الف- احتمال آنکه موسسه یک ماشین با لاستیک خراب کرایه کرده باشد را بیابید.

ب- اگر ماشین کرایه شده بوسیله موسسه دارای لاستیک خراب باشد احتمال آنکه از آژانس F کرایه کرده باشد را بیابید.

**حل** اگر قرار دهیم

$B_i =$ پیشامد اینکه موسسه از آژانس نوع iام ماشین کرایه کند i=D,E,F

$A =$ پیشامد اینکه ماشین کرایه شده توسط موسسه دارای لاستیک خراب باشد

در این صورت

الف- (فرمول تفکیک احتمال)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_D \cap A) + P(B_E \cap A) + P(B_F \cap A) \\ &= P(B_D)P(A \mid B_D) + P(B_E)P(A \mid B_E) + P(B_F)P(A \mid B_F) \\ &= (۰/۲۰)(۰/۱۰) + (۰/۲۰)(۰/۱۲) + (۰/۶۰)(۰/۰۴) = ۰/۰۶۸ \end{aligned}$$

ب- (فرمول بیز)

$$P(B_F \mid A) = \frac{P(B_F)P(A \mid B_F)}{P(A)} = \frac{(۰/۶۰)(۰/۰۴)}{۰/۰۶۸} = \frac{۶}{۱۷}$$

## ۹.۲ مسائل حل شده

**مثال ۱.۹.۲** سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم اگر شیر آمد آن سکه را یک بار دیگر پرتاب می‌کنیم و اگر خط آمد یک تاس را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ حاصل از این آزمایش را معین کنید و پیشامد A مربوط به مشاهده عدد کمتر از ۴ در پرتاب تاس را مشخص کنید.

**حل**

$$S = \{(H,T),(H,H),(T,۱),(T,۲),\ldots,(T,۶)\}$$

$$A = \{(T,۱),(T,۲),(T,۳)\}$$

**مثال ۲.۹.۲** فرض کنید A و B و C سه پیشامد باشند. پیشامدهای زیر را برحسب این سه پیشامد یا متممهای آنها بنویسید

الف- فقط A اتفاق بیفتد.

ب- حداکثر دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتد.

ج- حداقل دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتند.

د- دقیقاً دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتند.

**حل** الف- $A-(B\cup C)=A\cap(B'\cap C')$

ب- $(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$

ج- $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

د- $\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]-(A\cap B\cap C)$

**مثال ۳.۹.۲** فضای نمونه هر یک از آزمایشهای تصادفی زیر را مشخص کنید و تعیین کنید که کدام یک متناهی، نامتناهی شمارش‌پذیر یا پیوسته هستند.

الف- پاسخ دادن به یک آزمون تستی ۴ جوابه که شامل ۲۰ سئوال است.

ب- تعداد تلفات حوادث رانندگی یک شهر معین در سال آینده.

ج- مدت زمانی که یک تلویزیون رنگی بدون آنکه عیبی پیدا کند و بدون تعمیر به کار ادامه دهد.

**حل** الف- فضای نمونه متناهی

$$S=\{(x_1,x_2,...,x_{20})\mid x_i=A,B,C,D\ ;\ i=1,2,...,20\}$$

ب- فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر $S=\{0,1,2,3,....\}$

ج- فضای نمونه پیوسته $S=[0,+\infty)$

**مثال ۴.۹.۲** چهار نفر برای ریاست یک شورا کاندید شده‌اند. شانس کاندید A دو برابر کاندید B، شانس کاندید B دو برابر کاندید C و شانس کاندید C و D یکی است. مطلوب است

الف- احتمال اینکه کاندید A یا B انتخاب شوند را بیابید.

ب- احتمال اینکه کاندید A انتخاب نشود را بیابید.

**حل** در این مساله مدل احتمال برابر است با

| $S$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| احتمالات | $\frac{4}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

الف- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

ب- $P(A')=1-P(A)=1-\frac{4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

**مثال ۵.۹.۲** در آزمایشی سکه ناارییی را دو بار می‌اندازیم. اگر هر دو بار شیر بیاید آزمایش را

پایان می‌دهیم و در غیر اینصورت سکه را یک بار دیگر انداخته و آزمایش را پایان می‌دهیم. احتمال اینکه یک خط مشاهده شود را بیابید.

**حل** مدل احتمال برابر است با

| S | HH | HTT | HTH | THT | THH | TTT | TTH |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| احتمالات | $\frac{۱}{۴}$ | $\frac{۱}{۸}$ | $\frac{۱}{۸}$ | $\frac{۱}{۸}$ | $\frac{۱}{۸}$ | $\frac{۱}{۸}$ | $\frac{۱}{۸}$ |

اگر A پیشامد مشاهده یک خط باشد در این صورت $A=\{HTH,THH\}$ و بنابراین $P(A)=\frac{۱}{۴}$.

**مثال ۶.۹.۲** شخصی که در جایگاه بنزین توقف می‌کند، بازبینی لاستیکهای ماشین را با احتمال ۰/۱۲ و بازبینی روغن ماشین را با احتمال ۰/۲۹ و بازبینی هر دو را با احتمال ۰/۰۷ تقاضا می‌کند.

الف- احتمال اینکه این شخص درخواست بازبینی لاستیک یا روغن ماشینش داشته باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه این شخص هیچکدام از بازبینی‌ها را درخواست نکند را بیابید.

