

که رویداد  $b$  بیش از  $c$  و پس از  $a$  رخ داده باشد. به این ترتیب، ترتیب رویدادهای بالا  $a, b, c$  است. پس زمان به نوعی جهت دارد، که به کمک آن می‌توان گذشته، حال، و آینده را از هم تشخیص داد. پس آیا زمان بردار است؟ اگر نه چرا؟

۱۳. آیا قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای تفریق بردارها هم صادق‌اند؟

۱۴. آیا حاصل ضرب اسکالر می‌تواند منفی شود؟

۱۵. (الف) آیا از  $a \cdot b = 0$  نتیجه می‌شود که  $a$  و  $b$  بر هم عمودند؟

(ب) آیا از  $a \cdot b = a \cdot c$  نتیجه می‌شود که  $b = c$  است؟

۱۶. آیا اگر  $a \times b = 0$  باشد،  $a$  و  $b$  با هم موازی‌اند؟ آیا عکس این هم درست است؟

۱۷. بردار  $a$  موازی محور دوران زمین، و در جهت جنوب به شمال است. بردار  $b$  در راستای قائم رو به بالا، و در مکان شماست. جهت بردار  $a \times b$  چیست؟ در چه نقاطی از سطح زمین، اندازه بردار  $a \times b$  بیشینه است؟ در چه نقاطی کمینه است؟

۱۸. در کدام یک از عملیات زیر لازم است که دستگاه مختصات را مشخص کنیم (الف) در جمع دو بردار، (ب) در ضرب اسکالر دو بردار،

(ج) در ضرب برداری دو بردار، یا (د) در تعیین مؤلفه‌های دو بردار؟

۱۹. (الف) نشان بدهید که اگر همه مؤلفه‌های یک بردار را وارونه کنیم، جهت خود بردار هم وارونه می‌شود. (ب) نشان بدهید که اگر مؤلفه‌های دو بردار را وارونه کنیم، حاصل ضرب برداری آنها عوض نمی‌شود.

(ج) پس آیا حاصل ضرب برداری، بردار است؟

۲۰. در مورد جمع، تفریق، و ضرب بردارها صحبت کردیم. فکر می‌کنید چرا از تقسیم بردارها حرفی نزدیم؟ آیا می‌شود چنین عملی هم تعریف کرد؟

۲۱. قرارداد معمول در جبر برداری، قاعده دست راست است، که ما هم آن را به کار بردیم. به نظر شما اگر قرارداد دست چپ را به کار می‌بردیم چه تغییراتی لازم می‌بود؟

۲۲. (الف) خودتان را قانع کنید که حاصل ضرب برداری دو بردار قطبی، یک بردار محوری است. (ب) حاصل ضرب برداری یک بردار قطبی و یک بردار محوری چیست؟

## مسئله‌ها

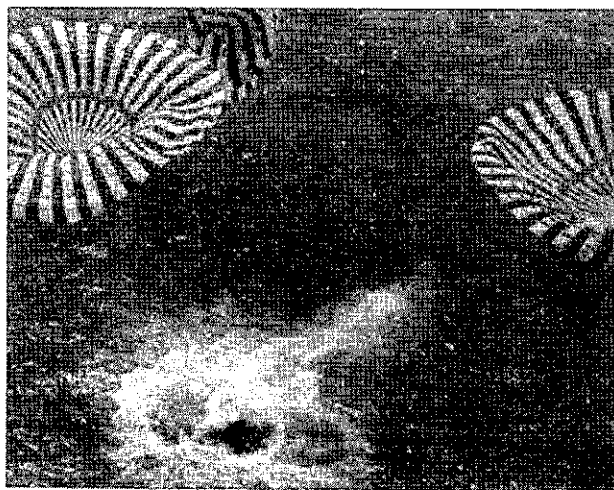
بخش ۲-۳ جمع برداری؛ روش نموداری

۱. دو جابه‌جایی، به اندازه‌های  $3m$  و  $4m$ ، در نظر بگیرید. این جابه‌جاییها را چنان با هم ترکیب کنید که اندازه جابه‌جایی برآیند (الف)  $7m$ ، (ب)  $1m$ ، و (ج)  $5m$  شود.

