۱- با استفاده از ضریب آرایه یک آرایه دو عنصری پهلوآتش (broadside) با دامنه جریان یکسان و عناصر نقطه‌ای، نشان دهید که عبارت سمت‌گرایی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$D=\frac{2}{1+\left(\sin\beta d\right)/\beta d}$$

حل) برای آرایه دوعنصری با فرض اینکه روی محور z قرار گرفته باشند، و در حالت پهلوآتش ($\alpha=0$) باشند، می‌توان ضریب آرایه را به صورت زیر به دست آورد.

$$AF=\left|1+1e^{j\psi}\right|=\cos\frac{\psi}{2}$$

$$Broadside:\ \alpha=0\rightarrow\psi=\beta d\cos\theta+\alpha=\beta d\cos\theta$$

برای به دست آوردن سمت‌گرایی آنتن ابتدا زاویه فضایی تابه را محاسبه می‌کنیم.

$$\Omega_A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|F\left(\theta\right)\right|^2\sin\theta d\theta d\phi=\int_0^{2\pi}d\phi\int_{\beta d}^{-\beta d}\cos^2\frac{\psi}{2}\frac{-d\psi}{\beta d}$$

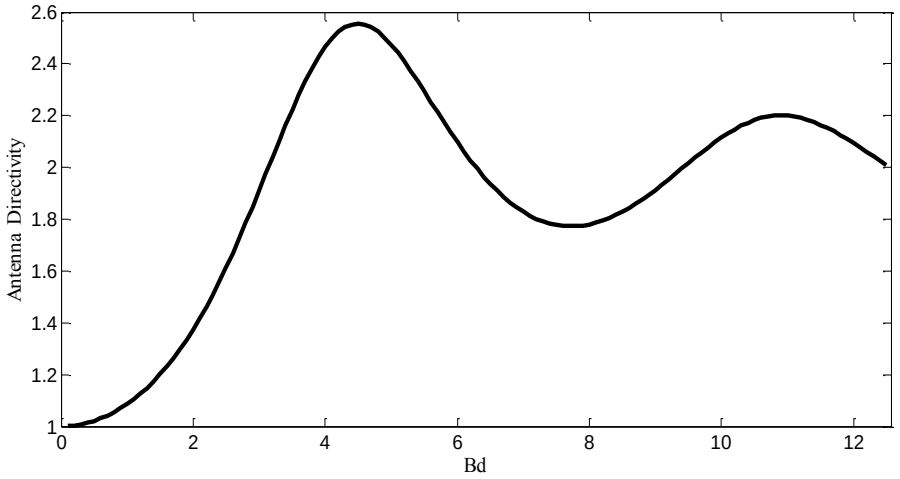
$$=\frac{1}{\beta d}\left(2\pi\right)\int_{-\beta d}^{\beta d}\frac{1}{2}\left(1+\cos\psi\right)d\psi=\frac{\pi}{\beta d}\left[\psi+\sin\psi\right]_{-\beta d}^{\beta d}$$

$$=\frac{\pi}{\beta d}\left[2\beta d+2\sin\beta d\right]=2\pi\left(1+\frac{\sin\beta d}{\beta d}\right)$$

بنابراین سمت گرایی مطابق رابطه زیر حاصل می‌شود

$$D=\frac{4\pi}{\Omega_A}=\frac{2}{1+\frac{\sin\beta d}{\beta d}}$$

سمت گرایی به دست آمده به صورت تابعی از βd در شکل زیر رسم شده است.



برای اینکه سمت‌گرایی این آرایه دوعنصری ماکزیمم باشد باید داشته باشیم:

$$\beta d = 4.5 \rightarrow d = \frac{4.5}{2\pi / \lambda} = 0.7162\lambda$$

با این فاصله بین عناصر سمت گرایی برابر ۲/۵۵ خواهد بود.

۲- عبارت پهنای تابه نصف توان (HPBW) مربوط به ضریب آرایه یک آرایه خطی با فاصله گذاری یکسان و تحریک یکنواخت، را می‌توان توسط رابطه تقریبی زیر که برای $Nd >> \lambda$ برقرار است، بیان نمود.

$$HP \approx K \frac{\lambda}{Nd}$$

K را برای N=10 , 20 به دست‌آورید.

حل) نقاط نصف توان ψ را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$f(\psi_{HP}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{N\psi_{HP}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_{HP}}{2}\right)}$$

برای N=10 به معادله زیر می‌رسیم:

$$\sin(5\psi_{HP}) = \frac{10}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\psi_{HP}}{2}\right)$$

با حل رابطه فوق به‌صورت عددی (با دستور Solve ماشین‌حساب) داریم:

$$\psi_{HP} = \pm 0.279523$$

بنابراین پهنای تابه نصف توان به صورت زیر محاسبه میشود:

$$\psi_{HP} = \beta d \cos\theta_{HP} = \pm 0.279523 \rightarrow \theta_{HP} = \cos^{-1}\left(\pm \frac{0.088975\pi}{2\pi / \lambda}\right) = \cos^{-1}\left(\pm 0.0444875 \frac{\lambda}{d}\right)$$

$$\rightarrow \theta_{HP} \approx 1 \mp 0.0444875 \frac{\lambda}{d} \rightarrow HPBW = 2 \times 0.0444875 \frac{\lambda}{d} = 0.088975 \frac{\lambda}{d} = 0.88975 \frac{\lambda}{Nd}$$

بنابراین مقدار K با توجه به رابطه داده شده در صورت مسئله برابر خواه بود با K=088975. به طریق مشابه برای N=20 داریم:

$$N = 20 \rightarrow \sin(10\psi_{HP}) = \frac{20}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\psi_{HP}}{2}\right) \rightarrow \psi_{HP} = 0.1393$$

$$\theta_{HP} = \cos^{-1}\left(\pm \frac{0.04434\pi}{2\pi d / \lambda}\right) = \cos^{-1}\left(\pm \frac{0.04434}{2} \frac{\lambda}{d}\right)$$

$$HPBW \approx 2\left(\frac{0.04434}{2} \frac{\lambda}{d}\right) = 0.04434 \frac{\lambda}{d} \overset{N=20}{=} 0.8868 \frac{\lambda}{Nd}$$

بنابراین برای N=20 مقدار K برابر خواهد بود با K=0.8868. بنابراین همانطورکه برای این دو مقدار N مشاهده شد، هرچه N افزایش یابد به رابطه تقریبی بیان شده در درس که به صورت زیر می‌رسیم:

$$HPBW = 0.886 \frac{\lambda}{Nd}$$

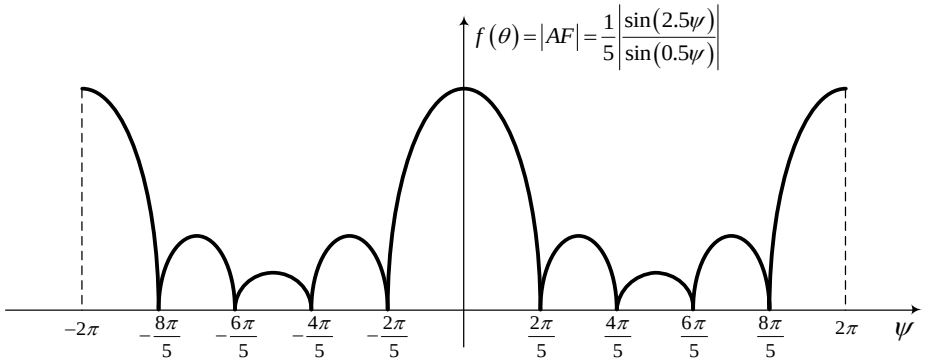
۳- یک آرایه پنج عنصری خطی با فاصله‌گذاری یکسان و تحریک یکنواخت با

الف) گلبرگ اصلی در جهت پهلوآتش(broadside)

ب) ماکزیمم گلبرگ اصلی در زاویه ۴۵ درجه نسبت به broadside

طراحی کنید. فاصله عناصر و شیفت فاز را چنان انتخاب کنید که پهنای تابه تا حد ممکن کوچک بوده و هیچ بخشی از لوب‌های کناری در ناحیه مرئی (visible region) ظاهر نشوند.

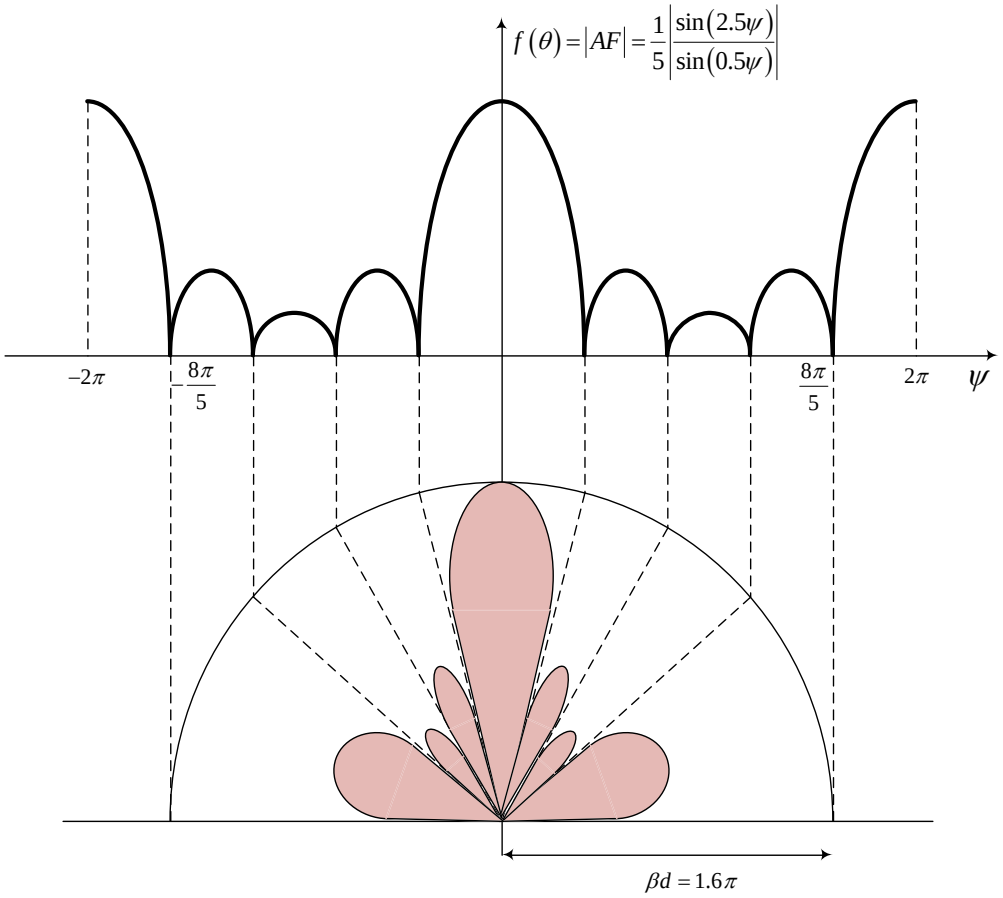
حل) همانطورکه در مسئله قبل دیدیم پهنای تابه متناسب است با λ / Nd، بنابراین برای اینکه پهنای تابه تا حد ممکن کوچک باشد باید βd را تاحد ممکن (حالتی که گلبرگ‌های کناری ظاهر نشوند) بزرگ انتخاب کنیم. برای یک آرایه ۵ عنصری ضریب آرایه به‌صورت زیر خواهد بود.