**حل** اگر A پیشامد بازبینی لاستیک ماشین و B پیشامد بازبینی روغن ماشین باشد در این صورت

الف- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۱۲+۰/۲۹-۰/۰۷=۰/۳۴$

ب- $P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)=۱-۰/۳۴=۰/۶۶$

**مثال ۷.۹.۲** اگر A و B و C سه پیشامد دلخواه باشند ثابت کنید که

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

**حل**

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))$$
$$=P(A)+\left[P(B)+P(C)-P(B\cap C)\right]-P((A\cap B)\cup(A\cap C))$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-\left[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)\right]$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

**مثال ۸.۹.۲** سه نفر به طور مستقل در کشف پیام‌های رمز کار می‌کنند. احتمال کشف رمز برحسب تجربه‌ای که از کار آنها داریم به ترتیب $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۵}$ است. احتمال آنکه پیام رمز توسط آنها کشف شود را بیابید.

**حل** اگر A، B و C به ترتیب پیشامد این باشد که نفر اول، دوم و سوم پیام رمز را کشف کنند در

این صورت A، B و C از یکدیگر مستقل هستند و بنابراین

$$P(A)=\frac{۱}{۵} \quad , \quad P(B)=\frac{۱}{۴} \quad , \quad P(C)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$$

$$=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲۰}-\frac{۱}{۱۵}-\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶۰}=\frac{۳۶}{۶۰}=\frac{۳}{۵}$$

**مثال ۹.۹.۲** یک مدار شامل سه فیوز است و به گونه‌ای طراحی شده است که اگر حداقل ۲ فیوز سالم باشد آنگاه مدار متصل خواهد بود و در غیر این صورت مدار قطع می‌گردد. اگر این سه فیوز به طور مستقل عمل کنند و احتمال سالم ماندن آنها به ترتیب $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۴}$ باشد، احتمال اینکه مدار متصل باشد را بیابید.

**حل** اگر A، B و C به ترتیب پیشامد این باشد که فیوز اول، دوم و سوم سالم باشند در این صورت با استفاده از مثالهای ۲.۹.۲ (پ) و ۷.۹.۲ داریم که

$$P((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))$$

$$=P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)-۲P(A\cap B\cap C)$$

$$=P(A)P(B)+P(A)P(C)+P(B)P(C)-۲P(A)P(B)P(C)$$

$$=\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}-۲(\frac{۱}{۴})=\frac{۱۷}{۲۴}$$

**مثال ۱۰.۹.۲** چهار زوج برای یک تئاتر ۸ بلیط در یک ردیف خریداری کرده‌اند.

الف- احتمال اینکه هر زوج پهلوی یکدیگر بنشینند را بیابید.

ب- احتمال اینکه تمام مردها پهلوی هم و در سمت راست زنها باشند را بیابید.

**حل** الف- اگر A پیشامد این باشد که هر زوج پهلوی یکدیگر بنشینند در این صورت

$$n(S)=۸! \quad , \quad n(A)=۴!\,(۲!)^{۴} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴!\,(۲!)^{۴}}{۸!}=\frac{۱}{۱۰۵}$$

ب- اگر B پیشامد این باشد که تمام مردها پهلوی هم و در سمت راست زنها باشند در این صورت

$$n(B)=۴!\,۴! \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴!\,۴!}{۸!}=\frac{۱}{۷۰}$$

**مثال ۱۱.۹.۲** سه نفر شیرازی، دو نفر تهرانی و چهار نفر اصفهانی می‌خواهند در یک صف

پهلوی هم قرار گیرند. به فرض آنکه هم شهریها از هم متمایز نباشند، احتمال اینکه دو تهرانی در دو سر صف قرار بگیرند را بیابید.

**حل** چون هم شهریها از یکدیگر متمایز نیستند پس $n(S)=\frac{۹!}{۳!۲!۴!}$ و اگر A پیشامد این باشد که دو تهرانی در دو سر صف بایستند آنگاه $n(A)=\frac{۷!}{۳!۴!}$ و بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲!۷!}{۹!}=\frac{۱}{۳۶}$.

**مثال ۱۲.۹.۲** ده صندلی در یک ردیف قرار گرفته‌اند و ۲ نفر می‌خواهند روی این صندلیها بنشینند.

الف- احتمال اینکه این دو نفر پهلوی هم قرار گیرند را بیابید.

ب- احتمال اینکه بین این دو نفر یک صندلی قرار بگیرد را بیابید.

**حل** الف- اگر A پیشامد قرار گرفتن دو نفر پهلوی هم باشد، چون به ۹ طریق می‌توان دو صندلی پهلوی هم را انتخاب کرد پس

$$n(S)=P_{۲}^{۱۰}=\frac{۱۰!}{۸!}=۹۰ \quad , \quad n(A)=۹\times ۲!=۱۸ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۹۰}=\frac{۱}{۵}$$

ب- اگر B پیشامد این باشد که بین این دو نفر یک صندلی قرار بگیرد، چون به ۸ طریق می‌توان این دو صندلی را انتخاب کرد پس

$$n(B)=۸\times ۲!=۱۶ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۹۰}=\frac{۸}{۴۵}$$

**مثال ۱۳.۹.۲** یک کشتی دارای یک چوب پرچم است که سه موضع مختلف دارد که در هر یک از آنها می‌توان یک پرچم برافراشت. فرض کنید که کشتی برای علامت دادن، چهار پرچم (از چهار نوع مختلف) داشته باشد و یک پرچم وقتی در موضعهای مختلف افراشته شود علامتهای متفاوت نشان دهد. چند علامت مختلف می‌توان ساخت؟

**حل** اگر قرار دهیم $i=۰,۱,۲,۳$ علامتهایی که با i پرچم می‌توان ساخت $= A_i$

در این صورت

$$n(A_۰)=۱ \quad , \quad n(A_۱)=\binom{۳}{۱}P_{۱}^{۴}=۳\times ۴=۱۲$$

$$n(A_۲)=\binom{۳}{۲}P_{۲}^{۴}=۳\times ۴\times ۳=۳۶ \quad , \quad n(A_۳)=\binom{۳}{۳}P_{۳}^{۴}=۴\times ۳\times ۲=۲۴$$

بنابراین تعداد علامتهای مختلف برابر است با

$$\sum_{i=۰}^{۳} n(A_i)=۱+۱۲+۳۶+۲۴=۷۳$$

**مثال ۱۴.۹.۲** احتمال اینکه روزهای تولد یک خانواده ده نفری در سال، تمام روزهای هفته را

شامل شوند را بیابید.

