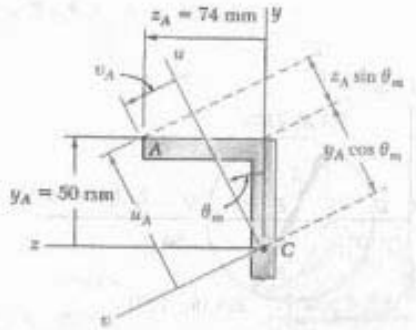
با در نظر گرفتن خمش حول هر محور اصلی به‌طور جداگانه، دیده می‌شود که $\mathbf{M}_u$ در نقطهٔ A ایجاد کشش، و $\mathbf{M}_v$ در همان نقطه ایجاد فشار می‌کند.

$$\sigma_A = +\frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_v}$$

$$= +\frac{(۹۷۲ \text{ N.m})(۰/۰۲۳۹ \text{ m})}{۰/۸۱۰ \times ۱۰^{-۶} \text{ m}^۴} - \frac{(۱۱۴۲ \text{ N.m})(۰/۰۸۶۰ \text{ m})}{۶/۶۳ \times ۱۰^{-۶} \text{ m}^۴}$$

$$= +(۲۸/۶۸ \text{ MPa}) - (۱۴/۸۱ \text{ MPa})$$

$$\sigma_A = +۱۳/۸۷ \text{ MPa} \blacktriangleleft$$



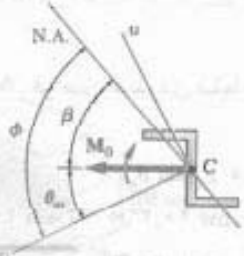
ب. محور خنثی. با استفاده از معادله (۴-۵۷)، زاویه ϕ بین محور خنثی و محور v را می‌یابیم.

$$\tan\phi = \frac{I_v}{I_u}\tan\theta_m = \frac{۶/۶۳}{۰/۸۱۰}\tan ۴۰/۴^\circ \Longrightarrow \phi = ۸۱/۸^\circ$$

زاویه β بین محور خنثی و افق چنین است:

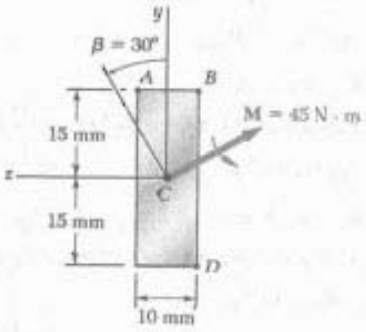
$$\beta = \phi - \theta_m = ۸۱/۸^\circ - ۴۰/۴^\circ = ۴۱/۴^\circ$$

$$\beta = ۴۱/۴^\circ \blacktriangleleft$$

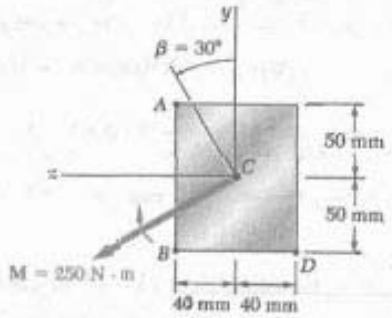


مسائل

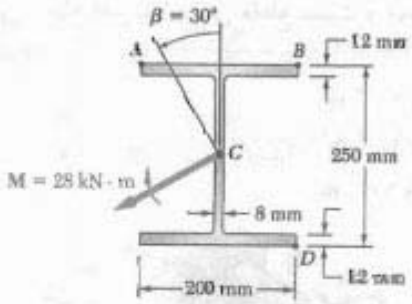
۴-۱۲۶ تا ۴-۱۲۸ کوپل $\mathbf{M}$ بر تیر، با مقطع عرضی نشان داده شده، در صفحه‌ای که با عمود زاویه β دارد وارد شده است. مطلوبست: (الف) تنش در A، (ب) تنش در B، (ج) تنش در D.



