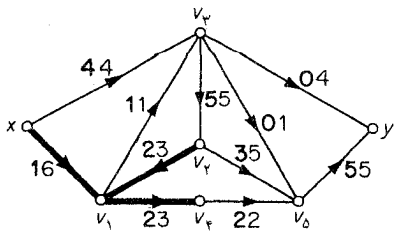
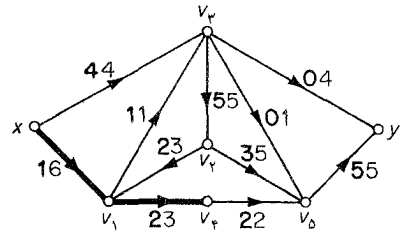
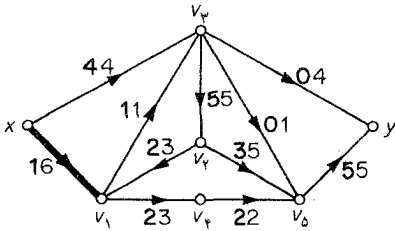
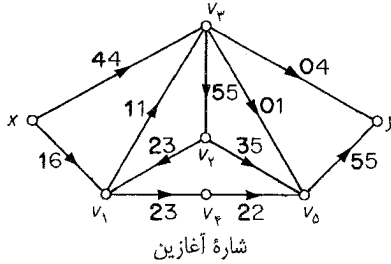


شکل ۶-۱۱. یک درخت  $f$ -اشباع نشده

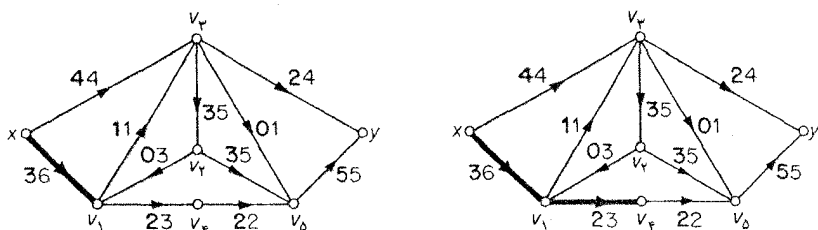
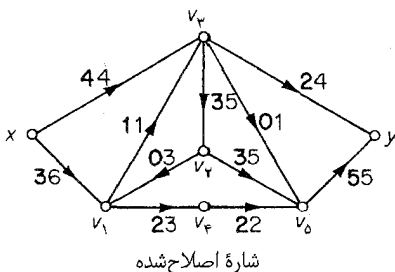
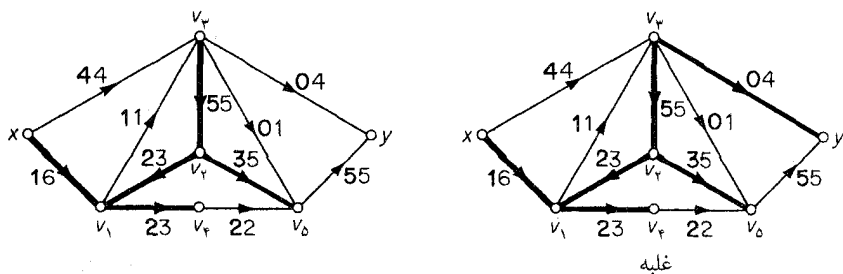
جستجوی یک مسیر  $f$ -افزایشی مستلزم رشد یک درخت  $f$ -اشباع نشده در  $T$  در  $N$  می‌باشد. در ابتدا،  $T$  فقط شامل منبع  $x$  است. سپس در هر مرحله، دو راه برای رشد درخت وجود دارد:

(۱) اگر یک کمان  $f$ -اشباع نشده  $a$  در  $(S, \bar{S})$  وجود داشت، به طوری که  $S=V(T)$ ، در این صورت  $a$  و سر کمان  $a$  به  $T$  افزوده می‌شود.

(۲) اگر یک کمان  $f$ -مثبت  $a$  در  $(\bar{S}, S)$  وجود داشت، در این صورت  $a$  و دم کمان  $a$  به  $T$  افزوده می‌شود. بدیهی است که هر یک از فرآیندهای فوق، به یک درخت  $f$ -اشباع نشده بزرگتر منتهی می‌شود. در نهایت یا  $T$  به چاهک  $y$  می‌رسد و یا رشد آن پیش از رسیدن به  $y$ ، متوقف می‌گردد. در حالت نخست که با عنوان غلبه از آن یاد می‌کنیم،  $(x, y)$ -مسیر موجود در  $T$ ، مسیر  $f$ -افزایشی مورد نظر است. اگر رشد  $T$ ، پیش از رسیدن به  $y$  متوقف شود، بنابر قضیه ۱-۱۱ و نتیجه ۱-۱۱، یک شماره ماکزیمم است. در شکل ۷-۱۱ دو تکرار از این فرآیند رشد یابنده درختی نشان داده شده است. تکرار اول به غلبه منتهی می‌شود و تکرار دوم نشان می‌دهد که شماره اصلاح شده، یک شماره ماکزیمم است.



شکل ۷-۱۱



ادامه شکل ۷-۱۱

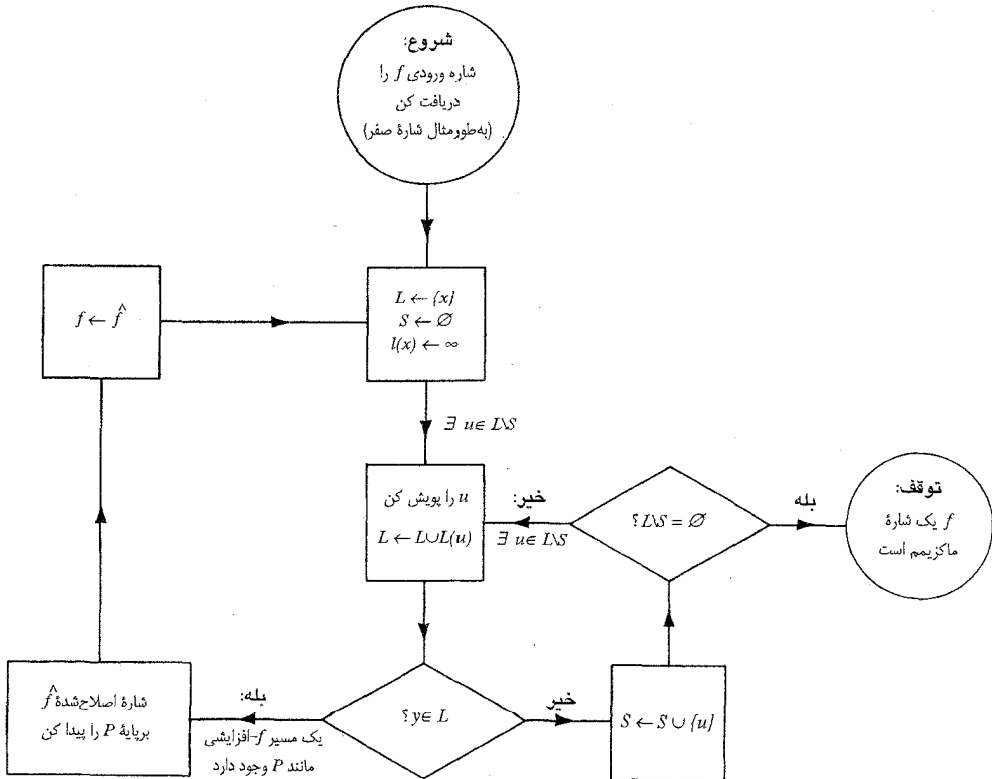
فرآیند برچسب‌زنی، روش باقاعده‌ای برای رشد درخت  $f$ -اشباع نشده  $T$  است. این فرآیند در هنگام رشد  $T$  به هر رأس  $v$  از  $T$ ، برچسب  $l(v) = l(P_v)$  را اختصاص می‌دهد که در آن،  $P_v$ ، مسیر یکتا  $(x, v)$  در  $T$  می‌باشد. فایده برچسب‌زنی این است که به هنگام غلبه، علاوه بر مسیر  $f$ -افزایشی  $P_y$ ، کمیت  $l(P_y)$  که برای محاسبه مقدار شماره اصلاح‌شده برپایه  $P_y$  مورد استفاده قرار می‌گیرد، به دست می‌آید. فرآیند برچسب‌زنی با اختصاص برچسب  $l(x) = \infty$  به منبع  $x$  آغاز می‌گردد و طبق قوانین زیر ادامه می‌یابد:

(۱) اگر  $a$  یک کمان  $f$ -اشباع نشده باشد که دم آن،  $u$  قبلاً برچسب خورده، ولی سر آن  $v$  برچسب نداشته باشد، در این صورت به رأس  $v$  برچسب  $l(v) = \min\{l(u), c(a) - f(a)\}$  را اختصاص می‌دهیم.

۲) اگر  $a$  یک کمان  $f$ -مثبت باشد که سر آن،  $u$  قبلاً برچسب خورده، ولی دم آن،  $v$  برچسب نداشته باشد، در این صورت به رأس  $v$  برچسب  $l(v) = \min\{l(u), f(a)\}$  را اختصاص می‌دهیم.

در هر یک از حالات فوق، گفته می‌شود که  $v$  بر پایه  $u$  برچسب خورده است. پویش رأس برچسب خورده  $u$  به معنای برچسب‌زدن تمام رأس‌های برچسب نخورده‌ای است که می‌توانند بر پایه  $u$  برچسب‌دهی شوند. فرآیند برچسب‌زنی تا هنگامی ادامه می‌یابد که یا چاهک  $v$  برچسب زده شود (غلبه) یا اینکه تمام رأس‌های برچسب خورده پویش شده باشند و رأس دیگری قابل برچسب‌زنی نباشد (که نشاندهنده ماکزیمم بودن شماره  $f$  است).

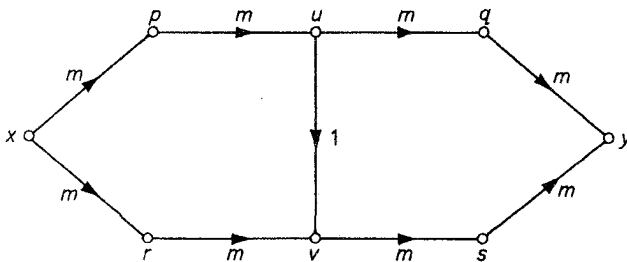
روش برچسب‌زنی، در نمودار گردش شکل ۸-۱۱ خلاصه شده است.



شکل ۸-۱۱. روش برچسب‌زنی ( $L$  مجموعه رأس‌های برچسب خورده،  $S$  مجموعه رأس‌های پویش شده):

$L(u)$  مجموعه رأس‌هایی که در خلال پویش  $u$  برچسب خورده‌اند).

خاطر نشان می‌کنیم که روش برچسب‌زنی، به‌آن صورتی که در بالا شرح داده شد، الگوریتم خوبی نیست. به‌عنوان مثال، شبکهٔ  $N$  شکل ۹-۱۱ را در نظر بگیرید. مقدار شمارهٔ ماکزیمم در  $N$  برابر  $2m$  است. روش برچسب‌زنی با شروع از شمارهٔ صفر و انتخاب متوالی  $xrvuy$ ،  $xpuvsy$  به‌عنوان مسیرهای افزایشی،  $2m+1$  دفعه از فرآیند برچسب‌زنی استفاده خواهد کرد. برای اینکه در هر مرحله، مقدار شماره دقیقاً یک واحد افزایش می‌یابد. از آن جایی که  $m$  می‌تواند به هر اندازه دلخواهی باشد، تعداد مراحل محاسباتی مورد نیاز برای پیاده سازی روش برچسب‌زنی در این مورد، با هیچ تابعی از  $v$  و  $\varepsilon$  کراندار نیست. به عبارت دیگر این روش، الگوریتم خوبی نیست.



شکل ۹-۱۱

با این حال، ادموندز<sup>۱</sup> و کارپ<sup>۲</sup> (۱۹۷۰) نشان داده‌اند که با اندکی اصلاحات جزئی روی فرآیند برچسب‌زنی، می‌توان آن را به یک الگوریتم خوب تبدیل کرد. اصلاح پیشنهادی توسط آن دو به این صورت است: در فرآیند برچسب‌زنی، پیش از پویش یک رأس برچسب خورده  $u$ ، رأس‌هایی را پویش کن که پیش از  $u$  برچسب خورده‌اند<sup>۳</sup>. به راحتی می‌توان دید که این اصلاح، به انتخاب کوتاهترین مسیرهای افزایشی منجر می‌گردد. به طور مثال شمارهٔ ماکزیمم شبکهٔ شکل ۹-۱۱ را در این حالت می‌توان با دوبار تکرار فرآیند برچسب‌زنی به دست آورد.

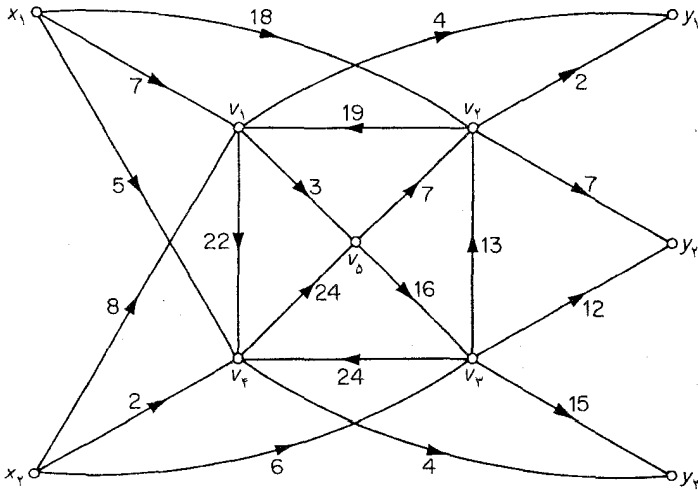
## تمرین‌ها

۱-۳-۱۱ نشان دهید تابع  $\hat{f}$  که توسط رابطه (۹-۱۱) تعریف می‌شود، شماره‌ای است با:

$$val \hat{f} = val f + t(P)$$



۲-۳-۱۱ کالای خاصی در دو کارخانه  $x_1$  و  $x_2$  تولید می‌شود. این کالا باید از طریق شبکه زیر به فروشگاه‌های  $y_1, y_2, y_3$  فرستاده شود. با استفاده از روش برچسب‌زنی، بیشترین میزان ممکن انتقال کالا از کارخانه‌ها به فروشگاه‌ها را پیدا نمایید.



۳-۳-۱۱ نشان دهید که در هر شبکه  $N$  (با ظرفیت‌های صحیح) یک شماره ماکزیمم  $f$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $a \in A$ ،  $f(a)$  یک عدد صحیح است.

۴-۳-۱۱ در شبکه مفروض  $N$ ، به هر یک از کمان‌های  $a$ ، عدد صحیح  $b(a) \leq c(a)$  را نسبت داده‌ایم. روش برچسب‌زنی را به گونه‌ای تغییر دهید که بتوان از آن برای یافتن یک شماره ماکزیمم  $f$  در  $N$  استفاده کرد، به شرطی که به ازای هر  $a \in A$ ، داشته باشیم:  $f(a) \geq b(a)$  (فرض کنید یک شماره اولیه که در این شرط صدق کند، وجود دارد).

۵-۳-۱۱\* فرض کنید که در شبکه  $N$  به هر رأس میانی  $v$ ، یک عدد صحیح نامنفی  $m(v)$  نسبت داده‌ایم. نشان دهید که با اعمال روش برچسب‌زنی روی یک شبکه اصلاح شده، می‌توان شماره ماکزیمی مانند  $f$  یافت که در آن به ازای هر  $v \in V \setminus \{x, y\}$  شرط  $f^-(v) \leq m(v)$  برقرار باشد.

## کاربردها

### ۴-۱۱ قضیه‌های منجر

در این بخش، با استفاده از قضیهٔ شمارهٔ ماکزیمم-برش مینیمم، تعدادی قضیه به دست خواهیم آورد که متعلق به منجر (۱۹۲۷) می‌باشند. دو تا از این قضیه‌ها را قبلاً در بخش ۳-۲ ذکر کرده‌ایم. لم زیر بیوند اساسی بین مطالب را برقرار می‌سازد.

**لم ۱۱-۴** فرض کنید  $N$  یک شبکه با منبع  $x$  و چاهک  $y$  باشد که، ظرفیت هر کمان آن، واحد است. در این صورت:

(الف) مقدار شمارهٔ ماکزیمم در  $N$  برابر است با بیشترین تعداد  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار کمان-مجزا در  $N$  و

(ب) ظرفیت برش مینیمم در  $N$  برابر است با کمترین تعداد کمان‌هایی که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار در  $N$  می‌شود.

**اثبات** فرض کنید  $f^*$  یک شمارهٔ ماکزیمم در  $N$  و  $D^*$  گراف جهت‌داری باشد که از حذف تمام کمان‌های  $f^*$ -صفر از  $D$  به دست آمده است. چون ظرفیت هر کمان  $N$  واحد است، به‌ازای هر  $a \in A(D^*)$  شرط  $f^*(a) = 1$  برقرار است. در نتیجه داریم:

$$d_{D^*}^+(x) - d_{D^*}^-(x) = \text{val } f^* = d_{D^*}^-(y) - d_{D^*}^+(y) \quad (۱)$$

$$d_{D^*}^+(v) = d_{D^*}^-(v), \quad v \in V \setminus \{x, y\} \quad (۲)$$

بنابراین به تعداد  $\text{val } f^*$ ، مسیر جهت‌دار کمان-مجزا در  $D^*$  و در نتیجه در  $D$  وجود دارد. (تمرین ۱۰-۳-۳). در نتیجه اگر بیشترین تعداد  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار کمان مجزا در  $N$  را  $m$  فرض کنیم:

$$\text{val } f^* \leq m \quad (۱۰-۱۱)$$

اینک فرض کنید که  $P_1, P_2, \dots, P_m$  یک سیستم دلخواه از  $m$ ،  $(x, y)$ -مسیر جهت‌دار کمان-مجزا در  $N$

باشد. تابع  $f$  را روی  $A$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \text{ کمانی از } \bigcup_{i=1}^m P_i \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به وضوح  $f$  یک شماره با مقدار  $m$  در  $N$  است. از طرفی چون  $f^*$  یک شماره ماکزیمم است، داریم:

$$\text{val } f^* \geq m \quad (11-11)$$

از روابط (۱۰-۱۱) و (۱۱-۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$\text{val } f^* = m$$

فرض کنید که  $\bar{K} = (S, \bar{S})$ ، یک برش مینیمم در  $N$  باشد. در این صورت در  $N - \bar{K}$ ، هیچ رأسی از  $\bar{S}$  قابل دستیابی از رأس‌های  $S$  نیست؛ به ویژه  $y$  قابل دستیابی از  $x$  نمی‌باشد. بنابراین  $\bar{K}$  یک مجموعه از کمان‌هایی است که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار می‌شود. اگر کمترین تعداد کمان‌هایی را که با حذف آن‌ها، تمام  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار در  $N$  نابود می‌شوند،  $n$  در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{cap } \bar{K} = |\bar{K}| \geq n \quad (12-11)$$

حال فرض کنید که  $Z$  مجموعه‌ای از  $n$  کمان باشد که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار می‌شود و مجموعه تمام رأس‌هایی که در  $N - Z$ ، قابل دستیابی از  $x$  هستند را با  $S$  نمایش می‌دهیم. از آن جایی که  $x \in S$  و  $y \in \bar{S}$ ، در نتیجه  $K = (S, \bar{S})$  یک برش در  $N$  است. علاوه بر این طبق تعریف  $S$ ،  $N - Z$  شامل هیچ کمانی از  $(S, \bar{S})$  نیست و در نتیجه  $K \subseteq Z$ . با توجه به اینکه  $\bar{K}$  یک برش مینیمم است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\text{cap } \bar{K} \leq \text{cap } K = |K| \leq |Z| = n \quad (13-11)$$

با ترکیب روابط (۱۲-۱۱) و (۱۳-۱۱) داریم:

$$\square \text{cap } \bar{K} = n$$

**قضیه ۱۱-۴** فرض کنید  $x$  و  $y$  دو رأس از گراف جهت‌دار  $D$  باشند. در این صورت بیشترین تعداد

$(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار کمان-مجزا در  $D$  برابر است با کمترین تعداد کمان‌هایی که حذف آن‌ها باعث از

بین رفتن تمام  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار  $D$  می‌شود.

**اثبات** با اختصاص ظرفیت واحد به هر یک از کمان‌های  $D$ ، به یک شبکه  $N$  با منبع  $x$  و چاهک  $y$

می‌رسیم. با توجه به لم ۱۱-۴ و قضیه شماره ماکزیمم-برش مینیمم (قضیه ۱۱-۳) نتیجه روشن است.  $\square$

با یک ترفند ساده، بلافاصله به یک نسخه غیرجهت‌دار از قضیهٔ ۱۱-۴ دست می‌یابیم.

**قضیهٔ ۱۱-۵** فرض کنید  $\gamma$  و  $x$  دو رأس از گراف  $G$  باشند. در این صورت بیشترین تعداد  $(x, \gamma)$ -مسیرهای یال-مجزا در  $G$  برابر است با کمترین تعداد یال‌هایی که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام  $(x, \gamma)$ -مسیرهای  $G$  می‌شود.

**اثبات** قضیهٔ ۱۱-۴ را روی  $D(G)$ ، گراف جهت‌دار وابسته  $G$  به کار ببندید (تمرین ۱۰-۳-۶). □

**نتیجهٔ ۱۱-۵** گراف  $G$ ،  $k$ -همبند یالی است اگر و تنها اگر هر دو رأس متمایز  $G$  با حداقل  $k$  مسیر یال-مجزا به یکدیگر وصل شده باشند.

**اثبات** این مطلب بلافاصله از قضیهٔ ۱۱-۵ و تعریف  $k$ -همبندی یالی حاصل می‌شود. □

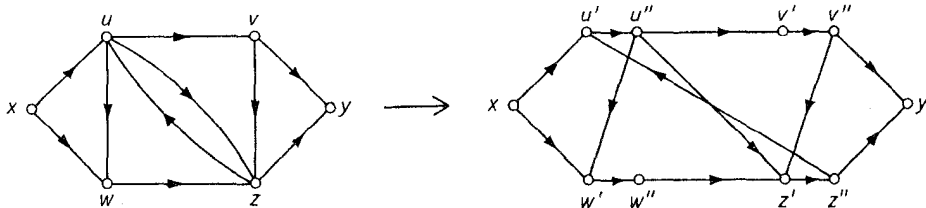
اکنون نسخه رأسی قضایای فوق را بررسی می‌کنیم.

**قضیهٔ ۱۱-۶** فرض کنید  $\gamma$  و  $x$  دو رأس از گراف جهت‌دار  $D$  باشند به طوری که  $x$  مستقیماً به  $\gamma$  وصل نشده باشد. در این صورت بیشترین تعداد  $(x, \gamma)$ -مسیرهای جهت‌دار مجزای داخلی در  $D$  برابر است با کمترین تعداد رأس‌هایی که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام  $(x, \gamma)$ -مسیرهای جهت‌دار در  $D$  می‌شود.

**اثبات** گراف جدید  $D'$  را از روی  $D$  به صورت زیر می‌سازیم:

الف) هر رأس  $v \in V\{x, \gamma\}$  را به دو رأس جدید  $v'$  و  $v''$  می‌شکنیم و آن‌ها را با کمان  $(v', v'')$  به یکدیگر وصل می‌کنیم.

ب) هر کمان  $D$  با سر  $v \in V\{x, \gamma\}$  را با کمان جدیدی که سر آن  $v'$  است و هر کمان  $D$  با دم  $v \in V\{x, \gamma\}$  را با کمان جدیدی که دم آن  $v''$  است، جایگزین می‌کنیم. این عمل در شکل ۱۱-۱۰ نشان داده شده است.



شکل ۱۱-۱۰

اینک متناظر با هر یک از  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار  $D'$ ، یک  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار در  $D$  وجود دارد که از انقباض تمام کمان‌های به شکل  $(v', v'')$  به دست می‌آید و برعکس، متناظر با هر  $(x, y)$ -مسیر جهت‌دار در  $D$ ، یک  $(x, y)$ -مسیر جهت‌دار در  $D'$  وجود دارد که از شکستن رأس‌های داخلی مسیر به دست می‌آید. علاوه بر این، دو  $(x, y)$ -مسیر جهت‌دار در  $D'$ ، کمان-مجزا خواهند بود اگر و تنها اگر مسیرهای متناظر با آن دو در  $D$ ، مجزای داخلی باشند. با توجه به این مطلب، بیشترین تعداد  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار کمان-مجزا در  $D'$  با بیشترین تعداد  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار مجزای داخلی در  $D$  برابر است. به طور مشابه، کمترین تعداد کمان‌هایی از  $D'$  که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار می‌شود، برابر است با کمترین تعداد رأس‌هایی از  $D$  که حذف آن‌ها، تمام  $(x, y)$ -مسیرهای جهت‌دار را متلاشی می‌کند (تمرین ۱۱-۴). اکنون با توجه به قضیه ۱۱-۴، نتیجه مورد نظر نتیجه می‌شود. □

**قضیه ۱۱-۷** فرض کنید  $x$  و  $y$  دو رأس نامجاور در گراف  $G$  باشند. در این صورت کمترین تعداد  $(x, y)$ -مسیرهای مجزای داخلی در  $G$  برابر است با کمترین تعداد رأس‌هایی که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام  $(x, y)$ -مسیرهای  $G$  می‌گردد.

**اثبات** قضیه ۱۱-۶ را برای  $D(G)$ ، گراف جهت‌دار وابسته  $G$  به کار می‌گیریم. □

نتیجه زیر نیز بلافاصله به دست می‌آید.

**نتیجه ۱۱-۷** گراف  $G$  با شرط  $v \geq k + 1$ ،  $k$ -همبند است اگر و تنها اگر هر دو رأس متمایز  $G$  حداقل با  $k$  مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصل شده باشند.

## تمرین‌ها

۱-۴-۱۱ نشان دهید که در اثبات قضیه ۱۱-۶، کمترین تعداد کمان‌هایی از  $D'$  که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام  $(x, y)$ -مسیرهای  $D'$  می‌شود برابر است با کمترین تعداد رأس‌هایی از  $D$ ، که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام  $(x, y)$ -مسیرهای  $D$  می‌گردد.

۲-۴-۱۱ قضیه کونینگ (قضیه ۵-۳) را از قضیه ۱۱-۷ استخراج کنید.

۳-۴-۱۱ فرض کنید  $G$  یک گراف و  $S$  و  $T$  دو زیرمجموعه مجزا از  $V$  باشند. نشان دهید که بیشترین تعداد مسیرهای رأس-مجزایی که یک سر آنها در  $S$  و سر دیگر آن‌ها در  $T$  است، برابر است با کمترین تعداد رأس‌هایی که حذف آن‌ها باعث جدا شدن  $S$  از  $T$  می‌گردد (یعنی، پس از حذف آن‌ها، هیچ مؤلفه‌ای به طور همزمان شامل یک رأس از  $S$  و یک رأس از  $T$  نباشد).

۴-۴-۱۱ \* نشان دهید که اگر  $G$ ،  $k$ -همبند باشد ( $k \geq 2$ )، در این صورت هر  $k$  رأس  $G$  توأمأ در یک دور از  $G$  قرار دارند.  
(G. A. Dirac)

## ۵-۱۱ شماره‌های امکان پذیر

فرض کنید  $N$  یک شبکه باشد. به هر منع  $x_i$  از  $N$ ، عدد صحیح نامنفی  $\sigma(x_i)$  که عرضه در  $x_i$  نامیده می‌شود و به هر چاهک  $y_i$  از  $N$ ، عدد صحیح نامنفی  $\partial(y_i)$  که تقاضا در  $y_i$  نامیده می‌شود، اختصاص می‌دهیم. می‌گوییم شمارهٔ  $f$  در  $N$  امکان پذیر است، هرگاه داشته باشیم:

$$f^+(x_i) - f^-(x_i) \leq \sigma(x_i) \quad \text{به‌ازای هر } x_i \in X$$

9

$$f^-(y_i) - f^+(y_i) \geq \partial(y_i) \quad \text{به‌ازای هر } y_i \in Y$$

به عبارت دیگر، شمارهٔ  $f$  وقتی امکان پذیر است که شمارهٔ برآیند خروجی از هر منع  $x_i$  از مقدار عرضه در  $x_i$  تجاوز نکند و شمارهٔ برآیند ورودی به هر چاهک  $y_i$ ، حداقل به اندازه تقاضا در  $y_i$  باشد. در این صورت یک سؤال طبیعی مطرح می‌شود و آن این است که شرط لازم و کافی برای یک شمارهٔ امکان پذیر در  $N$  چیست؟

قضیهٔ ۸-۱۱ که متعلق به گیل<sup>۱</sup> (۱۹۵۷) است، به این سؤال پاسخ می‌دهد. این قضیه می‌گوید که یک شمارهٔ امکان پذیر وجود دارد اگر و تنها اگر، به‌ازای هر زیرمجموعهٔ  $S$  از  $V$ ، مجموع ظرفیت‌های کمان‌های موجود از  $S$  به  $\bar{S}$ ، حداقل برابر تقاضای خالص  $\bar{S}$  باشد.

به‌ازای هر زیرمجموعهٔ  $S$  از  $V$ ،  $\sum_{v \in S} \sigma(v)$  را با  $\sigma(S)$  و  $\sum_{v \in \bar{S}} \partial(v)$  را با  $\partial(\bar{S})$  نمایش می‌دهیم.

**قضیهٔ ۸-۱۱** یک شمارهٔ امکان در  $N$  وجود دارد اگر و تنها اگر به‌ازای هر  $S \subseteq V$  داشته باشیم:

$$c(S, \bar{S}) \geq \partial(Y \cap \bar{S}) - \sigma(X \cap S) \quad (۱۱-۱۴)$$

**اثبات** شبکهٔ جدید  $N'$  را به صورت زیر از روی  $N$  می‌سازیم:

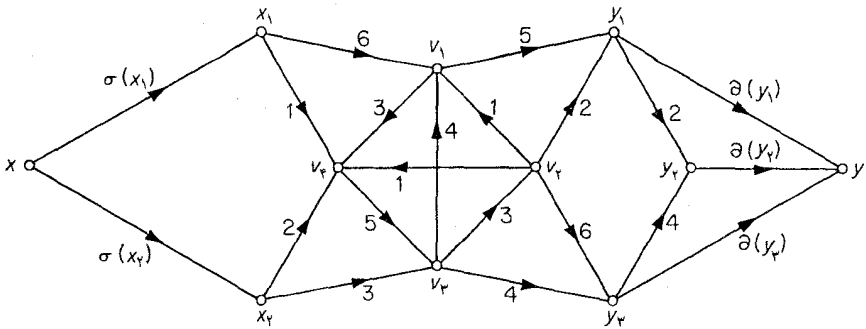
(الف) دو رأس جدید  $x, y$  به  $N$  اضافه می‌کنیم.