**حل** تعداد کل راه‌هایی که ده نفر می‌توانند در روزهای مختلف هفته متولد شوند از حل معادله زیر به دست می‌آید.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 10 \quad , \quad x_i \geq 0$$

و بنابراین $n(S) = \binom{7+10-1}{10} = \binom{16}{10}$. اگر A پیشامد این باشد که روزهای تولد این ۱۰ نفر تمام روزهای هفته را شامل شود در اینصورت $n(A)$ از حل معادله زیر به دست می‌آید

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 10 \quad , \quad x_i \geq 1$$

و یا با قرار دادن $y_i = x_i - 1 \geq 0$ داریم که

$$y_1 + y_2 + \dots + y_7 = 3 \quad , \quad y_i \geq 0$$

بنابراین $n(A) = \binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3}$ و در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{10}} = \frac{3}{286}$$

**مثال ۱۵.۹.۲** به چند طریق می‌توان n مهره نامتمایز را در k جعبه قرار داد بطوریکه هر جعبه شامل حداقل ۲ مهره باشد ($n \geq 2k$).

**حل** مساله مانند حل معادله زیر است

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad , \quad x_i \geq 2$$

و یا با قرار دادن $y_i = x_i - 2 \geq 0$ داریم که $y_1 + y_2 + \dots + y_K = n - 2k$

بنابراین تعداد راه‌های ممکن برابر است با $\binom{k+n-2k-1}{n-2k} = \binom{n-k-1}{n-2k}$

**مثال ۱۶.۹.۲** می‌خواهیم ترتیب حروف کلمه TALLAHASSEE را عوض کنیم

الف- احتمال اینکه هر سه حرف A پهلوی هم قرار گیرند را بیابید.

ب- احتمال اینکه هیچکدام از سه حرف A پهلوی هم قرار نگیرند را بیابید.

**حل** الف- اگر A پیشامد این باشد که هر سه حرف A پهلوی هم قرار گیرند در این صورت

$$n(S) = \frac{11!}{1!3!2!1!2!2!} \quad , \quad n(A) = \frac{9!}{1!1!2!1!2!2!} \quad \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9!3!}{11!} = \frac{3}{55}$$

ب- توجه کنید که اگر B پیشامد این باشد که هیچکدام از سه حرف A پهلوی هم قرار نگیرند آنگاه B متمم پیشامد A نیست. برای محاسبه n(B) ابتدا حروف غیر از A یعنی TLLHSSEE

را به $\frac{۸!}{۱!۲!۱!۲!۲!}$ مرتب می‌کنیم و سپس سه حرف A را می‌توان به $\binom{۹}{۳}$ طریق در بین و انتهای این حروف قرار داد به طوری که هیچ حرف A پهلوی هم نباشد بنابراین

$$n(B) = \binom{۹}{۳} \times \frac{۸!}{۱!۲!۱!۲!۲!}$$

و در نتیجه

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \binom{۹}{۳} \frac{۸!۳!}{۱۱!} = \frac{۵۶}{۱۱۰} = \frac{۲۸}{۵۵}$$

**مثال ۱۷.۹.۲** یک تاس سالم را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار عدد شش بیاید. مطلوب است

الف- احتمال اینکه تعداد پرتابهای لازم مضرب ۳ باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه حداقل ۳ پرتاب لازم باشد را بیابید.

**حل** اگر $e_k$ نمایانگر این باشد که در k امین پرتاب برای اولین بار عدد شش بیاید در این صورت مدل احتمال برای این مساله عبارت است از

| S | $e_۱$ | $e_۲$ | $e_۳$ | $e_۴$ | .... |
|---|---|---|---|---|---|
| احتمالات | $\frac{۱}{۶}$ | $(\frac{۵}{۶})(\frac{۱}{۶})$ | $(\frac{۵}{۶})^۲(\frac{۱}{۶})$ | $(\frac{۵}{۶})^۳(\frac{۱}{۶})$ | .... |

الف- اگر A پیشامد این باشد که تعداد پرتابهای لازم مضرب ۳ است در این صورت

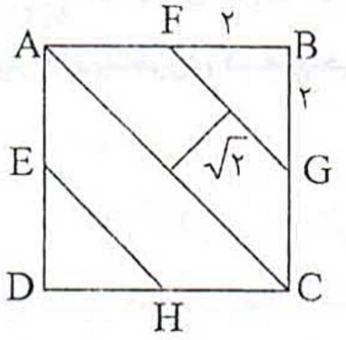
$$A = \{e_۳, e_۶, e_۹, \dots\} \Rightarrow P(A) = (\frac{۵}{۶})^۲(\frac{۱}{۶}) + (\frac{۵}{۶})^۵(\frac{۱}{۶}) + \dots = \frac{(\frac{۵}{۶})^۲(\frac{۱}{۶})}{۱-(\frac{۵}{۶})^۳} = \frac{۲۵}{۹۱}$$

ب- اگر B پیشامد این باشد که حداقل ۳ پرتاب لازم است در این صورت

$$B = \{e_۳, e_۴, e_۵, \dots\} \Rightarrow P(B) = (\frac{۵}{۶})^۲(\frac{۱}{۶}) + (\frac{۵}{۶})^۳(\frac{۱}{۶}) + \dots = \frac{(\frac{۵}{۶})^۲(\frac{۱}{۶})}{۱-\frac{۵}{۶}} = \frac{۲۵}{۳۶}$$

**مثال ۱۸.۹.۲** نقطه‌ای را به تصادف از داخل مربع ABCD به ضلع ۴ واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی از قطر AC کمتر از $\sqrt{۲}$ باشد را بیابید.

