كد فرم : FR/FY/11
ويرايش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پايان ترم)
دانشكده رياضي

گروه آموزشی : **رياضي**	امتحان درس : **رياضي۱-فني (۱۵ گروه هماهنگ)**	نيمسال (**اول**/دوم) **۹۱-۱۳۹۰**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۰/۱۰/۱۸**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

[illegible] اول پاسخنامه را [illegible] نمایید.

در طول برگزاري امتحان به هيچ سوالي پاسخ داده نمي شود.

سوال ۱- الف) محاسبه کنید : $l = \lim\limits_{x\to\infty}(e^{x^2}+a^2)^{\frac{1}{x^2}}$ **۱۰ نمره**

ب) اگر $f(x)=\int_0^{\sin x} t\,e^{-t^2}\,dt$ ، مقدار $f'(\pi)$ را بیابید. **۱۰ نمره**

سوال۲- انتگرال نامعین $\int \sin\ln x\,dx$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۳- انتگرال معین $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۴- انتگرال نامعین $\int \frac{5\,dx}{\sin^2 x+\cos x+5}$ را حل کنید. **۲۰ نمره**

سوال۵- طول قوس منحنی $y=\sqrt{x}-\frac{1}{3}x\sqrt{x}$ را در بازه $[1,4]$ محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۶- بازه (حوزه) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}(x-5)^n$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۷- سری مک لورن (سری تیلور به مرکز ۰) تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

موفق باشيد

پاسخ سوالات امتحان پايان ترم درس رياضي۱-فني

۱۵ گروه هماهنگ - نیمسال اول ۹۱-۱۳۹۰

جواب سوال ۱ – روش اول : $l=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{x^2}+a^2)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}[e^{x^2}(1+a^2e^{-x^2})]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e\,(1+a^2e^{-x^2})^{\frac{1}{x^2}}=e\times 1^0=e$

روش دوم : ابتدا می بینیم $l=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{x^2}+a^2)^{\frac{1}{x^2}}=\infty^0$ که یک حالت مبهم است. قرار می دهیم $y=(e^{x^2}+a^2)^{\frac{1}{x^2}}$

داریم : $\ln y=\dfrac{\ln(e^{x^2}+a^2)}{x^2}\to\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^{x^2}+a^2)}{x^2}=\dfrac{\infty}{\infty}$ که یک حالت مبهم است اما به کمک قاعده هوپیتال

داریم $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2xe^{x^2}/(e^{x^2}+a^2)}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}+a^2}=\dfrac{\infty}{\infty}$ که باز هم مبهم است. به کمک قاعده هوپیتال داریم

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=1$ و یا می توان نوشت $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+a^2e^{-x^2}}=1$ در هر دو صورت داریم :

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=1\to\ln\lim_{x\to\infty}y=1\to\quad l=\lim_{x\to\infty}y=e$$

ب) روش اول : $f(x)=\int_0^{\sin x}te^{-t^2}dt\to f'(x)=(\cos x)(\sin x)e^{-\sin^2x}\to f'(\pi)=(\cos\pi)(\sin\pi)e^{-\sin^2\pi}=0$

روش دوم : $f(x)=\int_0^{\sin x}te^{-t^2}dt\to f(x)=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^{\sin x}=-\frac{1}{2}e^{-\sin^2x}+\frac{1}{2}\to f'(x)=(\cos x\sin x)e^{-\sin^2x}\to f'(\pi)=0$

جواب سوال ۲ - روش اول : با دو مرتبه استفاده از روش انتگرالگیری جزء به جزء ، انتگرال را حل می کنیم.

$$u=\sin\ln x\,,\ v'=1\to u'=\frac{1}{x}\cos\ln x\,,\ v=x\to\qquad I=\int\sin\ln x\,dx=x\sin\ln x-\int\cos\ln x\,dx$$

$$u=\cos\ln x\,,\ v'=1\to u'=\frac{-1}{x}\sin\ln x\,,\ v=x\to\qquad I=x\sin\ln x-(x\cos\ln x+\int\sin\ln x\,dx)$$

$$I=x(\sin\ln x-\cos\ln x)-I\to 2I=x(\sin\ln x-\cos\ln x)\to I=\int\sin\ln x\,dx=\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+c$$

روش دوم : ابتدا تغییر متغیر $t=\ln x$ را اعمال می کنیم : $I=\int\sin\ln x\,dx=\int\sin t(e^t\,dt)=\int e^t\sin t\,dt$

برای حل این انتگرال نیز باید دو مرتبه از روش انتگرالگیری جزء به جزء استفاده کنیم.