۲. دو بردار  $a$  و  $b$  چه خاصیتی داشته باشند تا (الف)  $a + b = c$  و  $a + b = c$  باشد؛ (ب)  $a + b = a - b$  باشد؛ (ج)  $a + b = c$  و  $a^2 + b^2 = c^2$  باشد؟

۳. شخصی  $25^\circ m$  در جهت  $35^\circ$  شرق شمال، و سپس  $17^\circ m$  مستقیماً به طرف شرق حرکت می‌کند. (الف) با استفاده از روش

(شکل ۲۱). یک افسر ارشد نیروی دریایی در پایگاه با آنها خداحافظی کرد و سپس با یک کشتی هواپیما بر به اقیانوس آرام رفت تا فضاوردان را از آب بگیرد. جابه‌جایی فضاوردان و این افسر را با هم مقایسه کنید.



شکل ۲۱. برش ۱

۲. سگی  $100m$  به طرف جنوب، سپس  $100m$  به طرف شرق، بعد  $100m$  به طرف شمال می‌دود و سرانجام به نقطه شروع حرکت خود می‌رسد، یعنی جابه‌جایی کل او صفر می‌شود. نقطه شروع کجاست؟ قطب شمال یک جواب بدیهی است اما جوابهای دیگر هم وجود دارند، که نزدیک قطب جنوب‌اند. این حرکت را توصیف کنید.

۳. آیا می‌توان دو بردار با اندازه‌های متفاوت داشت که برآیندشان صفر شود؟ سه بردار چطور؟

۴. آیا ممکن است اندازه برداری صفر باشد ولی یکی از مؤلفه‌های آن صفر نباشد؟

۵. آیا می‌شود که مجموع اندازه‌های دو بردار با اندازه مجموع همان دو بردار یکی باشد؟

۶. آیا ممکن است که اندازه تفاضل دو بردار بزرگتر از اندازه هریک از دو بردار باشد؟ آیا اندازه تفاضل دو بردار می‌تواند بزرگتر از اندازه مجموع همان دو بردار باشد؟ مثال بزنید.

۷. فرض کنید که  $d = d_1 + d_2$ . آیا این به معنی آن است که باید  $d \geq d_1$  یا  $d \geq d_2$  باشد؟ اگر نه، توضیح بدهید که چرا؟

۸. اگر مجموع سه بردار صفر شود، این سه بردار الزاماً در یک صفحه‌اند. این گفته را توجیه کنید.

۹. آیا بردارهای یکه  $i, j, k$  یکا دارند؟

۱۰. توضیح بدهید که اطلاعات موجود در بردارها به چه معنی بیش از اطلاعات موجود در اسکالرهاست؟

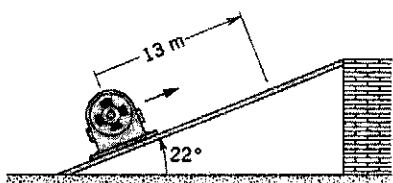
۱۱. چند کمیت اسکالر نام ببرید. آیا مقدار یک کمیت اسکالر به دستگاه مختصاتی که انتخاب می‌کنید بستگی دارد؟

۱۲. رویدادها را می‌توان به ترتیب زمانی مرتب کرد. مثلاً ممکن است

## بخش ۳-۳ مؤلفه‌های بردار

۱۰. (الف) بردار  $a$  در صفحه  $xy$  و در جهت  $252^\circ$  پادساعتگرد از جهت مثبت محور  $x$  است. اندازه  $a$ ،  $7.34$  واحد است. مؤلفه‌های این بردار را به دست بیاورید. (ب) مؤلفه  $x$  برداری  $25$  - واحد و مؤلفه  $y$  آن  $+43$  واحد است. اندازه این بردار و زاویه آن را با جهت مثبت محور  $x$  به دست بیاورید.

