ممکن است برای یک دسته از معادلات $\frac{d^2y}{dx^2}+R(x)\frac{dy}{dx}+S(x)y=Q(x)$ بتوان حلی به فرم بسته پیدا کرد.

با تغییر متغیر $z=f(x)$ و محاسبه‌ی مشتق‌های زیر:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

معادله بالا به این فرم تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\underbrace{\left\{\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+R(x)\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right\}}_{A}\frac{dy}{dz}+\frac{S(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}y=\frac{Q(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

اکنون $z=f(x)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{dz}{dx}=\sqrt{\frac{\pm S(x)}{a^2}}$ باشد (می‌توان $a^2=1$ انتخاب کرد)؛ اگر A ثابت باشد معادله اخیر به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

مثال:

$$\text{Eq.}\quad y''-\frac{x}{1-x^2}y'+\frac{n^2}{1-x^2}y=0$$

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{\frac{\pm S(x)}{a^2}} \xrightarrow{a^2=1} \frac{dz}{dx}=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\rightarrow \quad z=n\sin^{-1}(x)\right)$$

$$A\equiv\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+R\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{\frac{nx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-\frac{nx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}{\frac{n^2}{1-x^2}}=0$$

ازاین‌رو معادله اصلی بدین صورت تبدیل می‌یابد:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+y=0 \quad \rightarrow \quad y(z)=C_1\sin(z)+C_2\cos(z)$$
$$\text{where,} \qquad z=n\sin^{-1}(x)$$