کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۱ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/**دوم**) **۹۳-۱۳۹۲** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۳/۳/۱۸** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- تابع $y_1 = x$ یک جواب معادله مرتبه دوم زیر است. جواب عمومی آن را بیابید. **۱۵ نمره**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

سوال۲- جواب عمومی معادله اویلر $x^2y'' - 2y = \ln x$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۳- معادله مرتبه دوم $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\cos 2x}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴- یک جواب معادله دیفرانسیل $xy'' - 3y = 0$ را به صورت سری حول نقطه صفر و به ازای ریشه بزرگتر معادله مشخصه بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۵- دستگاه معادلات زیر را حل کنید : **۲۰ نمره**

$$\begin{cases} x'' + y' = -2\sin t \\ x' - y' - y = \sin t \end{cases}$$

سوال۶- محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

$$L\{\frac{\sin t}{t}\} \qquad\qquad L^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}s}{s^2+2s+26}\}$$

سوال۷- معادله انتگرالی $x(t) + \int_0^t e^{u-t}x(u)\,du = 2t - 3$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

سوال ۱- برای استفاده از روش کاهش مرتبه ، جواب دوم معادله را به صورت $y_2 = y_1 v = xv$ حدس زده و در معادله قرار می‌دهیم.
داریم $(1-x^2)(xv''+2v') - 2x(xv'+v) + 2xv = 0$ که نتیجه می دهد $(1-x^2)xv'' + (2-4x^2)v' = 0$
اکنون با فرض $u = v'$ به معادله جدایی پذیر $(1-x^2)xu' + (2-4x^2)u = 0$ می‌رسیم.

$$\frac{du}{u} = \frac{(2-4x^2)dx}{x(x^2-1)} = \left(\frac{-2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\to \ln u = -2\ln x - \ln(x-1) - \ln(x+1) \ \to u = v' = \frac{1}{x^2(x^2-1)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\to v = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} \ \to \ y_2 = 1 + \frac{x}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$$

و بالاخره جواب معادله خطی همگن داده شده برابر است با : $y = ax + b\left(2 + x\ln\frac{x-1}{x+1}\right)$

سوال۲- در معادله اویلر داده شده تغییر متغیر $x = e^t$ را اعمال می‌کنیم. یعنی قرار می‌دهیم : $xy' = \frac{dy}{dt}$, $x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$

$$x^2y'' - 2y = \ln x \ \to \ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = t \ \to \ y'' - y' - 2y = t$$

این یک معادله غیر همگن با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه معادله همگن نظیر آن عبارت است از $m^2 - m - 2 = 0$ که دو ریشه $m_1 = -1$ و $m_2 = 2$ دارد. جواب معادله همگن عبارت است از $y_h = ae^{-t} + be^{2t}$
جواب خصوصی آن را به صورت $y_p = At + B$ حدس زده و در معادله قرار می‌دهیم . داریم $-A - 2At - 2B = t$ که نتیجه می دهد $A = \frac{-1}{2}$ و $B = \frac{1}{4}$ یعنی $y_p = \frac{-1}{2}t + \frac{1}{4}$
اکنون جواب معادله با ضرایب ثابت به صورت $y = ae^{-t} + be^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ به دست آمده است و چون $x = e^t$
جواب معادله اویلر عبارت است از : $y = \frac{a}{x} + bx^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$

سوال۳- ابتدا معادله همگن نظیر معادله اصلی را حل می‌کنیم. یعنی $y'' + 2y' + 5y = 0$
معادله مشخصه عبارت است از $m^2 + 2m + 5 = 0$ که دو ریشه مختلط $m = -1 \pm 2i$ دارد یعنی

$$y_1 = e^{-x}\sin 2x \ , \ y_2 = e^{-x}\cos 2x$$

برای پیدا کردن جواب خصوصی از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم.

$$w(y_1, y_2) = e^{-x}\sin 2x(-e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x) - e^{-x}\cos 2x(-e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x) = -2e^{-2x}$$

$$y_p = -y_1\int \frac{y_2 h}{w}dx + y_2\int \frac{e^{-x}\cos 2x h}{w}dx = -e^{-x}\sin 2x\int \frac{e^{-x}\cos 2x}{-2e^{-2x}}\frac{e^{-x}}{\cos 2x}dx + e^{-x}\cos 2x\int \frac{e^{-x}\sin 2x}{-2e^{-2x}}\frac{e^{-x}}{\cos 2x}dx$$

$$= e^{-x}\sin 2x\int \frac{dx}{2} - e^{-x}\cos 2x\int \frac{\sin 2x}{2\cos 2x}dx = \frac{1}{2}xe^{-x}\sin 2x + \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x \ln\cos 2x$$

اکنون جواب عمومی معادله به صورت $y = e^{-x}\left(A\sin 2x + B\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln\cos 2x\right)$ به دست آمده است.

سوال۴- نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم معادله است زیرا اگر معادله را به صورت $y'' - \frac{3}{x}y = 0$ بنویسیم به وضوح $x=0$ یک نقطه غیر عادی است. اما چون حدهای $p_0 = 0$, $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-3}{x} = 0$ وجود دارند پس $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم معادله است. معادله مشخصه عبارت است از $r(r-1) - 0 \cdot r + 0 = 0$ و یا $r(r-1) = 0$ که دو ریشه $r_1 = 1$ و $r_2 = 0$ دارد. به ازای ریشه بزرگتر، جواب معادله را محاسبه می‌کنیم.

