FR/FY/11 : دg فرم

ويرايش : 1 ﺭÃDž

(فرم ţƝÃ ساوالات امتحانات پايان ترم)

دانشĜده رياضي

گروه آموزشی : **رياضي** امتحان درس : **رياضي1-فني (3 گروه ĝاĝنŪ)** نیمسال (اول/**دوم**) **90-89**13 نام مدرس:

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **1390/3/22** وقت : **135** دقیقه

توΣĜ :

ĺăm ⵏ žDÃحĜ اول پاسUانĜ را Ĝا دăΟ ĺăńŭĜ نمایید.

در Ãلو ƝĩŭƷاري امتحان Ĝا ĝيŠ سواĺي پاسخ داده نمي اود.

سوال 1- انتگرال مثلثاتی مقابل را حل کنید : $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx$ **20 نمره**

سوال2- انتگرال مقابل را حل کنید : $\int \frac{dx}{(x^2+2x+4)^2}$ **20 نمره**

سوال3- شعاع همگرایی سری مقابل را بیابید : $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{4}{5})^k(2x+3)^k$ **15 نمره**

سوال4- نمودار $r=3\theta$ را رسم کنید (به کمک جدول) و طول قوس یک دور کامل آن ($0\le\theta\le 2\pi$) را بدست آورید. **20 نمره**

سوال5- مطلوب است محاسبه و رسم تابع $y=\coth^{-1}x$.

(برای رسم نیازی به مشتقگیری نیست ، از شکل خود تابع اصلی کمک بگیرید.) **25 نمره**

سوال6- محاسبه کنید : $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{\sin(x^x)} e^{t^2}dt$ **15 نمره**

سوال7- ناحیه محصور بین $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ را حول خط $x=2$ دوران داده و حجم حاصل را بدست آورید. **20 نمره**

موفĺ Ãاايد

سوال ۱- روش اول :
$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx=\int\left(\frac{1}{2\cos^2(x/2)}-\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx=\tan\frac{x}{2}+\ln(1+\cos x)+c$$

روش دوم : تغيير متغير $t=\tan\frac{x}{2}$ داريم
$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2-2t+1}{1+t^2}dt$$
$$=\int\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=t-\ln(1+t^2)+c=\tan\frac{x}{2}+\ln\cos^2\frac{x}{2}+c$$

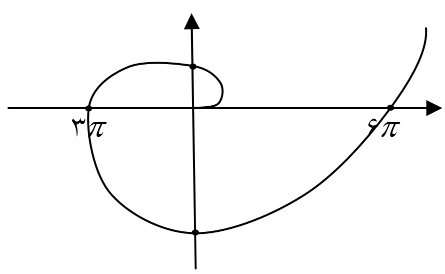
سوال۲- با تغيير متغير $x+1=\sqrt{3}\tan t$ داريم :
$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+4)^2}=\int\frac{dx}{((x+1)^2+3)^2}=\int\frac{\sqrt{3}(1+\tan^2 t)dt}{((\sqrt{3}\tan t)^2+3)^2}=\int\frac{\sqrt{3}(1+\tan^2 t)dt}{9(\tan^2 t+1)^2}$$
$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\tan^2 t+1}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{6\sqrt{3}}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{6\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+\frac{(x+1)/\sqrt{3}}{1+((x+1)/\sqrt{3})^2}\right)+c=\frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}(x+1)}{x^2+2x+4}\right)+c$$

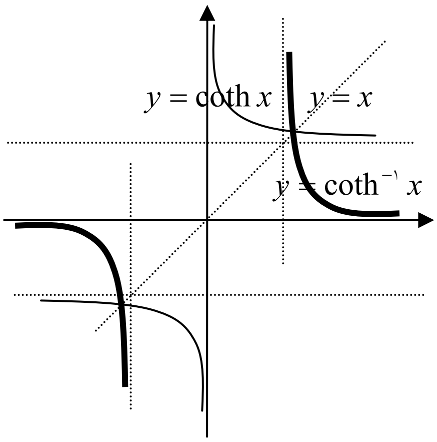
سوال۳-
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}(4/5)^{k+1}(2x+3)^{k+1}}{(-1)^k(4/5)^k(2x+3)^k}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}(4/5)^{k+1}}{(-1)^k(4/5)^k}\right|=\frac{4}{5}|2x+3|<1\to\left|x+\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{8}$$
بنابر اين شعاع همگرايی برابر $R=\frac{5}{8}$ و حوزه همگرايی برابر است با $\left(-\frac{17}{8},-\frac{7}{8}\right)$

