کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۸ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۱-۱۳۹۰**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۰/۱۰/۲۰** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

نکات صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- جواب عمومی معادله زیر را بیابید. **۱۵ نمره**

$$(\sin^{۲} x - y)dx - \tan x\, dy = ۰$$

سوال۲- جواب معادله دیفرانسیل $y'' + ۲y' + ۵y = \dfrac{e^{-x}}{\cos ۲x}$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۳- معادله اویلر مقابل را حل کنید. $x^{۲}y'' - ۲y = \ln x$ **۱۵ نمره**

سوال۴- جواب معادله $(x-۱)y'' - xy' + y = ۰$ را به صورت سری حول نقطه $x_{۰} = ۰$ بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۵- دستگاه معادلات مقابل را کنید. **۲۰ نمره**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos t - x \end{cases}$$

سوال۶- معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. **۲۰ نمره**

$$x'' + ۲x' + x = t\,e^{-t} \quad , \quad x(۰) = ۱, x'(۰) = ۲$$

سوال۷- مطلوب است حل معادله انتگرالی زیر : **۱۵ نمره**

$$x(t) = ۱ + ۲\int_{۰}^{t} \cos(t-u)x(u)du$$

موفق باشید

جواب سوال۱ - داریم : $M = \sin^2 x - y \, , N = \tan x \;\to M_y = -1 \, , N_x = -1 - \tan^2 x$

معادله کامل نیست. اما $(M_y - N_x)/N = -\tan x$ مستقل از y است و تابع $\mu = e^{\int -\tan x dx} = e^{\ln\cos x} = \cos x$ یک عامل انتگرالساز معادله است. طرفین را در μ ضرب می کنیم. معادله $(\cos x \sin^2 x - y\cos x)dx - \sin x\, dy = 0$ یک معادله کامل است و جواب آن عبارت است از $\frac{1}{3}\sin^3 x - y\sin x = c$ و یا $y = \frac{1}{3}\sin^2 x - \frac{c}{\sin x}$.

جواب سوال ۲- ابتدا معادله همگن $y'' + 2y' + 5y = 0$ را حل می کنیم که یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه عبارت است از $m^2 + 2m + 5 = 0$ که دارای دو ریشه مختلط $m = -1 \pm 2i$ است و جواب معادله همگن برابر است با

$$y_h = e^{-x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$$

اکنون برای استفاده از روش تغییر پارامتر داریم : $y_1 = e^{-x}\sin 2x$ ، $y_2 = e^{-x}\cos 2x$ ، $h(x) = e^{-x}/\cos 2x$

و همچنین خواهیم داشت : $w(y_1, y_2) = -2e^{-2x}$ به کمک y_h داریم : $y_p = e^{-x}(u\sin 2x + v\cos 2x)$ که در آن

$$u = -\int \frac{y_2 h}{w(y_1, y_2)}dx = -\int \frac{e^{-2x}}{-e^{-2x}}dx = x \quad \text{و} \quad v = \int \frac{y_1 h}{w(y_1, y_2)}dx = \int \frac{e^{-2x}\tan 2x}{-e^{-2x}}dx = -\int \tan 2x dx = \frac{1}{2}\ln\cos 2x$$

در نتیجه $y_p = uy_1 + vy_2 = e^{-x}(x\sin 2x + \frac{1}{2}(\ln\cos 2x)\cos 2x)$ و جواب عمومی معادله عبارت است از :

$$y_g = e^{-x}[(x + A)\sin 2x + (\frac{1}{2}\ln\cos 2x + B)\cos 2x]$$

جواب سوال ۳ – الف): روش اول : با تغییر متغیر $x = e^t$ داریم $x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$ در نتیجه $\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = t$ که یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه آن $m^2 - m - 2 = 0$ و ریشه های آن عبارتند از $m_1 = -1$ و $m_2 = 2$ جواب معادله همگن $y_h = Ae^{-t} + Be^{2t}$. به کمک روش ضرایب نامعین جواب خصوصی به صورت $y_p = at + b$ خواهد بود و پس از جایگذاری در معادله نا همگن داریم $-2at - (a + 2b) = t$ و در نتیجه $a = \frac{-1}{2}$ و $b = \frac{1}{4}$

جواب عمومی معادله ناهمگن عبارت است از : $y_g = Ae^{-t} + Be^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$

پس جواب معادله اویلر اولیه برابر است با : $y_g = \frac{A}{x} + Bx^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$

