سوال ۱ - معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{x^2 + x^2 e^{(\frac{y}{x})^2} + 2y^2 e^{(\frac{y}{x})^2}}{2xy\, e^{(\frac{y}{x})^2}}$ را حل کنید. **۲۰ نمره**

جواب : معادله همگن است و با تغییر متغیر $y = xu$ به یک معادله جدایی پذیر تبدیل خواهد شد.

$$u + xu' = \frac{x^2 + x^2 e^{u^2} + 2x^2u^2 e^{u^2}}{2x^2 u e^{u^2}} \to xu' = \frac{1 + e^{u^2} + 2u^2 e^{u^2}}{2ue^{u^2}} - u \;\to\; x\frac{du}{dx} = \frac{1+e^{u^2}}{2ue^{u^2}}$$

$$\to \frac{2ue^{u^2}}{1+e^{u^2}}du = \frac{dx}{x} \to \ln(1+e^{u^2}) = \ln(Ax) \to 1 + e^{u^2} = Ax \to u^2 = \ln(Ax-1) \to \boxed{y = \pm x\sqrt{\ln(Ax-1)}}$$

سوال ۲ – مقدار a را چنان بیابید که تابع $\mu = \dfrac{1}{x^2}$ یک عامل انتگرالساز معادله دیفرانسیل

$$(x^2 + a\,y^2)dx + 4xy\,dy = 0$$

باشد و سپس آن را حل کنید. **۲۰ نمره**

جواب : طرفین معادله را در $\mu = \dfrac{1}{x^2}$ ضرب می‌کنیم $(1+\dfrac{ay^2}{x^2})dx + \dfrac{4y}{x}dy = 0$ این معادله باید کامل باشد یعنی

$$\frac{\partial}{\partial y}(1+\frac{ay^2}{x^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{4y}{x}) \to \frac{2ay}{x^2} = \frac{-4y}{x^2} \to a = -2$$

معادله به صورت $(1-\dfrac{2y^2}{x^2})dx + \dfrac{4y}{x}dy = 0$ در می‌آید که کامل است و جواب آن عبارت است از $x + \dfrac{2y^2}{x} = c$ یا $\boxed{x^2 + 2y^2 = cx}$

سوال ۳ - معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را حل کنید. **۲۰ نمره**

$$y'' + (y')^3 e^{2y} = 0 \quad , \quad y(0) = 0\,,\; y'(0) = -1$$

جواب : معادله فاقد x است و با تغییر متغیر $u = y'$ داریم $y'' = u\dfrac{du}{dy}$ و

$$u\frac{du}{dy} + u^3 e^{2y} = 0 \to -\frac{du}{u^2} = e^{2y}dy \to -\int\frac{du}{u^2} = \int e^{2y}dy \to \frac{1}{u} = \frac{1}{2}e^{2y} + c \to \frac{1}{y'} = \frac{1}{2}e^{2y} + c$$

با توجه به شرایط اولیه می توان مقدار c را محاسبه کرد. $\dfrac{1}{-1} = \dfrac{1}{2}\times 1 + c \to c = -\dfrac{3}{2}$ و داریم $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}e^{2y} - \dfrac{3}{2}$

که یک معادله جدایی پذیر است و

$$2dx = (e^{2y} - 3)dy \to 2x + c = \frac{1}{2}e^{2y} - 3y \xrightarrow{y(0)=0} c = \frac{1}{2} \to 2x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{2y} - 3y \to \boxed{4x + 1 = e^{2y} - 6y}$$

سوال ۴ - معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین حل کنید. **۲۰ نمره**

$$y'' + 5y = x\cos 2x$$

جواب : ابتدا معادله همگن $y'' + 5y = 0$ را حل می‌کنیم که معادله مشخصه آن $m^2 + 5 = 0$ با ریشه‌های مختلط $m = \pm\sqrt{5}\,i$ است. بنابر این $y_h = A\sin\sqrt{5}x + B\cos\sqrt{5}x$.

جواب خصوصی را به صورت $y_p = (ax+b)\sin 2x + (cx+d)\cos 2x$ حدس می زنیم.

$$y'_p = (-2cx + a - 2d)\sin 2x + (2ax + 2b + c)\cos 2x \quad , \quad y''_p = (-4ax - 4b - 4c)\sin 2x + (-4cx + 4a - 4d)\cos 2x$$

$$y''_p + 5y_p = (ax + b - 4c)\sin 2x + (cx + 4a + d)\cos 2x = x\cos 2x \to a = 0\,,\, c = 1\,,\, d = 0\,, b = 4$$

بنابر این جواب عمومی معادله عبارت است از : $\boxed{y_g = y_h + y_p = A\sin\sqrt{5}x + B\cos\sqrt{5}x + x\cos 2x + 4\sin 2x}$