نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **رياضي**

تاریخ : **۱۳۹۱/۸/۲۹**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشکده رياضي

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۸ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۱**- ۱۳۹۰

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ - مسیرهای قائم دسته منحنی $x^2 + c^2y^2 = 16$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ – جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۳ - معادله زیر را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0 \quad , \quad y(1) = 1$$

سوال ۴ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل $yy'' = y^2y' + (y')^2$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۵ - معادله زیر را حل کنید. $y'' + 2y' + 5y = e^x + \cos 2x$ **۲۰ نمره**

موفق باشید

جواب سوال ۱ - $y'=\frac{-xy}{16-x^2} \leftarrow 0=\frac{-2xy^2-2yy'(16-x^2)}{y^4} \leftarrow c^2=\frac{16-x^2}{y^2} \leftarrow x^2+c^2y^2=16$

معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم عبارت است از $y'=\frac{16-x^2}{xy}$. این معادله را حل می کنیم.

$$y'=\frac{16-x^2}{xy} \to ydy=(\frac{16}{x}-x)dx \to y^2=32\ln x-x^2+2c \to y^2+x^2=32\ln x+b$$

جواب سوال ۲ - $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0 \to y'=-\frac{x-y-1}{4y+x-1} \to \begin{cases} X=x-1 \\ Y=y \end{cases} \to \frac{dY}{dX}=\frac{Y-X}{4Y+X}$

$$Y=Xu \to u+X\frac{du}{dX}=\frac{Xu-X}{4Xu+X} \to X\frac{du}{dX}=\frac{u-1}{4u+1}-u=\frac{-4u^2-1}{4u+1} \to -\frac{4u+1}{4u^2+1}du=\frac{dX}{X}$$

$$\to -\frac{1}{2}\ln(4u^2+1)-\frac{1}{2}Arc\tan(2u)=\ln X+c \to Arc\tan(2u)+\ln(X^2(4u^2+1))+2c=0$$

$$\to Arc\tan(\frac{2Y}{X})+\ln(4Y^2+X^2)+2c=0 \to Arc\tan(\frac{2y}{x-1})+\ln(4y^2+(x-1)^2)+2c=0$$

جواب سوال ۳ - $M=4xy+3y^2-x \ , \ N=x(x+2y) \to M_y=4x+6y \ , N_x=2x+2y$

معادله کامل نیست اما $\frac{2}{x}=\frac{4x+6y-(2x+2y)}{x(x+2y)}=\frac{M_y-N_x}{N}$ مستقل از y است و $\mu=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$ یک عامل انتگرالساز معادله است یعنی معادله $x^2(4xy+3y^2-x)dx+x^3(x+2y)dy=0$ کامل است.

داریم $(4x^3y+3x^2y^2-x^3)dx+(x^4+2x^3y)dy=0$

$$f(x,y)=\int(4x^3y+3x^2y^2-x^3)dx=x^4y+x^3y^2-\frac{1}{4}x^4+g(y) \to f_y=N \to g(y)=c$$

$$\to x^4y+x^3y^2-\frac{1}{4}x^4+c=0 \xrightarrow{y(1)=1} c=-\frac{7}{4} \to 4x^4y+4x^3y^2-x^4=7$$

جواب سوال ۴ - با تغییر متغیر $y'=u \ , y''=u\frac{du}{dy}$ داریم $yu\frac{du}{dy}=y^2u+u^2$ اگر $u=0$ پس $y=c$ که یک دسته از جوابهای معادله هستند. اگر $u\neq 0$ آنگاه $\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u=y^2$ که یک معادله مرتبه اول خطی است.

اکنون داریم $u=e^{-\int\frac{-dy}{y}}(c+\int y^2e^{\int\frac{-dy}{y}}dy)=y(c+\int ydy)=cy+\frac{1}{2}y^3$: $y'=\frac{dy}{dx}=cy+\frac{1}{2}y^3 \to \frac{2dy}{y(2c+y^2)}=dx$

$$\to \frac{1}{y}-\frac{y}{2c+y^2}=cdx \to \ln y-\frac{1}{2}\ln(2c+y^2)=cx+c_1 \to \ln\frac{y^2}{2c+y^2}=2(cx+c_1) \to \frac{y^2}{2c+y^2}=Ae^{2cx}$$

جواب سوال ۵ - $y''+2y'+5y=0 \to m^2+2m+5=0 \to m=-1\pm 2i \to y_h=e^{-x}(A\sin 2x+B\cos 2x)$

$$y_p=ae^x+b\cos 2x+c\sin 2x \to y_p'=ae^x+2c\cos 2x-2b\sin 2x \to y_p''=ae^x-4b\cos 2x-4c\sin 2x$$

$$\to y''+2y'+5y=8ae^x+(b+4c)\cos 2x+(c-4b)\sin 2x=e^x+\cos 2x \to a=\frac{1}{8} \ , \ b+4c=1 \ , c-4b=0$$

$$\to b=\frac{1}{17} \ , c=\frac{4}{17} \to y_p=\frac{1}{8}e^x+\frac{1}{17}(\cos 2x+4\sin 2x)$$

$$\to y_g=e^{-x}(A\sin 2x+B\cos 2x)+\frac{1}{8}e^x+\frac{1}{17}(\cos 2x+4\sin 2x)$$