

انتگرال فور

نویسنده:

حسین ایزن



انتگرال خور

(روشهای انتگرال گیری)

جلد اول - انتگرال نامعین

نویسنده:

حسین ایزن

ویرایش اول:

مهرماه ۱۳۹۱

مقدمه

سلام

در کتابی که پیش رو دارید به بحث در مورد روشهای انتگرال گیری می پردازیم اسم کتاب رو "انتگرال خور" گذاشتم چون می خواستم یه اسم متفاوت داشته باشه. این کتاب حاصل چندین سال تدریس من در دانشگاههای مختلف هست در مورد محتوای اون هم شما باید نظر بدید اما به هر حال من سعی کردم حتی الامکان کتابی روان، کم اشتباه و کامل رو براتون آماده کنم در جلد اول انتگرال خور به بحث انتگرال نامعین و تکنیکهای انتگرال گیری می پردازیم. اگر خدا قسمت کنه جلدهای بعدی انتگرال خور که به انتگرال معین، انتگرال دوگانه و ... اختصاص خواهد داشت رو براتون آماده می کنم البته به جز مبحث ریاضی در رشته اصلی خودم یعنی مهندسی مکانیک هم مطالبی آماده کردم که امیدوارم بتونم اونها رو هم به صورت کتاب در بیارم.

من همیشه سعی کردم در کلاسها ارتباط نزدیکی با بچه ها داشته باشم و در این کتاب هم همین روال رو دنبال کردم بنابراین در اینجا صرفا با یکسری از فرمولهای خشک ریاضی طرف نمی شید. خودم دوست داشتم کتاب رو به صورت رنگی آماده کنم اما چون ممکنه خدای ناکرده یک وقتی کسی بخواد کتاب رو پرینت بگیره و مطالعه کنه! کتاب رو به صورت تک رنگ نوشتم تا مشکل پرینت هم نداشته باشید.

در آخر اگر سوالی، پیشنهادی، تعریفی، تحسینی (یا احیانا زبونم لال انتقادی!) هم داشتید می تونید از یکی از سه روش زیر استفاده کنید:

روش اول: استفاده از پیغامگیر: ۰۹۳۷ ۲۴۳ ۱۱۷۴

مثلا اگر در صفحه ۲۵ خط ششم اشکالی دارید اشاره کنید تا در سایت براتون توضیح بیشتری بدم و در ویرایشهای بعدی انتگرال خور اصلاحات لازم رو انجام بدم.

روش دوم: مراجعه به سایت: www.integralkhor.blogfa.com

روش سوم: پست الکترونیکی: integralkhor@gmail.com

با آرزوی موفقیت

حسین ایزن - بیست هفتم مهرماه ۱۳۹۱

فهرست

- فصل اول: تعریف انتگرال و فرمولهای پایه انتگرال گیری صفحه: ۱
- فصل دوم: روش تغییر متغیر و فرمولهای تعمیم یافته صفحه: ۲۳
- فصل سوم: تغییر متغیرهای مثلثاتی صفحه: ۴۶
- فصل چهارم: انتگرال گیری از کسرهای گویا صفحه: ۶۲
- فصل پنجم: روش جزء به جزء صفحه: ۷۸
- فصل ششم: انتگرال های مثلثاتی صفحه: ۹۵

فصل اول: تعریف انتگرال و فرمولهای مقدماتی

مقدمه

حتما تا حالا این جمله رو شنیدید که بچه ها (چه دانش آموز و چه دانشجو) می‌کن: "ما مشتق رو خوب بلدیم اما از انتگرال سر در نمی‌آوریم!" در جواب این افراد باید بگم که: اگر شما مشتق رو خوب یاد بگیرید و یک سری ریزه کاریها رو هم بلد باشید میتونید خیلی راحت عملیات انتگرال گیری رو انجام بدید ما در کتاب **انتگرال فور** که در چندین جلد آماده میشه (انتگرال نامعین، انتگرال معین، انتگرال دوگانه و ...) سعی می‌کنیم این ریزه کاریها رو با هم مرور کنیم. فب سرتون رو در نیارم بریم سراغ درسمون.

انتگرال

به صورت خیلی ساده **انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری** است اما بطور؟ به مثال زیر دقت کنید:

$$y = x^2 \quad \xrightarrow{\text{مشتق}} \quad y' = 2x$$

حالا که از شما پرسن اون چه تابعی هست که مشتقش شده $2x$ چی میکنی؟ حتما سریع میکنی: فب معلومه x^2 شاید یکی بگه $x^2 + 5$ یا $x^2 + 1$ و همه این جوابها هم درسته. واقعیت اینه که شما نمی‌تونید بگید عدد ثابتی که با x^2 جمع شده چند بوده چون در مشتق گیری عدد ثابت حذف میشه (صفر میشه) بنابراین به صورت کلی می‌تونیم بگیم جواب ما $x^2 + c$ هست که c به عدد ثابت. به بیان انتگرالی داریم:

$$\int 2x \, dx = x^2 + c$$

فب حالا بگید اون چه تابعیه که مشتقش شده $3x^2$ ؟

آقا اجازه: معلومه $x^3 + c$ یا به بیان انتگرالی:

$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + c$$

آخرین مشفصه که در سو یاد گرفتین! دیکه وقتشه بریم سراغ اصل مطلب یعنی تعریف انتگرال.

تعریف انتگرال

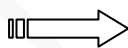
شکل کلی یک انتگرال به صورت زیر هست:

$$\int_a^b f(x) dx$$

که a را حد پایین و b را حد بالای انتگرال می‌گوییم $f(x)$ هم تابع جلوی انتگرال هست.

تذکره یک: اگر حدود انتگرال یعنی a, b داده شده باشند انتگرال رو معین و در غیر اینصورت انتگرال رو نامعین می‌گوییم.

$$\int_a^b f(x) dx$$



انتگرال معین

$$\int f(x) dx$$



انتگرال نامعین

ما در جلد اول انتگرال فور فقط انتگرال نامعین رو بررسی می‌کنیم.

تذکره دو: dx یعنی انتگرالگیری نسبت به x انجام می‌شود (متغیر ما x است) بنابراین هر عبارتی که x ندارد عدد ثابت فرض می‌شود.

مالا که با تعریف انتگرال آشنا شدید به نکته ای رو عنوان می‌کنم که همیشه باید تو ذهنتون باشه:

اگر از جواب انتگرال نامعین مشتق بگیریم باید به تابع جلوی انتگرال برسیم

به بیان انتگرالی داریم:

$$\int f(x)dx = g(x) \rightarrow g'(x) = f(x)$$

به عنوان مثال:

$$\int \cos x dx = \sin x \Rightarrow (\sin x)' = \cos x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

تذکر مهم: یادتوان باشد جواب انتگرال رو از هر روشی بدست بیارید (کمک از بغل دستی، نوشتن دافل ماشین حساب، هندز فیری...) باید در قاعده بالا صدق کنه!!

مثال: فرض کنید در جلسه امتحان انتگرالی به صورت

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x} dx$$

داره شده و بغل دستی شما جواب رو به صورت $g(x) = x^2 - \ln(x)$ بدست آورده! آیا به نظرتون جواب درسته؟

حل: فب کافیه از جواب مشتق بگیریم:

$$g(x) = x^2 - \ln(x) \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

همونطور که می بینید جواب درست نیست! البته فقط یه منفی اشتباه داره و جواب درست به صورت

$$g(x) = x^2 + \ln(x) \text{ است.}$$

نتیجه گیری اخلاقی: سعی کنید به معلومات خودتون تکیه کنید.

دو قانون مهم در انتگرال گیری

قانون اول

اگر یادتون باشه برای مشتق گیری از جمع و تفریق چند تابع کافیه از تک تک توابع جداگانه مشتق بگیریم. در اینجا برای انتگرال گیری هم به همین صورت عمل می کنیم یعنی اگر در جلوی انتگرال جمع یا تفریق چند تابع رو داشته باشیم برای تک تک توابع جداگانه انتگرال می نویسیم به بیان ریاضی داریم:

$$\int (f(x) \pm g(x) \pm \dots) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \dots$$

به عنوان مثال:

$$\int (x^2 + 3x - 7) dx = \int x^2 dx + \int 3x dx - \int 7 dx$$

تذکره یک: وقتی برای هر تابع جداگانه انتگرال رو نوشتید dx فراموش نشه!

تذکره دو: وقتی یکم حرفه ای شدید میتونید یکدفعه انتگرال گیری رو انجام بدید و دیکه نیازی به تفکیک انتگرال نیست.

و اما قانون دو

اگر یک عدد ثابت (مانند k) در تابع جلوی انتگرال ضرب شده باشه می توان آن را از انتگرال بیرون آورد.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

اگه یادتون باشه همین قانون رو در مورد مشتق گیری هم داشتیم.

چند مثال:

$$(a) \int 5x \, dx = 5 \int x \, dx$$

$$(b) \int \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$(c) \int tx^2 \, dx = t \int x^2 \, dx$$

$$(d) \int tx^2 \, dt = x^2 \int t \, dt$$

تفاوت انتگرال (c) و (d) رو متوجه شیرید یا نه؟

توجه کنید در انتگرال (c) متغیر x هست (چون dx داریم) بنابراین t عدد ثابت محسوب می شه و از انتگرال بیرون میاد اما در انتگرال (d) متغیر t هست (چون dt داریم) بنابراین x^2 عدد ثابت محسوب می شه و از انتگرال بیرون میاد.

و اما قانون سوم و چهارم!

متأسفانه بعضی از بچه ها فکر می کنن برای انتگرال گیری از ضرب و تقسیم توابع هم (مثل مشتق) فرمول داریم اما متأسفانه چنین فرمولی وجود ندارد بنابراین روابط زیر اشتباه هستند:

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx \neq \left(\int f(x) \, dx \right) \left(\int g(x) \, dx \right)$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx \neq \frac{\int f(x) \, dx}{\int g(x) \, dx}$$

بنابراین قانون سوم و چهارمی وجود ندارد!! ☹️

مثال: انتگرال های داده شده را برای انتگرال گیری آماده کنید!

$$a) \int (5s^2 - 3 \cos x) dx$$

$$b) \int \left(\frac{3x^4}{5} + \frac{2}{x} + 7 \right) dx$$

$$c) \int e^{x+y} dx$$

$$d) \int \frac{5x^2 + 3}{x} dx$$

حل:

$$a) \int (5s^2 - 3 \cos x) dx = \int 5s^2 dx - \int 3 \cos x dx = 5s^2 \int dx - 3 \int \cos x dx$$

$$b) \int \left(\frac{3x^4}{5} + \frac{2}{x} + 7 \right) dx = \int \frac{3x^4}{5} dx + \int \frac{2}{x} dx + \int 7 dx = \frac{3}{5} \int x^4 dx + 2 \int \frac{1}{x} dx + 7 \int dx$$

$$c) \int e^{x+y} dx = \int e^y e^x dx = e^y \int e^x dx$$

$$d) \int \frac{5x^2 + 3}{x} dx = \int \frac{5x^2}{x} dx + \int \frac{3}{x} dx = 5 \int x dx + 3 \int \frac{1}{x} dx$$

تذکره: می‌تونیم بلید ولی برای یادآوری:

$$\frac{3x^4}{5} = \frac{3}{5} x^4, \quad \frac{2}{x} = 2 \frac{1}{x}, \quad \frac{x+3}{7} = \frac{1}{7} (x+3)$$

به همین صورت میتونیم بنویسیم:

$$\frac{x + \cos x}{5} = \frac{1}{5} (x + \cos x) \quad یا \quad \frac{x + \cos x}{5} = \frac{x}{5} + \frac{\cos x}{5} = \frac{1}{5} x + \frac{1}{5} \cos x$$

ممکنه این نکاتی رو که کفتم خیلی پیش پا افتاده به نظرتون بیاد اما تجربه نشون داده که عدم توجه به همین نکات ساده

منشاء اکثر اشتباهات در انتگرال گیری بوده و فواید بود!!

فرمولهای پایه انتگرال گیری

در این قسمت ما در ابتدا یکسری از انتگرال های ساده رو حفظ می کنیم و در ادامه سعی می کنیم انتگرال های پیچیده تر رو با استفاده از تکنیک هایی مثل تغییر متغیر یا جزء به جزء به انتگرال های ساده تر تبدیل کنیم. این انتگرال های ساده رو در این فرمولهای پایه انتگرال گیری می نامیم. و اما اولین فرمول:

$$\int dx = x + c$$

دقت کنید اگر از $x + c$ (یعنی جواب انتگرال) مشتق بگیریم به تابع جلوی انتگرال می رسیم.

تذکره: واضحه فرمول بالا رو می تونیم در مورد هر متغیر دیگری هم بنویسیم به عنوان مثال

$$\int dy = y + c \quad , \quad \int dt = t + c \quad , \quad \int d(\odot) = \odot + c$$

آقا اجازه: می تونیم بگیریم \int و d همدیگه و فشتی می کنن و فقط x می مونه؟

استاد: چراغ فاموش آره میشه گفت! ولی سعی کن به این قوانین آگوشتی زیاد تکیه نکنی!!!

قبل از اینکه بریم سراغ فرمول دوم دو تا رابطه رو براتون یادآوری می کنم.

$$(a) \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad (b) \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

یادآوری ۱

به عنوان مثال:

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

رابطه بالا مهمترین و پرکاربردترین رابطه مبحث انتگرال گیری می باشد بنابراین باید کاملا بر اون مسلط باشید.

تذکر یک: در فرمول بالا n (یعنی توان x) می تواند هر عددی (کسری، صحیح، ...) به جز -1 باشد

تذکر دو: برای استفاده از فرمول بالا قتما باید x^n در صورت کسر باشد. بنابراین اگر در مسئله داده شده x در مخرج کسر یا در زیر رادیکال باشد باید آن را با استفاده از روابط بالا (یادآوری) به صورت توان دار در صورت کسر نوشت.