الف) با توجه به شکل فوق در حالت broadside ($\alpha=0$) برای اینکه لوب کناری نداشته باشیم و همزمان βd ماکزیمم باشد، باید داشته باشیم:

$$\beta d=\frac{8\pi}{5}=1.6\pi \rightarrow d=\frac{1.6\pi}{2\pi/\lambda}=0.8\lambda$$

این حالت در شکل زیر نشان داده شده است:



ب) برای اینکه لوب اصلی در زاویه ۴۵ درجه باشد، باید داشته باشیم:

$$\alpha = -\beta d \cos\theta_0 = -\frac{\beta d}{\sqrt{2}} \qquad (۱)$$

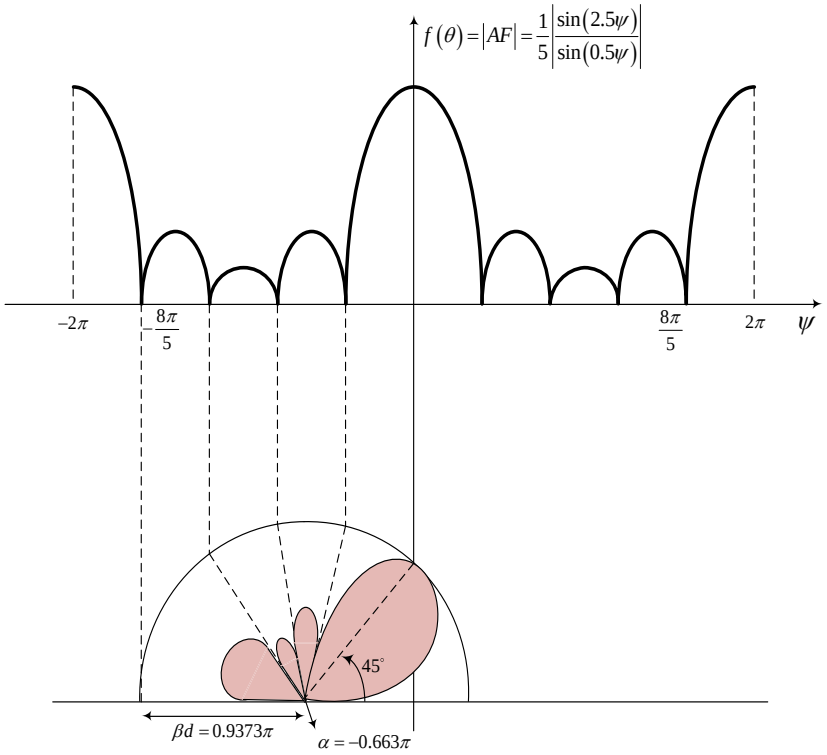
از طرفی برای اینکه هیچ قسمتی از لوب‌های دیگر در ناحیه مرئی وجود نداشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\alpha - \beta d = -1.6\pi \qquad (۲)$$

بنابراین با حل (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\beta d}{\sqrt{2}} \\ \alpha - \beta d = -1.6\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta d = 0.9373\pi \rightarrow d = 0.469\lambda \\ \alpha = \dfrac{-\beta d}{\sqrt{2}} = -0.663\pi \end{cases}$$

این حالت در شکل زیر نشان داده شده است:



۴- یک آرایه خطی ۵ تایی از عناصر ایزوتروپیک به‌صورت سرآتش (endfire) معمولی طراحی کنید.

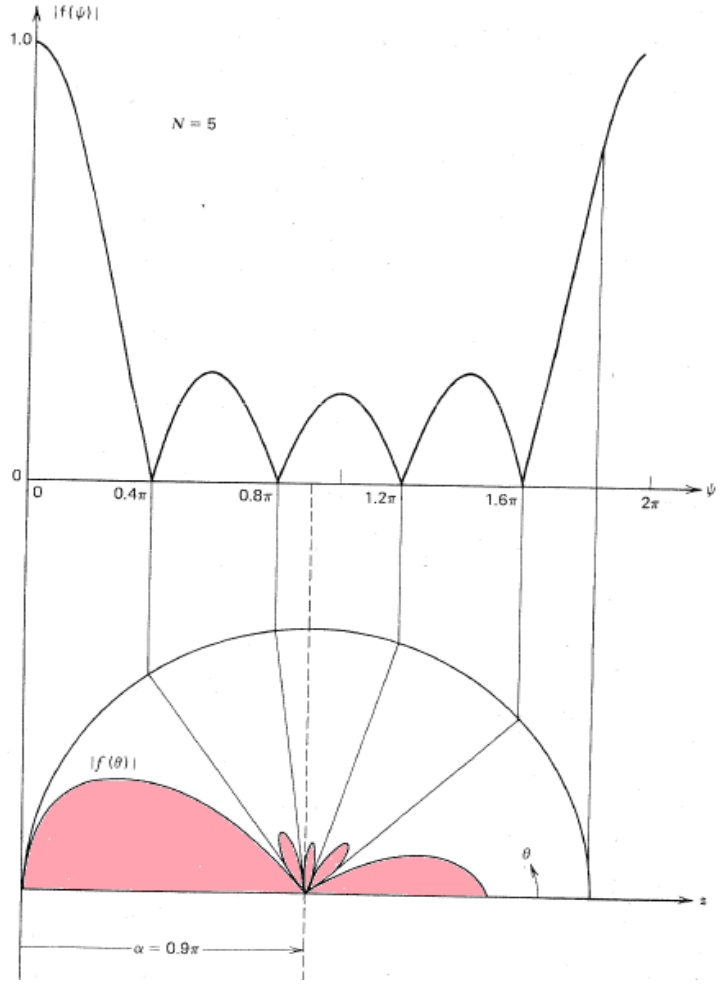
حل) برای آرایه endfire معمولی فاصله بین عناصر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$d \le \frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{1}{2N}\right)=\frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{1}{10}\right)=0.45\lambda \rightarrow d=0.45\lambda$$

همچنین برای endfire بودن آرایه باید گلبرگ اصلی در جهت $\theta_0 = 0,180$ باشد، با فرض اینکه گلبرگ در جهت $\theta_0 = 180^\circ$ باشد، داریم:

$$\alpha = -\beta d\cos\theta_0 = -\frac{2\pi}{\lambda}0.45\lambda\cos 180 = 0.9\pi$$

بنابراین پترن آنتن به‌صورت زیر است:



۵- یک آرایه خطی با استفاده از ۵ عنصر ایزوتروپیک و به‌صورت هانسن-وودیارد با $d = 0.35\lambda$ طراحی کنید. پترن آرایه را نیز رسم کنید.

حل) با توجه به روابط هانس-وودیارد باید داشته باشیم:

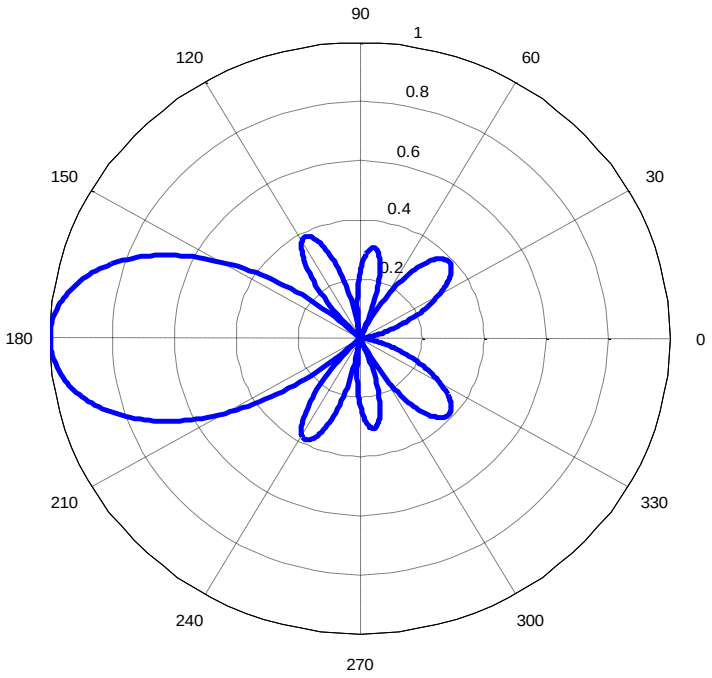
$$d \le \frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right) = 0.4\lambda$$

که با توجه به d داده شده، برقرار است. از طرفی برای فاز عناصر هم باید داشته باشیم:

$$\alpha = \pm\left(\beta d + \frac{\pi}{N}\right) = \pm\left(\frac{2\pi}{\lambda}0.35\lambda + \frac{\pi}{5}\right) = \pm 0.9\pi$$

$$if \;\; \theta_0 = 180 \rightarrow \alpha = 0.9\pi$$

بنابراین پترن آرایه به‌صورت زیر خواهد بود.



۶- یک آرایه خطی ۱۰ عنصری با استفاده از عناصر ایزوتروپیک و به‌صورت هانسن-وودیارد با $d = 0.4\lambda$ طراحی کنید و پترن آن را رسم کنید.

حل) با توجه به روابط هانس-وودیارد باید داشته باشیم:

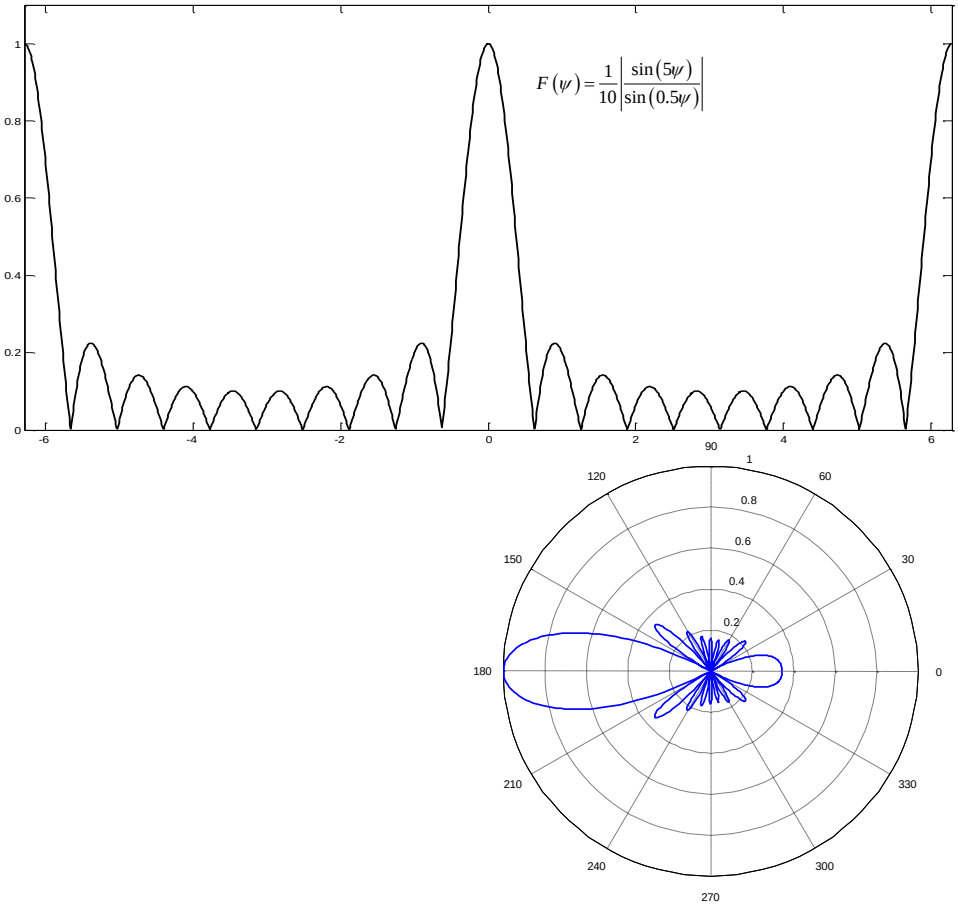
$$d \le \frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)=0.4\lambda$$

که با توجه به d داده شده، برقرار است. از طرفی برای فاز عناصر هم باید داشته باشیم:

$$\alpha = \pm\left(\beta d+\frac{\pi}{N}\right)=\pm\left(\frac{2\pi}{\lambda}0.4\lambda+\frac{\pi}{10}\right)=\pm 0.9\pi$$

$$if\ \ \theta_0 = 180 \rightarrow \alpha = 0.9\pi$$

بنابراین پترن آرایه به‌صورت زیر خواهد بود.



