(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

دانشکده ریاضی

کد فرم : FR/FY/۱۱

ویرایش : صفر

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۱–فنی (۱۸ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/~~دوم~~) **۹۵-۱۳۹۴** نام مدرس:

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۴/۱۰/۱۴** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- انتگرال نامعین $\int \frac{۱}{e^{۲x} - ۴e^{x} + ۴} dx$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال نامعین $\int \frac{۱}{۲\sin x + \cos x + ۲} dx$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۳- ناحیه محدود به منحنی‌های $y = \sqrt{x}$ و $y = \frac{۲\sqrt{x}}{x^{۲} + ۱}$ حول محور xها دوران می‌کند. **۲۰ نمره**

حجم جسم حاصل را بیابید.

سوال۴- منحنی $y = \sqrt{x}$ در بازه $[۰,۲]$ حول محور x ها دوران می‌کند. **۲۰ نمره**

مساحت سطح دوار حاصل را محاسبه کنید.

سوال۵- معادله خط مماس بر منحنی پارامتری $\begin{cases} x = \int_{۰}^{t} e^{u^{۲}} du \\ y = (t+۲)^{۲} \end{cases}$ در نقطه $t = ۰$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال۶- الف) همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n \ln n}}$ را مشخص کنید. **۱۰ نمره**

ب) بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^{n} n^{۲}}{n^{۲} + \cos n} (۲x - ۵)^{n}$ را بیابید. **۱۰ نمره**

سوال۷- سری مک لورن تابع $y = (۱ + x^{۲}) e^{-x^{۲}}$ را بنویسید. (پنج جمله غیر صفر اول کافی است.) **۱۵ نمره**

موفق باشید

جواب سوال۱- روش اول : با تغییر متغیر و تجزیه کسرها : قرار می‌دهیم : $e^x = t$ داریم $dx = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx = \int \frac{1}{t^2 - 4t + 4} \times \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t(t-2)^2} dt = \int \left(\frac{1}{4t} + \frac{1}{2(t-2)^2} - \frac{1}{4(t-2)}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln t - \frac{1}{2(t-2)} - \frac{1}{4}\ln(t-2) + c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2(e^x - 2)} - \frac{1}{4}\ln(e^x - 2) + c$$

روش دوم : به کمک روش انتگرالگیری جزء به جزء

$$\int \frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx = \int \frac{e^{-2x}}{1 - 4e^{-x} + 4e^{-2x}} dx = \int e^{-x} \times \frac{e^{-x}}{(1 - 2e^{-x})^2} dx$$

اکنون با قرار دادن $u = e^{-x}$, $dv = \frac{e^{-x}}{(1-2e^{-x})^2} dx$ داریم $du = -e^{-x} dx$, $v = \frac{-1}{2(1-2e^{-x})}$ و در نتیجه

$$\int \frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx = e^{-x} \times \frac{-1}{2(1-2e^{-x})} - \int e^{-x} \times \frac{1}{2(1-2e^{-x})} dx = \frac{-e^{-x}}{2(1-2e^{-x})} - \frac{1}{4}\ln(1 - 2e^{-x}) + c$$

جواب سوال۲- به کمک تغییر متغیر شناخته شده $t = \tan\frac{x}{2}$ داریم :

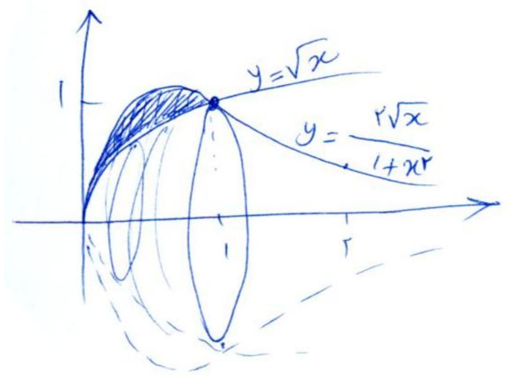
$$\int \frac{1}{2\sin x + \cos x + 2} dx = \int \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} \times \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{t^2 + 4t + 3}$$

$$= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right) dt = \ln(t+1) - \ln(t+3) + c = \ln\frac{t+1}{t+3} + c = \ln\frac{\tan\frac{x}{2} + 1}{\tan\frac{x}{2} + 3} + c$$

اگر از اتحادهای مثلثاتی $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ استفاده کنیم داریم :

$$\int \frac{1}{2\sin x + \cos x + 2} dx = \ln\frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x + 3\cos x + 3} + c$$

جواب سوال۳- ابتدا حدود ناحیه مورد نظر را مشخص می‌کنیم.