روش دوم : معادله مشخصه معادله اویلر همگن برابر $r^2 + (0 - 1)r - 2 = 0$ و ریشه‌های آن عبارتند از $r_1 = -1$ و $r_2 = 2$ پس جواب معادله همگن برابر $y_h = Ax^{-1} + Bx^2$ است. برای جواب خصوصی معادله غیر همگن می توان از روش تغییر پارامتر استفاده کرد.

$$y_1 = x^{-1} \, , \; y_2 = x^2 \, , h = x^{-2}\ln x \, , w(y_1, y_2) = 3$$

$$\to u = -\int \frac{\ln x}{3}dx = -\frac{1}{3}(x\ln x - x) \, , v = \int \frac{x^{-3}\ln x}{3}dx = \frac{-x^{-2}}{12}(2\ln x + 1)$$

$$y_p = uy_1 + vy_2 = -\frac{1}{3}(\ln x - 1) - \frac{1}{12}(2\ln x + 1) = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$$

$$\to y_g = \frac{A}{x} + Bx^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$$

جواب سوال ۴ - داریم : $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ,\ y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\ ,\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

در معادله قرار می دهیم : $(x-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\,a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$(-2a_2+a_0)-\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)n\,a_{n+1}+(n-1)a_n]x^n=0$$

$$-2a_2+a_0=0\quad,\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)n\,a_{n+1}+(n-1)a_n=0\ ,\ n=1,2,3,\cdots$$

$$a_2=\frac{1}{2}a_0\ \ ,\ \ a_{n+2}=\frac{n}{n+2}a_{n+1}-\frac{n-1}{(n+2)(n+1)}a_n\ \ ,\ n=1,2,3,\cdots$$

$$a_3=\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{6}a_0\ \ ,\ a_4=\frac{1}{2}a_3-\frac{1}{12}a_2=\frac{1}{12}a_0-\frac{1}{24}a_0=\frac{1}{24}a_0\ \ ,\ \ a_5=\frac{3}{5}a_4-\frac{1}{10}a_3=\frac{1}{40}a_0-\frac{1}{60}a_0=\frac{1}{120}a_0\ \ ,\cdots$$

$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{2}a_0x^2+\frac{1}{6}a_0x^3+\frac{1}{24}a_0x^4+\frac{1}{120}a_0x^5+\cdots\ \to\ y=a_0(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots)+a_1x$$

جواب سوال ۵ - روش اول : از معادله اول داریم $x''=y'+\mathbf{cos}\,t$ و به کمک معادله دوم خواهیم داشت $x''=\mathbf{cos}\,t-x+\mathbf{cos}\,t$ که یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت است. $x''+x=2\mathbf{cos}\,t$ جواب معادله همگن $x''+x=0$ برابر است با $x_h=A\mathbf{sin}\,t+B\mathbf{cos}\,t$ و به کمک روش ضرایب نامعین، جواب خصوصی برابر است با $x_p=t(a\mathbf{sin}\,t+b\mathbf{cos}\,t)$ که پس از جایگذاری در معادله داریم : $2(a\mathbf{cos}\,t-b\mathbf{sin}\,t)=2\mathbf{cos}\,t$ که نتیجه می دهد $a=1\,,b=0$

بنابر این جواب عمومی معادله برابر است با : $x_g=(A+t)\mathbf{sin}\,t+B\mathbf{cos}\,t$

اکنون از معادله اول داریم : $y_g=x'_g-\mathbf{sin}\,t=-B\mathbf{sin}\,t+(A+t)\mathbf{cos}\,t$

روش دوم : دستگاه معادله همگن $\begin{cases}x'=y\\ y'=-x\end{cases}$ دارای معادله مشخصه $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$ است که ریشه های آن عبارتند از $\lambda=\pm i$ و در نتیجه $\begin{cases}x_h=A\mathbf{sin}\,t+B\mathbf{cos}\,t\\ y_h=A'\mathbf{sin}\,t+B'\mathbf{cos}\,t\end{cases}$

و پس از جایگذاری در معادله $x'=y$ خواهیم داشت $A'=-B\ ,\ B'=A$ و داریم : $\begin{cases}x_h=A\mathbf{sin}\,t+B\mathbf{cos}\,t\\ y_h=-B\mathbf{sin}\,t+A\mathbf{cos}\,t\end{cases}$

برای یافتن جواب خصوصی به کمک ضرایب نامعین داریم $\begin{cases}x_p=(at+b)\mathbf{sin}\,t+(ct+d)\mathbf{cos}\,t\\ y_p=(a't+b')\mathbf{sin}\,t+(c't+d')\mathbf{cos}\,t\end{cases}$