۷- نشان دهید که اگر فاصله بین عناصر آرایه خیلی کم باشد، ضریب آرایه یک آرایه خطی با فواصل یکسان و تحریک یکنواخت تقریبا برابر پترن یک منبع خطی یکنواخت خواهد بود.

حل) ضریب آرایه یک آرایه خطی با فواصل یکسان و تحریک یکنواخت به‌صورت زیر است:

$$F_{array}=\frac{\sin(N\psi/2)}{N\sin(\psi/2)}=\frac{\sin\left(\frac{N\beta d}{2}\cos\theta\right)}{N\sin\left(\frac{\beta d}{2}\cos\theta\right)}$$

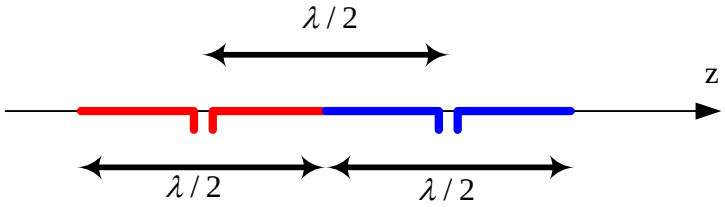
با کاهش فاصله بین عناصر و ثابت ماندن L=Nd، داریم:

$$\lim_{d\to 0}F_{array}=\frac{\sin\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right)}{N\left(\frac{\beta d}{2}\cos\theta\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right)}{\frac{\beta L}{2}\cos\theta}$$

که مشابه رابطه مربوط به پترن منبع خطی یکنواخت است.

۸- دو آنتن دوقطبی نیم‌موج که به‌صورت یک آرایه هم خطی (محور دوقطبی‌ها و آرایه در یک راستا) با فاصله نصف طول موج قرار گرفته‌اند، دارای دامنه و فاز جریان تحریک یکسانی هستند. عبارت پترن میدان راه دور برای حالتی که مرکز عناصر روی محور z واقع شده باشد، چیست؟ از اصل ضرب پرتوها استفاده کنید.

حل) ساختار مسئله به‌صورت شکل زیر می‌باشد:



می‌دانیم پترن عناصر دوقطبی نیم‌موج به‌صورت رابطه زیر می‌باشد(رجوع کنید به روابط آنتن‌های دوقطبی با طول دلخواه):

$$g(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

همچنین ضریب آرایه برای این دو عنصر به صورت زیر می‌باشد:

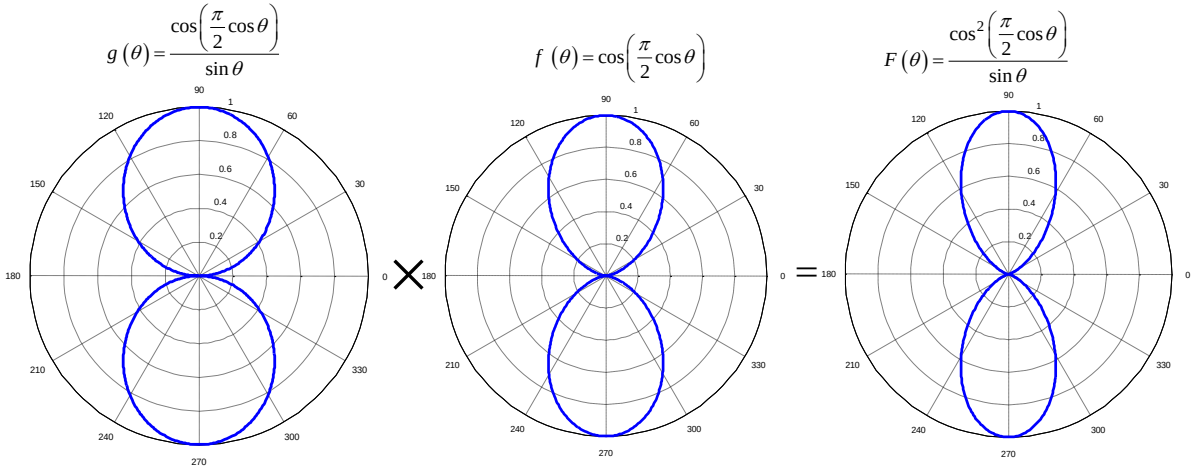
$$f(\theta)=\frac{1}{N}\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}\underset{\psi=\beta d\cos\theta+\alpha}{\overset{N=2}{=}}\frac{1}{2}\frac{\sin(\psi)}{\sin(\psi/2)}=\frac{1}{2}\frac{2\sin(\psi/2)\cos(\psi/2)}{\sin(\psi/2)}=\cos(\psi/2)$$

$$=\cos\left(\frac{\beta d\cos\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{(2\pi/\lambda)(\lambda/2)\cos\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

بنابراین طبق اصل ضرب پرتوها پترن راه دور این آرایه دو عنصری متشکل از دو دوقطبی به‌صورت زیر خواهد بود:

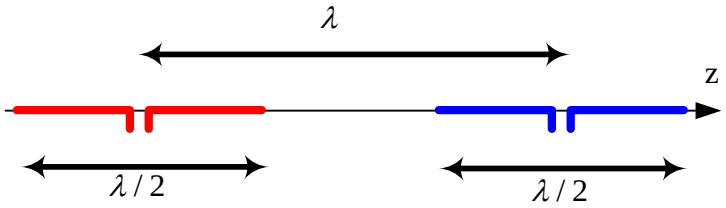
$$F(\theta)=g(\theta)f(\theta)=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

که شکل آن به‌صورت زیر می‌باشد:



۹- مسئله بالا را برای فاصله یک طول موج عناصر تکرار کنید.

حل) در صورتی که فاصله بین دو عنصر برابر یک طول موج باشد که در شکل زیر نیز نشان داده شده است:

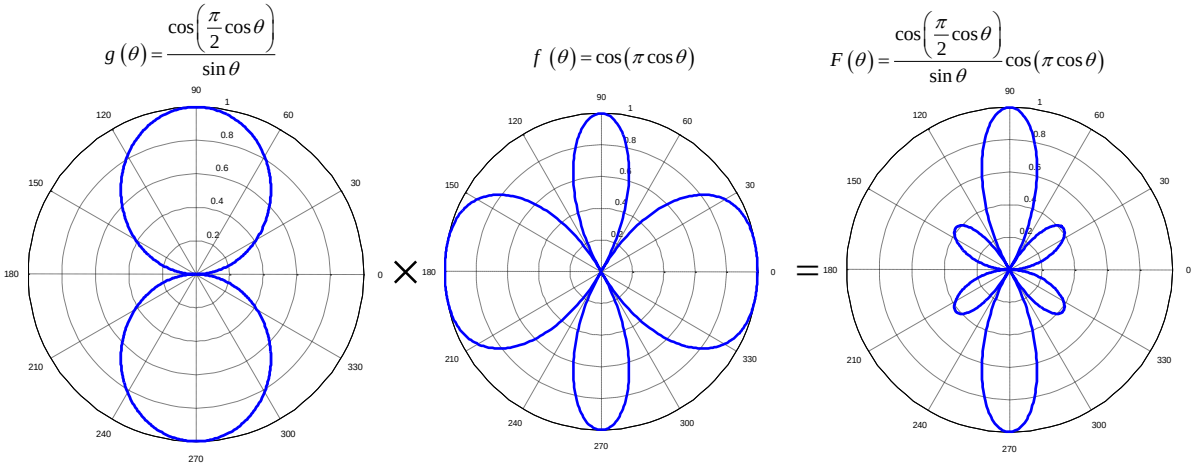


پترن آرایه که ضرب پترن عنصر در ضریب آرایه است، به صورت زیر خواهد بود:

$$F(\theta)=g(\theta)f(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\times\cos(\pi\cos\theta)$$

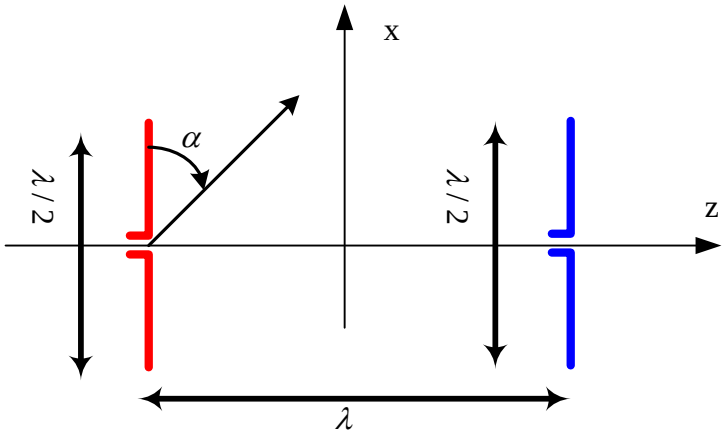
دقت کنید که چون عناصر تغییری نکرده‌اند و همچنان دوقطبی نیم‌موج می‌باشند، عبارت پترن عنصر همانند مثال قبل است. ولی ضریب آرایه به دلیل تغییر فاصله بین دوعنصر تغییر کرده است.

پترن این آرایه دوعنصری متشکل از دوعنصر دوقطبی در شکل زیر نشان داده شده است:



۱۰- دو آنتن دوقطبی نیم‌موج موازی که دارای فاصله یک طول موج هستند دارای دامنه و فاز تحریک یکسان هستند. مراکز عناصر روی محور z قرار گرفته است و دوقطبی‌ها موازی محور x هستند. عبارت پترن میدان راه‌دور را برای این آرایه آنتنی به‌دست آورید. با استفاده از اصل ضرب پرتوها این پترن را به صورت تقریبی در صفحات xz و yz رسم کنید.