۱۱. یک دستگاه مکانیکی سنگین را روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه  $22^\circ$  می‌سازد، به اندازه  $13\text{m}$  به طرف بالای سطح هل می‌دهیم. (شکل ۲۳). (الف) ارتفاع دستگاه نسبت به مکان اولیه‌اش چقدر است؟ (ب) این دستگاه چقدر در جهت افقی حرکت کرده است؟



شکل ۲۳. مسئله ۱۱

۱۲. طول عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، از محور تا نوک،  $11.3\text{cm}$  است. بردار جابه‌جایی نوک عقربه را (الف) از یک ربع گذشته تا نیم ساعت، (ب) در نیم ساعت بعدی، و (ج) در مدت یک ساعت تعیین کنید.

۱۳. شخصی می‌خواهد به نقطه‌ای برسد که در فاصله  $3.42\text{km}$  و در جهت  $35^\circ$  شمال شرق محل خودش واقع شده است؛ اما مجبور است که از راه خیابان برود. خیابانها هم یا شمالی-جنوبی‌اند یا شرقی-غربی، کمترین مسافتی که این شخص باید بپیماید تا به مقصد برسد چقدر است؟

۱۴. کشتی‌ای عازم نقطه‌ای در فاصله  $124\text{km}$  در جهت شمال است. توفان غیرمنتظره‌ای کشتی را به نقطه‌ای در  $72.6\text{km}$  شمال و  $31.4\text{km}$  شرق مبدأ می‌راند. این کشتی باید چقدر و در چه جهتی حرکت کند تا به مقصد مورد نظر برسد؟

۱۵. گسل گسیختگی‌ای است در سنگ که سطوح متقابل سنگ در راستای آن، نسبت به هم و موازی با یکدیگر، جابه‌جا شده‌اند. این جابه‌جایی، اغلب با زمین لرزه همراه است. در شکل ۲۴، نقاط  $A$  و  $B$  بیش از گسیختگی روی هم بوده‌اند. مؤلفه جابه‌جایی کل  $AB$  در راستای محور افقی گسل را لغزش افقی می‌نامند ( $AC$ ). مؤلفه جابه‌جایی کل در راستای محور یا تندترین شیب گسل را لغزش عمقی می‌نامند ( $AD$ ). (الف) اگر لغزش افقی  $22\text{m}$  و لغزش عمقی  $17\text{m}$  باشد، جابه‌جایی کل چقدر است؟ (ب) اگر صفحه گسل با افق زاویه  $52^\circ$  داشته باشد، جابه‌جایی عمودی خالص  $B$  در اثر گسیختگی (الف) چقدر است؟

نموداری، جابه‌جایی کل او را، نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) اندازه این جابه‌جایی را با مسافتی که پیموده است مقایسه کنید.

۴. شخصی  $31\text{km}$  به طرف شمال، سپس  $24\text{km}$  به طرف غرب، و سرانجام  $52\text{km}$  به طرف جنوب حرکت می‌کند. (الف) یک نمودار برداری برای این حرکت رسم کنید. (ب) پرنده‌ای را در نظر بگیرید که روی خط راست پرواز می‌کند. این پرنده باید چقدر و در چه جهتی پرواز کند تا به مقصد این شخص برسد؟

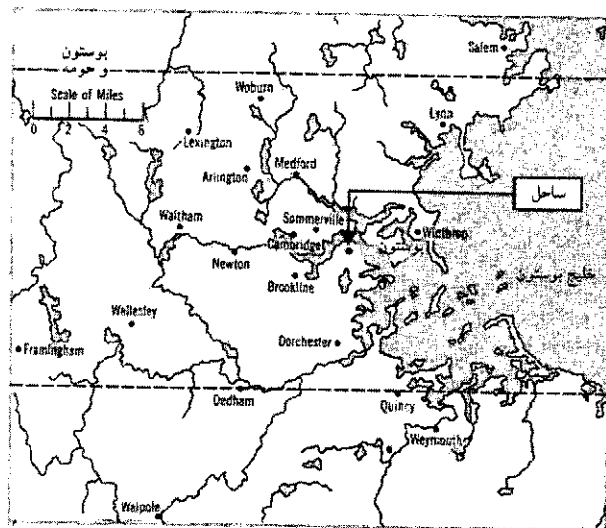
۵. دو بردار  $a$  و  $b$  را با هم جمع می‌کنیم. به روش تصویری و به کمک نمودارهای برداری نشان بدهید که اندازه بردار برآیند نمی‌تواند بزرگتر از  $a+b$  یا کوچکتر از  $|a-b|$  باشد. (خطهای قائم علامت قدرمطلق است.)

