گروه آموزشی : **رياضي**	امتحان درس : **رياضي۱-فني (۳ گروه هماهنگ)**	نیمسال (اول/ **دوم**) **۹۱**- ۱۳Ěċ	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۱/۳/۲۱**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

ملاحظه کنید اول پاسخنامه را دقیقا تکمیل نمایید.

در طول برگزاري امتحان هیچ سوالي پاسخ داده نمي شود.

سوال ۱- مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=\sqrt{1-x}$ ، $y=\sqrt{1+x}$ و محور xها را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۲- انتگرال نامعین $\int x^{2}\ln x\,dx$ را حل کنید. **۲۰ نمره**

سوال۳- طول قوس منحنی تابع $y=\ln\sin x$ را در بازه $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$ بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۴- انتگرال نامعین $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^{x}}$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۵- همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n}\,n!}{n^{n}}$ را مشخص کنید. **۱۰ نمره**

سوال۶- بازه (حوزه) همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n(n+1)}$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۷- الف) سری مک لورن (سری تیلور به مرکز ۰) تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$ را بنویسید.

(حداقل ۴ جمله غیر صفر)

ب) سری مک لورن زیر مربوط به چه تابعی است ؟

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{7}}{7}+\cdots$$

۱۵ نمره

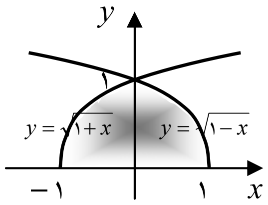
موفق باشید

دانشکده ریاضی

۱۳۹۱/۳/۲۱

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم درس رياضي۱-فني (۳ گروه هماهنگ)

نیمسال دوم ۹۱-۱۳۹۰



جواب سوال۱ - مساحت نیمه راست $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\,dx=\frac{-2}{3}\sqrt{(1-x)^{3}}\,\Big|_{x=0}^{1}=\frac{2}{3}$

به دلیل تقارن نسبت به محور y ها مساحت دو نیمه با هم برابر است اما می توان آن را مستقیما حساب کرد.

نیمه چپ $\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^{3}}\,\Big|_{x=-1}^{0}=\frac{2}{3}$ مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با : $S=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

جواب سوال۲ - به کمک روش جزء به جزء و با انتخاب $u=\ln x$ و $dv=x^{2}\ln x\,dx$ داریم $du=\frac{dx}{x}$ و $v=\frac{1}{3}x^{3}$. بنابر این :

$$\int x^{2}\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^{2}dx=\frac{1}{3}x^{3}\ln x-\frac{1}{9}x^{3}+c=\frac{1}{9}x^{3}(\ln x-1)+c$$

جواب سوال۳ - طول قوس منحنی y در بازه $[a,b]$ برابر است با : $l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(y')^{2}}\,dx$. در اینجا داریم $y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ و

$$1+\cot^{2}x=\frac{1}{\sin x}\rightarrow\quad l=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\sqrt{1+(y')^{2}}\,dx=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{(1+\tan^{2}(x/2))dx}{2\tan(x/2)}=\ln\tan\frac{x}{2}\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3}=\ln\sqrt{3}-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=\ln 3$$

جواب سوال۴ - با تغییر متغیر $t=e^{x}$ داریم $x=\ln t$ و $dx=\frac{dt}{t}$ بنابر این :

$$\int\frac{dx}{e^{2x}+e^{x}}=\int\frac{(dt/t)}{t^{2}+t}=\int\frac{dt}{t^{2}(t+1)}$$

$$=\int(\frac{1}{t^{2}}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1})dt=\frac{-1}{t}-\ln t+\ln(t+1)+c=\frac{-1}{t}+\ln(\frac{t+1}{t})+c=\frac{-1}{e^{x}}+\ln(\frac{e^{x}+1}{e^{x}})+c=-e^{-x}+\ln(1+e^{-x})+c$$

جواب سوال۵ - $a_{n}=(-1)^{n-1}\frac{2^{n}\,n!}{n^{n}}\,,n=1,2,3,\cdots$ (از آزمون ریشه هم می توان استفاده کرد.)

آزمون نسبت : $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_{n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^{n}\,n!/n^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^{n}}{n^{n}}=2\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n}=2e^{-1}=\frac{2}{e}<1$ سری همگراست.

این سری متناوب است. نشان می‌دهیم نزولی و در نتیجه همگراست. پس باید $\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\le\frac{2^{n}\,n!}{n^{n}}$ که معادل است با $\frac{2}{(n+1)^{n}}\le\frac{1}{n^{n}}$

اما چون $(n+1)^{n}=n^{n}+n\times n^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)n^{n-2}+\cdots\ge 2n^{n}$ هر دو نامساوی برقرار هستند و سری داده شده یک سری نزولی است.

جواب سوال۶ - اگر برای x سری همگرا باشد طبق آزمون ریشه باید داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{(x+2)^{2n}}{n(n+1)}|}\le 1$ یعنی $(x+2)^{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}}\le 1$

(و طبق آزمون نسبت باید داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}|\frac{(x+2)^{2n}/n(n+1)}{(x+2)^{2(n+1)}/(n+1)(n+2)}|\le 1$ یعنی $(x+2)^{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}\le 1$) در هر دو روش داریم

$(x+2)^{2}\le 1$ و درنتیجه $|x+2|\le 1$ یعنی شعاع همگرایی برابر $R=1$ و سری در بازه $(-3,-1)$ همگراست.

اگر $x=-3$ و یا $x=-1$ داریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ که یک سری همگراست پس حوزه همگرایی سری عبارت است از : $[-3,-1]$

جواب سوال۷ – به کمک فرمول مجموع سری هندسی و یا اتحادهای شناخته شده دیگر داریم : $\frac{1}{1+x^{2}}=1-x^{2}+x^{4}-x^{6}+\cdots$

اکنون از طرفین این تساوی انتگرال می‌گیریم : $\int\frac{dx}{1+x^{2}}=\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{7}}{7}+\cdots$

می توان از فرمول سری تیلور نیز استفاده کرد. اما محاسبه مستقیم مشتقات تابع f کار ساده ای نیست. برای اینکار از تجزیه کسرها کمک می‌گیریم.

$$\frac{1}{1+x^{2}}=\frac{1}{2i}(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i})\rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n}n!}{2i}(\frac{1}{(x-i)^{n+1}}-\frac{1}{(x+i)^{n+1}})\rightarrow f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=1,3,5,\cdots\\(-1)^{n/2}n! & n=0,2,4,\cdots\end{cases}$$

سیدرضا موسوي