حالا چند تا مثال آسون با هم حل می کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال های زیر:

$$(a) \int x^2 dx \quad (b) \int x^{\frac{3}{5}} dx \quad (c) \int \sqrt{x} dx \quad (d) \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$(e) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (f) \int \frac{3x}{7} dx \quad (g) \int (x\sqrt{x} + 2) dx \quad (h) \int \frac{4x^5 + 7}{3x^2} dx$$

حل:

$$(a) \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + c \quad (b) \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + c$$

تذکر: معمولا بعد از انتگرال گیری و بدست آوردن جواب آخر بهتره که جواب رو به جای توان کسری به صورت رادیکالی بنویسیم.

$$(c) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c$$

دقت کنید $x^{\frac{3}{2}}$ رو می تونیم به دو صورت بنویسیم یکی به صورت $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3} = \sqrt{x^3}$ یا اینکه بنویسیم: $x^{\frac{3}{2}} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$ واقع توان صحیح x رو بیرون اذیکال نوشتیم

$$(d) \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = \frac{-1}{x} + c$$

$$(e) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c$$

$$(f) \int \frac{3x}{7} dx = \frac{3}{7} \int x dx = \frac{3}{7} \left(\frac{x^2}{2} \right) = \frac{3x^2}{14} = \frac{3}{14} x^2 + c$$

$$(g) \int (x\sqrt{x} + 2) dx = \int x\sqrt{x} dx + \int 2 dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2x = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 2x + c$$

$$(h) \int \frac{4x^5 + 7}{3x^2} dx = \int \left(\frac{4x^5}{3x^2} + \frac{7}{3x^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{4}{3} x^3 dx + \int \frac{7}{3} \frac{1}{x^2} dx = \frac{4}{3} \int x^3 dx + \frac{7}{3} \int x^{-2} dx = \frac{4}{3} \left(\frac{x^4}{4} \right)$$

$$+ \frac{7}{3} \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) = \frac{x^4}{3} - \frac{7}{3x} + c$$

قلق موم: برای مناسبه انتگرالهای کسری که مخرج کسر تک جمله ای باشد معمولا بهتر است کسر را تفکیک کنیم

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

سه حالت خاص موم از رابطه دوم (این سه تا انتگرال رو حفظ کنید واسه آینه تون فوبه!)

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

رابطه سوم، انتگرال سینوس و کسینوس

$$(a) \int \cos x dx = \sin x + c \quad (b) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

حالا از جواب انتگرال های بالا مشتق می گیریم ببینیم به تابع جلوی انتگرال می رسیم یا نه!

$$\begin{array}{ccc} y = \sin x & \xrightarrow{\text{مشتق}} & y' = \cos x \\ y = -\cos x & \xrightarrow{\text{مشتق}} & y' = -(-\sin x) = \sin x \end{array}$$

می بینید که همه چی آرومه!

قبل از اینکه از این قسمت مثال حل کنیم چند تا رابطه مثلثاتی رو براتون یادآوری می کنیم.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \quad \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad 1 + \cot^2(x) = \csc^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\cos 2x = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \quad (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

فب حالا چند انتگرال فوشکل با هم حل می کنیم .

تذکره: دقت کنید ایده های ساده ای که در حل این انتگرال ها بکار رفته بعدا بدردتون می فوره.

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$(b) \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$$

$$(c) \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(d) \int (\tan x + \cot x) \sin 2x dx$$

$$(e) \int \sin x \cdot \cos t dt$$

$$(f) \int \frac{\cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$$

حل:

$$\begin{aligned} (a) \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx &= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)} dx \\ &= \int (\cos x - \sin x) dx = \int \cos x dx - \int \sin x dx = \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$(b) \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} dx = \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + c$$

$$\begin{aligned} (c) \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} dx = \int (\sin x + \cos x) dx \\ &= -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \int (\tan x + \cot x) \sin 2x dx &= \int \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} dx \\ &= \int 2 dx = 2x + c \end{aligned}$$

$$(e) \int \sin x \cdot \cos t dt = \sin x \int \cos t dt = \sin x \cdot \sin t + c$$

$$(f) \int \frac{\cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{\frac{1 + \cos 2x}{2}}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} + c$$

دقت کنید در حل انتگرال بالا صورت کسر رو به شکل زیر نوشتیم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$(a) \int (1 + \tan^2 x) dx = \int \sec^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$(b) \int (1 + \cot^2 x) dx = \int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$(c) \int \sec x \cdot \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + c$$

$$(d) \int \csc x \cdot \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\csc x + c$$

آکه یادتون باشه داشتیم:

$$y = \tan x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \cot x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -(1 + \cot^2 x) = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x} = \csc x \cdot \cot x$$

دقت کنید برای مناسبه انتگرال سکانت آن را به صورت معکوس کسینوس نوشته سپس از قانون مشتق کسر استفاده می کنیم (به همین صورت برای کسکانت)

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال های زیر:

$$(a) \int \tan^2 x \, dx \quad (b) \int \frac{3}{1 - \cos^2 x} \, dx \quad (c) \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx$$

حل:

$$(a) \int \tan^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx = \tan x - x + c$$

تذکره: دقت کنید برای حل انتگرال بالا ابتدا عدد یک رو به انتگرال اضافه کردیم تا به شکل رابطه (a) در بیاد سپس دوباره یک رو از انتگرال کم کرده و انتگرال ها رو تفکیک کردیم.

$$(b) \int \frac{3}{1 - \cos^2 x} \, dx = \int \frac{3}{\sin^2 x} \, dx = 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -3 \cot x + c$$

$$(c) \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx + \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx \\ = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx + \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \sec x - \csc x + c$$

تابع نمایی و لگاریتمی

قبل از شروع بحث جدید به یادآوری توابع نمایی و لگاریتمی می پردازیم.

یادآوری ۳

تابع نمایی: منظور از تابع نمایی تابعی به صورت a^x است که a ، پایه و x ، نما (توان) می گوئیم اگر پایه تابع نمایی برابر عدد نپر ($e=2.718\dots$) باشد به آن تابع نمایی طبیعی می گوئیم. (به صورت خلاصه تابع نمایی) تابع e^x از قوانین ضرب و تقسیم اعداد تواندار پیروی می کند یعنی داریم:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

یادآوری ۴

لگاریتم: لگاریتم تابع a ، به صورت زیر می نویسیم:

$$\log_a y = x$$

و می خوانیم لگاریتم y در مبنای (پایه) a می شود x . رابطه بین تابع لگاریتمی و نمایی به صورت زیر است:

$$\log_a y = x \iff a^x = y$$

اگر مبنای لگاریتم عدد نپر باشد به جای $\log_e y$ می نویسیم $\ln y$ و به آن لگاریتم طبیعی می گوئیم قوانین پایه لگاریتم طبیعی به صورت زیر بیان می شود:

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \quad \ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \quad \ln x^n = n \ln x$$

$$\ln e = 1 \quad \ln 1 = 0$$

مثالوں میں جو مثبت دقت کنیے

$$(a) \quad \ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x^2-1)$$

$$(b) \quad \ln(x-1) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$(c) \quad -\ln(x+1) = \ln(x+1)^{-1} = \ln\frac{1}{x+1}$$

$$(d) \quad \ln\sqrt{x+3} = \ln(x+3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(x+3)$$

$$(e) \quad \ln(x^2-x) = \ln x(x-1) = \ln x + \ln(x-1)$$

$$(f) \quad -\ln \cos x = \ln(\cos x)^{-1} = \ln\frac{1}{\cos x} = \ln \sec x$$

$$(g) \quad \ln\frac{1}{\sqrt{x}} = -\ln\sqrt{x} = -\frac{1}{2}\ln x$$

و اما انتگرال توابع نمایی و لگاریتم

متما یادتون هست کہ مشتق e^x میسه فودش بنا براین انتگرال e^x هم فودش می شود. یعنی:

$$\int e^x dx = e^x + c$$

مثال:

$$\int e^{x+2} dx = \int e^x \cdot e^2 dx = e^2 \int e^x dx = e^2(e^x + c) = e^{x+2} + c$$

همچنین مشتق $\ln x$ همیشه $\frac{1}{x}$ بنا بر این:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

آقا اجازه: این علامت قدر مطلق چیه؟

استاره: علامت قدر مطلق واسه اینه که تابع جلوی لگاریتم باید مثبت باشه، البته فورم زمان دانشجوی هیپوقت علامت قدر مطلق رو جلوی لگاریتم نمی زاشتم چون ارزش فوشم نمیومد!! البته شما بهتره از این کارای بد انجام ندی!

مثال: انتگرال های زیر را حل کنید

$$(a) \int \frac{1}{2x} dx \quad (b) \int \frac{x+3}{x} dx \quad (c) \int \frac{x-2}{x^2} dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + c = \ln\sqrt{x} + c$$

$$(b) \int \frac{x+3}{x} dx = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{3}{x}\right) dx = \int \left(1 + \frac{3}{x}\right) dx = \int dx + 3 \int \frac{1}{x} dx \\ = x + 3\ln|x| + c = x + \ln|x|^3 + c$$

متوجه شدید که از چه قلمی استفاده کردیم یا به این زودی یادتون رفت !!!؟؟

$$(c) \int \frac{x-2}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x^2} dx = \ln|x| - 2\left(\frac{-1}{x}\right) + c \\ = \ln|x| + \frac{2}{x} + c$$

انتگرال $\int \frac{1}{x^2} dx$ فاطرتون هست؟ مگه نگفتم مفضش کنید واسه آیندتون فوبه !!

حالا می‌خواهیم توابع نمایی و لگاریتمی رو با هم قاطی کنیم ببینیم چی از توش در میاد؟ اما قبلش طبق روال دو تا رابطه رو یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۵

$$\ln e^{f(x)} = f(x) \quad \text{مثلا} \rightarrow \ln e^{\sin x} = \sin x$$

$$e^{\ln f(x)} = f(x) \quad \text{مثلا} \rightarrow e^{\ln x^2} = x^2$$

اگه دقت کنید می‌بینید که \ln ، e همدیگر رو فتنی می‌کنند و فقط $f(x)$ می‌مونه!

آقا اجازه: آفه چه کاریه الکی از خودمون رابطه در بیاریم؟؟

استاد: اتفاقا این دو تا رابطه در فیلی از دروس مهندسی (به خصوص معادلات دیفرانسیل) به دردتون می‌خوره اما چطور؟
یه مثال براتون می‌زنم.

فرض کنید در فلال حل یک مسئله به رابطه $e^y = .5$ رسیدیم و مسئله از ما y رو می‌خواهه حالا چطور از شر e خلاص بشیم؟

جواب: کافیه از طرفین رابطه ای که بدست آوردیم \ln بگیریم و سپس از رابطه $\ln e^{f(x)} = f(x)$ استفاده کنیم.

$$e^y = .5 \Rightarrow \ln e^y = \ln .5 \Rightarrow y = \ln .5 = -.693 \Rightarrow y = -.693$$

بنابراین:

هرگاه با رابطه ای به صورت $e^{f(x)} = k$ مواجه شدیم برای بدست آوردن $f(x)$ از طرفین رابطه \ln می‌گیریم و از رابطه $\ln e^{f(x)} = f(x)$ استفاده می‌کنیم

حالا فرض کنید در خلال حل یک مسئله به رابطه $\ln x = 2.2$ رسیدیم و مسئله از ما x رو می‌خواهد حالا بطور از سر \ln خلاص بشیم؟

جواب: کافیه طرفین رابطه ای رو که بدست آوردیم توان e قرار دهیم و سپس از رابطه $e^{\ln f(x)} = f(x)$ استفاده کنیم.

$$\ln x = 2.2 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{2.2} \Rightarrow x = e^{2.2} = 9 \Rightarrow x = 9$$

بنابراین:

هرگاه با رابطه ای به صورت $\ln f(x) = k$ مواجه شدیم برای بدست آوردن $f(x)$ طرفین رابطه را توان e قرار می‌دهیم و از رابطه $e^{\ln f(x)} = f(x)$ استفاده می‌کنیم

حالا که این دو تا رابطه رو یاد گرفتید چند تا انتگرال قشنگ با هم حل می‌کنیم

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int e^{2\ln x} dx \quad (b) \int e^{-\ln x} dx \quad (c) \int \ln e^{\cos x} dx$$

حل:

$$(a) \int e^{2\ln x} dx = \int e^{\ln x^2} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$(b) \int e^{-\ln x} dx = \int e^{\ln \frac{1}{x}} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$(c) \int \ln e^{\cos x} dx = \int \cos x dx = \sin x + c$$

توابع معکوس مثلثاتی

در آخرین بخش از این فصل به بررسی انتگرال توابع معکوس مثلثاتی (آرک سینوس و آرک تانژانت) می پردازیم.

همونطور که یادتون هست (که مطمئنم یادتون نیست!!!) از مبدا مشتق داشتیم:

$$y = \sin^{-1} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \tan^{-1} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

بنابراین داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

و در حالت کلی داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

توجه: در روابط بالا a عددی ثابت است.

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \quad (b) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \quad (c) \int \frac{dx}{4+x^2} \quad (d) \int \frac{dx}{1+9x^2}$$

حل:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

$$(b) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} 2x + c$$

$$(c) \int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c$$

$$(d) \int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{9\left(\frac{1}{9}+x^2\right)} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{\frac{1}{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3} \tan^{-1} 3x + c$$

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int (2 + \tan^2 x) dx$$

$$(2) \int x dt$$

$$(3) \int d(x^2 + 3x)$$

$$(4) \int \text{Ln}\left(\frac{1}{e^x}\right) dx$$

$$(5) \int e^{2\text{Ln} \sec x} dx$$

$$(6) \int \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(7) \int \frac{(x+1)^3}{2x} dx$$

$$(8) \int \frac{dx}{4x^2 + 25}$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$$

$$(10) \int e^2 dx$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مغ گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$(2) \int (\tan^2 x \cdot \sin x) dx$$

$$(3) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

$$(4) \int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$(5) \int e^{-2\text{Ln} x} dx$$

$$(6) \int \left(\int x^2 t^3 dt \right) dx$$

$$(7) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$(8) \int (2 + \tan^2 x) dx$$

فصل دوم : روش تغییر متغیر (جانشینی)

تا اینجای کار برخی از انتگرال های ساده رو با استفاده از روابط پایه حساب کردیم اما خیلی از انتگرال هایی که ما باهاشون روبرو می شیم با استفاده از این فرمولها قابل حل نیستند بنابراین باید با استفاده از روشهای خاصی انتگرال های داده شده را ساده کنیم یکی از این روشها ، روش تغییر متغیر نام دارد که در ادامه به توضیح آن می پردازیم

انتگرال زیر رو در نظر بگیرید، (مشفصه که این انتگرال رو نمی تونیم از روابط پایه حساب کنیم)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

ابتدا عبارت زیر را یکال رو برابر به متغیر جدید مثل u قرار میدیم و سپس از طرفین رابطه دیفرانسیل می گیریم:

$$u = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx$$

آقا اجازه: دیفرانسیل می گیریم یعنی چی؟

استاد: خیلی ساده بفرمایم بگیم اول از عبارت مشتق بگیر بعد حاصل مشتق رو در dx ضرب کن.