۶. اتومبیلی  $54\text{km}$  در جهت شرق، سپس  $32\text{km}$  در جهت شمال، و سرانجام  $27\text{km}$  در جهت  $28^\circ$  شرق شمال حرکت می‌کند. نمودار برداری این حرکت را بکشید و جابه‌جایی کل اتومبیل را تعیین کنید.

۷. بردار  $a$  به اندازه  $52$  واحد، و در جهت شرق است. بردار  $b$  به اندازه  $43$  واحد، و در جهت  $35^\circ$  غرب شمال است. با استفاده از نمودار برداری، اندازه و جهت  $a+b$ ، و  $a-b$  را پیدا کنید.

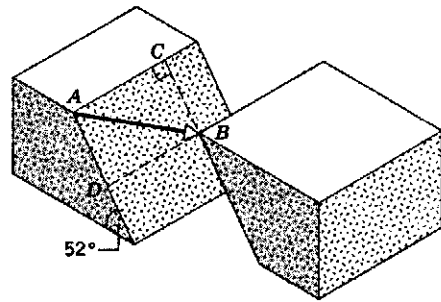
۸. گلف‌بازی توپ گلف را در سه مرحله به سوراخ می‌اندازد. در ضربه اول، توپ  $12\text{ft}$  به طرف شمال می‌رود، در ضربه دوم  $6\text{ft}$  به جنوب شرقی، و در ضربه سوم  $3\text{ft}$  به جنوب غربی، چه جابه‌جایی‌ای لازم بود تا توپ فقط با یک ضربه به سوراخ برسد؟ نمودار بکشید.

۹. بانکی در مرکز شهر بوستون را دزد می‌زند (شکل ۲۲ نقشه محل را نشان می‌دهد). دزدان، برای فرار از چنگ پلیس، این مسیر را با هلیکوپتر می‌پیمایند؛ اول  $20\text{mi}$  در جهت  $45^\circ$  جنوب شرق، سپس  $33\text{mi}$  در جهت  $26^\circ$  شمال غرب، و سرانجام  $16\text{mi}$  در جهت  $18^\circ$  شرق جنوب. اینجاست که پلیس دزدها را دستگیر می‌کند. این محل کدام شهر است؟ (با استفاده از روش نموداری این جابه‌جاییها را روی نقشه با هم جمع کنید.)



شکل ۲۲. مسئله ۹

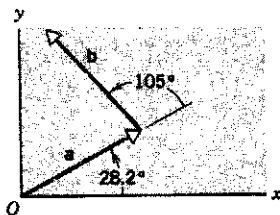
از تخته سنگی به ارتفاع ۴۸m پایین می‌اندازد. دستگاه مختصات را طوری بگیرید که مبدأ آن محل سکه، هنگامی که شخص جلوی خانه‌اش است، باشد و جهت مثبت محورهای  $x$  و  $y$  و  $z$  آنرا به ترتیب به طرف شرق، شمال، و بالا انتخاب کنید. (الف) جابه‌جایی سکه را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) این شخص، از راه دیگری، به در خانه‌اش برمی‌گردد. برآیند جابه‌جاییهای او در کل حرکت چیست؟