شکل م۴-۱۲۶



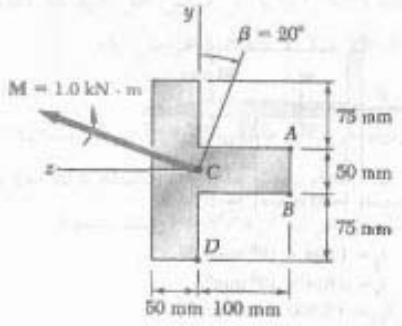
شکل م۴-۱۲۷



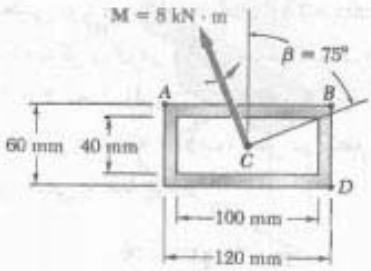
شکل م۴-۱۲۸

۴-۱۲۹ تا ۴-۱۳۱ کوپل $\mathbf{M}$ بر تیر، با مقطع عرضی نشان داده شده، در صفحه‌ای که با عمود زاویه β دارد وارد شده است. مطلوبست: (الف) تنش در A، (ب) تنش در B، (ج) تنش در D.

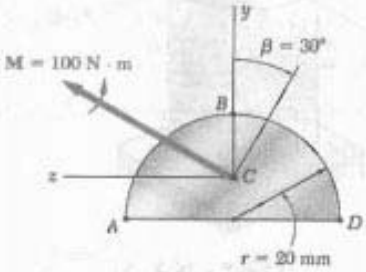
RuEB



شکل م۴-۱۲۹

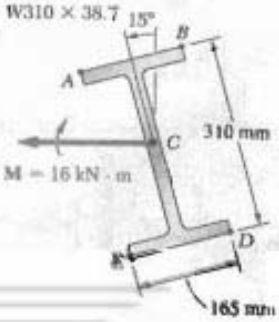


شکل م۴-۱۳۰



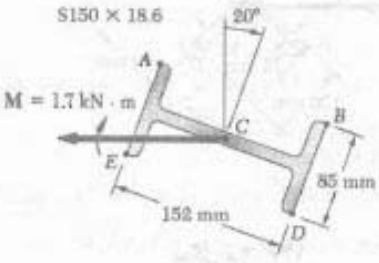
شکل م۴-۱۳۱

۴-۱۳۲ کوپل **M** در یک صفحه قائم بر تیر در وضعیت نشان داده شده وارد شده است. مطلوبست: (الف) زاویه‌ای که محور خنثی با صفحه افق می‌سازد، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.

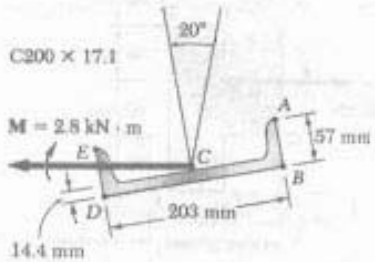


شکل م۴-۱۳۲

۴-۱۳۳ و ۴-۱۳۴ کوپل **M** در یک صفحه عمودی بر تیر در وضعیت نشان داده شده اعمال شده است. مطلوبست: (الف) زاویه محور خنثی با صفحه افق، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.

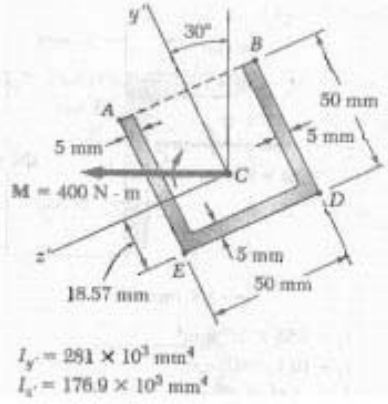


شکل م۴-۱۳۳



شکل م۴-۱۳۴

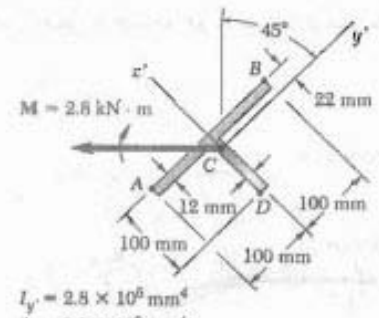
۴-۱۳۵ تا ۴-۱۳۷ کوپل **M** در یک صفحه عمودی بر تیر در وضعیت نشان داده شده اعمال شده است. مطلوبست: (الف) زاویه محور خنثی با صفحه افق، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.



