

$$f_Y(y) = \frac{2y + 1}{6} \quad 0 < y < 2$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y}{3} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

بنابراین $f_{X,Y,Z}(x,y,z) \neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$ پس X و Y و Z از یکدیگر مستقل نیستند
 اما $f_{X,Z}(x,z) = f_X(x)f_Z(z)$ و $f_{Y,Z}(y,z) = f_Y(y)f_Z(z)$ پس X و Z و
 همچنین Y و Z از یکدیگر مستقل هستند و $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ یعنی X و
 Y از یکدیگر مستقل نیستند.

۷.۳ تمرینات

۱ یک تاس سالم را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار عدد ۶ بیاید

الف- اگر A پیشامد مشاهده عدد ۶ و B پیشامد مشاهده عدد غیر از ۶ باشد، فضای نمونه و احتمال هر پیشامد ساده را پیدا کنید.

ب- فرض کنید X شماره پرتابهای لازم برای مشاهده اولین ۶ باشد. S_X را پیدا کنید. آیا X گسسته است؟

ج- تابع احتمال و تابع توزیع X را به دست آورید و احتمال اینکه X مضرب ۳ باشد را بیابید.

۲ سکه سالمی را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X را برابر تفاضل تعداد خطهای به دست آمده از تعداد شیرها در نظر بگیریم، تابع احتمال X را به دست آورید و $P(X > -1)$ را محاسبه کنید.

۳ محموله‌ای شامل ۵ پروژکتور است که دوتای آن آسیب دیده است. به طور تصادفی ۳ پروژکتور این محموله خریداری می‌شود. اگر تعداد پروژکتورهای آسیب دیده که خریداری شده‌اند را با متغیر تصادفی X نشان دهیم، تابع احتمال و تابع توزیع X را به دست آورید.

۴ کدامیک از توابع زیر می‌توانند تابع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X باشند؟ چرا؟

$$f_X(x) = \frac{x}{15} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{الف-}$$

$$f_X(x) = \frac{5-x^2}{6} \quad x=0, 1, 2, 3 \quad \text{ب-}$$

$$f_X(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad x=0, 1, 2, 3 \quad \text{ج-}$$

$$f_X(x) = \frac{x+1}{25} \quad x=1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{د-}$$

۵ سه تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X برابر مجموع اعداد روی ۳ تاس مشاهده شده باشد، تابع احتمال X را به دست آورید و احتمال اینکه مجموع اعداد روی ۳ تاس حداقل ۱۵ باشد را بیابید.

۶ دو کیسه هر کدام محتوی ۴ مهره است که از یک تا چهار شماره گذاری شده‌اند. یک مهره از کیسه اول و یک مهره از کیسه دوم بیرون می‌آوریم.

الف- اگر متغیر تصادفی X مجموع دو رقم نوشته شده بر روی این دو مهره باشد، تابع احتمال و تابع توزیع X را به دست آورید.

ب- اگر متغیر تصادفی Y اختلاف دو رقم نوشته شده بر روی این دو مهره باشد، تابع احتمال و تابع توزیع Y را به دست آورید.

۷ دو جعبه وجود دارند که جعبه اول شامل ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سیاه است و جعبه دوم شامل ۲ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه است. یک مهره از جعبه اول به تصادف انتخاب کرده و آن را در جعبه دوم قرار می‌دهیم و سپس از جعبه دوم ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد مهره‌های قرمز انتخاب شده از جعبه دوم باشد، تابع احتمال X و تابع توزیع X را به دست آورید و $P(X \geq 1)$ را محاسبه کنید.

۸ از داخل مربع ABCD به ضلع $\sqrt{2}$ واحد نقطه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر فاصله نقطه انتخابی تا قطر AC در نظر می‌گیریم.

الف- S_X را پیدا کنید. آیا X پیوسته است؟ چرا؟

ب- تابع توزیع X را به دست آورید و از روی آن تابع چگالی احتمال X را بیابید.

ج- $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

۹ نشان دهید که تابع زیر تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته X است و $P(X \leq \frac{\pi}{4})$ و میانه

توزیع را بیابید.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \cos x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$$

۱۰ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & -k < x < k \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار k را تعیین کنید.