حل) این ساختار در شکل زیر نشان داده شده است:



با توجه به اینکه دوقطبی‌ها در جهت محور x قرار گرفته‌اند پترن آن‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right)}{\sin\alpha}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\hat{x}\cdot\hat{R}\right)\right)}{\sqrt{1-\left(\hat{x}\cdot\hat{R}\right)^2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}}$$

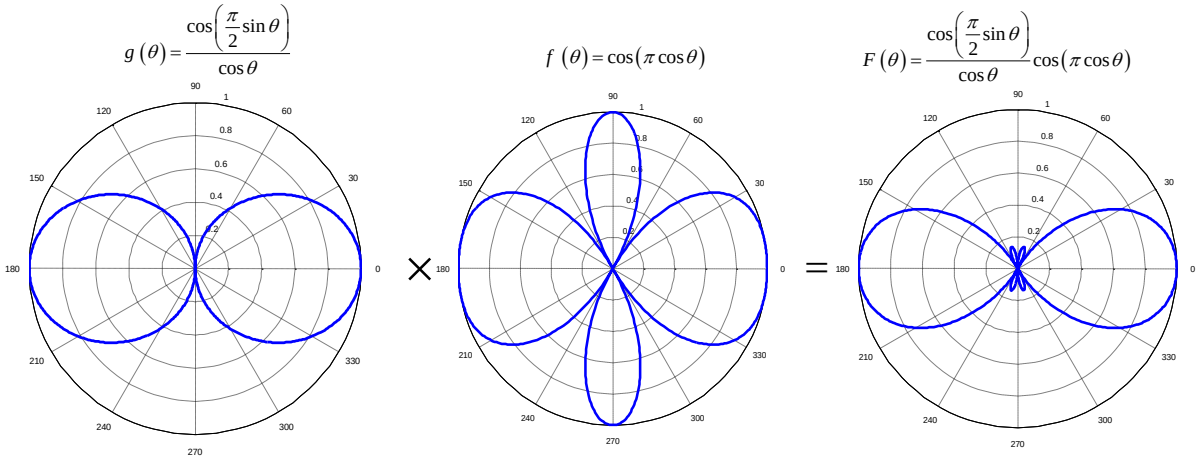
همچنین ضریب آرایه برای این دو آنتن که در فاصله یک طول موج از یکدیگر قرار گرفته‌اند، به‌صورت زیر است (همانند مثال قبل است):

$$f(\theta)=\cos(\pi\cos\theta)$$

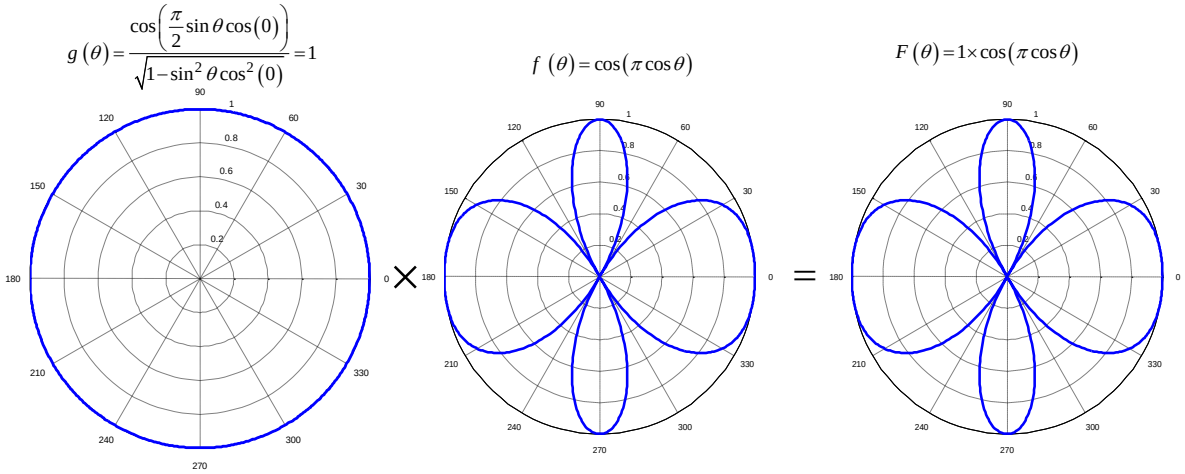
در نتیجه پترن آرایه فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$F(\theta)=g(\theta)\times f(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}}\cos(\pi\cos\theta)$$

شکل پترن آنتن در صفحه xz با قرار دادن $\phi=0$ به‌دست می‌آید، که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



همچنین برای رسم پترن در صفحه yz باید قرار دهیم $\phi=\pi/2$. بنابراین شکل پترن به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:



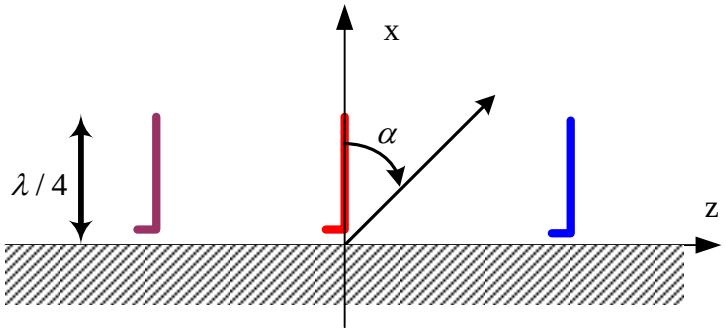
۱۱- یک آرایه خطی از ۳ تک‌قطبی ربع طول موج عمودی در مقابل صفحه زمین کامل تشکیل شده است. فرض کنید که مراکز عناصر روی محور z قرار گرفته است و صفحه زمین در صفحه yz واقع شده است، همچنین تک‌قطبی‌ها در جهت محور x می‌باشند.

(الف) آرایه را به‌صورت آرایه سرآتش (endfire) هانسن-وودیارد طراحی کنید(فاصله بین عناصر را $d=0.3\lambda$ فرض کنید).

(ب) با استفاده از ضریب آرایه جامع (برحسب)، رسم قطبی ضریب آرایه را انجام دهید.

(ج) عبارت کلی پترن آرایه را با استفاده از اصل ضرب پرتوها به‌دست آورید و شکل آن را در صفحات xz و yz رسم کنید.

حل) ساختار این آرایه در شکل زیر نشان داده شده است:



برای آرایه سرآتش از نوع هانسن-وودیارد باید فاصله بین عناصر به‌صورت زیر باشد:

$$d < \frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\lambda}{3}\approx 0.33\lambda$$

که با توجه به $d=0.3\lambda$ داده شده، این رابطه برقرار است. همچنین اختلاف فاز بین عناصر باید به‌صورت زیر باشد:

$$\alpha=\pm\left(\beta d+\frac{\pi}{N}\right)=\pm\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times 0.3\lambda+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\left(0.6\pi+0.33\pi\right)=\pm 0.93\pi$$

که علامت + را برای α انتخاب می‌کنیم. با این انتخاب انتظار داریم که گلبرگ اصلی در جهت $+180$ درجه باشد.

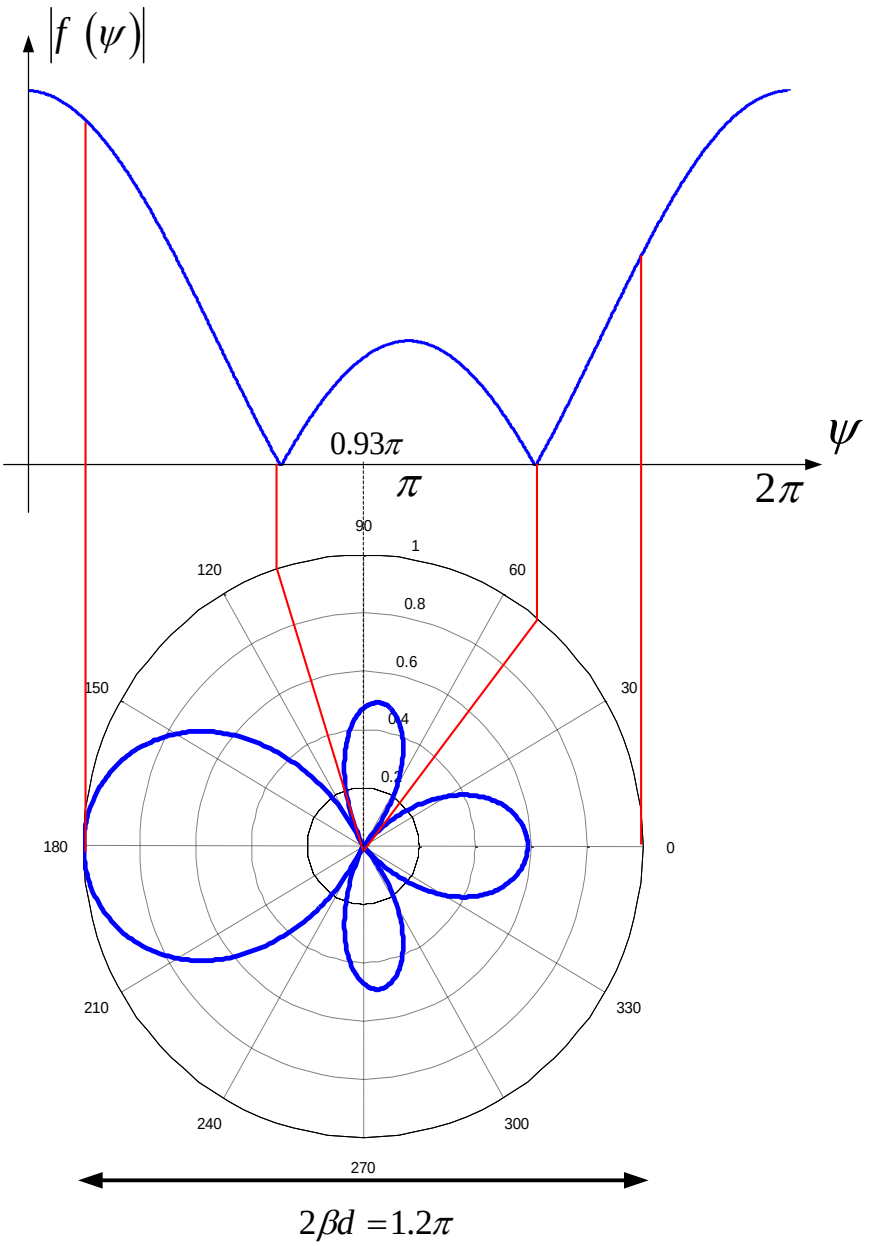
(ب) عبارت ضریب آرایه جامع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f\ (\psi)=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(N\psi/2\right)}{\sin\left(\psi/2\right)}=\frac{1}{3}\frac{\sin\left(3\psi/2\right)}{\sin\left(\psi/2\right)}$$

که

$$\psi=\beta d\cos\theta+\alpha=0.6\pi\cos\theta+0.93\pi$$

می‌توان با استفاده از دو عبارت فوق ضریب آرایه را به‌صورت زیر رسم نمود:



(ج) همانطور که می‌دانیم با استفاده از نظریه تصویر یک آنتن تک قطبی ربع طول موج که در مجاورت زمین قرار گرفته است، معادل یک آنتن دوقطبی نیم‌موج می‌باشد. بنابراین پترن هر عنصر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