و پس از جایگذاری در دستگاه معادلات غیر همگن خواهیم داشت :

$$\begin{cases}(-ct-d+a)\mathbf{sin}\,t+(at+b+c)\mathbf{cos}\,t=(a't+b'+1)\mathbf{sin}\,t+(c't+d')\mathbf{cos}\,t\\ (-c't-d'+a')\mathbf{sin}\,t+(a't+b'+c')\mathbf{cos}\,t=(-at-b)\mathbf{sin}\,t+(-ct-d+1)\mathbf{cos}\,t\end{cases}$$

بنابر این باید داشته باشیم : $-c=a'\ ,-d+a=b'+1\ ,\ a=c'\ ,\ b+c=d'\ ,-d'+a'=-b\ ,\ b'+c'=-d+1$

که نتیجه می دهد $a=c'=1$ ، $a'=c=0$ ، $b'=-d$ و $d'=b$ یعنی $\begin{cases}x_g=(t+b)\mathbf{sin}\,t+d\,\mathbf{cos}\,t\\ y_g=-d\,\mathbf{sin}\,t+(t+b)\mathbf{cos}\,t\end{cases}$

روش سوم : به کمک عملگر D مساله را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x' = y + \sin t \\ y' = \cos t - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Dx - y = \sin t \\ x + Dy = \cos t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D^{۲}x - Dy = \cos t \\ x + Dy = \cos t \end{cases} \rightarrow (D^{۲} + ۱)x = ۲\cos t$$

$$D^{۲} + ۱ = ۰ \rightarrow D = \pm i \rightarrow x_h = A\sin t + B\cos t$$

$$D^{۲} + ۱ \neq ۰ \rightarrow x_p = \frac{۱}{D^{۲}+۱}(۲\cos t) = \frac{۱}{D^{۲}+۱}\mathrm{Re}(۲e^{it}) = ۲\mathrm{Re}(\frac{۱}{D-i} \times \frac{۱}{D+i}e^{it})$$

$$= ۲\mathrm{Re}[\frac{۱}{D-i}(\frac{e^{it}}{۲i})] = \mathrm{Re}[\frac{۱}{i}\frac{۱}{D-i}(e^{it})] = \mathrm{Re}[\frac{e^{it}}{i}\frac{۱}{D}(۱)] = \mathrm{Re}[\frac{te^{it}}{i}] = t\sin t$$

$$\rightarrow \quad x_g = A\sin t + B\cos t + t\sin t$$

$$y_g = x'_g - \sin t \rightarrow \quad y_g = -B\sin t + A\cos t + t\cos t$$

جواب سوال ۶ -

$$L\{x'' + ۲x' + x\} = L\{te^{-t}\} \rightarrow L\{x''\} + ۲L\{x'\} + L\{x\} = -L'\{e^{-t}\}$$

$$s^{۲}L\{x\} - s - ۲ + ۲sL\{x\} - ۲ + L\{x\} = -(\frac{۱}{s+۱})' \rightarrow (s^{۲} + ۲s + ۱)L\{x\} = s + ۴ + \frac{۱}{(s+۱)^{۲}} \rightarrow L\{x\} = \frac{s+۴}{(s+۱)^{۲}} + \frac{۱}{(s+۱)^{۴}}$$

$$\rightarrow L\{x\} = \frac{۱}{s+۱} + \frac{۳}{(s+۱)^{۲}} + \frac{۱}{(s+۱)^{۴}} \quad \rightarrow \quad x = e^{-t} + ۳te^{-t} + \frac{۱}{۶}t^{۳}e^{-t} \rightarrow x(t) = \frac{۱}{۶}(t^{۳} + ۱۸t + ۶)e^{-t}$$

جواب سوال ۷ -

$$L\{x\} = L\{۱ + \int \cos(t-u)x(u)du\} \rightarrow L\{x\} = \frac{۱}{s} + L\{x\} \times \frac{s}{s^{۲}+۱} \rightarrow \frac{s^{۲} - s + ۱}{s^{۲}+۱}L\{x\} = \frac{۱}{s}$$

$$L\{x\} = \frac{s^{۲}+۱}{s(s^{۲}-s+۱)} \rightarrow L\{x\} = \frac{۱}{s} + \frac{۱}{s^{۲}-s+۱} = \frac{۱}{s} + \frac{۱}{(s-\frac{۱}{۲})^{۲} + \frac{۳}{۴}} \rightarrow x(t) = ۱ + e^{\frac{t}{۲}}\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t)$$

۱۳۹۰/۱۰/۲۰