نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده رياضي

گروه آموزشی : **رياضي**

تاریخ : **۱۳۹۲/۸/۱۴**

وقت : **۷۵** دقیقه

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۷ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۳**- ۱۳۹۲

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ – معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای $y = ae^{4x} + be^{-x}$ را بنویسید. ۱۵ نمره

سوال ۲ – معادله دیفرانسیل $\sqrt{x}\, y' = 2\sqrt{-x+y}$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال ۳ – معادله مرتبه اول $ydx + (x^3 \cos y - x)dy = 0$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال ۴ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. ۱۵ نمره

$$(\sin y - 2ye^{-x}\sin x)dx + (\cos y + 2e^{-x}\cos x)dy = 0$$

سوال ۵ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین بیابید. ۲۰ نمره

$$y'' + 4y = x(e^{-x} + 1)$$

موفق باشید

جواب سوال۱ : روش اول : از طرفین رابطه دو بار مشتق می گیریم. $y' = 4ae^{4x} - be^{-x}$ و $y'' = 16ae^{4x} + be^{-x}$

از جمع طرفین دو تساوی داریم $y'' + y' = 20\, a\, e^{4x}$ یعنی : $a = \dfrac{y''+y'}{20} e^{-4x}$ و از تساوی اول داریم $y' = \dfrac{y''+y'}{5} - be^{-x}$

یعنی : $b = \dfrac{y''-4y'}{5} e^{x}$ اگر مقادیر a و b را در معادله اصلی قرار دهیم داریم : $y = \dfrac{y''+y'}{20} + \dfrac{y''-4y'}{5}$

این معادله را می توان به صورت $y'' - 3y' - 4y = 0$ نوشت.

روش دوم : می نویسیم $ye^{x} = ae^{5x} + b$ و از طرفین مشتق می گیریم. $y'e^{x} + ye^{x} = 5ae^{5x}$

اکنون داریم $\dfrac{y'+y}{5} e^{-4x} = a$ باز هم از طرفین مشتق می گیریم : $\dfrac{(y''+y')e^{-4x} - 4(y'+y)e^{-4x}}{5} = 0$

و در نتیجه $(y'' - 3y' - 4y)e^{-4x} = 0$ و یا $y'' - 3y' - 4y = 0$

جواب سوال۲ : می‌نویسیم $y' = 2\sqrt{\dfrac{-x+y}{x}}$ بنابر این یک معادله دیفرانسیل همگن است. تغییر متغیر $y = xu$ را به کار می بریم.

$$u + xu' = 2\sqrt{-1+u} \;\to\; x\frac{du}{dx} = 2\sqrt{-1+u} - u \;\to\; \frac{du}{2\sqrt{-1+u} - u} = \frac{dx}{x} \;\to\; \int \frac{du}{2\sqrt{-1+u} - u} = \int \frac{dx}{x}$$

برای حل انتگرال از تغییر متغیر $t^2 = -1+u$ استفاده می‌کنیم.

$$\to \int \frac{2t\,dt}{2t - (1+t^2)} = \int \frac{dx}{x} \quad \to \int \frac{-2t\,dt}{(t-1)^2} = \int \frac{dx}{x} \quad \to \int \left(\frac{-2}{t-1} - \frac{2}{(t-1)^2}\right)dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\to\; -2\ln(t-1) + \frac{2}{t-1} = \ln x + c \xrightarrow{t=\sqrt{-1+u}} \frac{2}{\sqrt{-1+u} - 1} = 2\ln[\sqrt{x}(\sqrt{-1+u} - 1)] + c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-x+y} - \sqrt{x}} = \ln(\sqrt{-x+y} - \sqrt{x}) + c$$

جواب سوال۳ : روش اول : اگر معادله را به صورت $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{x^3 \cos y - x}{y} = 0$ بنویسیم داریم $x' - \dfrac{1}{y}x = -\dfrac{\cos y}{y} x^3$

که یک معادله برنولی بر حسب x است. طرفین معادله را بر x^3 تقسیم می کنیم : $\dfrac{x'}{x^3} - \dfrac{1}{y} \times \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{\cos y}{y}$

با اعمال تغییر متغیر $u = \dfrac{1}{x^2}$ داریم $-\dfrac{1}{2}u' - \dfrac{1}{y}u = -\dfrac{\cos y}{y}$ و یا $u' + \dfrac{2}{y}u = \dfrac{2\cos y}{y}$ که یک معادله خطی مرتبه اول است.