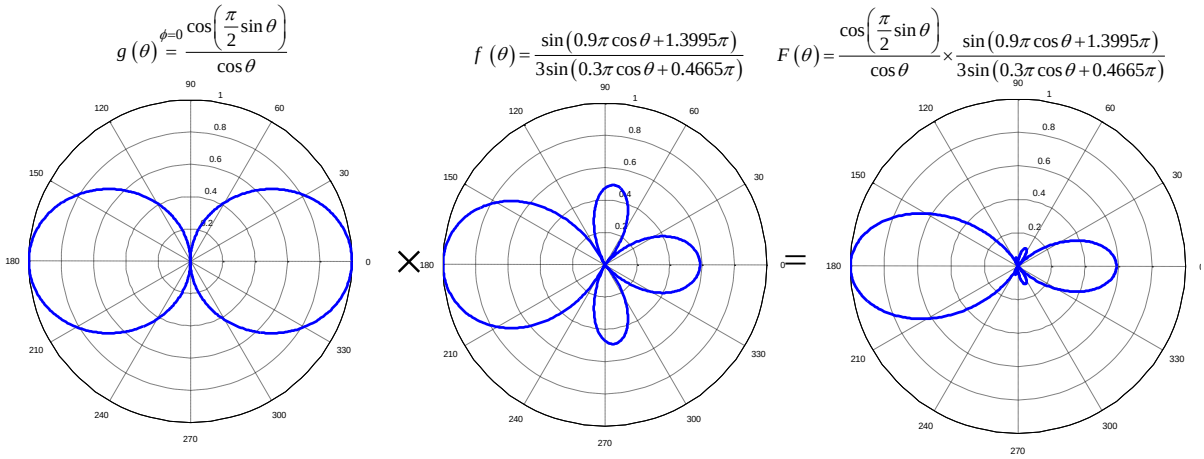
$$g(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

در نتیجه پترن کلی آرایه به‌صورت زیر می‌باشد:

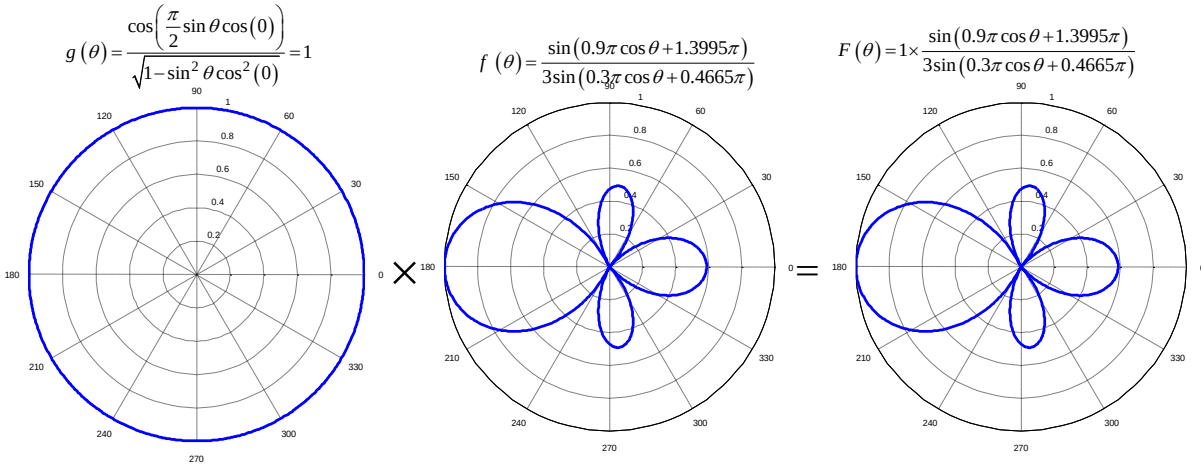
$$F(\theta,\phi)=g(\theta)f\ (\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}}\times\frac{1}{3}\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\left(0.6\pi\cos\theta+0.93\pi\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(0.6\pi\cos\theta+0.93\pi\right)\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}}\times\frac{\sin\left(0.9\pi\cos\theta+1.3995\pi\right)}{3\sin\left(0.3\pi\cos\theta+0.4665\pi\right)}$$

شکل پترن آرایه در صفحه xz با قرار دادن $\phi=0$ حاصل می‌شود. درنتیجه داریم:

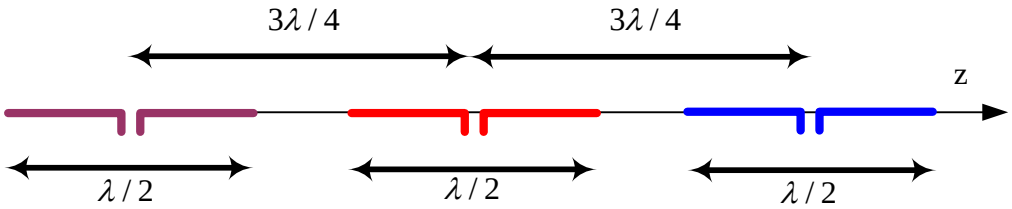


همچنین برای رسم پترن آرایه در صفحه yz باید قرار دهیم $\phi=\pi/2$، بنابراین:



۱۲- سه آنتن دوقطبی نیم‌موج هم‌خطی (collinear) به فاصله $d=3\lambda/4$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند و با فاز و دامنه یکسان تحریک شده‌اند. با استفاده از تئوری آرایه‌ها پترن آرایه آنتنی را رسم کنید.

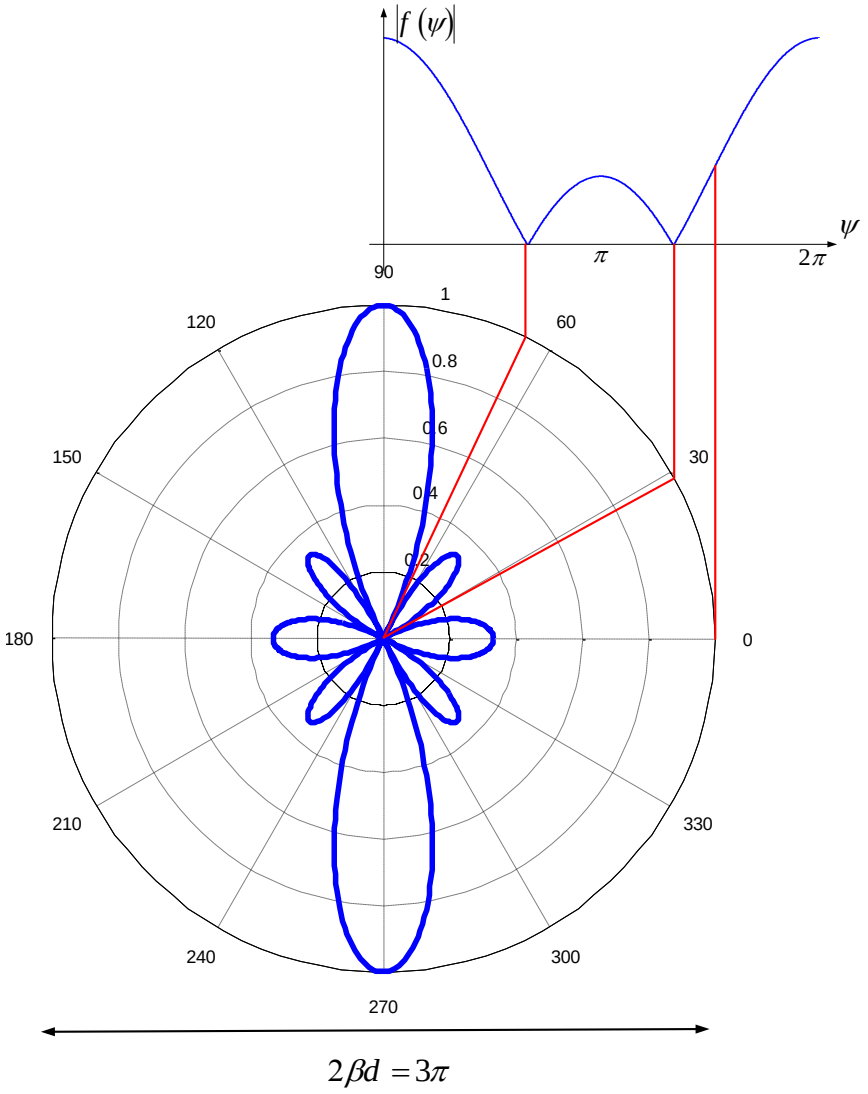
حل) ساختار مسئله به‌صورت شکل زیر می‌باشد:



ضریب آرایه برای این آرایه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} f\ (\psi) = \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\left(N\psi/2\right)}{\sin\left(\psi/2\right)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin\left(3\psi/2\right)}{\sin\left(\psi/2\right)} \\ \psi = \beta d\cos\theta + \alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}\times\dfrac{3}{4}\lambda\times\cos\theta + 0 = \dfrac{3\pi}{2}\cos\theta \end{cases}$$

که در شکل زیر رسم شده است:

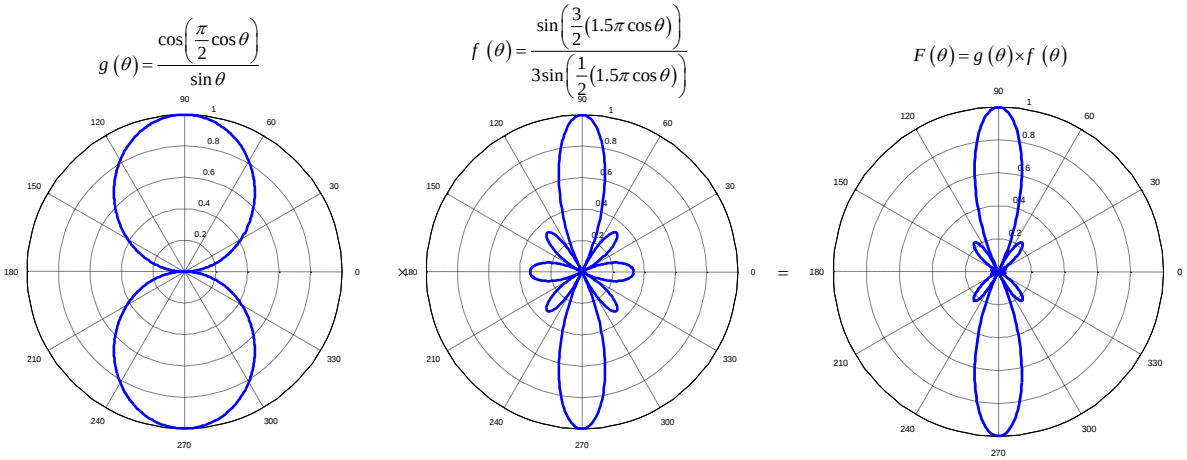


$$2\beta d = 3\pi$$

همچنین می‌دانیم پترن آنتن دوقطبی نیم‌موجی که در راستای z واقع شده است، به‌صورت زیر می‌باشد:

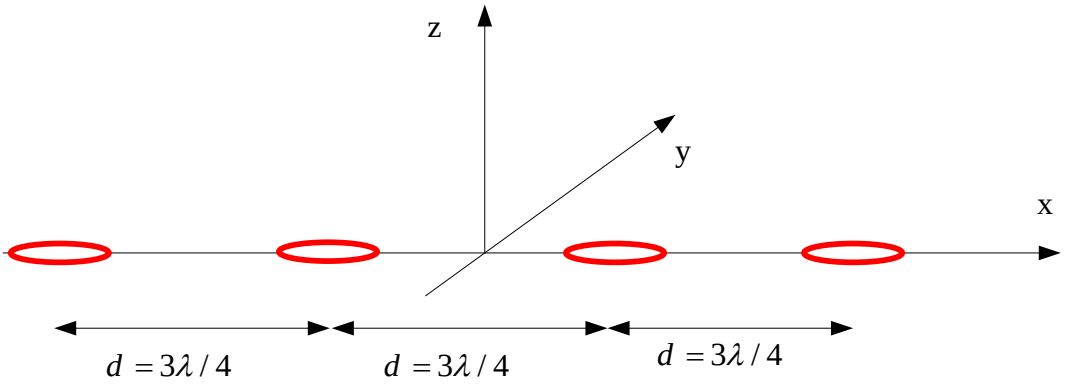
$$g(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\cos\theta}$$

بنابراین طبق اصل ضرب پرتوها پترن کلی آرایه متشکل از سه دوقطبی نیم‌موج به‌صورت زیر رسم می‌شود.



