(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم) — کد فرم : FR/FY/11

دانشکده ریاضی — ویرایش : صفر

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی۱-فنی (۷ گروه هماهنگ)**	نیمسال (اول/ **دوم**) **۹۴**-۱۳۹۳	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۴/۳/۲۵**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- حد مقابل را محاسبه کنید : $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cot x}{\sqrt{1-x}-1}$ — **۱۵ نمره**

سوال۲- همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+e^x}dx$ را مشخص کنید. — **۱۵ نمره**

سوال۳- ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x^2$ و $y=x+2$ حول محور y ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید. — **۱۵ نمره**

سوال۴- انتگرال نامعین $\int\frac{3x^3+2x^2+3x-4}{x^4-1}dx$ را حل کنید. — **۲۰ نمره**

سوال۵- طول قوس منحنی $0\le t\le \ln 3$, $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t\end{cases}$ را محاسبه کنید. — **۲۰ نمره**

سوال۶- الف) همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^\infty\frac{\arctan n}{1+n^2}$ را مشخص کنید. — **۱۰ نمره**

ب) بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^\infty(\frac{x^2+1}{5})^n$ را بیابید. — **۱۰ نمره**

سوال۷- سری مک لورن تابع $y=\sqrt[4]{1+x}$ را بنویسید. (پنج جمله اول کافی است) — **۱۵ نمره**

موفق باشید

سوال۱- روش اول :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cot x}{\sqrt{1-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cot x}{\sqrt{1-x}-1}\times\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x\tan x}(\sqrt{1-x}+1)=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\tan x}(\sqrt{1-x}+1)=-1\times 2=-2$$

روش دوم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cot x}{\sqrt{1-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cot x}{\sqrt{1-x}-1}\times\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{-x\sin x}(\sqrt{1-x}+1)=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin x}\cos x(\sqrt{1-x}+1)=-1\times 1\times 2=-2$$

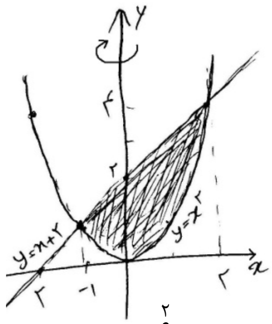
روش سوم : از قاعده هوپیتال هم می‌توان استفاده کرد ولی ساده تر از دو روش قبلی نخواهد بود.

سوال۲- چون $1\le$ $0<e^{-x^2}$ و $0<e^{x}$ داریم $0<\dfrac{e^{-x^2}}{1+e^x}\le\dfrac{1}{1+e^x}\le\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$

و در نتیجه $0<\int_0^\infty\dfrac{e^{-x^2}}{1+e^x}dx\le\int_0^\infty\dfrac{1}{1+e^x}dx\le\int_0^\infty e^{-x}dx$. دو انتگرال حاصل همگرا هستند زیرا :

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1 \qquad ، \qquad \int_0^\infty\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\ln(e^{-x}+1)\Big|_0^\infty=\ln 2$$

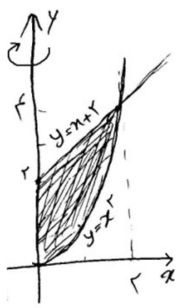
نتیجه می گیریم که انتگرال ناسره $\int_0^\infty\dfrac{e^{-x^2}}{1+e^x}dx$ همگراست.



سوال۳- همانگونه که در شکل دیده می‌شود قرینه قسمتی از ناحیه که سمت چپ محور y ها قرار دارد در سمت راست ناحیه هم وجود دارد پس نیازی به دوران آن نیست.
بنابر این دوران قسمتی از ناحیه که سمت راست محور y ها قرار دارد برای ساخته شدن حجم مورد نظر کفایت می کند.

روش اول (روش پوسته استوانه ای) :

$$\int_0^2 2\pi x(x+2-x^2)dx=2\pi\int_0^2(x^2+2x-x^3)dx=2\pi\Big[\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{x^4}{4}\Big]_0^2=2\pi\Big[\frac{8}{3}+4-\frac{16}{4}\Big]_0^2=\frac{16}{3}\pi$$



روش دوم (قرص مستدیر) :

$$\int_0^2\pi y\,dy+\int_2^4\pi(y-(y-2)^2)dy=\frac{\pi y^2}{2}\Big|_0^2+\pi\Big[\frac{y^2}{2}-\frac{(y-2)^3}{3}\Big]_2^4=2\pi+\pi\Big(8-\frac{8}{3}-2\Big)=\frac{16}{3}\pi$$

