با استفاده از معادله (۲)، مقدار T_2 را محاسبه می‌کنیم و سپس ماکزیمم تنش برشی را در شفت فولادی می‌یابیم.

$$T_2 = ۰٫۸۷۴\, T_1 = ۰٫۸۷۴\,(۳۶۹۰) = ۳۲۲۵\ \text{N.m}$$

$$\tau_{\text{فولاد}} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(۳۲۲۵\ \text{N.m})(۰٫۰۲۵\ \text{m})}{۰٫۶۱۴\times۱۰^{-۶}\ \text{m}^4} = ۱۳۱٫۳\ \text{MPa}$$

دیده می‌شود که مقدار بالا از تنش مجاز فولاد (۱۲۰ MPa) بیشتر است؛ لذا، فرض ما اشتباه است. بنابراین، گشتاور ماکزیمم $\mathbf{T}_0$ را با استفاده از $\tau_{\text{فولاد}} = ۱۲۰\ \text{MPa}$ به‌دست می‌آوریم. ابتدا، گشتاور $\mathbf{T}_2$ را می‌یابیم:

$$T_2 = \frac{\tau_{\text{فولاد}} J_2}{c_2} = \frac{(۱۲۰\ \text{MPa})(۰٫۶۱۴\times۱۰^{-۶}\ \text{m}^4)}{۰٫۰۲۵\ \text{m}} = ۲۹۵۰\ \text{N.m}$$

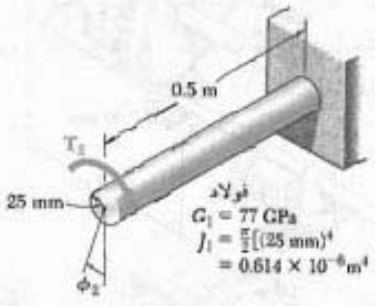
از معادله (۲)،

$$۲۹۵۰\ \text{N.m} = ۰٫۸۷۴\, T_1 \Longrightarrow T_1 = ۳۳۷۵\ \text{N.m}$$

با استفاده از معادله (۱)، ماکزیمم گشتاور مجاز را به‌دست می‌آوریم:

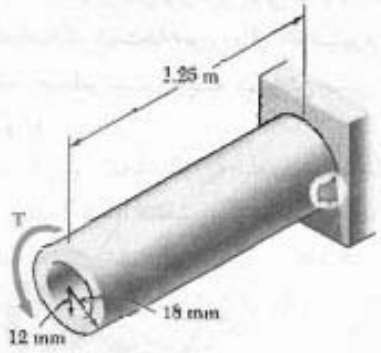
$$T_0 = T_1 + T_2 = ۳۳۷۵\ \text{N.m} + ۲۹۵۰\ \text{N.m}$$

$T_0 = ۶٫۳۲۵\ \text{kN.m}$ ◀



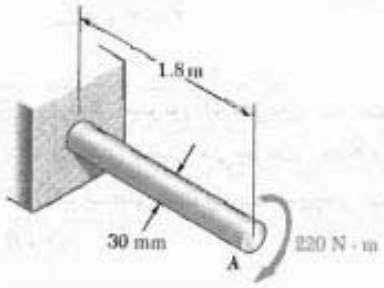
مسائل

۳-۳۱ برای شفت آلومینیومی نشان داده شده ($G = ۲۷\ \text{GPa}$)، مطلوبست: (الف) گشتاور $\mathbf{T}$ که باعث زاویه پیچش ۴° می‌شود، (ب) زاویه پیچشی که همان گشتاور $\mathbf{T}$ را در شفت توپر استوانه‌ای با همان طول و سطح مقطع عرضی ایجاد می‌کند.



شکل م۳-۳۱

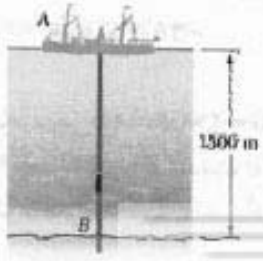
۳-۳۲ (الف) برای شفت توپر فولادی نشان داده شده ($G = ۷۷\ \text{GPa}$)، زاویه پیچش را در A بیابید. (ب) قسمت الف را با این فرض حل کنید که شفت فولادی دارای قطر خارجی ۳۰ mm و قطر داخلی ۲۰ mm است.