حالا عبارت رو به صورت $dx = \dots$ مرتب می کنیم

$$du = 2x dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

سپس در انتگرال اولیه به جای $x^2 - 1$ ، u و به جای dx عبارت $\frac{du}{2x}$ رو قرار میدیم.

حالا انتگرال رو ساده می کنیم تا بر حسب u در بیاد (x ها فط بفرورن)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

در آخر انتگرال رو بر حسب u حل کرده و در جواب انتگرال به جای u همان $x^2 - 1$ را قرار می دهیم.

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{x^2 - 1} + c$$

مراحل کار در روش تغییر متغیر

در اینجا به فاطمه اینکله به صورت اصولی با روش تغییر متغیر آشنا بشید مراحل کار رو به صورت قدم به قدم براتون توضیح میدم:

قدم اول

قسمتی از تابع جلوی انتگرال را برابر یک متغیر جدید مانند u قرار می‌دهیم مثلاً:

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx \Rightarrow u = x^2 + 1$$

قدم دوم

از تابع دیفرانسیل می‌گیریم و عبارت را به صورت $dx = \dots$ مرتب می‌کنیم مثلاً:

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

قدم سوم

با جایگذاری dx و u در انتگرال اولیه آن را بر حسب u بازنویسی می‌کنیم

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \int x\sqrt{u} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du$$

قدم چهارم

انتگرال حاصل را بر حسب u حل کرده و در جواب نهایی به جای u همان عبارت بر حسب x را قرار می‌دهیم تا جواب نهایی بر حسب x درست آید.

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + c$$

آقا اجازه: انتساب u دست فودمونه؟

استاد: نفیل!!! انتساب u قلق داره و یه مقدار تمرین و تجربه می فواد که من اینبا یه سری از قلق ها رو بهتون می کم پس فوب گوش کنید:

الف) اگر در جلوی انتگرال عبارت رادیکالی داشتیم تابع زیر رادیکال را برابر u می گیریم مثلاً:

$$\int \sqrt{3x-4} dx \Rightarrow u = 3x - 4$$

ب) اگر در جلوی انتگرال پرانتز تواندار داشتیم تابع درون پرانتز (بدون توان) را برابر u می گیریم مثلاً:

$$\int (5x-3)^4 dx \Rightarrow u = 5x - 3$$

ج) اگر در جلوی انتگرال عبارتی به شکل $\sin(\dots)$ یا $\cos(\dots)$ یا مشابه آن داشتیم عبارت داخل پرانتز را برابر u می گیریم مثلاً:

$$\int \sin(3x+2) dx \Rightarrow u = 3x + 2$$

تذکر مهم: دقت کنید که تکنیکهای بالا در همه موارد جواب نمیده

مثال: انتگرال های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر حل کنید.

$$(a) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx \quad (b) \int x\sqrt{x-5} dx \quad (c) \int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

$$(d) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (e) \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (f) \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$$

$$(g) \int \frac{2x+3}{2x+1} dx \quad (h) \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx \quad (i) \int \cos^2 x \cdot \sin x dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx \Rightarrow u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{u}} \frac{du}{-\sin x} = - \int \frac{du}{\sqrt{u}} = - \int u^{-\frac{1}{2}} du = -2\sqrt{u} + c \\ = -2\sqrt{\cos x} + c$$

$$(b) \int x\sqrt{x-5} dx \Rightarrow u = x-5 \Rightarrow du = dx$$

$$\Rightarrow \int x\sqrt{x-5} dx = \int x\sqrt{u} du \Rightarrow \text{باقی مانده } x$$

همون طور که می بینید x در انتگرال باقی مونده و فقط نفورد بنابرین باید به فکری به مالش بکنیم چون انتگرال باید فقط بر حسب u در بیاد بنابرین به صورت زیر عمل می کنیم:

$$u = x - 5 \Rightarrow x = u + 5$$

با جایگزینی این عبارت در انتگرال بالا داریم:

$$\Rightarrow \int x\sqrt{u} du = \int (u+5)\sqrt{u} du = \int (u+5)u^{\frac{1}{2}} du = \int (u^{\frac{3}{2}} + 5u^{\frac{1}{2}}) du \\ = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} (x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} (x-5)^{\frac{3}{2}} + c \\ = \frac{2}{5} \sqrt{(x-5)^5} + \frac{10}{3} \sqrt{(x-5)^3} + c$$

توجه کنید در انتگرال های بعدی آکه لازم باشه x رو بر حسب u بدست بیاریم همون قدم اول این کار رو انجام میدیم.

$$(c) \int \frac{x}{(x+1)^2} dx \Rightarrow u = x+1 \Rightarrow du = dx, x = u-1$$

$$\Rightarrow \int \frac{u-1}{u^2} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u^2} du = \ln |u| - \left(\frac{-1}{u} \right) + c$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$(d) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin u}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} du = 2 \int \sin u du = -2 \cos u + c = -2 \cos \sqrt{x} + c$$

دقت کنید در این مسئله اگر عبارت زیر را دیکال (یعنی x) رو برابر u می‌گرفتم به همون انتگرال اولیه می‌رسیدیم.

$$(e) \int \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x du$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{u}{x} x du = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

خلق موه: معمولا اگر توی انتگرال $\ln x$ داشتیم تغییر متغیر رو برابر $u = \ln x$ می‌گیریم.

$$(f) \int \frac{1}{x \ln x} dx \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow dx = x du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{x \cdot u} x du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

این انتگرال خیلی موهه و زیاد سر و کلهش تو امتحانها پیدا میشه!

$$(g) \int \frac{2x+3}{2x+1} dx \Rightarrow u = 2x+1, \quad 2x+3 = u+2$$

$$\Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{2x+3}{2x+1} dx &= \int \frac{u+2}{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{2}{u}\right) du = \frac{1}{2} \int du + \frac{1}{2} \int \frac{2}{u} du = \\ &= \frac{u}{2} + \ln|u| + c = \frac{2x+1}{2} + \ln|2x+1| + c \end{aligned}$$

آقا اجازه: همیشه صورت انتگرال رو برابر u بگیریم؟

استاد: چرا همیشه اما حل انتگرال یکم مشکلتر میشه

$$(h) \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx \Rightarrow u = 1 + \sin^2 x \Rightarrow du = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dx &= \frac{du}{\sin 2x} \Rightarrow \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin 2x}{u} \frac{du}{\sin 2x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln|1 + \sin^2 x| + c \end{aligned}$$

$$(i) \int \cos^2 x \sin x dx \Rightarrow u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \cos^2 x \cdot \sin x dx &= \int u^2 \cdot \sin x \frac{du}{-\sin x} = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + c \\ &= -\cos^3 x + c \end{aligned}$$

نگاهی عمیق تر به روش تغییر متغیر

تا این‌بای کار با کمک قلق‌هایی که یاد گرفتیم انتگرال‌های داده شده را به سادگی از روش تغییر متغیر حل کردیم. اما واقعیت این‌ه که در برخی از مسائل این روشها ممکنه جوابگو نباشه و برای حل انتگرال‌ها باید به مقداری ابتکار عمل به فرج برید بنابراین در این قسمت برخی از این نوع مسائل رو با هم حل می‌کنیم.

مثال: مطلوبست حل انتگرال‌های زیر:

$$(a) \int \tan x \, dx \quad (b) \int \cot x \, dx \quad (c) \int \sin^2 x \, dx$$

$$(d) \int \sec x \, dx \quad (e) \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \quad (f) \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

حل:

$$(a) \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow u = \cos x \Rightarrow dx = \frac{-du}{\sin x}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{u} \frac{-du}{\sin x} = - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| = -\ln |\cos x| = \ln |\sec x| + c$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا ابتدا تانژانت را به صورت سینوس به روی کسینوس نوشته سپس مخرج کسر را برابر متغیر برید گرفتیم.

$$(b) \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos x}{u} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |\sin x| + c$$

تذکر مهم: دو تا انتگرال بالا خیلی مهم هستند سعی کنید اونا رو خوب یاد بگیرید

برای حل انتگرال (c) باید ابتدا کاری کنیم تا توان ۲ سینوس از بین بره بنابراین اون رو بر حسب $\cos 2x$ می نویسیم

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$(c) \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

برای حل انتگرال $\cos 2x$ از روش تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \int \cos 2x dx &\Rightarrow u = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \Rightarrow \int \cos 2x dx = \int \cos u \frac{du}{2} \\ &= \frac{\sin u}{2} + c = \frac{\sin 2x}{2} + c \end{aligned}$$

بنابراین انتگرال اصلی به صورت زیر در میاد:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

به همین صورت برای انتگرال کسینوس ۲ داریم:

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

حالت کلی تر انتگرال های بالا رو در فصلهای بعدی می خونیم

این دو تا انتگرال رو حفظ کنید ضرر نمی کنید !!

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$$

انتگرال (d) یعنی انتگرال سکانت یکی از جالبترین انتگرال هایی هست که در این کتاب باهاش آشنا می شیم در کتاب انتگرال فور این مسئله رو از چندین روش حل می کنیم در این فصل روش تغییر متغیر رو با هم کار می کنیم که البته تا حدودی ابتکاری هست.

$$\begin{aligned}
 (d) \int \sec x \, dx &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \Rightarrow u = \sec x + \tan x \\
 &\Rightarrow du = (\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x) dx = \sec x (\sec x + \tan x) dx \\
 &\Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x (\sec x + \tan x)} = \frac{du}{\sec x \cdot u} \\
 &\Rightarrow \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \int \sec x \cdot \frac{u}{u \sec x \cdot u} \, du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| \\
 &= \ln|\sec x + \tan x| + c
 \end{aligned}$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(\sec x + \tan x)$ ضرب و تقسیم کرده سپس از روش تغییر متغیر استفاده کردیم.

به همین صورت برای مناسبه انتگرال سکانت تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(\csc x + \cot x)$ ضرب و تقسیم کرده و از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned}
 \int \sec x \, dx &= \ln|\sec x + \tan x| + c \\
 \int \csc x \, dx &= \ln|\csc x + \cot x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (e) \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} &\Rightarrow u = e^{2x} - 1 \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2e^{2x}} = \frac{du}{2(u+1)} \\
 &\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \int \frac{1}{\sqrt{u} \cdot 2(u+1)} \, du = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}(u+1)} \Rightarrow \text{????}
 \end{aligned}$$

تذکره مهم: همونطور که می بینید اگر طبق روال قبل عبارت زیر را دیکال رو برابر متغیر جدید بگیریم انتگرالی که بدست میاد از انتگرال اولیه پیچیده تر میشه بنابراین این قلق در اینجا جواب نمیده

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}(1-e^{-2x})}} = \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \Rightarrow u = e^{-x}$$

$$\Rightarrow du = -e^{-x} dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{e^{-x}} = -\frac{du}{u}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = -\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{u} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sin^{-1} u + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = -\sin^{-1} e^{-x} + c$$

همونطور که دیدید حل انتگرال بالا حالت ابتکاری داشت و مشابه مسائل قبل نبود بنابراین همیشه به نکات و قلق ها به چشم ابزاری نگاه کنید که می تونن در حل مسائل به شما کمک کنن نه اینکه مسائل رو برای شما حل کنن!!

$$(f) \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\cot x + \csc x + c$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(1-\cos x)$ ضرب و تقسیم کردیم.

تذکره مهم: تجربه نشون داده که مشکل اکثر بچه ها ضعف در ریاضیات پایه هست که باعث میشه دانش آموزا و دانشجوها نتونن مسائل رو درست و سالم حل کنن و اکثر موارد با اشتباهات پیش پا افتاده کار رو فراب می کنن!! یاد ۴ میاد زمان دانشجویی که توی کلاس کنگور حساب دیفرانسیل درس می دادم وقتی بچه ها تست های صر و مشتق رو حل میکردن در مرحله آخر که باید با یه فاکتورگیری یا تجزیه ساده جواب رو بدست می آوردن به مشکل بر می خوردن!! بنابراین مباحثی مانند اتحادها، تجزیه و فاکتورگیری، معادله فط، نامساوی ها و ... رو جری بگیرد و سعی کنید فوب بر اونها مسلط بشید.

انتگرال های تعمیم یافته

در دروس پایه ریاضی مثل، ریاضیات عمومی ۱ و ۲، روش حل انتگرال معمولاً جزء اصلی مسئله محسوب می‌شود و نمره زیادی دارد اما در دروس پیشرفته‌تر مثل معادلات دیفرانسیل و ریاضیات مهندسی بعضاً حل انتگرال قسمت فرعی مسئله هستند بنابراین هر چه زودتر بشه به جواب رسید بهتره!! در این بخش ما با استفاده از روش تغییر متغیر و به کار بردن هوشمندانه فرمولهای مشتق یکسری از روابط میانبر برای انتگرال‌های پرکاربرد بدست میاریم و در مراحل بعدی از این روابط برای حل سریعتر انتگرال‌ها استفاده می‌کنیم.

تذکر مهم: همه روابط و مسائل این بخش از روش تغییر متغیر به راحتی اثبات میشوند.

دانشبوهای گل ریاضی ۱ و ۲ توجه داشته باشن که استفاده از این فرمولها در امتحان منوط به اجازه کتبی از استاد موبوطه می‌باشد!!!

انتگرال های نمایی تعمیم یافته

طبق روال معمول اول چند تا رابطه از مشتق رو یادآوری می‌کنم

$$y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

یک حالت خاص مهم:

$$y = e^{kx} \Rightarrow y' = k \cdot e^{kx}$$

به عنوان مثال:

$$y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$y = e^{x^2} \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2}$$

اکنون با توجه به یادآوری بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

یعنی اگر انتگرال تابع $e^{f(x)}$ به ما داده شده باشد اول نگاه می‌کنیم که آیا مشتق $f(x)$ یعنی $f'(x)$ در جلوی انتگرال وجود دارد یا نه؟ به عنوان مثال:

$$\int 2x \cdot e^{x^2} dx \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow \int 2x \cdot e^{x^2} dx = e^{x^2} + c$$

حالا به مثال زیر خوب نگاه کنید:

$$\int x^2 \cdot e^{2x^3} dx \Rightarrow f(x) = 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x^2$$

همونطور که ملاحظه می‌کنید در جلوی تابع e^{2x^3} عبارت x^2 وجود داره نه $6x^2$ ، پس برای سافتن $6x^2$ به کمک ساده

$$x^2 = \left(\frac{1}{6}\right) 6x^2 \quad \text{می‌زنیم:}$$

حالا $\frac{1}{6}$ را چون عدد ثابت از انتگرال بیرون می‌یاریم و انتگرال رو به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int x^2 \cdot e^{2x^3} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2 \cdot e^{2x^3} dx = \frac{1}{6} (e^{2x^3}) = \frac{e^{2x^3}}{6} + c$$

توجه: در انتگرال‌گیری از این ایده خیلی استفاده می‌کنیم.

