(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۱-فنی (۱۲ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۰-۱۳۸۹** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۸۹/۱۰/۲۵** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- الف) محاسبه کنید : $l = \lim_{x\to\infty}(x^۲ + a^۲)^{\frac{۱}{x^۲}}$ **۱۰ نمره**

ب) اگر $\tan\varphi = \sinh x$ نشان دهید که : $x = \ln(\tan\varphi + \sec\varphi)$ **۱۵ نمره**

سوال۲- بازه همگرایی سری توانی $\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k(\frac{۳}{۴})^k(۲x-۱)^k$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۳- حجم حاصل از دوران سطح محصور به دو منحنی $x^۲ + y = ۰$ و $x = y^۳$ حول محور xها را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴- در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n(\ln n)^p}$ بحث کنید. **۲۰ نمره**

سوال۵- انتگرال نامعین $\int \ln(x+x^۲)dx$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۶- انتگرال مثلثاتی $\int\frac{dx}{۵\sec x - ۳}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۷- طول قوس منحنی $y = e^x$ را در بازه $[۰,۱]$ محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

(ǜǩ-ĤğlŇ5 $\ln l = \lim_{x\to\infty}\ln(x^2+a^2)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x/(x^2+a^2)}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+a^2} = 0 \to l = 1$$

(ƙ-ĤğlŇ5 $\tan\varphi = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to e^x - e^{-x}$

$$= 2\tan\varphi \to e^{2x} - (2\tan\varphi)e^x - 1 = 0$$

$$\to e^x = \tan\varphi \pm \sqrt{\tan^2\varphi + 1}$$

$$\to e^x = \tan\varphi + \sec\varphi \to x = \ln(\tan\varphi + \sec\varphi)$$

چون $0 < e^x = \tan\varphi - \sqrt{\tan^2\varphi + 1} < 0$ پس حالت $e^x = \tan\varphi - \sqrt{\tan^2\varphi + 1}$ غیر قابل قبول است.

ĥ ğlŇ5 - از آزمون ریشه استفاده می کنیم. باید داشته باشیم :

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|(-1)^k(\frac{3}{4})k(2x-1)^k|} < 1$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|(-1)^k(\frac{3}{4})^k(2x-1)^k|} = \frac{3}{4}|2x-1| < 1 \to$$

$$|2x-1| < \frac{4}{3} \to -\frac{4}{3} < 2x-1 < \frac{4}{3} \to -\frac{1}{6} < x < \frac{7}{6}$$

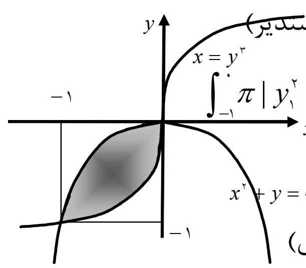
اگر $x = \frac{7}{6}$ آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\frac{3}{4})^k(2x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$

که واگراست. اگر $x = \frac{-1}{6}$ آنگاه

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\frac{3}{4})^k(2x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}1$$

که واگراست. پس بازه همگرایی عبارت است از $(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6})$.

ĦğlŇ5- روش اول- (روش قرص مستدیر)



$$\int_{-1}^{0}\pi|y_1^2 - y_2^2|dx = \int_{-1}^{0}\pi(x^{\frac{2}{3}} - x^4)dx$$

$$= \pi(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{5}x^5)|_{-1}^{0} = \frac{2\pi}{5}$$

روش دوم – (روش پوسته استوانه ای)

$$\int_{-1}^{0}2\pi y|x_1 - x_2|dy = \int_{-1}^{0}2\pi y(y^3 + \sqrt{-y})dy$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{0}(y^4 - (-y)^{\frac{3}{2}})dy = 2\pi(\frac{y^5}{5} + \frac{2}{5}(-y)^{\frac{5}{2}})|_{-1}^{0} = \frac{2\pi}{5}$$

ħğlŇ5- از آزمون انتگرال استفاده می کنیم. اگر $p = 1$ آنگاه $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x|_{2}^{\infty} = \infty$ یعنی انتگرال واگراست.

اگر $p < 1$ آنگاه $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}|_{2}^{\infty} = \infty$

یعنی انتگرال واگراست. اگر $p > 1$ آنگاه

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{-1}{(p-1)(\ln x)^{p-1}}|_{2}^{\infty} = \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$$

یعنی انتگرال همگراست. در نتیجه اگر $p > 1$ آنگاه سری همگرا و اگر $p \le 1$ سری واگراست.

Ĩ ğlŇ5 - از روش انتگرالگیری جزء به جزء با انتخاب $u = \ln(x + x^2)$ و $dv = dx$ استفاده می کنیم.

$$\int\ln(x + x^2)dx = x\ln(x + x^2) - \int x\cdot\frac{1+2x}{x+x^2}dx$$

$$= x\ln(x + x^2) - \int\frac{1+2x}{1+x}dx$$

$$= x\ln(x + x^2) - \int(2 - \frac{1}{1+x})dx$$

$$= x\ln(x + x^2) - \ln(1+x) - 2x + c$$

ĩ ğlŇ5 - از تغییر متغیر $t = \tan\frac{x}{2}$ استفاده می کنیم.

$$\int\frac{dx}{5\sec x - 3} = \int\frac{\cos x\,dx}{5 - 3\cos x} = \frac{1}{3}\int(\frac{5\,dx}{5 - 3\cos x} - 1)dx$$

$$= -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\int\frac{5[2/(1+t^2)]}{5 - 3[(1-t^2)/(1+t^2)]}dt$$

$$= -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\int\frac{10}{2 + 8t^2}dt = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\int\frac{5}{1 + 4t^2}dt$$

$$= -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\int\frac{5}{1 + 4t^2}dt = -\frac{x}{3} + \frac{5}{6}\arctan(2t) + c$$

$$= -\frac{x}{3} + \frac{5}{6}\arctan(2\tan\frac{x}{2}) + c$$

ĬğlŇ5 - از تغییر متغیر $u^2 = 1 + e^{2x}$ استفاده می کنیم

$dx = \frac{u\,du}{u^2 - 1}$ یعنی $2udu = 2e^{2x}dx$

$$l = \int_{0}^{1}\sqrt{1 + e^{2x}}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{u^2\,du}{1 + u^2}$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}(1 - \frac{1}{1+u^2})du = (u - \arctan u)|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

$$= \sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} - \arctan\sqrt{1 + e^2} + \arctan\sqrt{2}$$