

۱- معادلات زیر را با استفاده از روش مشخصه حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \sin x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x^2 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad z(x,x) = e^{3x}, \quad z(x,-2x) = \cos 3x \quad (\text{ب})$$

۲- مطلوبست حل معادلات با مشتقات جزئی زیر:

$$(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + (x-y) \frac{\partial z}{\partial y} = z-x \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \tan^3 x \tan y - \tan x \tan^3 y \quad (\text{ب})$$

$$(D^2 - DD' - 2D'^2)z = (2x^2 + xy - y^2) \sin xy - \cos xy \quad (\text{ج})$$

$$(p^2 + q^2)y = qz \quad (\text{د})$$

$$pq + p + q = 0 \quad (\text{ه})$$

$$pz - qz = z^2 + (x+y)^2 \quad (\text{و})$$

۳- با استفاده از روش تفکیک متغیر معادلات زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x+y)u \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۴- معادلات زیر را از روش عملگر حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \sin y \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \exp(3x - 2y) \quad (\text{ب})$$

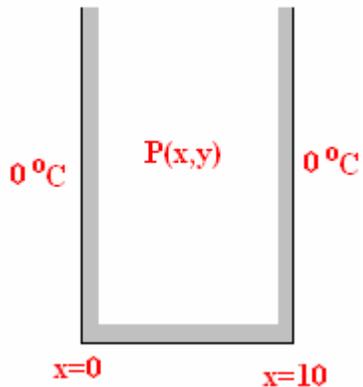
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \exp(2x + 3y) \quad (\text{ج})$$

$$(D^2 - DD')z = \cos x \cos 2y \quad (\text{د})$$

$$(D^3 - 3D^2 D')z = x^2 y \quad (\text{ه})$$

۵- معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر ارتعاشات یک سیم الاستیک به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ است. طول آن π و دو انتها آن ثابت است. سرعت اولیه صفر است. تغییر شکل اولیه به صورت $u(x,0) = 2(\sin x + \sin 3x)$ است. مطلوبست تغییر شکل $u(x,t)$ ارتعاشات سیم برای $t > 0$.

۶- دو انتهای A و B یک میله 20cm بترتیب در ابتدا دارای دمای 30°C و 80°C بوده تا حالت پایدار غالب شود. دمای دو انتها در حالت پایدار بترتیب به 40°C و 60°C می رسد. توزیع دمای میله در زمان t را تعیین کنید. در زمان اولیه و حالت پایدار توزیع دما در امتداد x را خطی در نظر بگیرید.



۷- یک صفحه مستطیلی با سطوحی که کاملاً عایق بندی شده دارای عرض 10cm و طول آن در مقایسه با عرض آنقدر دراز است که می توان آن را بی نهایت در نظر گرفت. اگر دما در امتداد $y=0$ با رابطه زیر داده شود:

$$u(x,0) = \begin{cases} 20x & 0 < x \leq 5 \\ 20(10-x) & 5 < x < 10 \end{cases}$$

و دو لبه $x=0$ و $x=10$ و همچنین دیگر لبه در صفر درجه سانتی گراد نگه داشته شود. دمای حالت پایدار در هر نقطه (x,y) را پیدا کنید.