(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم) کد فرم : FR/FY/11
دانشکده ریاضی ویرایش : صفر

دانشگاه صنعتی شاهرود

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۹ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۲-۱۳۹۱** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۱/۱۰/۱۷** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $yy''-(y')^{2}=y^{2}y'$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^{2}}y=\frac{1}{x^{2}+x^{3}}$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۳- معادله دیفرانسیل زیر را به کمک عملگر D حل کنید. **۱۵ نمره**

$$y''+4y'+8y=x^{2}+2x+\sin^{2}x$$

سوال۴- یک جواب معادله دیفرانسیل $x(1-x)y''-4y=0$ را به صورت سری حول نقطه $x=0$ نوشته و شکل کلی جواب دوم آن را (بدون محاسبه) بنویسید. **۲۰ نمره**

سوال۵- دستگاه معادلات مقابل را حل کنید : **۲۰ نمره**

$$\begin{cases} D^{2}x+Dy=e^{3t} \\ (D-1)x+(D+1)y=0 \end{cases}$$

سوال۶- محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

الف) $L\{\int_{0}^{t}e^{x}\cos x\,dx\}$ ب) $L^{-1}\{\frac{e^{-2s}(s^{2}+1)}{(s^{2}+2s+5)(s+2)}\}$

سوال۷- معادله دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید : **۱۵ نمره**

$$x''+2x'+x=2e^{-t}\quad;\quad x(0)=3\ ,\ x'(0)=-3$$

موفق باشید

سوال ۱- این معادله فاقد x است بنابر این با تغییر متغیر $y'=u$ و $y''=u(du/dy)$ به یک معادله مرتبه اول تبدیل می شود.

$$yuu'-u^{۲}=y^{۲}u \to u'-\frac{۱}{y}u=y \to u=e^{-\int\frac{-۱}{y}dy}(c+\int y^{۳}e^{\int\frac{-۱}{y}dy}dy)=e^{\ln y}(c+\int ye^{-\ln y}dy)=y(c+\int dy)=y(c+y)$$

$$\to y'=y(c+y) \to \frac{dy}{y(c+y)}=dx \to \frac{۱}{c}(\frac{۱}{y}-\frac{۱}{c+y})dy=dx \to \ln y-\ln(c+y)=cx+c_{۱} \to \ln\frac{y}{c+y}=cx+c_{۱}$$

$$\to \frac{y}{c+y}=e^{cx+c_{۱}} \to y=\frac{ce^{cx+c_{۱}}}{۱-e^{cx+c_{۱}}} \qquad \to \qquad y=\frac{c}{be^{-cx}-۱}$$

سوال۲- برای حل این معادله باید از روش تغییر پارامتر استفاده کنیم. برای این کار ابتدا معادله همگن نظیر آن یعنی $y''+\frac{۱}{x}y'-\frac{۱}{x^{۲}}y=۰$ را حل می کنیم. اگر معادله را به صورت $x^{۲}y''+xy'-y=۰$ بنویسیم یک معادله اویلر است که معادله مشخصه آن عبارت است از $m(m-۱)+m-۱=۰$ این معادله دو ریشه $m=\pm۱$ دارد پس $y_h=c_{۱}x+c_{۲}x^{-۱}$

اکنون داریم $h(x)=\frac{۱}{x^{۲}+x^{۳}}$, $w(y_{۱},y_{۲})=\frac{-۲}{x}$, $y_{۱}=x$, $y_{۲}=\frac{۱}{x}$ جواب خصوصی معادله عبارت است از :

$$y_p=x\int\frac{-۱}{x}\times\frac{۱}{x^{۲}+x^{۳}}\times\frac{x}{-۲}dx+\frac{۱}{x}\int x\times\frac{۱}{x^{۲}+x^{۳}}\times\frac{x}{-۲}dx=\frac{x}{۲}\int\frac{۱}{x^{۲}(۱+x)}dx-\frac{۱}{۲x}\int\frac{۱}{۱+x}dx$$

$$=\frac{x}{۲}\int(\frac{-۱}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{۱+x})dx-\frac{۱}{۲x}\int\frac{۱}{۱+x}dx=\frac{x}{۲}(-\ln x-\frac{۱}{x}+\ln(۱+x))-\frac{۱}{۲x}\ln(۱+x)$$

$$\to \quad y_p=\frac{x}{۲}\ln\frac{x+۱}{x}-\frac{۱}{۲x}\ln(x+۱)-\frac{۱}{۲} \quad \to \quad y_g=c_{۱}x+\frac{c_{۲}}{x}+\frac{x}{۲}\ln\frac{x+۱}{x}-\frac{۱}{۲x}\ln(x+۱)-\frac{۱}{۲}$$