(ب)  $x$  را با کمانی به ظرفیت  $\sigma(x_i)$  به هر  $x_i \in X$  وصل می‌کنیم.

(ج) هر  $y_i \in Y$  را با کمانی به ظرفیت  $\partial(y_i)$  به  $y$  وصل می‌کنیم.

(د)  $x$  را به عنوان منبع و  $y$  را به عنوان چاهک  $N'$  در نظر می‌گیریم.

عملیات فوق در شکل ۱۱-۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۱-۱۱

بهراحتی می‌توان دید که  $N$  دارای یک شماره امکان پذیر است اگر و تنها اگر  $N'$  دارای شماره‌ای باشد که تمام کمان‌های برش  $(Y, \{y\})$  را اشباع کند (تمرین ۱۱-۵). از طرفی واضح است که اگر شماره‌ای در  $N'$  تمام کمان‌های  $(Y, \{y\})$  را اشباع کند، دارای مقدار  $\partial(Y) = \text{cap}(Y, \{y\})$  خواهد بود و بنابراین، طبق نتیجه ۱۱-۱، یک شماره ماکزیمم می‌باشد. در نتیجه  $N$  دارای یک شماره امکان پذیر است اگر و تنها اگر به‌ازای هر برش  $(SU\{x\}, \bar{S}U\{y\})$  از  $N'$  شرط زیر برقرار باشد:

$$\text{cap}(SU\{x\}, \bar{S}U\{y\}) \geq \partial(Y) \quad (11-15)$$

شرط‌های (۱۱-۱۴) و (۱۱-۱۵) دقیقاً یکسانند. زیرا اگر تابع ظرفیت را در  $N'$  با  $C'$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{cap}(SU\{x\}, \bar{S}U\{y\}) &= c'(S, \bar{S}) + c'(S, \{y\}) + c'(\{x\}, \bar{S}) \\ &= c(S, \bar{S}) + \partial(Y \cap S) + \sigma(X \cap \bar{S}) \quad \square \end{aligned}$$

قضیه ۱۱-۸ کاربردهای فراوانی در مسایل نظریه گراف‌ها دارد که یکی از آن‌ها را به‌عنوان نمونه ذکر می‌کنیم.

فرض کنید  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  و  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  دو دنباله از اعداد صحیح نامنفی باشند. می‌گوئیم زوج  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  توسط یک گراف دوبخشی ساده تحقق پذیر است اگر گراف دوبخشی ساده‌ای مانند  $G$  با دو بخش ساده  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  و  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

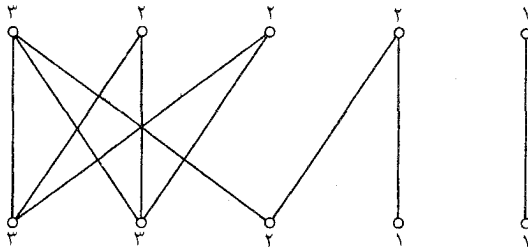
$$\text{به‌ازای } 1 \leq i \leq m: d(x_i) = p_i$$

$$\text{به‌ازای } 1 \leq j \leq n: d(y_j) = q_j$$

به‌طور مثال، زوج  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  که در آن

$$\mathbf{p} = (3, 2, 2, 2, 1) \text{ و } \mathbf{q} = (3, 3, 2, 1, 1)$$

توسط گراف دوبخشی شکل ۱۲-۱۱ تحقق‌پذیر است.



شکل ۱۲-۱۱

یک شرط لازم بدیهی برای تحقق‌پذیری این است که:

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{j=1}^n q_j \quad (۱۶-۱۱)$$

با این حال، شرط (۱۶-۱۱) به تنهایی کافی نیست. به‌طور مثال زوج  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  که در آن

$$\mathbf{p} = (5, 4, 4, 2, 1) \text{ و } \mathbf{q} = (5, 4, 4, 2, 1)$$

توسط هیچ گراف دوبخشی ساده‌ای تحقق‌پذیر نیست (تمرین ۱۱-۵۲). در قضیهٔ زیر، یک شرط لازم و کافی برای تحقق‌پذیری زوجی از دنباله‌ها توسط یک گراف دوبخشی ساده ارائه شده است. واضح است که ترتیب جملات دنباله‌ها تأثیری در تحقق‌پذیری ندارد و برای سادگی بحث فرض می‌کنیم که جملات  $\mathbf{q}$  به ترتیب غیرصعودی مرتب شده‌اند. یعنی:

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n \quad (۱۷-۱۱)$$

**قضیهٔ ۹-۱۱** فرض کنید  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  و  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  دنباله‌هایی از اعداد صحیح نامنفی باشند که در شروط (۱۶-۱۱) و (۱۷-۱۱) صدق می‌کنند. در این صورت  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  توسط یک گراف دوبخشی

ساده تحقق‌پذیر است اگر و تنها اگر



$$1 \leq k \leq n \text{ به ازای } \sum_{i=1}^m \min\{p_i, k\} = \sum_{j=1}^k q_j \quad (18-11)$$

**اثبات** فرض کنید  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  و  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  دو مجموعه مجزا و  $D$  یک گراف جهت‌دار باشد که از گراف دوبخشی کامل با دو بخش  $X, Y$  به دست آمده است. به طوری که تمام یال‌ها از  $X$  به  $Y$  جهت‌دهی شده‌اند. با اختصاص ظرفیت واحد به تمام کمان‌های  $D$ ، به یک شبکه  $N$  می‌رسیم و رأس‌های  $X$  و  $Y$  را به ترتیب به عنوان منابع و چاهک‌های  $N$  در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم که به ازای  $1 \leq i \leq m$ ، عرضه در منبع  $x_i$  برابر  $p_i$  و به ازای  $1 \leq j \leq n$ ، تقاضا در چاهک  $y_j$  برابر  $q_j$  است.

اینک متناظر با هر زیرگراف فراگیر از  $D$ ، یک شماره در  $N$  وجود دارد که دقیقاً تمام کمان‌های زیرگراف را اشباع می‌کند و مسلماً این تناظر، یک به یک است. بانگاهی به رابطه (۱۶-۱۱) مشخص می‌گردد که  $(p, q)$  توسط یک گراف دوبخشی ساده تحقق پذیر است اگر و تنها اگر شبکه  $N$  دارای یک شماره امکان‌پذیر باشد. اکنون از قضیه ۸-۱۱ کمک می‌گیریم:

به ازای هر مجموعه  $S$  از رأس‌های  $N$  می‌نویسیم:

$$I(S) = \{i \mid x_i \in S\} \quad \text{و} \quad J(S) = \{j \mid y_j \in S\}$$

در این صورت، طبق تعریف داریم:

$$\begin{cases} c(S, \bar{S}) = |I(S)| + |J(\bar{S})| \\ \sigma(X \cap \bar{S}) = \sum_{i \in I(\bar{S})} p_i \quad \text{و} \quad \partial(Y \cap \bar{S}) = \sum_{j \in J(\bar{S})} q_j \end{cases} \quad (19-11)$$

فرض کنید که  $N$  دارای یک شماره امکان‌پذیر باشد. بنابر قضیه ۸-۱۱ و رابطه (۱۹-۱۱) داریم:

$$S \subseteq X \cup Y \text{ هر به ازای } |I(S)| + |J(\bar{S})| \geq \sum_{j \in J(\bar{S})} q_j - \sum_{i \in I(\bar{S})} p_i$$

با قرار دادن  $S = \{x_i \mid p_i > k\} \cup \{y_j \mid q_j > k\}$  داریم:

$$\sum_{i \in I(S)} \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^k q_j - \sum_{i \in I(\bar{S})} \min\{p_i, k\}$$

از آن جایی که رابطهٔ فوق به‌ازای هر مقدار  $k$  برقرار است. رابطهٔ (۱۸-۱۱) به اثبات می‌رسد. بر عکس، فرض کنید که رابطهٔ (۱۸-۱۱) برقرار باشد و  $S$  را مجموعه دلخواهی از رأس‌های  $N$  در نظر بگیرید. بنابراین روابط (۱۸-۱۱) و (۱۹-۱۱) داریم:

$$c(S, \bar{S}) \geq \sum_{i \in I(S)} \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^k q_j - \sum_{i \in I(\bar{S})} \min\{p_i, k\}$$

$$\geq \partial(Y \cap \bar{S}) - \sigma(X \cap \bar{S})$$

که در آن  $k = |J(\bar{S})|$  است. اینک از قضیهٔ ۸-۱۱ نتیجه می‌شود که  $N$  دارای یک شمارهٔ امکان‌پذیر است. □  
قضیهٔ ۹-۱۱ را می‌توان از دیدگاه ماتریسی هم مورد بررسی قرار داد. به هر گراف دوبخشی ساده  $G$  با دو بخش  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  و  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ، می‌توان یک ماتریس  $m \times n$  مانند  $B$  نسبت داد که در آن، بسته به اینکه  $x_i y_j$  یالی از  $G$  هست یا خیر،  $b_{ij}$  برابر ۱ یا ۰ خواهد بود. برعکس، هر  $(0, 1)$ -ماتریس  $m \times n$ ، به طریق فوق با یک گراف دوبخشی ساده متناظر است. بنابراین قضیهٔ ۹-۱۱ شرط لازم و کافی برای وجود یک  $(0, 1)$ -ماتریس  $m \times n$  با مجموع سطرهای  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  و مجموع ستون‌های  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  در اختیار ما قرار می‌دهد.

راه ساده‌ای برای به تصویر کشیدن شرط (۱۸-۱۱) در قالب ماتریس‌ها وجود دارد.

فرض کنید  $B^*$  نشان‌دهنده  $(0, 1)$ -ماتریسی باشد که در آن اولین  $p_i$  درایه از هر سطر  $i$  برابر یک و بقیه درایه‌ها برابر صفرند و فرض کنید که  $p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*$  مجموع ستون‌های  $B^*$  باشد. دنباله  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = \mathbf{p}^*$ ، مزدوج  $\mathbf{p}$  نامیده می‌شود. به طور مثال، مزدوج  $(5, 4, 4, 2, 1)$  عبارت است از  $(5, 4, 3, 3, 1)$  (شکل ۱۱-۱۳، را ملاحظه نمایید).

$$\mathbf{p} \begin{matrix} & & & & \mathbf{p}^* \\ & & & & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. & & & & \end{matrix}$$

اکنون مجموع  $\sum_{j=1}^k p_j^*$  را در نظر بگیرید. سطر  $i$  از  $\mathbf{B}^*$ ، به اندازه  $\min\{p_i, k\}$  در این مجموع شرکت دارد. بنابراین سمت چپ رابطه (۱۸-۱۱) برابر است با  $\sum_{j=1}^k p_j^*$  و رابطه (۱۸-۱۱) هم‌ارز با شرط زیر است:

$$\text{به‌ازای } 1 \leq k \leq n: \sum_{j=1}^k p_j^* \geq \sum_{j=1}^k q_j$$

فرمول‌بندی قضیه ۹-۱۱ در قالب ماتریس‌های صفر و یک متعلق به ریزر<sup>۱</sup> (۱۹۵۷) می‌باشد. برای مطالعه سایر کاربردهای نظریه شماره‌ها در شبکه‌ها، می‌توانید به [Ford and Fulkerson; 1962] مراجعه نمایید.

### تمرین‌ها

۱-۵-۱۱ نشان دهید که در اثبات قضیه ۸-۱۱، شبکه  $N$  دارای یک شماره امکان‌پذیر است اگر و تنها اگر  $N'$  دارای شماره‌ای باشد که تمام کمان‌های برش  $(Y, \{v\})$  را اشباع نماید.

۲-۵-۱۱ نشان دهید زوج  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  که در آن

$$\mathbf{p} = (5, 4, 4, 2, 1) \text{ و } \mathbf{q} = (5, 4, 4, 2, 1)$$

توسط هیچ گراف دوبخشی ساده‌ای تحقق‌پذیر نیست.

۳-۵-۱۱ دنباله‌های  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  و  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  داده شده‌اند. یک شرط لازم و کافی برای وجود زیرگرافی مانند  $D$  با مجموعه رأس‌های  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  پیدا کنید به طوری که:

$$\text{الف) به‌ازای هر } 1 \leq i \leq n: d^+(v_i) = q_i, d^-(v_i) = p_i$$

ب)  $D$  دارای ماتریس مجاورت صفر و یک باشد.

۴-۵-۱۱\* فرض کنید  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  و  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  دو دنباله غیر صعودی از اعداد صحیح

نامنفی باشد. دنباله‌های  $(q_1^{-1}, q_2^{-1}, \dots, q_{p_1-1}, q_{p_1+1}, \dots, q_n)$  و  $(p_2, p_3, \dots, p_n)$  را به ترتیب با  $\mathbf{p}'$ ،  $\mathbf{q}'$  نشان می‌دهیم.

الف) نشان دهید که  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  توسط یک گراف دوبخشی ساده تحقق‌پذیر است، اگر و تنها اگر  $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$  نیز همان‌گونه باشد.

ب) با استفاده از الف) الگوریتمی برای ساخت یک گراف دوبخشی ساده که  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  را در صورت تحقق‌پذیری به تحقق می‌رساند ارائه نمایید.

۵-۵-۱۱ گراف  $(m+n)$ -منتظم  $G$ ،  $(m, n)$ -جهت پذیر نامیده می‌شود اگر بتوان آن را طوری جهت‌دهی کرد که تمام درجه‌های ورودی برابر  $m$  یا  $n$  باشند.

الف) \* نشان دهید که  $G$ ،  $(m, n)$ -جهت پذیر است، اگر و تنها اگر افزاز  $(V_1, V_2)$  از  $V$  وجود داشته باشد، طوری که به‌ازای هر  $S \subseteq V$  داشته باشیم:

$$|(m-n)(|V_1 \cap S| - |V_2 \cap S|)| \leq |f(S, \bar{S})|$$

ب) نتیجه بگیرید که اگر  $G$ ،  $(m, n)$ -جهت پذیر باشد  $(m > n)$ . در این صورت  $G$ ،  $(m-1, n+1)$ -جهت پذیر نیز هست.

## مراجع

- Edmonds, J. and Karp, R.M. (1972). Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problem. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 19, 248–64
- Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1956). Maximal flow through a network. *Canad. J. Math.*, 8, 399–404
- Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1957). A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem. *Canad. J. Math.*, 9, 210–18
- Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton
- Gale, D. (1957). A theorem on flows in networks. *Pacific J. Math.*, 7, 1073–82
- Menger, K. (1927). Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.*, 10, 96–115
- Ryser, H. J. (1957). Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canad. J. Math.*, 9, 371–77

# فصل ۱۲

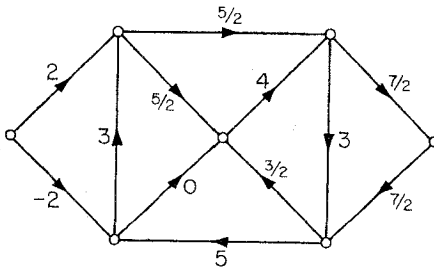
## فضای دورها و فضای باندها

### ۱-۱۲ گردش‌ها و اختلاف پتانسیل‌ها

فرض کنید  $D$  یک گراف جهت‌دار باشد. تابع مقدار حقیقی  $f$  روی  $A$ ، یک گردش در  $D$  نامیده می‌شود اگر در هر رأس، قید محدودیت صادق باشد. به عبارتی دیگر:

$$f^-(v) = f^+(v) \quad (1-12) \quad \text{به‌ازای هر } v \in V$$

اگر  $D$  را یک شبکه الکتریکی در نظر بگیریم، در این صورت تابع  $f$  با ویژگی فوق، نشان‌دهنده گردش جریان الکتریسیته در  $D$  خواهد بود، شکل ۱-۱۲، یک گردش در گراف جهت‌دار را نشان می‌دهد.



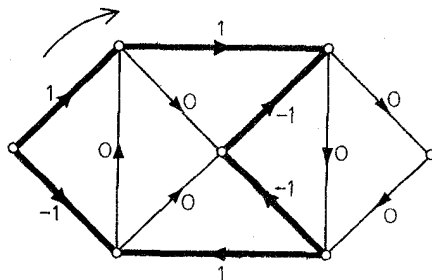
شکل ۱-۱۲. یک گردش

اگر  $f$  و  $g$  دو گردش دلخواه  $r$  یک عدد حقیقی باشد، به راحتی می‌توان تحقیق کرد که  $f+g$  و  $rf$  هم گردش هستند. بنابراین مجموعه تمام گردش‌ها در  $D$ ، یک فضای برداری است که آنرا با  $\mathcal{G}$  نمایش می‌دهیم. در ادامه این بخش، مناسب‌تر دیدیم که یک زیرمجموعه  $S$  از  $A$  را با  $D[S]$ ، یعنی زیرگراف جهت‌دار  $D$  القا شده توسط  $S$ ، یکسان در نظر بگیریم.

برخی گردش‌ها از لحاظ خاصی مورد توجه هستند. این گردش‌ها وابسته به دورهای  $D$  می‌باشند. فرض کنید  $C$  یک دور از  $D$  باشد که جهتی به آن نسبت داده شده است و فرض کنید  $C^+$  نمایانگر مجموعهٔ کمان‌هایی از  $C$  باشد که جهت آن‌ها موافق با جهت دور باشد. تابع  $f_C$  را که به صورت زیر تعریف می‌شود، به  $C$  وابسته می‌کنیم:

$$f_C(a) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \in C^+ \\ -1 & \text{اگر } a \in C \setminus C^+ \\ 0 & \text{اگر } a \notin C \end{cases}$$

روشن است که  $f_C$  در شرط (۱۲-۱) صدق می‌کند و در نتیجه یک گردش است. در شکل ۱۲-۲، یک گردش وابسته به یک دور نشان داده شده است.



شکل ۱۲-۲

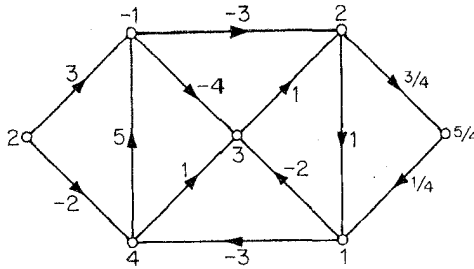
بعداً خواهیم دید که هر گردش، ترکیبی خطی از گردش‌های وابسته به دورهاست. به همین دلیل، از  $\mathcal{C}$  به عنوان فضای دورهای  $D$  یاد می‌کنیم.

اکنون بحث خود را به رده دیگری از توابع مرتبط، معطوف می‌کنیم. اگر تابع  $p$  روی مجموعهٔ رأس‌های  $V$  از  $D$  تعریف شده باشد، تابع جدید  $\delta_p$  را روی مجموعهٔ کمان‌های  $A$  به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر کمان  $a$  دارای دم  $x$  و سر  $y$  باشد، در این صورت:

$$\delta_p(a) = p(x) - p(y) \quad (۱۲-۲)$$

اگر  $D$  را به عنوان یک شبکهٔ الکتریکی با پتانسیل  $p(v)$  در رأس  $v$  در نظر بگیریم، طبق رابطه (۱۲-۲)،  $\delta_p$  نمایانگر اختلاف پتانسیل در طول سیم‌های شبکه خواهد بود. به همین دلیل، تابع  $g$  روی  $A$ ، یک اختلاف پتانسیل در  $D$  نامیده می‌شود، اگر به ازای تابعی مانند  $p$  روی  $V$  داشته باشیم:  $g = \delta_p$ . در شکل

۳-۱۲، گراف جهت‌داری با پتانسیل‌های اختصاص یافته به رأس‌های آن و اختلاف پتانسیل متناظر نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۲. یک اختلاف پتانسیل

همانند گردش‌ها، مجموعه  $\mathcal{B}$  متشکل از تمام اختلاف پتانسیل‌های  $D$ ، تحت عمل جمع و ضرب عددی بسته است و در نتیجه یک فضای برداری را تشکیل می‌دهد.

مشابه تابع  $f_C$ ، وابسته به یک دور  $C$ ، تابع  $g_B$  وابسته به یک باند  $B$  وجود دارد. فرض کنید  $B = [S, \bar{S}]$

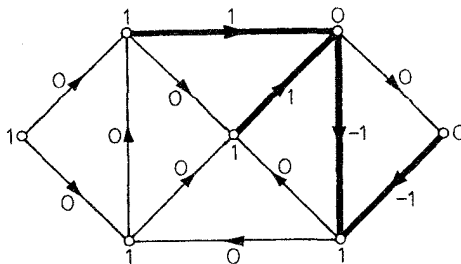
یک باند از  $D$  باشد.  $g_B$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_B(a) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \in (S, \bar{S}) \\ -1 & \text{اگر } a \in (\bar{S}, S) \\ 0 & \text{اگر } a \notin B \end{cases}$$

به راحتی می‌توان دید  $g_B = d_p$  که در آن:

$$p(v) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v \in S \\ 0 & \text{اگر } v \in \bar{S} \end{cases}$$

در شکل ۴-۱۲ اختلاف پتانسیل وابسته به یک باند نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۲

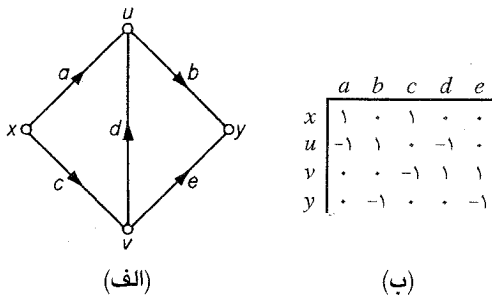


در ادامه خواهیم دید که هر اختلاف پتانسیل، یک ترکیب خطی از اختلاف پتانسیل‌های وابسته به باندهاست. به همین دلیل، از  $\mathcal{B}$  به عنوان فضای باندهای  $D$  یاد می‌کنیم.

طی مطالعه خواص دو فضای برداری  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{B}$  مناسب‌تر دیدیم که هر تابع روی  $A$  را به عنوان یک بردار سطری در نظر بگیریم که مختصات آن با اعضای  $A$ ، برچسب خورده‌اند. رابطه بین  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{B}$  با معرفی ماتریس وقوع  $D$  به خوبی مشخص می‌شود. به هر رأس  $v$  از  $D$ ، تابع  $m_v$  را که به صورت زیر روی  $A$  تعریف شده است، نسبت می‌دهیم:

$$m_v(a) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \text{ یک کمان، و } v \text{ دم } a \text{ باشد} \\ -1 & \text{اگر } a \text{ یک کمان و } v \text{ سر } a \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ماتریس وقوع  $D$  عبارتست از ماتریس  $M$  که سطرهای آن از توابع  $m_v$  تشکیل شده‌اند. در شکل ۵-۱۲ یک گراف جهت‌دار به همراه ماتریس وقوع آن نشان داده شده است.



شکل ۵-۱۲. (الف)  $D$  (ب) ماتریس وقوع  $D$

**قضیه ۱-۱۲** فرض کنید  $M$  ماتریس وقوع گراف جهت‌دار  $D$  باشد. در این صورت  $\mathcal{B}$ ، فضای سطری  $M$  و  $\mathcal{C}$  مکمل متعامد آن است.

**اثبات** فرض کنید  $g = \delta_p$  یک اختلاف پتانسیل در  $D$  باشد. از رابطه (۱۲-۲) نتیجه می‌شود که:

$$g(a) = \sum_{v \in V} p(a) m_v(a)$$

: به ازای هر  $a \in A$

بنابراین  $g$  یک ترکیب خطی از سطرهای  $M$  است. برعکس، هر ترکیب خطی از سطرهای  $M$  یک اختلاف پتانسیل است. پس  $\mathcal{B}$  فضای سطری  $M$  است.

حال فرض کنید که  $f$  تابعی روی  $A$  باشد. شرط (۱۲-۱) برای گردش بودن  $f$  را می توان به این صورت بازنویسی کرد:

$$v \in V \text{ هر به ازای } \sum_{a \in A} m_{v(a)} f(a) = 0$$

رابطه فوق نشان می دهد که  $f$  یک گردش است اگر و تنها اگر به هر سطر  $M$  متعامد باشد. در نتیجه  $\mathcal{C}$  مکمل متعامد  $\mathcal{B}$  است.  $\square$

**محمل تابع  $f$  روی  $A$**  عبارتست از مجموعه اعضای  $A$  که مقدار  $f$  در آن ها ناصفر است. محمل  $f$  را با  $\|f\|$  نمایش می دهیم.

**لم ۱۲-۲-۱** اگر  $f$  یک گردش ناصفر باشد، آنگاه  $\|f\|$  شامل یک دور است.

**اثبات** این مطلب کاملاً بدیهی است، زیرا  $\|f\|$  نمی تواند شامل رأسی با درجه یک باشد.  $\square$

**لم ۱۲-۲-۲** اگر  $g$  یک اختلاف پتانسیل باشد، آنگاه  $\|g\|$  شامل یک باند است.

**اثبات** فرض کنید  $g = \delta_p$  یک اختلاف پتانسیل ناصفر در  $D$  باشد، رأسی مانند  $u \in V$  انتخاب می کنیم به نحوی که بر روی کماتی از  $\|g\|$  واقع باشد و قرار می دهیم:

$$U = \{v \in V \mid p(v) = p(u)\}$$

مسلماً  $\|g\| \cap [U, \bar{U}] \subseteq [U, \bar{U}]$ . زیرا به ازای هر  $a \in [U, \bar{U}]$  داریم:  $g(a) = 0$ . ولی با توجه به انتخاب  $u$ ,

$[U, \bar{U}]$  ناتهی است و در نتیجه  $\|g\|$  شامل یک باند است.  $\square$

ماتریس  $B$  یک ماتریس پایه  $\mathcal{B}$  نامیده می شود، هرگاه سطرهای  $B$ ، یک پایه برای  $\mathcal{B}$  تشکیل دهند. ماتریس پایه  $\mathcal{C}$  نیز به طور مشابه تعریف می شود. برای راحتی بحث، نماد زیر را تعریف می کنیم: اگر  $R$  ماتریسی باشد که ستون های آن با اعضای  $A$  برچسب خورده اند و اگر  $S \subseteq A$ ، زیرماتریسی از  $R$  را که شامل ستون های برچسب خورده با اعضای  $S$  است، با  $R|S$  نمایش می دهیم. اگر  $R$  فقط شامل یک سطر باشد، نماد گذاری ما با نمادگذاری معمولی که برای محدود کردن یک تابع به زیرمجموعه ای از دامنه اش به کار می رود، یکسان است.

**قضیه ۱۲-۲** فرض کنید  $C$  و  $B$  به ترتیب ماتریس های پایه  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{B}$  باشند. در این صورت به ازای هر

$S \subseteq A$  داریم:

(الف) ستون های  $B|S$  مستقل خطی اند اگر و تنها اگر  $S$  بی دور باشد و

(ب) ستون های  $C|S$  مستقل خطی اند اگر و تنها اگر  $S$  شامل هیچ بانندی نباشد.

**اثبات** ستونی از  $\mathbf{B}$  که متناظر با کمان  $a$  است را با  $\mathbf{B}(a)$  نمایش می‌دهیم. ستون‌های  $\mathbf{B}|S$  مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر تابعی مانند  $f$  روی  $A$  وجود داشته باشد به طوری که:

$$a \in S : f(a) \neq 0$$

$$a \notin S : f(a) = 0$$

$$\sum_{a \in A} f(a) \mathbf{B}(a) = 0$$

و

در نتیجه ستون‌های  $\mathbf{B}|S$  مستقل خطی خواهند بود اگر و تنها اگر یک گردش ناصفر  $f$  با شرط  $\|f\| \subseteq S$  وجود داشته باشد. اگر چنین  $f$ ی وجود داشته باشد، طبق لم ۱۲-۲-۱،  $S$  شامل یک دور است. از طرف دیگر، اگر  $S$  شامل دوری مانند  $C$  باشد، در این صورت  $f_C$  یک گردش ناصفر با شرط  $\|f_C\| = C \subseteq S$  خواهد بود. در نتیجه ستون‌های  $\mathbf{B}|S$  مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر  $S$  بی‌دور باشد. با یک استدلال مشابه و با استفاده از لم ۱۲-۲-۲ قسمت (ب) نیز به اثبات می‌رسد.  $\square$

**نتیجهٔ ۱۲-۲** رتبه دو فضای  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{B}$  توسط رابطه‌های زیر معین می‌گردند:

$$\dim \mathcal{B} = v - \omega \quad (۳-۱۲)$$

$$\dim \mathcal{C} = \varepsilon - v + \omega \quad (۴-۱۲)$$

**اثبات** ماتریس پایه  $\mathbf{B}$  از  $\mathcal{B}$  را در نظر بگیرید. طبق قضیهٔ ۱۲-۲ داریم:

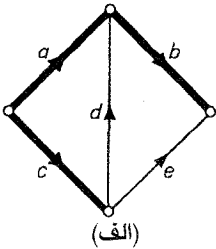
$$\mathbf{B}|S = \max\{|S| \mid S \subseteq A\}$$

بیشترین مقدار در رابطهٔ فوق وقتی به دست می‌آید که  $S$  یک جنگل ماکزیمال از  $D$  باشد و در آن صورت مقدار آن برابر  $v - \omega$  خواهد بود (تمرین ۲-۲-۴). با توجه به اینکه بعد  $\mathcal{B}$  برابر با رتبه  $\mathbf{B}$  است، رابطه (۳-۱۲) به اثبات می‌رسد. از آن جایی که  $\mathcal{C}$  مکمل متعامد  $\mathcal{B}$  است، رابطه (۴-۱۲) نیز ثابت می‌گردد.  $\square$

فرض کنید  $T$  یک جنگل ماکزیمال از  $D$  باشد. یک ماتریس پایه خاص از  $\mathcal{C}$ ، به  $T$  وابسته است. اگر  $a$  کمانی از  $\bar{T}$  باشد، آنگاه  $T+a$  شامل یک دور منحصر به فرد خواهد بود. فرض کنید  $C_a$  نمایانگر این دور و  $f_a$  نمایانگر گردش وابسته به  $C_a$  باشد به طوری که  $f_a(a) = 1$ . ماتریس  $\mathbf{C}$  با ابعاد  $(\varepsilon - v - \omega) \times \varepsilon$  که سطرهای آن  $f_a$  است،  $(a \in \bar{T})$  یک ماتریس پایه از  $\mathcal{C}$  می‌باشد، زیرا هر سطر یک گردش است و رتبه  $\mathbf{C}$  برابر  $\varepsilon - v - \omega$  می‌باشد (چون  $\bar{T}|\mathbf{C}$  یک ماتریس همانی است). ماتریس  $\mathbf{C}$  را یک ماتریس پایه  $\mathcal{C}$

متناظر با  $T$  می‌نامیم. شکل ۱۲-۶ب ماتریس پایه  $\mathcal{B}$  متناظر با درخت مشخص شده در شکل ۱۲-۶الف را

نشان می‌دهد.



$$f_d \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d & e \\ \hline -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$g_c \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d & e \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

(الف)

(ب)

(ج)

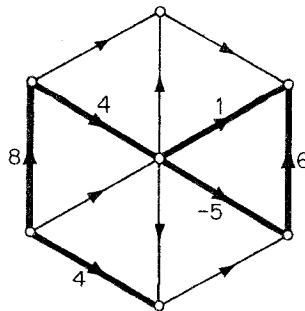
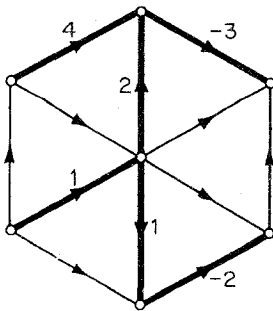
شکل ۱۲-۶

به‌طور مشابه، اگر  $a$  یک کمان از  $T$  باشد، آنگاه  $\bar{T}+a$  شامل یک باند منحصر به فرد خواهد بود. (قضیه ۲-۶ را ملاحظه نمایید). فرض کنید که  $B_a$  نمایانگر این باند و  $g_a$  اختلاف پتانسیلی متناظر با  $B_a$  باشد که در آن داریم:  $g_a(a)=1$ . ماتریس  $\mathbf{B}$  با ابعاد  $(v-w) \times \varepsilon$  که سطرهای آن  $g_a$  ( $a \in T$ ) است، یک ماتریس پایه از  $\mathcal{B}$  قلمداد می‌شود که ماتریس پایه  $\mathcal{B}$  متناظر با  $T$  نامیده می‌شود. در شکل ۱۲-۶ج مثالی از چنین ماتریسی نشان داده شده است.