شکل ۲۴ مسئله ۱۵

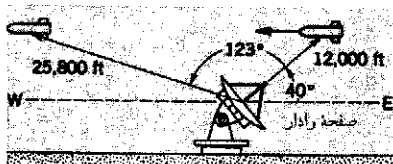
۲۲. ذره‌ای در سه مرحله متوالی در صفحه‌ای جابه‌جا می‌شود:  $4.13m$  به طرف جنوب غربی  $5.26m$  به طرف شرق، و  $5.94m$  در جهت  $64^\circ$  شمال شرق. محور  $x$  را در جهت شرق و محور  $y$  را در جهت شمال بگیرید. (الف) مؤلفه‌های هر جابه‌جایی، (ب) مؤلفه‌های برآیند جابه‌جاییها، (ج) اندازه و جهت جابه‌جایی برآیند، و (د) جابه‌جایی‌ای که ذره را به مبدأ باز می‌گرداند پیدا کنید.

۲۳. دو بردار  $a$  و  $b$  هر کدام به اندازه  $12.7$  واحدند. جهت‌گیری آنها طبق شکل ۲۶، و مجموع برداری شان  $\Gamma$  است. (الف) مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  بردار  $\Gamma$ ، (ب) اندازه  $\Gamma$ ، و (ج) زاویه  $\Gamma$  نسبت به جهت مثبت محور  $x$  را پیدا کنید.



شکل ۲۶ مسئله ۲۳

۲۴. ایستگاه راداری موشکی را که از شرق به آن نزدیک می‌شود "مشاهده" می‌کند. در ابتدا، موشک به فاصله  $12000 ft$  از ایستگاه و تحت زاویه  $40^\circ$  بر فراز افق است. رادار موشک را به اندازه  $123^\circ$  دیگر در صفحه شرق-غرب دنبال می‌کند (شکل ۲۷). در پایان، فاصله موشک از ایستگاه به  $25800 ft$  می‌رسد. جابه‌جایی موشک در این مدت چیست؟

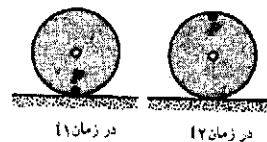


شکل ۲۷ مسئله ۲۴

۲۵. دو بردار به اندازه‌های  $a$  و  $b$  داریم که اگر دهمشان را بر هم منطبق کنیم، با هم زاویه  $\theta$  می‌سازند. با محاسبه مؤلفه‌های این دو بردار در راستای دو محور متعامد، ثابت کنید که اندازه مجموع آنها برابر است با

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

۱۶. چرخ‌ی به شعاع  $45cm$ ، روی سطحی افقی، بی‌لغزش، می‌غلتند (شکل ۲۵). نقطه‌ای است که روی چرخ علامتگذاری شده است. در زمان  $t_1$ ، نقطه تماس بین چرخ و سطح است. در زمان  $t_2$ ، پس از  $t_1$ ، چرخ نیم دور چرخیده است. جابه‌جایی  $P$  طی این حرکت چقدر است؟



شکل ۲۵ مسئله ۱۶

۱۷. ابعاد اتاقی  $14ft \times 12ft \times 10ft$  است. مگسی از یک گوشه اتاق شروع به پرواز می‌کند و به سر دیگر قطری که از این گوشه می‌گذرد می‌رسد. (الف) بردار جابه‌جایی را در دستگاهی که محورهای مختصات آن با یالهای اتاق موازی‌اند پیدا کنید. (ب) اندازه این جابه‌جایی چقدر است؟ (ج) آیا امکان دارد که مگس از یک مسیر کوتاهتر، به مقصد برسد؟ از یک مسیر بلندتر چطور؟ از مسیر دیگری با همان طول چطور؟ (د) اگر مگس، به جای پرواز کردن، راه برود، کوتاهترین مسیری که او را به مقصد می‌رساند کدام است؟

بخش ۳-۴ جمع برداری؛ روش مؤلفه‌ای

۱۸. (الف) جمع دو بردار  $a = 5i + 3j$  و  $b = -3i + 2j$  را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) اندازه و جهت  $a + b$  را به دست بیاورید.  
۱۹. دو بردار  $a = 4i - 3j + k$  و  $b = -i + j + 4k$  را در نظر بگیرید. (الف)  $a + b$ ، و (ب)  $a - b$  را پیدا کنید. (ب) بردار  $c$  را چنان تعیین کنید که  $a - b + c = 0$  باشد.