**حل** با توجه به شکل ۱۲.۲ اگر A پیشامد این باشد که فاصله نقطه انتخابی از قطر AC کمتر از $\sqrt{۲}$ باشد، در این صورت




شکل ۱۲.۲

$$P(A)=\frac{S_{AEHCGF}}{S_{ABCD}}=۱-\frac{۲S_{BFG}}{S_{ABCD}}$$
$$=۱-\frac{۲(\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲)}{۴\times ۴}=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

**مثال ۱۹.۹.۲** خانواده‌ای ۳ فرزند دارد. اگر فرزند اول و آخر از یک جنس باشد، احتمال همجنس بودن تمام فرزندان را بیابید.

**حل** اگر قرار دهیم

$A =$ پیشامد همجنس بودن تمام فرزندان خانواده $= \{BBB, GGG\}$

$B =$ پیشامد اینکه فرزند اول و آخر از یک جنس باشند $= \{BBB, BGB, GBG, GGG\}$

در این صورت

$$P(A)=\frac{۲}{۸} \quad , \quad P(B)=\frac{۴}{۸} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{۲}{۸}$$

و $P(A \mid B)$ مورد سئوال است. بنابراین

$$P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

**مثال ۲۰.۹.۲** از جعبه‌ای محتوی ۹ کارت با شماره‌های ۱ تا ۹، ۲ کارت را به تصادف بیرون می‌آوریم، اگر بدانیم که مجموع دو عدد زوج است، احتمال اینکه هر دو عدد فرد باشند را بیابید.

**حل** اگر قرار دهیم

$A =$ پیشامد اینکه مجموع اعداد روی دو کارت زوج باشد

$B =$ پیشامد اینکه اعداد روی دو کارت هر دو فرد باشند

در این صورت $B\subset A$ و بنابراین

$$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{۲۰}{۷۲}}{\frac{۳۲}{۷۲}}=\frac{۲۰}{۳۲}=\frac{۵}{۸}$$

**مثال ۲۱.۹.۲** احتمال اینکه مرد متأهلی نمایش مخصوصی از تلویزیون را تماشا کند ۰/۴ و احتمال اینکه همسر او همان نمایش را تماشا کند ۰/۵ و احتمال اینکه این مرد برنامه‌ای را تماشا

کند که همسر او در حال تماشای آن است ۰/۷ می‌باشد. مطلوب است

الف - احتمال اینکه هر دو نفر برنامه را تماشا کنند را بیابید.

ب - احتمال اینکه این خانم برنامه‌ای را تماشا کند که شوهرش در حال تماشای آن است را بیابید.

ج - احتمال اینکه حداقل یک نفر از این زوج برنامه را تماشا کنند را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$M =$ پیشامد اینکه مرد برنامه تلویزیونی را تماشا کند

$W =$ پیشامد اینکه همسر او برنامه تلویزیونی را تماشا کند

در این صورت

$$P(M) = ۰/۴ \quad , \quad P(W) = ۰/۵ \quad , \quad P(M \mid W) = ۰/۷$$

الف - $P(M \cap W) = P(W)P(M \mid W) = ۰/۵ \times ۰/۷ = ۰/۳۵$

ب - $P(W \mid M) = \dfrac{P(M \cap W)}{P(M)} = \dfrac{۰/۳۵}{۰/۴} = \dfrac{۷}{۸}$

ج - $P(M \cup W) = P(M) + P(W) - P(M \cap W) = ۰/۴ + ۰/۵ - ۰/۳۵ = ۰/۵۵$

**مثال ۲۲.۹.۲** در یک طرح الکترونیکی، به تجربه دیده شده است که اگر یک کارگر جدید به برنامه‌های کارآموزی شرکت توجه کند، با احتمال ۰/۸۶ از تولید سهم خواهد برد و احتمال متناظر برای کارگر جدیدی که به برنامه‌های کارآموزی شرکت توجه نداشته باشد برابر با ۰/۳۵ است. اگر ۰/۸۰ همه کارگران جدید به برنامه‌های کارآموزی شرکت توجه داشته باشند، احتمال آنکه یک کارگر جدید از تولید سهم ببرد را بیابید.

**حل** اگر قرار دهیم

$A =$ پیشامد اینکه کارگر جدید به برنامه‌های کارآموزی شرکت توجه کند

$B =$ پیشامد اینکه کارگر جدید از تولید سهم ببرد

در این صورت

$$P(B \mid A) = ۰/۸۶ \quad , \quad P(B \mid A') = ۰/۳۵ \quad , \quad P(A) = ۰/۸۰$$

و $P(B)$ مورد سئوال است از فرمول تفکیک احتمال داریم که

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')$$
$$=(0/80)(0/86)+(0/20)(0/35)=0/758$$

**مثال ۲۳.۹.۲** اگر A، B و C سه پیشامد مستقل باشند، ثابت کنید که

الف- $A'$ و $B'$ از یکدیگر مستقل هستند.

ب- $A'$ و $C$ از یکدیگر مستقل هستند.

ج- $A\cup B$ و $C$ از یکدیگر مستقل هستند.

**حل** الف- با استفاده از تمرین ۵.۱۰.۲ داریم که

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$$
$$=1-\left[P(A)+P(B)-P(A)P(B)\right]=\left[1-P(B)\right]-P(A)\left[1-P(B)\right]$$
$$=\left[1-P(B)\right]\left[1-P(A)\right]=P(B')P(A')$$

بنابراین $A'$ و $B'$ از یکدیگر مستقل هستند

ب- $$P(A'\cap C)=P(C-A)=P(C)-P(A\cap C)=P(C)-P(A)P(C)$$
$$=P(C)\left[1-P(A)\right]=P(C)P(A')$$

بنابراین $A'$ و $C$ از یکدیگر مستقل هستند.