۱۳- یک آرایه متشکل شده است از ۴ آنتن حلقوی کوچک که روی محور x و به فواصل $3\lambda/4$ قرار گرفته‌اند. همچنین حلقه‌های روی صفحه xy قرار گرفته‌اند. با فرض تحریک دامنه و فاز یکسان پترن آرایه آنتنی را در صفحات xy و xz و yz محاسبه و رسم کنید.

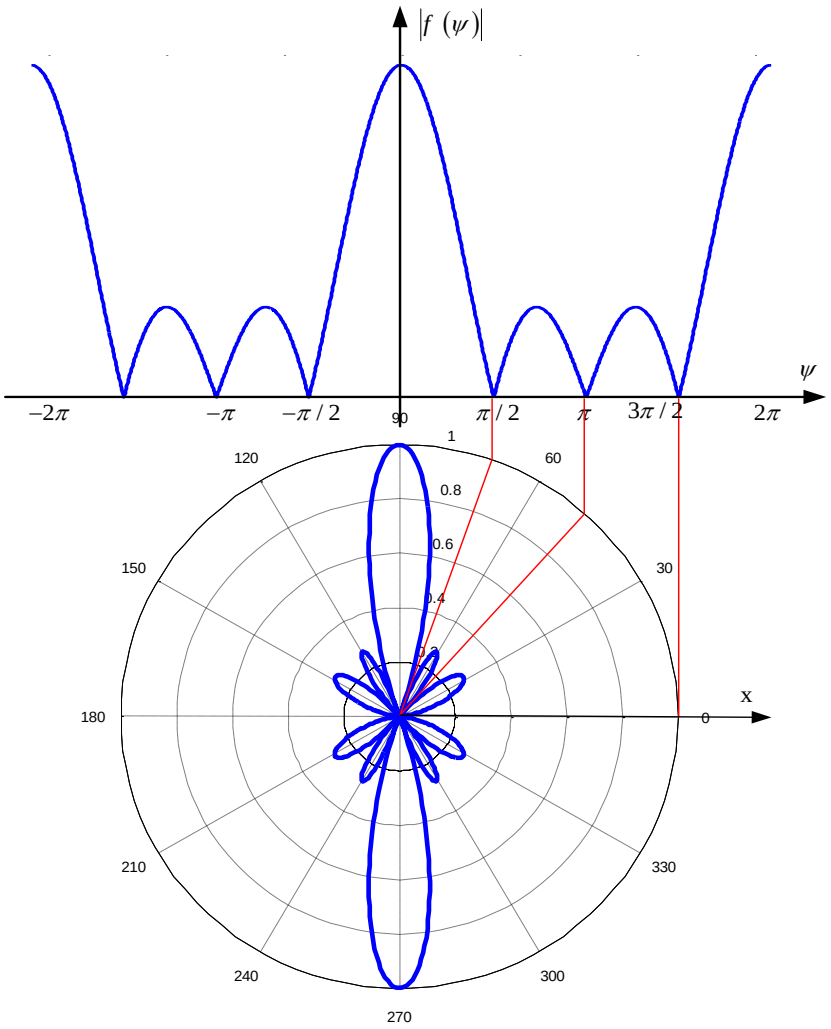
حل) ساختار این آنتن در شکل زیر نشان داده شده است:



برای این آرایه عبارت ضریب آرایه به‌صورت زیر می‌باشد (توجه کنید که محور آرایه x است.):

$$\begin{cases} f(\theta)=\frac{1}{N}\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}=\frac{1}{4}\frac{\sin(2\psi)}{\sin(\psi/2)} \\ \psi=\beta d\cos\gamma+\alpha=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{3\lambda}{4}\right)\sin\theta\cos\phi+0=\frac{3\pi}{2}\sin\theta\cos\phi \end{cases}$$

برای رسم ضریب آرایه زاویه γ را درنظر می‌گیریم. بنابراین کافی است مشابه مثال‌های قبل عمل کنیم با این تفاوت که زاویه را نسبت به محور x در نظر بگیریم. بنابراین شکل آن به‌صورت زیر خواهد بود:



دقت کنید که ضریب آرایه رسم شده در شکل فوق براساس زاویه نسبت به محور x می‌باشد.

همچنین همانطور که می‌دانیم پترن آنتن‌های حلقوی که روی صفحه xy قرار گرفته‌اند به‌صورت زیر می‌باشد:

$$g(\theta)=\sin\theta$$

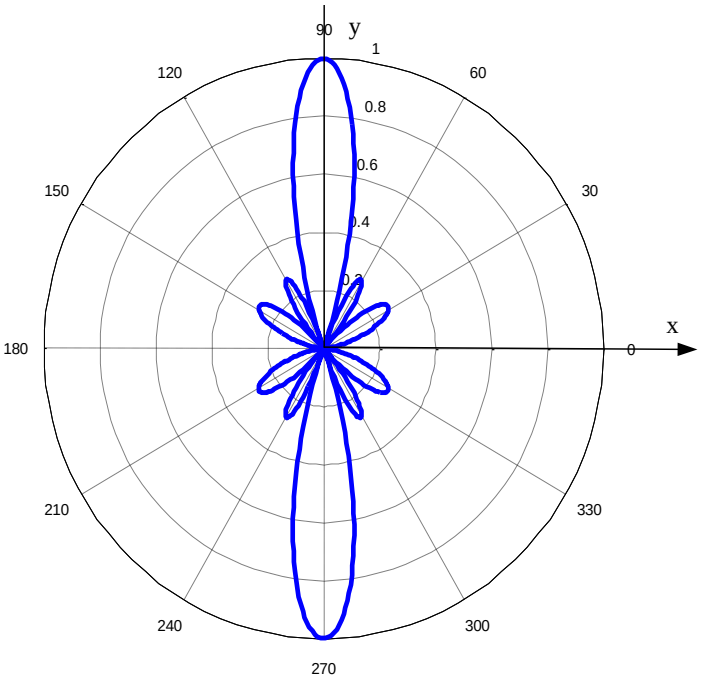
در نتیجه پترن کلی آرایه که با استفاده از اصل ضرب پترن‌ها به‌دست می‌آید، به‌صورت زیر است:

$$F(\theta,\phi)=g(\theta)\times f(\theta,\phi)=\sin\theta\times\frac{\sin(3\pi\cos\gamma)}{4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cos\gamma\right)}=\sin\theta\times\frac{\sin(3\pi\sin\theta\cos\phi)}{4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\sin\theta\cos\phi\right)}$$

برای رسم پترن کلی روی صفحه xy باید قرار دهیم $\theta=\pi/2$، درنتیجه داریم:

$$F(\theta,\phi)=\frac{\sin\left(3\pi\cos\phi\right)}{4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cos\phi\right)}$$

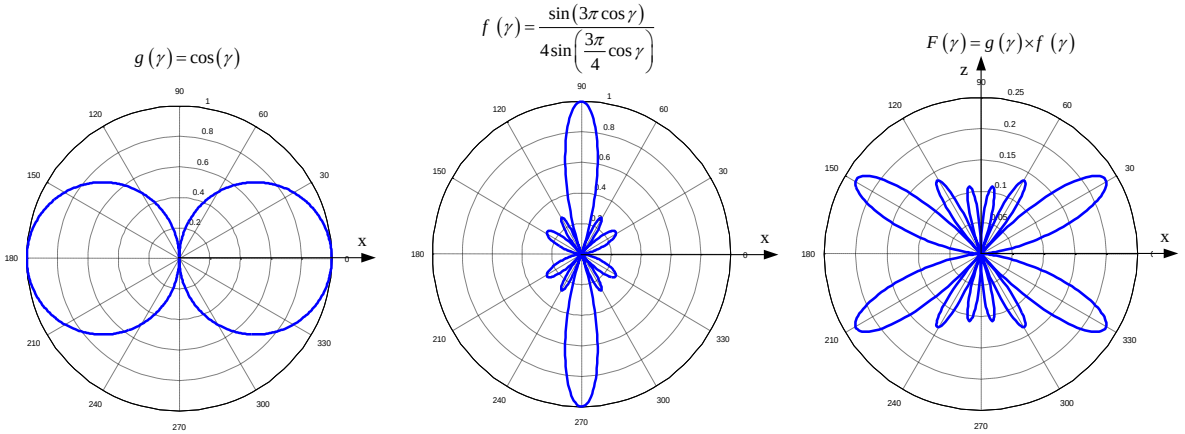
که اگر زاویه γ را برابر ϕ درنظر بگیریم، همان ضریب آرایه خواهد بود که شکل آن به‌صورت زیر رسم می‌شود:



همچنین برای رسم پترن کلی روی صفحه xz باید قرار دهیم $\phi=0$ ، درنتیجه داریم:

$$F(\theta,\phi)=\sin\theta\times\frac{\sin\left(3\pi\sin\theta\right)}{4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right)}\overset{\cos\gamma=\sin\theta\cos(0)}{=}\cos\gamma\times\frac{\sin\left(3\pi\cos\gamma\right)}{4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cos\gamma\right)}$$

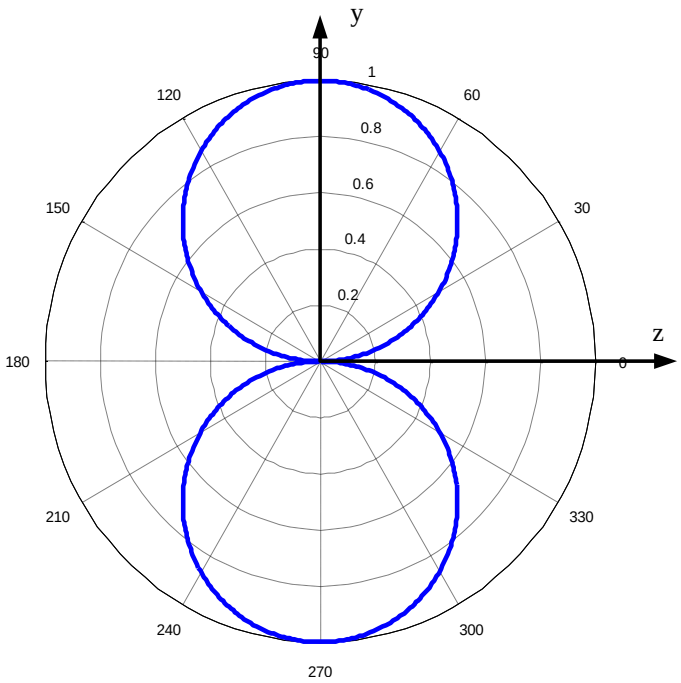
که رسم آن به‌صورت زیر می‌باشد (رسم بر اساس زاویه γ که نسبت به محور x سنجیده می‌شود، انجام می‌شود):



