کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی۱-فنی (۱۴ گروه هماهنگ)**	نیمسال (**اول**/دوم) **۹۳-۱۳۹۲**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۲/۱۰/۷**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال نامعین $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۳- انتگرال نامعین $\int \frac{x}{x^3+8}dx$ را حل کنید. **۲۰ نمره**

سوال۴- طول قوس منحنی $r=1+\cos\theta$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۵- ناحیه محدود به منحنی تابع $y=\frac{1}{1+x^2}$ و محور xها در بازه $[-1,1]$ ، حول محور xها دوران کرده است. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۶- الف) همگرایی یا واگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+\ln n)^2}$ را مشخص کنید.

ب) شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-3)^n$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۷- ۳ جمله اول (غیر صفر) سری مک لورن تابع $f(x)=\tan x$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

سوال۱- قرار می‌دهیم $y = x^{\frac{2}{1+\ln x}}$ و داریم : $\ln y = \dfrac{2\ln x}{1+\ln x} \to \lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\ln x}{1+\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(2-\dfrac{2}{1+\ln x}) = 2$

اکنون داریم : $\ln \lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = 2 \to \lim\limits_{x\to 0^+} y = e^2$

سوال۲- داریم :

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-(1+2x+x^2)}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-(1+x)^2}}$$

اکنون از تغییر متغیر $1+x = 3\sin t$ استفاده می‌کنیم :

$$I = \int \frac{(3\sin t - 1)(3\cos t)\,dt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} = \int \frac{(3\sin t-1)(3\cos t)\,dt}{(3\cos t)} = \int (3\sin t - 1)\,dt = -3\cos t - t + c$$

اما چون $1+x = 3\sin t$ پس $\sin t = \dfrac{1+x}{3}$ و $\cos t = \dfrac{1}{3}\sqrt{8-2x-x^2}$

بنابر این جواب نهایی عبارت است از : $I = -\sqrt{8-2x-x^2} - Arc\sin\dfrac{1+x}{3} + c$

سوال۳- $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+8}dx = \int \frac{x}{(x+2)(x^2-2x+4)}dx = \frac{1}{6}\int (\frac{-1}{x+2} + \frac{x+2}{x^2-2x+4})dx = \frac{1}{6}[-\ln(x+2) + \int \frac{x+2}{(x-1)^2+3}dx]$

برای حل انتگرال $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)^2+3}dx$ از تغییر متغیر $x-1 = \sqrt{3}\tan y$ استفاده می‌کنیم. داریم :

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^2+3}dx = \int \frac{\sqrt{3}\tan y + 3}{3\tan^2 y + 3} \times \sqrt{3}(1+\tan^2 y)dy = \int (\tan y + \sqrt{3})dy = -\ln\cos y + \sqrt{3}y + c$$

چون $x-1 = \sqrt{3}\tan y$ داریم $\tan y = \dfrac{x-1}{\sqrt{3}}$ و $\cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-2x+4}}$ و $\ln\cos y = \ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{x^2-2x+4}$

بنابر این :

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^2+3}dx = -\ln\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) + \sqrt{3}Arc\tan\frac{x-1}{\sqrt{3}}$$

و بالاخره داریم :

$$\int \frac{x}{x^3+8}dx = \frac{1}{6}[-\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) + \sqrt{3}Arc\tan\frac{x-1}{\sqrt{3}}] + c$$

و یا :

$$\int \frac{x}{x^3+8}dx = \frac{1}{12}[\ln(\frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2}) + 2\sqrt{3}Arc\tan\frac{x-1}{\sqrt{3}}] + c$$

سوال۴- روش اول : با استفاده از فرمول مختصات قطبی داریم :

$$l = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 4(1+1) = 8$$

روش دوم : از فرمول $l = \int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ استفاده می‌کنیم. داریم :

$$x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta \quad \text{و} \quad y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$dy = (\cos\theta + \cos2\theta)d\theta \qquad dx = -(\sin\theta + \sin2\theta)d\theta$$

$$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(\sin\theta+\sin2\theta)^2+(\cos\theta+\cos2\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2+2\sin\theta\sin2\theta+2\cos\theta\cos2\theta}\,d\theta = \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