رابطه بین دورها و باندها که در بحث فوق نمایان است، جایگاه مناسب خود را در نظریه مترویدها یافته است. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به [Tutte ; 1971] مراجعه نمایند.

## تمرین‌ها

۱۲-۱الف) در شکل (۱) زیر، تابعی روی یک درخت فراگیر مشخص شده است و در شکل (۲) تابعی روی مکمل همان درخت تعریف شده است. تابع شکل (۱) را به یک اختلاف پتانسیل و تابع شکل (۲) را به یک گردش بسط دهید.



(ب) فرض کنید  $f$  یک گردش و  $g$  یک اختلاف پتانسیل در  $D$  و  $T$  یک درخت فراگیر از  $D$  باشد. نشان دهید که  $f$  به صورت یکتا توسط  $f|_{\bar{T}}$  و  $g$  به طور یکتا توسط  $g|_T$  معین می‌گردد.

۲-۱-۱۲ الف) فرض کنید  $B$  و  $C$  ماتریس‌های پایه  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  و  $T$  یک درخت فراگیر دلخواه از  $D$  باشد.

نشان دهید که  $B$  توسط  $T|B$  و  $C$  توسط  $T|C$  به طور یکتا معین می‌گردند.

(ب) فرض کنید  $T_1$  و  $T$  دو درخت فراگیر ثابت از  $D$  باشند و همچنین فرض کنید که  $B_1$  و  $B$

نمایانگر ماتریس‌های پایه  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$ ،  $C_1$  نمایانگر ماتریس‌های پایه  $\mathcal{C}$ ، متناظر با

$$B = (B|T_1)B_1 \text{ و } C = (C|\bar{T}_1)C_1 \text{ نشان دهید که:}$$

۳-۱-۱۲ فرض کنید  $K$  ماتریسی باشد که از حذف یک سطر دلخواه از ماتریس وقوع  $M$  گراف جهت‌دار

همبند  $D$  به دست آمده است. نشان دهید که  $K$  یک ماتریس پایه از  $\mathcal{B}$  است.

۴-۱-۱۲ نشان دهید که اگر  $G$  یک گراف مسطح باشد، آنگاه داریم:  $\mathcal{B}(G) \cong \mathcal{C}(G^*)$  و

$$\mathcal{C}(G) \cong \mathcal{B}(G^*)$$

۵-۱-۱۲ یک گردش از  $D$  روی میدان  $F$ ، تابعی است همچون  $f: A \rightarrow F$  به طوری که شرط (۱-۱۲)، در  $F$

صدق می‌کند؛ یک اختلاف پتانسیل از  $D$  روی  $F$  نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. فضای

بردارای این اختلاف پتانسیل‌ها و گردش‌ها را با  $\mathcal{B}_F$  و  $\mathcal{C}_F$  نمایش می‌دهیم. نشان دهید که اگر در

قضیهٔ ۲-۱۲، جای  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  را به ترتیب با  $\mathcal{B}_F$  و  $\mathcal{C}_F$  عوض کنیم، قضیه همچنان معتبر خواهد

بود.

## ۲-۱۲ تعداد درخت‌های فراگیر

در این بخش فرمولی برای تعداد درخت‌های فراگیر در یک گراف به دست خواهیم آورد.

فرض کنید  $G$  یک گراف همبند و  $T$  یک درخت فراگیر ثابت از  $G$  باشد. یک جهت‌دهی دلخواه  $D$  از  $G$

در نظر گرفته، فرض می‌کنیم که  $B$ ، ماتریس پایه  $\mathcal{B}$  متناظر با  $T$  باشد، از قضیهٔ ۲-۱۲ نتیجه می‌شود که اگر

$S$  زیرمجموعه‌ای از  $A$  با شرط  $|S| = v - 1$  باشد، آنگاه زیرماتریس مربعی  $B|_S$ ، غیرتکین است، اگر و

تنها اگر  $S$  یک درخت فراگیر از  $G$  باشد. بنابراین تعداد درخت‌های فراگیر  $G$  برابر است با تعداد

زیرماتریس‌های غیرتکین  $B$  از مرتبه  $v - 1$ .

یک ماتریس را یک هنگ می‌نامیم اگر درمیان تمام زیرماتریس‌های مربعی کامل آن  $0$ ،  $1$  یا  $-1$

باشد. اثبات قضیهٔ زیر متعلق به تات (۱۹۶۵b) است.

**قضیه ۳-۱۲** ماتریس پایه  $B$ ، یک هتنگ است.

**اثبات** فرض کنید  $P$  یک زیرماتریس کامل از  $B$  باشد (ماتریسی با مرتبه  $\nu-1$ ). فرض کنید  $P=B|T_1$  باشد. می‌توانیم فرض کنیم که  $T_1$  یک درخت فراگیر از  $D$  است. زیرا، در غیر این صورت، طبق قضیه ۲-۱۲ دترمینان  $P$  برابر صفر خواهد بود. فرض کنید  $B_1$  نمایانگر ماتریس پایه  $\mathcal{B}$  متناظر با  $T_1$  باشد. در این صورت داریم (تمرین ۱۲-۱۲ب)

$$(B|T_1)B_1=B$$

با محدود کردن دو طرف رابطه فوق به  $T$ ، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(B|T_1)(B_1|T) = B|T$$

باتوجه به اینکه  $B|T$  یک ماتریس همانی است، داریم:

$$\det(B|T_1)\det(B_1|T) = 1 \quad (5-12)$$

هر دو دترمینان فوق دترمینان‌های ماتریس‌های صحیح و در نتیجه خود نیز صحیح‌اند. پس نتیجه

می‌شود که  $\det(B|T_1) = \pm 1$ .

**قضیه ۴-۱۲**  $\tau(G) = \det BB'$

**اثبات** - با استفاده از فرمول دترمینان ضرب دو ماتریس مستطیل شکل، ([Hadley ; 1961] را ملاحظه

نمایید). به دست می‌آید:

$$\det BB' = \sum_{\substack{S \subseteq A \\ |S| = \nu-1}} (\det(B|S))^2 \quad (7-12)$$

حال باتوجه به قضیه ۲-۱۲، تعداد جملات ناصفر در رابطه (۷-۱۲) برابر  $\tau(G)$  است. ولی طبق قضیه

۳-۱۲، هر جمله ناصفر دارای مقدار ۱ می‌باشد. □

می‌توان نشان داد که اگر  $C$  یک ماتریس پایه از  $\mathcal{C}$  متناظر با یک درخت باشد، آنگاه  $C$  یک هتنگ است

و داریم:

$$\tau(G) = \det CC' \quad (8-12)$$

$$\tau(G) = \pm \det \begin{bmatrix} B \\ \dots \\ C \end{bmatrix} \quad \text{نتیجه ۴-۱۲}$$

اثبات بنا بر روابط (۶-۱۲) و (۸-۱۲) داریم:

$$(\tau(G))^2 = \det \mathbf{BB}' \det \mathbf{CC}' = \det \begin{bmatrix} BB' & | & \circ \\ \hline \circ & | & CC' \end{bmatrix}$$

از آن جایی که  $\mathcal{B}$ ،  $\mathcal{C}$  متعامدند،  $\mathbf{BC}' = \mathbf{CB}' = \circ$ . بنابراین:

$$\begin{aligned} (\tau(G))^2 &= \det \begin{bmatrix} BB' & | & BC' \\ \hline CB' & | & CC' \end{bmatrix} = \det \left[ \begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix} [B' | C'] \right] \\ &= \det \begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix} \det [B' | C'] = \left[ \det \begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix} \right]^2 \end{aligned}$$

با جذر گرفتن از هر دو طرف، به نتیجه مورد نظر می‌رسیم.  $\square$

با توجه به اینکه قضیهٔ ۲-۱۲ به‌ازای تمام ماتریس‌های پایه  $\mathcal{B}$  معتبر است، رابطهٔ (۶-۱۲) به‌ازای هر ماتریس  $\mathbf{B}$  که یک‌هنگ باشد برقرار است. به ویژه، ماتریس  $\mathbf{K}$  با حذف یک سطر دلخواه از ماتریس وقوع  $\mathbf{M}$  دست می‌آید، یک‌هنگ است (تمرین ۱۲-۲ الف). بنابراین داریم:

$$\tau(G) = \det \mathbf{KK}'$$

عبارت فوق که تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف را مشخص می‌کند، به‌طور ضمنی مدیون تلاش‌های

کرشهف<sup>۱</sup> (۱۸۴۷) است و به قضیهٔ ماتریس-درخت مشهور است.

## تمرین‌ها

۱۲-۲-۱ نشان دهید که

الف\*) ماتریس  $\mathbf{K}$  که با حذف یک سطر دلخواه از  $\mathbf{M}$  به‌دست می‌آید، یک‌هنگ است.

$$\tau(G) = \pm \det \begin{bmatrix} K \\ \dots \\ C \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۲-۲-۱۲ ماتریس هدایت یک گراف بدون طوقه  $G$ ، ماتریسی است مانند  $C = [c_{ij}]$  که در آن

$$c_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} \quad \text{به ازای هر } i$$

$$c_{ij} = -a_{ij} \quad \text{به ازای هر } i \text{ و } j \text{ با شرط } i \neq j$$

و  $A = [a_{ij}]$  ماتریس مجاورت  $G$  است. نشان دهید که:

الف)  $C = MM'$  که در آن  $M$  ماتریس وقوع یک جهت‌دهی دلخواه از  $G$  است.

ب) تمام هم‌عامل‌های  $C$  برابرند با  $\tau(G)$ .

۳-۲-۱۲ یک ماتریس، تماماً یک‌هنگ است اگر در مینان تمام زیرماتریس‌های مربعی آن  $0$ ،  $+1$  یا  $-1$  باشد. نشان دهید که:

الف) هر ماتریس پایه از  $\mathcal{B}$  یا  $\mathcal{C}$  متناظر با یک درخت، تماماً یک‌هنگ است.

ب) ماتریس وقوع یک گراف ساده  $G$ ، تماماً یک‌هنگ است اگر و تنها اگر  $G$  دوبخشی باشد.

۴-۲-۱۲ فرض کنید  $F$  یک میدان با مشخصه  $p$  باشد. نشان دهید که:

الف) اگر  $B$  و  $C$  به ترتیب ماتریس‌های پایه  $\mathcal{B}_F$  و  $\mathcal{C}_F$  متناظر با یک درخت باشند، آنگاه داریم:

$$\det \begin{bmatrix} B \\ \dots \\ C \end{bmatrix} = \pm \tau(G) \quad (\text{هنگ } P)$$

ب)  $p \mid \tau(G)$  اگر و تنها اگر  $\dim(\mathcal{B}_F \cap \mathcal{C}_F) > 0$ . (H. Shank)

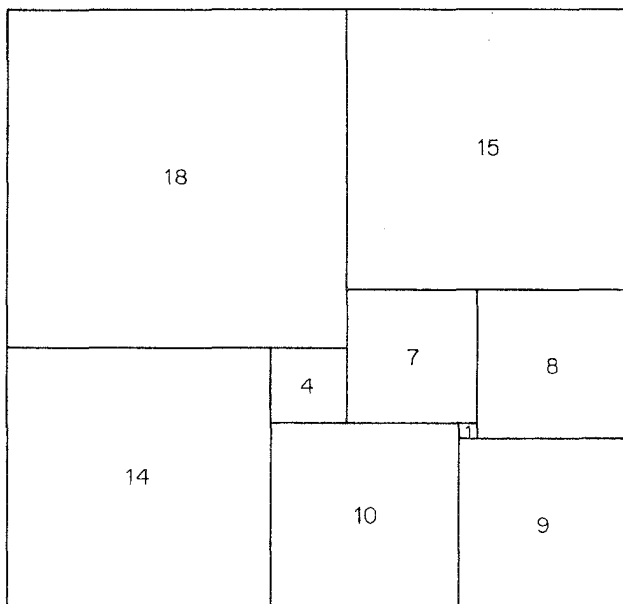
## کاربردها

### ۳-۱۲ مربع‌های تام

یک مستطیل مربع‌بندی شده، مستطیلی است که به تعدادی متناهی (بیشتر از یک) مربع تفکیک شده است. اگر در این تفکیک، هیچ دو مربعی هم اندازه نباشند، مستطیل مربع‌بندی شده را تام می‌نامیم. مرتبه یک مستطیل مربع‌بندی شده عبارت است از تعداد مربع‌هایی که مستطیل به آن‌ها تفکیک شده است. در



شکل ۷-۱۲ یک مستطیل تام از مرتبه ۹ نشان داده شده است. یک مستطیل مربع بندی شده، ساده است، هر گاه شامل مستطیلی مربع بندی شده، نباشد. مسلماً هر مستطیل مربع بندی شده، از چند مستطیل ساده تشکیل شده است.

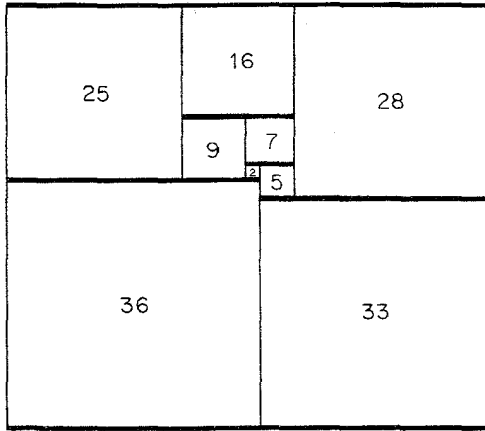


شکل ۷-۱۲. یک مستطیل تام

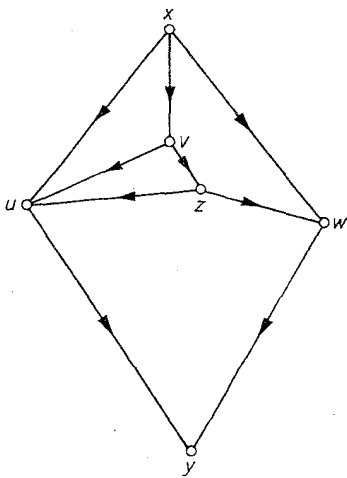
برای مدت‌ها هیچ مربع تامی شناخته نشده بود و حدس زده می‌شد که چنین مربع‌هایی وجود ندارند. اسپراگو<sup>۱</sup> (۱۹۳۹) اولین کسی بود که نمونه‌ای از یک مربع تام را منتشر نمود. تقریباً در همان موقع، بروکس<sup>۲</sup> و همکارانش (۱۹۴۰) با استفاده از نظریهٔ گراف‌ها، روشی سیستماتیک برای ساخت مربع تام ارائه کردند. در این بخش، به بحث مختصری راجع به روش ایشان خواهیم پرداخت.

در ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یک گراف جهت‌دار را به مستطیل مربع بندی شده  $R$  وابسته کرد. اجتماع اضلاع افقی مربع‌های درون تفکیک، قطعه خط‌هایی افقی را تشکیل می‌دهند که هر قطعه را یک تفکیک کننده افقی  $R$  می‌نامیم. در شکل ۸-۱۲ الف تفکیک کننده‌های افقی با خطوط ضخیم‌تر مشخص شده‌اند. اکنون می‌توانیم گراف جهت‌دار  $D$  وابسته به  $R$  را تعریف کنیم. متناظر با هر تفکیک کننده

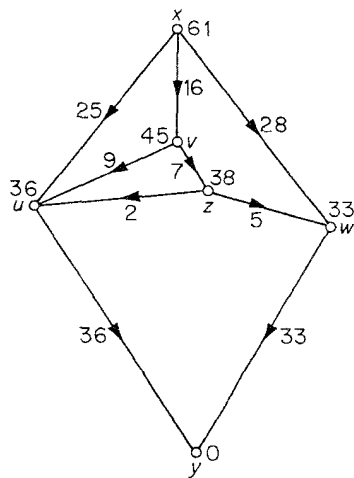
افقی  $R$ ، یک رأس از  $D$  وجود دارد؛ دو رأس  $v_i$  و  $v_j$  از  $D$  با کمان  $(v_i, v_j)$  به یکدیگر متصلند اگر و تنها اگر تفکیک کننده‌هایی افقی متناظر با آن دو رأس یعنی  $H_i$  و  $H_j$ ، در دو طرف مربعی از تفکیک قرار گرفته باشند به طوری که  $H_i$  در بالای  $R$  و  $H_j$  واقع شده باشد. در شکل ۸-۱۲ ب گراف جهت دار وابسته به مستطیل مربع بندی شده شکل ۸-۱۲ الف نشان داده شده است. رأس‌های متناظر با اضلاع بالایی و پایینی  $R$  که قطب‌های  $D$  نامیده می‌شوند، به ترتیب با  $x$  و  $y$  نمایش داده شده‌اند.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۸-۱۲

به هر رأس  $v$  از  $D$ ، یک پتانسیل  $p(v)$ ، معادل با ارتفاع تفکیک کننده افقی متناظر (ارتفاع از پایین ترین ضلع  $\mathbf{R}$ ) را اختصاص می‌دهیم. اگر  $D$  را به عنوان یک شبکهٔ الکتریکی در نظر بگیریم که مقاومت هر سیم آن، یک واحد است، اختلاف پتانسیل  $g = \delta p$  یک شارژ جریان الکتریسته از  $x$  به  $y$  را معین می‌کند (شکل ۸-۱۲ ج). این جریان‌ها در قانون جریان کرشهف صدق می‌کند: مجموع جریان‌های وارد شده به رأس  $v \in V \setminus \{x, y\}$  با مجموع جریان‌های خروجی از آن برابر است. به طور مثال، مجموع جریان‌های وارد شده به  $u$  در شکل ۸-۱۲ ج برابر است با  $2+9+25=36$  که به همین مقدار جریان هم از  $u$  خارج می‌شود.

فرض کنید  $D$  گراف جهت‌دار متناظر با یک مستطیل مربع بندی شده  $\mathbf{R}$ ، با دو قطب  $x$  و  $y$  باشد و فرض کنید که  $G$ ، گراف زمینهٔ  $D$  باشد. در این صورت گراف  $G+xy$ ، گراف افقی  $\mathbf{R}$  نامیده می‌شود. بروکس و سایر همکارانش (۱۹۴۰) نشان دادند که گراف افقی هر مستطیل مربع بندی شده ساده، یک گراف مسطح ۳-همبند است (البته تعریف آن‌ها از همبندی، اندکی با آنچه در این کتاب دیدید، تفاوت داشت). ضمناً آن‌ها نشان دادند که برعکس، اگر  $H$  یک گراف مسطح ۳-همبند با  $xy \in E(H)$  باشد، در این صورت هر شارژ جریان الکتریسته از  $x$  به  $y$  در  $H-xy$ ، یک مستطیل مربع بندی شده را معین می‌کند. بنابراین یک روش برای جستجوی مستطیل‌های تام از مرتبه  $n$  این است که:

(الف) تمام گراف‌های مسطح ۳-همبند با  $n+1$  یال را فهرست کنیم و

(ب) به‌ازای هر گراف  $H$  با ویژگی فوق و هر یال  $xy$  از  $H$ ، یک شارژ جریان الکتریسته از  $x$  به  $y$

در  $H-xy$  معین نماییم.

تات (۱۹۶۱) نشان داد که هر گراف مسطح ۳-همبند را می‌توان از یک چرخ و با دنباله عملیاتی شامل اشتقاق وجه و گرفتن دوگان به دست آورد. پس از آن باوکمپ<sup>۱</sup>، دیووستین<sup>۲</sup> و مدما<sup>۳</sup> (۱۹۶۰)، قضیهٔ تات را برای فهرست کردن تمام گراف‌های مسطح ۳-همبند با حداکثر ۱۶ رأس به کار بردند. در ادامه نشان خواهیم داد که چگونه از نظریه‌های بسط داده شده در بخش‌های ۱۲-۱ و ۱۲-۲ می‌توان برای محاسبه یک شارژ جریان الکتریسته از  $x$  به  $y$  در گراف جهت‌دار  $D$  استفاده کرد.

فرض کنید  $g(a)$  نمایانگر مقدار جریان در کمان  $a$  از  $D$  باشد و فرض کنید که مجموع جریان خروجی از

$x$  برابر  $\sigma$  باشد. در این صورت داریم:

$$\sum_{a \in A} m_x(a)g(a) = \sigma \quad (۹-۱۲)$$

قانون جریان کرشهف را می توان به صورت زیر نوشت:

$$v \in V \setminus \{x, y\} : \sum_{a \in A} m_v(a) g(a) = 0 \quad (10-12)$$

از آن جایی که  $g$  یک اختلاف پتانسیل است، به هر گردش متعامد می باشد. در نتیجه:

$$Cg' = 0 \quad (11-12)$$

که  $C$  یک ماتریس پایه از  $\mathcal{C}$  متناظر با درخت دلخواه  $T$  از  $D$  است و  $g'$  ترانهاده بردار  $g$  می باشد.

تساوی های (۹-۱۲) تا (۱۱-۱۲) بر روی هم معادله ماتریسی زیر را نتیجه می دهند:

$$\begin{bmatrix} K \\ \text{---} \\ C \end{bmatrix} g' = \begin{bmatrix} \sigma \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12-12)$$

که در آن،  $K$  ماتریسی است که با حذف سطر  $m_y$  از  $M$  به دست آمده است. این معادله را می توان به

وسیله قانون کرامر حل نمود. توجه داشته باشید که به خاطر تساوی

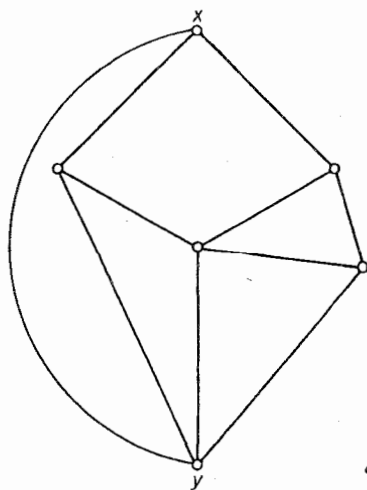
$$\tau(G) = \pm \det \begin{bmatrix} K \\ \text{---} \\ C \end{bmatrix}$$

(تمرین ۱۲-۲-۱)، جواب های به دست آمده در صورتی صحیح خواهند بود که  $\tau(G) = \sigma$ . بنابراین، در محاسبه

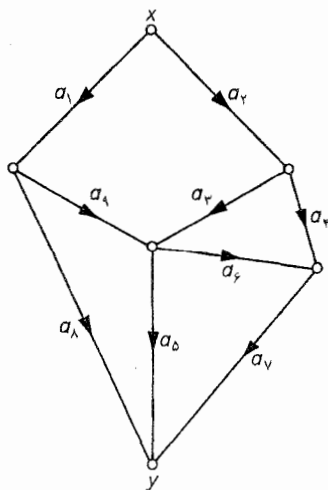
جریان ها، مناسب تر است که مجموع جریان خروجی از  $x$  را برابر با تعداد درخت های فراگیر  $D$  در نظر بگیریم.

عملیات فوق را در قالب یک مثال نشان می دهیم. گراف مسطح ۳-همبند شکل ۱۲-۹ الف را در نظر

بگیرید. با حذف  $xy$  و جهت دهی یال ها به گراف جهت دار  $D$  در شکل ۱۲-۹ ب می رسم.



شکل ۱۲-۹



به راحتی می‌توان دید که تعداد درخت‌های فراگیر در  $D$  برابر ۶۶ است. با در نظر گرفتن درخت  $T = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ، همانند آنچه در تساوی (۱۲-۱۲) دیدیم به ۹ معادلهٔ زیر می‌رسیم (برای سادگی،  $g(a_i)$  به صورت  $g_i$  نوشته شده است):

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 &= 66 \\ g_1 - g_8 - g_9 &= 0 \\ g_2 - g_3 - g_4 &= 0 \\ g_2 - g_5 - g_6 + g_9 &= 0 \\ g_4 + g_6 + g_7 &= 0 \\ g_2 - g_4 + g_6 &= 0 \\ -g_2 + g_4 - g_5 + g_7 &= 0 \\ g_1 - g_2 - g_3 - g_5 + g_8 &= 0 \\ g_1 - g_2 - g_3 + g_9 &= 0 \end{aligned}$$

جواب دستگاه معادلات فوق بدین صورت است:

$$(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9) = (36, 30, 14, 16, 20, 2, 18, 28, 8)$$

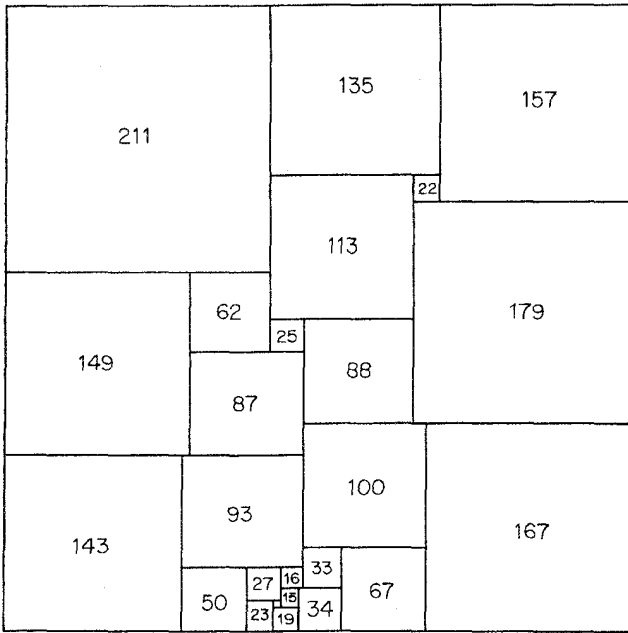
مستطیل مربع‌بندی شده بر پایه این شمارهٔ جریان الکتروسیسته، همان چیزی است که در شکل ۷-۱۲ دیده بودیم، با این تفاوت که تمام ابعاد دو برابر شده‌اند.

شکل ۱۰-۱۲ یک مربع تام از مرتبه ۲۵ را نشان می‌دهد. این مربع توسط ویلسون<sup>۱</sup> (۱۹۶۷) کشف شده و کوچکترین مربع تامی است (با کمترین مرتبه) که تاکنون شناخته شده است. نتایج دیگر در زمینهٔ مربع‌های تام را می‌توانید در مقاله مشروح تات (۱۹۶۵a) مشاهده نمایید.

## تمرین‌ها

۱-۳-۱۲ نشان دهید که در یک مستطیل مربع‌بندی شده، اضلاع مربع‌های تشکیل دهنده همگی تناسب پذیرند.

۲-۳-۱۲ گراف عمودی یک مستطیل مربع‌بندی شده  $R$ ، عبارت است از گراف افقی مستطیل مربع‌بندی شده‌ای که از دوران  $R$  حول یک زاویهٔ راست به دست می‌آید. اگر هیچ نقطه‌ای از  $R$ ، کنج مشترک چهار مربع تشکیل دهنده نباشد، نشان دهید که گراف‌های افقی و عمودی  $R$  دوگان یکدیگرند.



شکل ۱۲-۱۰. یک مربع تام از مرتبه ۲۵

۱۲-۳-۳\* یک مکعب تام، مکعبی است که به تعدادی مکعب کوچکتر تفکیک شده است، به طوری که هیچ دو تایی آن‌ها، هم اندازه نباشند. نشان دهید که مکعب تام وجود ندارد.