یک حالت خاص زمانی هست که توان عدد نیز به صورت kx باشد (k عدد ثابت) در این حالت فرمول بالا به صورت زیر در می آید:

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

به عنوان مثال:

$$\int e^{5x} dx \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + c$$

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2 e^{\frac{x}{2}} + c$$

از فرمول بالا در دروس معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی خیلی استفاده می کنیم.

یه مثال دیگه:

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) e^{\tan x} dx \Rightarrow f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \int (1 + \tan^2 x) e^{\tan x} dx = e^{\tan x} + c$$

آقا اجازه؟ چرا به جای $\frac{1}{\cos^2(x)}$ گذاشتی $1 + \tan^2(x)$

استاد: واقعا که!!! وقتی سر کلاس به جای درس گوش دادن یواشکی با موبایلت چت می کنی نتیجه از این بهتر نمی شه!!!

مفط کردن این دو تا رابطه از نون شب واجب تره!

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

انتگرال های لگاریتمی تعمیم یافته

همتا از میث مشتق فرمول موم زیر فاطرتون هست:

یادآوری

$$y = \text{Ln } f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

به عنوان مثال:

$$y = \text{Ln}(1 + x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$y = \text{Ln} |\sin x| \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

اکنون با توجه به فرمول بالا انتگرال زیر را می نویسیم:



$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln}|f(x)| + c$$



تذکر: انتگرال بالا فیلی فیلی موم هست (بخصوص برای درس معادلات دیفرانسیل) بنابراین به مثالهایی که می زنم فوب دقت کنید

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{1}{x+5} dx \quad (b) \int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad (c) \int \frac{1}{2x+1} dx \quad (d) \int \frac{dx}{x \cdot \text{Ln } x}$$

$$(e) \int \tan x dx \quad (f) \int \cot x dx \quad (g) \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx \quad (h) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$(a) \int \frac{1}{x+5} dx \Rightarrow f = x+5 \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x+5} dx = \text{Ln}|x+5| + c$$

$$(b) \int \frac{2x}{1+x^2} dx \Rightarrow f = 1+x^2 \Rightarrow f' = 2x \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \text{Ln}|1+x^2| + c$$

تذکره: انتگرال بالا رو می تونید فیلی، راحت از روش تغییر متغیر حل کنید.

$$(c) \int \frac{1}{2x+1} dx \Rightarrow f = 2x+1 \Rightarrow f' = 2$$

همونطور که می بینید برای اینکه انتگرال بالا به شکل $\frac{f'}{f}$ در بیاد باید در صورت انتگرال عدد ۲ وجود داشته باشه بنابراین به صورت زیر عمل می کنیم: (قبلا هم از این ایده استفاده کردیم یادتون که نرفته؟)

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2x+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \text{Ln}|2x+1| + c$$

$$(d) \int \frac{dx}{x \cdot \text{Ln } x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\text{Ln } x} dx \Rightarrow f = \text{Ln } x \Rightarrow f' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{\frac{1}{x}}{\text{Ln } x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x \cdot \text{Ln } x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\text{Ln } x} dx = \text{Ln}|\text{Ln } x| + c$$

این انتگرال رو قبلا از روش تغییر متغیر هم حل کردیم.

$$(e) \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \Rightarrow f = \cos x \Rightarrow f' = -\sin x$$

$$\Rightarrow \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = \ln|\sec x| + c$$

$$(f) \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \Rightarrow f = \sin x \Rightarrow f' = \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

نکته مهم: یه نصیحت می‌کنم سعی کنید در تمامی مراحل زندگی یادتون باشه!

هرگاه با یک انتگرال کسری مواجه شدید اول به مخرج کسر نگاه کنید، اگر مشتق مخرج
توی صورت بود با خیال راحت از فرمول بالا استفاده کنید

$$(g) \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} \, dx = \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \, dx \Rightarrow f = \tan x \Rightarrow f' = 1 + \tan^2 x$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} \, dx = \ln|\tan x| + c$$

$$(h) \int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx \Rightarrow f = 1 + e^x \Rightarrow f' = e^x$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx = \ln|1 + e^x| + c$$

انتگرال رادیکالی تعمیم یافته

یادآوری از مشتق:

یادآوری ۱

$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

به عنوان مثال داریم:

$$y = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

اکنون با توجه به فرمول بالا می توانیم انتگرال زیر را بنویسیم:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر

$$(a) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx \quad (b) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

حل:

$$\begin{aligned} (a) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx &\Rightarrow f = \sin x \Rightarrow f' = \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{f'}{\sqrt{f}} \\ &\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2\sqrt{\sin x} + c \end{aligned}$$

$$(b) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow f = x \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{f'}{\sqrt{f}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

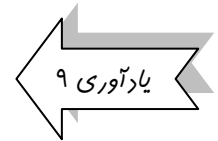
انتگرال بالا فیلی معومه من جای شما بورم مفضش می کردم!

$$(c) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} (2\sqrt{1+x^2} + c) = \sqrt{1+x^2} + c$$

انتگرال کسری تعمیم یافته

یادآوری از مشتق:

$$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{-f'}{f^2}$$



فرمول بالا رو می تونید فیلی راحت از رابطه مشتق کسر اثبات کنید.

به عنوان مثال:

$$y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \tan x$$

$$\int \frac{f'}{f^2} dx = \frac{-1}{f} + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{1}{(1+x)^2} dx \quad (b) \int \sec^2 x \cdot \sin x dx \quad (c) \int \frac{1}{x^2} dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{1}{(1+x)^2} dx \Rightarrow f = 1+x \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{f'}{f^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{-1}{1+x} + c$$

$$(b) \int \sec^2 x \cdot \sin x dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow f = \cos x \Rightarrow f' = -\sin x$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx = - \left(\frac{-1}{\cos x} \right) + c = \frac{1}{\cos x} + c = \sec x + c$$

دقت کنید وقتی یکم حرفه شدید دیکه نیازی نیست f' و f رو مشخص کنید و می تونید مستقیما جواب رو بدست بیارید.

تذکره: باز هم تاکید می کنم انتگرال بالا رو همیشه از روش تغییر متغیر هم حل کرد.

$$(c) \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow f = x \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{f'}{f^2} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + c$$

این انتگرال به نظرتون آشنا نیست؟؟؟

انتگرال های تعمیم یافته مثلثاتی

یادآوری از مشتق

$$y = \sin f(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$$

$$y = \cos f(x) \Rightarrow y' = -f'(x) \cdot \sin f(x)$$

$$y = \tan f(x) \Rightarrow y' = f'(x)(1 + \tan^2 f(x))$$

یادآوری ۱۰

به عنوان مثال:

$$y = \sin(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = (2x + 3) \cdot \cos(x^2 + 3x)$$

$$y = \cos \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$$

$$y = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2})$$

الکون با توجه به فرمولهای گفته شده انتگرال های زیر رو داریم:

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x)(1 + \tan^2 f(x)) dx = \tan f(x) + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int 3x^2 \cos x^3 dx \quad (b) \int \sin(5x + 2) dx \quad (c) \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

حل:

$$(a) \int 3x^2 \cos x^3 dx \Rightarrow f = x^3 \Rightarrow f' = 3x^2$$

$$\Rightarrow \int 3x^2 \cos x^3 dx = \sin x^3 + c$$

$$(b) \int \sin(5x + 2) dx \Rightarrow f = 5x + 2 \Rightarrow f' = 5$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sin(5x + 2) dx &= \frac{1}{5} \int 5 \sin(5x + 2) dx = \frac{1}{5} (-\cos(5x + 2)) + c \\ &= \frac{-\cos(5x + 2)}{5} + c \end{aligned}$$

$$(c) \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow f = \frac{x}{2} \Rightarrow f' = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx = 2 \int \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx = 2 \tan \frac{x}{2} + c$$

یک حالت خاص مهم برای فرمولهای بالا زمانی است که داشته باشیم $f = kx$ بنابراین $f' = k$ در این حالت فرمولهای بالا به صورت زیر ساده می شوند: (این فرمولها در درس ریاضیات مهندسی استفاده زیادی دارد)

$$\int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$$

$$\int \sin kx \, dx = \frac{-1}{k} \cos kx + c$$

$$\int (1 + \tan^2 kx) dx = \frac{1}{k} \tan kx + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \cos 5x \, dx \quad (b) \int \sin \pi x \, dx \quad (c) \int \cos \frac{3x}{2} \, dx$$

$$(d) \int \sin \frac{x}{2} \, dx \quad (e) \int \cos \frac{\pi x}{L} \, dx \quad (f) \int \sin x \cdot \cos x \, dx$$

حل:

$$(a) \int \cos 5x \, dx = \frac{1}{5} \sin 5x + c$$

$$(b) \int \sin \pi x \, dx = \frac{-1}{\pi} \cos \pi x + c$$

$$(c) \int \cos \frac{3x}{2} \, dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} \sin \frac{3x}{2} + c = \frac{2}{3} \sin \frac{3x}{2} + c$$

$$(d) \int \sin \frac{x}{2} \, dx = -2 \cos \frac{x}{2} + c$$

$$(e) \int \cos \frac{\pi x}{L} \, dx = \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} + c$$

$$(f) \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \cos 2x + c \right) \\ = \frac{-1}{4} \cos 2x + c$$

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \sec^2 x \cdot e^{\tan x} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$(3) \int \frac{\cos \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$(4) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$$

$$(5) \int \frac{2x+1}{x+5} dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{e^x - 1}$$

$$(7) \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} dx$$

$$(8) \int \frac{1 + \ln x}{3 + x \cdot \ln x} dx$$

$$(9) \int x\sqrt{x-1} dx$$

$$(10) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مغ گرمی)

$$(1) \int \sqrt[3]{8x^5 + 32x^3} dx$$

$$(2) \int \frac{1-2x}{5+x} dx$$

$$(3) \int \frac{x^2}{5+x^6} dx$$

$$(4) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$(5) \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$(6) \int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx$$

$$(7) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$$

$$(8) \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$(9) \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

فصل سوم : تغییر متغیرهای مثلثاتی

همانطور که در فصل قبل دیدیم برخی از انتگرال ها با استفاده از تغییر متغیرهای معمول قابل حل نیستند به عنوان مثال فرض کنید مناسبه انتگرال زیر فواسته شده باشد:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

اگر طبق روال معمول عبارت زیر را دیکال برابر u بگیریم داریم:

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{2x}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{u} \left(-\frac{du}{2x}\right) = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{u}}{x} du$$

چون x از انتگرال ساده نشد باید آن را بر حسب u بنویسیم.

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-u}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} du$$

همانطور که می بینید مناسبه انتگرال بالا از انتگرال اولیه هم مشکلتر شد بنابراین این روش در اینجا کارساز نیست به همین دلیل برای مناسبه اینگونه انتگرال ها از تغییر متغیرهای مثلثاتی استفاده می کنیم. انتگرالی که با استفاده از این روش حل می شوند به سه دسته کلی تقسیم می شوند که عبارتند از:

الف) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 - x^2}$

ب) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 + x^2}$ یا $\frac{1}{x^2 + a^2}$

ج) انتگرال های شامل $\sqrt{x^2 - a^2}$

که در ادامه به توضیح هر یک از موارد بالا می پردازیم.

الف) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 - x^2}$

این انتگرال ها را اغلب می توان با جانشینی $x = a \sin \theta$ به صورت زیر حل کرد:

$$\begin{aligned}x = a \sin \theta &\Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

مثال: انتگرال زیر را مناسبه کنید:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

حل:

$$\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{4^2 - x^2} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow x = 4 \sin \theta \Rightarrow dx = 4 \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16 \sin^2 \theta} = 4 \cos \theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \int \frac{4 \cos \theta d\theta}{4 \cos \theta} = \int d\theta = \theta + c$$

ملاحظه می کنید که جواب آخر بر حسب θ در آمد که باید آن را بر حسب x بنویسیم بنابراین به صورت زیر عمل

می کنیم:

$$x = 4 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{4} \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) + c$$

تذکره: دقت کنید انتگرال بالا را می توان از روابط فصل اول به صورت مستقیم حل کرد.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}}$$

$$x = 3 \sin \theta \Rightarrow dx = 3 \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{(9-x^2)^3} = (9-x^2)^{\frac{3}{2}} = (9-9\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (3^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = 27\cos^3\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \int \frac{3\cos\theta}{27\cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{9} \int (1 + \tan^2\theta) d\theta = \frac{1}{9} \tan \theta$$

برای نوشتن جواب آخر بر حسب x به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

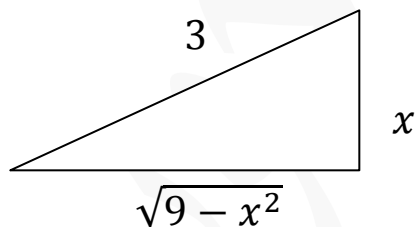
ابتدا $\sin \theta$ را بر حسب x می‌نویسیم:

$$x = 3 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{3}$$

سپس مثلث قائم الزاویه ای رسم کرده و اضلاع آن را طوری نام گذاری می‌کنیم که سینوس آن برابر $\frac{x}{3}$ شود.

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع روبرو}}{\text{وتر}} = \frac{x}{3}$$

بنابراین ضلع روبرو را برابر x و وتر را برابر 3 قرار می‌دهیم پس طبق قضیه فیثاغورث ضلع مجاور برابر $\sqrt{9-x^2}$ می‌شود و مثلث مورد نظر به شکل زیر در می‌آید.



اکنون با توجه به مثلث بالا به آسانی می‌توانیم $\tan \theta$ را بدست آوریم.

$$\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \frac{1}{9} \tan \theta + C = \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C$$

ب) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 + x^2}$ یا $\frac{1}{x^2 + a^2}$

این انتگرال ها را می توان با جانشینی $x = a \tan \theta$ به صورت زیر حل نمود.

$$\begin{aligned} x = a \tan \theta &\Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}}$$

حل:

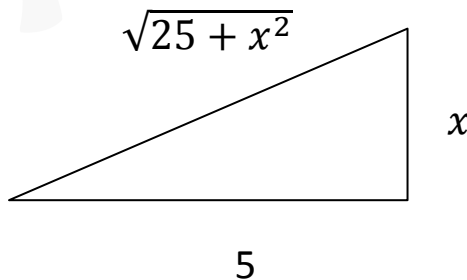
$$x = 5 \tan \theta \quad \Rightarrow \quad dx = 5 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\sqrt{25 + x^2} = \sqrt{25 + 25 \tan^2 \theta} = 5 \sec \theta$$

$$\int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$

اکنون برای نوشتن جواب آفر بر حسب x مانند مثال قبل مثلث قائم الزاویه ای به صورت زیر رسم می کنیم:

$$x = 5 \tan \theta \quad \Rightarrow \quad \tan \theta = \frac{x}{5} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}} &= \text{Ln}|\sec\theta + \tan\theta| + c = \text{Ln}\left|\frac{\sqrt{25+x^2}}{5} + \frac{x}{5}\right| + c = \\ &= \text{Ln}\left|\sqrt{25+x^2} + x\right| - \text{Ln}5 + c = \text{Ln}\left|\sqrt{25+x^2} + x\right| + c' \end{aligned}$$

در حالت کلی داریم:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \text{Ln}\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2}$$

حل: دقت کنید در روابط مورد استفاده در اینجا فرض شده ضریب x^2 برابر یک است بنابراین به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$1 + 4x^2 = 4\left(\frac{1}{4} + x^2\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

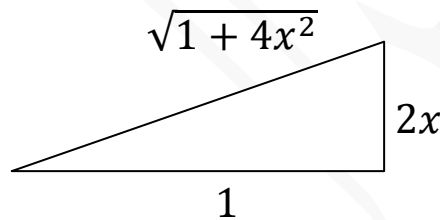
$$x = \frac{1}{2}\tan\theta \Rightarrow dx = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\theta)d\theta$$

$$1 + 4x^2 = 1 + 4\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)^2 = 1 + \tan^2\theta$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2} &= \int \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}(\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta)\end{aligned}$$

اکنون باید جواب را بر حسب x بنویسیم:

$$x = \frac{1}{2}\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$\sin\theta = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$$

همچنین برای مناسبه θ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\tan\theta = 2x \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2x)$$

$$\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2} = \frac{1}{4}(\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta) = \frac{1}{4}\left(\tan^{-1}(2x) + \frac{2x}{1+4x^2}\right) + c$$

ج) انتگرال های شامل $\sqrt{x^2 - a^2}$

در این انتگرال ها از تغییر متغیر $x = a \sec \theta$ استفاده می کنیم:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

حل:

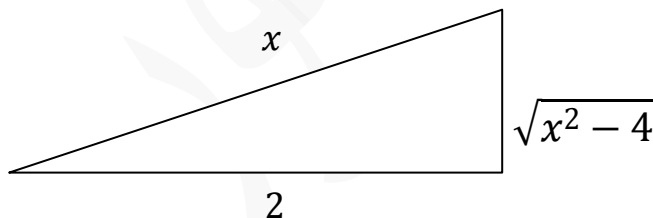
$$x = 2 \sec \theta \Rightarrow dx = 2 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{4 \sec^2 \theta - 4} = 2 \tan \theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{2 \sec \theta \cdot \tan \theta}{2 \tan \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$

اکنون باید جواب را بر حسب x بنویسیم:

$$x = 2 \sec \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{x}$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \text{Ln}|\sec\theta + \tan\theta| = \text{Ln}\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + c$$

البته جواب بالا را می توان به شکل ساده تر زیر هم نوشت.

$$\begin{aligned} \text{Ln}\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + C &= \text{Ln}\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + C = \text{Ln}\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| - \text{Ln}2 + c \\ &= \text{Ln}\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| + c' \end{aligned}$$

دقت کنید چون $\text{Ln}2$ عددی ثابت است بنابراین جمع آن با ثابت c باز هم عددی ثابت می شود.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

حل:

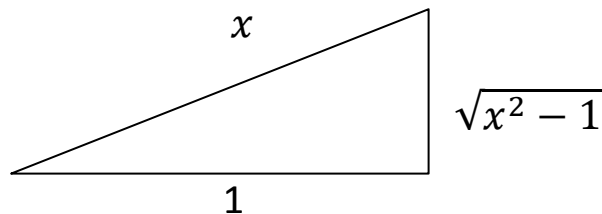
$$x = \sec\theta \Rightarrow dx = \sec\theta \cdot \tan\theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= \int \frac{\sec\theta \cdot \tan^2\theta}{\sec\theta} d\theta = \int \tan^2\theta d\theta = \int (\tan^2\theta + 1 - 1) d\theta \\ &= \int (\tan^2\theta + 1) d\theta - \int d\theta = \tan\theta - \theta + C \end{aligned}$$

مشابه مثالهای قبل جواب آخر را بر حسب x می نویسیم.

$$\sec\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{x}$$



$$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad \theta = \sec^{-1} x$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \tan\theta - \theta + c = \sqrt{x^2 - 1} - \sec^{-1} x + c$$

فب فکر می‌کنم تا اینجای کار مطلب رو خوب یاد گرفته باشید

آقا اجازه: ما همه رو فول شدیم دیگه هر سوالی تو امتحان بدن حل میکنیم.

استاد: شرمندۀ افلاق و ورزشیت توی امتحان که از این سوالی آبکی نمیدن که شما راحت حلش کنید اینطوری که همه میکنن استاده گلایه!!

آقا اجازه: پس چه سوالایی می‌دن؟

استاد: بالاخره به جوری می‌پیشن، پندتا مثال می‌زنم اوضاع دستتون بیاد.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

حل:

همانطور که می‌بینید عبارت زیر را دیکال به شکل استاندارد $a^2 - u^2$ یا $u^2 - a^2$ نیست بنابراین آن را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} 2x - x^2 &= 2x - x^2 - 1 + 1 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x - 1)^2 + 1 \\ &= 1 - (x - 1)^2 \end{aligned}$$

الآن از تغییر متغیر $u = x - 1$ استفاده می‌کنیم؛

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

ملاحظه می‌کنیم که انتگرال به شکل استاندارد در آمد بنابراین با استفاده از تغییر متغیر $u = \sin \theta$ داریم.

$$u = \sin \theta \Rightarrow du = \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \cos \theta$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1} u = \sin^{-1}(x - 1) + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

حل:

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{(x - 1)^2 + 1}}$$

الآن مشابه مثال قبل از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم تا انتگرال به شکل استاندارد در آید.

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx \quad x = u + 1$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(x - 1)^2 + 1}} = \int \frac{(u + 1) du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

الآن می‌توانیم از تغییر متغیر $u = \tan \theta$ استفاده کنیم.

$$u = \tan\theta \Rightarrow du = (1 + \tan^2\theta)d\theta = \sec^2\theta d\theta$$

$$\sqrt{u^2 + 1} = \sqrt{(1 + \tan^2\theta)} = \sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta$$

$$\int \frac{(u+1) du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{(1+\tan\theta)\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta} = \int (1+\tan\theta)\sec\theta d\theta =$$

$$\int \sec\theta d\theta + \int \tan\theta \cdot \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta + C$$

الآن جواب را بر حسب u می نویسیم (مثلث رو خودتون بکشین)

$$u = \tan\theta \Rightarrow \sec\theta = \sqrt{u^2 + 1}$$

$$\int \frac{(u+1) du}{\sqrt{u^2+1}} = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta = \ln|\sqrt{u^2+1} + u| + \sqrt{u^2+1}$$

$$= \ln|\sqrt{(x-1)^2+1} + (x-1)| + \sqrt{(x-1)^2+1} + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{(4x^2 + 4x + 5)^2}$$

حل:

ابتدا مفرج انتگرال را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$4x^2 + 4x + 5 = (2x + 1)^2 + 4$$

سپس از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{dx}{(4x^2 + 4x + 5)^2} = \int \frac{dx}{((2x + 1)^2 + 4)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u^2 + 4)^2}$$

در مرحله آخر از تغییر متغیر مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

$$u = 2\tan\theta \Rightarrow du = 2(1 + \tan^2\theta)d\theta = 2\sec^2\theta d\theta$$

$$u^2 + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{(u^2 + 4)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2\sec^2\theta}{(4\sec^2\theta)^2} d\theta = \frac{1}{16} \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{16} \int \cos^2\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{32} (\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta)$$

اکنون جواب را بر حسب u می‌نویسیم (مثلث رو خودتون بکشین)

$$u = 2\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}}, \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \int \cos^2\theta d\theta &= \frac{1}{32} (\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta) = \frac{1}{32} \left(\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{2u}{u^2 + 4} \right) \\ &= \frac{1}{32} \left(\tan^{-1}\left(\frac{2x + 1}{2}\right) + \frac{2(2x + 1)}{u^2 + 4} \right) + C \end{aligned}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ جایگزینی}$$

تغییر متغیر بالا معمولا برای مناسبه انتگرالیابی به فرم زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$$

که a, b, c اعدادی ثابت هستند.

قبل از ادامه کار، روابط زیر را یادآوری می‌کنیم.

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

یادآوری !!

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x \, dx$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2 dt}{\frac{1+t^2}{2t}} = \int \frac{4 dt}{1+t^2} = 4 \operatorname{Ln}|t| = 4 \operatorname{Ln} \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + C$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2 dt}{1 + t^2}}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \int \frac{2 dt}{1 - t^2}$$

برای حل انتگرال بالا باید کسر $\frac{2}{1-t^2}$ رو تفکیک کنید (اگر تفکیک کسر رو بلد نیستید نگران نباشید چون در فصل بعدی مفصلاً راجع بهوش صحبت می‌کنیم).

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$

دقت کنید که اگر از سمت راست تساوی بالا مفرج مشترک بگیریم به کسر سمت چپ می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \int \frac{2dt}{1-t^2} &= \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \ln|1+t| - \ln|1-t| = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \\ &= \ln \left| \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + c \end{aligned}$$

خب، این هم از شکل دوم جواب انتگرال سکانت.

البته معمولاً در مسائل از همون شکل اول جواب، یعنی $\ln|\sec x + \tan x|$ استفاده میشه.

آقا اجازه: چرا دوتا جواب با هم فرق داره؟

استاد: فرق نداره عزیز دل برادر!! قبول نداری نگاه کن:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| &= \ln \left| \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \ln \left| \frac{\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \\ &= \ln \left| \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \ln \left| \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \end{aligned}$$

اکنون با توجه به روابط یادآوری داریم:

$$\frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan x$$

بنابراین:

$$\ln \left| \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = \ln |\sec x + \tan x|$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 + 4\cos x} &= \int \frac{\frac{2 dt}{1 + t^2}}{5 + 4 \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 9} = 2 \left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + c = \frac{2}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{3}\right) + c \end{aligned}$$

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$$

$$(3) \int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$(5) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{25+x^2}}$$

$$(6) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$$

$$(7) \int \frac{dx}{7-3\sin x+6\cos x}$$

$$(8) \int \frac{dx}{3+2\cos x}$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

$$(1) \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx$$

$$(2) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x^2}}$$

$$(4) \int \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^4} dx$$

$$(5) \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$(6) \int \frac{x dx}{x^2-2x+6}$$

$$(7) \int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(8) \int \frac{x dx}{(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(9) \int \frac{dx}{1+3\cos x}$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

فصل چهارم: انتگرال گیری از کسره‌های گویا

در این فصل، درباره انتگرال گیری از کسره‌های گویا بحث می‌کنیم قبل از شروع بحث بهتره یادآوری کنیم که منظور از کسر

$$\text{گویا کسری هست که صورت و مخرجش چندجمله ای باشد مانند: } \frac{2x}{x^2+5} \text{ یا } \frac{3}{5x-7}$$

اما چیزی که در این فصل بیشتر راجع به اون بحث می‌کنیم تجزیه کسره‌های گویا هستش چون وقتی کسری رو تجزیه کردید انتگرال گیری از اون مثل آب خوردنه! بنابراین اول می‌رییم سراغ بحث تجزیه کسرها

تجزیه کسره‌های گویا

در این قسمت تجزیه کسره‌های گویا را به صورت مرحله به مرحله بررسی می‌کنیم قبل از شروع بحث باید یادآوری کنیم که منظور از تجزیه کسر این است که آن را به صورت مجموع چند کسر بنویسیم که در مخرج هر یک از آنها فقط یکی از عوامل وجود داشته باشد.

به عنوان مثال کسر $\frac{5}{(x-1)(x+2)}$ به صورت زیر تجزیه می‌شود (همان طور که می‌بینید در مخرج کسر حاصلضرب دو عامل درجه اول وجود دارد)

$$\frac{5}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

مرحله اول: تقسیم صورت بر مخرج (در صورت نیاز) و ساده سازی کسر

در ابتدای کار فرض می‌کنیم که درجه صورت کسر کوچکتر از مخرج هست (در غیر اینصورت باید صورت رو بر مخرج تقسیم کنیم که بعدا بهش اشاره می‌کنیم) سپس صورت و مخرج کسر را تا آن جا که ممکن است به حاصلضرب عوامل درجه اول و دوم تجزیه کرده و ساده میکنیم به عنوان مثال:

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x(x+2)}$$

مرحله دوم: تفکیک کسر و نوشتن آن به صورت مجموع چند کسر ساده

بعد از ساده سازی، در مفراج کسر سر و کله یکی از چهار عامل زیر پیدا می شود:

(۱) عامل درجه اول غیر تکراری (با توان یک) مانند $(x - 1)$ یا $(3x + 5)$ و بطور کلی $(ax + b)$

در این حالت برای تفکیک کسر به ازای هر یک از این عاملها یک کسر به صورت $\frac{A}{ax+b}$ در سمت راست

تساوی قرار می دهیم که ثابت A باید تعیین شود به عنوان مثال:

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \text{ثابتهای } A, B \text{ باید تعیین شوند}$$

$$\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \text{ثابتهای } A, B \text{ باید تعیین شوند}$$

(۲) عامل درجه اول تکراری (با توان بزرگتر از یک) مانند $(x + 1)^3$ یا $(4x - 5)^2$ بطور کلی $(ax + b)^n$

در این حالت به ازای هر عامل $(ax + b)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر در سمت راست تساوی قرار

می دهیم:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

که ثابتهای $A_1, A_2, A_3 \dots$ باید تعیین شوند.

به عنوان مثال:

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)^3} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

دقت کنید در کسر بالا $(x + 5)$ عامل درجه اول غیر تکراری است بنابراین به جای آن یک کسر به صورت

$\frac{A}{x+5}$ قرار می دهیم از طرفی $(x - 1)^3$ یک عامل درجه اول تکراری است بنابراین به جای آن سه کسر به

صورت $\frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$ قرار می دهیم.