$I_y = 281 \times 10^3\ \text{mm}^4$
$I_z = 176.9 \times 10^3\ \text{mm}^4$

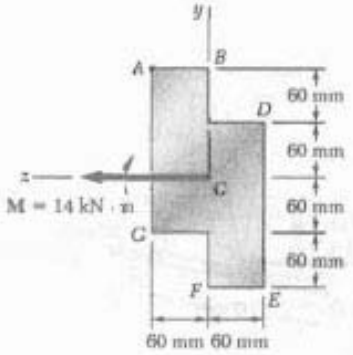
شکل م۴-۱۳۵

RNuEB



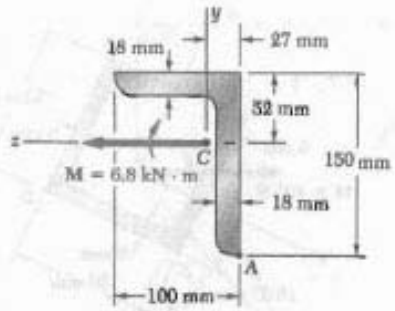
$I_{y'} = 2.8 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$I_{z'} = 8.9 \times 10^6\ \text{mm}^4$

شکل م۴-۱۳۶



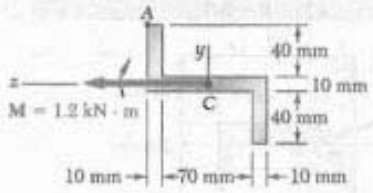
شکل م۴-۱۳۷

۴-۱۳۸ و ۴-۱۳۹ کوپل M در یک صفحه عمودی بر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده اعمال شده است. تنش را در نقطه A بیابید.



$I_y = 3.65 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$I_z = 10.1 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$I_{yz} = 3.45 \times 10^6\ \text{mm}^4$

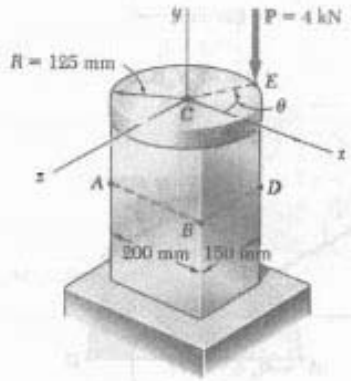
شکل م۴-۱۳۸



$I_y = 1.894 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$I_z = 0.614 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$I_{yz} = +0.800 \times 10^6\ \text{mm}^4$

شکل م۴-۱۳۹

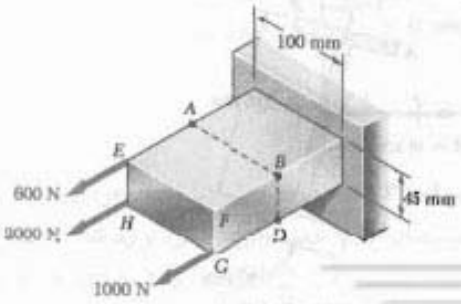
۴-۱۴۰ یک ورق صلب دایره‌ای با شعاع ۱۲۵ mm به تیر مستطیلی توپری با ابعاد ۱۵۰ mm × ۲۰۰ mm متصل شده است. مرکز ورق در بالای مرکز تیر قرار دارد. اگر نیروی P = ۴ kN تحت زاویه $\theta = 30°$ در E وارد شود، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A، (ب) تنش در نقطه B، (ج) نقطه تلاقی محور خنثی با خط ABD.



شکل م۴-۱۴۰

۴-۱۴۱ در مسئله ۴-۱۴۰، مطلوبست: (الف) مقدار θ که به ازای آن تنش در D به بیشترین مقدار می‌رسد، (ب) مقادیر متناظر تنش در A، B، C و D.

۴-۱۴۲ برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش در نقاط A و B، (ب) نقطه تقاطع محور خنثی با خط ABC.

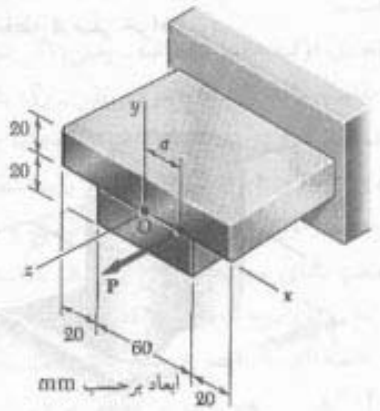


شکل م۴-۱۴۲

RuEB

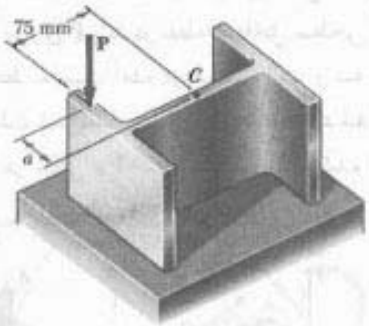
۴-۱۴۳ مسئله ۴-۱۴۲ را با این فرض حل کنید که مقدار نیروی وارده در G از ۱٫۰ kN به ۱٫۶ kN افزایش یابد.

