کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۱-فنی (۱۷ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۴-۱۳۹۳** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۳/۱۰/۱۳** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
از نوشتن با مداد خودداری نمایید.
استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- کمترین فاصله نقطه $(۶,۳)$ را از منحنی تابع $y=۳+\sqrt{۷+x^۲}$ بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۲- انتگرال معین $\int_۰^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ را محاسبه کنید. ($a>۰$) **۲۰ نمره**

سوال۳- انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{\sqrt[۴]{x}-\sqrt[۳]{x}}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنیهای $y=x^۲$ و $y=x+۲$ حول خط $x=۲$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۵- طول قوس منحنی $x=\ln\cos y \ , ۰\le y\le\frac{\pi}{۳}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۶- **<u>فــقــط</u> به یکی از سوالهای زیر پاسخ دهید.** **۱۵ نمره**

الف) محاسبه کنید : $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\int_{\sin ۲x}^{\sin x} e^{t^۲}\,dt}{۴\sin^۲ x+۳\sin ۲x}$

ب) شعاع و بازه همگرایی سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۵^n(۴x-۱)^n}{n!}$ را به دست آورید.

موفق باشید

سوال۱- اگر (x,y) یک نقطه از منحنی $y = 3+\sqrt{7+x^2}$ باشد فاصله آن تا نقطه $(6,3)$ برابر است با :

$$d=\sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(\sqrt{7+x^2})^2}=\sqrt{2x^2-12\ x+43}$$

اکنون اگر بخواهیم کمترین فاصله را به دست آوریم کافی است مینیمم تابع $f(x)=2x^2-12\ x+43$ را بیابیم.

داریم $f'(x)=4x-12$ و اگر $f'(x)=0$ آنگاه $4x-12=0$ یعنی $x=3$ و $d=\sqrt{2(3)^2-12\ (3)+43}$

و در نتیجه : $d_{\min}=5$

سوال۲- روش اول : قرار می‌دهیم $I=\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ و از روش انتگرالگیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

ابتدا نشان می دهیم انتگرال همگراست و سپس آن را حل می‌کنیم. $|I|\le\int_0^\infty |e^{-ax}\sin bx|dx\le\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\le\frac{-1}{a}e^{-ax}\,|_0^\infty=\frac{1}{a}$

پس انتگرال کراندار و همگراست. اگر $u=e^{-ax}\ ,dv=\sin bxdx$ آنگاه داریم $du=-ae^{-ax}dx\ ,\ v=\frac{-1}{b}\cos bx$ بنابر این

$$I=\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{-1}{b}e^{-ax}\cos bx\,|_0^\infty-\frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}-\frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$$

برای بار دوم از روش انتگرالگیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم. اگر $u=e^{-ax}\ ,dv=\cos bxdx$ آنگاه داریم :

$du=-ae^{-ax}dx\ ,\ v=\frac{1}{b}\sin bx$ بنابر این $I=\frac{1}{b}-\frac{a}{b}(\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx\,|_0^\infty+\frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx)=\frac{1}{b}-\frac{a^2}{b^2}I$

$$I+\frac{a^2}{b^2}I=\frac{1}{b}\quad\rightarrow\quad I=\frac{b}{a^2+b^2}\quad\rightarrow\quad\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}$$

روش دوم : $I=\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{e^{bix}-e^{-bix}}{2i}dx=\frac{1}{2i}\int_0^\infty(e^{(-a+bi)x}-e^{(-a-bi)x})\,dx$

$$=\frac{1}{2i}(\frac{e^{(-a+bi)x}}{(-a+bi)}-\frac{e^{(-a-bi)x}}{(-a-bi)})\,|_0^\infty\quad=\frac{-1}{2i}(\frac{1}{-a+bi}-\frac{1}{-a-bi})=\frac{-1}{2i}(\frac{-2ib}{a^2+b^2})=\frac{b}{a^2+b^2}$$

سوال۳- <u>روش اول</u> : با تغییر متغیر $x=t^{12}$ داریم $dx=12t^{11}\,dt$ و در نتیجه $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{12t^{11}\,dt}{t^3-t^4}=\int\frac{12t^8dt}{1-t}$

اکنون داریم : $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{12t^{11}\,dt}{t^3-t^4}=\int\frac{12t^8dt}{1-t}=12\int\frac{(t^8-1)+1}{1-t}dt=12\int\frac{(t-1)(t^7+t^6+\cdots+t+1)+1}{1-t}dt$

$$=-12\int(t^7+t^6+\cdots+t+1+\frac{1}{t-1})dt=-12\,[\frac{1}{8}t^8+\frac{1}{7}t^7+\cdots+\frac{1}{2}t^2+t+\ln(t-1)]+c$$

و چون $x=t^{12}$ بنابر این : $I=-12\,[\frac{1}{8}\sqrt[12]{x^8}+\frac{1}{7}\sqrt[12]{x^7}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt[12]{x^2}+\sqrt[12]{x}+\ln(\sqrt[12]{x}-1)]+c$