۲۰. دو بردار  $a = 4i - 3j$  و  $b = 6i + 7j$  را در نظر بگیرید. اندازه و جهت هر یک از بردارهای زیر را (نسبت به جهت مثبت محور  $x$ ) پیدا کنید. (الف)  $a$ ، (ب)  $b$ ، (ج)  $a + b$ ، (د)  $b - a$ ، و (ه)  $a - b$ .

۲۱. (الف) شخصی از در خانه‌اش  $1400m$  به طرف شرق و  $2100m$  به طرف شمال می‌رود. سپس سکه‌ای از جیبش در می‌آورد و آنرا

”غرب“، و (ه) ”جنوب“ ضربدر ”جنوب“ را به دست بیاورید. همه بردارها را بیکه بگیرید.

۳۵. دو بردار  $a = a_x i + a_y j + a_z k$  و  $b = b_x i + b_y j + b_z k$  را در نظر بگیرید. ثابت کنید که  $a \cdot b$ ، برحسب مؤلفه‌های دو بردار از معادله ۱۵ به دست می‌آید.

۳۶. دو بردار  $a = a_x i + a_y j + a_z k$  و  $b = b_x i + b_y j + b_z k$  را در نظر بگیرید. ثابت کنید که  $a \times b$ ، برحسب مؤلفه‌های دو بردار از معادله ۱۷ به دست می‌آید.

۳۷. نشان بدهید که  $a \times b$  را می‌شود با این دترمینان  $3 \times 3$  نشان داد:

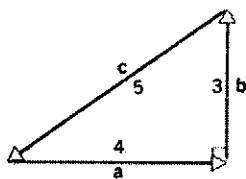
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

۳۸. با استفاده از معادلات ۱۳ و ۱۵، زاویه میان دو بردار  $b = 2i + j + 3k$  و  $a = 3i + 3j + 3k$  را پیدا کنید.

۳۹. سه بردار  $a = 3i + 3j - 2k$ ،  $b = -i - 4j + 2k$  و  $c = 2i + 2j + k$  را در نظر بگیرید. (الف)  $a \cdot (b \times c)$  و (ب)  $a \cdot (b + c)$  و (ج)  $a \times (b + c)$  را حساب کنید.

۴۰. بردارهای  $a = 5i + 4j - 6k$ ،  $b = -2i + 2j + 3k$  و  $c = 4i + 3j + 2k$  را در نظر بگیرید. (الف)  $r = a - b + c$  را به دست بیاورید. (ب) زاویه بین  $r$  و محور  $z$  و (ج) زاویه بین  $a$  و  $b$  را محاسبه کنید.

۴۱. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند (شکل ۲۸). (الف)  $a \cdot b$ ، (ب)  $a \cdot c$ ، و (ج)  $b \cdot c$  را حساب کنید.



شکل ۲۸. مسئله‌های ۴۱ و ۴۲

۴۲. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند. شکل ۲۸. (الف)  $a \times b$ ، (ب)  $a \times c$ ، و (ج)  $b \times c$  را حساب کنید.

۴۳. بردار  $a$  در صفحه  $xy$  است و با محور  $y$  زاویه  $63^\circ$  می‌سازد. مؤلفه  $z$  این بردار مثبت، و اندازه آن  $32^\circ$  واحد است. بردار  $b$  در صفحه  $xz$  است و با محور  $x$  زاویه  $48^\circ$  می‌سازد. مؤلفه  $z$  این بردار مثبت، و اندازه آن  $14^\circ$  واحد است. (الف)  $a \cdot b$ ، (ب)  $a \times b$ ، و (ج) زاویه بین  $a$  و  $b$  را پیدا کنید.

۴۴. (الف) دیدیم که قانون جابه‌جایی در مورد حاصل ضرب برداری  $a \times b$  با  $b \times a$  برابر نیست. نشان بدهید که

۲۶. ثابت کنید که اگر مجموع دو بردار برتفاضل آنها عمود باشد، طول آن دو بردار یکی است.