۴-۱۴۴ نیروی افقی **P** با مقدار ۱۰۰ kN بر تیر نشان داده شده اعمال شده است. مطلوبست ماکزیمم فاصله a که به‌ازای آن ماکزیمم تنش کششی در تیر از ۷۵ MPa بیشتر نشود.



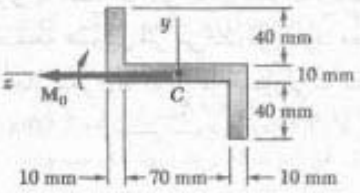
شکل م۴-۱۴۴

۴-۱۴۵ بار محوری **P** با مقدار ۵۰ kN، مطابق شکل، بر قسمت کوتاهی از عضو فولادی نورد شده W ۱۵۰ × ۲۴ وارد شده است. مطلوبست ماکزیمم فاصله a که به ازای آن ماکزیمم تنش فشاری از ۹۰ MPa بیشتر نشود.



شکل م۴-۱۴۵

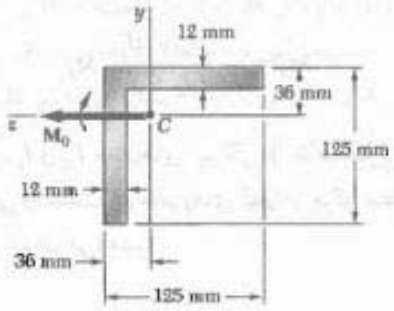
۴-۱۴۶ مقطع 2 نشان داده شده تحت کوپل $\mathbf{M}_0$، که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوبست ماکزیمم مقدار مجاز لنگر M_0 کوپل در صورتی که بخواهیم ماکزیمم تنش از ۸۰ MPa بیشتر نشود. داده: $I_{max} = ۲٫۲۸ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^۴$، $I_{min} = ۰٫۲۳ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^۴$، محورهای اصلی ... و ۶۴٫۳°



شکل م۴-۱۴۶

۴-۱۴۷ مسئله ۴-۱۴۶ را با این فرض حل کنید که کوپل $\mathbf{M}_0$ در یک صفحه افقی وارد شود.

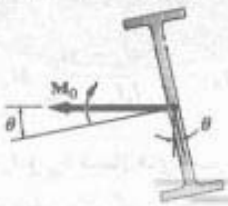
۴-۱۴۸ تیری با مقطع عرضی نشان داده شده تحت کوپل $\mathbf{M}_0$، که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوبست ماکزیمم مقدار مجاز لنگر M_0 کوپل در صورتی که بخواهیم ماکزیمم تنش در تیر از ۸۴ MPa بیشتر نشود. داده: $I_y = I_z = ۴٫۷ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^۴$، $A = ۳۰۶۴ \text{ mm}^۲$، $k_{min} = ۲۵ \text{ mm}$ (راهنمایی: باتوجه به تقارن، محورهای اصلی با محورهای مختصات زاویه ۴۵° دارند. از روابط $I_{min} = Ak^۲_{min}$ و $I_{min} + I_{max} = I_y + I_z$ استفاده کنید).



شکل م۴-۱۴۸

۴-۱۴۹ مسئله ۴-۱۴۸ را با این فرض حل کنید که کوپل $\mathbf{M}_0$ در صفحه افق وارد شود.

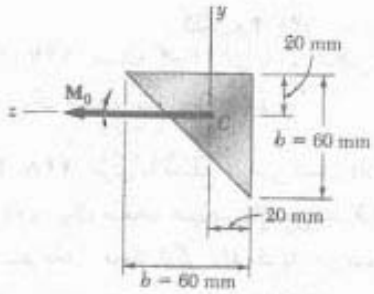
۴-۱۵۰ کوپل $\mathbf{M}_0$ در یک صفحه عمودی بر تیر فولادی نورد شده W ۳۱۰ × ۲۳٫۸ وارد شده است. جان تیر با عمود زاویه θ دارد. اگر تنش ماکزیمم در تیر را برای $\theta = ۰$ با σ_0 نشان دهیم، زاویه میل θ تیر را که به‌ازای آن تنش ماکزیمم $۲\sigma_0$ است بیابید.