ج-

$$P((A\cup B)\cap C)=P((A\cap C)\cup(B\cap C))=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$
$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$
$$=P(C)\left[P(A)+P(B)-P(A)P(B)\right]$$
$$=P(C)\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=P(C)P(A\cup B)$$

بنابراین $A\cup B$ و $C$ از یکدیگر مستقل هستند.

**مثال ۲۴.۹.۲** سه تیرانداز هر کدام یک تیر به یک هدف شلیک می‌کنند. احتمال آنکه تیرانداز اول به هدف بزند ۰/۴ است و همین احتمال برای تیراندازهای دوم و سوم به ترتیب ۰/۵ و ۰/۷ است. احتمال اینکه دو تیر به هدف بخورد و یک تیر به خطا برود را بیابید.

**حل** اگر قرار دهیم $A_i=$ پیشامد اینکه تیر انداز iام به هدف بزند $i=1,2,3$

در این صورت پیشامدهای $A_1$، $A_2$ و $A_3$ از یکدیگر مستقل هستند و به سادگی دیده می‌شود که

$A'_1$ ، $A_2$ ، $A_3$ و $A_1$ ، $A'_2$ ، $A_3$ و همچنین $A_1$ ، $A_2$ ، $A'_3$ از یکدیگر مستقل هستند و

$$P(A_1) = ۰/۴ \; , P(A_2) = ۰/۵ \; , P(A_3) = ۰/۷.$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A'_3) + P(A_1 \cap A'_2 \cap A_3) + P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$P(A_1)P(A_2)P(A'_3) + P(A_1)P(A'_2)P(A_3) + P(A'_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$(۰/۴)(۰/۵)(۰/۳) + (۰/۴)(۰/۵)(۰/۷) + (۰/۶)(۰/۵)(۰/۷) = ۰/۴۱$$

**مثال ۲۵.۹.۲** احتمال اینکه مردی تا ۲۰ سال دیگر زنده باشد ۰/۶ و همین احتمال برای همسر او ۰/۹ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه

الف – هیچکدام از آنها تا ۲۰ سال دیگر زنده نباشند.

ب – فقط همسر تا ۲۰ سال دیگر زنده باشد.

**حل** اگر قرار دهیم $M =$ پیشامد اینکه مرد تا ۲۰ سال دیگر زنده باشد

$W =$ پیشامد اینکه زن تا ۲۰ سال دیگر زنده باشد

در این صورت M و W از یکدیگر مستقل هستند و $P(M)= ۰/۶$ و $P(W)= ۰/۹$. بنابراین

الف – $P(M' \cap W') = P(M')P(W') = (۰/۴)(۰/۱) = ۰/۰۴$

ب – $P(W \cap M') = P(W)P(M') = (۰/۹)(۰/۴) = ۰/۳۶$

**مثال ۲۶.۹.۲** سرایداری یک دسته کلید ۸تایی برای بازکردن در ۸اتاق را دارد که هر کلید تنها در یک اتاق را باز می‌کند. اگر در ۴۰ درصد از این اتاقها قفل نباشند و او ۳کلید را به طور تصادفی همراه آورده باشد، احتمال اینکه او بتواند وارد اتاقی شود را بیابید.

**حل** اگر قرار دهیم $A =$ پیشامد اینکه در اتاق باز باشد

$B =$ پیشامد اینکه سرایدار بتواند وارد اتاق شود

در این صورت $P(B)$ مورد سئوال است که یک مساله تفکیک احتمال است. بنابراین

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)P(B \mid A) + P(A')P(B \mid A')$$

$$= (۰/۴۰)(۱) + (۰/۶۰)(\frac{۳}{۸}) = ۰/۶۲۵$$

**مثال ۲۷.۹.۲** یک آزمایش تشخیص سرطان با احتمال ۹۹ درصد برای بیماران سرطانی پاسخ مثبت می‌دهد و با احتمال ۵ درصد برای بیماران غیرسرطانی پاسخ مثبت می‌دهد. از بین بیماران

یک بیمارستان که ۷ درصد آنها سرطانی هستند بیماری را به تصادف انتخاب کرده و آزمایش فوق برای وی پاسخ مثبت داده است. احتمال اینکه این بیمار سرطانی باشد را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$C=$ پیشامد اینکه بیمار مبتلا به سرطان باشد

$A=$ پیشامد اینکه آزمایش برای بیمار پاسخ مثبت دهد

در این صورت

$$P(A\mid C)=\cdot/۹۹ \quad , \quad P(A\mid C')=\cdot/\cdot۵ \quad , \quad P(C)=\cdot/\cdot۷$$

و بنابراین $P(C\mid A)$ مورد سئوال است که یک مساله بیز است، در نتیجه

$$P(C\mid A)=\frac{P(C)P(A\mid C)}{P(C)P(A\mid C)+P(C')P(A\mid C')}=\frac{(\cdot/\cdot۷)(\cdot/۹۹)}{(\cdot/\cdot۷)(\cdot/۹۹)+(\cdot/۹۳)(\cdot/\cdot۵)}$$
$$=\cdot/۵۹۸$$

**مثال ۲۸.۹.۲** جعبه‌ای شامل ۲ توپ سفید و ۳ توپ سیاه می‌باشد و همچنین ۳ کارت وجود دارد که روی آنها شماره‌های ۱، ۲ و ۳ یادداشت گردیده است. یک کارت به تصادف از بین این ۳ کارت انتخاب و به تعداد عدد روی کارت مشاهده شده از جعبه به تصادف توپ انتخاب می‌کنیم.

الف - احتمال اینکه تمامی توپهای انتخاب شده از جعبه سفید باشند را بیابید.