<u>روش دوم</u> : وقتی به انتگرال $I=\int\frac{12t^8dt}{1-t}$ رسیدیم با تغییر متغیر $u=1-t$ داریم $t=1-u$ و $du=-dt$

$$I=12\int\frac{(1-u)^8}{u}(-du)=-12\int\frac{1-8u+28u^2-56u^3+70u^4-56u^5+28u^6-8u^7+u^8}{u}du$$

$$=-12\int(\frac{1}{u}-8+28u-56u^2+70u^3-56u^4+28u^5-8u^6+u^7)du$$

$$=-12(\ln u-8u+14u^2-\frac{56}{3}u^3+\frac{35}{2}u^4-\frac{56}{5}u^5+\frac{14}{3}u^6-\frac{8}{7}u^7+\frac{1}{8}u^8)+c$$

چون $u=1-t$ خواهیم داشت : $I=-12[\ln(1-t)-8(1-t)+14(1-t)^2-\frac{56}{3}(1-t)^3+\frac{35}{2}(1-t)^4$

$$-\frac{56}{5}(1-t)^5+\frac{14}{3}(1-t)^6-\frac{8}{7}(1-t)^7+\frac{1}{8}(1-t)^8]+c$$

و چون $x=t^{12}$ بنابر این : $I=-12[\ln(1-\sqrt[12]{x})-8(1-\sqrt[12]{x})+14(1-\sqrt[12]{x})^2-\frac{56}{3}(1-\sqrt[12]{x})^3+\frac{35}{2}(1-\sqrt[12]{x})^4$

$-\frac{56}{5}(1-\sqrt[12]{x})^5+\frac{14}{3}(1-\sqrt[12]{x})^6-\frac{8}{7}(1-\sqrt[12]{x})^7+\frac{1}{8}(1-\sqrt[12]{x})^8]+c$

سوال۴- نقاط برخورد خط و منحنی را به کمک حل دستگاه معادلات $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$ پیدا می‌کنیم .

داریم $x^2=x+2$ و در نتیجه $x_1=-1$ و $x_2=2$ نقاط برخورد خط و منحنی عباتند از : $(-1,1)$ و $(2,4)$

روش اول : به کمک روش پوسته استوانه‌ای داریم : $V=\int_{x=-1}^{2} 2\pi(2-x)(x+2-x^2)dx=2\pi\int_{x=-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$

$$=2\pi[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x]_{-1}^{2}=2\pi[4-8+8-\frac{1}{4}-1+4]=\frac{27}{2}\pi$$

روش دوم : به کمک روش قرص مستدیر داریم : $V=\int_{y=1}^{4}\pi(4-y)^2dy+\int_{y=0}^{1}\pi(2+\sqrt{y})^2dy-\int_{y=0}^{4}\pi(2-\sqrt{y})^2dy$

$$=\frac{-\pi}{3}[(4-y)^3]_1^4+\pi[4y+\frac{8}{3}y\sqrt{y}+\frac{1}{2}y^2]_0^1-\pi[4y-\frac{8}{3}y\sqrt{y}+\frac{1}{2}y^2]_0^4=9\pi+\frac{43}{6}\pi-\frac{8}{3}\pi=\frac{27}{2}\pi$$

سوال۵- داریم $dx=-\tan y\,dy$ و در نتیجه $(dx)^2+(dy)^2=(\tan^2 y+1)(dy)^2=\frac{(dy)^2}{\cos^2 y}$ بنابر این

$$l=\int_0^{\pi/3}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_0^{\pi/3}\frac{dy}{\cos y}$$

اکنون با تغییر متغیر $t=\tan\frac{y}{2}$ داریم $y=2\arctan t$ و $dy=\frac{2dt}{1+t^2}$ و $\cos y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و در نتیجه

$$l=\int_0^{\pi/3}\frac{dy}{\cos y}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t})dt=[-\ln(1-t)+\ln(1+t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\ln(2+\sqrt{3})$$

سوال۶- الف) چون $l_1=\lim_{x\to\pi}\frac{\int_{\sin 2x}^{\sin x}e^{t^2}dt}{4\sin^2 x+3\sin 2x}=\frac{\int_{\sin 2\pi}^{\sin\pi}e^{t^2}dt}{4\sin^2\pi+3\sin 2\pi}=\frac{\int_0^0 e^{t^2}dt}{4\times 0+3\times 0}=\frac{0}{0}$ یک حالت مبهم است.

از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم. چون داریم : $l_2=\lim_{x\to\pi}\frac{(\int_{\sin 2x}^{\sin x}e^{t^2}dt)'}{(4\sin^2 x+3\sin 2x)'}=\lim_{x\to\pi}\frac{(\cos x)e^{\sin^2 x}-(2\cos 2x)e^{\sin^2 2x}}{4\sin 2x+6\cos 2x}$

$$=\frac{(\cos\pi)e^{\sin^2\pi}-(2\cos 2\pi)e^{\sin^2 2\pi}}{4\sin 2\pi+6\cos 2\pi}=\frac{(-1)e^0-2e^0}{4\times 0+6\times 1}=\frac{-1}{2}$$

بنابر این خواهیم داشت : $l_1=l_2=\frac{-1}{2}$

ب) برای اینکه این سری همگرا باشد باید داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}(4x-1)^{n+1}}{(n+1)\,!}\div\frac{5^n(4x-1)^n}{n\,!}\right|<1$

یعنی $|4x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}<1$ اما $|4x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0$ یعنی نامساوی همواره برقرار است.

پس شعاع همگرایی برابر بی نهایت و ناحیه همگرایی تمام مجموعه اعداد حقیقی خواهد بود.

۱۳۹۳/۱۰/۱۳