کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۶ گروه هماهنگ)**	نیمسال (**اول**/دوم) **۹۰-۱۳۸۹**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۸۹/۱۰/۲۷**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- جواب عمومی معادله زیر را بیابید. **۱۵ نمره**

$$y(6y^2-x-1)dx+2xdy=0$$

سوال۲- جواب معادله دیفرانسیل $y''+6y'+9y=\dfrac{e^{-3x}}{x^3}$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۳- معادله مقابل را حل کنید. $x^2y''+xy'-4y=4x^6$ **۱۵ نمره**

سوال۴- یک جواب معادله دیفرانسیل $2x^2y''-xy'+(x+1)y=0$ را به ازای ریشه بزرگتر معادله مشخصه بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۵- دستگاه معادلات مقابل را حل کنید. **۲۰ نمره**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+x-y=\sin t+\cos t \\ \dfrac{dx}{dt}+x=\cos t \end{cases}$$

سوال۶- معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. **۲۰ نمره**

$$y''+4y=\begin{cases} 1 & 0\le t<\pi \\ 0 & \pi\le t \end{cases}\quad,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

سوال۷- مطلوب است حل معادله انتگرالی زیر : **۱۵ نمره**

$$x(t)+\int_0^t e^{t-u}x(u)\,du=2t-3$$

موفق باشید

سوال۱- $y(6y^2-x-1)dx+2xdy=0 \to 6y^3-(x+1)y+2xy'=0$

$$\to y'-\frac{x+1}{2x}y=\frac{-3}{x}y^3 \to \frac{y'}{y^3}-\frac{x+1}{2x}\times\frac{1}{y^2}=\frac{-3}{x}$$

معادله برنولی است $u=\frac{1}{y^2}, u'=\frac{-2y'}{y^3}$ و در نتیجه $\frac{-u'}{2}-\frac{x+1}{2x}u=\frac{-3}{x} \to u'+(1+\frac{1}{x})u=\frac{6}{x}$ که یک معادله خطی مرتبه اول است. $\mu=e^{\int(1+\frac{1}{x})dx}=xe^x$ و $u=\frac{1}{\mu}(c+\int\frac{6}{x}\mu dx)=\frac{1}{xe^x}(c+\int 6e^x dx)=\frac{1}{x}(ce^{-x}+6)$

و در نهایت داریم $y^2=\frac{x}{ce^{-x}+6}$.

سوال ۲ - ابتدا معادله همگن $y''+6y'+9y=0$ را حل می کنیم. $m^2+6m+9=0$ معادله مشخصه آن است که ریشه تکراری $m=-3$ دارد یعنی $y_h=(c_1+c_2x)e^{-3x}$. اکنون داریم $w(y_1,y_2)=w(e^{-3x},xe^{-3x})=e^{-6x}$ و $h(x)=x^{-3}e^{-3x}$

جواب خصوصی را به کمک روش تغییر پارامتر محاسبه می کنیم.

$$y_p=y_1\int\frac{-y_2h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+y_2\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx=e^{-3x}\int\frac{-1}{x^2}dx+xe^{-3x}\int\frac{-1}{x^3}dx=e^{-3x}(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x})=\frac{e^{-3x}}{2x}$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g=(c_1+c_2x+\frac{1}{2x})e^{-3x}$

سوال۳- ابتدا معادله همگن آن را حل می کنیم یعنی $x^2y''+xy'-4y=0$ که یک معادله اویلر است. معادله مشخصه آن $r^2-4=0$ و ریشه های معادله مشخصه $m=\pm 2$ است پس جواب همگن عبارت است از : $y_h=c_1x^2+c_2x^{-2}$.