ب - اگر تمامی توپهای انتخاب شده از جعبه سفید باشند احتمال اینکه روی کارت عدد ۲ مشاهده شده باشد را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$B_i=$ پیشامد اینکه کارت شماره i انتخاب شود $\quad i=۱,۲,۳$

$W=$ پیشامد اینکه تمامی توپهای انتخابی سفید باشند

الف - از فرمول تفکیک احتمال داریم که

$$P(W)=P(B_۱\cap W)+P(B_۲\cap W)+P(B_۳\cap W)=\sum_{i=۱}^{۳}P(B_i)P(W\mid B_i)$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۱}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}+\frac{۱}{۳}\times\cdot=\frac{۵}{۳\cdot}=\frac{۱}{۶}$$

ب- از فرمول بیز داریم که

$$P(B_۲ \mid W) = \frac{P(B_۲)P(W \mid B_۲)}{P(W)} = \frac{\frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}}{\frac{۱}{۶}} = \frac{۱}{۵}$$

**مثال ۲۹.۹.۲** دو تهیه کننده A و B برای یک شرکت تولیدی یک قطعه معین را تهیه می‌کنند. در گذشته ۵ درصد از قطعات تهیه شده بوسیله A و ۹ درصد از قطعات تهیه شده بوسیله B معیوب بوده‌اند. A چهار برابر B از قطعه مذکور را تهیه می‌کند. فرض کنید یک قطعه تهیه شده باشد و ملاحظه شود که سالم است. احتمال اینکه این قطعه بوسیله A تهیه شده باشد را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$A =$ پیشامد اینکه قطعه بوسیله A تهیه شود

$B =$ پیشامد اینکه قطعه بوسیله B تهیه شود

$C =$ پیشامد اینکه قطعه سالم باشد

در این صورت

$$P(A) = \frac{۴}{۵} \quad , \quad P(B) = \frac{۱}{۵} \quad , \quad P(C \mid A) = ۰/۹۵ \quad , \quad P(C \mid B) = ۰/۹۱$$

بنابراین

$$P(A \mid C) = \frac{P(A)P(C \mid A)}{P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B)} = \frac{\frac{۴}{۵} \times ۰/۹۵}{\frac{۴}{۵} \times ۰/۹۵ + \frac{۱}{۵} \times ۰/۹۱} = ۰/۸۰۷$$

**مثال ۳۰.۹.۲** فروشگاهی ۱۰۰ دستگاه کامپیوتر از چهار عرضه کننده A، B، C و D خریداری کرده است. تعداد دستگاههای سالم و معیوب هر عرضه کننده در جدول زیر آمده است.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| سالم | ۲۱ | ۱۶ | ۱۹ | ۲۹ |
| معیوب | ۲ | ۳ | ۴ | ۶ |

الف- اگر یک دستگاه به تصادف از میان کامپیوترها انتخاب شود احتمال اینکه این دستگاه معیوب باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه دستگاه معیوبی که به تصادف انتخاب شده است متعلق به عرضه کننده A باشد را بیابید.

ج- احتمال اینکه دستگاه انتخاب شده یا سالم باشد و یا متعلق به عرضه کننده A نباشد را

بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$i = A, B, C, D$ پیشامد اینکه دستگاه کامپیوتر از عرضه کننده i خریداری شود $= B_i$

پیشامد اینکه دستگاه کامپیوتر خریداری شده معیوب باشد $= E$

در این صورت

الف-

$$P(E) = \sum_{i=A}^{D} P(B_i)P(E \mid B_i) = \frac{۲۳}{۱۰۰} \times \frac{۲}{۲۳} + \frac{۱۹}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۹} + \frac{۲۳}{۱۰۰} \times \frac{۴}{۲۳} + \frac{۳۵}{۱۰۰} \times \frac{۶}{۳۵}$$
$$= ۰/۱۵$$

ب-
$$P(B_A \mid E) = \frac{P(B_A)P(E \mid B_A)}{P(E)} = \frac{\frac{۲۳}{۱۰۰} \times \frac{۲}{۲۳}}{۰/۱۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

ج-
$$P(E' \cup B'_A) = P((E \cap B_A)') = ۱ - P(E \cap B_A) = ۱ - P(B_A)P(E \mid B_A)$$

$$= ۱ - \frac{۲۳}{۱۰۰} \times \frac{۲}{۲۳} = ۱ - ۰/۰۲ = ۰/۹۸$$

**مثال ۳۱.۹.۲** ظرفی محتوی ۳ مهره آبی و ۷ مهره سفید است. مهره‌ای بـه تـصادف انـتخاب می‌کنیم. اگر رنگ این مهره سفید باشد آن را دوباره در ظرف قرار می‌دهیم و دو مهره سفید دیگر به ظرف اضافه می‌کنیم. اگر مهره استخراجی آبی باشد آن را در ظرف قرار نداده و مهره دیگری نیز در ظرف قرا نمی‌دهیم. سپس برای بار دوم دو مهره از ظرف بیرون می‌آوریم.

الف- احتمال اینکه دو مهره انتخاب شده در بار دوم سفید باشند را بیابید.