جواب سوال ۳ - روش اول : از تغییر متغیر $x^2-4=4u^2$ استفاده می کنیم. داریم : $2xdx=8udu$ و یا $xdx=4udu$

$$I=\int_2^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int_2^\infty\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-4}}=\int_0^\infty\frac{4udu}{(4u^2+4)\sqrt{4u^2}}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\arctan u=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0)=\frac{\pi}{4}$$

روش دوم : از تغییر متغیر $x=2\cosh t$ استفاده می کنیم. داریم : $dx=2\sinh t\,dt$

$$I=\int_2^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int_0^\infty\frac{2\sinh t\,dt}{2\cosh t\sqrt{4\cosh^2t-4}}=\int_0^\infty\frac{dt}{2\cosh t}=\int_0^\infty\frac{dt}{e^t+e^{-t}}=\int_0^\infty\frac{e^tdt}{e^{2t}+1}=\arctan e^t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

جواب سوال ۴ - با تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{2}$ داریم $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\,,\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,,dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ و در نتیجه

$$I=\int\frac{5dx}{\sin^2x+\cos x+5}=\int\frac{5[2/(1+t^2)]dt}{[2t/(1+t^2)]^2x+[(1-t^2)/(1+t^2)]+5}=\int\frac{10(1+t^2)dt}{4t^2+1-t^4+5(1+t^2)^2}=\int\frac{10(1+t^2)dt}{4t^4+14t^2+6}$$

$$=\int\frac{5(1+t^2)dt}{2t^4+7t^2+3}=\int\frac{5(1+t^2)dt}{(2t^2+1)(t^2+3)}=\int(\frac{1}{2t^2+1}+\frac{2}{t^2+3})dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t}{\sqrt{3}})+c$$

و جواب انتگرال اولیه برابر است با :

$$I=\int\frac{5\,dx}{\sin^2 x+\cos x+5}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan\frac{x}{2})+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+c$$

جواب سوال ۵ - فرمول محاسبه طول قوس برابر است با $l=\int_1^4\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. اما داریم :

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\to 1+(y')^2=1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}=\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}=(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2})^2\ \to\sqrt{1+(y')^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$l=\int_1^4\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^4(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2})dx=\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\sqrt{x}\,|_1^4=2+\frac{8}{3}-1-\frac{1}{3}\qquad\to\qquad l=\frac{10}{3}$$

جواب سوال ۶ - در صورت همگرایی سری، با توجه به آزمون نسبت داریم :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}(x-5)^{n+1}}{\frac{\ln n}{2^n}(x-5)^n}\right|=\frac{1}{2}|x-5|\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{1}{2}|x-5|<1\to|x-5|<2$$

و همچنین به کمک آزمون ریشه داریم : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{\ln n}{2^n}(x-5)^n|}=\frac{1}{2}|x-5|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=\frac{1}{2}|x-5|<1\to|x-5|<2$

در هر دو حالت نتیجه می گیریم که شعاع همگرایی سری برابر $R=2$ است و سری در بازه باز $(3,7)$ همگراست.

در نقطه $x=3$ داریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}(x-5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}(-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln n$

و در نقطه انتهایی $x=7$ داریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}(x-5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}(2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$

که هر دو سری واگرا هستند. بنابر این بازه (حوزه) همگرایی سری ، بازه باز $(3,7)$ است.

جواب سوال ۷ - چند جمله اول غیر صفر سری را می توان محاسبه کرد.

$$f'(x)=\frac{-1}{2(1+x)\sqrt{1+x}},\ f''(x)=\frac{3}{2^2(1+x)^2\sqrt{1+x}},\ f'''(x)=\frac{-3\times5}{2^3(1+x)^3\sqrt{1+x}},\ f^{(4)}(x)=\frac{3\times5\times7}{2^4(1+x)^4\sqrt{1+x}}$$

$$\to f(0)=1,\ f'(0)=\frac{-1}{2},\ f''(0)=\frac{3}{2^2},\ f'''(0)=\frac{-3\times5}{2^3},\ f^{(4)}(0)=\frac{3\times5\times7}{2^4},\ f^{(5)}(0)=\frac{-3\times5\times7\times9}{2^5},\cdots$$

$$\to\qquad f(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\frac{49}{512}x^5+\cdots$$

با کمی دقت می توان فرمول کلی بسط مک لورن این تابع را به دست آورد :

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}\,n!},\ n=0,1,2,\cdots\qquad\to\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}\,n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}(\frac{x}{4})^n$$