ب - تابع توزیع X را به دست آورید و $P(|X| \leq 1)$ ، $P([X] = -1)$ را محاسبه کنید.

۱۱ مقدار k را چنان تعیین کنید که تابع زیر یک تابع چگالی احتمال باشد.

$$f_X(x) = \frac{k}{1+x^2} \quad -\infty < x < +\infty$$

۱۲ اگر تابع توزیع یک متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ c - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \end{cases}$$

الف - مقدار c را تعیین کنید و تابع چگالی احتمال X را به دست آورید.

ب - $P(X < 3)$ و $P(4 < X \leq 5)$ را محاسبه کنید.

۱۳ کدامیک از توابع زیر یک تابع توزیع می باشند:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 1 - y^2 & -1 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + y^2 & \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 1 & 1 \leq y \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - 3(1-x)^2 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

۱۴ مقدار c را چنان تعیین کنید که توابع زیر یک تابع چگالی احتمال باشند و در هر حالت تابع توزیع مربوطه را به دست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x+1) & -1 < x \leq 3 \\ 2c & 3 < x < 4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} cy & 0 < y \leq 1 \\ c & 1 \leq y \leq 2 \\ cy + 3c & 2 \leq y < 3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱۵ مقدار نانی که (بر حسب صد کیلوگرم) یک نانوا در طول روز می‌فروشد یک متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 < x < 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار c را تعیین کنید و تابع توزیع X را به دست آورید.

ب - اگر در یک روز بدانیم که بیشتر از ۳۰۰ کیلو نان فروخته شده، احتمال اینکه در آن روز بین ۱۵۰ و ۴۵۰ کیلو نان فروخته شود را بیابید.

۱۶ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد که در آن α و β مقادیر ثابتی هستند $0 < \beta$ و $-\infty < \alpha < +\infty$ است.

$$f_X(x) = \begin{cases} c \left[1 - \left| \frac{x-\alpha}{\beta} \right| \right] & \alpha - \beta < x < \alpha + \beta \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار c را تعیین کنید.

ب - تابع توزیع X را به دست آورید.

۱۷ تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & x = 0, 1, 2, 3, \quad y = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار c را تعیین کنید و احتمالات $P(X \leq 1 | Y = 1)$, $P(XY \leq 2)$ را محاسبه کنید.

۱۸ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر می باشد:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx(1+3y^2) & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار c را تعیین کنید و احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$$P(0 < X < 1, \frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2}), \quad P(X+Y \geq 2)$$

ب - آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

۱۹ از یک ظرف میوه که شامل ۳ پرتقال، ۲ سیب و ۳ موز است چهار میوه را به تصادف انتخاب می کنیم. اگر X تعداد پرتقالهای انتخابی و Y تعداد سیبهای انتخابی باشند،

الف - تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید.

ب - $P(Y \leq 1 | X = 2)$, $P(2X + Y < 3)$ را محاسبه کنید.

۲۰ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6-x-y}{8} & 0 < x < 2, \quad 2 < y < 4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - نشان دهید که X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

ب - $P(2 < Y < 3 | X = 1)$ را محاسبه کنید.

۲۱ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار c را تعیین کنید.

ب- توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ و توابع چگالی احتمال شرطی $f_{X|Y}(x|y)$ و $f_{Y|X}(y|x)$ را به دست آورید.

۲۲ فرض کنید برای متغیرهای تصادفی X و Y داشته باشیم که

$$f_X(x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \quad y = 0, 1, \dots, x$$

که در آن $0 < \mu < 1$ و $0 < p < 1$ هستند. نشان دهید که تابع احتمال کناری Y برابر است با

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\mu p} (\mu p)^y}{y!} \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

۲۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & |x^2 - y^2| < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کرده و توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را به دست آورید.

۲۴ دو تاس سالم با هم پرتاب می‌شوند. تابع احتمال توأم X و Y را در هر یک از حالات زیر به دست آورید:

الف- X برابر بزرگترین عدد مشاهده شده روی دو تاس و Y برابر مجموع اعداد مشاهده شده روی دو تاس باشند.

ب- X برابر عدد مشاهده شده روی تاس اول و Y برابر بزرگترین عدد مشاهده شده روی دو تاس باشند.

