نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۳/۱/۳۰**

وقت : **۷۵** دقیقه

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۱ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۳**- **۱۳۹۲**

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ – مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای $y^2 + 2cx = 0$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ – معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$(-y + 4xy^2 \ln x)dx + x\,dy = 0$$

سوال ۳ - معادله مرتبه اول $(1 + 3x\sin y)dx - x^2 \cos y\, dy = 0$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۴ - معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه $\begin{cases} yy'' = 2(y')^2 - yy' \\ y(0) = 2\ ,\ \ y'(0) = 6 \end{cases}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۵ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین بیابید. **۲۰ نمره**

$$y'' + 2y' + 2y = 4e^{-x} \sin x$$

موفق باشید

جواب سوال۱ : ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای داده شده یعنی $y^2+2cx=0$ را می نویسیم. از طرفین معادله مشتق می‌گیریم. $2yy'+2c=0$ و داریم $2c=-2yy'$ با جایگذاری در معادله اصلی خواهیم داشت $y^2-2yy'x=0$ پس معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای داده شده عبارت است از $y'=\frac{y}{2x}$ و معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم آن عبارت است از $y'=\frac{-2x}{y}$ اکنون باید معادله دیفرانسیل $yy'=-2x$ را حل کنیم که یک معادله جدایی‌پذیر است.

$$ydy=-2xdx \;\to\; \frac{1}{2}y^2=-x^2+a \;\to\; y^2+2x^2=2a$$

جواب سوال۲ : اگر معادله را به صورت $\frac{dy}{dx}=\frac{y-4xy^2\ln x}{x}$ بنویسیم داریم $y'-\frac{1}{x}y=-4y^2\ln x$
که یک معادله برنولی است. طرفین معادله را بر y^2 تقسیم می‌کنیم : $\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}=-4\ln x$
با اعمال تغییر متغیر $u=\frac{1}{y}$ داریم $-u'-\frac{1}{x}u=-4\ln x$ و یا $u'+\frac{1}{x}u=4\ln x$ که یک معادله خطی مرتبه اول است.

$$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x \quad\to\quad u=\frac{1}{x}(c+\int x(4\ln x)dx)=\frac{1}{x}(c+\int 4x4\ln xdx)=\frac{1}{x}(c+2x^2\ln x-x^2)$$

پس جواب معادله عبارت است از $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}(c+2x^2\ln x-x^2)$ و یا : $y=\frac{x}{c+x^2(2\ln x-1)}$

جواب سوال۳ : داریم :

$$M=1+3x\sin y \;,\quad N=-x^2\cos y$$
$$M_y=3x\cos y \;,\; N_x=-2x\cos y$$

این معادله کامل نیست اما چون $\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{5x\cos y}{-x^2\cos y}=\frac{-5}{x}$ مستقل از y است بنابر این یک عامل انتگرالساز یک متغیره بر حسب x دارد. داریم : $\mu=e^{\int\frac{-5}{x}dx}=\frac{1}{x^5}$ و با ضرب این عامل انتگرالساز در طرفین معادله داریم :

$$(\frac{1}{x^5}+\frac{3}{x^4}\sin y)dx-\frac{1}{x^3}\cos y\,dy=0$$

که یک معادله کامل است و جواب آن عبارت است از $\frac{-1}{4x^4}-\frac{1}{x^3}\sin y=c$ و یا : $4cx^4+4x\sin y+1=0$

جواب سوال۴ : این معادله ، یک معادله مرتبه دوم فاقد x است با تغییر متغیر $u\frac{du}{dy}=y''$, $u=y'$ داریم $yuu'=2u^2-yu$
چون $u=y'\neq0$ داریم $yu'-2u=-y$ و یا $u'-\frac{2}{y}u=-1$ که یک معادله مرتبه اول خطی است و $\mu=e^{\int\frac{-2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}$ و :

$$u=y^2(c+\int\frac{1}{y^2}(-1)dy)=y^2(c+\int\frac{-1}{y^2}dy)=y^2(c+\frac{1}{y})$$

اکنون به معادله مرتبه اول و جدایی‌پذیر $y'=y(cy+1)$ رسیده‌ایم و برای راحتی کار مقدار c را محاسبه می کنیم.
با توجه به شرایط اولیه داریم : $6=2(c\times2+1)$ که نتیجه می‌دهد $c=1$ و $y'=y(y+1)$ اکنون داریم $\frac{dy}{y(y+1)}=dx$

و یا $(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1})dy = dx$ که نتیجه می‌دهد $\ln\frac{y}{y+1} = x+a$ و یا $\frac{y}{y+1} = Ae^{x}$ و با توجه به شرایط اولیه $A = \frac{2}{3}$

و بالاخره داریم : $y = \frac{2e^{x}}{3-2e^{x}} = \frac{2}{3e^{-x}-2}$

جواب سوال۵ : معادله مشخصه معادله همگن عبارت است از $m^{2}+2m+2=0$ که دو ریشه مختلط $m=-1\pm i$ دارد.

یعنی جواب معادله همگن برابر است با : $y_h = e^{-x}(A\sin x + B\cos x)$

برای یافتن جواب خصوصی به کمک روش ضرایب نامعین فرض می‌کنیم :

$$y_p = e^{-x}(Ax\sin x + Bx\cos x)$$

و داریم :

$$y'_p = e^{-x}[(-Ax-Bx+A)\sin x + (Ax-Bx+B)\cos x]$$
$$y''_p = e^{-x}[(2Bx-2A-2B)\sin x + (-2Ax+2A-2B)\cos x]$$

در معادله اصلی قرار می دهیم :

$$y''_p + 2y'_p + 2y_p = e^{-x}[-2B\sin x + 2A\cos x] = 4e^{-x}\sin x \ \rightarrow\ B=-2,\ A=0$$

و جواب عمومی معادله برابر است با : $y_g = y_h + y_p = e^{-x}(A\sin 2x + B\cos 2x - 2x\cos x)$

سیدرضا موسوی