شکل م۳-۳۲

۳-۳۳ مطلوبست ماکزیمم قطر مجاز میله فولادی ($G = ۷۷\ \text{GPa}$) به طول ۳ m درصورتی که بخواهیم تنش برشی ایجاد شده در میله بر اثر پیچش ۳۰° از ۸۰ MPa بیشتر نشود.

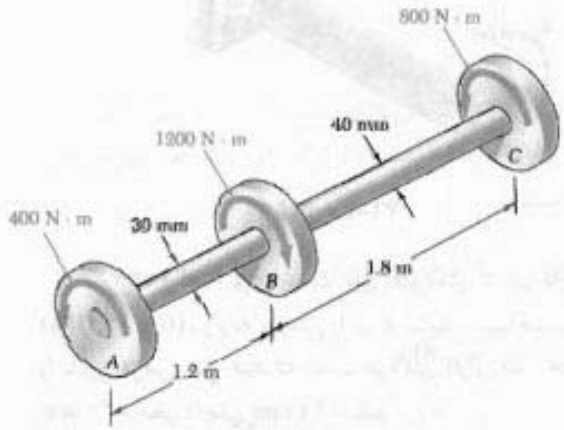
۳-۳۴ یک کشتی، از نقطه A، عملیات حفاری نفت را از کف اقیانوسی به عمق ۵۰۰۰ ft شروع کرده است. اگر نوک لوله مته فولادی ($G = ۷۷٫۲\ \text{GPa}$) به قطر ۲۰۰ mm قبل از شروع عملیات سرمته B دو دور کامل بزند، ماکزیمم تنش برشی در لوله را بر اثر پیچش بیابید.



شکل م ۳-۳۴

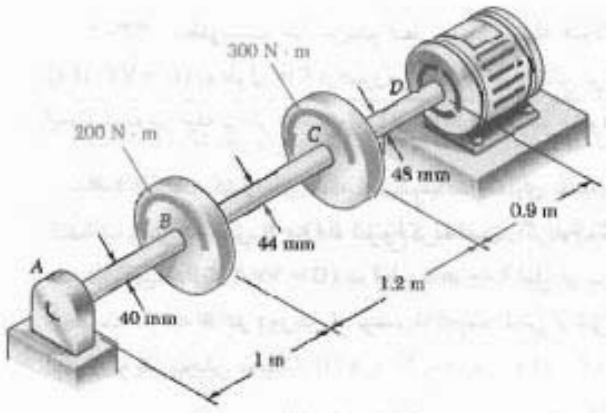
RuEB

۳-۳۵ گشتاورهای وارده بر پولی‌های A و B در شکل نشان داده شده‌اند. اگر شفت‌ها توپر و از آلومینیوم ($G = 39$ GPa) باشند، مطلوبست زاویه پیچش بین: (الف) A و B، (ب) A و C.



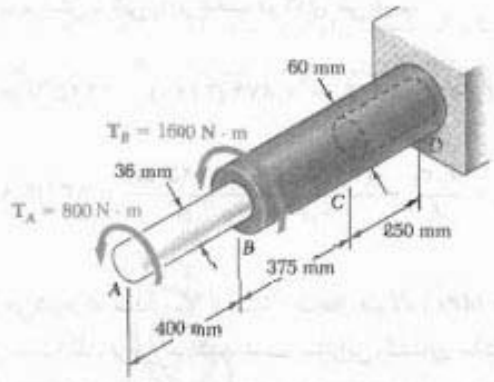
شکل م ۳-۳۵

۳-۳۶ گشتاور وارده از موتور الکتریکی به شفت آلومینیومی $ABCD$، که با تندی ثابت می‌چرخد، ۵۰۰ N.m است. اگر $G = 27$ GPa، مطلوبست زاویه پیچش بین: (الف) B و C، (ب) B و D



شکل م ۳-۳۶

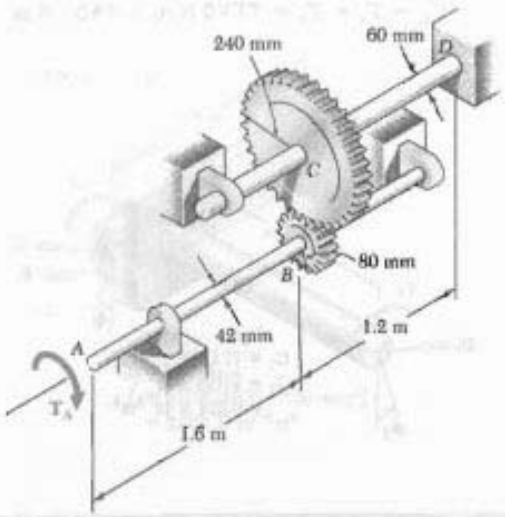
۳-۳۷ میله آلومینیومی AB ($G = 27$ GPa) به میله برنجی BD ($G = 39$ GPa) متصل است. اگر قسمت CD از میله برنجی توخالی و دارای قطر داخلی ۴۰ mm باشد، زاویه پیچش A را بیابید.