## مراجع

- Bouwkamp, C. J., Duijvestijn, A. J. W. and Medema, P. (1960). *Tables Relating to Simple Squared Rectangles of Orders Nine through Fifteen*, Technische Hogeschool, Eindhoven
- Brooks, R. L., Smith, C. A. B., Stone A. H. and Tutte, W. T. (1940). *The dissection of rectangles into squares*. *Duke Math. J.*, 7, 312–40
- Hadley, G. (1961). *Linear Algebra*, Addison–Wesley, Reading, Mass.
- Kirchhoff, G. (1847). *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*, *Ann. phys. Chem.*, 72, 497–508
- Sprague, R. (1939). *Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate*, *Math. Z.*, 45, 607–8
- Tutte, W. T. (1961). *A theory of 3–connected graphs*. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, 23, 441–55
- Tutte, W. T. (1965a). *The quest of the perfect square*, *Amer. Math. Monthly*, 72, 29–35
- Tutte, W. T. (1965b). *Lectures on matroids*. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 69, 1–47
- Tutte, W. T. (1971). *Introduction to Matroid Theory*, Elsevier, New York
- Wilson, J. C. (1967). *A Method for Finding Simple Perfect Square Squarings*. *PH.D. Thesis, University of Waterloo*

# پیوست اول

## راهنمایی تمرین‌های ستاره‌دار

۹-۲-۱ الف) اگر رابطه  $G \cong T$  برقرار نباشد، در این صورت  $G$  دارای بخش‌هایی به اندازه  $n_1, n_2, \dots, n_m$  است به طوری که به ازای یک مقدار  $i$  و  $j$ ، شرط  $n_i - n_j > 1$  برقرار است. نشان دهید که تعداد یال‌های گراف  $m$ -بخشی کاملی که اندازه بخش‌های آن  $n_1, n_2, \dots, n_{j-1}, \dots, n_i+1, \dots, n_j+1, \dots, n_m$  است، از تعداد یال‌های  $G$  بیشتر خواهد بود.

۳-۳-۱ یک خودریختی از  $G$  را برحسب ماتریس مجاورت  $A$ ، می‌توان به عنوان یک ماتریس جایگشت  $P$  در نظر گرفت طوری که  $PAP' = A$  یا به عبارتی دیگر  $PA = AP$  (چون  $P' = P^{-1}$ ). نشان دهید که اگر  $x$  یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  از  $A$  باشد، در این صورت به ازای هر خودریختی  $P$  از  $G$ ،  $Px$  نیز یک خودریختی خواهد بود. از آنجایی که مقادیر ویژه  $A$  متمایزند و  $P$  نیز متعامد است، پس به ازای هر بردار ویژه مثل  $x$  داریم:

$$P^i x = x$$

۵-۴-۱ فرض کنید که تمام زیرگراف‌های القایی  $G$  با  $n$  رأس،  $m$  یال داشته باشند. نشان دهید که به ازای هر دو رأس  $v_i$  و  $v_j$  از  $G$  روابط زیر برقرار است:

$$\varepsilon(G) - d(v_i) = \varepsilon(G - v_j) = m \binom{v-1}{n} \Big/ \binom{v-3}{n-2}$$

$$\varepsilon(G) - d(v_i) - d(v_j) + a_{ij} = \varepsilon(G - v_i - v_j) = m \binom{v-2}{n} \Big/ \binom{v-4}{n-2}$$

که در رابطه بالا بسته به اینکه  $v_i$  و  $v_j$  مجاور هستند یا خیر، مقدار  $a_{ij}$  برابر ۱ یا ۰ خواهد بود. نتیجه بگیرید که  $a_{ij}$ ، مستقل از  $i$  و  $j$  است.



۷-۵-۱ الف) برای اثبات لازم بودن شرط، ابتدا نشان دهید که اگر  $G$  ساده باشد و داشته باشیم  $u_1v_1, u_2v_2 \in E$  و  $u_1v_2, u_2v_1 \notin E$ ، در این صورت دنباله درجه‌های گراف  $G - \{u_1v_1, u_2v_2\} + \{u_1v_2, u_2v_1\}$  با دنباله درجه‌های  $G$  برابر است. با استفاده از این مطلب نشان دهید که اگر  $\mathbf{d}$  گرافی باشد، آنگاه گراف ساده‌ای مانند  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  وجود دارد به طوری که:

$$(۱) \text{ به‌ازای هر } d(v_i) = d_i, 1 \leq i \leq n$$

(۲)  $v_1$  به تمامی رأس‌های  $v_2, \dots, v_{d_1+1}$  متصل است.

دنباله درجه‌های  $G - v_1$  برابر  $\mathbf{d}'$  خواهد بود.

۸-۵-۱ نشان دهید که یک زیرگراف دوبخشی با بیشترین تعداد یال‌های ممکن، دارای این ویژگی است.

۹-۵-۱ گرافی روی مجموعه  $S$  تعریف کنید که در آن،  $x_i$  به  $x_j$  متصل است اگر و تنها اگر فاصلهٔ آن‌ها دقیقاً ۱ باشد. نشان دهید که در این گراف، درجهٔ هر رأس حداکثر می‌تواند برابر شش باشد.

۳-۷-۱ بلندترین مسیر  $G$  و رأس‌های مجاور با ابتدای این مسیر را در نظر بگیرید.

۶-۷-۱ ب) از طریق تناقض. فرض کنید  $G$  کوچکترین مثال نقض باشد. نشان دهید که:

(۱)  $G$  کمر  $G$  حداقل پنج است،

$$(۲) \delta \geq 3.$$

نتیجه بگیرید که در این صورت  $v \leq 8$  و نشان دهید چنین گرافی وجود ندارد.

۱۰-۱-۲ برای اثبات کافی بودن شرط، یک گراف  $G$  با دنباله درجه‌های  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  را در نظر

بگیرید که مؤلفه‌های آن به کمترین تعداد ممکن باشد. اگر  $G$  همبند نباشد، با تعویض مناسب

یال‌ها (همانند راهنمایی تمرین ۷-۵-۱ الف) نشان دهید که گرافی با دنباله درجه‌های  $\mathbf{d}$  وجود دارد

که تعداد مؤلفه‌های آن از  $G$  کمتر است.

۱۲-۲-۲ گراف برچسب‌دار  $G$  را به این صورت بسازید: زیرمجموعه‌های  $A_1, A_2, \dots, A_n$  را به‌عنوان

رأس‌های گراف  $G$  در نظر بگیرید و به‌ازای  $i, j$ ، اگر یکی از دو رابطهٔ  $A_i = A_j \cup \{a\}$  یا

$A_j = A_i \cup \{a\}$  برقرار باشد، رأس  $A_i$  را توسط یالی با برچسب  $a$  به  $A_j$  وصل کنید. به‌ازای هر

زیرگراف  $H$  از  $G$ ، فرض کنید که  $L(H)$  مجموعه تمام برچسب‌های روی یال‌های  $H$  باشد. نشان

دهید که اگر  $F$  یک جنگل ماکزیمال از  $G$  باشد، در این صورت  $L(F) = L(G)$ . هر عضو  $x$  از

$S \setminus L(F)$  ویژگی مورد نظر را دارا می‌باشد.

۲-۴-۲ اگر چندبار، قضیهٔ ۸-۲ را به کار ببرید، به رابطهٔ بازگشتی زیر خواهید رسید:

$$w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - 1 = 0$$

که در این رابطه،  $w_n$  برابر تعداد درخت‌های فراگیر یک چرخ  $n$  پره می‌باشد. رابطه بازگشتی فوق را حل نمایید.

۶-۳-۲ با افزودن دو رأس  $x$  و  $y$  و وصل کردن  $x$  به تمام رأس‌های  $X$  و  $y$  به تمام رأس‌های  $Y$ ، گراف جدیدی مانند  $G'$  بسازید. نشان دهید که  $G'$ ، ۲-همبند است و سپس از قضیه ۳-۲ استفاده نمایید.

۷-۲-۳ الف) از استقراء روی  $\varepsilon$  استفاده کنید. فرض کنید که  $e_1 \in E$ . اگر  $G.e_1$  یک بلوک بحرانی باشد، آنگاه  $G.e_1$  دارای رأسی از درجه دو است و در نتیجه  $G$  هم دارای چنین رأسی است. اگر  $G.e_1$  بحرانی نباشد، یالی مانند  $\{e_1\} \in E$  وجود دارد به طوری که  $G.e_1 - e_1$  بلوک است. با توجه به این مطلب که  $G.e_1 - e_1 = (G - e_1).e_1$ ، نشان دهید که  $e_1$  بر روی رأسی با درجه دو در  $G$  واقعند.

ب) از قسمت الف) و استقراء روی  $v$  استفاده نمایید.

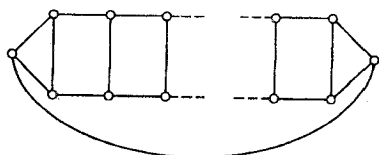
۶-۱-۴ شرط لازم: اگر  $G-v$  شامل دوری همچون  $C$  بود، یک تور اویلری (یا ابتدای  $v$ ) از مؤلفه  $G-E(C)$  در نظر بگیرید که شامل  $v$  باشد.

شرط کافی: فرض کنید که  $Q$  یک  $(v, w)$ -گذرگاه از  $G$  باشد که تور اویلری نیست. نشان دهید که  $G-E(Q)$  دقیقاً یک مؤلفه غیر بدیهی دارد.

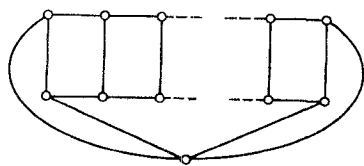
۴-۲-۴ با افزودن یک رأس جدید و وصل نمودن آن به تمام رأس‌های  $G$ ، گراف جدیدی همچون  $G'$  بسازید. نشان دهید که  $G$  همیلتنی است اگر و تنها اگر  $G'$  همیلتنی باشد و سپس از قضیه ۴-۵ استفاده کنید.

۹-۲-۴ فرض کنید  $P$  یکی از بلندترین مسیرهای  $G$  به طول  $l$  باشد. اگر  $l < 2d$ ، با استفاده از تکنیک به کار رفته در اثبات قضیه ۴-۳ نشان دهید که  $G$  دارای دوری به طول  $l+1$  است. سپس با توجه به این مطلب که  $G$  همبند است، به یک تناقض خواهید رسید.

۱۱-۲-۴ ب)



زوج  $v$



فرد  $v$

- ۱۳-۲-۴ از این مطلب استفاده کنید که گراف پترسن درون-همبستگی است (تمرین ۴-۲-۱۲).
- ۱-۴-۴ یک تور اولیری مانند  $Q$  در گراف وزنداری که از تضعیف تمام یال‌های  $T$  به دست آمده است، در نظر بگیرید. سپس با استفاده از نامساوی مثلثی، یک دور همبستگی از روی  $Q$  به دست آورید که وزن آن حداکثر  $w(Q)$  باشد.
- ۵-۱-۵ الف) برای نشان دادن اینکه  $K_{2n}$ ، ۱-تجزیه پذیر است، رأس‌ها را به شکل یک  $(2n-1)$ -ضلعی منتظم با یک رأس در مرکز آن بچینید. در این صورت هر یال شعاعی، به همراه یال‌های عمود بر آن، یک تطابق کامل خواهد بود.
- ۶-۱-۵ رأس‌ها را با شماره‌های  $0, 1, 2, \dots, 2n$  شماره‌گذاری کنید و سپس رأس‌های  $0, 1, 2, \dots, 2n$  را روی دایره‌ای که رأس با شماره  $0$  در مرکز آن واقع است، قرار دهید. فرض کنید  $C = \{0, 1, 2, 2n, 3, 2n-1, 4, 2n-2, \dots, n+2, n+1, 0\}$  و سپس دوران‌های  $C$  را در نظر بگیرید.
- ۳-۲-۵ ب) فرض کنید  $G$  یک گراف  $2k$ -منتظم با مجموعه رأس‌های  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  باشد. بدون اینکه به کلیت مساله لطمه‌ای وارد شود،  $G$  را همبند در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $C$  یک تور اولیری در  $G$  باشد. یک گراف دوبخشی  $G'$  با دو بخش  $X$  و  $Y$  بسازید که در آن  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  و  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  و  $x_i$  در صورتی به  $y_j$  متصل است که  $v_i$  روی  $C$  بلافاصله قبل از  $v_j$  قرار گرفته باشد. نشان دهید که  $G'$ ، ۱-تجزیه پذیر است و در نتیجه  $G$ ، ۲-تجزیه پذیر می‌باشد.
- ۸-۲-۵ یک گراف دوبخشی مانند  $G$  با بخش‌های  $X$  و  $Y$  در نظر بگیرید که در آن،  $X$  مجموعه سطرهای  $Q$  و  $Y$  مجموعه ستون‌های  $Q$  است و سطر  $i$  به ستون  $j$  متصل است اگر و تنها اگر  $q_{ij}$  مثبت باشد. نشان دهید که  $G$  دارای یک تطابق کامل است. سپس از استقراء روی تعداد درایه‌های غیر صفر  $Q$  استفاده کنید.
- ۱-۳-۵ فرض کنید  $G$  یک گراف دوبخشی با بخش‌های  $X$  و  $Y$  باشد و همچنین فرض کنید که  $\nu$  زوج است (حالتی که  $\nu$  فرد باشد، نیاز به کمی تغییرات دارد). با وصل کردن تمام زوج رأس‌های  $Y$  در  $G$ ، گرافی مانند  $H$  به دست آورید.  $G$  دارای تطابق است که تمام رأس‌های  $X$  را آلوده می‌کند، اگر و تنها اگر  $H$  دارای یک تطابق کامل باشد.
- ۴-۳-۵ فرض کنید  $G^*$  ابرگراف فراگیر ماکزیمالی از  $G$  باشد به طوری که تعداد یال‌های تطابق ماکزیمم در  $G^*$  با تعداد یال‌های تطابق ماکزیمم در  $G$  برابر است. با استفاده از رویه اثبات قضیه ۴-۵ نشان دهید که اگر  $U$  مجموعه رأس‌هایی از  $G^*$  باشد که درجه آن‌ها  $\nu-1$  است. آنگاه  $G^* - U$  اجتماع مجزایی از گراف‌های کامل است.

- ۱-۲-۶ به راهنمایی تمرین ۵-۱-۵ الف توجه کنید.
- ۸-۲-۶ از تکنیک به کاررفته در اثبات قضیه ۲-۶ استفاده کنید.
- ۳-۱-۷ ب) فرض کنید  $v_1 v_2 \dots v_n$  طولانی‌ترین مسیر در  $G$  باشد. نشان دهید که  $G - v_p$  حداکثر یک مؤلفه غیربدهی دارد، و سپس از استقراء روی  $\varepsilon$  استفاده کنید.
- ۶-۲-۷ ب) فرض کنید که  $p(m-1) = n-1$ . گراف  $(p+1)$ -بخشی کاملی که در هر بخش آن  $m-1$  رأس وجود دارد، به ما نشان می‌دهد که  $r(T, K_{1,n}) > (p+1)(m-1) = m+n-2$  برای اثبات نامساوی  $r(T, K_{1,n}) \leq m+n-1$ ، نشان دهید که هر گراف ساده  $G$  با شرط  $\delta \geq m-1$  شامل تمام درخت‌های  $m$  رأسی است.
- ج) گراف  $(n-1)$ -بخشی کاملی که در هر بخش آن  $m-1$  رأس وجود دارد، به ما نشان می‌دهد که  $r(T, K_n) > (m-1)(n-1) + 1$  برای اثبات نامساوی  $r(T, K_n) \leq (m-1)(n-1) + 1$ ، با استقراء روی  $n$ ، نشان دهید که هر گراف ساده  $G$  با شرط  $\delta \geq m-1$  شامل تمام درخت‌های  $m$  رأسی است.
- ۳-۳-۷ ج) فرض کنید  $G$  شامل هیچ مثلثی نباشد.  $C$  را کوتاه‌ترین دور فرد در  $G$  در نظر بگیرید. نشان دهید که هر رأس در  $V(G) \setminus V(C)$  را می‌توان به حداکثر دو رأس از  $C$  متصل نمود. تمرین ۳-۳-۷ الف را برای  $G - V(C)$  به کار ببرید و به تناقض دست بیابید.
- ۴-۳-۷ الف)  $G$  شامل  $K_{2,m}$  است اگر و تنها اگر  $m$  رأس با دو همسایه مشترک وجود داشته باشند. هر رأس  $v$ ،  $\binom{d(v)}{2}$  زوج همسایه دارد. بنابراین، اگر نامساوی  $\binom{d(v)}{2} > (m-1)\binom{v}{2}$  برقرار باشد،  $G$  شامل  $K_{2,m}$  است.
- ۱-۵-۷ گراف  $G$  را به صورت  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$  و  $E(G) = \{x_i x_j \mid d(x_i, x_j) = 1\}$  تعریف نمایید و نشان دهید که اگر تمامی یال‌های  $G$  را به شکل خطوط مستقیم رسم کنیم، آنگاه (۱) هر دو یال  $G$ ، یا مجاورند و یا یکدیگر را قطع می‌کنند و (۲) اگر رأسی از  $G$  درجه بیشتر از دو داشته باشد، به رأسی از درجه یک متصل است. سپس (الف) را با استقراء روی  $n$  ثابت کنید.
- ۶-۱-۸  $\mathcal{C} = (V_1, V_2, \dots, V_k)$  را یک  $k$ -رنگ آمیزی از  $G$  در نظر بگیرید و فرض کنید  $\mathcal{C}$  یک رنگ آمیزی از  $G$  است که در آن، هر کلاس رنگی، شامل حداقل دو رأس است. اگر برای هر  $i$  داشته باشیم:  $|V_i| \geq 2$ ، آنگاه چیزی برای اثبات باقی نخواهد ماند. پس فرض می‌کنیم که  $u_p \in V_p$ .  $V_1 = \{v_1\}$  هم‌رنگ  $v_1$  باشد. واضح است که  $|V_p| \geq 2$ . اگر  $|V_p| > 2$ ،  $u_p$  را به  $V_1$  منتقل کنید. وگرنه،  $v_p$  را رأس دیگر  $V_p$  قرار دهید. در

$\mathcal{C}'$ ،  $v_1$  و  $v_2$  بایستی با رنگ‌های متفاوتی ظاهر شده باشند.  $u_4 \in V_3$  را رأسی هم‌رنگ  $v_2$  در  $\mathcal{C}'$  قرار دهید. همانند قبل  $|V_3| \geq 2$ . اگر این رویه را ادامه دهیم، نهایتاً باید به یک مجموعهٔ  $V_i$  با شرط  $|V_i| > 2$  برسیم. اکنون می‌توانیم  $G$  را مجدداً طوری رنگ‌آمیزی نماییم که در آن تعداد کلاس‌های رنگی تک رأسی کاهش یابد.

۱۳-۱-۸ الف)  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  و  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  را به ترتیب  $n$ -رنگ‌آمیزی‌های  $G[X]$  و  $G[Y]$  قرار دهید. گراف دوبخشی  $H$  را با بخش‌های  $(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \{y_1, y_2, \dots, y_n\})$  در نظر بگیرید که در آن رأس  $x_i$  به رأس  $y_j$  متصل است اگر و تنها اگر برش یالی  $[X_i, Y_j]$  در گراف  $G$  تهی باشد. با استفاده از تمرین ۵-۲-۶ نشان دهید که  $H$  یک تطابق کامل دارد. اگر رأس  $x_i$  در این تطابق به رأس  $y_{f(i)}$  متصل باشد، قرار دهید:  $V_i = X_i \cup Y_{f(i)}$ . نشان دهید که  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  یک  $n$ -رنگ‌آمیزی از گراف  $G$  است.

۱-۳-۸ نشان دهید کافی است فقط گراف‌های ۲-همبند را در نظر بگیریم. در گراف  $G$ ،  $C$  را طولانی‌ترین دور در نظر بگیرید و نشان دهید که طبق قضیهٔ ۵-۸ دو مسیر وجود دارند که از روی  $C$  می‌گذرند.

۲-۳-۸ الف) اگر  $\delta \geq 3$ ، از تمرین ۱-۳-۸ استفاده کنید. چنانچه رأسی با درجهٔ کمتر از سه موجود باشد، آن را حذف نموده و از استقراء استفاده کنید.

۸-۴-۸ بسط  $\pi_k(G)$  را برحسب چندجمله‌ای‌های رنگی گراف‌های کامل در نظر بگیرید.

۲-۵-۸ الف) به سادگی می‌توان دریافت که کمر  $H$  حداقل برابر با شش است. اگر  $H$ ،  $k$ -رنگ‌پذیر باشد، یک زیرمجموعهٔ  $v$ -عضوی از  $S$  وجود دارد که رنگ تمام رأس‌های آن یکسان است. نسخهٔ متناظر از  $G$  را در نظر گرفته و به تناقض برسید.

۸-۲-۹ دوگان  $G^*$ ، یک گراف ۲-همبند یالی ۳-منتظم است و از این رو، (طبق نتیجهٔ ۴-۵) دارای تطابق کاملی مانند  $M$  است.  $(G^* \cdot M)^*$  یک زیرگراف دوبخشی از  $G$  می‌باشد.

۲-۲-۱۰ یک گراف جهت‌دار جدید با همان مجموعهٔ رأس‌ها، بدین صورت بسازید که در آن رأس  $u$  به  $v$  متصل باشد، هرگاه در گراف اولیه  $v$  از  $u$  قابل دست‌یابی باشد. حال نتیجهٔ ۱-۱۰ را به کار ببرید.

۵-۲-۱۰ فرض کنید  $D_1$  و  $D_2$  زیرگراف‌های جهت‌دار فراگیری از  $D$  باشند به طوری که کمان‌های  $D_1$  کمان‌هایی از  $D$  به صورت  $(u, v)$  هستند که در آن‌ها  $f(u) \leq f(v)$  و کمان‌های  $D_2$  کمان‌هایی از  $D$  به صورت  $(u, v)$  هستند که در آن‌ها  $f(u) > f(v)$ . نشان دهید که یا  $\chi(D_1) > m$  یا  $\chi(D_2) > n$  و سپس از قضیهٔ ۱-۱۰ استفاده کنید.

۴-۳-۱۰ فرض کنید  $v_1 v_2 \dots v_{m+1} v_1$  یک دور فرد باشد. اگر  $(v_i, v_{i+1}) \in A$ ، قرار دهید:  $P_i = (v_i, v_{i+1})$ . اگر  $P_i \notin A$ ،  $(v_i, v_{i+1})$  را یک  $P_i$  جهت‌دار در نظر بگیرید. اگر یک  $P_i$  با طول زوج موجود باشد،  $(v_i, v_{i+1})$  یک دور فرد جهت‌دار است. در غیر این صورت،  $P_1 P_2 \dots P_{m+1}$  یک گذرگاه جهت‌دار بسته با طول فرد است و بنابراین دارای یک دور جهت‌دار فرد است.

۵-۳-۱۱ از همان روش ساختاری که در اثبات قضیه ۶-۱۱ ارائه شده، استفاده نمایید و به کمان  $(v', v'')$  ظرفیت  $m(v)$  را اختصاص دهید.

۴-۴-۱۱ از استقراء روی  $k$  و تمرین ۳-۴-۱۱ استفاده کنید.

۴-۵-۱۱ مشابه آنچه که در تمرین ۷-۵-۱ آمده، عمل کنید.

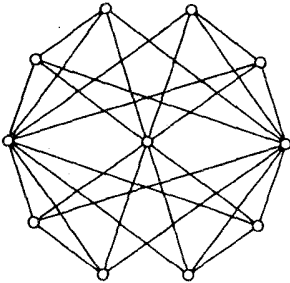
۵-۵-۱۱ شرط لازم با قراردادن مجموعه رأس‌هایی که درجه ورودی آن‌ها  $m$  است، به نام  $V_1$  و مجموعه رأس‌هایی که درجه ورودی آن‌ها  $n$  است، به نام  $V_2$  به نتیجه می‌رسد. برای اثبات شرط کافی، شبکه  $N$  را روی گراف جهت‌دار  $G$  با دادن ظرفیت واحد به هر کمان و قرار دادن اعضای  $V_1$  به عنوان منبع‌ها و اعضای  $V_2$  به عنوان چاهک‌ها بسازید. طبق قضیه ۸-۱۱ شماره  $f$  در  $N$  (که می‌توان آن را صحیح در نظر گرفت) موجود است که عرضه هر منبع و تقاضای هر چاهک در آن  $|m-n|$  می‌باشد. کمان‌های  $f$ -آلوده یک  $(m, n)$ -جهتدهی روی زیرگراف  $H$  از گراف  $G$  القاء می‌کند. حال می‌توان یک  $(m, n)$ -جهتدهی روی  $G$  به دست آورد که در آن به یال‌های باقیمانده یک جهتدهی اولیری نسبت داده شده است.

۱-۲-۱۲ الف) از استقراء روی مرتبه زیرماتریس استفاده کنید. فرض کنید  $P$  یک زیرگراف مربعی باشد. اگر هر ستون  $P$  شامل دو درایه غیر صفر باشد، آنگاه  $\det P = 0$ . در غیر این صورت،  $\det P$  را نسبت به ستونی که فقط یک درایه غیر صفر دارد، بسط دهید و از فرض استقراء استفاده کنید.

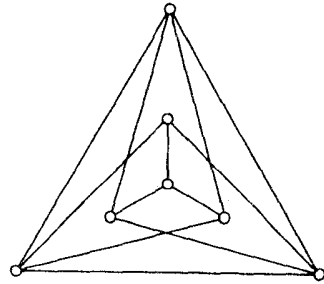
۳-۳-۱۲ ابتدا، نشان دهید که در هر مستطیل کامل، کوچکترین مربع تشکیل‌دهنده بر روی مرز مستطیل واقع نیست. اکنون فرض کنید که یک مکعب کامل وجود دارد و مربع کاملی را در نظر بگیرید که از القاء مکعب‌های تشکیل‌دهنده روی پایه این مکعب به دست می‌آید.

# پیوست دوم

## چهار گراف و جدولی از ویژگی‌های آنها

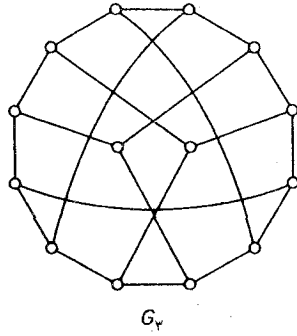
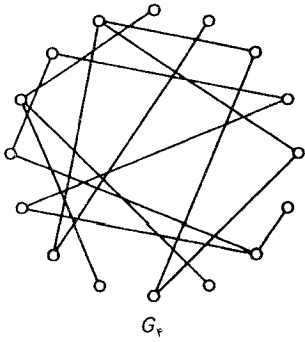


$G_7$



$G_1$

$\chi'$	$\chi$	$\beta'$	$\beta$	$\alpha'$	$\alpha$	$\kappa'$	$\kappa$	$\omega$	$\Delta$	$\delta$	$\varepsilon$	$\nu$	
۴	۴	۴	۴	۳	۳	۳	۳	۱	۴	۳	۱۲	۷	$G_1$
۸	۳	۶	۷	۵	۴	۴	۳	۱	۸	۴	۲۸	۱۱	$G_2$
۳	۲	۷	۷	۷	۷	۳	۳	۱	۳	۳	۲۱	۱۴	$G_3$
۳	۳	۹	۷	۷	۹	۰	۰	۳	۳	۱	۱۵	۱۶	$G_4$



قطر	کمر	دوبخشی؟	اویلری؟	همیلتنی؟	بحرانی؟	مسطح؟
۲	۳	خیر	خیر	بله	بله	بله
۲	۳	خیر	بله	خیر	خیر	خیر
۳	۶	بله	خیر	بله	خیر	خیر
∞	۴	خیر	خیر	خیر	خیر	بله



# پیوست سوم

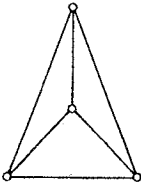
## گراف‌های جالب توجه

بعضی گراف‌ها به خاطر ساختار ویژه‌ای که دارند، جالب توجه قلمداد می‌شوند. طی فصل‌های کتاب با برخی از این گراف‌ها آشنا شدیم (برای مثال، گراف گریبنرگ، گراف گروتز، گراف هرشل و گراف‌های رمزی). در این بخش با تعدادی دیگر از گراف‌های جالب توجه و چند خانواده دیگر از گراف‌ها آشنا خواهیم شد.

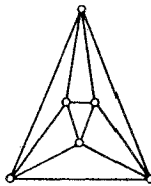
### گراف‌های افلاطونی

رأس‌ها و یال‌های این گراف‌ها، معادل رأس‌ها و یال‌های اجسام افلاطونی می‌باشند.

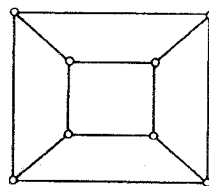
([Fréchet and Fan; 1967] را ملاحظه نمایید).



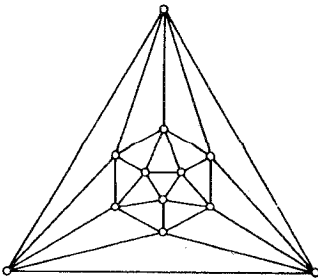
(الف)



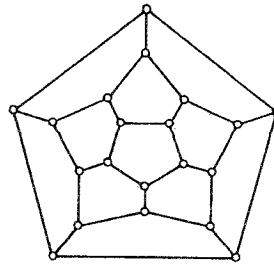
(ب)



(ج)



(ه)

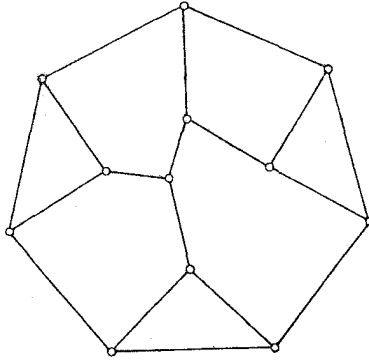


(د)

(الف) چهار وجهی؛ (ب) هشت وجهی؛ (ج) مکعب؛ (د) بیست وجهی؛ (ه) دوازده وجهی

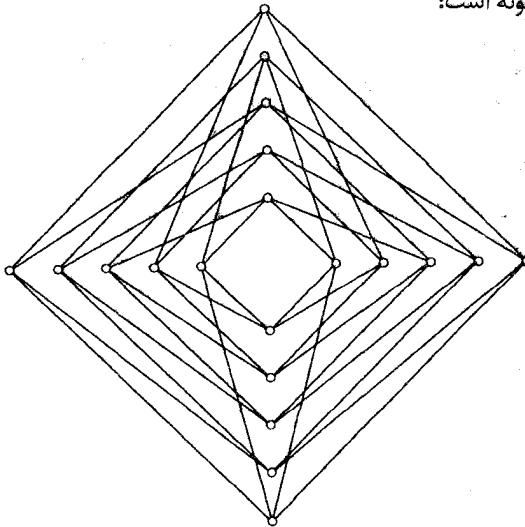
## گروه‌های خودریختی

(۱) همان‌گونه که قبلاً دیدیم (تمرین ۱-۲-۱۲)، هر گروه با گروه خودریختی یک گراف یکرخت است. فراکت (۱۹۴۹) نشان داد که در واقع، برای هر گروه، یک گراف ۳-منتظم متناظر با آن گروه می‌توان یافت. کوچکترین گراف ۳-منتظمی که گروه آن همانی است، گراف زیر است:



(۲) فالکمن (۱۹۶۷) ثابت کرد که هر گراف منتظم یال-ترایا که رأس انتقالی نباشد، حداقل بیست رأس

دارد. گراف زیر بهترین نمونه است:



گراف فالکمن

گراف گری<sup>۱</sup> [Bouwer, 1972] را ملاحظه نمایید) یک گراف ۳-منتظم یال-ترایاست که رأس-ترایا

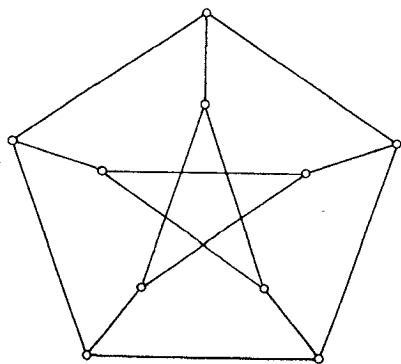
نبوده و ۵۴ رأس دارد. ساختار آن به این صورت است: سه نسخه از  $K_{۳,۳}$  در نظر می‌گیریم. با اشتقاق یک یال مشخص در هر سه نسخه، سه رأس جدید به دست می‌آید که آن‌ها را با سه یال به یک رأس جدید متصل می‌کنیم. سپس همین کار را برای تمامی یال‌های  $K_{۳,۳}$  ادامه می‌دهیم.