همچنین برای رسم پترن کلی در صفحه yz باید قرار دهیم $\phi = \pi/2$، که در نتیجه پترن به‌صورت زیر است:

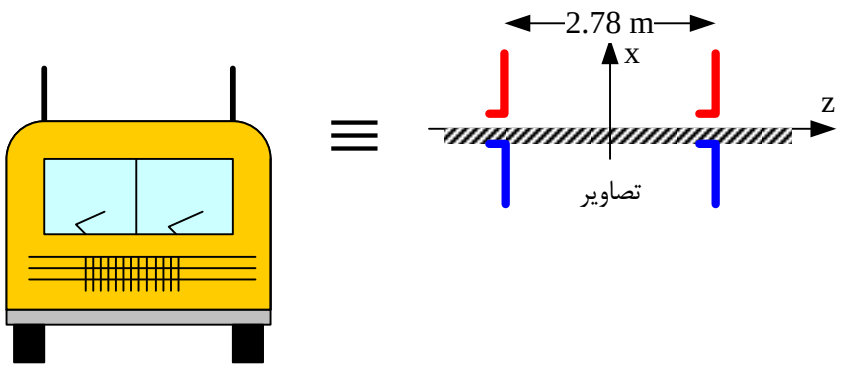
$$F(\theta,\phi) = \sin\theta \times \frac{\sin\left(3\pi \sin\theta \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} = \sin\theta$$

که شکل آن به‌صورت زیر است:



۱۴- فرض کنید که یک کامیون از باند شهری در ۲۷ مگاهرتز برای مخابره خود استفاده می‌کند. سیستم آنتنی آن متشکل شده است از دو آنتن تک قطبی موازی با محور x که به فاصله ۲/۷۸ متر از هم روی محور z قرار گرفته‌اند. با فرض برابر بودن دامنه و فاز تحریک دو آنتن، پترن آرایه آنتنی مورد بحث را در صفحات اصلی رسم کنید.

حل) ساختار مسئله در شکل زیر نشان داده شده است:



با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$N = 2$$

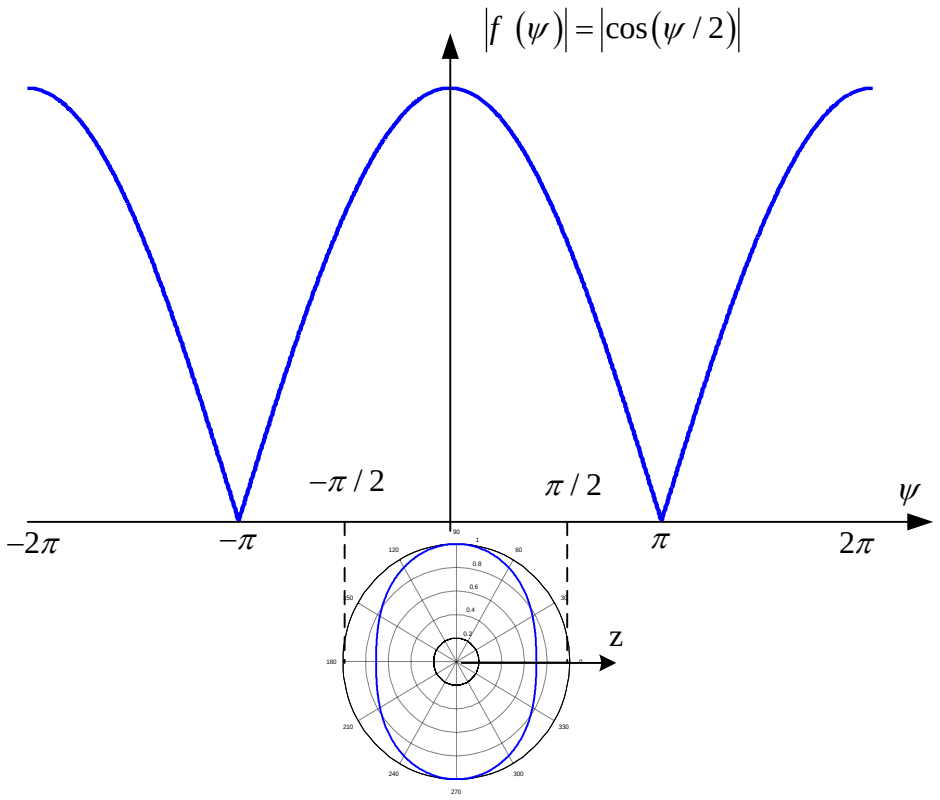
$$f = 27MHz \rightarrow \lambda = 11.1m \rightarrow d = \frac{\lambda}{4}$$

بنابراین ضریب آرایه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(\psi) = \frac{1}{N}\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(\psi)}{\sin(\psi/2)} = \cos(\psi/2)$$

$$\psi = \beta d\cos\theta + \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\cos\theta + 0 = \frac{\pi}{2}\cos\theta$$

که شکل آن وابستگی به نداشته و حول محور z متقارن است، یعنی پترن روی صفحات xz و yz مشابه هم بوده و به‌صورت زیر رسم می‌شود:



همچنین پترن روی صفحه xy با قرار دادن به‌دست می‌آید که با توجه به عبارت زیر:

$$|f(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1$$

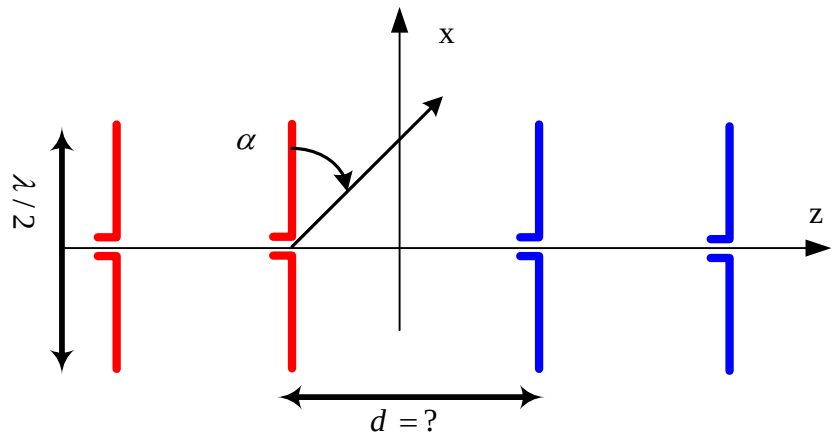
یک دایره است.

۱۵- یک آرایه چهارتایی پهلوآتش (broadside) از آنتن‌های دوقطبی نیم‌موج طراحی کنید که پهنای تابه (beamwidth) تا حد امکان باریک باشد و گلبرگ‌های فرعی دارای حداقل 8 dB

اختلاف دامنه نسبت به ماکزیمم گلبرگ اصلی باشند. فرض این است که تحریک یکنواخت است.

(الف) فاصله بین عناصر (d) را بیابید. (ب) پترن‌های قطبی را در صفحات E و H رسم کنید.

حل) ساختار مسئله در شکل زیر نشان داده شده است:



با توجه به شکل فوق و با توجه به اینکه پترن عناصر دوقطبی به دلیل قرار گرفتن در راستای محور x به‌صورت $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\gamma\right)}{\sin\gamma}$ است که γ زاویه نسبت به محور x است، (زیرا قبلا دیدیم که دوقطبی‌های نیم‌موجی که در راستای z هستند دارای پترن $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$ است.)، بنابراین حالت broadside را نمی‌توان در صفحه xz داشت زیرا ضرب پترن آرایه و پترن عنصر در جهت x که جهت broadside است صفر می‌شود. در نتیجه صفحه مطلوب برای داشتن حالت broadside صفحه yz است. در این صفحه پترن عنصر برابر واحد است، زیرا:

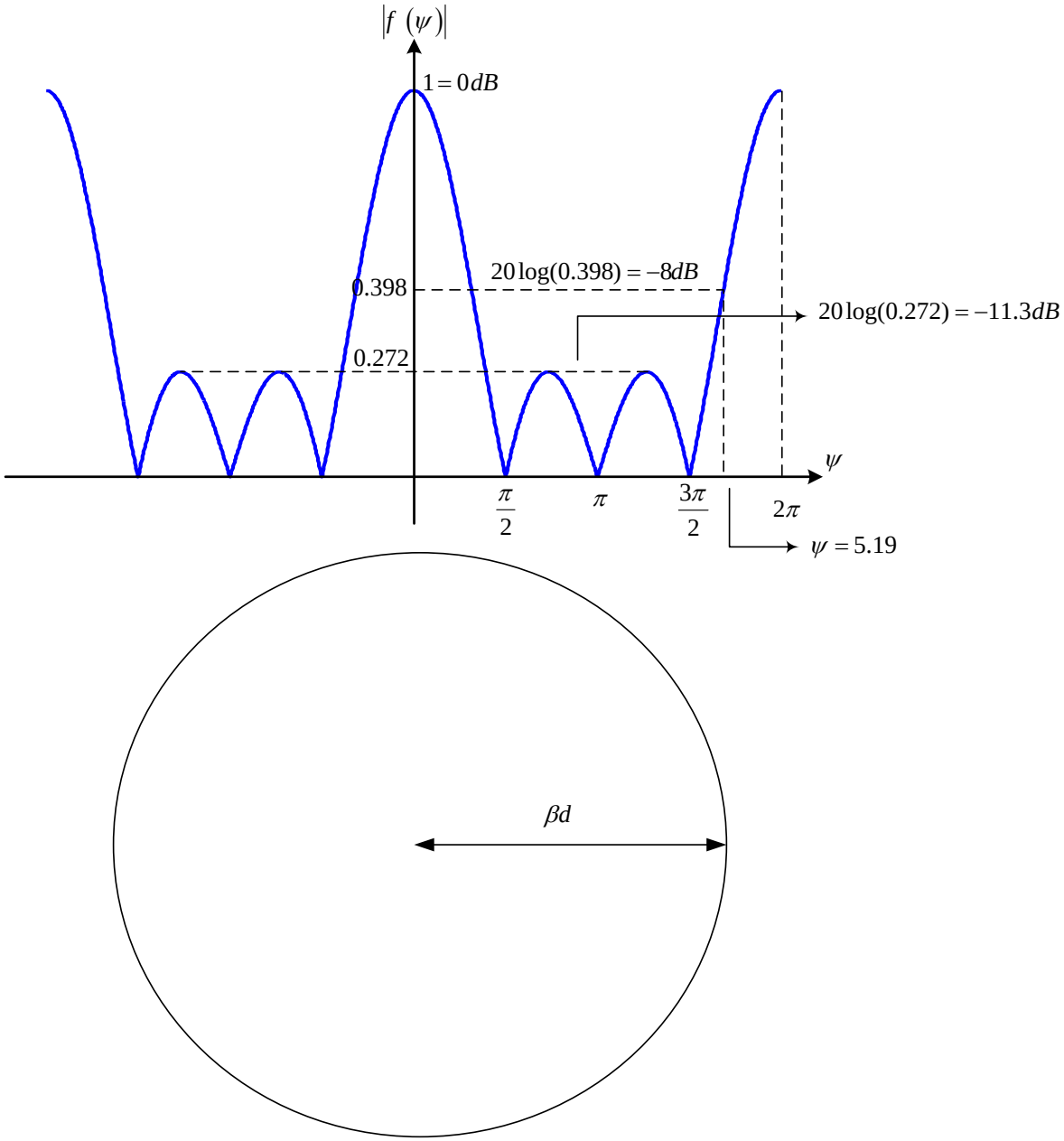
$$g(\theta,\phi)|_{yz-plane} = g(\gamma)|_{\gamma=\pi/2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\pi/2)\right)}{\sin(\pi/2)} = 1$$

در نتیجه برای طراحی فقط پترن آرایه (یا ضریب آرایه) را درنظر می‌گیریم. برای چهار عنصر ضریب آرایه به‌صورت زیر است:

$$f(\psi) = \frac{1}{N}\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} = \frac{1}{4}\frac{\sin(2\psi)}{\sin(\psi/2)}$$

$$\psi = \beta d\cos\theta + \alpha \overset{broadside\,(\alpha=0)}{=} \beta d\cos\theta$$

که برای داشتن پهنای تابه گلبرگ اصلی تا حد ممکن باریک باید در ناحیه مرئی (ناحیه‌ای از منحنی که توسط دایره پوشش داده می‌شود) به‌جز پیک پترن که توسط گلبرگ اصلی مشاهده می‌شود، دامنه بزرگتر از 8 dB- مشاهده نکنیم. در شکل زیر ضریب آرایه نشان داده شده است.