ج- X برابر کوچکترین و Y برابر بزرگترین عدد مشاهده شده روی دو تاس باشند.

۲۵ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + \frac{xy}{4}) & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید و $f_X(x)$ را به دست آورید.

ب- $P(X > Y)$ ، $P(Y > \frac{1}{4} | X < \frac{1}{4})$ را محاسبه کنید.

۲۶ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-y} & -y \leq x \leq y, \quad 0 < y < \infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار c را تعیین کرده و توابع $f_{Y|X}(y|x)$ ، $f_{X|Y}(x|y)$ را به دست آورید.

ب - $P(Y > 2X)$ را محاسبه کنید.

۲۷ جعبه‌ای شامل ۳ مهره است که بر روی آنها شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است. ۲ مهره یک به یک و بدون جایگذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X را برابر شماره اولین مهره انتخابی از جعبه و متغیر تصادفی Y را برابر شماره بزرگتر در بین دو مهره انتخابی در نظر بگیریم، تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید و $P(X \leq 2 | Y = 3)$ را محاسبه کنید. آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

۲۸ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xy & 0 < x < y < a \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار a را تعیین کنید و $P(0 < X < \frac{1}{2} | Y = 1)$ ، $P(X + Y \leq 1)$ را محاسبه کنید.

۲۹ فرض کنید برای دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y داشته باشیم که

$$f_X(x) = \begin{cases} a & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} b & 0 < x < 1, \quad x < y < x+1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار a و b را تعیین کنید و $P(X + Y < 1)$ را محاسبه کنید.

ب - $f_Y(y)$ را به دست آورید. آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

۳۰ ظرف A شامل یک مهره سفید و یک مهره سیاه و ظرف B شامل دو مهره سفید و دو مهره سیاه است. به تصادف و با جایگذاری دو مهره از A خارج می‌کنیم، اگر هم رنگ باشند یک مهره سفید و اگر هم رنگ نباشند یک مهره سیاه به ظرف B اضافه می‌کنیم و سپس به تصادف از ظرف B یک مهره خارج می‌کنیم. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب تعداد مهره‌های سفید خارج شده

از A و B باشند.

الف - تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید.

ب - $P(XY=2)$ و $P(X \leq 1 | Y=1)$ و $P(Y=0 | X \geq 2)$ را محاسبه کنید.

۳۱ فرض کنید که متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{برای نقاط درون مربعی به رئوس} \\ & \{(-a,0), (a,0), (0,-a), (0,a)\} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار a را تعیین کنید و توابع چگالی حاشیه‌ای X و Y را به دست آورید.

ب - $P(X+Y < 0)$ را محاسبه کنید.

۳۲ عدد X را به تصادف از بین اعداد $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ انتخاب می‌کنیم و سپس عددی را به

تصادف از بین اعداد $\{1, 2, \dots, X\}$ انتخاب می‌کنیم و آن را Y می‌نامیم.

الف - تابع احتمال توأم X و Y و تابع احتمال شرطی X به شرط $Y=2$ را به دست آورید.

ب - آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

۳۳ اگر X و Y و Z دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} kxyz & 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف - مقدار k را تعیین کنید و $P(X < \frac{1}{4}, Y > \frac{1}{4}, 1 < Z < 2)$ را محاسبه کنید.

ب - آیا X و Y و Z از یکدیگر مستقل هستند؟ چرا؟

۳۴ ظرفی شامل ۳ مهره سفید و ۱ مهره سیاه است. از این ظرف ابتدا یک مهره بیرون می‌آوریم. اگر

این مهره سفید باشد، ۲ مهره دیگر و اگر سیاه باشد یک مهره دیگر به تصادف و بدون جایگذاری از

ظرف خارج می‌کنیم و متغیرهای تصادفی X و Y را به ترتیب تعداد مهره‌های سفید و سیاه باقی

مانده در ظرف در نظر می‌گیریم.

الف - تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید و $P(X < 2 | Y=0)$ را محاسبه کنید.

ب - آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

۳۵ نشان دهید که تابع

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

یک تابع چگالی احتمال توأم است و توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را به دست آورید.