### قفس‌ها

گراف  $m$ -منتظمی که کم‌ر آن  $n$  است و کمترین تعداد رأس‌های ممکن را داراست، یک  $(m, n)$ -قفس نامیده می‌شود. اگر  $f(m, n)$  تعداد رأس‌های یک  $(m, n)$ -قفس باشد، به راحتی می‌توان دید که  $f(۲, n) = n$  و برای هر  $m \geq ۳$  داریم:

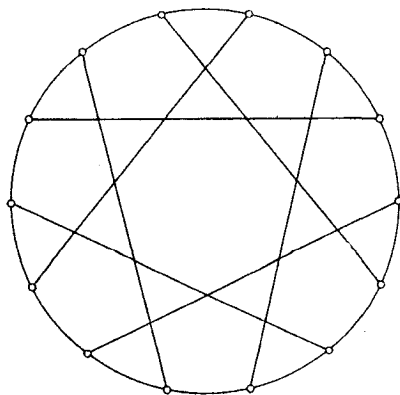
$$f(m, n) \geq \begin{cases} \frac{m(m-1)^r - 2}{m-2} & n = 2r+1 \quad \text{اگر} \\ \frac{2(m-1)^r - 2}{m-2} & n = 2r \quad \text{اگر} \end{cases} \quad (۱-ج)$$

$(۲, n)$ -قفس، معادل یک دور  $n$  رأسی،  $(m, ۳)$ -قفس، برابر  $K_{m+1}$  و  $(m, ۴)$ -قفس، معادل  $K_{m,m}$  است. در هر یک از این قفس‌ها، تساوی در (ج-۱) برقرار می‌باشد. هافمن و سینگلتن (۱۹۶۰) نشان دادند که برای  $m \geq ۳$  و  $n \geq ۵$ ، تساوی (ج-۱) فقط در حالتی می‌تواند رخ دهد که  $n=۵$  و  $m=۳, ۵, ۵۷$  یا  $n=۶, ۸, ۱۲$ . اگر  $m-۱$  یک توان اول باشد،  $(m, ۶)$ -قفس، گراف وقوع نقطه-خط در صفحه تصویر مرتبه  $m-۱$  است؛  $(m, ۸)$ - و  $(m, ۱۲)$ -قفس‌ها نیز از هندسه تصویری به دست می‌آید (برای جزئیات بیشتر به [Biggs ; 1974] مراجعه کنید). برخی از  $(m, n)$ -قفس‌های کوچکتر در زیر نشان داده شده‌اند.



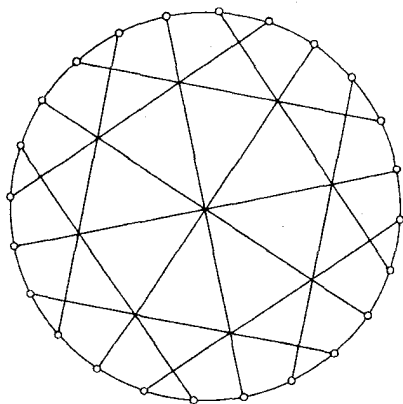
قفس (۳, ۵)

گراف پترسن

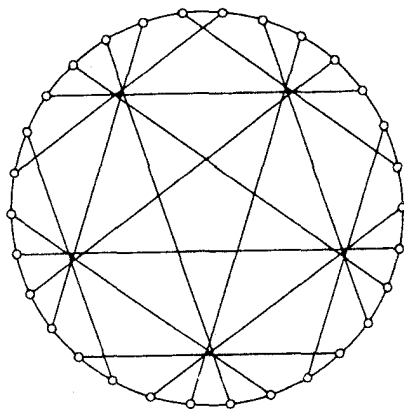


قفس (۳, ۶)

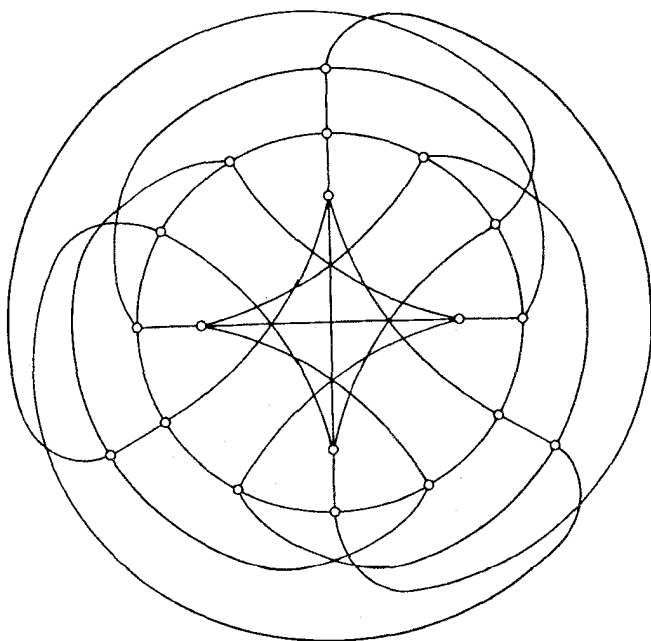
گراف هیوود



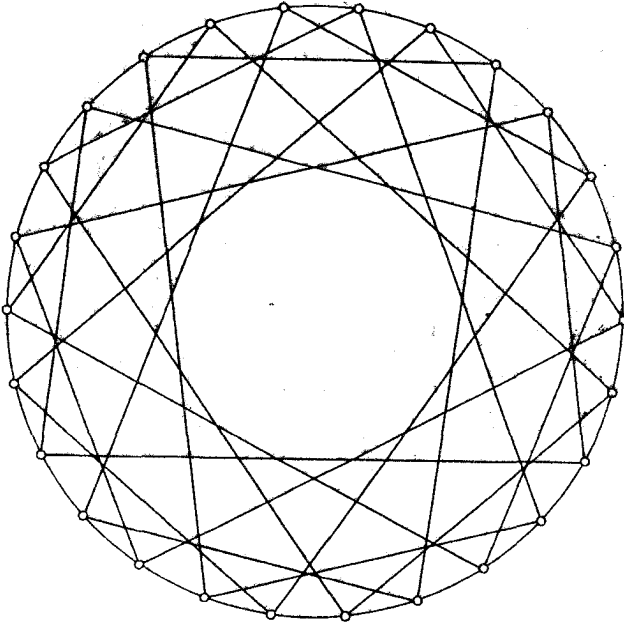
گراف مکاکی  
(۳, ۷) قفس



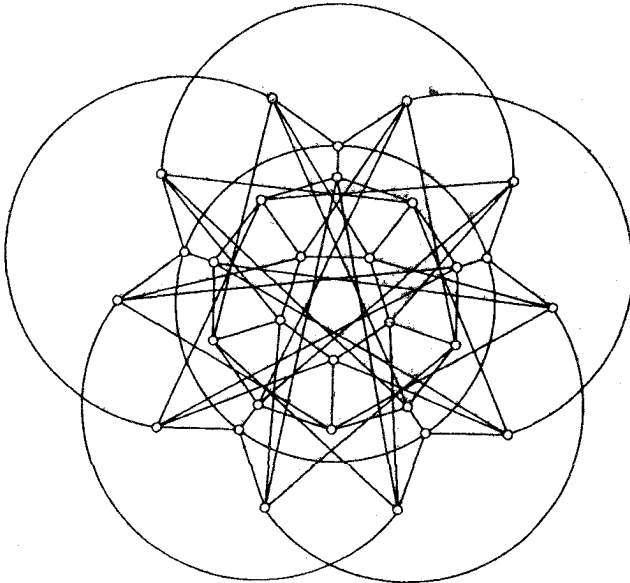
گراف تان-کاکستر  
(۳, ۸) قفس



گراف رابرتسن  
(۴, ۵) قفس



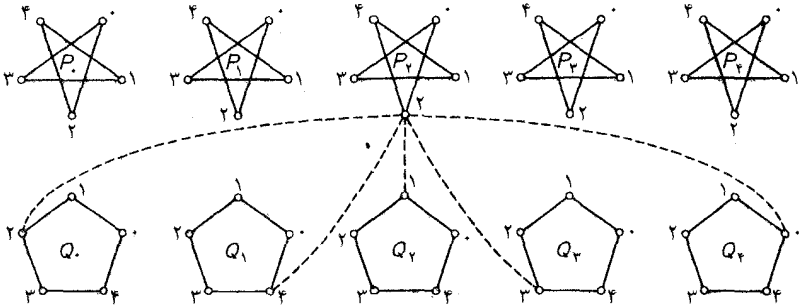
گراف (۴,۶) قفس



گراف (۵,۵) قفس

گراف رابرتسن-وگنر

(۷, ۵) - قفس (گراف هافمن-سینگلتن) را می‌توان این‌گونه توصیف نمود: ده ۵-دور  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$  که مانند شکل زیر برچسب‌گذاری شده‌اند و در آن رأس  $i$  از  $P_j$  به رأس  $i+jk$  (به پیمانه ۵) از  $Q_k$  متصل است. (برای مثال، اتصالات رأس ۲ از  $P_7$  نشان داده شده است).



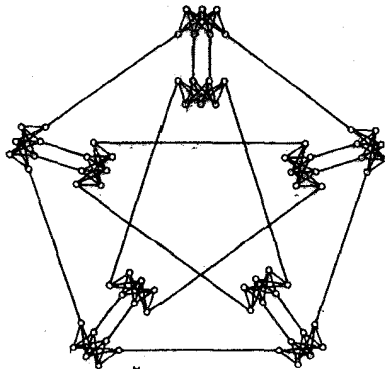
قفس (۷, ۵)

گراف هافمن-سینگلتن

### گراف‌های ناهمبستگی

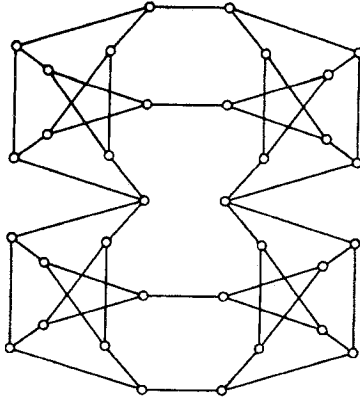
(۱) از وقتی که تایت<sup>۱</sup> حدس خود را در مورد شرط همبستگی بودن گراف‌های مسطح بیان کرد، شرایط زیادی برای همبستگی بودن گراف‌ها ارائه شده است. در این بخش تعدادی از مثال‌های نقض را که برای حدس‌های گوناگون بیان شده، فهرست کرده‌ایم.

الف) هر گراف ۴-منتظم ۴-همبند همبستگی است. (C. St. J. A. Nash-Williams)



گراف مردیت<sup>۲</sup>

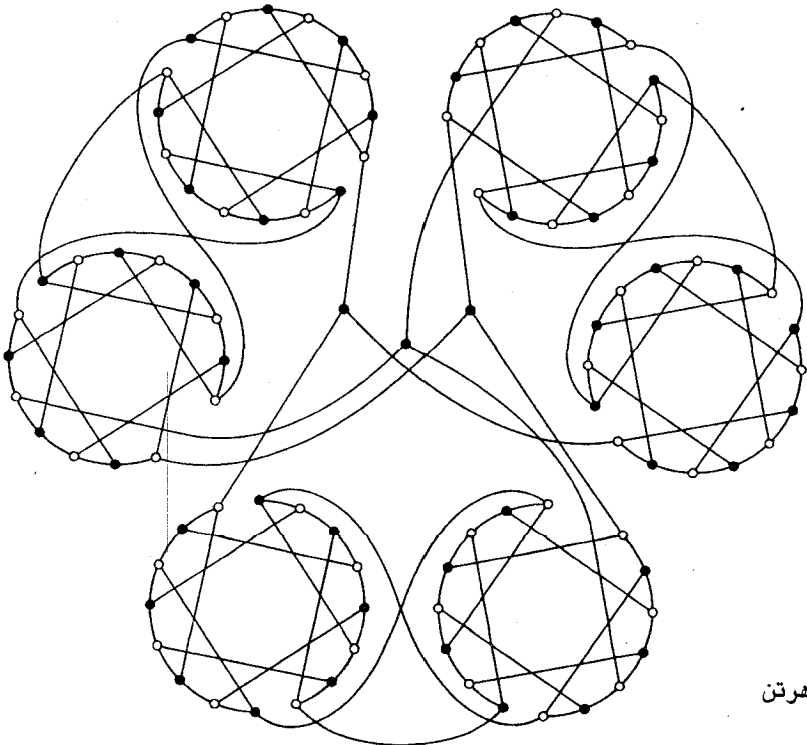
(ب) هیچ گراف درون-دنبال‌شدنی وجود ندارد. (T. Gallai)



گراف تو ماسن<sup>۱</sup>

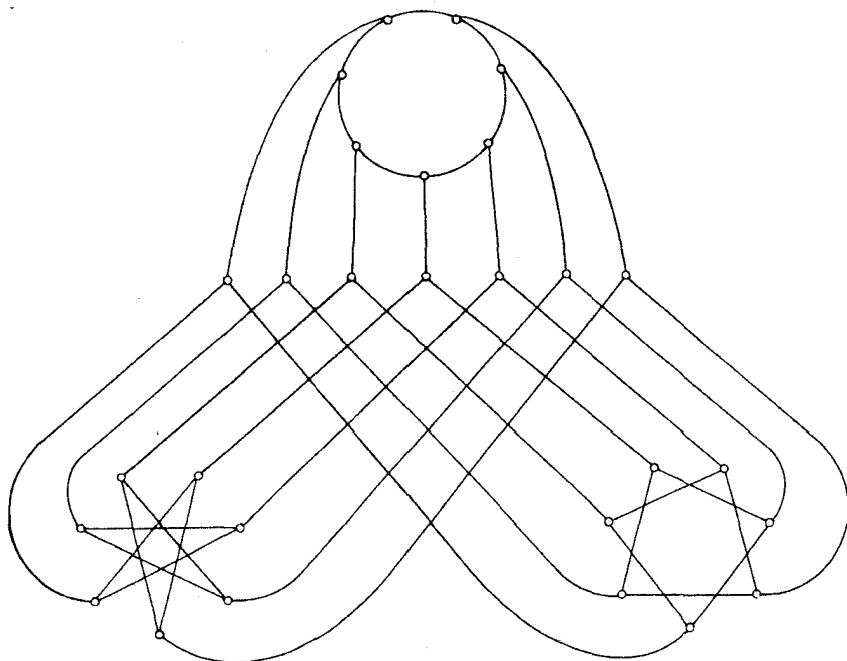
(نخستین گراف درون-دنبال‌شدنی توسط ج. د. هرتن<sup>۲</sup> کشف شد).

(ج) هر گراف دوبخشی<sup>۳</sup>-همبند<sup>۳</sup>-منتظم، همیلتنی است. (W. T. Tutte)



گراف هرتن

(۲) مثالی از یک گراف ناهمبستگی با بیشترین درجهٔ تقارن - یک خودریختی موجود است که در آن هر مسیر به طول سه به مسیر سه‌تایی دلخواه دیگری منتقل می‌شود (گراف پترسن نیز این خاصیت را دارد). [Tutte ; 1960] را ملاحظه نمایید.



گراف کاکستر

## عدد رنگی

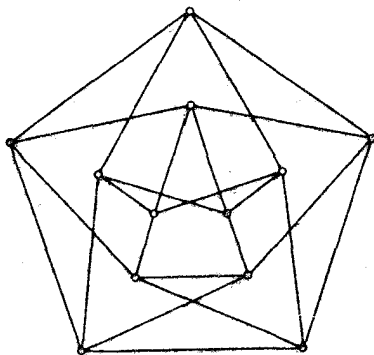
گرن باوم<sup>۱</sup> حدس زد که برای هر  $m > 1$  و  $n > 2$ ، یک گراف  $m$ -رنگی  $m$ -منتظم وجود دارد که کمر آن حداقل  $n$  است. برای  $n = 3$  این مسأله بدیهی است، به‌ازای  $m = 2, 3$  حدس درگرو وجود قفس‌هاست.<sup>۲</sup> غیر از این‌ها، صرفاً دوگراف با این خاصیت یافته شده‌اند.

1. Grünbaum

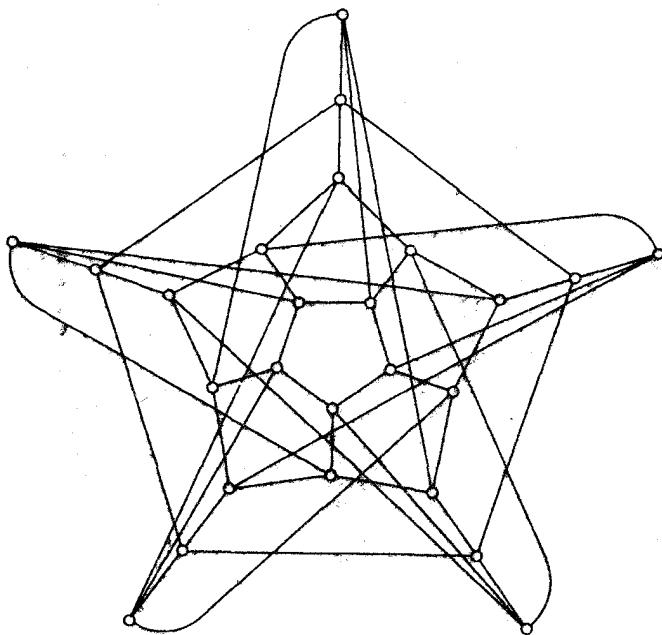
۲. این حدس هم‌اکنون رد شده‌است:

Borodin, O. V. and Kostochka, A. V. (1976). On an upper bound of the graph's chromatic number depending on graph's degree and density. Ins. Maths., Novosibirsk, preprint G1-7)





گراف چویتال

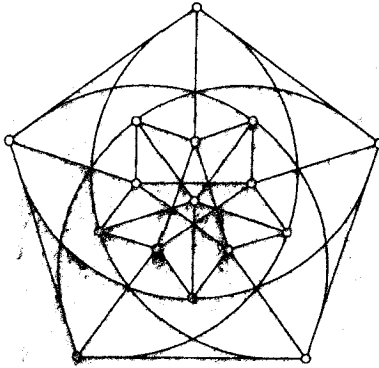


گراف گرن‌باوم

(۲) از آنجایی که  $\chi(3, 3, 3) = 17$  (تمرین ۷-۲-۳)، یک ۳-رنگ آمیزی یالی از  $K_{16}$  وجود دارد که در آن هیچ مثلث تک رنگی قرار ندارد. کالفلیش<sup>۱</sup> و استانتون<sup>۲</sup> (۱۹۶۸) نشان دادند که در این رنگ آمیزی، هر زیرگراف القا شده توسط یال‌های هم‌رنگ باگراف زیر یکرخت است:

1. Kalbfleisch

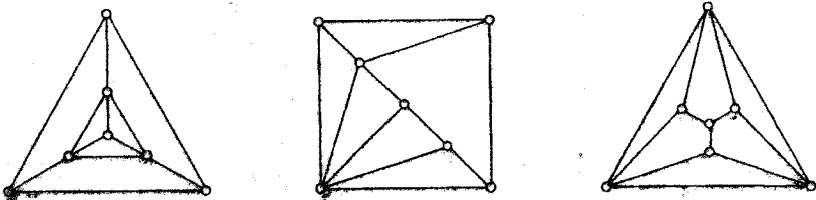
2. Stanton



گراف گرین‌وود-گلیپسن

## نشاندها

(۱) چرخ‌ها، مثال‌های ساده‌ای از گراف‌های مسطح خوددوگان هستند. برخی دیگر از گراف‌های مسطح جالب خوددوگان در زیر آورده شده‌اند: (برای مثال، [Smith and Tutte, 1950] را ببینید).

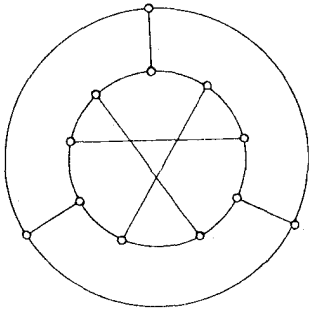


چند گراف خوددوگان مسطح

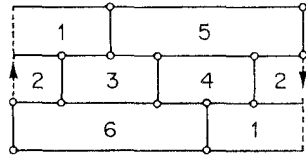
(۲) عدد رنگی  $\chi(S)$  سطح  $S$  برابر است با بیشترین تعداد رنگ‌های موردنیاز برای رنگ‌آمیزی مجاز وجه‌های هر نقشه روی  $S$  (حدس چهار رنگ ادعا می‌کند که گره ۴-رنگی است). هیوود (۱۸۹۰) اثبات کرد که اگر  $S$  دارای مشخصه  $n < 2$  باشد، آنگاه

$$\chi(S) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} (7 + \sqrt{49 - 24n}) \right\rfloor \quad (2-ج)$$

برای صفحه تصویری و نوار مویوس (هر دو با مشخصه ۱) و چنبره (با مشخصه ۰)، به کرانه (ج-۲) خواهیم رسید. گراف‌های زیر و نشاندهای آن‌ها، مؤید این مطلب هستند.

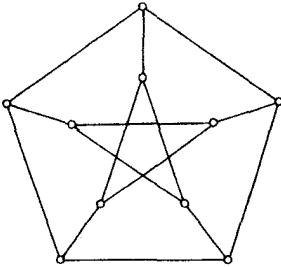


(الف)

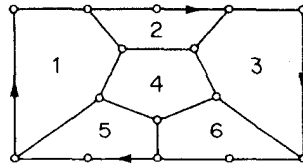


(ب)

(الف) گراف تیتسه<sup>۱</sup>؛ (ب) نشان‌دن آن روی نوار موبیوس

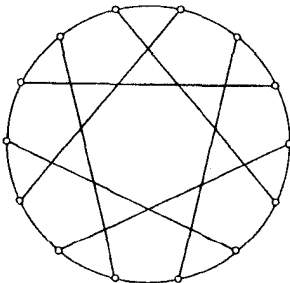


(الف)

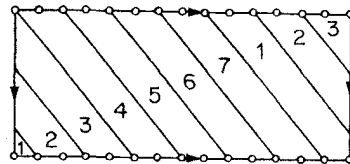


(ب)

(الف) گراف پترسن؛ (ب) نشان‌دن آن روی صفحه تصویری



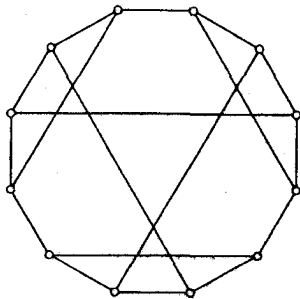
(الف)



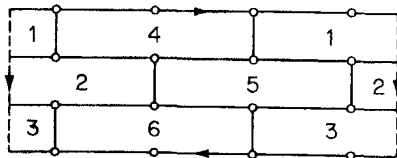
(ب)

(الف) گراف هیوود؛ (ب) نشان‌دن آن روی چنبره

گرچه بطری کلاین<sup>۱</sup> دارای مشخصه صفر است، ولی فرانکلین<sup>۲</sup> (۱۹۳۴) ثابت کرد که ۶-رنگی است، و نقشهٔ ۶-رنگی زیر را برای بطری کلاین یافت:



(الف)



(ب)

(الف) گراف فرانکلین: (ب) نشان دادن آن روی بطری کلاین

به استثنای بطری کلاین، برای هر سطح  $S$  با مشخصه  $2 < n$  می‌توان ثابت کرد که در رابطه (ج.۲) تساوی برقرار است. این نتیجه به عنوان قضیهٔ رنگ‌آمیزی نقشه معروف است.

## مراجع

- Biggs, N. (1974). *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press
- Bouwer, I. Z. (1972). On edge but not vertex transitive regular graphs. *J. Combinatorial Theory B*, 12, 32–40
- Coxeter, H. S. M. (1950). Self-dual configurations and regular graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56, 413–55
- Folkman, J. (1967). Regular line-symmetric graphs. *J. Combinatorial Theory*, 3, 215–32
- Franklin, P. (1934). A six color problem. *J. Math. Phys.*, 13, 363–69
- Fréchet, M. and Ky Fan (1967). *Initiation to Combinatorial Topology*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston
- Frucht, R. (1949). Graphs of degree three with a given abstract group. *Canad. J. Math.*, 1, 365–78
- Grünbaum, B. (1970). A problem in graph coloring. *Amer. Math. Monthly*, 77, 1088–1092
- Heawood, P. J. (1890). Map color theorem. *Quart. J. Math.*, 24, 332–38
- Hoffman, A. J. and Singleton, R. R. (1960). On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM J. Res. Develop.*, 4, 497–504
- Horton, J. D. (1974) to be published
- Kalbfleisch, J. and Stanton, R. (1968). On the maximal triangle-free edge-chromatic graphs in three colors. *J. Combinatorial Theory*, 5, 9–20
- Meredith, G. H. J. (1973). Regular  $n$ -valent  $n$ -connected nonhamiltonian non- $n$ -edge-colorable graphs. *J. Combinatorial Theory B*, 14, 55–60
- Ringel, G. (1974). *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, Berlin
- Smith, C. A. B. and Tutte, W. T. (1950). A class of self-dual maps. *Canad. J. Mat.*, 2, 179–96
- Thomassen, C. (1974). Hypohamiltonian and hypotractable graphs. *Discrete Math.*, 9, 91–96
- Tutte, W. T. (1960). A non-Hamiltonian graph. *Canad. J. Math. Bull.*, 3, 1–5
- Wegner, G. (1973). A smallest graph of girth 5 and valency 5. *J. Combinatorial Theory B*, 14, 203–208

# پیوست چهارم

## مسائل حل نشده

در این پیوست برخی از مسائل حل نشده را جمع آوری نموده ایم که در آن‌ها نام عنوان‌کننده، زمان طرح و فهرست مراجع مربوطه مشخص شده است. حدس‌ها با قلم سیاه‌تر نمایش داده شده‌اند. مسائلی را که با نماد  $\square$  مشخص کرده ایم، مسائلی هستند که تا این تاریخ حل شده‌اند\* (صفحه انتهایی پیوست را ملاحظه نمایید).

۱. دو گراف  $G$  و  $H$  را درون ریخت می‌نامیم (و می‌نویسیم:  $G \cong H$ )، هرگاه نگاشت دوسویی  $\sigma: V(G) \rightarrow V(H)$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $v \in V(G)$ ، داشته باشیم:  $G - v \cong H - \sigma(v)$ . گراف  $G$  را بازساختنی می‌نامیم، هرگاه از  $G \cong H$ ، رابطه  $G \cong H$  نتیجه شود. حدس بازسازی ادعا می‌کند که هر گراف  $G$  با شرط  $\nu > 2$ ، بازساختنی است. (S. M. Ulam, 1929). این حدس برای گراف‌های ناهمبند، درخت‌ها و برخی کلاس‌های دیگر گراف‌ها ثابت شده است ([Harary, 1974] را ملاحظه نمایید).  
یک حدس بازسازی یالی متناظر نیز وجود دارد: هر گراف  $G$  با  $\varepsilon > 3$  بازسازی شدنی یالی است. لاواژ (1972) نشان داد که هر گراف ساده  $G$  با شرط  $\varepsilon > \binom{\nu}{2}$  بازساختنی یالی است.  
پ. ک. استاک‌مایر<sup>۱</sup> یک خانواده نامتناهی از مثال‌های نقض برای متناظر این حدس در گراف‌های جهت‌دار یافته است.

\* تاریخ منظور شده، تاریخ ویرایش نخست این کتاب (1976) است. مسلماً در نظریه گراف که شاخه نسبتاً جدیدی از ریاضیات به حساب می‌آید، هر روز باید انتظار تحول جدید، حل مسائل قدیمی و طرح مسائل جدید را داشت. (مترجم)

- Bondy, J. A. and Hemminger, R. L. (1976). *Graph reconstruction—a survey. J. Graph Theory, to be published*
- Lovász, L. (1972). *A note on the line reconstruction problem. J. Combinatorial Theory B, 13, 309–10*
۲. گراف  $G$  را قابل‌نشانندن در گراف  $H$  می‌گوییم، هرگاه  $G$  با زیرگرافی از  $H$  یکرخت باشد. گراف‌های قابل‌نشانندن در  $k$ -مکعب را توصیف نمایید. (V. V. Firsov, ۱۹۶۵)
- Garey, M. R. and Graham, R. L. (1975). *On cubical graphs. J. Combinatorial Theory B, 18, 84–95*
۳. هر گراف ۴-منتظم ساده، شامل یک زیرگراف ۳-منتظم ساده است (N. Sauer, 1973).
۴. اگر  $k > 2$ ، هیچ گرافی وجود ندارد که هر دو رأس آن، با یک مسیر منحصر به فرد به طول  $k$  به هم متصل باشند (A. Kotzig, ۱۹۷۴). کتزیگ حدس خود را برای  $k < 9$  ثابت کرده است.
۵. هر گراف همبند  $G$ ، اجتماعی از حداکثر  $(v+1)/2$  مسیر یال-مجزا است (T. Gallai; ۱۹۶۱) لاواژ در سال ۱۹۶۸ نشان داد که هر گراف  $G$ ، اجتماعی از حداکثر  $\lfloor v/2 \rfloor$  مسیر یال-مجزا و دور می‌باشد. Lovász, L. (1968). *On covering of graphs, in Theory of Graphs (eds. P. Erdős and G. Katona), Academic Press, New York, pp. 231–36*
۶. هر گراف ساده ۲-همبند یالی  $G$ ، اجتماعی از  $v-1$  دور است. (P. Erdős, P. Goodman and L. Pósa, ۱۹۶۶)
- Erdős, P., Goodman, P. and Pósa, L. (1966). *The representation of a graph by set intersections. Canad. J. Math., 18, 106–12*
۷. اگر  $G$  یک بلوک ساده با حداقل  $k+v/2$  رأس درجه  $k$  باشد، در این صورت  $G$  شامل یک دور با طول حداقل  $2k$  خواهد بود. (D. R. Woodall, ۱۹۷۵)

۸. فرض کنید بیشترین تعداد ممکن یال‌ها در یک گراف ساده  $n$  رأسی که دارای هیچ  $m$ -دوری نیست، برابر  $f(m, n)$  باشد. ثابت شده است که:

$$f(m, n) = \begin{cases} \lfloor n^2/4 \rfloor & m \leq \frac{1}{2}(n+3) \text{ اگر } m \text{ فرد باشد و} \\ \lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor & m \geq \frac{1}{2}(n+3) \end{cases}$$

$f(m, n)$  را برای حالات دیگر معین نمایید (P. Erdős, ۱۹۶۳).