شکل م ۳-۳۷

۳-۳۸ مسئله ۳-۳۷ را با این فرض حل کنید که قسمت BD به‌صورت یک میله توپر به قطر ۶۰ mm و به‌طول ۶۲۵ mm باشد.

۳-۳۹ دو شفت توپر فولادی ($G = 77.2$ GPa) توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به‌هم متصل شده‌اند. زاویه چرخش انتهای A را بر اثر اعمال $T_A = 1200$ N.m بیابید.

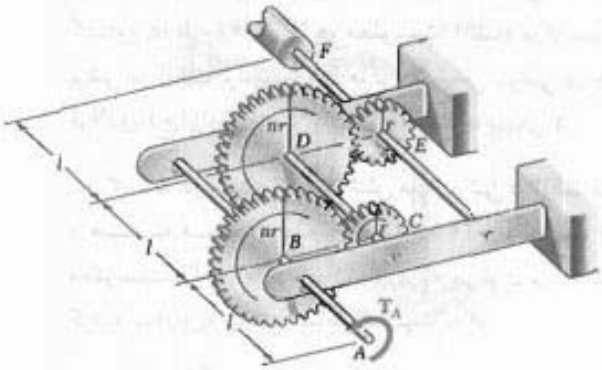


شکل م۳-۳۹

۳-۴۰ مسئله ۳-۳۹ را با این فرض حل کنید که قطر هر شفت ۵۲ mm است.

FUEB

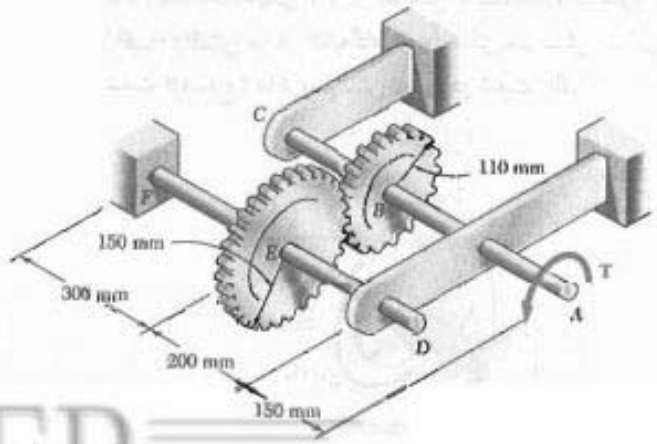
۳-۴۱ کدگذار F، که برای ثبت دیجیتالی چرخش شفت A به‌کار می‌رود، توسط زنجیره چرخ‌دنده‌ای نشان داده شده به این شفت متصل شده است. زنجیره از چهار چرخ‌دنده و سه شفت توپر فولادی، هر کدام به قطر d، تشکیل شده است. دو تا از چرخ‌دنده‌ها به شعاع r و دو تای دیگر به شعاع nr هستند. اگر از چرخش کدگذار F جلوگیری شود، زاویه چرخش انتهای A را برحسب T، l، G، J و n بیابید.



شکل م ۳-۴۱

۳-۴۲ برای زنجیره چرخ‌دنده‌ای در مسئله ۳-۴۳، زاویه چرخش انتهای A را برای $T = ۰٫۷۵$ N.m، $l = ۶۰$ mm، $d = ۴$ mm، $G = ۷۷$ GPa و $n = ۲$ بیابید.

۳-۴۳ دو شفت، هر یک به قطر ۲۲ mm، توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل شده‌اند. اگر $G = ۷۷$ GPa و شفت در F ثابت باشد، زاویه چرخش انتهای A را بر اثر اعمال گشتاور ۱۳۰ N.m بیابید.