اکنون داریم :

$$l = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 4(1+1) = 8$$

سوال۵- روش اول – قرص مستدیر : مقدار حجم برابر است با $V=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{(1+x^2)^2}dx$ و به دلیل تقارن داریم : $V=2\pi\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

با تغییر متغیر $x=\tan x$ داریم :

$$V=2\pi\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}=2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{(1+\tan^2 t)^2}=2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{dt}{1+\tan^2 t}$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/4}\cos^2 t\,dt=\pi\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt=\pi[t+\frac{1}{2}\sin 2t]\Big|_0^{\pi/4}=\pi(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})$$

روش دوم – پوسته استوانه : داریم $\frac{1}{2}\le y\le 1$, $x=\pm\frac{\sqrt{y-y^2}}{y}$ و به دلیل تقارن داریم :

$$V=2[\int_0^{1/2}2\pi\times y\times 1dy+\int_{1/2}^{1}2\pi\times y\times\frac{\sqrt{y-y^2}}{y}dy]=2\pi[\int_0^{1/2}2y\,dy+\int_{1/2}^{1}\sqrt{4y-4y^2}\,dy]$$

$$V=2\pi[\frac{1}{4}+\int_{1/2}^{1}2\pi\times y\times\frac{\sqrt{y-y^2}}{y}dy]=2\pi(y^2\,\Big|_0^{1/2}+\frac{1}{4}[\arcsin(2y-1)+(2y-1)\sqrt{4y-4y^2}]\,\Big|_{1/2}^{1})$$

سوال۶- الف) این سری واگراست زیرا شرط لازم همگرایی را ندارد، یعنی : $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+\ln n)^2}=1\neq 0$

برای محاسبه مقدار حد می‌توانیم بنویسیم $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+\ln n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{(1+\frac{\ln n}{n})^2}$

اکنون کافی است نشان دهیم $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ و این تساوی با استفاده از قضیه هوپیتال به راحتی ثابت می‌شود.

ب) طبق فرمول، شعاع ناحیه همگرایی برابر است با : $R=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2/(2n)!}{((n+1)!)^2/(2(n+1))!}$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{n!}{(n+1)!})^2\frac{(2n+2))!}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1})^2\frac{(2n+2)(2n+1)}{1}=\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}=4$$

بنابر این سری فوق در ناحیه $(3-4, 3+4)$ یعنی بازه $(-1,7)$ همگراست. برای بررسی نقاط مرزی ناحیه همگرایی، مقادیر $x=-1$ و $x=7$ را در سری قرار می‌دهیم. دو سری حاصل یعنی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(4)^n$ واگرا هستند زیرا شرط لازم همگرایی را ندارند.

اگر قرار دهیم $b_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$ آنگاه $|\frac{b_n}{b_{n+1}}|=\frac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4}$ یعنی $|b_{n+1}|>|b_n|$ یعنی دنباله $\{|b_n|\}$ صعودی است و $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$

همچنین می دانیم $\binom{2n}{n}<2^{2n}$ بنابر این $\frac{(2n)!}{(n!)^2}<4^n$ و در نتیجه $\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n>1$ یعنی $|b_n|>1$ و $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$.

سوال۷- $y=\tan x\to y'=1+\tan^2 x\to y''=2\tan x(1+\tan^2 x)\to y'''=2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^2 x(1+\tan^2 x)$

$$\to y^{(4)}=16\tan x(1+\tan^2 x)^2+8\tan^3 x(1+\tan^2 x)$$

$$\to y^{(5)}=16(1+\tan^2 x)^3+24\tan^2 x(1+\tan^2 x)^2+16\tan^4 x(1+\tan^2 x)$$

اکنون داریم $y(0)=0\,,\ y'(0)=1\,,\ y''(0)=0\,,\ y'''(0)=2\,,\ y^{(4)}(0)=0\,,\ y^{(5)}(0)=16$

و در نتیجه $\tan x=0+1x+\frac{0}{2}x^2+\frac{2}{6}x^3+\frac{0}{24}x^4+\frac{16}{120}x^5+\cdots$ و یا : $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots$