(فرم طرح سوالات امتحانات پایان ترم)

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۲ گروه هماهنگ)**	نیمسال (اول/**دوم**) **۹۱**-۱۳۹۰	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۱/۳/۲۲**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

ابتدا مشخصات اول پاسخنامه را به دقت تکمیل نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- مسیرهای قائم دسته منحنی های $x^2 - y^2 = 2cx$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۲- با استفاده از روش عملگر D جواب خصوصی معادله زیر را بیابید. **۱۵ نمره**

$$(D^2+4)y = x\sin 2x$$

سوال۳- معادله زیر را به کمک روش تغییر پارامتر حل کنید : **۲۰ نمره**

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x + 2$$

سوال۴- یک جواب معادله دیفرانسیل $x(x+2)y'' - 4y' + xy = 0$ را به صورت سری حول نقطه $x_0 = 0$ بیابید. (به ازای ریشه بزرگتر معادله مشخصه) **۲۰ نمره**

سوال۵- دستگاه معادلات مقابل را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$\begin{cases} D^2x + Dy = e^{2t} \\ (D-1)x + (D-1)y = 0 \end{cases}$$

سوال۶- معادله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. **۱۵ نمره**

$$x'' + 2x' + x = 6(t-1)e^{-t} \quad ; \quad x(0) = -1 \, , \, x'(0) = 4$$

سوال۷- تبدیلات معکوس لاپلاس زیر را بیابید : **۲۰ نمره**

$$f(t) = L^{-1}\{\ln(s^2+s)\} \quad , \quad g(t) = L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s} + \frac{(3s+1)e^{-3s}}{s^2} + \frac{3e^{-2\pi s}}{s^2+9}\}$$

موفق باشید

دانشکده ریاضی
۱۳۹۱/۳/۲۲

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل (۱۲ گروه هماهنگ)
نیمسال دوم ۹۱-۱۳۹۰

جواب سوال۱ - معادله دیفرانسیل دسته منحنیها را می نویسیم :

$$x^2 - y^2 = 2cx \to x - \frac{y^2}{x} = 2c \to 1 - \frac{2yy'}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0 \to y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای قائم عبارت است از $y' = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$ و یا $(x^2+y^2)dy + 2xydx = 0$

که یک مادله کامل است و جواب آن عبارت است از : $\boxed{x^2y + \frac{1}{3}y^3 = c}$

جواب سوال۲ - $(D^2+4)y = x\sin 2x \to y_p = \frac{1}{D^2+4}(x\sin 2x) \to y_p = \frac{1}{D^2+4}(x\,\mathrm{Im}(e^{2ix}))$

$$\to y_p = \frac{1}{D^2+4}(\mathrm{Im}(xe^{2ix})) \to y_p = \mathrm{Im}(\frac{1}{D^2+4}(xe^{2ix})) \to y_p = \mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2+4}(x))$$

$$\to y_p = \mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{D^2+4iD}(x)) \to y_p = \mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{4iD}\frac{1}{1+D/4i}(x)) \to y_p = \mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{4iD}(1-\frac{D}{4i}+\cdots)(x))$$

$$\to y_p = \mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{4iD}(x-\frac{1}{4i})) \to y_p = \mathrm{Im}(e^{2ix}(\frac{x^2}{8i}-\frac{x}{-16})) \to y_p = \frac{1}{16}\mathrm{Im}((\cos 2x + i\sin 2x)(x-2ix^2))$$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{16}x\sin 2x - 2x^2\cos 2x}$$

جواب سوال۳ - ابتدا معادله همگن نظیر آن یعنی $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ را حل می کنیم که یک معادله اویلر است.

$$m(m-1) - 3m + 4 = 0 \to m^2 - 4m - 4 = 0 \to m_1 = m_2 = 2 \to y_h = (a+b\ln x)x^2$$

$$y_1 = x^2 \ , \ y^2 = x^2\ln x \ , \ h(x) = \frac{x+2}{x^2} \ , \ w(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2\ln x \\ 2x & 2x\ln x + x \end{vmatrix} = x^3$$

$$y_p = y_1\int\frac{-y_2h(x)}{w}dx + y_2\int\frac{y_1h(x)}{w}dx = x^2\int\frac{-(x+2)\ln x}{x^3}dx + x^2\ln x\int\frac{x+2}{x^3}dx$$

$$= x^2\int(-\frac{\ln x}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^3})dx + x^2\ln x\int(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3})dx = x^2(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}) + x^2\ln x(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})$$

$$= x\ln x + x + \ln x + \frac{1}{2} - x\ln x - \ln x = x + \frac{1}{2} \qquad \to \boxed{y_g = (a+bx^2)\ln x + x + \frac{1}{2}}$$

جواب سوال۴ - $y'' - \frac{4}{x(x+2)}y' + \frac{1}{x+2}y = 0 \quad p_0 = \lim_{x\to 0} x\times\frac{-4}{x(x+2)} = -2 \ , \ q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\times\frac{1}{x+2} = 0$

$x=0$ یک نقطه تکین منظم معادله است. معادله مشخصه عبارت است از $r(r-1)-2r=0$ و یا $r^2-3r=0$ یعنی : $r_1=3 \ , r_2=0$

این معادله جوابی به صورت سری $y = x^3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \ , a_0 = 0$ دارد. این جواب را در معادله قرار می دهیم :

$$x(x+2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_nx^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)a_nx^{n+2} + x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_nx^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+3)(n+2)a_nx^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}4(n+3)a_nx^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+4} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n-1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+3)(n+2)a_nx^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}4(n+3)a_nx^{n+2} + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+2} = 0$$

دانشکده ریاضی
۱۳۹۱/۳/۲۲

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل (۱۲ گروه هماهنگ)
نیمسال دوم ۹۱-۱۳۹۰

$$(6a_0+8a_1)x^3+\sum_{n=2}^{\infty}[2n(n+3)a_n+(n+2)(n+1)a_{n-1}+a_{n-2}]x^{n+2}=0$$

یعنی : $6a_0+8a_1=0 \to a_1=-\frac{3}{4}a_0 \quad , \quad 2n(n+3)a_n+(n+2)(n+1)a_{n-1}+a_{n-2}=0 \quad , \; n=2,3,\cdots$

و یا : $a_n=-\frac{(n+2)(n+1)}{2n(n+3)}a_{n-1}-\frac{1}{2n(n+3)}a_{n-2} \quad , \; n=2,3,\cdots$

$$a_2=-\frac{3}{5}a_1-\frac{1}{20}a_0=\frac{2}{5}a_0 \; , \quad a_3=-\frac{5}{9}a_2-\frac{1}{36}a_1=-\frac{29}{144}a_0 \; , \quad \cdots$$

و بالاخره داریم : $\boxed{y=a_0x^3(1-\frac{3}{4}x+\frac{2}{5}x^2-\frac{29}{144}x^3+\cdots)}$

جواب سوال۵ - ابتدا جواب خصوصی را پیدا می کنیم.

$$\begin{matrix} D-1 \\ -D \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} D^2x+Dy=e^{2t} \\ (D-1)x+(D-1)y=0 \end{array}\right. \to (D^3-2D^2+D)x=e^{2t} \;\to\; x_p=\frac{1}{D(D-1)^2}(e^{2t}) \;\to\; x_p=\frac{1}{2}e^{2t}$$

اگر دو معادله را از هم کم کنیم داریم : $(D^2-D+1)x+y=e^{2t}$ بنابر این $y_p=e^{2t}-(D^2-D+1)(\frac{1}{2}e^{2t}) \;\to\; y_p=\frac{-1}{2}e^{2t}$

با توجه به محاسبات انجام شده ، معادله مشخصه به صورت $D^3-2D^2+D=0$ و یا $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda=0$ خواهد بود و داریم

$\lambda_1=0 \, , \; \lambda_2=\lambda_3=1$ یعنی $x_h=a+(b+ct)e^t$ و در نتیجه : $\boxed{x_g=a+(b+ct)e^t+\frac{1}{2}e^{2t}}$

اکنون داریم : $y_g=e^{2t}-(D^2-D+1)(x_g) \;\to\; y_g=e^{2t}-(D^2-D+1)(a+(b+ct)e^t+\frac{1}{2}e^{2t})$

$$\boxed{y_g=-[a+(b+c+ct)e^t+\frac{1}{2}e^{2t}]}$$

جواب سوال۶ - $L\{x''+2x'+x\}=L\{6(t-1)e^{-t}\}\to s^2L\{x\}+s-4+2sL\{x\}+2+L\{x\}=\frac{6}{(s+1)^2}-\frac{6}{s+1}=\frac{-6s}{(s+1)^2}$

$$(s^2+2s+1)L\{x\}=2-s-\frac{6s}{(s+1)^2}\to L\{x\}=\frac{2-s}{(s+1)^2}-\frac{6s}{(s+1)^4}\to L\{x\}=-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{(s+1)^2}-\frac{6}{(s+1)^3}+\frac{6}{(s+1)^4}$$

$$L\{x\}=-L\{e^{-t}\}+3L\{te^{-t}\}-3L\{t^2e^{-t}\}+L\{t^3e^{-t}\} \;\to\; x=(-1+3t-3t^2+t^3)e^{-t} \;\to \boxed{x(t)=(t-1)^3e^{-t}}$$

جواب سوال۷ - $L\{f\}=\ln(s^2+s) \;\to L'\{f\}=\frac{2s+1}{s^2+s}=\frac{2s+1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}=L\{1+e^{-t}\}$

$$L\{tf(t)\}=-L'\{f\}=-L\{1+e^{-t}\} \;\to\; t\,f(t)=-(1+e^{-t}) \;\to\; \boxed{f(t)=-\frac{1+e^{-t}}{t}}$$

$$L\{g(t)\}=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{(3s+1)e^{-3s}}{s^2}+\frac{3e^{-2\pi s}}{s^2+9}=e^{-s}L\{1\}+e^{-3s}L\{3+t\}+e^{-2\pi s}L\{\sin 3t\}$$

$$L\{g\}=L\{u_1(t)+u_3(t)(3+(t-3))+u_{2\pi}(t)\sin 3(t-2\pi)\}=L\{u_1(t)+u_3(t)t+u_{2\pi}(t)\sin 3t\}$$

$$\to\boxed{g(t)=u_1(t)+u_3(t)t+u_{2\pi}(t)\sin 3t}$$

سیدرضا موسوي