شکل م۴-۱۵۰

RuEB

۴-۱۵۱ تیری با مقطع عرضی نشان داده شده تحت کوپل $\mathbf{M}_0$، که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوبست ماکزیمم مقدار مجاز لنگر M_0 کوپل در صورتی‌که بخواهیم ماکزیمم تنش از ۱۰۰ MPa بیشتر نشود. داده: $I_y = I_z = b^4/36$ و $I_{yz} = b^4/72$.

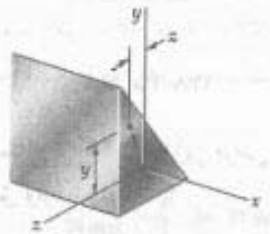


شکل م۴-۱۵۱

۴-۱۵۲ تیری با مقطع عرضی نامتقارن تحت کوپل $\mathbf{M}_0$، که در صفحه عمودی xy اثر می‌کند، قرار دارد. نشان دهید که تنش در نقطه A، با مختصات y و z، چنین است:

$$\sigma_A = -\frac{yI_y - zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2} M_z$$

که در آن I_y، I_z و I_{yz} ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی مقطع عرضی را نسبت به محورهای گذرا از مرکز سطح، و M_z لنگر کوپل را نشان می‌دهد.



شکل م۴-۱۵۲ و م۴-۱۵۳

۴-۱۵۳ تیری با مقطع عرضی نامتقارن تحت کوپل $\mathbf{M}_0$، که در صفحه افقی xz اثر می‌کند، قرار دارد. نشان دهید که تنش در نقطه A چنین است:

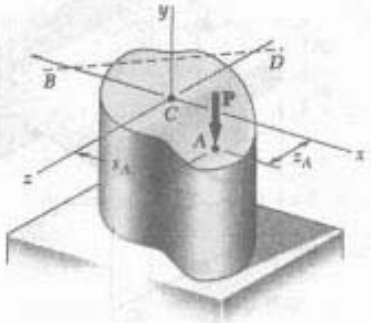
$$\sigma_A = -\frac{zI_z - yI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2} M_y$$

که در آن I_y، I_z و I_{yz} ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی را نسبت به محورهای گذرا از مرکز سطح، و M_y لنگر کوپل را نشان می‌دهد.

۴-۱۵۴ (الف) نشان دهید که، اگر نیروی عمودی $\mathbf{P}$ در نقطه A مقطع نشان داده شده وارد شود، معادله محور خنثی BD عبارت است از:

$$\left(\frac{x_A}{k_z^2}\right)x + \left(\frac{z_A}{k_x^2}\right)z = -1$$

که در آن k_z و k_x شعاع ژیراسیون مقطع عرضی را، به‌ترتیب، نسبت به محورهای z و x نشان می‌دهند. (ب) به‌علاوه، نشان دهید که اگر نیروی عمودی $\mathbf{Q}$ در نقطه‌ای روی خط BD اعمال شود، تنش در نقطه A صفر خواهد بود.

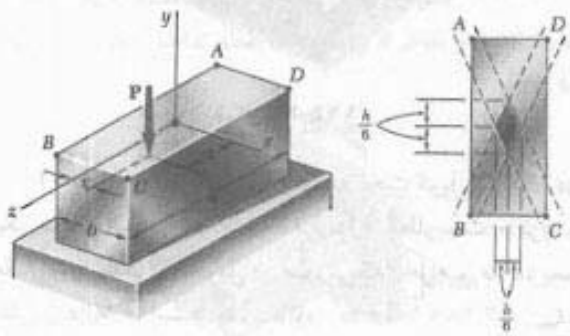


شکل م۴-۱۵۴

۴-۱۵۵ (الف) نشان دهید که تنش در گوشه A عضو منشوری نشان داده شده در شکل م۴-۱۵۵الف صفر خواهد بود هرگاه نیروی عمودی $\mathbf{P}$ در نقطه‌ای روی خط زیر اعمال شود:

$$\frac{x}{b/6} + \frac{z}{h/6} = 1$$

(ب) به‌علاوه، نشان دهید که اگر بخواهیم تنش کششی در عضو ایجاد نشود، نیروی $\mathbf{P}$ باید در نقطه‌ای داخل سطحی اعمال شود که توسط خط به‌دست آمده در قسمت الف و سه خط مشابه متناظر با حالت تنش صفر در B، C و D محدود شده است. این سطح را، که در شکل م ۴-۱۵۵ب نشان داده شده است، هسته مقطع عرضی می‌گویند.



(الف) (ب)

شکل م۴-۱۵۵

PNuEB