Bondy, J. A. and Simonovits, M. (1974). Cycles of even length in graphs. *J. Combinatorial Theory B*, 16, 97–105

Woodall, D. R. (1972). Sufficient conditions for circuits in graphs. *Proc. London Math. Soc.*, 24, 739–55

۹. فرض کنید بیشترین تعداد ممکن یال‌ها در یک گراف ساده  $n$  رأسی که دارای هیچ زیرگراف ۳-منتظمی نیست، برابر  $f(n)$  باشد.  $f(n)$  را معین نمایید. (P. Erdős and N. Sauer, ۱۹۷۴) از آن جایی که یک ثابت  $c$  وجود دارد، به طوری که هر گراف ساده  $G$  با  $\varepsilon \geq cn^{1/5}$  شامل یک ۳-مکعب است، پس  $f(n) < cn^{1/5}$  (Erdős and Simonovits, ۱۹۷۰).

Erdős, P. and Simonovits, M. (1970). Some extremal problems in graph theory, in *Combinatorial Theory and its Applications I* (eds. P. Erdős, A. Rényi and V. T. Sós), North-Holland, Amsterdam, pp. 378–92

۱۰. مشخص نمایید که کدام گراف‌های ساده  $G$ ، به ازای هر  $3 \leq l \leq v$ ، شامل دقیقاً یک دور به طول  $l$  است. (R. C. Entringer, ۱۹۷۳)

۱۱. فرض کنید  $f(n)$  بیشترین تعداد یال‌هایی است که یک گراف  $n$  رأسی می‌تواند داشته باشد، به طوری که در آن هیچ دو دور هم‌طولی وجود نداشته باشد.  $f(n)$  را معین نمایید. (P. Erdős, ۱۹۷۵)

۱۲. اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $\varepsilon > v(k-1)/2$  باشد، در این صورت  $G$  شامل تمام درخت‌های  $k$  یالی است. (P. Erdős and V. T. Sós, ۱۹۶۳).



سیری به طول  $k$  می‌باشد. (Erdős and Gallai, ۱۹۵۹)

Erdős, P. and Gallai, T. (1959). On maximal paths and circuits of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 10, 337–56

۱۳. یک (۶،۵)-قفس بیابید. (پیوست سوم را ببینید).

۱۴. پهنای باند گراف  $G$  را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\min_l \max_{uv \in E} |l(u) - l(v)|$$

که در آن روی تمامی برجسب‌گذاری‌های  $l$  از اعداد صحیح متمایز روی  $V$ ، می‌نیمم گرفته شده است. کرانه‌های پهنای باند یک گراف را بیابید (L. H. Harper, ۱۹۶۴). پهنای باند  $k$ -مکعب توسط هارپر به دست آمده است. (۱۹۶۶)

Chvátalová, J. (1975). Optimal labelling of a product of two paths. *Discrete Math.*, 11, 249–53

Harper, L. H. (1966). Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs. *J. Combinatorial Theory*, 1, 385–93

۱۵. گراف  $G$  را باشکوه می‌نامیم، اگر یک برجسب‌گذاری  $l$  که به رأس‌های  $G$ ، اعداد صحیح متمایزی از مجموعه  $\{0, 1, \dots, \varepsilon\}$  را نسبت می‌دهد، وجود داشته باشد به طوری که در برجسب‌گذاری یالی القایی  $l'$  با تعریف زیر:

$$l'(uv) = |l(u) - l(v)|$$

به هر یال، برجسب متمایزی تخصیص یافته باشد. گراف‌های باشکوه را توصیف نمایید.

(S. Golomb, ۱۹۷۲). درحالت خاص این حدس وجود دارد که همه درخت‌ها باشکوه‌اند. (۱۹۶۶)

(A. Rosa,

Golomb, S. (1972). How to number a graph, in *Graph Theory and Computing* (ed. R. C. Read), Academic Press, New York, pp. 23–37

۱۶. هر گراف ۳-همبند مسطح  $2m$  یالی با کمترین تعداد درخت‌های فراگیر، چرخ  $m$  پره‌ای است

(W. T. Tutte, ۱۹۴۰)

Klemans, A. K. and Chelnokov, V. M. (1974). A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees. *J. Combinatorial Theory (B)*, 16, 197–214

۱۷. فرض کنید  $u$  و  $v$  دو رأس از گراف  $G$  باشند. کمترین تعداد رأس‌هایی که حذف آن‌ها تمامی  $(u, v)$ -مسیرهای به طول حداکثر  $n$  را از بین می‌برد،  $a_n$  و بیشترین تعداد  $(u, v)$ -مسیرهای مجزای داخلی با طول حداکثر  $n$  را  $b_n$  می‌نامیم. اگر  $f(n)$  بیشترین مقدار ممکن برای  $a_n/b_n$  باشد،  $f(n)$  را تعیین نمایید (V. Neumann, ۱۹۷۴). لاواژ حدس زده است که  $f(n) \leq \sqrt{n}$ . از طرفی ثابت شده است که:

$$\lfloor \sqrt{n/2} \rfloor \leq f(n) \leq \lfloor n/2 \rfloor$$

۱۸. هر گراف مسطح دوبخشی ۳-همبند ۳-منتظم، همیلتنی است (D. Barnette, ۱۹۷۰). پ. گودی<sup>۱</sup> نشان داده است که این حدس، برای گراف‌های مسطحی که وجوه آن همه از درجهٔ چهار یا شش هستند درست است. دقت نمایید که اگر شرط مسطح بودن را حذف کنیم، دیگر این حدس درست نخواهد بود. (پیوست سوم را ملاحظه نمایید).

۱۹. دنبالهٔ گرافی  $d$  را اجباراً همیلتنی می‌نامیم، هرگاه هر گراف ساده با دنباله درجه‌های  $d$ ، همیلتنی باشد. دنباله‌های اجباراً همیلتنی را توصیف نمایید (C. St. J. A. Nash–Williams, ۱۹۷۰). (قضیهٔ ۵-۴ یک جواب جزئی ارائه می‌کند).

Nash–Williams, C. St. J. A. (1970). Valency sequences which force graphs to have Hamiltonian circuits: interim report, University of Waterloo preprint

۲۰. هر گراف رأس-تراپای همبند، یک مسیر همیلتنی دارد (L. Lovász, ۱۹۶۸). ل. بابای<sup>۲</sup> این حدس را برای گراف‌هایی که تعداد رأس‌های آن‌ها یک عدد اول است، ثابت نموده است.

۲۱. گراف  $G$  را  $t$ -تات گوئیم، هرگاه برای هر رأس برشی  $S$  داشته باشیم:  $\omega(G-S) \leq |S|/t$  (در نتیجه قضیهٔ ۲-۴ این نکته را بیان می‌کند که هر گراف همیلتنی، ۱-تات است).  
(الف) اگر  $G$  ۲-تات باشد، در این صورت  $G$  یک گراف همیلتنی است (V. Chvátal, ۱۹۷۱). س.

توماسن<sup>۱</sup> مثالی از یک گراف ناهمبیلتنی  $t$ -تات به دست آورد که  $t > 3/2$ .

(ب) اگر  $G$  یک گراف  $3/2$ -تات باشد، در این صورت  $G$  دارای یک  $2$ -عامل است (۱۹۷۱).

*Chvátal,*

*Chvátal, V. (1973). Tough graphs and hamiltonian circuits. Discrete Math., 5, 215–28*

۲۲. عدد بستگی گراف  $G$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{bind } G = \min_{\emptyset \neq S \subseteq V} |N(S)| / |S|$$

(الف) اگر  $\text{bind } G \geq 3/2$ ، آنگاه  $G$  شامل یک مثلث است (۱۹۷۳) (*D. R. Woodall,*

(ب) اگر  $\text{bind } G \geq 3/2$ ، آنگاه  $G$  یک گراف سرتاسر دوری<sup>۲</sup> است (گرافی که شامل تمام دورهای

به طول  $3 \leq l \leq v$  می‌باشد) (۱۹۷۳) (*D. R. Woodall,*

وودال<sup>۳</sup> (۱۹۷۳) نشان داده است که اگر  $G$  یک گراف همبیلتنی باشد، آنگاه  $\text{bind } G \geq 3/2$ ، و  $G$  شامل

یک مثلث است اگر  $\text{bind } G \geq \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ .

*Woodall, D. R. (1973). The binding number of a graph and its Anderson number. J.*

*Combinatorial Theory (B), 15, 225–55*

۲۳. هر گراف ساده منتظم ناتهی، شامل دو مجموعه مستقل ماکزیمال مجزا است.

(۱۹۷۳) (*C. Payan,*

۲۴. عدد رمزی  $r(3, 3, 3, 3)$  را بیابید. می‌دانیم که:

$$51 \leq r(3, 3, 3, 3) \leq 65$$

*Chung, F. R. K. (1973). On the Ramsey numbers  $N(3, 3, \dots, 3; 2)$ . Discrete Math., 5, 317–21*

*Folkman, J. (1974). Notes on the Ramsey numbers  $N(3, 3, 3, 3)$ . J. Combinatorial Theory (A), 16, 371–79*

۲۵. فرض کنید به ازای هر  $m < n$ ،  $f(m, n)$  نمایانگر کمترین تعداد ممکن رأس‌های گرافی باشد که شامل

هیچ  $K_n$  ای نیست، ولی هر دو رنگ آمیزی یالی آن، شامل یک  $K_m$  تک‌رنگ است. (فالکمن (۱۹۷۰) وجود چنین گراف‌هایی را اثبات نموده است). کران‌های  $f(m, n)$  را مشخص نمایید. ثابت شده است

که:

$$n \geq 7 \text{ هر } : f(3, n) = 6$$

$$\text{تمرین (۵-۲-۷) را ببینید. } f(3, 6) = 8$$

$$10 \leq f(3, 5) \leq 18$$

Folkman, J. (1970). *Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring*. *SIAM J. Appl. Math.*, 18, 19–24

Irving, R. W. (1973). *On the bound of Graham and Spenser for a graph-coloring constant*. *J. Combinatorial Theory (B)*, 15, 200–203

Lin, S. *On Ramsey numbers and  $K_r$ -coloring of graphs*. *J. Combinatorial Theory (B)*, 12, 82–92

۲۶. اگر  $G$ ،  $n$ -رنگی باشد، آنگاه  $r(G, G) \geq r(n, n)$ . (P. Erdős, ۱۹۷۳).  $r(G, G)$  در تمرین ۶-۲-۷ تعریف شده است).

۲۷. بزرگترین عدد رنگی ممکن برای گرافی که می توان آن را طوری در صفحه رسم کرد که تمام یال هایش خط‌های مستقیمی به طول یک باشند، چیست؟ (L. Moser, ۱۹۵۸)

Erdős, P., Harary, F. and Tutte, W. T. (1965). *On the dimension of a graph*. *Mathematika*, 12, 118–22

۲۸. قدر مطلق مقادیر ضرایب هر چند جمله‌ای رنگی، یک دنباله تک‌مد تشکیل می‌دهد. (به این معنا که هیچ جمله‌ای، با جملاتی که مقادیر بزرگتری دارند، احاطه نشده است). (R. C. Read, ۱۹۶۸)

Chvátal, V. (1970). *A note o coefficients of chromatic polynomials*. *J. Combinatorial Theory*, 9, 95–96

۲۹. اگر  $G$  کامل نباشد و داشته باشیم:  $\chi = m + n - 1$  و  $n \geq 2$  و  $m \geq 2$ ، آنگاه دوزیرگراف مجزای  $G_1$  و  $G_2$  در  $G$  موجود است، به طوری که  $\chi(G_1) = m$  و  $\chi(G_2) = n$ . (L. Lovász, ۱۹۶۸)

۳۰. می‌گوییم گراف ساده  $G$ ، تام است اگر در هر زیرگراف القایی  $H$  از  $G$ ، تعداد رأس‌های بزرگترین خوشه برابر  $\chi(H)$  باشد.  $G$  تام است اگر و تنها اگر هیچ زیرگراف القایی از  $G$  یا  $G^c$ ، دور فردی بزرگتر از سه نباشد (C. Berge, ۱۹۶۱). حدس مذکور، حدس قوی گراف تام نامیده می‌شود. لاواژ (۱۹۷۲) نشان داده است که مکمل هر گراف تام، تام است.

Lovász, L. (1972). Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, 2, 253–67

Parthasarathy, K. R. and Ravindra, G. (to be published). The strong perfect-graph conjecture is true for  $K_{1,3}$ -free graphs. *J. Combinatorial Theory*

۳۱. اگر  $G$  یک بلوک ساده ۳-منتظم باشد و  $H$  از تضعیف تمام یال‌های  $G$  به دست آمده باشد، در این صورت  $\chi'(H) = 6$ . (D. R. Fulkerson, ۱۹۷۱).

۳۲. اگر  $G$  یک گراف ساده با  $\nu$  زوج باشد به طوری که  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ، آنگاه برای برخی رأس‌ها مانند  $\nu$  داریم:  $\chi'(G - \nu) = \chi'(G)$ .

(I. T. Jakobsen, L. W. Beineke and R. J. Wilson, ۱۹۷۳) این حدس برای تمام گراف‌های با

شرط  $\nu \leq 10$  و همچنین تمام گراف‌های ۳-منتظم با شرط  $\nu = 12$  ثابت شده است.

Beineke, L. W. and Wilson, R. J. (1973). on the edge-chromatic number of a graph. *Discrete Math.*, 5, 15–20

۳۳. در هر گراف ساده  $G$ ، عناصر  $VUE$  را می‌توان طوری با  $\Delta + 2$  رنگ، رنگ‌آمیزی نمود که هیچ دو عنصر مجاور یا واقع بر یکدیگر، هم‌رنگ نباشند (M. Behzad, 1965). این حدس به حدس رنگ‌آمیزی کلی مشهور است. م. روزنفلد<sup>۱</sup> و ن. ویجیدیتیا<sup>۲</sup> درستی این حدس را برای همه گراف‌های دارای شرط  $\Delta \leq 3$  اثبات نموده‌اند.

Vijayaditya, N. (1971). On the total chromatic number of a graph. *J. London Math. Soc.*, 3, 405–408

۳۴. اگر  $G$  یک گراف ساده با شرط  $6 - 3v < \varepsilon$  باشد، در این صورت  $G$  شامل مشتقی از  $K_8$  است.  
 (G. A. Dirac, ۱۹۶۴). توماسن (۱۹۷۵) نشان داد که  $G$  دارای مشتقی از  $K_8$  است اگر  $10 - 4v \leq \varepsilon$ .  
 Dirac, G. A. (1964). Homomorphism theorems for graphs. *Math. Ann.*, 153, 60–80  
 Thomassen, C. (1974). Some homeomorphism properties of graphs, *Math. Nachr.*, 64, 119–33
۳۵. دنباله  $d$  از اعداد صحیح نامنفی، بالقوه مسطح است هرگاه یک گراف ساده مسطح با دنباله درجه‌های  $d$  وجود داشته باشد. دنباله‌های بالقوه مسطح را توصیف نمایید (S. L. Hakimi, ۱۹۶۳).  
 Owens, A. B. (1971). On the planarity of regular incidence sequences. *J. Combinatorial Theory (B)*, 11, 201–12
۳۶. اگر  $G$ ، یک گراف مسطح بدون طوقه باشد، آنگاه  $\alpha \geq v/4$  (P. Erdős, ۱۹۶۸). آلبرتسن<sup>۱</sup> (۱۹۷۴) نشان داد که هر گراف با ویژگی فوق در رابطه  $\alpha > 2v/9$  صدق می‌کند.  
 Albertson, M. O. (1974). Finding an independent set in a planar graph, in *Graphs and Combinatorics* (eds. R. A. Bari and F. Harary), Springer–Verlag, New York, pp. 173–79
۳۷. هر گراف مسطح، ۴-رنگ پذیر است. (F. Guthrie, ۱۸۵۲).  
 Ore, O. (1969). *The Four–Color Problem*, Academic Press, New York
۳۸. هر گراف  $k$ -رنگی، شامل یک زیرگراف قابل انقباض به  $K_k$  است. (H. Hadwiger, ۱۹۴۳). دیراک (۱۹۶۴) ثابت کرد که هر گراف ۶-رنگی شامل یک زیرگراف قابل انقباض به  $K_6$  با یک یال کمتر است.  
 Dirac, G. A. (1964). Generalizations of the five colour theorem, in *Theory of Graphs and its Applications* (ed. M. Fiedler), Academic Press, New York, pp. 21–27
۳۹. هر گراف  $k$ -رنگی شامل مشتقی از  $K_k$  است (G. Hajós, ۱۹۶۱). پلیکن<sup>۲</sup> (۱۹۶۹) نشان داده است که هر گراف ۵-رنگی شامل مشتقی از  $K_5$  با یک یال کمتر است.

Pelikán, J. (1969). Valency conditions for the existence of certain subgraphs, in *Theory of Graphs* (eds. P. Erdős and G. Katona), Academic Press, New York, 251–58

۴۰. هر گراف ساده ۳-منتظم ۲-همبند-یالی که دارای رنگ‌آمیزی تات نباشد، یک زیرگراف قابل انقباض به گراف پترسن دارد. (W. T. Tutte, ۱۹۶۶).

Isaacs, R. (1975). Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait Colorable. *Amer. Math. Monthly*, 82, 221–39

Tutte, W. T. (1966). On the algebraic theory of graph coloring. *J. Combinatorial Theory*, 1, 15–50

۴۱. برای هر سطح  $S$ ، به تعداد متناهی گراف با شرط  $\delta \geq 3$  وجود دارد که کوچکترین گراف‌های غیر قابل نشاندن در  $S$  هستند.

۴۲. اگر  $D$  قویاً همبند باشد، در این صورت  $D$  شامل یک دور جهت‌دار با طول حداقل  $\chi$  است. (M. Las Vergnas, ۱۹۷۴).

۴۳. اگر  $D$  تورنمنتی با  $\nu$  فرد باشد و همه درجه‌های ورودی و خروجی رأس‌های آن برابر با  $(\nu-1)/2$  باشند، آنگاه  $D$  اجتماعی از  $(\nu-1)/2$  دور همبیلتنی جهت‌دار کمان-مجزا است. (P. Kelly, ۱۹۶۶).

۴۴. اگر  $D$  تورنمنتی با  $\nu$  زوج باشد، آنگاه  $D$  اجتماعی از  $\max\{0, d^+(v) - d^-(v)\}$  مسیر جهت‌دار کمان-مجزا است (R. O'Brien, ۱۹۷۴). این حدس درستی حدس ۴۳ را نشان می‌دهد.

۴۵. تورنمنت‌های  $D$  را بیابید که تمامی زیر تورنمنت‌های  $v-D$  یکریخت باشند. (A. Kotzig, ۱۹۷۳).

۴۶. اگر  $D$  گراف جهت‌داری باشد که شامل یک دور جهت‌دار است، آنگاه کمان‌هایی وجود دارند که معکوس کردن آن‌ها، باعث کاسته شدن تعداد دورهای جهت‌دار  $D$  می‌شود (A. Adám, ۱۹۶۳).

۴۷. به ازای هر عدد صحیح مثبت دلخواه  $n$ ، کوچکترین عدد صحیح  $f(n)$  وجود دارد به طوری که در هر گراف جهت دار با حداکثر  $n$  دور جهت دار کمان-مجزا،  $f(n)$  کمان موجود است که حذف آن‌ها تمامی دورهای جهت دار را نابود می‌کند (T. Gallai, ۱۹۶۴; D. H. Younger, ۱۹۶۸).

Erdős, P. and Pósa, L. (1962). On the maximal number of disjoint circuits of a graph. *Publ. Math. Debrecen*, 9, 3–12

Younger, D. H. (1973). Graphs with interlinked directed circuits, in *Proceeding of Midwest Symposium on Circuite Theory*

۴۸. می‌گوییم یک گراف  $(m, n)$ -منتظم،  $(m, n)$ -جهت پذیر است، اگر بتوان آن را طوری جهت دهی نمود که تمام درجه‌های ورودی برابر  $m$  یا  $n$  باشند. هر گراف ساده ۵-منتظم که شامل هیچ ۱-برش یالی یا ۳-برش یالی نباشد،  $(4, 1)$ -جهت پذیر است. (W. T. Tutte, ۱۹۷۲). تات نشان داد که این حدس قضیه گروتز را نتیجه می‌دهد.

۴۹. الگوریتمی بیابید که شمارهٔ ماکزیمم را در شبکه‌ای با دو منبع  $x_1$  و  $x_2$ ، دو چاه  $y_1$  و  $y_2$  و دو کالا، به دست آورد، به طوری که خریدار برای خرید کالای ۱ از  $x_1$  به  $y_1$  و برای کالای ۲ از  $x_2$  به  $y_2$  مراجعه نماید. (L. R. Ford and D. R. Fulkerson, ۱۹۶۲)

Rothschild, B. and Whinston, A. (1966). On two commodity network flows. *Operations Res.*, 14, 377–87

۵۰. هر گراف جهت دار ۲-همبند یالی  $D$ ، دارای گردش  $f$  روی میدان اعداد صحیح به پیمانه ۵ می‌باشد، به طوری که به ازای هر کمان  $a$  داشته باشیم:  $f(a) \neq 0$ . (W. T. Tutte, ۱۹۴۹). تات نشان داد که این حدس قضیه پنج رنگ را ثابت می‌کند.



## مراجع مسائل حل‌شده در فاصلهٔ زمانی بین چاپ اول و دوم کتاب

16. Göbel, F. and Jagers, A. A. (1974). *On a conjecture of tutte concerning minimal tree numbers. J. Combinatorial Theory (B), to be published*
- 36 and 37. Appel, K. and Haken, W. (1976). *Every planar map is four colorable. Bull. Amer. Math. soc., 82, 711–2*
42. Bondy, J. A. (1976). *Disconnected orientations and a conjecture of Las Vergnas. J. London Math. Soc., to be published*

# پیوست پنجم

## پیشنهاداتی برای مطالعه بیشتر

کتابها طبق معمول بر حسب سطح آموزشی نام برده شده‌اند.

Ore, O. (1963). *Graphs and Their Uses*, Random House, New York

Rouse Ball, W. W. and Coxeter, H. S. M. (1974). *Mathematical Recreations and Essays*, University of Toronto Press, Toronto

Liu, C. L. (1968). *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New York

Wilson, R. J. (1972). *Introduction to Graph Theory*, Oliver and Boyd, Edinburgh

Deo, N. (1974). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Behzad, M. and Chartrand, G. (1971). *Introduction to the Theory of Graphs*, Allyn and Bacon, Boston

Harary, F. (ed.) (1967). *A Seminar on Graph Theory*, Holt, Rinehart and Winston, New York

Ore, O. (1962). *Theory of Graphs*, American Mathematical Society, Providence, R. I.

König, D. (1950). *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Chelsea, New York

Sachs, H. (1970). *Einführung in die Theorie der endlichen Graphen*, Teubner Verlagsgesellschaft, Lipzig

Harary, F. (1969). *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Berge, C. (1973). *Graphs and Hypergraphs*, North Holland, Amsterdam

## موضوعات ویژه

- Biggs, N. (1974). *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge
- Tutte, W. T. (1966). *Connectivity in Graphs*, University of Toronto Press, Toronto
- Ore, O. (1967). *The Four-Color Problem*, Academic Press, New York
- Ringel, G. (1974). *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, Berlin
- Moon, J. W. (1968). *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York
- Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton
- Berge, C. and Ghouila-Houri, A. (1965). *Programming, Games, and Transportation Networks*, John Wiley, New York
- Seshu, S. and Reed, M. B. (1961). *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Tutte, W. T. (1971). *Introduction to the Theory of Matroids*, American Elsevier, New York
- Harary, F. and Plamer, E. (1973). *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York
- Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D. (1974). *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Welsh, D. J. A. (1976). *Matroid Theory*, Academic Press, New York
- Biggs, N., Lloyd, E. K. and Wilson, R. J. (1976). *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford

# فهرست نمادها

صفحه

نمادهای ریاضی عمومی

	اجتماع	$U$
	اشتراک	$\cap$
	زیرمجموعه	$\subseteq$
	زیرمجموعه سره	$\subset$
	تفاضل در نظریه مجموعه‌ها	$\setminus$
	تفاضل متقارن	$\Delta$
	بزرگترین عدد صحیح $x \geq$	$\lfloor x \rfloor$
	کوچکترین عدد صحیح $x \leq$	$\lceil x \rceil$
۲۸۱	محمل $f$	$\ f\ $
۲۸۱	تحدید $R$ به $S$	$R S$
	ترانهاده $R$	$R'$

صفحه

نمادهای نظریه گراف‌ها

۲۲۳	مجموعه کمان‌ها	$A$
۲۱	ماتریس مجاورت گراف	$A$
۲۲۶	ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار	$A$
۱۸۷	مرز $f$	$b(f)$
۲۷۹	فضای باندها	$\mathcal{B}$
۸۳	بستار $G$	$c(G)$
۲۵۳	ظرفیت برش $K$	$cap K$
۲۷۷	فضای دورها	$\mathcal{C}$
۲۴	درجه رأس $v$ در $G$	$d_G(v)$

## صفحه

۱۸۷	درجهٔ وجه $f$ در $G$	$d_G(f)$
۲۲۵	درجهٔ ورودی $v$ در $D$	$d_D^-(v)$
۲۲۵	درجهٔ خروجی $v$ در $D$	$d_D^+(v)$
۲۹	فاصلهٔ $u$ از $v$ در گراف $G$	$d_G(u, v)$
۲۲۳	گراف جهت‌دار	$D$
۲۳۴	گراف جهت‌دار وابستهٔ $G$	$D(G)$
۱۸۲	برون $J$	$ext J$
۱۸۲	بستار برون $J$	$Ext J$
۱۳	مجموعهٔ یال‌ها	$E$
۲۵۰	شمارهٔ ورودی به $S$	$f^-(S)$
۲۵۰	شمارهٔ خروجی از $S$	$f^+(S)$
۱۸۶	مجموعهٔ وجه‌ها	$F$
۲۱۶	مجموعهٔ وجه‌های $\bar{H}$ که $B$ در آن‌ها قابل رسم است	$F(B, \bar{H})$
۱۳	گراف	$G$
۲۳	زیرگراف $G$ القاء شده توسط $S$	$G[S]$
۱۸۲	درون $J$	$int J$
۱۸۲	بستار درون $J$	$Int J$
۱۷	گراف کامل	$K_n$
۱۸	گراف کامل دوبخشی	$K_{m, n}$
۲۱	ماتریس وقوع گراف	$\mathbf{M}$
۲۸۰	ماتریس وقوع گراف جهت‌دار	$\mathbf{M}$
۲۴۹	شبکه	$N$
۱۰۲	مجموعهٔ همسایهٔ $S$ در $G$	$N_G(S)$
۲۲۹	مجموعهٔ همسایهٔ ورودی $v$ در $D$	$N_D^-(v)$
۲۲۹	مجموعهٔ همسایهٔ خروجی $v$ در $D$	$N_D^+(v)$
۱۴۲	عدد رمزی	$r(k, l)$

## صفحه

۱۴۷	عدد رمزی	$r(k_1, k_2, \dots, k_m)$
۱۴۸	$r(3, 3, \dots, 3)$	$r_n$
۲۵۱	مقدار شماره $f$	$val f$
۱۳	مجموعه رأس‌ها	$V$
۱۹۴	مجموعه رأس‌های اتصال $B$ به $H$	$V(B, H)$
۱۴۰	عدد استقلال	$\alpha$
۱۴۰	عدد استقلالی یالی	$\alpha'$
۱۴۰	پوشانه	$\beta$
۱۴۰	پوشانه یالی	$\beta'$
۲۴	کمترین درجه	$\delta$
۲۲۵	کمترین درجه ورودی	$\delta^-$
۲۲۵	کمترین درجه خروجی	$\delta^+$
۲۴	بیشترین درجه	$\Delta$
۲۲۵	بیشترین درجه ورودی	$\Delta^-$
۲۲۵	بیشترین درجه خروجی	$\Delta^+$
۱۶	تعداد یال‌ها	$\varepsilon$
۶۶	همبندی	$\kappa$
۶۶	همبندی یالی	$\kappa'$
۱۶	تعداد رأس‌ها	$\nu$
۱۰۷	تعداد مؤلفه‌های فرد	$o$
۱۶۹	چندجمله‌ای رنگی	$\pi_k$
۵۲	تعداد درخت‌های فراگیر	$\tau$
۱۸۶	تعداد وجه‌ها	$\phi$
۱۵۹	عدد رنگی	$\chi$
۱۲۶	عدد رنگی یالی	$\chi'$
۲۰۸	عدد رنگی وجهی	$\chi^*$

