Problem set2: **فصل معادلات با مشتقات جزیی** **تاریخ تحویل:۱۳۸۹/۹/۲۱**

۱- معادلات زیر را با استفاده از روش مشخصه حل کنید:

الف) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u(x,0) = \sin x \quad , \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2$

ب) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad z(x,x) = e^{3x} \quad z(x,-2x) = \cos 3x$

۲- مطلوبست حل معادلات با مشتقات جزیی زیر:

الف) $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - x$

ب) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \tan^3 x \tan y - \tan x \tan^3 y$

ج) $(D^2 - DD' - 2D'^2)z = (2x^2 + xy - y^2)\sin xy - \cos xy$

د) $(p^2 + q^2)y = qz$

ه) $pq+p+q=0$

ی) $pz-qz=z^2+(x+y)^2$

۳- با استفاده از روش تفکیک متغیر معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2(x+y)u$

ب) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < x < 1, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \quad , \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1 \end{cases}$

۴- معادلات زیر را از روش عملگر حل کنید:

الف) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \sin y$

ب) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \exp(3x - 2y)$

ج) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \exp(2x + 3y)$

د) $(D^2 - DD')z = \cos x \cos 2y$

ه) $(D^3 - 3D^2 D')z = x^2 y$

۵- معادله دیفرانسیل جزیی حاکم بر ارتعاشات یک سیم الاستیک به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ است. طول آن **π** و دو انتها آن ثابت است. سرعت اولیه صفر است. تغییرشکل اولیه به صورت **u(x,0)=2(sinx+sin3x)** است. مطلوبست تغییرشکل **u(x,t)** ارتعاشات سیم برای **t>0**.

۶- دو انتهای **A** و **B** یک میله **20cm** بترتیب در ابتدا دارای دمای **30°C** و **80°C** بوده تا حالت پایدار غالب شود. دمای دو انتها در حالت پایدار بترتیب به **40°C** و **60°C** می رسد. توزیع دمای میله در زمان **t** را تعیین کنید. در زمان اولیه و حالت پایدار توزیع دما در امتداد **x** را خطی درنظر بگیرید.

۷- یک صفحه مستطیلی با سطوحی که کاملاً عایق بندی شده دارای عرض **10cm** و طول آن در مقایسه با عرض آنقدر دراز است که می توان آن را بی نهایت در نظر گرفت.

اگر دما در امتداد **y=0** با رابطه زیر داده شود:

$$u(x,0) = \begin{cases} 20x & 0 < x \le 5 \\ 20(10-x) & 5 < x < 10 \end{cases}$$

و دو لبه **x=0** و **x=10** و همچنین دیگر لبه در صفر درجه سانتی گراد نگه داشته شود. دمای حالت پایدار در هر نقطه **(x,y)** را پیدا کنید.