۳) عامل درجه دوم (غیر قابل تجزیه) غیر تکراری مانند $x^2 + 3$ یا بطور کلی $ax^2 + bx + c$

در این حالت به ازای هر یک از این عوامل یک کسر به صورت $\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}$ در سمت راست تساوی قرار می‌دهیم به عنوان مثال:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}$$

۴) عامل درجه دوم تکراری مانند $(x^2 + 1)^3$ یا بطور کلی $(ax^2 + bx + c)^n$

در این حالت به ازای هر عامل $(ax^2 + bx + c)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر در سمت راست تساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

به عنوان مثال:

$$\frac{x+5}{x(x^2+1)^3} = \frac{C}{x} + \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3}$$

تذکره یک: منظور از عامل درجه دوم عاملی است که قابل تجزیه به عوامل درجه اول نباشد به عنوان مثال عبارت $x^2 + 3x - 10$ درجه دوم مسوب نمی‌شود چون می‌توان آن را به صورت حاصلضرب دو عامل درجه اول به صورت زیر نوشت (مثلا با استفاده از اتحاد جمله مشترک)

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$$

تذکره دو: عباراتی به شکل $x^2 + a^2$ (مثل $x^2 + 9$) تجزیه پذیر نیستند و عامل درجه دوم مسوب میشن اما عباراتی به شکل $x^2 - a^2$ با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌شن.

به طور کلی داریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \text{ قابل تجزیه}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ غیر قابل تجزیه}$$

مرحله سوم: مخرج مشترک گیری و درست آوردن ثابتها

بعد از اینکه کسر اصلی را به صورت جمع چندین کسر نوشتیم در مرحله بعد بین کسرهای سمت راست تساوی مخرج مشترک می‌گیریم و صورت کسر حاصل را برابر صورت کسر اصلی قرار می‌دهیم.

به مثال زیر دقت کنید:

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 3x - 1 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

الکون در دو طرف تساوی بالا عددی دلخواه (معمولاً ریشه‌های مخرج) را به ازای x قرار می‌دهیم تا ثابت‌های A, B درست آیند.

$$x = 1 \Rightarrow 3(1) - 1 = A(1 + 1) + B(1 - 1) \Rightarrow A = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow 3(-1) - 1 = (1)(-1 + 1) + B(-1 - 1) \Rightarrow B = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

فلاصه مراحل تجزیه کسر:

مرحله اول: تقسیم صورت بر مخرج (در صورت نیاز) و ساده سازی کسر

مرحله دوم: تفکیک کسر و نوشتن آن به صورت مجموع چند کسر ساده

مرحله سوم: مخرج مشترک گیری و بردست آوردن ثابت ها

مثال: کسر $\frac{1}{x(1+x^2)}$ را تجزیه کنید

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2) + x(Bx+c)}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(1+x^2) + x(Bx+c)$$

دقت کنید در تساوی بالا سه مجهول داریم بنابراین باید سه عدد دلخواه به x بدهیم تا مجهولات مشخص شوند یکی از این اعداد می تواند ریشه x یعنی صفر باشد اما عامل دیگر یعنی $(1+x^2)$ ریشه حقیقی ندارد بنابراین دو عدد دلخواه مثلا 1 و -1 را به جای x قرار می دهیم.

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A(1+0) + (0)(B(0)+c) \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = (1)(2) + (1)(B+c) \Rightarrow B+c = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = (1)(2) + (-1)(-B+c) \Rightarrow B-c = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B+c = -1 \\ B-c = -1 \end{cases} \Rightarrow B = -1, C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

یک روش دیگر برای بدست آوردن مجهولات به این صورت است که پس از مساوی قرار دادن صورت کسرها طرفین رابطه را بر حسب توانهای x مرتب می‌کنیم:

$$\Rightarrow 1 = A(1 + x^2) + x(Bx + c)$$

$$\Rightarrow 1 = A + Ax^2 + Bx^2 + cx = (A + B)x^2 + cx + A$$

الکون برای بدست آوردن ثابتها، ضرایب توانهای مشابه x در دو طرف رابطه را مساوی هم قرار می‌دهیم یعنی:

$$\text{ضریب } x \text{ در طرف راست معادله} = \text{ضریب } x \text{ در طرف چپ معادله}$$

$$\text{ضریب } x^2 \text{ در طرف راست معادله} = \text{ضریب } x^2 \text{ در طرف چپ معادله}$$

$$\text{عدد ثابت در طرف راست معادله} = \text{عدد ثابت در طرف چپ معادله}$$

آقا اجازه: طرف چپ تساوی که x^2 و x نداره؟

استاد: چرا داره شما نمی‌بینی!!!! در واقع سمت چپ تساوی رو می‌تونیم به صورت زیر بنویسیم:

$$0x^2 + 0x + 1 = (A + B)x^2 + cx + A$$

یعنی هر موقع توانی از x وجود نداره ضریب اون صفر بوده بنابراین

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = -1, C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

مثال: کسر $\frac{x-2}{x^2(1+x)}$ را تجزیه کنید

$$\frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x}$$

دقت کنید x^2 یک عامل درجه اول تکراری محسوب میشه

در ادامه به جای مخرج مشترک گیری بپوشه که طرفین رابطه بالا را در مخرج عبارت سمت چپ یعنی $x^2(1+x)$ ضرب کنیم

$$\Rightarrow x - 2 = Ax(1+x) + B(1+x) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=1 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow A=3, B=-2, C=-3$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{3}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{-3}{1+x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{1+x}$$

مثال: کسر $\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}$ را تجزیه کنید

در اینجا چون درجه صورت بزرگتر از مخرج هست بنابراین می بایست صورت را بر مخرج تقسیم کنیم (با استفاده از تقسیم چندجمله ایها) دقت کنید که جواب رو باید به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} = \frac{\text{باقی مانده}}{\text{مخرج}} + \text{خارج قسمت}$$

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \frac{-(x+2)}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

در ادامه کار باید کسر $\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}$ رو تفکیک کنیم دقت کنید چون مخرج کسر درجه سوم هست باید ابتدا آن را به حاصل ضرب عوامل درجه اول و دوم تجزیه کنیم:

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$$

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

$$x=0 \Rightarrow 2 = A(-2)(1) + B(-1)(0) + C(0)(-2) \Rightarrow A = -1$$

$$x=-1 \Rightarrow 1 = A(-3)(0) + B(-1)(0) + C(-1)(-3) \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$x=2 \Rightarrow 4 = A(0)(3) + B(2)(3) + C(2)(0) \Rightarrow B = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$= x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x-2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} \right)$$

انتگرال گیری از کسره‌های گویا

همانطور که در ابتدای فصل گفتیم بیشترین در دسر انتگرال گیری از کسره‌های گویا مربوط به تجزیه کسر میشه و بعد از اینکه کسر رو تجزیه کردید کار خاصی باقی نمی مونه اما با این حال یکسری از ریزه کاریها رو باید هواستون باشه! که در اینجا به صورت فاصله براتون توضیح می دم:

گفتیم که بعد از تجزیه کسر مفرج آن به چهار شکل در می آید که برای هر حالت به صورت زیر عمل می کنیم:

۱- اگر مفرج کسر عامل درجه اول غیر تکراری باشد

در این حالت جواب انتگرال به صورت لگاریتمی طبیعی در می آید و به صورت کلی داریم:

$$\int \frac{C}{ax + b} dx = C \int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{C}{a} \ln|ax + b|$$

مثال: (ما این مثال رو از انتگرال های تعمیم یافته حل می کنیم البته میشه از روش تغییر متغیر هم استفاده کرد)

$$\int \frac{5}{2x - 3} dx = 5 \int \frac{1}{2x - 3} dx = 5 \left(\frac{1}{2}\right) \int \frac{2}{2x - 3} dx = \frac{5}{2} \ln|2x - 3| + c$$

۲- اگر مفرج کسر عامل درجه اول تکراری باشد

در این حالت از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم (داخل پرانتز را u می گیریم) و جواب به صورت کسری در می آید

مثال:

$$\int \frac{dx}{(2x - 7)^3} \Rightarrow u = 2x - 7 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(2x - 7)^3} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u^3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) = \frac{-1}{4u^2} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(2x - 7)^3} = \frac{-1}{4(2x - 7)^2} + c$$

۳- اگر مخرج کسر عامل درجه دوم غیر تکراری باشد

در این حالت برای سادگی ابتدا فرض می‌کنیم مخرج کسر به صورت مربع کامل $(x^2 + a^2)$ باشد (در غیر اینصورت باید مخرج را به شکل مربع کامل در آوریم که در ادامه به توضیح آن می‌پردازیم)

شکل کلی انتگرال در این حالت به صورت است:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx$$

برای حل انتگرال بالا آن را به صورت زیر به دو قسمت تفکیک می‌کنیم:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx + \int \frac{B}{x^2 + a^2} dx$$

که جواب انتگرال اول به صورت لگاریتم طبیعی و جواب انتگرال دوم به صورت آرک تانژانت است یعنی داریم:

$$\int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx = A \left(\frac{1}{2} \right) \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + a^2| + c$$

$$\int \frac{B}{x^2 + a^2} dx = B \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{B}{a} \operatorname{Arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

تذکره: فرمول زیر رو حتما حفظ کنید:

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \left(\frac{u}{a} \right) + c$$

مثال:

$$\int \frac{5x + 1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{5x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

برای راحتی کار می‌توانیم هر یک از انتگرال‌های بالا را جداگانه حساب کنیم:

$$\int \frac{5x}{x^2 + 4} dx = 5 \int \frac{x}{x^2 + 4} dx = 5 \left(\frac{1}{2} \right) \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2 + 4) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{1}{x^2 + 2^2} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\int \frac{5x + 1}{x^2 + 4} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c$$

تذکره: اگر مخرج انتگرال داده شده به صورت مربع کامل نباشد باید آن را مربع کامل کنیم (یعنی به شکل $u^2 + a^2$ در

آوریم) به عنوان نمونه:

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 4x + 4 + 4 = (x + 2)^2 + 2^2$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + (\sqrt{2})^2} \Rightarrow u = x + 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c$$

۴- اگر مخرج کسر عامل درجه دوم تکراری باشد

در این جا نیز مشابه حالت قبل فرض می‌کنیم مخرج کسر به صورت مربع کامل باشد شکل کلی انتگرال در این حالت به صورت زیر است:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

برای حل انتگرال بالا (مشابه حالت قبل) آن را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^n} dx = \int \frac{Ax}{(x^2 + a^2)^n} dx + \int \frac{B}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

برای حل دو انتگرال بالا از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم یعنی داریم:

$$\int \frac{Ax}{(x^2 + a^2)^n} dx \Rightarrow u = x^2 + a^2 \dots$$

$$\int \frac{B}{(x^2 + a^2)^n} dx \Rightarrow x = \tan t$$

دقت کنید انتگرال دوم از روش تغییر متغیر مثلثاتی حل می‌شود

مثال:

$$\int \frac{5x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{5x}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

هر یک از انتگرال‌های بالا را به صورت جداگانه حل می‌کنیم:

$$\int \frac{5x}{(x^2 + 1)^2} dx \Rightarrow u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{5x}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{5x}{u^2} \frac{du}{2x} = \frac{5}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{5}{2} \left(\frac{-1}{u} \right) = \frac{-5}{2(x^2 + 1)} + c$$

مشابه انتگرال دوم در فصل قبل حل شده است بنابراین در اینجا فقط جواب آفر آن را می نویسیم که به شکل زیر است:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + c$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\int \frac{5x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{-5}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + c$$

اکنون که هر یک از چهار حالت بالا را به صورت جداگانه بررسی کردیم چند مثال کلی را با هم حل می کنیم

مثال: انتگرالهای داده شده را حل کنید

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad (b) \int \frac{x - 2}{x^2(1 + x)} dx \quad (c) \int \frac{x + 8}{x^3 + 4x} dx \quad (d) \int \sec x dx$$

حل: (مراحل درست آوردن ثابتها ذکر نشده است)

(a) ابتدا کسر را تجزیه می کنیم:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{-1}{2}$$

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} dx + \int \frac{\frac{-1}{2}}{x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx$$

مشفیه که جواب هر دو انتگرال به صورت Ln هست.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx &= \frac{1}{2} \text{Ln}|x-1| - \frac{1}{2} \text{Ln}|x+1| + c \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c = \text{Ln} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c \end{aligned}$$

به طور کلی می توان نشان داد:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \text{Ln} \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

اگر چه من اصلا از فرمول حفظ کردن خوشم نمیاد اما این فرمول واقعا بدرتون میفوره (بخصوص در امتحانات تستی)

حل (b): ابتدا کسر را تجزیه می کنیم (تجزیه این کسر رو قبلا انجام دادیم)

$$\frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x} \Rightarrow A=3, B=-2, C=-3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x-2}{x^2(1+x)} dx &= \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{1+x} \right) dx = 3 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{1+x} dx \\ &= 3 \text{Ln}|x| - 2 \left(\frac{-1}{x} \right) - 3 \text{Ln}|x+1| + c = \text{Ln} \left| \frac{x}{x+1} \right|^3 + \frac{2}{x} + c \end{aligned}$$

حل (c):

$$\frac{x+8}{x^3+4x} = \frac{x+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \Rightarrow A=2, B=-2, C=1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{x+8}{x^3+4x} dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+4} \right) dx \\
&= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2x+1}{x^2+4} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx \\
&\quad - \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx = 2 \operatorname{Ln}|x| - \operatorname{Ln}|x^2+4| + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} \\
&= \operatorname{Ln} \left| \frac{x^2}{x^2+4} \right| + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

حل: (d)

$$(d) \int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow u = \sin x \quad \Rightarrow du = \cos x dx \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - u^2} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 - u} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|1 + u| - \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|1 - u| = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + c = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$$

$$\Rightarrow \int \sec x dx = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$$

خب، این هم از شکل سوم جواب انتگرال سکانت.