## صفحه

۲۸	تعداد مؤلفه‌ها	$\omega$
۲۲۶	عکس $D$	$\bar{D}$
۲۲۶	تراکم $D$	$\hat{D}$
۲۰	مکمل $G$	$G^c$
۱۸۷	دوگان $G$	$G^*$
۱۸۱	نشانندن مسطح $G$	$\bar{G}$
۲۷	معکوس گشت $W$	$W^{-1}$
۵۲	انقباض $e$	$G.e$
۲۳	حذف $e$	$G-e$
۲۳	افزودن $e$	$G+e$
۲۳	حذف $v$	$G-v$
۲۳	افزودن $E'$	$G+E'$
۲۳	حذف $S$	$G-S$
۱۷	یکریختی	$G \cong H$
۲۲	زیرگراف	$H \subseteq G$
۲۲	زیرگراف ۲ سره	$H \subset G$
۲۴	اجتماع	$GUH$
۲۴	اشتراک	$G \cap H$
۲۴	اجتماع مجزا	$G+H$
۱۳۱	حاصلضرب	$G \times H$
۸۶	اتصال	$G \vee H$
۴۸	مکمل $H$ در $G$	$\bar{H}(G)$
۴۸	مجموعهٔ یال‌های بین $S$ و $T$	$[S, T]$
۲۳۰	مجموعهٔ کمان‌های بین $S$ و $T$	$(S, T)$
۲۷	پیوستن گشت‌ها	$WW'$

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

## « الف »

<i>saturated</i>	آلوده
<i>origin of a walk</i>	ابتدای گشت
<i>join</i>	اتصال
<i>potential difference</i>	اختلاف پتانسیل
<i>Ramsey numbers</i>	اعداد رمزی
<i>induced</i>	القاء شده
<i>Dijkstra's algorithm</i>	الگوریتم دایسترا
<i>Fleury's algorithm</i>	الگوریتم فلوری
<i>transferring of a bridge</i>	انتقال پل
<i>terminus of a walk</i>	انتهای گشت
<i>contraction</i>	انقباض

## « ب »

<i>reconstructible</i>	بازساختنی
<i>bond</i>	باند
<i>feasible vertex labelling</i>	برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر
<i>proper labelling</i>	برچسب‌زنی مجاز
<i>cut</i>	برش
<i>vertex cut</i>	برش رأسی
<i>minimum cut</i>	برش مینیمم
<i>edge cut</i>	برش یالی
<i>Exterior of Jordan curve</i>	برون خم ژوردان
<i>closure of a graph</i>	بستار گراف
<i>block</i>	بلوک
<i>improvement</i>	بهبود



## (( پ ))

<i>spoke</i>	پره
<i>bridge</i>	پل
<i>transferable bridge</i>	پل انتقال‌پذیر
<i>outer bridge</i>	پل بیرونی
<i>inner bridge</i>	پل درونی
<i>drawable bridge</i>	پل قابل رسم
<i>avoiding bridges</i>	پل‌های اجتناب‌کننده
<i>skew bridges</i>	پل‌های درگیر
<i>overlapping bridges</i>	پل‌های هم‌پوشان
<i>equivalent <math>k</math>-bridges</i>	$k$ -پل‌های هم‌ارز
<i>covering number</i>	پوشانه
<i>edge covering number</i>	پوشانه یالی
<i>covering</i>	پوشش
<i>minimum covering</i>	پوشش مینیمم
<i>edge covering</i>	پوشش یالی
<i>bandwidth</i>	پهنای باند

## (( ت ))

<i>capacity function</i>	تابع ظرفیت
<i>incidence function</i>	تابع وقوع
<i>realisable</i>	تحقق‌پذیر
<i>condensation</i>	تراکم
<i>composition of simple graphs</i>	ترکیب گراف‌های ساده
<i>stereographic projection</i>	تصویر استریوگرافیک
<i>doblication</i>	تضعیف
<i>matching</i>	تطابق
<i>optimal matching</i>	تطابق بهینه
<i>perfect matching</i>	تطابق کامل
<i>maximum matching</i>	تطابق ماکزیمم

<i>horizontal dissector</i>	تفکیک کننده افقی
<i>demand</i>	تقاضا
<i>multiplicity</i>	تکرر
<i>tour</i>	تور
<i>Euler tour</i>	تور اویلری
<i>optimal tour</i>	تور بهینه
<i>tournament</i>	تورنمنت

## (( ج ))

<i>seperated</i>	جدا شده
<i>forest</i>	جنگل
<i>orientable</i>	جهت پذیر
<i>orientation</i>	جهت دهی

## (( چ ))

<i>sink</i>	چاهک
<i>wheel</i>	چرخ
<i>chromatic polynomial</i>	چندجمله‌ای رنگی

## (( ح ))

<i>product of simple graphs</i>	حاصلضرب گراف‌های ساده
<i>reconstruction conjecture</i>	حدس بازسازی
<i>edge reconstruction conjecture</i>	حدس بازسازی یالی
<i>four-colour conjecture</i>	حدس چهاررنگ
<i>total colouring conjecture</i>	حدس رنگ آمیزی کلی
<i>strong perfect graph conjecture</i>	حدس قوی گراف تام
<i>Hajos' conjecture</i>	حدس هایوش

## (( خ ))

<i>Jordan curve</i>	خم ژوردان
<i>self-dual</i>	خوددوگان

*automorphism* خودریختی  
*clique* خوشه

## (( د ))

*degree* درجه  
*outdegree* درجهٔ خروجی  
*indegree* درجهٔ ورودی  
*tree* درخت  
*optimal tree* درخت بهینه  
*spanning tree* درخت فراگیر  
*f-unsaturated tree* درخت  $f$ -اشباع نشده  
*interior of Jordan curve* درون خم ژوردان  
*hypomorphic* درون ریخت  
*hypohamiltonian* درون - همیلتنی  
*system of distinct representatives* دستگاه نماینده‌های متمایز  
*tail* دم  
*forcibly hamiltonian sequence* دنبالهٔ اجباراً همیلتنی  
*degree sequence* دنبالهٔ درجه‌ها  
*potentially planar sequence* دنبالهٔ بالقوهٔ مسطح  
*graphic sequence* دنبالهٔ گرافی  
*cycle* دور  
*even cycle* دور زوج  
*odd cycle* دور فرد  
*hamilton cycle* دور همیلتنی  
*dual* دوگان

## (( ر ))

*vertex* رأس  
*vertex-transitive* رأس - ترا یا  
*reachable vertex* رأس قابل دستیابی  
*vertices of attachment* رأس‌های اتصال

<i>internal vertices</i>	رأس‌های داخلی
<i>intermediate vertices</i>	رأس‌های میانی
<i>Tait colouring</i>	رنگ‌آمیزی تایت
<i>vertex colouring</i>	رنگ‌آمیزی رأسی
<i>canonical colouring</i>	رنگ‌آمیزی کانونی
<i>proper colouring</i>	رنگ‌آمیزی مجاز
<i>proper vertex colouring</i>	$k$ -رنگ‌آمیزی رأسی مجاز
<i>face colouring</i>	رنگ‌آمیزی وجهی
<i>proper face colouring</i>	رنگ‌آمیزی وجهی مجاز
<i>edge colouring</i>	رنگ‌آمیزی یالی
<i>labelling method</i>	روش برچسب‌زنی
<i>Hungarian method</i>	روش مجارستانی

## (( ز ))

<i>supergraph</i>	زیرگراف
<i>spanning supergraph</i>	زیرگراف فراگیر
<i>subgraph</i>	زیرگراف
<i>induced subgraph</i>	زیرگراف القایی
<i>edge-induced subgraph</i>	زیرگراف القایی یالی
<i>equality subgraph</i>	زیرگراف تساوی
<i>subdigraph</i>	زیرگراف جهت‌دار
<i>proper subgraph</i>	زیرگراف سره
<i>spanning subgraph</i>	زیرگراف فراگیر
<i>disjoint subgraphs</i>	زیرگراف‌های مجزا
<i>edge-disjoint subgraphs</i>	زیرگراف‌های یال-مجزا

## (( س ))

<i>head of an arc</i>	سرکمان
<i>end of an edge</i>	سر یال
<i>surface</i>	سطح

## « ش »

<i>flow</i>	شاره
<i>revised flow</i>	شارهٔ اصلاح شده
<i>feasible flow</i>	شارهٔ امکان پذیر
<i>result flow</i>	شارهٔ برآیند
<i>zero flow</i>	شارهٔ صفر
<i>maximum flow</i>	شارهٔ ماکزیمم
<i>network</i>	شبکه
<i>conservation condition</i>	شرط بقا

## « ض »

<i>thickness</i>	ضخامت
------------------	-------

## « ط »

<i>loop</i>	طوقه
<i>length</i>	طول

## « ظ »

<i>capacity of a cut</i>	ظرفیت برش
<i>capacity of an arc</i>	ظرفیت کمان

## « ع »

<i>independence number</i>	عدد استقلال
<i>edge independence number</i>	عدد استقلال یالی
<i>binding number</i>	عدد بستگی
<i>generalised Ramsey number</i>	عدد رمزی تعمیم یافته
<i>chromatic number</i>	عدد رنگی
<i>face chromatic number</i>	عدد رنگی وجهی
<i>edge chromatic number</i>	عدد رنگی یالی
<i>supply</i>	عرضه
<i>converse of a digraph</i>	عکس گراف جهت‌دار

*k-factor* *k*-عامل

## « غ »

*breakthrough* غلبه

## « ف »

*distance* فاصله

*lelabelling procedure* فرآیند برچسب‌زنی

*majorised* فراگرفته شده

*degree-majorised* فراگرفته درجه‌ای

*Euler's formula* فرمول اویلر

*bond space* فضای باندها

*cycle space* فضای دورها

## « ق »

*Kirchhoff's current law* قانون جریان کرشهف

*section of walk* قسمت گشت

*marriage theorem* قضیه ازدواج

*five-colour theorem* قضیه پنج رنگ

*map colour theorem* قضیه رنگ‌آمیزی نقشه

*max flow-min cut theorem* قضیه شماره ماکزیمم - برش مینیمم

*matrix-tree theorem* قضیه ماتریس - درخت

*Brouwer's fixed-point theorem* قضیه نقطه ثابت براور

*diameter* قطر

*directed diameter* قطر جهت‌دار

*segments of a bridge* قطعه‌های پل

*cage* قفس

*capacity constraint* قید ظرفیت

## « ک »

*arc* کمان

<i>f-saturated arc</i>	کمان <i>f</i> -اشباع‌شده
<i>f-unsaturated arc</i>	کمان <i>f</i> -اشباع‌نشده
<i>f-zero arc</i>	کمان <i>f</i> -صفر
<i>f-positive arc</i>	کمان <i>f</i> -مثبت
<i>girth</i>	کمر

## « گ »

<i>trail</i>	گذرگاه
<i>Euler trail</i>	گذرگاه اویلری
<i>graph</i>	گراف
<i>horizontal graph</i>	گراف افقی
<i>eulerian graph</i>	گراف اویلری
<i>graceful graph</i>	گراف باشکوه
<i>critical graph</i>	گراف بحرانی
<i>trivial graph</i>	گراف بدیهی
<i>acyclic graph</i>	گراف بی‌دور
<i>perfect graph</i>	گراف تام
<i>empty graph</i>	گراف تهی
<i>directed graph, digraph</i>	گراف جهت‌دار
<i>strict digraph</i>	گراف جهت‌دار قوی
<i>disconnected digraph</i>	گراف جهت‌دار قویاً همبند
<i>associated digraph</i>	گراف جهت‌دار وابسته
<i>unilateral digraph</i>	گراف جهت‌دار یک‌طرفه
<i>k-arc-connected digraph</i>	گراف جهت‌دار <i>k</i> -همبند کمافی
<i>self-complementary graph</i>	گراف خود مکمل
<i>tree graph</i>	گراف درختی
<i>hypotracheable graph</i>	گراف درون-دنبال شدنی
<i>bipartite graph</i>	گراف دوبخشی
<i>Ramsey graph</i>	گراف رمزی
<i>underlying graph</i>	گراف زمینه
<i>simple graph</i>	گراف ساده

<i>underlying simple graph</i>	گراف ساده زمینه
<i>vertical graph</i>	گراف عمودی
<i>nontrivial graph</i>	گراف غیربدیهی
<i>embeddable graph</i>	گراف قابل نشانندن
<i>complete graph</i>	گراف کامل
<i>finite graph</i>	گراف متناهی
<i>planar graph</i>	گراف مسطح
<i>plane graph</i>	گراف مسطح شده
<i>regular graph</i>	گراف منتظم
<i>disconnected graph</i>	گراف ناهمبند
<i>weighted graph</i>	گراف وزندار
<i>isomorphic graphs</i>	گراف‌های یکریمخت
<i>connected graph</i>	گراف همبند
<i>identical graph</i>	گراف همسان
<i>Hamilton-connected graph</i>	گراف همیلتن-همبند
<i>Hamiltonian graph</i>	گراف همیلتنی
<i>edge graph</i>	گراف یالی
<i>k-critical graph</i>	گراف $k$ -بحرانی
<i>k-partite graph</i>	گراف $k$ -بخشی
<i>k-factorable graph</i>	گراف $k$ -تجزیه پذیر
<i>k-vertex colourable graph</i>	گراف $k$ -رنگ پذیر رأسی
<i>k-edge colourable graph</i>	گراف $k$ -رنگ پذیر یالی
<i>k-chromatic graph</i>	گراف $k$ -رنگی
<i>k-edge-chromatic graph</i>	گراف $k$ -رنگی یالی
<i>k-regular graph</i>	گراف $k$ -منتظم
<i>k-connected graph</i>	گراف $k$ -همبند
<i>circulation</i>	گردش
<i>circulation over a field</i>	گردش روی یک میدان
<i>automorphism group</i>	گروه خود ریختی
<i>walk</i>	گشت
<i>closed walk</i>	گشت بسته



*directed walk*

گشت جهت‌دار

## « ل »

*Sperner's lemma*

لم اشپرینر

## « م »

*primitive matrix*

ماتریس اولیه

*basis matrix*

ماتریس پایه

*doubly stochastic matrix*

ماتریس تصادفی مضاعف

*totally unimodular matrix*

ماتریس تماماً یک‌هنگ

*permutation matrix*

ماتریس جایگشت

*adjacency matrix*

ماتریس مجاورت

*incidence matrix*

ماتریس وقوع

*conductance matrix*

ماتریس هدایت

*unimodular matrix*

ماتریس یک‌هنگ

*triangle*

مثلث

*plane triangulation*

مثلث‌بندی مسطح‌شده

*distinguished triangle*

مثلث متشخص

*adjacent*

مجاور

*independent set*

مجموعهٔ مستقل

*neighbour set*

مجموعهٔ همسایه

*support of a function*

محمّل تابع

*barycentric coordinates*

مختصات مرکز ثقل

*order of a sequered rectangle*

مرتبهٔ مستطیل مربع بندی شده

*center of a graph*

مرکز گراف

*conjugate*

مزدوج

*Chinese postman problem*

مسأله پستچی چینی

*optimal assignment problem*

مسأله تخصیص بهینه

*personnel assignment problem*

مسأله تخصیص شغل

*four-colour problem*

مسأله چهاررنگ

*timetabling problem*

مسأله زمان‌بندی

<i>travelling salesman problem</i>	مسأله فروشنده دوره گرد
<i>shortest path problem</i>	مسأله کوتاهترین مسیر
<i>connector problem</i>	مسأله ارتباط دهی
<i>squared rectangle</i>	مستطیل مربع بندی شده
<i>perfect squared rectangle</i>	مستطیل مربع بندی شده تام
<i>path</i>	مسیر
<i>augmenting path</i>	مسیر افزوده
<i>alternating path</i>	مسیر متناوب
<i>internally-disjoint paths</i>	مسیرهای مجزای داخلی
<i>Hamilton path</i>	مسیر همیلتنی
<i>directed Hamilton path</i>	مسیر همیلتنی جهت دار
<i>f-saturated path</i>	مسیر $f$ -اشباع شده
<i>f-unsaturated path</i>	مسیر $f$ -اشباع نشده
<i>f-incrementing path</i>	مسیر $f$ -افزایشی
<i>subdivision of a graph</i>	مشتق گراف
<i>subdivision of a graph</i>	مشتق گراف
<i>value of a flow</i>	مقدار شار
<i>cube</i>	مکعب
<i>perfect cube</i>	مکعب تام
<i>complement</i>	مکمل
<i>source</i>	منبع
<i>component</i>	مؤلفه
<i>dicomponents</i>	مؤلفه‌های قوی

## (( ن ))

<i>embedding</i>	نشانندن
<i>planar embedding</i>	نشانندن مسطح
<i>G-admissible embedding</i>	نشانندن $G$ -مجاز
<i>extremal graph theory</i>	نظریه گراف‌های اکستریمال

## (( و ))

<i>incident</i>	واقع
<i>face</i>	وجه
<i>exterior face</i>	وجه بیرونی
<i>weight</i>	وزن

## (( ه ))

<i>connectivity</i>	همبندی
<i>edge connectivity</i>	همبندی یالی
<i>cotree</i>	همدرخت
<i>out-neighbour</i>	همسایه خروجی
<i>in-neighbour</i>	همسایه ورودی

## (( ی ))

<i>edge</i>	یال
<i>cut edge</i>	یال برشی
<i>link</i>	یال پیوندی
<i>edge-transitive</i>	یال-ترایا
<i>uniquely <math>k</math>-colourable</i>	یکتا $k$ -رنگ‌پذیر
<i>uniquely <math>k</math>-edge-colourable</i>	یکتا $k$ -رنگ‌پذیریالی
<i>isomorphism</i>	یکریختی

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

در این واژه‌نامه به منظور پیشگیری از تفرق در جایگزینی معادل‌های فارسی و همچنین کمک به ترجمه راحت‌تر سایر متون و مقالات مربوط به نظریهٔ گراف‌ها، برخی واژه‌ها و اصطلاحات که در این کتاب به کار رفته‌اند، از واژه‌نامهٔ پیشنهادی استادان ارجمند، آقایان دکتر محمودیان و دکتر بهزاد اضافه گردیده است.



<i>acyclic graph</i>	گراف بی‌دور
<i>adjacency matrix</i>	ماتریس مجاورت
<i>adjacent</i>	مجاور
<i>adjunction</i>	الحاق
<i>admissible</i>	مجاز
<i>Affine plane</i>	صفحهٔ آفین
<i>algorithm</i>	الگوریتم
<i>Al-Khowarizmi</i>	خوارزمی
<i>alternating path</i>	مسیر متناوب
<i>analysis of algorithms</i>	تحلیل الگوریتم‌ها
<i>arboricity</i>	درختانه
<i>arc</i>	کمان
<i>articulation vertex (point)</i>	مفصل
<i>associated graph</i>	گراف وابسته
<i>asymmetric digraph</i>	گراف جهت‌دار پادمتقارن
<i>augmenting path</i>	مسیر افزوده
<i>automorphism</i>	خودریختی
<i>automorphism group</i>	گروه خود ریختی
<i>avoiding bridges</i>	پل‌های اجتناب‌کننده



<i>balanced colouring</i>	رنگ‌آمیزی متعادل
<i>balancable graph</i>	گراف تعادل‌پذیر
<i>balanced tree</i>	درخت متعادل
<i>barycentric coordinates</i>	مختصات مرکز ثقل
<i>base block</i>	بلوک پایه
<i>base of matroid</i>	پایهٔ متروید
<i>basic tree</i>	درخت پایه‌ای
<i>basis matrix</i>	ماتریس پایه
<i>Betti number</i>	عدد بتی
<i>bicentral tree</i>	درخت دومرکزی
<i>biconnected graph</i>	گراف دوهمبند
<i>binary matroid</i>	متروید دوتایی
<i>binding number</i>	عدد بستگی
<i>bipartite graph</i>	گراف دوبخشی
<i>bipartition</i>	دوبخشی کردن
<i>biplane</i>	دوصفحه، صفحهٔ مضاعف
<i>block</i>	بلوک
<i>block design</i>	طرح بلوکی
<i>bond</i>	باند
<i>bond space</i>	فضای باندها
<i>bounded region</i>	ناحیهٔ کراندار
<i>boundary of a region</i>	مرز ناحیه
<i>branch</i>	شاخه
<i>breakthrough</i>	غلبه
<i>bridge</i>	پل
<i>Brook's theorem</i>	قضیهٔ بروکس
<i>Brouwer's fixed-point theorem</i>	قضیهٔ نقطه ثابت براور



<i>cactus</i>	کاکتوس
<i>cage</i>	قفص
<i>canonical colouring</i>	رنگ‌آمیزی کانونی
<i>capacity constraint</i>	قید ظرفیت
<i>capacity function</i>	تابع ظرفیت
<i>capacity of a cut</i>	ظرفیت برش
<i>capacity of an arc</i>	ظرفیت کمان
<i>cartesian product of two graphs</i>	حاصلضرب دکارتی دو گراف
<i>Cayley colour graph</i>	گراف رنگی کیلی
<i>cell</i>	حجره
<i>center of a graph</i>	مرکز گراف
<i>central vertex</i>	رأس مرکزی
<i>chain</i>	زنجیر
<i>characteristic polynomial</i>	چندجمله‌ای مشخصه
<i>check polynomial</i>	چندجمله‌ای آزمون
<i>Chinese postman problem</i>	مسأله پستچی چینی
<i>chordal graph</i>	گراف وتری
<i>chromatic index</i>	شاخص رنگی
<i>chromatic number</i>	عدد رنگی
<i>chromatic polynomial</i>	چندجمله‌ای رنگی
<i>circuit</i>	مدار
<i>circuit matroid</i>	متروید مدارها
<i>circuit rank</i>	رتبه مدارها
<i>circuit subspace</i>	زیرفضای مدارها
<i>circulation</i>	گردش
<i>circulation over a field</i>	گردش روی یک میدان
<i>class one graph</i>	گراف رده یک
<i>class two graph</i>	گراف رده دو
<i>clique</i>	خوشه
<i>clique number</i>	عدد خوشه‌ای

<i>closed cycle</i>	دور بسته
<i>closed neighbourhood</i>	همسایهٔ بسته
<i>closed walk</i>	گشت بسته
<i>closure of a graph</i>	بستار گراف
<i>cobase</i>	همپایه
<i>coboundary</i>	هم‌مرز
<i>cocircuit</i>	هم‌مدار
<i>cocycle</i>	هم‌دور
<i>cocycle basis</i>	پایهٔ (فضای) هم‌دورها
<i>cocycle matrix</i>	ماتریس هم‌دورها
<i>cocycle matroid</i>	متروید هم‌دورها
<i>cocycle rank</i>	رتبهٔ هم‌دورها
<i>cocycle space</i>	فضای هم‌دورها
<i>coding theory</i>	نظریهٔ کدگذاری
<i>cographic matroid</i>	متروید هم‌گراف‌ها
<i>collection</i>	گردایه
<i>colour</i>	رنگ
<i>coloured cubes</i>	مکعب‌های رنگدار
<i>colouring</i>	رنگ‌آمیزی، رنگ کردن
<i>combinational circuit</i>	مدار ترکیبیاتی
<i>combination</i>	ترکیب
<i>combinatorics</i>	ترکیبیات
<i>companion matrix</i>	ماتریس همراه
<i>complement</i>	مکمل
<i>complete binary tree</i>	درخت دودویی کامل
<i>complete graph</i>	گراف کامل
<i>complete matching</i>	تطابق کامل
<i>complete tripartite graph</i>	گراف سه‌بخشی کامل
<i>component</i>	مؤلفه
<i>composition of simple graphs</i>	ترکیب گراف‌های ساده
<i>condensation</i>	تراکم
<i>conductance matrix</i>	ماتریس هدایت

<i>configuration</i>	پیکربندی
<i>conjecture</i>	حدس
<i>conjugate</i>	مزدوج
<i>connected graph</i>	گراف همبند
<i>connectivity</i>	همبندی
<i>connectivity of a graph</i>	عدد همبندی گراف
<i>connector problem</i>	مسأله ارتباط دهی
<i>conservation condition</i>	شرط بقا
<i>contraction</i>	انقباض
<i>contractible</i>	انقباضپذیر، قابل انقباض
<i>converse of a digraph</i>	عکس گراف جهت‌دار
<i>corank</i>	همرتبه
<i>coset</i>	هم‌مجموعه
<i>cospectral graphs</i>	گراف‌های همطیف
<i>cotree</i>	همدرخت
<i>countable graph</i>	گراف شمارا
<i>counting graphs</i>	شمارش گراف‌ها
<i>covering</i>	پوشش
<i>covering number</i>	پوشانه
<i>critical graph</i>	گراف بحرانی
<i>critical path</i>	مسیر بحرانی
<i>crossing number</i>	عدد تقاطعی
<i>cryptography</i>	رمزنگاری
<i>cube</i>	مکعب
<i>cubic graph</i>	گراف مکعبی
<i>cut</i>	برش
<i>cut edge</i>	یال برشی
<i>cycle</i>	دور
<i>cycle basis</i>	پایه (فضای) دورها
<i>cycle edge</i>	یال دوری
<i>cycle index</i>	شاخص دوری
<i>cycle space</i>	فضای دورها



<i>cycle structure</i>	ساختار دوره‌ها
<i>cyclic block</i>	بلوک دوری
	
<i>decision problems</i>	مسائل تصمیم
<i>decision tree</i>	درخت تصمیم
<i>decoding</i>	کدگشایی
<i>decomposition</i>	تجزیه
<i>deficiency</i>	کمبود
<i>defining set</i>	مجموعهٔ معین
<i>defference set</i>	مجموعهٔ تفاضلی
<i>degree</i>	درجهٔ رأس
<i>degree sequence</i>	دنباله درجه‌ها
<i>degree-majorised</i>	فراگرفتهٔ درجه‌ای
<i>demand</i>	تقاضا
<i>design</i>	طرح
<i>diagonal matrix</i>	ماتریس قطری
<i>diameter</i>	قطر
<i>dicomponents</i>	مؤلفه‌های قوی
<i>disconnected digraph</i>	گراف جهت‌دار قویاً همبند
<i>dictionary order</i>	ترتیب الفبایی
<i>Dijkstra's algorithm</i>	الگوریتم دایسترا
<i>directed Hamilton path</i>	مسیر همیلتنی جهت‌دار
<i>directed diameter</i>	قطر جهت‌دار
<i>directed graph, digraph</i>	گراف جهت‌دار، گراف سودار
<i>directed walk</i>	گشت جهت‌دار
<i>disconnected graph</i>	گراف ناهمبند
<i>disconnecting set</i>	مجموعهٔ ناهمبندساز
<i>discrete matroid</i>	متروید گسسته
<i>disjoint subgraphs</i>	زیرگراف‌های مجزا
<i>distance</i>	فاصله

<i>distinct representatives</i>	نماینده‌های متمایز
<i>distinguished triangle</i>	مثلث متشخص
<i>doblication</i>	تضعیف
<i>dodecahedral graph</i>	گراف دوازده‌وجهی
<i>dominance</i>	غلبه
<i>dominating number</i>	عدد غلبه‌ای
<i>dominating set</i>	مجموعه غالب
<i>doubly stochastic matrix</i>	ماتریس تصادفی مضاعف
<i>drawable bridge</i>	پل قابل رسم
<i>dual</i>	دوگان



<i>eccentricity set</i>	مجموعه مرکز-گریز
<i>edge</i>	یال
<i>edge chromatic number</i>	عدد رنگی یالی
<i>edge colouring</i>	رنگ آمیزی یالی
<i>edge connectivity</i>	همبندی یالی
<i>edge covering</i>	پوشش یالی
<i>edge covering number</i>	پوشانه یالی
<i>edge cut</i>	برش یالی
<i>edge graph</i>	گراف یالی
<i>edge independence number</i>	عدد استقلالی یالی
<i>edge reconstruction conjecture</i>	حدس بازسازی یالی
<i>edge-disjoint subgraphs</i>	زیرگراف‌های یال-مجزا
<i>edge-induced subgraph</i>	زیرگراف القایی یالی
<i>edge-transitive</i>	یال-ترا یا
<i>efficiency</i>	کارایی
<i>electrical networks</i>	شبکه‌های الکتریکی
<i>elementary constructions</i>	ساختارهای ابتدایی
<i>embeddable graph</i>	گراف قابل نشاندن
<i>embedding</i>	نشاندن

<i>embedded</i>	نشانده شده
<i>empty graph</i>	گراف تهی
<i>encoding</i>	کدگذاری
<i>end vertex</i>	رأس انتها
<i>enumeration</i>	شمارش
<i>equality subgraph</i>	زیرگراف تساوی
<i>equivalent <math>k</math>-bridges</i>	$k$ -پل‌های هم‌ارز
<i>Ergodic chain</i>	زنجیر ارگودیک
<i>Euclid</i>	اقلیدس
<i>Euler tour</i>	تور اویلری
<i>Euler trail</i>	گذرگاه اویلری
<i>Euler's formula</i>	فرمول اویلر
<i>eulerian graph</i>	گراف اویلری
<i>even cycle</i>	دور زوج
<i>exponential generating function</i>	تابع مولد نمایی
<i>exponential time algorithm</i>	الگوریتم با زمان نمایی
<i>exterior face</i>	وجه بیرونی
<i>exterior of Jordan curve</i>	برون خم ژوردان
<i>extremal graph theory</i>	نظریه گراف‌های اکسترمال



<i>face</i>	وجه
<i>factor</i>	عامل
<i>face chromatic number</i>	عدد رنگی وجهی
<i>face colouring</i>	رنگ آمیزی وجهی
<i>Fano matroid</i>	متروید فانو
<i>feasible flow</i>	شارهٔ امکان پذیر
<i>feasible vertex labelling</i>	برچسب‌زنی رأسی امکان‌پذیر
<i>finite graph</i>	گراف متناهی
<i>five-colour theorem</i>	قضیهٔ پنج رنگ
<i>Fleury's algorithm</i>	الگوریتم فلوری

<i>flow</i>	شاره
<i>forcibly hamiltonian sequence</i>	دنباله اجباراً همیلتونی
<i>forest</i>	جنگل، بیشه
<i>four-colour conjecture</i>	حدس چهاررنگ
<i>four-colour problem</i>	مسئله چهاررنگ
<i>fundamental system of circuits</i>	دستگاه اصلی مدارها
<i>f-incrementing path</i>	مسیر $f$ -افزایشی
<i>f-positive arc</i>	کمان $f$ -مثبت
<i>f-saturated arc</i>	کمان $f$ -اشباع شده
<i>f-saturated path</i>	مسیر $f$ -اشباع شده
<i>f-unsaturated arc</i>	کمان $f$ -اشباع نشده
<i>f-unsaturated path</i>	مسیر $f$ -اشباع نشده
<i>f-unsaturated tree</i>	درخت $f$ -اشباع نشده
<i>f-zero arc</i>	کمان $f$ -صفر
<i>G-admissible embedding</i>	نشانده $G$ -مجاز



