(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی۱-فنی (۱۶ گروه هماهنگ)**	نیمسال (**اول**/دوم) **۹۲-۱۳۹۱**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۱/۱۰/۱۶**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- محاسبه کنید : $$l=\lim_{x\to\pi}\frac{\int_{1+\cos x}^{\sin x} e^{t^2}\,dt}{4\sin^2 x+3\sin 2x}$$ **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال نامعین $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}}\,dx$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۳- انتگرال معین $\int_0^1 \cos\ln x\,dx$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴- در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$ بحث کنید. **۱۵ نمره**

سوال۵- طول قوس منحنی $x=4(t-\sin t)\ ,\ y=4(1-\cos t)$ را در بازه $[0,2\pi]$ محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۶- حجم حاصل از دوران سطح محصور به منحنی $x^2+y=4$ و خط $y=0$ حول خط $x=2$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۷- الف) بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\ln n}$ را بیابید. **۲۰ نمره**

ب) ۵ جمله اول سری مک لورن تابع $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$ را بنویسید.

موفق باشید

سوال۱- $l=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\int_{1+\cos x}^{\sin x} e^{t^2}\,dt}{4\sin^2 x+3\sin 2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop} l=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(\cos x)e^{(\sin x)^2}-(-\sin x)e^{(1+\cos x)^2}}{4\sin 2x+6\cos 2x}=\frac{(-1)(1)-(0)(1)}{4(0)+6(-1)}=\frac{1}{6}$

سوال۲- با توجه به فرجه رادیکالها تغییر متغیر $x=t^{12}$ مناسب است. $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}}dx=\int\frac{t^6+t^4}{t^{15}+t^{14}}(12t^{11}dt)=12\int\frac{t(t^2+1)}{t+1}dt$

$$=12\int(t^2-t+2-\frac{2}{t+1})dt=4t^3-6t^2+24t-24\ln(t+1)+c=4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}-24\ln(\sqrt[12]{x}+1)+c$$

سوال۳- روش اول (جزء به جزء) : $u=\cos\ln x$ و $dv=dx$ بنابر این $du=\frac{-1}{x}\sin\ln x$ و $v=x$ داریم

$$\int_0^1\cos\ln x\,dx=x\cos\ln x|_0^1+\int_0^1\sin\ln x\,dx\ \to\ I=1+\int_0^1\sin\ln x\,dx$$

باز هم از جزء به جزء استفاده می کنیم. $u=\sin\ln x$ و $dv=dx$ بنابر این $du=\frac{1}{x}\cos\ln x$ و $v=x$

$$I=1+x\sin\ln x|_0^1-\int_0^1\cos\ln x\,dx=1+0-I\ \to\ I=\frac{1}{2}$$

روش دوم : با تغییر متغیر $x=e^t$ نیز داریم : $I=\int_0^1\cos\ln x\,dx=\int_{-\infty}^0 e^t\cos t\,dt=\frac{1}{2}e^t(\sin x+\cos x)|_{-\infty}^0=\frac{1}{2}$

سوال۴- چون $\sqrt{x^2+4}>1$ پس $0<\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}<\frac{1}{x^2+1}$ و در نتیجه $0<\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}<\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}=$

اما $\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}=\arctan x|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$ چون این انتگرال همگراست پس انتگرال کوچکتر از آن هم همگرا خواهد بود.

سوال۵- $l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{(4(1-\cos t))^2+(4\sin t)^2}\,dt$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{32(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{64\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=8\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-16\cos\frac{t}{2}|_0^{2\pi}=32$$

سوال۶- روش اول (روش پوسته استوانه ای) :

$$\int_{-2}^{2}2\pi(2-x)(4-x^2)dx=2\pi\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)dx=2\pi[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2+8x]_{-2}^{2}=\frac{128\pi}{3}$$

روش دوم (روش قرص مستدیر) : $\int_0^4\pi[(2+\sqrt{4-y})^2-(2-\sqrt{4-y})^2]dy=8\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy=-\frac{16\pi}{3}\sqrt{(4-y)^3}\,|_0^4=\frac{128\pi}{3}$

سوال۷- الف) اگر $a_n=\frac{1}{n\ln n}$ آنگاه شعاع همگرایی سری عبارت است از : $R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}$

به کمک قاعده هوپیتال یا روشهای دیگر خواهیم داشت $R=1$. بازه همگرایی شامل بازه $(-2,0)$ است. حالتهای خاص $x=0$ و $x=-2$ را جداگانه بررسی می کنیم. اگر $x=0$ آنگاه سری توانی به صورت سری عددی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ در می آید. به کمک آزمون انتگرال داریم $\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x|_2^\infty=\infty$ یعنی سری واگراست. اگر $x=-2$ آنگاه سری توانی به صورت سری عددی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ در می آید. این سری عددی، یک سری نزولی متناوب و در نتیجه همگراست. پس بازه همگرایی سری عبارت است از : $[-2,0)$

ب) $f'(x)=1+\ln(x+1)\ ,\ f''(x)=\frac{1}{x+1}\ ,\ f'''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\ ,\ f^{(4)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\ ,\ f^{(5)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}\ ,\cdots$

بنابر این $f(0)=0\ ,\ f'(0)=1\ ,\ f''(0)=1\ ,\ f'''(0)=-1\ ,\ f^{(4)}(0)=2\ ,\ f^{(5)}(0)=-6\ ,\cdots$

پس : $f(x)=0+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{20}x^5+\cdots=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$