کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۶ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/**دوم**) **۹۲-۱۳۹۱** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۲/۳/۵** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای $3x^2y + y^3 = c$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2xy'' + (1-4x)y' + (2x-1)y = e^x$ را بیابید. **۱۵ نمره**
می دانیم که $y_1 = e^x$ یک جواب معادله همگن نظیر معادله فوق است.

سوال۳- معادله دیفرانسیل زیر را به کمک عملگر D حل کنید. **۲۰ نمره**

$$y'' + 4y = x^2 + \sin 2x$$

سوال۴- جواب معادله دیفرانسیل $y'' + xy' + y = e^x \;;\; y(0) = 3 \;,\; y'(0) = 2$ **۲۰ نمره**
را به صورت سری حول نقطه $x = 0$ بنویسید. (۵ جمله اول سری کافی است.)

سوال۵- تابع f را چنان بیابید که داشته باشیم : $\int_0^t (t-u)^3 f(u)\,du = t^5$ **۱۵ نمره**

سوال۶- محاسبه کنید : **۱۵ نمره**

الف) $L\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 5}\}$ ب) $L^{-1}\{\ln\dfrac{s+13}{s+92}\}$

سوال۷- معادله دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید : **۲۰ نمره**

$$t\,x'' + t\,x' - x = 0 \quad ; \quad x(0) = 0 \,,\, x'(0) = 2$$

موفق باشید

سوال ۱- ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای $3x^2y+y^3=c$ را می نویسیم: $6xy+3x^2y'+3y^2y'=0$ و یا $y'=\dfrac{-2xy}{x^2+y^2}$.

پس معادله دیرانسیل مسیرهای قائم بر آن عبارت است از : $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ که یک معادله همگن است. اگر $y=xu$ آنگاه

$u+xu'=\frac{1}{2}(\frac{1}{u}+u)$ که یک معادله جدایی پذیر است. داریم : $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{2u}{1-u^2}du$

یعنی $\ln x=c-\ln(1-u^2)$ و یا $x(1-u^2)=c_1$ و در نتیجه : $\boxed{x^2-y^2=c_1x}$

سوال ۲- ابتدا جواب دوم (مستقل خطی) معادله همگن را به کمک فرمول آبل محاسبه می کنیم.

معادله همگن نظیر را به صورت $y''+\dfrac{1-4x}{2x}y'+\dfrac{2x-1}{2x}y=0$ می نویسیم و داریم : $-\int\dfrac{1-4x}{2x}dx=-\frac{1}{2}\ln x+2x$

$$y_1=e^x\quad,\quad y_2=e^x\int e^{-2x}e^{-\frac{1}{2}\ln x+2x}dx=e^x\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\,e^x\ \ ,\ w(y_1,y_2)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\ ,\ h(x)=\frac{e^x}{2x}$$

$$y_p=e^x\int\frac{-2\sqrt{x}\,e^x}{e^{2x}/\sqrt{x}}\times\frac{e^x}{2x}dx+2\sqrt{x}e^x\int\frac{e^x}{e^{2x}/\sqrt{x}}\times\frac{e^x}{2x}dx=-e^x\int dx+2\sqrt{x}e^x\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}=-xe^x+2xe^x=xe^x$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $\boxed{y_g=(c_1+c_2\sqrt{x}+x\ )e^x}$

سوال ۳- برای محاسبه جواب معادله همگن داریم $D^2y+4y=0$ و یا $(D^2+4)y=0$ بنابر این باید $D^2+4=0$ یعنی $D=\pm 2i$

و در نتیجه : $y_h=A\sin 2x+B\cos 2x$

اکنون جواب خصوصی معادله را محاسبه می کنیم : $D^2y+4y=x^2+\sin 2x$

$$\to\ y_p=\frac{1}{D^2+4}(x^2+\sin 2x)\ \to\ y_p=\frac{1}{D^2+4}(x^2)+\frac{1}{D^2+4}\sin 2x$$

$$\to\ \frac{1}{D^2+4}(x^2)=(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}D^2+\cdots)(x^2)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{D^2+4}\sin 2x=\frac{1}{D^2+4}\mathrm{Im}(e^{2ix})=\mathrm{Im}(\frac{1}{D^2+4}e^{2ix})=\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2+4}(1))=\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{D^2+4iD}(1))$$

$$=\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{4iD}\frac{1}{1+D/4i}(1))=\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{4iD}(1-\frac{D}{4i}+\cdots)(1))=\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{4iD}(1))=\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{x}{4i})=-\frac{x}{4}\cos 2x$$

$$y_p=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}-\frac{x}{4}\cos 2x\qquad\to\qquad\boxed{y_g=A\sin 2x+B\cos 2x+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}-\frac{x}{4}\cos 2x}$$

سوال ۴- چون $x=0$ یک نقطه عادی معادله است. معادله جوابی به صورت سری توانی $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارد. این جواب را در معادله

قرار می دهیم : $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=e^x$

$$\to\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ \to\ \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\to\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=\frac{1}{n!}\ ,\ n=0,1,2,3,\cdots\ \to\ a_{n+2}=\frac{-1}{n+2}a_n+\frac{1}{(n+2)\,!}\ ,\ n=0,1,2,3,\cdots$$

$$\rightarrow \quad a_{۲}=-\frac{۱}{۲}a_{۰}+\frac{۱}{۲}\,,\ a_{۳}=\frac{-۱}{۳}a_{۱}+\frac{۱}{۶}\ ,\ a_{۴}=\frac{-۱}{۴}a_{۲}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۱}{۸}a_{۰}-\frac{۱}{۱۲},\ \cdots$$

$$\rightarrow \quad y=a_{۰}+a_{۱}x+(-\frac{۱}{۲}a_{۰}+\frac{۱}{۲})x^{۲}+(\frac{-۱}{۳}a_{۱}+\frac{۱}{۶})x^{۳}+(\frac{۱}{۸}a_{۰}-\frac{۱}{۱۲})x^{۴}+\cdots$$