ب- اگر دو مهره انتخاب شده در بار دوم آبی باشند، احتمال اینکه مهره انتخاب شده بار اول سفید باشد را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

پیشامد اینکه مهره انتخابی در بار اول آبی باشد $= B_۱$

پیشامد اینکه مهره انتخابی در بار اول سفید باشد $= W_۱$

پیشامد اینکه دو مهره انتخابی در بار دوم آبی باشند $= B_۲$

پیشامد اینکه دو مهره انتخابی در بار دوم سفید باشند $= W_۲$

در این صورت

الف -

$$P(W_{۲})=P(B_{۱}\cap W_{۲})+P(W_{۱}\cap W_{۲})=P(B_{۱})P(W_{۲}\mid B_{۱})+P(W_{۱})P(W_{۲}\mid W_{۱})$$

$$=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{\binom{۷}{۲}}{\binom{۹}{۲}}+\frac{۷}{۱۰}\times\frac{\binom{۹}{۲}}{\binom{۱۲}{۲}}=\frac{۷}{۴۰}+\frac{۲۱}{۵۵}=\frac{۱۲۲۵}{۲۲۰۰}=\frac{۴۹}{۸۸}$$

ب -

$$P(W_{۱}\mid B_{۲})=\frac{P(W_{۱})P(B_{۲}\mid W_{۱})}{P(W_{۱})P(B_{۲}\mid W_{۱})+P(B_{۱})P(B_{۲}\mid B_{۱})}$$

$$=\frac{\frac{۷}{۱۰}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۲}{۲}}}{\frac{۷}{۱۰}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۲}{۲}}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۹}{۲}}}=\frac{۴۲}{۵۳}$$

**مثال ۳۲.۹.۲** جعبه A شامل ۴ توپ قرمز، ۲ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است و جعبه B شامل ۳ توپ قرمز و ۵ توپ سفید است. یک تاس متعادل پرتاب می‌شود. اگر ۱ یا ۶ ظاهر شود یک توپ از ظرف A و در غیر اینصورت یک توپ از ظرف B خارج می‌کنیم.

الف - احتمال اینکه یک توپ سفید استخراج شود را بیابید.

ب - اگر یک توپ قرمز به تصادف خارج شود احتمال اینکه در پرتاب تاس ۱ یا ۶ ظاهر شده باشد را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$A=$ پیشامد اینکه در پرتاب تاس عدد ۱ یا ۶ ظاهر شود

$W=$ پیشامد اینکه یک توپ سفید از جعبه خارج شود

$R=$ پیشامد اینکه یک توپ قرمز از جعبه خارج شود

در این صورت

الف -

$$P(W)=P(A\cap W)+P(A'\cap W)=P(A)P(W\mid A)+P(A')P(W\mid A')$$

$$=\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۱۲}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۱۷}{۳۶}$$

ب-
$$P(A \mid R)=\frac{P(A)P(R \mid A)}{P(A)P(R \mid A)+P(A')P(R \mid A')}=\frac{\frac{2}{6}\times\frac{4}{12}}{\frac{2}{6}\times\frac{4}{12}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{8}}=\frac{4}{13}$$

**مثال ۳۳.۹.۲** شخصی به تصادف یکی از اعداد صحیح ۱، ۲ و ۳ را انتخاب می‌کند و سپس به تعداد عدد انتخاب شده یک تاس را پرتاب می‌کند.

الف- احتمال اینکه مجموع ۵ بیاورد را بیابید.

ب- اگر این شخص مجموع ۴ آورده باشد، احتمال اینکه عدد انتخاب شده ۲ باشد را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$B_i =$ پیشامد اینکه شخص عدد i را انتخاب کرده باشد $\quad i=1,2,3$

$A =$ پیشامد اینکه شخص مجموع ۵ بیاورد

$C =$ پیشامد اینکه شخص مجموع ۴ بیاورد

در این صورت

الف- داریم که

$$A \mid B_1=\{5\}$$
$$A \mid B_2=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$
$$A \mid B_3=\{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$$

بنابراین

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A \mid B_i)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{36}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{216}=\frac{11}{108}$$

ب- داریم که

$$C \mid B_1=\{4\}$$
$$C \mid B_2=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$
$$C \mid B_3=\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$$

بنابراین از فرمول بیز داریم که

$$P(B_2 \mid C)=\frac{P(B_2)P(C \mid B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(C \mid B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{36}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{36}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{216}}=\frac{6}{19}$$

**مثال ۳۴.۹.۲** یک ظرف شامل ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. یک مهره از ظرف خارج می‌کنیم و هر رنگی که باشد مهره دیگری از رنگ مخالف آن در ظرف قرار می‌دهیم. سپس مهره دیگری از ظرف خارج می‌کنیم. اگر این مهره با مهره قبلی که به دست آمده بود هم رنگ باشد،

احتمال اینکه هر دو سفید باشند را بیابید.

**حل** پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم

$R_i =$ پیشامد اینکه در بار iام مهره قرمز خارج شود $i=۱,۲$

$W_i =$ پیشامد اینکه در بار iام مهره سفید خارج شود

$A =$ پیشامد اینکه هر دو مهره انتخاب شده هم رنگ باشند

در این صورت $W_۱ \cap W_۲ \subset A$ و $P(W_۱ \cap W_۲ \mid A)$ مورد سئوال است. بنابراین

$$P(W_۱ \cap W_۲ \mid A) = \frac{P(W_۱ \cap W_۲ \cap A)}{P(A)} = \frac{P(W_۱ \cap W_۲)}{P(W_۱ \cap W_۲) + P(R_۱ \cap R_۲)}$$

$$= \frac{P(W_۱)P(W_۲ \mid W_۱)}{P(W_۱)P(W_۲ \mid W_۱) + P(R_۱)P(R_۲ \mid R_۱)} = \frac{\frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰}}{\frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰}} = \frac{۷}{۸}$$

**مثال ۳۵.۹.۲** جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره قرمز و جعبه B شامل ۶ مهره سفید و ۲ مهره قرمز می‌باشد. یک جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم و بدون توجه به رنگ در جعبه سوم C قرار می‌دهیم که خود شامل ۳ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. سپس از جعبه C یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال قرمز بودن این مهره را بیابید.