روش سوم : سهمی و خط را جداگانه دوران می دهیم و تفاضل آنها را حساب می‌کنیم

$$\int_0^4\pi y\,dy-\int_2^4\pi(y-2)^2dy=\frac{\pi y^2}{2}\Big|_0^4-\pi\frac{(y-2)^3}{3}\Big|_2^4=8\pi-\frac{8}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$$

سوال۴- ابتدا مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ اکنون می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{3x^3+2x^2+3x-4}{x^4-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{cx+d}{x^2+1}=\frac{(a+b+c)x^3+(a-b+d)x^2+(a+b-c)x+(a-b-d)}{x^4-1}$$

اکنون یک دستگاه ۴ معادله و ۴ مجهول داریم : $a+b+c=3\,,\ a-b+d=2\,,\ a+b-c=3\,,\ a-b-d=-4$

که نتیجه می دهد : $a=1\,,\ b=2\,,\ c=0\,,\ d=3$

اکنون داریم : $\displaystyle\int\frac{3x^3+2x^2+3x-4}{x^4-1}dx=\int\Big(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x^2+1}\Big)dx=\ln(x-1)+2\ln(x+1)+3\arctan x+c$

سوال۵- داریم :
$$\begin{cases} dx = e^t(\cos t - \sin t)dt \\ dy = e^t(\sin t + \cos t)dt \end{cases} \rightarrow (dx)^2 + (dy)^2 = [e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2](dt)^2$$

$$\rightarrow (dx)^2 + (dy)^2 = [2e^{2t}](dt)^2 \rightarrow \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{2}e^t dt$$

اکنون طول قوس مورد نظر برابر است با :
$$\int_0^{\ln 3}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_0^{\ln 3}\sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t \Big|_0^{\ln 3} = 2\sqrt{2}$$

سوال۶- الف) روش اول : اگر $a_n = \dfrac{\arctan n}{1+n^2}$ آنگاه $0 < a_n < \dfrac{2}{1+n^2}$ و $a_n \to 0$ و اگر $x \geq 1$ و $f(x) = \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ داریم :
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{2x\arctan x}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1-2\times 1\times(\pi/4)}{(1+x^2)^2} < \frac{1-2\times 1\times(2/4)}{(1+x^2)^2} = 0$$

تابع f در ناحیه $x \geq 1$ پیوسته و نزولی است و در نتیجه دنباله $\{a_n\}$ نزولی است بنابر این شرایط آزمون انتگرال برقرار است. داریم :
$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 \Big|_1^\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{3\pi^2}{32}$$

اکنون طبق آزمون انتگرال ، چون انتگرال $\int_1^\infty \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$ همگراست پس سری $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\arctan n}{1+n^2}$ نیز همگرا خواهد بود.

روش دوم : چون $n > 0$ پس $0 < \arctan n < 2$ بنابر این $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\arctan n}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^\infty \dfrac{2}{1+n^2} \leq 2\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^2}$

اکنون طبق آزمون مقایسه ، چون سری $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^2}$ همگراست پس سری $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\arctan n}{1+n^2}$ نیز همگرا خواهد بود.

ب) طبق آزمون ریشه و یا آزمون نسبت ، اگر بخواهیم این سری همگرا باشد باید داشته باشیم $\left|\dfrac{x^2+1}{5}\right| \leq 1$ یعنی $x^2+1 \leq 5$ و در نتیجه $x^2 \leq 4$ و یا $-2 \leq x \leq 2$. به ازای نقاط $x = \pm 2$ سری $\sum_{n=0}^\infty 1$ به دست می‌آید که واگراست.

بنابر این ناحیه همگرایی سری عبارت است از : $(-2,2)$

سوال۷- باید تا مشتق چهارم y را محاسبه کنیم.
$$y = (1+x)^{\frac{1}{4}} \rightarrow y' = \frac{1}{4}(1+x)^{\frac{-3}{4}} \rightarrow y'' = \frac{-3}{16}(1+x)^{\frac{-7}{4}} \rightarrow y''' = \frac{21}{64}(1+x)^{\frac{-11}{4}} \rightarrow y^{(4)} = \frac{-232}{256}(1+x)^{\frac{-15}{4}}$$

$$y(0) = 1 \rightarrow y'(0) = \frac{1}{4} \rightarrow y''(0) = \frac{-3}{16} \rightarrow y'''(0) = \frac{21}{64} \rightarrow y^{(4)}(0) = \frac{232}{256}$$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2!}\times\frac{-3}{16}x^2 + \frac{1}{3!}\times\frac{21}{64}x^3 + \frac{1}{4!}\times\frac{-232}{256}x^4 + \cdots$$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 - \frac{29}{768}x^4 + \cdots$$