۲۷. (الف) سه بردار یک در راستای یالهای مکعبی به ضلع  $a$  بگیرید و قطرهای مکعب را (که از مرکز مکعب می‌گذرند و دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کنند) برحسب آنها و طول ضلع مکعب، بیان کنید. (ب) زاویه قطر مکعب را با یالهای مجاورش پیدا کنید. (ج) طول قطر مکعب چقدر است؟

۲۸. مسافری از واشنگتن دی‌سی به مانیل پرواز می‌کند. (الف) بردار جابه‌جایی او را به دست بیاورید. (ب) اندازه این بردار چقدر است؟ عرض و طول جغرافیایی این دو شهر به ترتیب  $39^\circ$  شمال- $77^\circ$  غرب و  $15^\circ$  شمال- $121^\circ$  شرق است. (راهنمایی: از شکل ۷ و معادلات ۷ استفاده کنید. محور  $z$  را در راستای محور دوران زمین بگیرید. به این ترتیب، ”عرض جغرافیایی -  $90^\circ = \theta$ “ و ”طول جغرافیایی  $= \phi$ “ خواهد بود. شعاع زمین  $6370 \text{ km}$  است.)

۲۹. فرض کنید که  $N$  عدد صحیحی بزرگتر از ۱ است. در این صورت،

$$\cos^\circ + \cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \dots + \cos(N-1) \frac{2\pi}{N} = 0$$

یعنی

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos \frac{2\pi n}{N} = 0$$

همچنین

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \sin \frac{2\pi n}{N} = 0$$

این دو رابطه را اثبات کنید. برای این کار جمع  $N$  بردار به طول یکسان را در نظر بگیرید که هر یک با قبلی زاویه  $2\pi/N$  می‌سازد.

بخش ۵-۳ ضرب بردارها

۳۰. بردار  $d$  به اندازه  $26 \text{ m}$  و در جهت شمال است. اندازه و جهت بردارهای (الف)  $-d$ ، (ب)  $d/2$ ، (ج)  $2.5d$ ، و (د)  $5d$  را به دست بیاورید.

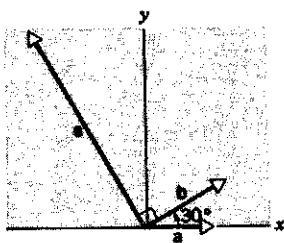
۳۱. نشان بدهید که بردار  $a$  هر چه باشد، (الف)  $a \cdot a = a^2$  و (ب)  $a \times a = 0$  است.

۳۲. اندازه بردار  $a$ ،  $12$  واحد و اندازه بردار  $b$ ،  $5.8$  واحد است. زاویه میان این دو بردار  $55^\circ$  است. (الف) حاصل ضرب اسکالر و (ب) حاصل ضرب برداری این دو بردار را پیدا کنید.

۳۳. دو بردار  $r$  و  $s$  در صفحه  $xy$  اند. اندازه این دو بردار، به ترتیب،  $4.5$  و  $7.3$  واحد است. جهت این دو بردار، به ترتیب،  $32^\circ$  و  $85^\circ$  پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور  $x$  است. (الف)  $r \cdot s$  و (ب)  $r \times s$  را پیدا کنید.

۳۴. حاصل ضربهای (الف) ”شمال“ ضربدر ”غرب“، (ب) ”پایین“ نقطه ”جنوب“ (ج) ”شرق“ ضربدر ”ب“

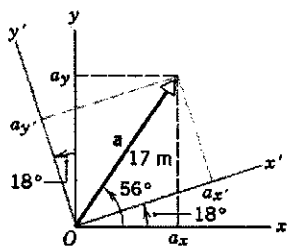
۵۰. سه بردار شکل ۳۱ به اندازه‌های  $a = 3$ ,  $b = 4$ , و  $c = 1$  اند. (الف) مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  این سه بردار را پیدا کنید. (ب) اعداد  $p$  و  $q$  را چنان تعیین کنید که  $c = pa + qb$  باشد.



