(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم) | کد فرم : **FR/FY/11**

دانشکده ریاضی | **ویرایش : صفر**

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۲ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/**دوم**) **۸۹–۱۳۸۸** نام مدرس:	
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۸۹/۳/۲۵** وقت : **۱۳۵** دقیقه	

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- ابتدا مقدار m را چنان بیابید که $y_1 = e^{mx}$ یک جواب معادله همگن

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

باشد و سپس جواب عمومی معادله غیرهمگن $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 e^{2x}$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^3 y''' + 2x^2 y'' = \sin \ln x$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۳- به کمک روش تغییر پارامتر، معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$$

سوال۴- جواب معادله دیفرانسیل $2x^2 y'' + x(2x-1)y' + y = 0$ را حول نقطه $x_0 = 0$ و به ازای ریشه کوچکتر معادله شاخص بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۵- دستگاه معادله مقابل را با استفاده از عملگر D حل کنید : **۲۰ نمره**

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + e^t \\ y' = x - y - e^t \end{cases}$$

سوال۶- توابع $f(t) = L^{-1}\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+1)}\}$ و $g(t) = L^{-1}\{\ln \dfrac{s+1}{s-1}\}$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۷- معادله انتگرالی زیر را حل کنید : **۲۰ نمره**

$$y(t) = 4t - 3\int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du$$

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل ۱۳۸۹/۳/۲۵

سوال ۱- ابتدا $y_1=e^{mx}$ را در معادله همگن قرار می دهیم :

$$xm^2e^{mx}-2(x+1)me^{mx}+(x+2)e^{mx}=0 \to [(m^2-2m+1)x+(-2m+2)]e^{mx}=0 \to (m-1)[(m-1)x-2]=0 \to m=1$$

پس $y_1=e^x$ یک جواب معادله همگن است. اکنون معادله غیر همگن را حل می کنیم.

روش اول : برای استفاده از فرمول آبل می نویسیم $y''-\frac{2(x+1)}{x}y'+\frac{x+2}{x}y=0$ و داریم : $y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\int\frac{-2(x+1)}{x}dx}dx$

یعنی $y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{2x+2\ln x}dx=e^x\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3e^x$ و جواب معادله همگن عبارت است از $y_h=(a+bx^3)e^x$.

برای یافتن جواب خصوصی از روش تغییر پارامتر استفاده می کنیم. داریم : $w(e^x,x^3e^x)=3x^2e^{2x}$

$$y_p=e^x\int\frac{-x^3e^x}{3x^2e^{2x}}x^2e^{2x}dx+x^3e^x\int\frac{e^x}{3x^2e^{2x}}x^2e^{2x}dx=-\frac{1}{3}e^x\int x^3e^xdx+\frac{1}{3}x^3e^x\int e^xdx$$

$$=-\frac{1}{3}e^x(x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x)+\frac{1}{3}x^3e^xe^x \quad\to\quad y_p=(x^2-2x+2)e^{2x}$$

و جواب عمومی عبارت است از : $y_g=(a+bx^3)e^x+(x^2-2x+2)e^{2x}$

روش دوم : از تغییر متغیر $y=y_1v=e^xv$ استفاده می کنیم. y را در معادله غیر همگن قرارمی دهیم :

$$x(v''+2v'+v)e^x-2(x+1)(v'+v)e^x+(x+2)ve^x=x^3e^{2x} \quad\to xv''-2v'=x^3e^x$$

اکنون یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به v' داریم : $v'=e^{-\int\frac{-2}{x}dx}(c+\int x^2e^xe^{\int\frac{-2}{x}dx}dx)$

$$\to v'=x^2(c+\int e^xdx)=cx^2+x^2e^x \to v=\frac{1}{3}cx^3+x^2e^x-2xe^x+2e^x+c_1 \to y_g=(c_1+\frac{c}{3}x^3)e^x+(x^2-2x+2)e^{2x}$$

سوال۲- این یک معادله اویلر است اما می توان آن را به معادله مرتبه اول نیز تبدیل کرد.