سوال۴-
$$l=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{(3\theta)^2+(3)^2}\,d\theta=3\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$$

روش اول (جزء به جزء)
$$l=3\left[\theta\sqrt{\theta^2+1}\,\Big|_{\theta=0}^{2\pi}-\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^2+1}}d\theta\right]$$
$$=3\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}-\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta+\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}d\theta\right]=3\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}-\frac{l}{3}+\sinh^{-1}\theta\,\Big|_{\theta=0}^{2\pi}\right]$$
$$2l=3\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\sinh^{-1}2\pi\right]\to l=\frac{3}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right]$$

روش دوم (تغيير متغير)
$$l=3\int_{t=0}^{\sinh^{-1}2\pi}\sqrt{\sinh^2 t+1}\,\cosh t\,dt=3\int_{t=0}^{\sinh^{-1}2\pi}\cosh^2 t\,dt$$
$$=\frac{3}{2}\int_{t=0}^{\sinh^{-1}2\pi}(1+\cosh 2t)\,dt=\frac{3}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sinh 2t\right]\Big|_{t=0}^{\sinh^{-1}2\pi}=\frac{3}{2}\left[\sinh^{-1}2\pi+2\pi\sqrt{4\pi^2+1}\right]\Big|_{t=0}^{\sinh^{-1}2\pi}=$$
$$=\frac{3}{2}\left[\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)+2\pi\sqrt{4\pi^2+1}\right]$$





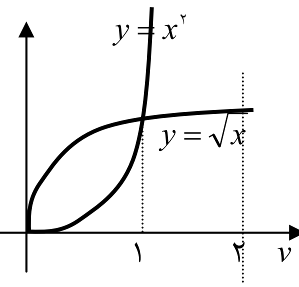
سوال۵- $y=\coth^{-1}x \to \coth y = x \to \dfrac{e^{y}+e^{-y}}{e^{y}-e^{-y}}=x$

$$\to \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}=x \to e^{2y}+1=x(e^{2y}-1) \to e^{2y}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\to y=\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\ ,\ |x|>1$$

ابتدا نمودار تابع $y=\coth x$ را رسم می کنیم. نمودار تابع $y=\coth^{-1}x$ قرینه نمودار تابع $y=\coth x$ نسبت به خط $y=x$ است که می توان آن را رسم کرد.

سوال۶- $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{\sin(x^{x})} e^{x^{2}}\,dx=(\sin(x^{x}))'e^{\sin^{2}(x^{x})}-(2x)'e^{4x^{2}}=(1+\ln x)x^{x}\cos(x^{x})e^{\sin^{2}(x^{x})}-2e^{4x^{2}}$



سوال۷- روش اول (پوسته استوانه ای) :

$$V=\int_{x=0}^{1}2\pi(2-x)(\sqrt{x}-x^{2})dx=2\pi\int_{x=0}^{1}(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}-2x^{2}+x^{3})dx$$

$$=2\pi\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^{2}\sqrt{x}-\frac{2}{3}x^{3}+\frac{1}{4}x^{4}\right)\Big|_{0}^{1}=2\pi\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{31}{30}\pi$$

روش دوم (قرص مستدیر) : $v=\displaystyle\int_{y=0}^{1}\pi[(2-y^{2})^{2}-(2-\sqrt{y})^{2}]dy=\pi\int_{y=0}^{1}(-4y^{2}+y^{4}+4\sqrt{y}-y)dx$

$$=\pi\left(-\frac{4}{3}y^{3}+\frac{1}{5}y^{5}+\frac{8}{3}y\sqrt{y}-\frac{1}{2}y^{2}\right)\Big|_{0}^{1}=\pi\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}+\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{30}\pi$$