(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۱-فنی (۴ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/**دوم**) **۹۲-۱۳۹۱** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۲/۳/۴** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- طول ساق یک مثلث متساوی الساقین برابر ۶ متر است. حداکثر مساحت آن چقدر است ؟ **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال نامعین $\int \frac{x^{۲}-۴x-۲}{x^{۳}+x}dx$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۳- انتگرال معین $\int_{۰}^{\ln\sqrt{۳}} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴- طول قوس منحنی $y=\frac{۱}{۴}x^{۲}-\frac{۱}{۲}\ln x$ در بازه $[۱\,,\,e]$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۵- حجم حاصل از دوران سطح محصور به منحنی $y=x\sqrt{\ln x}$ و خط $y=۰$ در بازه $[۱\,,\,e]$ حول خط $y=۰$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۶- الف) همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳۴}{۱۳n+۹۲}$ را مشخص کنید. **۱۵ نمره**

ب) شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(x-۲)^{n}}{۲^{n}\sqrt{n+۱}}$ را بیابید.

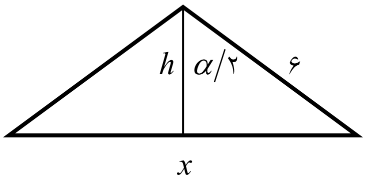
سوال۷- ۵ جمله اول سری مک لورن تابع $f(x)=\ln(۲x+۳)$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

سوال۱- روش اول : اگر قاعده مثلث برابر x و ارتفاع آن برابر h باشد آنگاه $x=2\sqrt{36-h^2}$ و $S=\frac{1}{2}xh \to S=h\sqrt{36-h^2}$

$$\to S'=\sqrt{36-h^2}-\frac{h^2}{\sqrt{36-h^2}}\ ,\ S'=0 \to 36-h^2=h^2 \to h=3\sqrt{2}$$

$$\to Max\,S=3\sqrt{2}\times\sqrt{36-18}=18$$



روش دوم : اگر زاویه راس مثلث برابر α باشد آنگاه $x=12\sin\frac{\alpha}{2}$ و $h=6\cos\frac{h}{2}$ پس

$$S=18\sin\alpha \to S'=18\cos\alpha \to S'=0 \to \alpha=\frac{\pi}{2} \to MaxS=18$$

سوال۲- به کمک تجزیه کسرها داریم : $\frac{x^2-4x-2}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x} \to A=-2,\ B=3,\ C=-4$

$$\int\frac{x^2-4x-2}{x^3+x}dx=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{3x}{x^2+1}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=-2\ln x+\frac{3}{2}\ln(x^2+1)-4\arctan x+c$$

سوال۳- $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\arctan e^x\,\Big|_0^{\ln\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan 1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

سوال۴- $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x \to y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x} \to 1+(y')^2=1+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2$

$$l=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^e\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\,\Big|_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \to \qquad l=\frac{e^2+1}{4}$$

سوال۵- با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء و با فرض $u=\ln x$ و $dv=x^2dx$ داریم $du=\frac{dx}{x}$ و $v=\frac{1}{3}x^3$

$$V=\int_1^e\pi x^2\ln x\,dx=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\,\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx\right]=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\,\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx\right]=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\,\Big|_1^e-\frac{1}{9}x^3\,\Big|_1^e\right]$$

$$V=\pi\left[\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}e^3+\frac{1}{9}\right]=\frac{\pi}{9}(2e^3+1)$$

سوال۶- الف) روش اول(آزمون مقایسه) :

$$\frac{34}{13n+92}>\frac{34}{13n+104}>\frac{34}{13(n+8)} \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{34}{13n+92}>\frac{34}{13}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+8}=\frac{34}{13}\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n}$$

چون سری $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست پس سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{34}{13n+92}$ نیز واگراست.

روش دوم (آزمون مقایسه حدی) : می دانیم سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ واگراست.

چون $\lim_{n\to\infty}\frac{34}{13n+92}\Big/\frac{1}{n+1}=\frac{34}{13}$ پس سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{34}{13n+92}$ نیز واگراست.

ب) داریم $a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}$ و در نتیجه $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^n\sqrt{n+1}} = 2$. یعنی شعاع همگرایی برابر $R = 2$ است.

حال اگر $-2 < x-2 < 2$ آنگاه $0 < x < 4$ یعنی سری روی بازه باز $(0\,,4)$ همگراست.

اگر $x = 0$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ یک سری نزولی متناوب و همگراست.

اگر $x = 4$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)^n}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ یک سری واگراست. بنابر این حوزه همگرایی برابر است با : $[0,4)$

سوال۷- $f(x) = \ln(2x+3)\,,\ f'(x) = \frac{2}{2x+3}\,,\ f''(x) = \frac{-4}{(2x+3)^2}\,,\ f'''(x) = \frac{16}{(2x+3)^3}\,,\ f^{(4)}(x) = \frac{-96}{(2x+3)^4}\,,\ \cdots$

بنابر این $f(0) = \ln 3\,,\ f'(0) = \frac{2}{3}\,,\ f''(0) = \frac{-4}{9}\,,\ f'''(0) = \frac{16}{27}\,,\ f^{(4)}(0) = \frac{-32}{27}\,,\ \cdots$

پس :
$$f(x) = \ln 3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{81}x^3 - \frac{4}{81}x^4 + \cdots$$

روش دوم : $f(x) = \ln(2x+3)\,,\ f'(x) = \frac{2}{2x+3}\,,\ f'(x) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{1+(2x/3)} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{2x}{3})^n$

در نتیجه $f(x) = c - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(-\frac{2x}{3})^{n+1}$ و چون $f(0) = \ln 3$ پس $c = \ln 3$ یعنی $f(x) = \ln 3 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(-\frac{2x}{3})^{n+1}$

۱۳۹۲/۳/۴