روش اول : با تغییر متغیر $y''=u$ به معادله مرتبه اول $x^3u'+2x^2u=\sin\ln x$ می رسیم که جواب آن عبارت است از :

$$u=e^{-\int\frac{2}{x}dx}(c+\int\frac{\sin\ln x}{x^3}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx)=\frac{1}{x^2}(c+\int\frac{\sin\ln x}{x}dx)=\frac{1}{x^2}(c-\cos\ln x) \quad\to\quad y''=\frac{c}{x^2}-\frac{\cos\ln x}{x^2}$$

$$y'=-\frac{c}{x}+\frac{1}{2}(-\frac{\sin\ln x}{x}+\frac{\cos\ln x}{x})+b \quad\to\quad y=-c\ln x+\frac{1}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+bx+a$$

روش دوم : با تغییر متغیر $x=e^t$ خواهیم داشت :

$$x^3y'''=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}=D(D-1)(D-2)y \quad،\quad x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=D(D-1)y \quad،\quad xy'=\frac{dy}{dt}=Dy$$

در نتیجه معادله به شکل $\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}=D^2(D-1)y=\sin t$ در می‌آید.

معادله شاخص معادله همگن عبارت است از $m^2(m-1)=0$ که نتیجه می دهد $y_h=a+bt+ce^t$

و همچنین : $y_p=\frac{1}{D^2(D-1)}\sin t=\frac{-1}{D-1}\sin t=\frac{-(D+1)}{D^2-1}\sin t=\frac{1}{2}(D+1)\sin t=\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$

و بالاخره جواب عمومی معادله اصلی برابر است با : $y_g=(a+b\ln x+cx)+\frac{1}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)$

روش سوم : معادله شاخص معادله همگن اویلر عبارت است از :

$$m(m-1)(m-2)+2m(m-1)=0 \to m^2(m-1)=0 \to y_h=a+b\ln x+cx$$

اکنون به کمک روش ضرایب نامعین حدس می زنیم : $y_p=A\sin\ln x+B\cos\ln x$ و داریم $y_p'=\frac{1}{x}(A\cos\ln x-B\sin\ln x)$

$$y_p'''=\frac{1}{x^3}((A+3B)\cos\ln x+(3A-B)\sin\ln x) \quad،\quad y_p''=\frac{1}{x^2}((-A-B)\cos\ln x+(-A+B)\sin\ln x)$$

پس از جایگذاری در معادله غیر همگن داریم : $(-A+B)\cos\ln x+(A+B)\sin\ln x=\sin\ln x$

که نتیجه می دهد $A=B=\frac{1}{2}$ یعنی $y_p=\frac{1}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)$

سوال۳- معادله شاخص معادله همگن برابر است با $m^2+2m+2=0$ یعنی $m=-1\pm i$ و در نتیجه جواب همگن عبارت است از :

$y_h=e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$ اکنون داریم $w(y_1,y_2)=w(e^{-x}\sin x,e^{-x}\cos x)=e^{-2x}\sin^2 x$

و در نتیجه

$$y_p=e^{-x}\sin x\int\frac{-e^{-x}\cos x}{-e^{-2x}}e^{-x}\sin x\,dx+e^{-x}\cos x\int\frac{e^{-x}\sin x}{-e^{-2x}}e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=e^{-x}\sin x\int\cos x\sin x\,dx-e^{-x}\cos x\int\sin^2 x\,dx=e^{-x}(\sin x(\frac{1}{2}\sin^2 x)-\cos x(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x))=\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-x\cos x)$$

و جواب عمومی برابر است با : $y_g=e^{-x}(A\sin x+B\cos x)-\frac{1}{2}xe^{-x}\cos x$

سوال۴- چون $p(x)=\frac{2x-1}{2x}$ و $q(x)=\frac{1}{2x^2}$ پس $p_0=-\frac{1}{2}$ و $q_0=\frac{1}{2}$ و معادله شاخص به صورت $r(r-1)-\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}=0$ بوده و ریشه های آن عبارتند از : $r_1=1$ و $r_2=\frac{1}{2}$ چون اختلاف r_1-r_2 عددی طبیعی نیست پس معادله جوابی به صورت سری $y=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ دارد. این جواب را در معادله قرار می دهیم :