اما برای اینکه این جواب رو به صورت جواب اول بیان کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} \right| = \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| = \operatorname{Ln} \left| \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right| = \operatorname{Ln} |\sec x + \tan x|$$

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$(2) \int \frac{7x+4}{3x+1} dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{(3-x^2)}$$

$$(4) \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$(5) \int \frac{3x^3 - 7x^2 + 14}{x^2 - 3x + 5} dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

$$(7) \int \frac{dx}{x^4 - a^4}$$

$$(8) \int \frac{x^2}{x-9} dx$$

$$(9) \int \frac{x}{3x^2 + 8x - 3} dx$$

$$(10) \int \frac{dx}{7x^2 - 8}$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مغ گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{1+x^3}$$

$$(2) \int \frac{x^2 + 7}{4x^5 + 4x^3 + x} dx$$

$$(3) \int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 8} dx$$

$$(4) \int \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$$

$$(5) \int \frac{dx}{\cos x (1 + \sin x)}$$

$$(6) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$$

$$(7) \int \frac{dx}{1+x^4}$$

$$(8) \int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x + 1}$$

فصل پنجم: انتگرال گیری به روش جزء به جزء

در این فصل یکی از زیباترین و مهمترین تکنیکهای انتگرال گیری به نام روش جزء به جزء را با هم فرا می‌گیریم این روش معمولاً برای حل انتگرال هایی به صورت ضرب دو تابع به شکل زیر استفاده می‌شود

$$\int f(x) \cdot g(x) dx$$

که $f(x), g(x)$ توابعی از دو جنس مختلف هستند (مثلاً حاصلضرب تابع چندجمله‌ای در مثلثاتی) چند نمونه از انتگرال هایی که با این روش مناسبه می‌شوند در جدول زیر نشان داده شده اند.

$\int x \cdot \sin(x) dx$	\Rightarrow	حاصلضرب تابع چندجمله‌ای در مثلثاتی
$\int x \cdot e^{2x} dx$	\Rightarrow	حاصلضرب تابع چندجمله‌ای در نمایی
$\int x \cdot \ln(x) dx$	\Rightarrow	حاصلضرب تابع چندجمله‌ای در لگاریتمی
$\int e^{3x} \cdot \sin(x) dx$	\Rightarrow	حاصلضرب تابع نمایی در مثلثاتی
$\int x \cdot \tan^{-1} x dx$	\Rightarrow	حاصلضرب تابع چندجمله‌ای در معکوس مثلثاتی

جدول (۱)

در روش جزء به جزء حل انتگرال داده شده در مساله به یک انتگرال ساده تر منجر می‌شود که حل آن را از قبل می‌دانیم. رابطه اصلی این روش به صورت زیر است:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

در رابطه بالا $\int u dv$ انتگرال داده شده در مساله است و $\int v du$ انتگرال ساده تری است که باید آن را حل کنیم

الکون مراحل این روش را با ذکر یک مثال به صورت قدم به قدم پی می‌گیریم

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int x \cdot \cos x \, dx$$

قدم اول: یکی از توابع جلوی انتگرال را برابر u و تابع دیگر به همراه dx را برابر dv می‌گیریم

$$\int x \cdot \cos x \, dx \Rightarrow u = x, \quad dv = \cos x \, dx$$

قدم دوم: از u دیفرانسیل می‌گیریم تا du بدست آید و از dv انتگرال می‌گیریم تا v بدست آید

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x \, dx \Rightarrow \int dv = \int \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x$$

قدم سوم: u, du, v, dv را در رابطه انتگرال گیری جزء به جزء جایگذاری کرده و انتگرال سمت راست را مناسبه می‌کنیم

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\Rightarrow \int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید انتگرال سمت راست (انتگرال سینوس) به راحتی مناسبه شد.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \ln x \, dx$$

قدم اول: در اینجا چون فقط یک تابع در جلوی انتگرال داریم همان را برابر u می‌گیریم و dv را برابر dx قرار می‌دهیم

$$u = \ln x, \quad dv = dx$$

قدم ۴ دوم:

$$u = \ln x \Rightarrow \text{دifferansiyel} \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow \text{انتگرال} \quad v = x$$

قدم ۴ سوم:

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \left(\frac{1}{x} dx \right) = x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1) + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x \cdot e^x dx$$

حل: در اینجا مسئله را به صورت فاصله حل می‌کنیم:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x = e^x(x - 1) + c$$

آقا اجازه: از کجا بفهمیم که کدام تابع رو u بگیریم؟ مثلا همیشه در سوال بالا e^x رو برابر u بگیریم

استاد: عجب!! یه سوال به درر بفور پرسیدی!

بزار $u = e^x$ قرار بدیم ببینیم چی میشه؟

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

حالا روابط بالا را در فرمول انتگرال گیری جزء به جزء جایگزین می‌کنیم:

$$\int x \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید مناسبه انتگرال سمت راست مشکل تر از انتگرال اولیه است بنابراین انتخاب $u = e^x$ مناسب نیست .

آقا اجازه: بالاخره کدوم تابع رو برابر u بگیریم؟

استاد: در حالت کلی همیشه جواب سوال بالا رو داد؟ اما بالاخره به راههای میانبری وجود داره! پس موبایلتو فاموش کن و فوب گوش بره!

در کتابای مقتلف به سری راهنمایی برای انتخاب u وجود داره اما به نظر من زیاده‌لجب نیست بنابراین در اینجا به قلق انتگرال فوری بهتر یاد می‌دم که در اکثر موارد جواب می‌ده. (البته این قلق رو جایی لو نرید بهتره دلیلش رو بعدا بهترتون می‌کم!)

اول از همه فرض کنید انتگرال ما به شکل زیر باشه

$$\int f(x) \cdot g(x) dx$$

حالا انتگرال هر یک از توابع رو به صورت جداگانه می‌نویسیم یعنی:

$$\int f(x) dx \quad \int g(x) dx$$

اکنون دو حالت رو در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر جواب هر دو انتگرال بالا را از فرمولهای پایه یا تعمیم یافته بدانیم آنوقت تابع ساده تر را برابر u می‌گیریم.

به عنوان مثال فرض کنیم انتگرال داده شده به صورت زیر باشد:

$$\int x \cdot \sin x dx$$

مثلاً انتگرال هر یک از دو تابع (یعنی $\sin x$, x) رو به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

چون جواب هر دو انتگرال را می دانیم بنابراین از بین دو تابع $\sin x$, x تابع ساده تر یعنی x را برابر u می گیریم.

حالت دوم: اگر جواب یکی از انتگرال ها را ندانیم همان تابع را برابر u می گیریم

به عنوان مثال فرض کنید انتگرال داده شده به صورت زیر باشد:

$$\int x \cdot \ln x dx$$

ابتدا انتگرال هر یک از توابع را به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \quad , \quad \int \ln x dx = \text{نمیدانیم}$$

بنابراین چون جواب انتگرال $\ln x$ را نمی دانیم تابع $\ln x$ را برابر u می گیریم پس داریم:

$$u = \ln x \quad , \quad dv = x dx$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x \cdot e^{2x} dx$$

حل: ابتدا انتگرال هر یک از توابع را به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \quad , \quad \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

چون جواب هر دو انتگرال را می دانیم تابع ساده تر یعنی x را برابر u می گیریم (البته قسمت بالا رو توی چکنویس

بنویسید)

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad , \quad dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\text{جابگزینی} \Rightarrow \int x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\int x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

انتگرال داده شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln x dx \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad \int \ln x dx \Rightarrow \text{نمی دانیم}$$

$$\Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int dv = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln x$$

$$\text{جابگزینی} \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx$$

همانطور که می بینید انتگرال سمت راست همان انتگرال اولیه (سمت چپ) در اومد بنابراین آن را به سمت چپ می بریم:

$$\text{جابگزینی} \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

البته انتگرال بالا را همیشه از روش تغییر متغیر فیلی سریعتر حل کرد.

نکته مهم: برخی اوقات باید چند بار از روش جزء به جزء استفاده کرد یعنی برای مناسبه انتگرال سمت راست دوباره نیاز به انتگرال گیری جزء به جزء داریم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

نوعه مناسبه رو خودتون انجام بدید:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx, \quad dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\text{جایگزینی} \Rightarrow \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \, dx$$

اکنون برای مناسبه انتگرال سمت راست مجدداً از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم

$$\int x \cdot \sin x \, dx \Rightarrow \text{روش جزء به جزء}$$

$$\Rightarrow u = x \Rightarrow du = dx, \quad dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\Rightarrow \int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x$$

اکنون با جایگذاری جواب انتگرال بالا در رابطه اصلی داریم:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + c$$

البته انتگرال بالا را می‌توان از روشی به نام **روش جدول** به صورت ساده‌تر و سریع‌تری حل کرد که در ادامه فصل به آن اشاره می‌کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \arctan(x) dx$$

$$u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{پایگزینی} \Rightarrow \int \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\int \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

تذکره: یادتون باشه وقتی با یک انتگرال کسری مواجه شدید اول به مخرج کسر نگاه کنید...

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int e^x \sin x dx$$

حل:

از آنجاییکه انتگرال هر دو تابع e^x و $\sin x$ را می‌دانیم قرار می‌دهیم:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x, \quad dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

همانطور که می‌بینید انتگرال سمت راست، رابطه بالا جزء انتگرال‌های ساده نیست و برای حل آن باید دوباره از روش

جزء به جزء استفاده کنیم. برای سادگی قرار می‌دهیم:

$$I_1 = \int e^x \sin x dx, \quad I_2 = \int e^x \cos x dx$$

بنابراین رابطه بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$I_1 = -e^x \cos x + I_2 \Rightarrow I_1 - I_2 = -e^x \cos x \quad (*)$$

اکنون به مناسبه انتگرال زیر می پردازیم:

$$I_2 = \int e^x \cos x dx$$

$$\Rightarrow u = e^x \Rightarrow du = e^x dx, \quad dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\Rightarrow I_2 = e^x \sin x - I_1 \Rightarrow I_1 + I_2 = e^x \sin x \quad (**)$$

اکنون اگر دو رابطه (*) و (**), را به صورت دستگاه دو معادله دو مجهولی بنویسیم داریم:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = -e^x \cos x \\ I_1 + I_2 = e^x \sin x \end{cases}$$

با جمع دو رابطه بالا داریم:

$$2I_1 = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I_1 = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

اکنون اگر دو رابطه را از هم کم کنیم داریم:

$$2I_2 = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow I_2 = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

$$I_2 = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

تذکره مهم: این دو تا انتگرال و روش بدست آوردن آنها خیلی مهم است (بخصوص در دروس معادلات دیفرانسیل و

ریاضیات مهندسی)

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

در حالت کلی می توان نشان داد: (a, b اعدادی ثابت هستند)

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

ترکیب روش جزء به جزء با تغییر متغیر

برخی اوقات انتگرال داده شده را نمی توان مستقیماً از روش جزء به جزء حل کرد بلکه ابتدا باید از روش تغییر متغیر انتگرال را به شکل دلخواه در بیاوریم سپس از روش جزء به جزء استفاده کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

حل: چون در جلوی انتگرال فقط یک تابع داریم بنابراین ناپاریم قرار دهیم:

$$u = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} , \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow \int e^{\sqrt{x}} dx = xe^{\sqrt{x}} - \int \frac{x}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = xe^{\sqrt{x}} - \int \frac{\sqrt{x}}{2} e^{\sqrt{x}} dx$$

همانطور که می بینید انتگرال سمت راست از انتگرال اولیه مشکلتر شد بنابراین روش جزء به جزء در اینجا جواب نمیدهد.

اکنون برای رهایی از بن بست از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t \cdot 2t dt = 2 \int t \cdot e^t dt$$

انتگرال بالا رو قبلا از روش جزء به جزء مناسبه کردیم که جواب به صورت زیر هست:

$$\int t \cdot e^t dt = e^t(t-1) \Rightarrow \int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t \cdot e^t dt = 2e^t(t-1)$$

بنابراین جواب نوایی به صورت زیر هست:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

انتگرال بالا را نمی توانیم بصورت سراسر از روش جزء به جزء حل کنیم (آکه بیکارید می تونید امتحان کنید!!) بنابراین

ابتدا به سراغ روش تغییر متغیر می رویم.

$$t = -x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{-2x}$$

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^3 e^t \frac{dt}{-2x} = \frac{1}{2} \int -x^2 e^t dt = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt$$

(انتگرال بالا قبلا مناسبه شده)

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt = \frac{1}{2} e^t(t-1) = \frac{-1}{2} e^{-x^2}(x^2+1) + c$$

انتگرال های ابتکاری

برخی از انتگرالها از روشهایی که تا اینجا به آنها اشاره کردیم قابل حل نیستند و برای حل آنها باید کمی ابتکار عمل به فرج داد (یعنی باید بیشتر مخ بسوزونید) البته تعداد این انتگرال ها بسیار کم است و معمولا سر و کله آنها فقط در امتحان پیدا می شود!!!

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{x \cdot e^x}{(1+x)^2} dx$$

حل:

$$\int \frac{x}{(1+x)^2} dx \Rightarrow \text{ نمی دانیم}$$

$$\int e^x dx = e^x \Rightarrow \text{ می دانیم}$$

در اینجا اگر مطابق روال قرار دهیم $u = \frac{x}{(1+x)^2}$ به جواب نمی رسیم بنابراین انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int \frac{x \cdot e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{1}{(1+x)^2} x e^x dx$$

$$\int x \cdot e^x dx \Rightarrow \text{ نمی دانیم}$$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{-1}{1+x} \Rightarrow \text{ می دانیم}$$

دقت کنید انتگرال دوم با یک تغییر متغیر ساده حل می شود.

اکنون داریم:

$$u = x \cdot e^x \Rightarrow du = (1+x)e^x$$

$$dv = \frac{1}{(1+x)^2} dx \Rightarrow v = \int \frac{1}{(1+x)^2} dx \Rightarrow t = 1+x \Rightarrow dt = dx$$

$$v = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{t} \Rightarrow v = \frac{-1}{1+x}$$

اکنون با جایگذاری در رابطه انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int \frac{x \cdot e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{-x \cdot e^x}{1+x} + \int e^x dx = \frac{-x \cdot e^x}{1+x} + e^x = \frac{e^x}{1+x} + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

حل:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Rightarrow \text{می دانیم} \quad \int e^{-x^2} dx \Rightarrow \text{نمی دانیم}$$

طبق روال باید قرار دهیم $u = e^{-x^2}$ اما این انتقاب به مشکل بر می خورد بنابراین انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} dx = \int x^2 \cdot x e^{-x^2} dx$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \text{می دانیم}$$

$$\int x e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int -2x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \Rightarrow \text{می دانیم}$$

بنابراین تابع ساده تر یعنی x^2 را برابر u می گیریم.