**حل** پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم

$W_i =$ پیشامد اینکه از جعبه iام مهره سفید خارج شود $i = A, B, C$

$R_i =$ پیشامد اینکه از جعبه iام مهره قرمز خارج شود

$A =$ پیشامد اینکه جعبه A در بار اول انتخاب شود

$B =$ پیشامد اینکه جعبه B در بار اول انتخاب شود

در این صورت $P(R_C)$ مورد سئوال است. بنابراین

$$P(R_C) = P(A)P(R_C \mid A) + P(B)P(R_C \mid B) = \frac{۱}{۲}P(R_C \mid A) + \frac{۱}{۲}P(R_C \mid B)$$

اما از طرفی داریم که

$$P(R_C \mid A) = P(R_A \cap R_C) + P(W_A \cap R_C)$$

$$= P(R_A)P(R_C \mid R_A) + P(W_A)P(R_C \mid W_A) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۴}{۷} + \frac{۳}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۲۹}{۵۶}$$

$$P(R_C \mid B) = P(R_B \cap R_C) + P(W_B \cap R_C)$$

$$= P(R_B)P(R_C \mid R_B) + P(W_B)P(R_C \mid W_B) = \frac{۲}{۸} \times \frac{۴}{۷} + \frac{۶}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۲۶}{۵۶}$$

بنابراین
$$P(R_c) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۹}{۵۶} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۶}{۵۶} = \frac{۵۵}{۱۱۲}$$

**مثال ۳۶.۹.۲** سه جعبه را در نظر بگیرید به طوری که جعبه اول شامل ۴ مهره سفید و ۲ مهره قرمز و جعبه دوم شامل ۴ مهره سفید و ۸ مهره قرمز و جعبه سوم شامل ۳ مهره سفید و ۱ مهره قرمز باشد. اگر یک مهره به تصادف از هر جعبه انتخاب شود، احتمال اینکه مهره انتخاب شده از جعبه اول سفید باشد به شرط آنکه دقیقاً ۲ مهره سفید انتخاب شده باشد را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$W_i =$ پیشامد اینکه از جعبه iام یک مهره سفید انتخاب شود $\quad i=۱,۲,۳$

$R_i =$ پیشامد اینکه از جعبه iام یک مهره قرمز انتخاب شود

$A =$ پیشامد اینکه دقیقاً ۲ مهره سفید انتخاب شود

در این صورت $P(W_۱ \mid A)$ مورد سئوال است. چون انتخاب مهره از جعبه‌ها بطور مستقل انجام می‌گیرد، بنابراین

$$P(W_۱ \mid A) = \frac{P(W_۱ \cap A)}{P(A)} = \frac{P(W_۱ \cap W_۲ \cap R_۳) + P(W_۱ \cap R_۲ \cap W_۳)}{P(W_۱ \cap W_۲ \cap R_۳) + P(W_۱ \cap R_۲ \cap W_۳) + P(R_۱ \cap W_۲ \cap W_۳)}$$

$$= \frac{P(W_۱)P(W_۲)P(R_۳) + P(W_۱)P(R_۲)P(W_۳)}{P(W_۱)P(W_۲)P(R_۳) + P(W_۱)P(R_۲)P(W_۳) + P(R_۱)P(W_۲)P(W_۳)}$$

$$= \frac{(\frac{۴}{۶} \times \frac{۴}{۱۲} \times \frac{۱}{۴}) + (\frac{۴}{۶} \times \frac{۸}{۱۲} \times \frac{۳}{۴})}{(\frac{۴}{۶} \times \frac{۴}{۱۲} \times \frac{۱}{۴}) + (\frac{۴}{۶} \times \frac{۸}{۱۲} \times \frac{۳}{۴}) + (\frac{۲}{۶} \times \frac{۴}{۱۲} \times \frac{۳}{۴})} = \frac{۱۱۲}{۱۳۶} = \frac{۱۴}{۱۷}$$

**مثال ۳۷.۹.۲** جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز و جعبه B شامل ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید می‌باشند. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده مهره‌ای به تصادف از آن خارج می‌کنیم و در جعبه بعدی قرار می‌دهیم. سپس از این جعبه ۲ مهره بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر این ۲ مهره سفید باشند احتمال اینکه مهره‌ای که منتقل شده است قرمز باشد را بیابید.

**حل** قرار می‌دهیم

$W_i =$ پیشامد اینکه در بار اول از جعبه iام مهره سفید خارج شود

$R_i =$ پیشامد اینکه در بار اول از جعبه iام مهره قرمز خارج شود $\quad i=A,B$

پیشامد اینکه در بار دوم از جعبه iام دو مهره سفید خارج شود $= WW_i$

پیشامد اینکه در بار اول جعبه A انتخاب شده باشد $= A$

پیشامد اینکه در بار اول جعبه B انتخاب شده باشد $= B$

پیشامد مورد نظر مسئله $= D$

در این صورت

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)$$

اما از طرفی $P(A)=P(B)=\frac{۱}{۲}$ و

$$P(D\mid A)=P(R_A\mid WW_B)=\frac{P(R_A)P(WW_B\mid R_A)}{P(R_A)P(WW_B\mid R_A)+P(W_A)P(WW_B\mid W_A)}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۷}\times\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}}{\frac{۴}{۷}\times\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}+\frac{۳}{۷}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}}}=\frac{۴}{۱۳}$$

$$P(D\mid B)=P(R_B\mid WW_A)=\frac{P(R_B)P(WW_A\mid R_B)}{P(R_B)P(WW_A\mid R_B)+P(W_B)P(WW_A\mid W_B)}$$

$$=\frac{\frac{۳}{۵}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}}{\frac{۳}{۵}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}+\frac{۲}{۵}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۲}}}=\frac{۹}{۲۱}$$

بنابراین
$$P(D)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱۳}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۲۱}=\frac{۲۰۱}{۵۴۶}=\frac{۶۷}{۱۸۲}$$

## ۱۰.۲ تمرینات

۱ در هر یک از حالات زیر فضای نمونه آزمایش تصادفی را معین کنید.

الف- پرتاب یک سکه ۳ مرتبه