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})b_nx^{n-\frac{3}{2}}+x(2x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})b_nx^{n-\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+\frac{1}{2}}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})b_nx^{n+\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\frac{1}{2})b_nx^{n+\frac{3}{2}}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})b_nx^{n+\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+\frac{1}{2}}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})b_nx^{n+\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}2(n-\frac{1}{2})b_{n-1}x^{n+\frac{1}{2}}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})b_nx^{n+\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+\frac{1}{2}}=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n(2n-1)b_n+(2n-1)b_{n-1}]x^{n+\frac{1}{2}}=0\ \rightarrow\ (2n-1)(nb_n+b_{n-1})=0\ ,\ n=1,2,3,\cdots$$

$$b_n=\frac{-1}{n}b_{n-1}\ ,\ n=1,2,3,\cdots\rightarrow b_1=-b_0\ ,\ b_2=\frac{-1}{2}b_1=\frac{1}{2}b_0\ ,\ b_3=\frac{-1}{3}b_2=\frac{-1}{2\times3}b_0\ ,\ b_4=\frac{-1}{4}b_3=\frac{1}{2\times3\times4}b_0$$

$$b_n=\frac{(-1)^n}{n!}b_0\ ,n=0,1,2,\cdots\rightarrow y_2=x^{\frac{1}{2}}(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4-\cdots)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=\sqrt{x}e^{-x}$$

سوال۵- ابتدا جواب همگن را پیدا می کنیم :

$$\begin{cases}(D-3)x+4y=0\\ x-(D+1)y=0\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}D-3 & 4\\ 1 & -(D+1)\end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow -D^2+2D-1=0\rightarrow D_1=D_2=1\ \rightarrow\ x_h=(a'+b't)e^t\ ,\ y_h=(a+bt)e^t$$

$$\rightarrow (D-3)x_h+4y_h=0\ \rightarrow(-2a'+b'-2b't)e^t+(4a+4bt)e^t=0\rightarrow\begin{cases}b'=2b\\ a'=2a+b\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x_h=(2a+b+2bt)e^t\\ y_h=(a+bt)e^t\end{cases}$$

اکنون جواب خصوصی را پیدا می کنیم :

$$-(D-3)\begin{cases}(D-3)x+4y=e^t\\ x-(D+1)y=e^t\end{cases}\ \rightarrow y_p=\frac{3}{(D-1)^2}e^t=3e^t\frac{1}{D^2}(1)=\frac{3}{2}t^2e^t$$

از معادله دوم داریم : $x_p=(D+1)y_p+e^t=(3t+3t^2)e^t+e^t=(3t^2+3t+1)e^t$

و بالاخره خواهیم داشت : $x_g=(2a+b+1+(2b+3)t+3t^2)e^t\ ,\ y_g=(a+bt+\frac{3}{2}t^2)e^t$

سوال۶-

$$L\{f(t)\}=\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+4)}=\frac{1}{3}e^{-\pi s}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}))=\frac{1}{3}e^{-\pi s}L\{t-\frac{1}{2}\sin 2t\}$$

$$\rightarrow f(t)=\frac{1}{3}u_\pi(t)(t-\pi-\frac{1}{2}\sin 2(t-\pi)))\qquad\rightarrow\quad f(t)=\frac{1}{6}u_\pi(t)(2t-2\pi-\sin 2t)$$

$$L\{g(t)\}=\ln\frac{s+1}{s-1}\rightarrow L'\{g(t)\}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\ \rightarrow -L\{t\,g(t)\}=L\{e^{-t}-e^t\}\qquad\rightarrow\quad g(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{t}$$

سوال۷- با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم : $L\{y(t)\}=L\{4t-3\int_0^t y(u)\sin(t-u)du\}$

$$\rightarrow L\{y\}=\frac{4}{s^2}-3L\{y\}L\{\sin t\}\rightarrow\ (1+\frac{3}{s^2+1})L\{y\}=\frac{4}{s^2}\ \rightarrow\ L\{y\}=\frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)}=\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s^2+4}\ \rightarrow\ y(t)=t+\frac{3}{2}\sin 2t$$

سیدرضا موسوی – ۱۳۸۹/۳/۲۵