$\mu = e^{\int \frac{2}{y}dy} = y^2$ و $u = y^{-2}(c + \int y^2 (\dfrac{2\cos y}{y})dy) = y^{-2}(c + \int 2y\cos y\, dy) = y^{-2}(c + 2y\sin y + 2\cos y)$

پس $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2}(c + 2y\sin y + 2\cos y)$ یعنی : $y^2 = x^2(c + 2y\sin y + 2\cos y)$

روش دوم : اگر معادله را به صورت $x^3 \cos y\, dy = x\,dy - y\,dx$ بنویسیم خواهیم داشت :

$$x^3 \cos y\, dy = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) \;\to\; \cos y\, dy = \frac{1}{x} d\left(\frac{y}{x}\right) \to\; y\cos y\, dy = \frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right)$$

با اعمال تغییر متغیر $u = \dfrac{y}{x}$ داریم $y\cos y\, dy = u\,du$ که یک معادله جدایی پذیر است :

$$y\sin y + \cos y + a = \frac{u^2}{2} \to u^2 = 2y\sin y + 2\cos y + c \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} y^2 = x^2(2y\sin y + 2\cos y + c)$$

جواب سوال۴ : داریم :

$$M = \sin y - ۲ y e^{-x} \sin x \ , \quad N = \cos y + ۲ e^{-x} \cos x$$

$$M_y = \cos y - ۲ e^{-x} \sin x \ , \ N_x = -۲ e^{-x} \cos x - ۲ e^{-x} \sin x$$

این معادله کامل نیست اما چون $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\cos y + ۲e^{-x}\cos x}{\cos y + ۲e^{-x}\cos x} = ۱$ مستقل از y است بنابر این یک عامل انتگرالساز یک متغیره بر حسب x دارد.

داریم $\mu = e^{\int dx} = e^x$ و با ضرب این عامل انتگرالساز در طرفین معادله داریم :

$$(e^x \sin y - ۲ y \sin x)dx + (e^x \cos y + ۲ \cos x)dy = ۰$$

که یک معادله کامل است و جواب آن عبارت است از : $e^x \sin y + ۲ y \cos x = c$

جواب سوال۵ : معادله مشخصه معادله همگن عبارت است از $m^۲ + ۴ = ۰$ که دو ریشه مختلط $m = \pm ۲i$ دارد.

یعنی جواب معادله همگن برابر است با : $y_h = A \sin ۲x + B \cos ۲x$

برای یافتن جواب خصوصی به کمک روش ضرایب نامعین فرض می کنیم $y_{p_۱} = (ax+b)e^{-x}$ و $y_{p_۲} = cx + d$

و داریم : $y''_{p_۱} = (ax + b - ۲a)e^{-x}$ و $y''_{p_۲} = ۰$

$$y = y_{p_۱} \rightarrow y''_{p_۱} + ۴ y_{p_۱} = (۵axe^{-x} - ۲a + ۵b) = xe^{-x} \ \rightarrow \ ۵a = ۱, \ -۲a + ۵b = ۰$$

$$\rightarrow \ a = \frac{۱}{۵} \ , \ b = \frac{۲}{۲۵} \qquad \rightarrow \ y_{p_۱} = \frac{۱}{۲۵}(۵x + ۲)e^{-x}$$

$$y = y_{p_۲} \ \rightarrow \ y''_{p_۲} + ۴ y_{p_۲} = ۴cx + ۴d = x \ \rightarrow \ c = \frac{۱}{۴} \ , \ d = ۰ \ \rightarrow \ y_{p_۲} = \frac{۱}{۴}x$$

و جواب عمومی معادله برابر است با : $y_g = y_h + y_{p_۱} + y_{p_۲} = A \sin ۲x + B \cos ۲x + \frac{۱}{۲۵}(۵x+۲)e^{-x} + \frac{۱}{۴}x$

سیدرضا موسوی