اکنون به کمک شرایط اولیه $y(۰)=۳\ ,\ y'(۰)=۲$ داریم و در نتیجه : $\boxed{y=۳+۲x-x^{۲}-\frac{۱}{۲}x^{۳}+\frac{۷}{۲۴}x^{۴}+\cdots}$

روش دوم : جواب معادله به صورت $y=a_{۰}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}+a_{۳}x^{۳}+a_{۴}x^{۴}+\cdots$ است و با توجه به شرایط اولیه داریم :

$$y=۳+۲x+a_{۲}x^{۲}+a_{۳}x^{۳}+a_{۴}x^{۴}+\cdots$$

این جواب را در معادله قرار می دهیم.

$$y''+xy'+y=(۲a_{۲}+۶a_{۳}x+۱۲a_{۴}x^{۲}+\cdots)+x(۲+۲a_{۲}x+۳a_{۳}x^{۲}+۴a_{۴}x^{۳}+\cdots)$$

$$+(۳+۲x+a_{۲}x^{۲}+a_{۳}x^{۳}+a_{۴}x^{۴}+\cdots)=۱+x+\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۶}x^{۳}+\frac{۱}{۲۴}x^{۴}+\cdots$$

$$(۲a_{۲}+۲)+(۶a_{۳}+۳)x+(۱۲a_{۴}+۳a_{۲}-\frac{۱}{۲})x^{۲}+\cdots=۰$$

$$\rightarrow\ ۲a_{۲}+۲=۰\ ,\ ۶a_{۳}+۳=۰\ ,۱۲a_{۴}+۳a_{۲}-\frac{۱}{۲}=۰,\ \cdots \rightarrow a_{۲}=-۱\,,\ a_{۳}=-\frac{۱}{۲}\,,\ a_{۴}=\frac{۷}{۲۴}\,,\ \cdots$$

و در نتیجه : $\boxed{y=۳+۲x-x^{۲}-\frac{۱}{۲}x^{۳}+\frac{۷}{۲۴}x^{۴}+\cdots}$

سوال۵- از طرفین تساوی تبدیل لاپلاس می گیریم :

$$L\{\int_{۰}^{t}(t-u)^{۳}f(u)du\}=L\{t^{۵}\}\ \rightarrow L\{t^{۳}\}L\{f\}=\frac{۵!}{s^{۶}}\ \rightarrow\ \frac{۳!}{s^{۴}}L\{f\}=\frac{۵!}{s^{۶}}\rightarrow\ L\{f\}=\frac{۲۰}{s^{۲}}\ \rightarrow\ \boxed{f(t)=۲۰\,t}$$

سوال۶- الف)

$$\frac{۱}{s^{۲}+۲s+۵}=\frac{۱}{(s+۱)^{۲}+۴}=L\{\frac{۱}{۲}e^{-t}\sin ۲t\}$$

$$\rightarrow\quad L^{-۱}\{\frac{e^{-\pi s}}{s^{۲}+۲s+۵}\}=H(t-\pi)\times\frac{۱}{۲}e^{-(t-\pi)}\sin ۲(t-\pi)=\frac{۱}{۲}e^{\pi}H(t-\pi)e^{-t}\sin ۲t$$

ب) اگر $L\{f(t)\}=\ln\frac{s+۱۳}{s+۹۲}$ آنگاه $L\{tf(t)\}=-L'\{f(t)\}$ اما $L'\{f(t)\}=\frac{۱}{s+۱۳}-\frac{۱}{s+۹۲}=L\{e^{-۱۳t}-e^{-۹۲t}\}$

یعنی $L\{t\,f(t)\}=-L\{e^{-۱۳t}-e^{-۹۲t}\}$ و بنابر این : $\boxed{L^{-۱}\{\ln\frac{s+۱۳}{s+۹۲}\}=\frac{-e^{-۱۳t}+e^{-۹۲t}}{t}}$

سوال۷- $L\{t\,x''+t\,x'-x\}=۰ \rightarrow L\{t\,x''\}+L\{t\,x'\}-L\{x\}=۰\ \rightarrow -L'\{x''\}-L'\{x'\}-L\{x\}=۰$

$$(s^{۲}L\{x\}-x(۰)s-x'(۰))'+(sL\{x\}-x(۰))'+L\{x\}=۰\ \rightarrow\ ۲sL\{x\}+s^{۲}L'\{x\}+L\{x\}+sL'\{x\}+L\{x\}=۰$$

$$۲(s+۱)L\{x\}+s(s+۱)L'\{x\}=۰\ \rightarrow\ \frac{L'\{x\}}{L\{x\}}=\frac{-۲}{s}\ \rightarrow \ln L\{x\}=-۲\ln s+c\ \rightarrow\ L\{x\}=\frac{a}{s^{۲}}$$

$$\rightarrow x(t)=at\xrightarrow{x'(۰)=۲}\boxed{x(t)=۲t}$$

۱۳۹۲/۳/۵