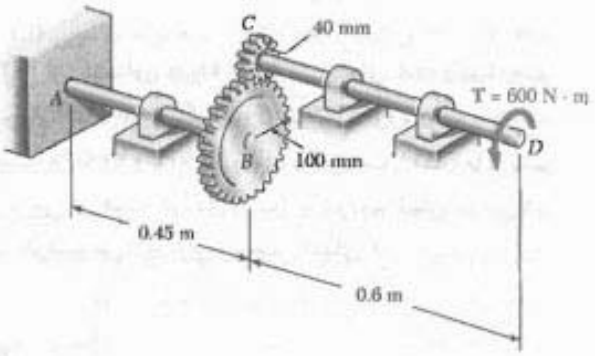
شکل م ۳-۴۳

۳-۴۴ مسئله ۳-۴۱ را با این فرض حل کنید که شعاع چرخ‌دنده B برابر با ۱۵۰ mm و شعاع چرخ‌دنده E برابر با ۱۱۰ mm باشد.

۳-۴۵ مشخصه‌های طراحی یک شفت توپر استوانه‌ای به طول ۲ m ایجاب می‌کند که وقتی شفت تحت گشتاور ۷ kN.m قرار می‌گیرد، زاویه پیچش آن از ۰٫۵° بیشتر نشود. مطلوبست قطر شفت، در صورتی که شفت: (الف) از فولاد با تنش برشی مجاز ۸۷ MPa و مدول صلابت ۷۷ GPa تشکیل شده باشد.

۳-۴۶ مشخصه‌های طراحی یک شفت توپر استوانه‌ای به طول ۱٫۲ m ایجاب می‌کند که وقتی شفت تحت گشتاور ۷۵۰ N.m قرار می‌گیرد، زاویه پیچشی آن از ۴° بیشتر نشود. مطلوبست قطر شفت، در صورتی که شفت از فولاد با تنش برشی مجاز ۹۰ MPa و مدول صلابت ۷۷٫۲ GPa تشکیل شده باشد.

۳-۴۷ طراحی سیستم چرخ‌دنده-شفت نشان داده شده ایجاب می‌کند که شفت‌های فولادی AB و CD دارای قطر یکسان باشند، و نیز $\tau_{max} \leq ۵۵$ MPa و زاویه چرخش انتهای D از شفت CD بیشتر از ۲° نشود. اگر $G = ۷۷$ GPa، قطر مورد نیاز شفت‌ها را بیابید.



شکل م ۳-۴۷ و م ۳-۴۸

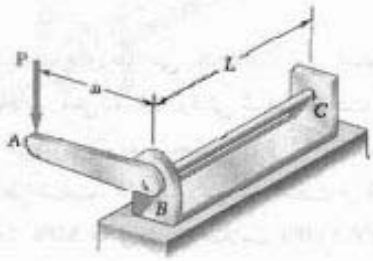
۳-۴۸ در مجموعه نشان داده شده، قطر شفت‌ها عبارتند از $d_{AB} = ۵۰$ mm و $d_{CD} = ۳۸$ mm. اگر $G = ۷۷$ GPa، زاویه چرخش انتهای D را بیابید.

RuEB

۳-۴۹ میله توپر استوانه‌ای BC به بازوی صلب AB و به تکیه‌گاه ثابت C متصل است. نیروی عمودی $\mathbf{P}$ که در A وارد می‌شود تغییرشکل کوچک Δ را در نقطه A ایجاد می‌کند. نشان دهید که ماکزیمم تنش برشی در میله عبارت است از:

$$\tau = \frac{Gd}{2La}\Delta$$

که در آن d قطر میله و G مدول صلابت است.



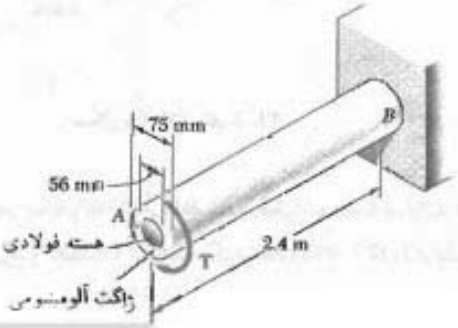
شکل م۳-۴۹، و م۳-۵۰، و م۳-۵۱

۳-۵۰ و ۳-۵۱ میله توپر استوانه BC به‌طول $L = 0.6$ m به بازوی صلب AB، به‌طول $a = 0.4$ m، و به تکیه‌گاه C متصل است. تغییرمکان A تحت بار $\mathbf{P} = 400$ N نباید از ۲۵ mm بیشتر شود. قطر میله را در شرایط زیر بیابید:

۳-۵۰ فولاد: $G = 77$ GPa، $\tau_{max} = 84$ MPa

۳-۵۱ آلومینیوم: $G = 27$ GPa، $\tau_{max} = 62$ MPa

۳-۵۲ گشتاور $T = 4$ kN.m در انتهای A از یک شفت مرکب وارد شده است. اگر مدول صلابت فولاد و آلومینیوم، به‌ترتیب، ۷۷ GPa و ۲۷ GPa باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در هسته فولادی، (ب) ماکزیمم تنش برشی در ژاکت آلومینیومی، (ج) زاویه پیچش انتهای A.

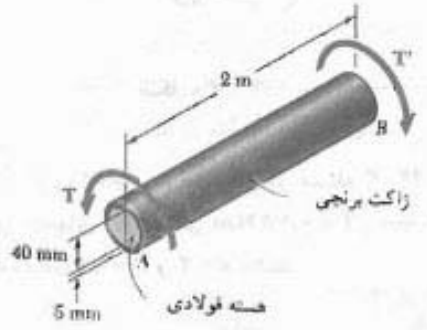


شکل م۳-۵۲ و م۳-۵۳

۳-۵۳ شفت مرکب نشان داده شده با اعمال گشتاور $\mathbf{T}$ در انتهای A می‌پیچد. اگر مدول صلابت فولاد و آلومینیوم، به‌ترتیب، ۷۷ GPa و ۲۷ GPa باشد، مطلوبست بیشترین زاویه چرخش انتهای A در صورتیکه بخواهیم تنش‌ها از مقادیر مجاز $\tau_{\text{فولاد}} = 60$ MPa و $\tau_{\text{آلومینیوم}} = 45$ MPa بیشتر نشوند.

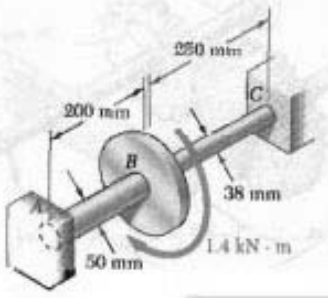
۳-۵۴ شفت مرکب نشان داده شده متشکل است از ژاکت برنجی ($G = 39$ GPa) به ضخامت 5 mm که به هسته فولادی ($G = 77.2$ GPa) به قطر 40 mm متصل است. اگر شفت تحت گشتاور 600 N.m قرار گیرد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در ژاکت برنجی، (ب) ماکزیمم تنش برشی در هسته فولادی، (ج) زاویه پیچش انتهای B نسبت به انتهای A.

۳-۵۵ در مسئله ۳-۵۴، تنش مجاز برشی در ژاکت برنجی و هسته فولادی، به‌ترتیب، 20 MPa و 45 MPa است. مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاوری که می‌توان بر ژاکت وارد کرد، (ب) زاویه پیچش متناظر B نسبت به A



شکل م۳-۵۴ و م۳-۵۵

۳-۵۶ دو شفت توپر فولادی ($G = 77.2$ GPa) به دیسک B و تکیه‌گاههای A و C متصل شده‌اند. مطلوبست: (الف) واکنش در هر تکیه‌گاه، (ب) ماکزیمم تنش برشی در شفت AB، (ج) ماکزیمم تنش برشی در شفت BC.

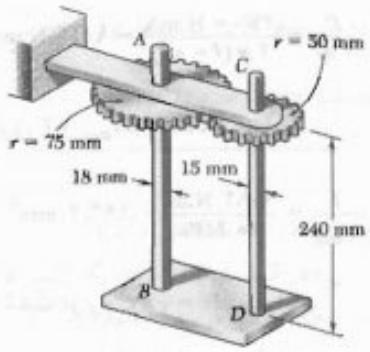


شکل م۳-۵۶

RuEB

۳-۵۷ در مسئله ۳-۵۶، شفت AB را با یک شفت توخالی جایگزین کنید که دارای همان قطر خارجی و با قطر داخلی ۲۵ mm باشد.

۳-۵۸ با جلوگیری از چرخش انتهای پایینی هر شفت، گشتاور ۸۰ N.m بر انتهای A از شفت AB وارد می‌شود. اگر برای هر دو شفت $G = ۷۷٫۲$ GPa، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در شفت CD، (ب) زاویه چرخش انتهای A.