با توجه به شکل واضح است که دو گلبرگ کوچک واقع شده در بازه $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ مشکلی را از نظر اندازه 8- dB ندارند، زیرا دامنه ماکزیمم پترن توان برای این دو گلبرگ برابر 11.3- dB است که کمتر از مقدار 8- dB خواسته شده است. در نتیجه می‌توان βd را تا آنجا افزایش داد که برابر ۵/۱۹ شود زیرا در این نقطه دامنه پترن توان برابر 8- dB می‌شود. (توجه کنید که پترن توان برابر مجذور پترن میدان است، بنابراین برای به‌دست آوردن مقدار لگاریتمی پترن میدان برحسب پترن میدان از رابطه مقابل استفاده شده است: $10\log\left|f(\theta)\right|^2=20\log\left|f(\theta)\right|$). بنابراین فاصله d از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

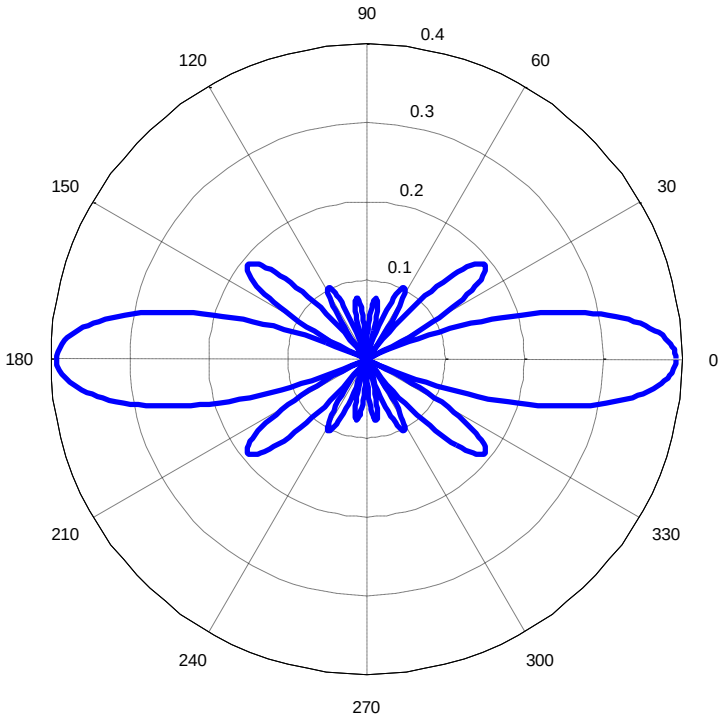
$$\beta d = 5.19 \rightarrow d = \frac{5.19}{2\pi/\lambda} = 0.826\lambda$$

صفحه E صفحه‌ای است که جهت ماکزیمم تشعشع و جهت میدان الکتریکی آن را ایجاد می‌کنند. با توجه به این توضیح صفحه E مربوط به دوقطبی‌ها، صفحه xz (یا هر صفحه‌ای است که شامل محور x باشد) است و پترن آرایه آنتنی روی این صفحه به این صورت به‌دست می‌آید:

$$F(\theta) = g(\theta,\phi) \times f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\gamma\right)}{\sin\gamma} \times \frac{1}{4}\frac{\sin(2\psi)}{\sin(\psi/2)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}} \times \frac{1}{4}\frac{\sin(2\beta d\cos\theta)}{\sin\left(\frac{\beta d\cos\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}} \times \frac{1}{4}\frac{\sin(10.38\cos\theta)}{\sin(2.595\cos\theta)}$$

$$xz-plane(\phi=0): F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}\frac{1}{4}\frac{\sin(10.38\cos\theta)}{\sin(2.595\cos\theta)}$$



(سعی کنید توسط اصل ضرب پترن‌ها و ضرب کردن تصویری پترن عنصر و ضریب آرایه به شکل فوق برسید.)

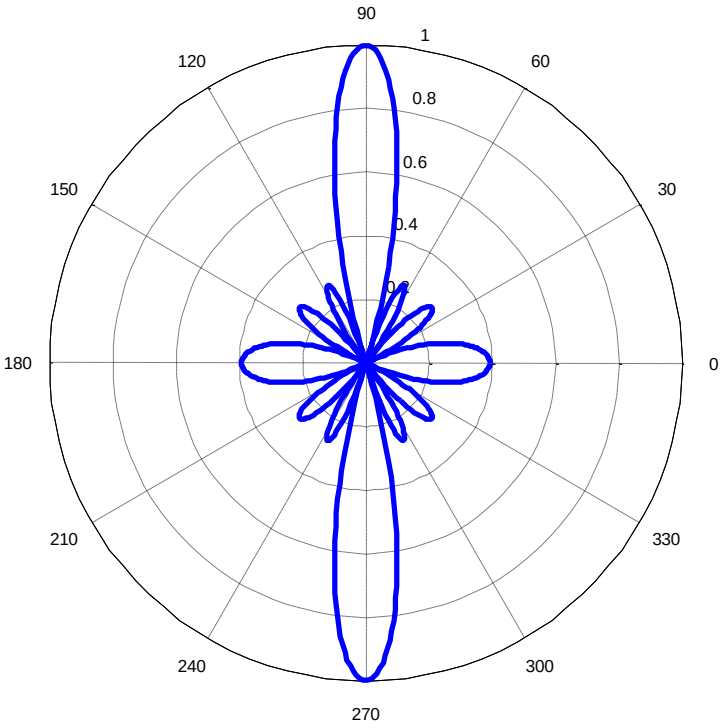
صفحه H صفحه‌ای است که توسط جهت ماکزیمم تشعشع و جهت میدان مغناطیسی آن ایجاد می‌شود. بنابراین برای دوقطبی‌های مفروض در مسئله صفحه H صفحه yz است. در این صفحه پترن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F(\theta)=g(\theta,\phi)\times f(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\gamma\right)}{\sin\gamma}\times\frac{1}{4}\frac{\sin(2\psi)}{\sin(\psi/2)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}}\times\frac{1}{4}\frac{\sin(2\beta d\cos\theta)}{\sin\left(\frac{\beta d\cos\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}}\times\frac{1}{4}\frac{\sin(10.38\cos\theta)}{\sin(2.595\cos\theta)}$$

$$xz-plane(\phi=\frac{\pi}{2}):F(\theta)=\frac{1}{4}\frac{\sin(10.38\cos\theta)}{\sin(2.595\cos\theta)}$$

که رسم آن همانند شکل ضریب آرایه است که به‌صورت زیر می‌توان ترسیم کرد:



۱۶- سمت‌گرایی آرایه‌های زیر را که از عناصر نقطه‌ای (ایزوتروپیک) تشکیل شده‌اند را محاسبه کنید.

(الف) $N=2,\ d=\lambda/2$

(ب) $N=15,\qquad d=\lambda$

حل) سمت گرایی یک آرایه خطی که از عناصر ایزوتروپیک ساخته شده است توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D=\frac{1}{\frac{1}{N}+\frac{2}{N^2}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{N-m}{m\beta d}\sin m\beta d\cos m\alpha}$$

که در حالتی که فاصله عناصر مضرب صحیحی از نصف طول موج باشد، سمت‌گرایی توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$d = n\frac{\lambda}{2}, \alpha = 0 \rightarrow D = N$$

بنابراین برای قسمت (الف) داریم:

$$D = N = 2 \rightarrow D^{dB} = 10\log(2) = 3dB$$

همچنین برای قسمت (ب) داریم:

$$D = N = 15 \rightarrow D^{dB} = 10\log(15) = 11.8dB$$

۱۷- نشان دهید که برای یک آرایه خطی سرآتش (endfire) معمولی که دارای عناصر ایزوتروپیک با فاصله‌گذاری ربع طول موج است، داریم $D=N$.

حل) برای این آرایه داریم:

$$\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \pm\beta d = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow D = \frac{1}{\frac{1}{N} + 0} = N$$

۱۸- یک آرایه خطی با فاصله گذاری $d = \lambda/2$ را که عناصر آن به صورت دوجمله‌ای تحریک شده‌اند را درنظر بگیرید.

(الف) ضریب آرایه نرمالیزه را برحسب θ بیابید.

(ب) رابطه‌ای برای سمت‌گرایی بیابید.

(ج) سمت‌گرایی را برای N=5 محاسبه کنید.

حل) (الف) برای دوعنصر ضریب آرایه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$AF(\psi) = 1 + e^{j\psi} = 1 + e^{j\beta d\cos\theta} \overset{d=\lambda/2}{=} 1 + e^{j\pi\cos\theta} = 2e^{j\frac{\pi}{2}\cos\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

$$\rightarrow f(\theta) = |AF(\psi)|_{normalized} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

بنابراین برای یک آرایه دوجمله‌ای N عنصری داریم:

$$AF = \left[1 + e^{j\psi}\right]^{N-1} \Rightarrow f(\theta) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]^{N-1}$$

(ب) داریم:

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left|f\ (\theta)\right|^2 \sin\theta d\,\theta d\,\phi = 2\pi \int_0^{\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]^{2(N-1)} \sin\theta d\,\theta$$

$$\xrightarrow{u=\frac{\pi}{2}\cos\theta \to du=-\frac{\pi}{2}\sin\theta d\,\theta} = 2\pi \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left[\cos u\right]^{2N-2} \frac{du}{-\pi/2} = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\cos u\right]^{2N-2} du$$

با توجه به عبارت زیر

$$\int \cos^{2m}(x)dx = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}x + \sin(x)\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(2m)!(r!)^2}{2^{2m-2r}(2r+1)!(m!)^2}\cos^{2r+1}(x)$$

می‌توانیم انتگرال مذکور را به‌صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\Omega_A = 4\frac{\left[2(N-1)\right]!}{2^{2N-2}\left[(N-1)!\right]^2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 4\pi \times \frac{\left[2(N-1)\right]!}{2^{2N-2}\left[(N-1)!\right]^2}$$

بنابراین سمت گرایی برابر است با:

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = \frac{2^{2N-2}\left[(N-1)!\right]^2}{\left[2(N-1)\right]!}$$

(ج) برای N=5 داریم:

$$D = \frac{2^8\left[4!\right]^2}{8!} = 3.66$$