سوال۳- برای محاسبه جواب معادله همگن داریم $D^{۲}y+۴Dy+۸y=۰$ و یا $(D^{۲}+۴D+۸)y=۰$ بنابر این باید $D^{۲}+۴D+۸=۰$ یعنی $D=-۲\pm۲i$ و در نتیجه : $y_h=e^{-۲x}(A\sin۲x+B\cos۲x)$

اکنون جواب خصوصی معادله را محاسبه می کنیم : $D^{۲}y+۴Dy+۸y=x^{۲}+۲x+\sin^{۲}x$

$$\to y_p=\frac{۱}{D^{۲}+۴D+۸}(x^{۲}+۲x+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos۲x) \to y_p=\frac{۱}{D^{۲}+۴D+۸}(x^{۲}+۲x+\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{D^{۲}+۴D+۸}\cos۲x$$

$$\to y_p=(\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۱۶}D+\frac{۱}{۶۴}D^{۲}-\cdots)(x^{۲}+۲x+\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{-۴+۴D+۸}\cos۲x$$

$$=(\frac{۱}{۸}x^{۲}+\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۸}x-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳۲})-\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{D+۱}\cos۲x=(\frac{۱}{۸}x^{۲}+\frac{۱}{۸}x-\frac{۱}{۳۲})-\frac{۱}{۸}\times\frac{D-۱}{D^{۲}-۱}\cos۲x$$

$$=(\frac{۱}{۸}x^{۲}+\frac{۱}{۸}x-\frac{۱}{۳۲})-\frac{۱}{۸}\times\frac{D-۱}{-۵}\cos۲x=\frac{۱}{۳۲}(۴x^{۲}+۴x-۱)-\frac{۱}{۴۰}(۲\sin۲x+\cos۲x)$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g=e^{-۲x}(A\sin۲x+B\cos۲x)+\frac{۱}{۳۲}(۴x^{۲}+۴x-۱)-\frac{۱}{۴۰}(۲\sin۲x+\cos۲x)$

سوال۴- چون $p(x)=۰$ و $q(x)=\frac{-۴}{x(۱-x)}$ پس $x=۰$ یک نقطه غیرعادی معادله است. اما $\lim_{x\to۰}p(x)=۰$ و $\lim_{x\to۰}x^{۲}q(x)=۰$

نقطه $x=۰$ یک نقطه غیر عادی منظم است و معادله مشخصه عبارت است از $r(r-۱)=۰$ این معادله دو ریشه $r_{۱}=۱$ $r_{۲}=۰$ دارد.

طبق قضیه معادله جوابی به صورت سری فروبنیوس $a_{۰}\neq۰$, $y_{۱}=x\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ دارد و چون $r_{۱}-r_{۲}=۱$ عددی طبیعی است،

جواب دوم آن به صورت $y_۲ = cy_۱ \ln x + \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$ خواهد بود. $y_۱$ را محاسبه می کنیم. داریم : $y_۱'' = \sum_{n=۰}^{\infty} (n+۱)na_n x^{n-۱}$

$$x(۱-x)\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)na_n x^{n-۱} - ۴\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۱} = ۰ \;\rightarrow\; \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)na_n x^{n} - \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)na_n x^{n+۱} - ۴\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۱} = ۰$$

$$\rightarrow\; \sum_{n=۱}^{\infty}(n+۱)na_n x^{n} - \sum_{n=۱}^{\infty}n(n-۱)a_{n-۱} x^{n} - ۴\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n-۱} x^{n} = ۰ \;\rightarrow\; \sum_{n=۱}^{\infty}[(n+۱)na_n - (n^۲-n+۴)a_{n-۱}]x^n = ۰$$