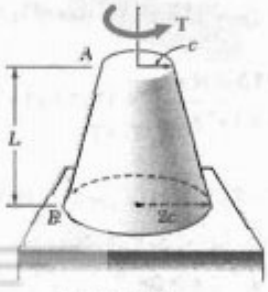
شکل م۳-۵۸

۳-۵۹ مسئله ۳-۵۸ را با این فرض حل کنید که گشتاور ۸۰ N.m بر انتهای C از شفت CD وارد شود.

۳-۶۰ یک شفت توپر و یک شفت توخالی از ماده یکسان و با وزن و طول یکسان ساخته شده‌اند. اگر $n = c_1/c_2$، نشان دهید که نسبت گشتاور T_s در شفت توپر به گشتاور T_h در شفت توخالی، T_s/T_h، برابر است با: (الف) $\sqrt{۱ - n^۲}/(۱ + n^۲)$ درصورتی که ماکزیمم تنش برشی در هر شفت دارای مقدار یکسان باشد، (ب) $(۱ + n^۲)/(۱ - n^۲)$ در صورتی که زاویه پیچش هر دو شفت یکسان باشد.

۳-۶۱ گشتاور $\mathbf{T}$، مطابق شکل، بر شفت توپر مخروطی AB وارد می‌شود. با انتگرال‌گیری نشان دهید که زاویه پیچش در انتهای A عبارت است از:

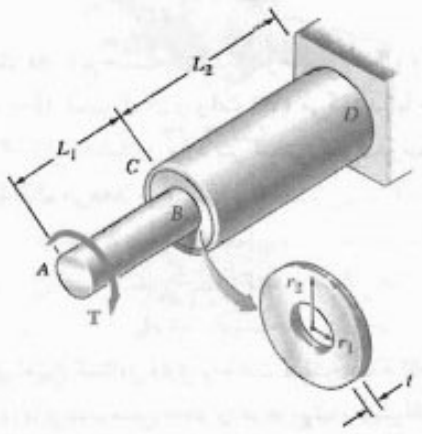
$$\phi = \frac{۷\,TL}{۱۲\,\pi G c^۴}$$



شکل م۳-۶۱

۳-۶۲ از یک ورق حلقوی با ضخامت t و مدول صلابت G برای اتصال شفت AB به شعاع r_1 به لوله CD با شعاع داخلی r_2 استفاده شده است. اگر گشتاور $\mathbf{T}$ بر انتهای A از شفت AB وارد شود و انتهای D لوله CD ثابت باشد، (الف) مقدار و مکان ماکزیمم تنش برشی در ورق حلقوی را بیابید، (ب) نشان دهید که زاویه چرخش انتهای B نسبت به انتهای C لوله عبارت است از:

$$\phi_{B/C} = \frac{T}{۴\,\pi G t}\left(\frac{۱}{r_1^۲} - \frac{۱}{r_2^۲}\right)$$



شکل م۳-۶۲ و م۳-۶۳

۳-۶۳ از ورق حلقوی به برنجی ($G = ۳۹$ GPa)، با ضخامت $t = ۶$ mm، برای اتصال شفت برنجی AB، به طول $L_1 = ۵۰$ mm و شعاع $r_1 = ۳۰$ mm، به لوله برنجی CD، به طول $L_2 = ۱۲۵$ mm، شعاع داخلی $r_2 = ۷۵$ mm و ضخامت ۳ mm استفاده شده است. اگر گشتاور $T = ۲٫۸$ kN.m بر انتهای A از شفت AB وارد شود و انتهای D از لوله CD ثابت باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در سیستم شفت-لوله، (ب) زاویه چرخش انتهای A. (راهنمایی: از فرمول به‌دست آمده در مسئله ۳-۶۲ برای حل قسمت ب استفاده کنید).

۳-۷ طراحی شفت‌های انتقال قدرت

مشخصات اصلی در طراحی یک شفت انتقال قدرت عبارتند از قدرتی که شفت باید انتقال دهد، و سرعت چرخش شفت. نقش طراح، انتخاب ماده و ابعاد مقطع عرضی شفت است، به‌طوری که ماکزیمم تنش برشی در ماده هنگام انتقال قدرت در یک سرعت مشخص شده از مقدار مجاز خود بیشتر نشود.

RuEB