جواب را به صورت $y = x^1\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$, $a_0 \neq 0$ در نظر گرفته و در معادله قرار می‌دهیم. داریم :

$$x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,na_nx^{n-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0 \;\rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,na_nx^{n}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+1}x^{n+1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0 \;\rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+1}-3a_n]x^{n+1}=0$$

$$\rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+1}-3a_n=0\ ,\ n=0,1,2,\cdots \;\rightarrow\; a_{n+1}=\frac{3}{(n+2)(n+1)}a_n\ ,\ n=0,1,2,\cdots$$

$$a_1=\frac{3}{2}a_0\ ,\ a_2=\frac{3}{4}a_0\ ,a_3=\frac{3}{16}a_0\ ,a_4=\frac{9}{320}a_0\ ,a_5=\frac{9}{3200}a_0\ ,\cdots$$

$$y=x(a_0+\frac{3}{2}a_0x+\frac{3}{4}a_0x^2+\frac{3}{16}a_0x^3+\frac{9}{320}a_0x^4+\frac{9}{3200}a_0x^5+\cdots)$$

اکنون با فرض $a_0=1$ ، یک جواب معادله به صورت $y=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{16}x^4+\frac{9}{320}x^5+\frac{9}{3200}x^6+\cdots$ به دست می‌آید.

این جواب معادله را می‌توان به صورت $y=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!(n+1)!}x^n$ نیز نوشت.

سوال۵- برای حل دستگاه از عملگر D استفاده می‌کنیم :
$$\begin{cases}D^2x+Dy=-2\sin t\\ Dx-(D+1)y=\sin t\end{cases}$$

ابتدا دستگاه معادله همگن نظیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases}D^2x+Dy=0\\ Dx-(D+1)y=0\end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix}D^2 & D\\ D & -D-1\end{vmatrix}=-D^3-2D^2=0\rightarrow D_1=D_2=0\ ,D_3=-2$$

با توجه به ریشه های معادله مشخصه ، جواب دستگاه معادله همگن به صورت $\begin{cases}x_h=a+bt+ce^{-2t}\\ y_h=a'+b't+c'e^{-2t}\end{cases}$ است.

اگر این جواب را در دستگاه قرار دهیم داریم
$$\begin{cases}4ce^{-2t}+b'-2c'e^{-2t}=0\\ b-2ce^{-2t}-b'+2c'e^{-2t}-a'-b't-c'e^{-2t}=0\end{cases}$$

که نتیجه می دهد $b'=0\ ,\ c'=2c\ ,\ a'=b$ یعنی داریم $\begin{cases}x_h=a+bt+ce^{-2t}\\ y_h=b+2ce^{-2t}\end{cases}$

برای پیدا کردن جواب خصوصی می نویسیم :
$$\begin{matrix}(D+1)\\ D\end{matrix}\begin{cases}D^2x+Dy=-2\sin t\\ Dx-(D+1)y=\sin t\end{cases} \rightarrow (D^3+2D)x=-2\sin t-\cos t$$

$$x_p=\frac{1}{(D^3+2D^2)}(-2\sin t-\cos t)=\frac{1}{D+2}(2\sin t+\cos t)=\frac{2-D}{-D^2+4}(2\sin t+\cos t)$$

$$=\frac{2-D}{5}(2\sin t+\cos t)=\frac{1}{5}(4\sin t+2\cos t-2\cos t+\sin t)=\sin t$$

بطور مشابه :
$$\begin{matrix}\\ -D\end{matrix}\begin{cases}D^2x+Dy=-2\sin t\\ Dx-(D+1)y=\sin t\end{cases} \rightarrow (D^2+D)y=-2\sin t-\cos t$$

$$y_p=\frac{1}{D^2+2D}(-2\sin t-\cos t)=\frac{-1}{2D-1}(2\sin t+\cos t)=\frac{-2D-1}{4D^2-1}(2\sin t+\cos t)$$

$$=\frac{2D+1}{5}(2\sin t+\cos t)=\frac{1}{5}(4\cos t-2\sin t+2\sin t+\cos t)=\cos t$$

جواب عمومی دستگاه معادله عبارت است از :
$$\begin{cases}x_h=a+bt+ce^{-2t}+\sin t\\ y_h=b+2ce^{-2t}+\cos t\end{cases}$$

سوال ۶-

$$L\{\frac{\sin t}{t}\} = \int_s^\infty L\{\sin t\}ds = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds = \arctan s \,|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}$$

$$L^{-1}\{\frac{s}{s^2+2s+26}\} = L^{-1}\{\frac{s+1-1}{(s+1)^2+5^2}\} = L^{-1}\{\frac{s+1}{(s+1)^2+5^2} - \frac{1}{(s+1)^2+5^2}\} = e^{-t}[\cos 5t - \frac{1}{5}\sin 5t]$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}s}{s^2+2s+26}\} = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}[\cos 5(t-\pi) - \frac{1}{5}\sin 5(t-\pi)] = u_\pi(t)e^{\pi-t}[-\cos 5t + \frac{1}{5}\sin 5t]$$

سوال ۷- به کمک تبدیلات لاپلاس معادله را حل می‌کنیم. $L\{x\} + L\{\int_0^t e^{u-t}x(u)du\} = L\{2t-3\}$

$$L\{x\} + L\{e^{-t}\}L\{x\} = \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} \;\rightarrow\; (1+\frac{1}{s+1})L\{x\} = \frac{2-3s}{s^2} \;\rightarrow\; L\{x\} = \frac{2-3s}{s^2}\times\frac{s+1}{s+2}$$

$$\rightarrow\; L\{x\} = \frac{2-s-3s^2}{s^2(s+2)} = \frac{-2}{s+2} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \;\rightarrow\; x(t) = -2e^{-2t} + t - 1$$

۱۳۹۳/۳/۱۸