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, \quad dv = x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{2} e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x^2} dx &= \frac{-1}{2} e^{-x^2} \cdot x^2 - \int \frac{-1}{2} e^{-x^2} \cdot 2x dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} e^{-x^2} \\ &= -\frac{e^{-x^2}}{2} (x^2 + 1) + c \end{aligned}$$

روش جدول

این روش در واقع حالت خاصی از روش جزء به جزء است که در درس معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی کاربرد زیادی دارد و باعث افزایش سرعت و سهولت محاسبات می‌گردد این روش زمانی قابل استفاده است که انتگرال داده شده به صورت زیر باشد.

$$\int (\text{چند جمله ای}) \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} dx$$

یعنی به صورت ضرب دو تابع که یکی از آنها متما چند جمله ای و دیگری مثلثاتی یا نمایی است به عنوان مثال انتگرال های زیر را می‌توان از روش جدول مناسبه کرد:

$$\int x \cdot \sin 2x \, dx \quad , \quad \int x^2 \cdot e^{5x} \, dx \quad , \quad \int 2x \cdot \cos 3x \, dx$$

اکنون مراحل کار در روش جدول را به صورت قدم به قدم توضیح می‌دهیم.

قدم اول: ابتدا از تابع چندجمله ای چندبار مشتق می‌گیریم تا برابر صفر شود و از تابع دیگر به همان تعداد انتگرال می‌گیریم سپس جدولی با دو ستون رسم کرده و تابع چندجمله ای و مشتقات آن را در ستون سمت چپ و تابع نمایی یا مثلثاتی به همراه انتگرالهای آن را در ستون سمت راست می‌نویسیم.

$f(x)$	$g(x)$
↓ مشتقات	↓ انتگرالها
صفر	

$$f(x) \Rightarrow \text{تابع چند جمله ای}$$

$$g(x) \Rightarrow \text{تابع مثلثاتی یا نمایی}$$

به عنوان مثال فرض کنید مناسبه انتگرال زیر خواسته شده باشد:

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sin x$$

ابتدا از x^2 مشتق می‌گیریم تا برابر صفر شود سپس به همان تعداد از $\sin x$ انتگرال می‌گیریم.

$$x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x \xrightarrow{\text{مشتق}} 2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 0$$

$$\sin x \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\cos x \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\sin x \xrightarrow{\text{انتگرال}} \cos x$$

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

اکنون مقادیر بالا را در جدول قرار می‌دهیم:

قدم ۳ و ۴: در این مرحله دو ستون جدول را به صورت مورب با علامت یک در میان مثبت و منفی در هم ضرب کرده و سپس عملیات را با هم جمع می‌کنیم تا جواب انتگرال بدست آید.

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = + (x^2)(-\cos x) - (2x)(-\sin x) + (2)(\cos x) = 2x \cdot \sin x + (2 - x^2) \cos x$$

تذکره مهم: هنگام جمع کردن عملیات به علامت مثبت و منفی فلتشوا دقت کنید.

مثال: انتگرال زیر را از روش جدول مناسبه کنید:

$$\int x \cdot e^{2x} dx$$

حل: در اینجا راه حل انتگرال رو به صورت خلاصه بیان می کنیم.

x	e^{2x}
1	$\frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^{2x} dx = +(x) \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - (1) \left(\frac{e^{2x}}{4}\right) + c$$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

مثال: انتگرال زیر را از روش جدول مناسبه کنید:

$$\int x^2 \cdot \cos(2x) dx$$

حل: بازم تاکید می کنیم هواستون به علامت ها باشه!!

x^2	$\cos 2x$
$2x$	$\frac{1}{2} \sin 2x$
2	$-\frac{1}{4} \cos 2x$
0	$-\frac{1}{8} \sin 2x$

$$\int x^2 \cdot \cos(2x) dx =$$

$$= +(x^2) \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) - (2x) \left(\frac{-1}{4} \cos 2x\right) + (2) \left(\frac{-1}{8} \sin 2x\right)$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cdot \cos(2x) dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \sin^{-1}(x) dx$$

$$(2) \int \sin(\ln x) dx$$

$$(3) \int x \cdot \sec^2 x dx$$

$$(4) \int x \cdot \tan^{-1}(x) dx$$

$$(5) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

$$(6) \int (x^3 - 14)e^{-2x} dx$$

$$(7) \int x \cdot \sec x \cdot \tan x dx$$

$$(8) \int x \cdot e^{\sqrt{x}} dx$$

$$(9) \int e^{3x} \cdot \cos 4x dx$$

$$(10) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل منگ گرمی)

$$(1) \int \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$(2) \int x \cdot e^x \cdot \sin x dx$$

$$(3) \int x \cdot \sin^{-1}(x) dx$$

$$(4) \int \sec x \cdot \tan^2 x dx$$

$$(5) \int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$$

$$(6) \int (\sin^{-1} x)^2 dx$$

$$(7) \int \sec^3 x dx$$

$$(8) \int x \cdot (\tan^{-1} x)^2 dx$$

$$(9) \int \sin x \cdot \ln(\tan x) dx$$

$$(10) \int x \cdot \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

فصل ششم: انتگرال‌های مثلثاتی

در فصول گذشته برخی از انتگرال‌های ساده مثلثاتی را با هم مرور کردیم در این فصل برخی دیگر از این انتگرال‌ها را با هم بررسی می‌کنیم که عموماً شامل توانهای سینوس و کسینوس می‌شوند در این قسمت طبق روال مرسوم در اکثر کتابهای ریاضی، برای سادگی کار انتگرال‌های مثلثاتی را دسته بندی می‌کنیم.

دسته اول: انتگرال توانهای زوج سینوس و کسینوس

شکل کلی این انتگرال‌ها به صورت زیر است: (k یک عدد مثبت فرض می‌شود)

$$\int \sin^{2k} x \, dx \quad \int \cos^{2k} x \, dx$$

برای حل انتگرال‌های بالا باید از شر توانهای زوج فلاص بشیم به همین خاطر از فرمولهای مهمی موسوم به روابط کاهش توان استفاده می‌کنیم که به منظور یادآوری مجدداً اونها رو براتون می‌نویسم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

یادآوری ۱۲

آقا اجازه: اگر جلوی سینوس یا کسینوس به جای x به عبارت دیگه بود چیکار کنیم؟

استاد: بین فرقی نمیکنه هرچی جلوی سینوس یا کسینوس باشه وقتی توان ۲ اون ازین میره دوبرابر میشه به عنوان

مثال:

$$\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2} \quad , \quad \sin^2(Lnx) = \frac{1 - \cos(2Lnx)}{2}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \cos^2 x \, dx$$

حل: این انتگرال رو قبلا در فصل دوم حل کردیم اما به خاطر اهمیتی که داره دوباره حلش می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \\ \Rightarrow \int \cos^2 x \, dx &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c = \frac{1}{2} (x + \sin x \cdot \cos x) + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \sin^4 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \\ &= \int \frac{1 + \cos^2 2x - 2 \cos 2x}{4} \, dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

برای مناسبه انتگرال دوم باید دوباره از رابطه کاهش توان استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} \cos^2 2x &= \frac{1 + \cos 4x}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \sin^4 x \, dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{\sin 2x}{4} + c = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

شکل کلی این انتگرال ها به صورت زیر است (k یک عدد مثبت فرض می شود)

$$\int \sin^{2k+1} x \, dx \quad \int \cos^{2k+1} x \, dx$$

برای حل این انتگرال ها به صورت زیر عمل می کنیم:

ابتدا سینوس یا کسینوس را به صورت زیر تفکیک می کنیم:

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \cdot \sin x \quad , \quad \cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cdot \cos x$$

به عنوان مثال:

$$\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x \quad , \quad \cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$$

در مرحله بعد با استفاده از اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ سینوس را بر حسب کسینوس و کسینوس را بر حسب سینوس می نویسیم

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \cdot \sin x = (\sin^2 x)^k \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \cdot \sin x$$

$$\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cdot \cos x = (\cos^2 x)^k \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x$$

و در آخر برای انتگرال سینوس از تغییر متغیر $u = \cos x$ و برای انتگرال کسینوس از تغییر متغیر $u = \sin x$ استفاده می کنیم.

اکنون مراحل بالا را به صورت فاصله بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \, dx &= \int \sin^{2k} x \cdot \sin x \, dx = \int (\sin^2 x)^k \cdot \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \sin x \, dx \quad \Rightarrow \quad u = \cos x \dots \end{aligned}$$

به همین ترتیب برای انتگرال کسینوس داریم:

$$\begin{aligned}\int \cos^{2k+1} x \, dx &= \int \cos^{2k} x \cdot \cos x \, dx = \int (\cos^2 x)^k \cdot \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad u = \sin x \dots\end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \cos^3 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = \sin x \quad du = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\begin{aligned}\int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx &= \int (1 - u^2) \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x} = \int (1 - u^2) \, du \\ &= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c\end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \sin^5 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \, dx &= \int \sin^4 x \cdot \sin x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = \cos x \quad du = -\sin x \, dx \quad \Rightarrow dx = \frac{-du}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx &= \int (1 - u^2)^2 \cdot \sin x \frac{-du}{\sin x} = - \int (1 - u^2)^2 \, du \\ &= - \int (1 + u^4 - 2u^2) \, du = - \left(u + \frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} \right) \\ &= - \left(\cos x + \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^3 x}{3} \right) + c \end{aligned}$$

دسته سوم: انتگرال های به فرم $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ وقتی توانها اعداد صحیح مثبت باشند

این دسته از انتگرال ها فود شامل دو حالت می شوند که عبارتند از:

حالت ۱: وقتی حداقل یکی از توانها فرد باشند.

در این حالت تابعی که توان فرد دارد را مانند دسته دوم تفکیک کرده و از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$$

حل: دقت کنید در اینجا کسینوس توان فرد دارد بنابراین انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx = \int u^2 \cdot (1 - u^2) \cdot \cos x \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u^2 \cdot (1 - u^2) \, du = \int (u^2 - u^4) \, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

حالت ۲: وقتی توان هر دو تابع سینوس و کسینوس زوج باشد.

در این حالت مانند دسته اول از فرمولهای کاهش توان استفاده می‌کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c \end{aligned}$$

دسته چهارم: انتگرال حاصلضرب سینوس و کسینوس

این انتگرال‌ها خود شامل سه حالت می‌شوند که عبارتند از:

$$(a) \int \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta x) \, dx$$

$$(b) \int \cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) \, dx$$

$$(c) \int \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) \, dx$$

برای حل انتگرال‌های بالا از روابط تبدیل حاصلضرب به جمع استفاده می‌کنیم بنابراین جهت یادآوری این روابط را در

زیر می‌نویسیم:

$$\sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \sin(7x) \cdot \cos(5x) dx$$

حل: ابتدا حاصلضرب بالا را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم:

$$\sin(7x) \cdot \cos(5x) = \frac{1}{2} [\sin(7 + 5)x + \sin(7 - 5)x] = \frac{1}{2} [\sin(12x) + \sin(2x)]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sin(7x) \cdot \cos(5x) dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(12x) + \sin(2x)] dx \\ &= \frac{-1}{2} \left(\frac{\cos(12x)}{12} + \frac{\cos(2x)}{2} \right) + c \end{aligned}$$

دسته پنجم: مناسبه انتگرالی‌هایی به فرم $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ وقتی یکی از توانها منفی یا کسری باشد

این دسته از انتگرالها خود شامل سه حالت می‌شوند که عبارتند از:

۱- اگر n (توان کسینوس) یک عدد فرد باشد از تغییر متغیر $\sin x = t$ استفاده می‌کنیم.

۲- اگر m (توان سینوس) یک عدد فرد باشد از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می‌کنیم.

۳- اگر $m+n$ زوج باشد از تغییر متغیر $\tan x = t$ یا $\cot x = t$ استفاده می‌کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$$

حل:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \int \cos^3 x \cdot \sin^{-6} x dx \Rightarrow n = 3, \quad m = -6$$

چون n فرد است از تغییر متغیر $\sin x = t$ استفاده می کنیم:

$$\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx &= \int \frac{\cos^3 x}{t^6} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{\cos^2 x}{t^6} dt = \int \frac{1-t^2}{t^6} dt \\ &= \int \frac{1}{t^6} dt - \int \frac{1}{t^4} dt = \frac{t^{-5}}{-5} - \frac{t^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + c \\ &\Rightarrow \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$$

حل:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^{-6} x dx \Rightarrow n = -6, m = 2 \Rightarrow m + n = \text{زوج}$$

چون $m + n = \text{زوج}$ بنابراین از تغییر متغیر $\tan x = t$ استفاده می کنیم:

$$\tan x = t \Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + \tan^2 x} = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int \tan^2 x \cdot (1 + \tan^2 x)^2 dx \\ &= \int t^2 \cdot (1 + t^2)^2 \frac{dt}{1 + t^2} = \int t^2 (1 + t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt \\ &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$$

حل:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-\frac{2}{3}} x dx \Rightarrow n = -\frac{2}{3}, m = 3$$

چون m فرد است از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می کنیم:

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx &= \int \frac{\sin^3 x}{t^{\frac{2}{3}}} \left(-\frac{dt}{\sin x} \right) = -\int \frac{\sin^2 x}{t^{\frac{2}{3}}} dt = -\int \frac{1 - t^2}{t^{\frac{2}{3}}} dt \\ &= -\int \left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} - \frac{t^2}{t^{\frac{2}{3}}} \right) dt = -\int t^{-\frac{2}{3}} dt + \int t^{\frac{4}{3}} dt = -3t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{7} t^{\frac{7}{3}} + c \\ &= -3\sqrt[3]{\cos x} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{\cos^7 x} + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

حل:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \cos^{-4} x dx \Rightarrow n = -4, m = 0 \Rightarrow m + n = \text{زوج}$$

$$\tan x = t \Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + \tan^2 x} = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 dx = \int (1 + t^2)^2 \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int (1 + t^2) dt \\ &= t + \frac{t^3}{3} + c = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \tan^3 x dx$$

حل:

$$\int \tan^3 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx \Rightarrow n = -3, m = 3 \Rightarrow m + n = \text{زوج}$$

$$t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{(1 + t^2)}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x dx &= \int t^3 \cdot \frac{dt}{(1 + t^2)} = \int \frac{t^3}{(1 + t^2)} dt \\ &= \int \left(t - \frac{t}{1 + t^2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + c \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 x) + c \end{aligned}$$

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \sin 5x \cdot \cos 2x \, dx$$

$$(2) \int \sin 3x \cdot \sin x \, dx$$

$$(3) \int \cos 6x \cdot \cos x \, dx$$

$$(4) \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$(5) \int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$(6) \int \cos^4 x \, dx$$

$$(7) \int \frac{1}{\sin^4 x} \, dx$$

$$(8) \int \cos^5 x \, dx$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مغ گرمی)

$$(1) \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} \, dx$$

$$(2) \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} \, dx$$

$$(3) \int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx$$

$$(4) \int \cot^6 x \, dx$$

$$(5) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \, dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x}$$

$$(7) \int \tan^7 x \, dx$$

$$(8) \int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$$