$$\rightarrow\; (n+۱)na_n - (n^۲-n+۴)a_{n-۱} = ۰ \;,\; n = ۱,۲,۳,\cdots \;\rightarrow\; a_n = \frac{n^۲-n+۴}{(n+۱)n}a_{n-۱} \;,\; n=۱,۲,۳,\cdots$$

$$\rightarrow\; a_۱ = ۲a_۰ \;,\; a_۲ = a_۱ = ۲a_۰ \;,\; a_۳ = \frac{۵}{۶}a_۲ = \frac{۵}{۳}a_۰ \;,\; a_۴ = \frac{۴}{۵}a_۳ = \frac{۴}{۳}a_۰ \;,\; a_۵ = \frac{۴}{۵}a_۴ = \frac{۱۶}{۱۵}a_۰ \;,\; \cdots$$

$$\rightarrow \qquad y_۱ = a_۰(x + ۲x^۲ + ۲x^۳ + \frac{۵}{۳}x^۴ + \frac{۴}{۳}x^۵ + \frac{۱۶}{۱۵}x^۶ + \cdots)$$

سوال ۵-

$$\begin{matrix} (D+۱) \\ -D \end{matrix}\begin{cases} D^۲x + Dy = e^{۳t} \\ (D-۱)x + (D+۱)y = ۰ \end{cases} \rightarrow (D^۳+D)x = ۴e^{۳t}$$

$$D^۳ + D = ۰ \rightarrow D_{۱,۲} = \pm iD_۱ = ۰ \,,\, D_۳ = ۰ \rightarrow x_h = a\sin t + b\cos t + c \quad , \quad D^۳ + D \neq ۰ \rightarrow x_p = \frac{۴}{D^۳+D}e^{۳t} = \frac{۲}{۱۵}e^{۳t}$$

$$\rightarrow\; x_g = a\sin t + b\cos t + c + \frac{۲}{۱۵}e^{۳t}$$

اگر x_g را در معادله اول قرار دهیم داریم $-a\sin t - b\cos t + \frac{۶}{۵}e^{۳t} + Dy = e^{۳t} \rightarrow y_g = b\sin t - a\cos t - \frac{۱}{۱۵}e^{۳t} + c'$

اگر این جوابها را در معادله دوم قرار دهیم داریم $c = c'$ پس جواب عمومی دستگاه معادلات عبارت است از :

$$x_g = a\sin t + b\cos t + \frac{۲}{۱۵}e^{۳t} + c \quad , \quad y_g = b\sin t - a\cos t - \frac{۱}{۱۵}e^{۳t} + c$$

سوال ۶- الف) طبق فرمول : $L\{\int_۰^t e^x \cos x\, dx\} = \frac{۱}{s}L\{e^x\cos x\} = \frac{۱}{s} \times \frac{s-۱}{(s-۱)^۲+۱}$

ب) $\frac{s^۲+۱}{(s^۲+۲s+۵)(s+۲)} = \frac{۱}{s+۲} - \frac{۲}{s^۲+۲s+۵} = \frac{۱}{s+۲} - \frac{۲}{(s+۱)^۲+۴} = L\{e^{-۲t} - e^{-t}\sin ۲t\}$

$$L^{-۱}\{\frac{e^{-۲s}(s^۲+۱)}{(s^۲+۲s+۵)(s+۵)}\} = u_۲(t)[e^{-۲(t-۲)} - \sin ۲(t-۲)] = u_۲(t)[e^۴e^{-۲t} - \sin(۲t-۴)]$$

سوال ۷- $L\{x'' + ۲x' + x\} = L\{۲e^{-t}\} \;\rightarrow s^۲L\{x\} - ۳s + ۳ + ۲(sL\{x\} - ۳) + L\{x\} = \frac{۲}{s+۱}$

$$(s^۲ + ۲s + ۱)L\{x\} = \frac{۲}{s+۱} + ۳s + ۳ \;\rightarrow\; L\{x\} = \frac{۲}{(s+۱)^۳} + \frac{۳}{s+۱} = L\{t^۲e^{-t} + ۳e^{-t}\} \;\rightarrow\; x(t) = (۳+t^۲)e^{-t}$$