شکل ۳۱. مسئله ۵۰

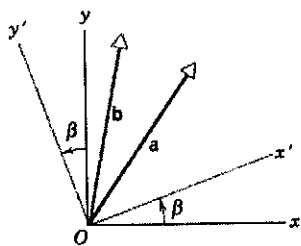
بخش ۳-۶ قوانین برداری در فیزیک

۵۱. با استفاده از شکل ۱۰، معادلات ۱۸ را به دست بیاورید.  
 ۵۲. بردار  $a$  به اندازه  $17\text{m}$  در جهت  $56^\circ$  پادساعتگرد از محور  $+x$  است (شکل ۳۲). (الف) مؤلفه‌های  $a_x$  و  $a_y$  این بردار را به دست بیاورید. (ب) دستگاه مختصات دیگری را در نظر بگیرید که  $18^\circ$  نسبت به دستگاه اول چرخیده باشد. مؤلفه‌های  $a_x'$  و  $a_y'$  را در این دستگاه "پریم دار" پیدا کنید.



شکل ۳۲. مسئله ۵۲

۵۳. شکل ۳۳ دو بردار  $a$  و  $b$  و دو دستگاه مختصات را نشان می‌دهد که زاویه بین محورهای "نظیر" آنها  $\beta$  است. به طور تحلیلی ثابت کنید که اندازه و جهت  $a + b$  مستقل از دستگاه مختصاتی است که برای محاسبه این بردار به کار می‌رود. (راهنمایی: معادلات ۱۸ را به کار بگیرید.)



شکل ۳۳. مسئله ۵۳

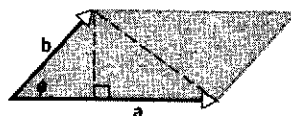
قانون جابه‌جایی در مورد حاصل ضرب اسکالر درست است؛ یعنی،  $a \cdot b = b \cdot a$ . (ب) نشان بدهید که قانون پخش، هم در مورد حاصل ضرب اسکالر و هم در مورد حاصل ضرب برداری درست است یعنی

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

و

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

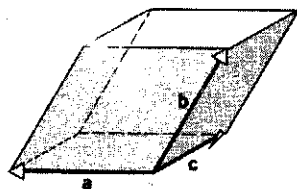
(ج) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل ضرب برداری درست است؟ یعنی، آیا  $a \times (b \times c)$  با  $(a \times b) \times c$  برابر است؟ (د) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل ضرب اسکالر معنی دارد؟  
 ۴۵. نشان بدهید که مساحت مثلثی که با بردارهای  $a$  و  $b$  ساخته می‌شود (شکل ۲۹) برابر با  $\frac{1}{2}|a \times b|$  است. (خطوط قائم به معنی اندازه بردار است.)



شکل ۲۹. مسئله‌های ۴۵ و ۴۶

۴۶. نشان بدهید که اندازه حاصل ضرب برداری برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع است که اضلاع آن به اندازه عوامل ضرب باشند (شکل ۲۹). به این ترتیب، آیا فکر نمی‌کنید که بتوانیم برای نمایش عنصر سطحی که جهتی در فضا دارد هم از بردار استفاده کنیم؟

۴۷. نشان بدهید که قدر مطلق  $a \cdot (b \times c)$  برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که با سه بردار  $a$ ,  $b$ , و  $c$  ساخته می‌شود (شکل ۳۰).



شکل ۳۰. مسئله ۴۷

۴۸. مؤلفه‌های دو بردار  $a$  و  $b$ ، برحسب یکای دلخواه،  $a_x = 3.2$  و  $a_y = 1.6$ ؛  $b_x = 0.5$  و  $b_y = 4.5$  است. (الف) زاویه میان  $a$  و  $b$  چقدر است؟ (ب) مؤلفه‌های بردار  $c$  را که عمود بر  $a$ ، در صفحه  $xy$ ، و به اندازه  $5^\circ$  واحد است، پیدا کنید.  
 ۴۹. زاویه میان قطرهای حجمی مکعب را محاسبه کنید. (مسئله ۲۷).