اگر دو نمودار در یک نقطه اشتراک داشته باشند باید داشته باشیم

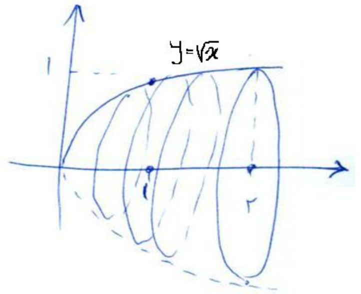
$\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2} = \sqrt{x}$ و در نتیجه $2\sqrt{x} = \sqrt{x}(1+x^2)$ و $\sqrt{x}(x^2 - 1) = 0$

که سه ریشه $x = 0, 1, -1$ داریم و ریشه سوم قابل قبول نیست.

$$\int_0^1 \pi\left[\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}\right)^2 - (\sqrt{x})^2\right] dx = \pi\int_0^1 \left[\left(\frac{4x}{(1+x^2)^2}\right) - x\right] dx$$

$$= \pi\left[\frac{-2}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \pi\left[-1 - \frac{1}{2} + 2\right] = \frac{\pi}{2}$$

جواب سوال۴- داریم $y = \sqrt{x}$ و $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ و در نتیجه



$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$$

اکنون از فرمول محاسبه مساحت سطح دوار استفاده می‌کنیم.

$$\int_0^2 2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^2 2\pi\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \pi\int_0^2 \sqrt{4x+1}\, dx = \frac{\pi}{6}(\sqrt{4x+1})^3 \Big|_0^2 = \frac{\pi}{6}(27 - 1) = \frac{13\pi}{3}$$

جواب سوال۵- برای محاسبه شیب خط مماس باید $y'=\dfrac{dy}{dx}$ را محاسبه کنیم. $dx=e^{t^۲}\,dt$ و $dy=۲(t+۲)dt$

و در نتیجه $y'=\dfrac{dy}{dx}=۲(t+۲)e^{-t^۲}$ و در نقطه $t=۰$ داریم $m=y'=۴$ مختصات نقطه $t=۰$ عبارت است از $(۳,۴)$

اکنون معادله خط راست برابر است با : $y=۴x-۸$

جواب سوال۶- اگر $n\geq ۲$ آنگاه $\dfrac{۱}{\sqrt{n\ln n}}\geq\dfrac{۱}{n\ln n}$ به کمک آزمون انتگرال نشان می‌دهیم که سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\dfrac{۱}{n\ln n}$ واگراست.

اکنون طبق آزمون انتگرال ، چون انتگرال $\int_۲^{\infty}\dfrac{۱}{n\ln n}dn=\ln\ln n|_۲^{\infty}=\infty$ واگراست پس سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\dfrac{۱}{n\ln n}$ نیز واگرا خواهد بود

و طبق آزمون مقایسه ، سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\dfrac{۱}{\sqrt{n\ln n}}$ نیز واگراست.

ب) اگر قرار دهیم $a_n=\dfrac{(-۱)^n n^۲}{n^۲+\cos n}$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}|\dfrac{(-۱)^n n^۲}{n^۲+\cos n}|=۱$ بنابر این برای همگرایی سری طبق آزمون نسبت باید داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+۱}(۲x-۵)^{n+۱}}{a_n(۲x-۵)^n}|\leq ۱$ و یا $|۲x-۵|\leq ۱$ که نتیجه می‌دهد $-۱\leq ۲x-۵\leq ۱$ و یا $۲\leq x\leq ۳$

اما نقاط گوشه ای بازه قابل قبول نیستند چون به ازای $x=۲$ داریم $\sum_{n=۰}^{\infty}\dfrac{n^۲}{n^۲+\cos n}$ و همچنین به ازای $x=۳$ داریم $\sum_{n=۰}^{\infty}\dfrac{(-۱)^n n^۲}{n^۲+\cos n}$ که هیچیک شرط لازم همگرایی را ندارند بنابر این بازه همگرایی عبارت است از : $(۲,۳)$

جواب سوال۷- سری مک لورن تابع e^t به راحتی نوشته می‌شود. $e^t=۱+t+\dfrac{t^۲}{۲!}+\dfrac{t^۳}{۳!}+\dfrac{t^۴}{۴!}+\dfrac{t^۵}{۵!}+\cdots$

این سری توانی به ازای هر عدد حقیقی x همگراست بنابر این $e^{-x^۲}=۱-x^۲+\dfrac{x^۴}{۲!}-\dfrac{x^۶}{۳!}+\dfrac{x^۸}{۴!}-\dfrac{x^{۱۰}}{۵!}+\cdots$

و در نهایت داریم : $(۱+x^۲)e^{-x^۲}=(۱+x^۲)(۱-x^۲+\dfrac{x^۴}{۲}-\dfrac{x^۶}{۶}+\dfrac{x^۸}{۲۴}-\dfrac{x^{۱۰}}{۱۲۰}+\cdots)=۱-\dfrac{x^۴}{۲}+\dfrac{x^۶}{۳}-\dfrac{x^۸}{۸}+\dfrac{x^{۱۰}}{۳۰}-\cdots$

۱۳۹۴/۱۰/۱۴