<i>general graph</i>	گراف عام
<i>generating function</i>	تابع مولد
<i>generalised Ramsey number</i>	عدد رمزی تعمیم یافته
<i>Genus</i>	گونا
<i>genus of a graph</i>	گونای گراف
<i>geometric dual</i>	دوگان هندسی
<i>girth</i>	کمر
<i>graceful graph</i>	گراف باشکوه
<i>graph</i>	گراف
<i>graph theory</i>	نظریه گرافها
<i>graphic sequence</i>	دنباله گرافی
<i>graphoid</i>	گرافوار
<i>greedy algorithm</i>	الگوریتم آزمند (حریصانه)
<i>group of a graph</i>	گروه گراف



<i>Hajos' conjecture</i>	حدس هایوش
<i>Hamilton path</i>	مسیر همیلتنی
<i>Hamilton-connected graph</i>	گراف همیلتن - همبند
<i>Hamiltonian graph</i>	گراف همیلتنی
<i>hamilton cycle</i>	دور همیلتنی
<i>Haming distance</i>	فاصلهٔ همینگ
<i>handshaking lemma</i>	لم دست دادن
<i>harem problem</i>	مسألهٔ حرمسرا
<i>head</i>	سر
<i>homeomorphic graphs</i>	گراف‌های همسانریخت
<i>horizontal dissector</i>	تفکیک کننده افقی
<i>horizontal graph</i>	گراف افقی
<i>Hungarian method</i>	روش مجارستانی
<i>Husimi tree</i>	درخت هوزیمی
<i>hyper graph</i>	ابـرگراف
<i>hypohamiltonian</i>	درون - همیلتنی
<i>hypomorphic</i>	درون ریخت
<i>hypotraceable</i>	درون - دنبال شدنی



<i>icosahedral graph</i>	گراف بیست وجهی
<i>idempotent latin square</i>	مربع لاتین خودتوان
<i>identical graph</i>	گراف همسان
<i>improvement</i>	بهبود
<i>in-neighbour</i>	همسایه ورودی
<i>incidence function</i>	تابع وقوع
<i>incidence matrix</i>	ماتریس وقوع
<i>incident</i>	واقع
<i>indegree</i>	درجهٔ ورودی

<i>independence number</i>	عدد استقلال
<i>independent set</i>	مجموعه مستقل
<i>induced</i>	القائه شده
<i>induced subgraph</i>	زیرگراف القایی
<i>infinite graph</i>	گراف نامتناهی
<i>infinite region</i>	ناحیه بیکران
<i>initial vertex</i>	رأس ابتدا
<i>inner bridge</i>	پل درونی
<i>instant insanity</i>	جنون آنی
<i>interior of Jordan curve</i>	درون خم ژوردان
<i>intermediate vertices</i>	رأس‌های میانی
<i>internal vertices</i>	رأس‌های داخلی
<i>internally-disjoint paths</i>	مسیرهای مجزای داخلی
<i>intractable problem</i>	مسأله سرکش
<i>irreducible tournament</i>	تورنمنت تحویلناپذیر
<i>isolated vertex</i>	رأس تنها
<i>isomorphic graphs</i>	گراف‌های یکریخت
<i>isomorphism</i>	یکریختی



*Jordan curve*

خم ژوردان

*join*

اتصال



*k-arc-connected digraph*

گراف جهت‌دار  $k$ -همبند کمانی

*k-chromatic graph*

گراف  $k$ -رنگی

*k-connected graph*

گراف  $k$ -همبند

*k-critical graph*

گراف  $k$ -بحرانی

*k-edge colourable graph*

گراف  $k$ -رنگ‌پذیر بالی

*k-factor*

$k$ -عامل

<i>k</i> -factorable graph	گراف <i>k</i> -تجزیه پذیر
<i>k</i> -partite graph	گراف <i>k</i> -بخشی
<i>k</i> -regular graph	گراف <i>k</i> -منتظم
<i>k</i> -uniform matroid	متروید <i>k</i> -یکنواخت
<i>k</i> -vertex colourable graph	گراف <i>k</i> -رنگ پذیر رأسی
Kempe chain	زنجیر کمپ
Kirchhoff's current law	قانون جریان کرشوف
Konigsberg bridges problem	مسألهٔ پل‌های کونیگسبرگ



labelling method	روش برچسب‌زنی
labelling procedure	فرآیند برچسب‌زنی
ladder graph	گراف نردبانی
latin square	مربع لاتین
lattice	مشبک‌ه
lattice graph	گراف مشبک‌ه‌ای
Lee weight	وزن لی
length	طول
line graph	گراف یالی
link	یال پیوندی
linkage	پیوند
locally-countable graph	گراف موضعاً شمارا
locally-finite graph	گراف موضعاً متناهی
longest path problem	مسألهٔ طولانی‌ترین مسیر
loop	طوقه
loopless	بدون طوقه



magic square	مربع وقتی، مربع سحرآمیز
majorised	فراگرفته شده

<i>map colour theorem</i>	قضیه رنگ‌آمیزی نقشه
<i>mapping</i>	نگاشت
<i>Markov chain</i>	زنجیر مارکوف
<i>marriage theorem</i>	قضیه ازدواج
<i>matching</i>	تطابق، جورسازی
<i>matrix-tree theorem</i>	قضیه ماتریس-درخت
<i>matroid</i>	متروید
<i>max flow-min cut theorem</i>	قضیه شمارهٔ ماکزیمم-برش مینیمم
<i>maximum flow</i>	شمارهٔ ماکزیمم
<i>maximum matching</i>	تطابق ماکزیمم
<i>minimization process</i>	فرایند مینیمم‌سازی
<i>minimum covering</i>	پوشش مینیمم
<i>minimum cut</i>	برش مینیمم
<i>mobius strip</i>	نوار موبیوس
<i>multigraph</i>	گراف چندگانه
<i>multiple edges</i>	پال‌های چندگانه
<i>multiplicity</i>	تکرر
<i>mutually disjoint</i>	دوبه‌دو مجزا



<i>neighbour set</i>	مجموعهٔ همسایه
<i>neighborhood</i>	همسایه
<i>network</i>	شبکه
<i>node</i>	گره
<i>nonplanar graph</i>	گراف نامسطح
<i>nontrivial graph</i>	گراف غیربدیهی
<i>null graph</i>	گراف پوچ



<i>octahedral graph</i>	گراف هشت‌وجهی
-------------------------	---------------



<i>odd cycle</i>	دور فرد
<i>one-way infinite walk</i>	گشت یکطرفه - نامتناهی
<i>open walk</i>	گشت باز
<i>optimal assignment problem</i>	مسئله تخصیص بهینه
<i>optimal matching</i>	تطابق بهینه
<i>optimal tour</i>	تور بهینه
<i>optimal tree</i>	درخت بهینه
<i>order</i>	مرتبه
<i>ordered binary tree</i>	درخت دودویی مرتب
<i>Ore's theorem</i>	قضیهٔ اور
<i>orientable</i>	جهت‌پذیر
<i>orientation</i>	جهت دهی
<i>origin of a walk</i>	ابتدای گشت
<i>out-neighbour</i>	همسایه خروجی
<i>outdegree</i>	درجهٔ خروجی
<i>outer bridge</i>	پل بیرونی
<i>outerplanar graph</i>	گراف برون مسطح
<i>outgoing degree</i>	درجهٔ خروجی
<i>overlapping bridges</i>	پل‌های هم‌پوشان



<i>pair inclusion matrix</i>	ماتریس زوج شمولی
<i>pairwise balanced design</i>	طرح زوج - متقارن
<i>pairwise disjoint</i>	دوبه‌دو مجزا
<i>path</i>	مسیر
<i>pendant vertex</i>	رأس آویزان
<i>perfect cube</i>	مکعب تام
<i>perfect graph</i>	گراف تام
<i>perfect matching</i>	تطابق کامل
<i>perfect squared rectangle</i>	مستطیل مربع‌بندی شدهٔ تام
<i>permutation matrix</i>	ماتریس جایگشت

<i>personnel assignment problem</i>	مسأله تخصیص شغل
<i>Peterson graph</i>	گراف پترسن
<i>Philip Hall theorem</i>	قضیه فیلیپ هال
<i>pigeonhole principle</i>	اصل حجره‌ها، اصل لانه کبوتری
<i>planar embedding</i>	نشاندن مسطح
<i>planar graph</i>	گراف مسطح
<i>planarity of graphs</i>	مسطح بودن گراف‌ها
<i>plane graph</i>	گراف مسطح شده
<i>plane triangulation</i>	مثلث‌بندی مسطح‌شده
<i>Platonic graphs</i>	گراف‌های افلاطونی
<i>point of a graph</i>	رأس گراف
<i>polyhedral graph</i>	گراف چندوجهی
<i>polynomial time algorithm</i>	الگوریتم با زمان چندجمله‌ای
<i>potential difference</i>	اختلاف پتانسیل
<i>potentially planar sequence</i>	دنباله بالقوه مسطح
<i>primitive matrix</i>	ماتریس اولیه
<i>printed circuits</i>	مدار چاپی
<i>product of simple graphs</i>	حاصلضرب گراف‌های ساده
<i>(PERT) Program Evaluation and Review Technique</i>	تکنیک ارزیابی و بازنگری برنامه
<i>projective plane</i>	صفحه تصویری
<i>proliferation</i>	تکثیر
<i>proper colouring</i>	رنگ‌آمیزی مجاز
<i>proper face colouring</i>	رنگ‌آمیزی وجهی مجاز
<i>proper labelling</i>	برچسب‌زنی مجاز
<i>proper subgraph</i>	زیرگراف سره
<i>proper vertex colouring</i>	$k$ -رنگ‌آمیزی رأسی مجاز



*quasi-affine design*

طرح شبه آفین

*quasi-symmetric block design*

طرح بلوکی شبه‌متقارن



<i>Ramsey graph</i>	گراف رمزی
<i>Ramsey numbers</i>	اعداد رمزی
<i>random walk</i>	گشت تصادفی
<i>randomly traceable graph</i>	گراف تصادفاً قابل ردیابی
<i>rank</i>	رتبه
<i>reachable vertex</i>	رأس قابل دستیابی
<i>realisable</i>	تحقق پذیر
<i>reconstructible</i>	بازساختنی
<i>reconstruction conjecture</i>	حدس بازسازی
<i>rectangle</i>	مستطیل
<i>recurrence relations</i>	روابط بازگشتی
<i>recursive</i>	بازگشتی
<i>regular graph</i>	گراف منتظم
<i>replication</i>	تکرار
<i>representative</i>	نماینده
<i>residual design</i>	طرح باقی مانده
<i>resolvability</i>	حل پذیری
<i>result flow</i>	شارهٔ برآیند
<i>revised flow</i>	شارهٔ اصلاح شده
<i>rooted tree</i>	درخت ریشه دار



<i>satisfiability</i>	صدق پذیری
<i>score</i>	امتیاز
<i>searching algorithm</i>	الگوریتم جستجو
<i>section of walk</i>	قسمت گشت
<i>segments of a bridge</i>	قطعه‌های پل
<i>saturated</i>	آلوده
<i>self-complementary graph</i>	گراف خود مکمل

<i>self-dual</i>	خوددوگان
<i>semi-Eulerian graph</i>	گراف نیمه‌اولری
<i>semi path</i>	نیم مسیر
<i>seperated</i>	جدا شده
<i>seperating set</i>	مجموعهٔ جداساز
<i>sequence</i>	دنباله
<i>shortest path problem</i>	مسأله کوتاهترین مسیر
<i>signed graph</i>	گراف علامتدار
<i>simple graph</i>	گراف ساده
<i>simplex</i>	سادکی
<i>sink</i>	چاهک
<i>size</i>	اندازه
<i>skew bridges</i>	پل‌های درگیر
<i>source</i>	منبع
<i>spanning subgraph</i>	زیرگراف فراگیر
<i>spanning supergraph</i>	زیرگراف فراگیر
<i>spanning tree</i>	درخت فراگیر
<i>Sperner's lemma</i>	لم اشپرنر
<i>spectrum</i>	طیف
<i>spoke</i>	پره
<i>square lattice</i>	مشبکهٔ مربعی
<i>square of a graph</i>	مجذور گراف
<i>squred rectangle</i>	مستطیل مربع‌بندی شده
<i>standard form of a latin square</i>	صورت متعارف مربع لاتین
<i>star graph</i>	گراف ستاره‌ای
<i>Steiner system</i>	دستگاه اشتاینر
<i>stereographic projection</i>	تصویر استریوگرافیک
<i>Stirling numbers</i>	اعداد استرلینگ
<i>strict digraph</i>	گراف جهت‌دار قوی
<i>strong graph</i>	گراف قوی
<i>strongly-connected digraph</i>	گراف جهت‌دار قویاً همبند
<i>strongly regular graph</i>	گراف قویاً منتظم

<i>subdigraph</i>	زیرگراف جهت‌دار
<i>subdivision graph</i>	گراف مشتق
<i>subdivision of a graph</i>	مشتق گراف
<i>subgraph</i>	زیرگراف
<i>supergraph</i>	زیرگراف
<i>supply</i>	عرضه
<i>support of a function</i>	محمول تابع
<i>surface</i>	سطح
<i>system of distinct representatives</i>	دستگاه نماینده‌های متمایز



<i>tail</i>	دم
<i>Tait colouring</i>	رنگ‌آمیزی تایت
<i>terminus</i>	پایانه
<i>terminus of a walk</i>	انتهای گشت
<i>tetrahedral graph</i>	گراف چهاروجهی
<i>thickness</i>	ضخامت
<i>time complexity function</i>	تابع پیچیدگی زمانی
<i>timetabling problem</i>	مسئله زمان‌بندی
<i>torus</i>	چنبره
<i>total colouring conjecture</i>	حدس رنگ‌آمیزی کلی
<i>total graph</i>	گراف کلی
<i>totally unimodular matrix</i>	ماتریس تماماً یک‌هنگ
<i>tour</i>	تور
<i>tournament</i>	تورنمنت
<i>towers of Hanoi</i>	برج‌های هانوی
<i>trace</i>	اثر
<i>trail</i>	گذرگاه، پیگرد
<i>transferable bridge</i>	پل انتقال‌پذیر
<i>transferring of a bridge</i>	انتقال پل
<i>transition matrix</i>	ماتریس تغییر وضعیت

<i>transitive tournament</i>	تورنمنت تراپا
<i>transversal</i>	ترانسورسال، قاطع
<i>travelling salesman problem</i>	مسأله فروشنده دوره‌گرد
<i>tree</i>	درخت
<i>tree graph</i>	گراف درختی
<i>triangle</i>	مثلث
<i>triangular lattice</i>	مشبکۀ مثلثی
<i>trivial graph</i>	گراف بدیهی
<i>trade</i>	ترید
<i>Tutte graph</i>	گراف تات
<i>two-way infinite walk</i>	گشت دوطرف - نامتناهی



<i>underlying graph</i>	گراف زمینه
<i>underlying simple graph</i>	گراف ساده زمینه
<i>undirected graph</i>	گراف غیرجهت‌دار
<i>unicentral tree</i>	درخت تک‌مرکزی
<i>unicyclic graph</i>	گراف تک‌دور
<i>uniform</i>	یکنواخت
<i>unilateral digraph</i>	گراف جهت‌دار یک‌طرفه
<i>unimodular matrix</i>	ماتریس یک‌هنگ
<i>union of graphs</i>	اجتماع گراف‌ها
<i>uniquely <math>k</math>-colourable</i>	یکتا $k$ -رنگ‌پذیر
<i>uniquely <math>k</math>-edge-colourable</i>	یکتا $k$ -رنگ‌پذیریالی
<i>unordered pair</i>	زوج نامرتب
<i>utility graph</i>	گراف تأسیسات



<i>valency</i>	درجه
<i>value of a flow</i>	مقدار شاره

<i>vertex</i>	رأس
<i>vertex colouring</i>	رنگ آمیزی رأسی
<i>vertex cut</i>	برش رأسی
<i>vertex-disjoint paths</i>	مسیرهای رأس - مجزا
<i>vertex-transitive</i>	رأس - تراپا
<i>vertical graph</i>	گراف عمودی
<i>vertices of attachment</i>	رأس‌های اتصال



<i>walk</i>	گشت
<i>weak edge</i>	یال ضعیف
<i>weakly-connected digraph</i>	گراف جهت‌دار ضعیف - همبند
<i>weight</i>	وزن
<i>weighted graph</i>	گراف وزندار
<i>wheel</i>	چرخ
<i>wheel graph</i>	گراف چرخ



<i>zero-one matrix</i>	ماتریس صفر - یک
<i>zero flow</i>	شمارهٔ صفر

# فهرست راهنما

- آشکار شدن (رنگ در یک رأس)، ۱۲۶  
آلوده، ۹۹  
ابتدای گشت، ۲۷  
اتصال دو گراف، ۸۶  
اختلاف پتانسیل، ۲۷۸  
اشتقاق یال، ۷۰  
اعداد رمزی، ۱۴۲  
القاء شده، ۲۳  
الگوریتم  
خوب، ۳۶  
دایسترا، ۳۴  
فلوری، ۹۱  
کان - مانکرز، ۱۲۰  
انتقال یل، ۱۹۸  
انتهای گشت، ۲۷  
انقباض، ۵۲  
بازساختنی، ۳۱۷  
باند، ۴۸  
برچسب زنی رأسی امکان پذیر، ۱۱۹  
برچسب زنی مجاز، ۳۹  
برش، ۲۵۳  
رأسی، ۶۵  
مینیمم، ۲۵۴  
یالی، ۴۸  
برون خم ژوردان، ۱۸۲  
بستار گراف، ۸۳  
بلوک، ۶۸  
بلوک گراف، ۶۸  
بهبود رنگ آمیزی یالی، ۱۲۷  
پره، ۵۶  
یل، ۱۹۴  
انتقال پذیر، ۱۹۸  
بیرونی، ۱۹۶  
درونی، ۱۹۶  
قابل رسم، ۲۱۶  
یل های  
اجتناب کننده، ۱۹۵  
درگیر، ۱۹۵  
هم پوشان، ۱۹۵  
پوشانه، ۱۴۰  
یالی، ۱۴۰  
پوشش، ۱۰۴  
مینیمم، ۱۰۴  
یالی، ۱۴۰  
پهنای باند، ۳۲۰  
تابع  
ظرفیت، ۲۴۹  
وقوع، ۱۳  
وقوع گراف جهت دار، ۲۲۳  
تحقق پذیر، ۲۶۹  
تراکم، ۲۲۶  
ترکیب گراف های ساده، ۱۴۸  
تصویر استریوگرافیک، ۱۸۴  
تضعیف یال، ۹۲



دور، ۲۹	تطابق، ۹۹
درجه رأس، ۲۴	بهینه، ۱۱۹
درجه خروجی رأس، ۲۲۵	کامل، ۹۹
درجه ورودی رأس، ۲۲۵	ماکزیمم، ۹۹
درخت، ۴۳	تفکیک کننده افقی، ۲۸۸
بهینه، ۵۷	تقاضا، ۲۶۸
فراگیر، ۴۷	تکزر، ۱۳۰
M-متناوب، ۱۱۳	تور، ۷۷
M-اشباع نشده، ۲۵۸	اویلری، ۷۷
درون خم ژوردان، ۱۸۲	اویلری جهت دار، ۲۳۴
درون ریخت، ۳۱۷	بهینه، ۹۱
درون - همیلتنی، ۸۹	جهت دار، ۲۲۴
دستگاه نماینده‌های متمایز، ۱۰۶	تورنمنت، ۲۲۸
دم کمان، ۲۲۳	جدا شده (وجه توسط یال)، ۱۸۷
دنباله	جنگل، ۴۵
اجباراً همیلتنی، ۳۲۱	جهت پذیر، ۲۷۴
درجه‌ها، ۲۵	جهت دهی، ۲۲۳
بالتوجه مسطح، ۳۲۵	چاهک، ۲۴۹
گرافی، ۲۶	چرخ، ۵۶
دور، ۲۹	چند جمله‌ای رنگی، ۱۷۱
بهینه، ۹۴	حاصل ضرب گراف‌های ساده، ۱۳۱
جهت دار، ۲۲۴	حدس
زوج، ۲۹	بازسازی یالی، ۳۱۷
فرد، ۲۹	بازسازی، ۳۱۷
همیلتنی جهت دار، ۲۳۲	چهار رنگ، ۲۰۸
همیلتنی، ۷۹	رنگ آمیزی کلی، ۳۲۴
دوگان، ۱۸۷	قوی گراف تام، ۳۲۴
رأس، ۱۳	هایوش، ۱۶۶
رأس - تراپا، ۲۰	خم ژوردان، ۱۸۲
رأس قابل دستیابی، ۲۲۴	خوددوگان، ۱۹۰
رأس‌های	خودریختی، ۲۰
اتصال، ۱۹۴	خوشه، ۱۴۲

برآیند خروجی، ۲۵۱	داخلی، ۲۷
برآیند ورودی، ۲۵۱	مجاور، ۱۶
صفر، ۲۵۰	میانی، ۲۴۹
ماکزیمم، ۲۵۱	رنگ آمیزی
شبکه، ۲۴۹	تایت، ۲۱۰
شرط بقا، ۲۵۰	کانونی، ۱۷۹
ضخامت، ۱۹۳	مجاز، ۱۲۵
طوقه، ۱۶	وجهی مجاز، ۲۰۸
طول	وجهی، ۲۰۸
گشت، ۲۷	یالی بهینه، ۱۲۷
مسیر، ۳۲	رنگ آمیزی های موافق، ۱۶۱
ظرفیت	روش برچسب زنی، ۲۵۸
برش، ۲۵۳	روش مجارستانی، ۱۱۵
کمان، ۲۴۹	زبرگراف، ۲۲
عدد استقلال، ۱۴۰	فراگیر، ۲۲
یالی، ۱۴۰	زیر تقسیم ساده، ۳۸
عدد بستگی، ۳۲۲	زیرگراف، ۲۲
عدد رمزی تعمیم یافته، ۱۴۸	القایی یالی، ۲۳
عدد رنگی، ۱۵۹	القایی، ۲۳
سطح، ۳۱۳	تساوی، ۱۱۹
وجهی، ۲۰۸	جهت دار، ۲۲۳
یالی، ۱۲۶	سره، ۲۲
عرضه، ۲۶۸	فراگیر، ۲۲
عکس گراف جهت دار، ۲۲۶	زیرگراف های
غلبه، ۲۵۹	مجزا، ۲۴
فاصله در گراف، ۲۹	یال - مجزا، ۲۴
جهت دار، ۲۴۳	سر
وزندار، ۳۲	کمان، ۲۲۳
فرآیند برچسب زنی، ۲۵۸	یال، ۱۳
فرا گرفته شده، ۸۶	شاره، ۲۵۰
فرا گرفته درجه ای، ۸۶	اصلاح شده، ۲۵۶
فرمول اوپلر، ۱۹۱	امکان پذیر، ۲۶۸

فضای باندها، ۲۸۰	افلاطونی، ۳۰۴
فضای دورها، ۲۷۸	اویلری، ۷۷
قابل نشانیدن روی یک سطح، ۱۸۴	باشکوه، ۳۲۰
قانون جریان کرشپف، ۲۹۰	بحرانی، ۱۶۰
قسمت از گشت، ۲۷	بدیهی، ۱۶
قضیهٔ	بی‌دور، ۴۳
ازدواج، ۱۰۴	پترسن، ۳۰۶
پنج رنگ، ۲۰۶	تات - کاکستر، ۳۰۷
خم ژوردان، ۱۸۲	تام، ۳۲۴
رنگ آمیزی نقشه، ۳۱۵	توماسن، ۳۱۰
شمارهٔ ماکزیمم - برش مینیمم، ۲۵۸	تهی، ۱۸
شور، ۱۵۲	تیتسه، ۳۱۴
ماتریس - درخت، ۲۸۶	چویتال، ۳۱۲
منجر، ۷۰	خود مکمل، ۲۰
نقطه ثابت براور، ۳۸	درختی، ۶۲
قطر، ۲۹	درون - دنبال شدنی، ۸۹
جهت‌دار، ۲۴۳	دوبخشی، ۱۸
مجموعه‌ای از نقاط در صفحه، ۱۵۴	دوبخشی کامل، ۱۸
قطعه‌های پل، ۱۹۵	رابرتسن، ۳۰۷
قفس، ۳۰۶	رابرتسن - وگنر، ۳۰۸
قید ظرفیت، ۲۵۰	رمزی، ۱۴۵
کمان، ۲۲۳	زمینهٔ گراف جهت‌دار، ۲۲۳
f- اشباع شده، ۲۵۴	ساده، ۱۶
f- اشباع نشده، ۲۵۴	سادهٔ زمینه، ۲۲
f- صفر، ۲۵۴	عمودی، ۲۹۲
f- مثبت، ۲۵۴	غیربدیهی، ۱۶
کمر، ۳۱	فالكمن، ۳۰۵
گذرگاه، ۲۷	فرانکلین، ۳۱۵
اویلری، ۷۷	قابل نشانیدن، ۱۸۱
جهت‌دار، ۲۲۴	کاکستر، ۳۱۱
گراف، ۱۳	کامل، ۱۷
افقی، ۲۹۰	گرن باوم، ۳۱۲

- قوی، ۲۲۵
- وابسته، ۲۳۴
- یک طرفه، ۲۲۹
- گردش، ۲۷۷
- روی یک میدان، ۲۸۴
- گروه خود ریختی، ۲۰
- گشت، ۲۶
- بسته، ۲۹
- جهت دار، ۲۲۴
- لم اشپرنر، ۳۹
- ماتریس
- اولیه، ۲۴۴
- پایه، ۲۸۱
- پایه متناظر با یک درخت، ۲۸۳
- تصادفی مضاعف، ۱۰۶
- تماماً یک هنگ، ۲۸۷
- جایگشت، ۱۰۶
- وقوع گراف جهت دار، ۲۸۰
- وقوع، ۲۱
- هدایت، ۲۸۷
- یک هنگ، ۲۸۴
- مثلث، ۲۹
- متشخص، ۳۹
- مثلث بندی مسطح شده، ۱۹۰
- مجموعه
- مستقل، ۱۳۹
- مستقل ماکزیمم، ۱۳۹
- همسایه، ۱۰۲
- مَحْمِل تابع، ۲۸۱
- مختصات مرکز ثقل، ۴۰
- مرتبه مستطیل مربع بندی شده، ۲۸۷
- مرکز گراف، ۴۵
- گری، ۳۰۶
- گرین وود-گلیسن، ۳۱۳
- متناهی، ۱۶
- مردیت، ۳۰۹
- مسطح، ۱۸۱
- مسطح شده، ۱۸۱
- مک گی، ۳۰۷
- منتظم، ۲۵
- ناهمبند، ۲۸
- وزندار، ۳۱
- هافمن-سینگلتن، ۳۰۹
- هرتن، ۳۱۰
- همبند، ۲۸
- همسان، ۱۶
- همیلتن-همبند، ۸۹
- همیلتنی، ۸۰
- هیوود، ۳۰۶
- یالی، ۲۶
- یکتا  $k$ -رنگ پذیر، ۱۶۴
- یکریخت، ۱۷
- $a$ -بحرانی، ۱۴۲
- $b$ -بحرانی، ۱۴۲
- $k$ -بحرانی، ۷۲
- $k$ -بحرانی، ۱۶۰
- $k$ -بخشی، ۱۹
- $k$ -بخشی کامل، ۱۹
- $k$ -رنگی، ۱۵۹
- $k$ -منتظم، ۲۵
- $k$ -همبند، ۶۶
- گراف جهت دار، ۲۲۳
- قویاً همبند، ۲۲۵
- $k$ -همبند کمانی، ۲۳۴

مؤلفه‌های قوی، ۲۲۵	مزدوج، ۲۷۲
مؤلفه، ۲۸	مسأله
زوج، ۱۰۷	پستچی چینی، ۹۰
فرد، ۱۰۷	تخصیص بهینه، ۱۱۹
نشانندن، ۱۸۴	تخصیص شغل، ۱۱۲
مسطح، ۱۸۱	چهاررنگ، ۲۰۸
G-مجاز، ۲۱۵	زمان بندی، ۱۳۲
نظریه گراف‌های اکسترمال، ۱۴۹	فروشنده دوره گرد، ۹۴
واقع	کوتاهترین مسیر، ۳۲
وجه روی یال یا رأس، ۱۸۷	ارتباط دهی با مقادیر اولیه، ۶۲
یال روی رأس، ۱۶	ارتباط دهی، ۵۶
وجه، ۱۸۶	مستطیل مربع بندی شده، ۲۸۷
بیرونی، ۱۸۷	ساده، ۲۸۸
وزن	تام، ۲۸۷
تور، ۹۱	مسطح، ۱۵
یال، ۳۱	مسیر، ۲۷
همبندی، ۶۶	جهت دار، ۲۲۴
یالی، ۶۶	همیلتنی جهت دار، ۲۲۸
همدرخت، ۴۸	همیلتنی، ۷۹
همسایه	M-افزوده، ۱۰۰
خروجی، ۲۲۹	M-متناوب، ۱۰۰
ورودی، ۲۲۹	f-اشباع شده، ۲۵۶
یال، ۱۳	f-اشباع نشده، ۲۵۶
برشی، ۴۶	f-افزایشی، ۲۵۶
پیوندی، ۱۶	مسیرهای مجزای داخلی، ۶۸
یال-تراپا، ۲۰	مشتق گراف، ۱۶۶
یال‌های مجاور، ۱۶	مقدار شماره، ۲۵۱
یکتا k-رنگ پذیر یالی، ۱۳۱	مکعب تام، ۲۹۳
یکریختی، ۱۷	مکمل
k-مؤلفه، ۱۶۱	زیرگراف، ۴۸
k-برش رأسی، ۶۵	گراف، ۲۰
k-برش یالی، ۶۶	منبع، ۲۴۹

- $k$ -پل، ۱۹۵  
 $k$ -پل‌های هم‌ارز، ۱۹۵  
 $k$ -تجزیه پذیر، ۱۰۱  
 $k$ -رنگ آمیزی  
 رأسی، ۱۵۹  
 رأسی مجاز، ۱۵۹  
 یالی، ۱۲۵  
 $k$ -رنگ پذیر  
 رأسی، ۱۵۹  
 وجهی، ۲۰۸  
 یالی، ۱۲۵  
 $k$ -رنگی یالی، ۱۲۶  
 $k$ -عامل، ۱۰۱  
 $k$ -مکعب، ۱۹  
 $k$ -همبند یالی، ۶۶  
 $\{u, v\}$ -مؤلفه  
 نوع ۱، ۱۶۲  
 نوع ۲، ۱۶۲