اکنون داریم $w(y_1,y_2)=w(x^2,x^{-2})=-4x^{-1}$ و $h(x)=4x^4$ جواب خصوصی برابر است با :

$$y_p=y_1\int\frac{-y_2h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+y_2\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx=x^2\int x^3dx+x^{-2}\int -x^7dx=(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})x^6=\frac{x^6}{8}$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_h=c_1x^2+c_2x^{-2}+\frac{x^6}{8}$

روش دوم : با تغییر متغیر $x=e^t$ داریم $y''-4y=4e^{6t}$ و به کمک روش ضرایب نامعین : $y_p=Ae^{6t} \to A=\frac{1}{8}$

سوال۴- داریم $p_0=\lim_{x\to 0}x\times\frac{-x}{2x^2}=-\frac{1}{2}$, $q_0=\lim_{x\to 0}x^2\times\frac{x+1}{2x^2}=\frac{1}{2}$ و معادله مشخصه برابر است با $r(r-1)-\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}=0$

که ریشه های آن $r_1=1$ و $r_2=\frac{1}{2}$ هستند. معادله یک جواب به صورت $y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارد که آن را در معادله قرار دهیم :

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n+(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)na_nx^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+1}=0 \to \sum_{n=1}^{\infty}[(2n+1)na_n+a_{n-1}]x^{n+1}=0$$

$$(2n+1)na_n+a_{n-1}=0\ ,\ n=1,2,3,\cdots$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}\ ,\ n = 1,2,3,\cdots \qquad a_1 = -\frac{a_0}{3}\ ,\ a_2 = \frac{a_0}{30}\ ,\ a_3 = -\frac{a_0}{630}\ ,\ \cdots$$

پس یک جواب معادله عبارت است از : $y_1 = a_0 x(1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{630}x^3 + \cdots)$

سوال ۵ - معادله دوم یک معادله یک مجهولی است که می توان آن را حل کرد. $x' + x = \cos t$ که یک معادله مرتبه اول خطی است و $x(t) = c_1 e^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$. با قرار دادن این جواب در معادله اول داریم $y' - y = \sin t$ که یک معادله مرتبه اول خطی است و $y(t) = c_2 e^{t} - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$

سوال ۶ - داریم $y'' + 4y = 1 - u_\pi(t)$ و $L\{y'' + 4y\} = L\{1 - u_\pi(t)\}$ در نتیجه

$s^2 L\{y\} - s + 4L\{y\} = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s}$ و یا

$$L\{y\} = \frac{-1}{s(s^2+4)}e^{-\pi s} + \frac{1+s^2}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}(\frac{-1}{s} + \frac{s}{s^2+4})e^{-\pi s} + \frac{1}{4}(\frac{1}{s} + \frac{3s}{s^2+4})$$

$$L\{y\} = \frac{1}{4}L\{-1 + \cos 2t\}e^{-s} + \frac{1}{4}L\{1 + 3\cos 2t\} = \frac{1}{4}L\{u_\pi(t)(-1 + \cos(2t - 2\pi)) + 1 + 3\cos 2t\}$$

$$y = \frac{1}{4}(u_\pi(t)(-1 + \cos 2t) + 1 + 3\cos 2t) \qquad y = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2t) & 0 \le t < \pi \\ \cos 2t & \pi \le t \end{cases}$$

سوال۷- به کمک تبدیل لاپلاس داریم $L\{x(t)\} + \int_0^t e^{t-u}x(u)du\} = L\{2t - 3\}$ یعنی

$$L\{x\} + L\{e^t\}L\{x\} = \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} \ \rightarrow \ \frac{s}{s-1}L\{x\} = \frac{2-3s}{s^2} \ \rightarrow \ L\{x\} = \frac{-3s^2 + 5s - 2}{s^3} = -\frac{3}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{2}{s^3}$$

و در نتیجه $x(t) = -3 + 5t - t^2$.

روش دوم : از طرفین معادله $x(t) + \int_0^t e^{t-u}x(u)du = 2t - 3$ مشتق می گیریم $x' + x + \int_0^t e^{t-u}x(u)du = 2$ اکنون داریم

$$x' + 2t - 3 = 2 \rightarrow \ x' = 5 - 2t \ \rightarrow x = a + 5t - t^2$$

و چون $x(0) = -3$ پس $x(t) = -3 + 5t - t^2$.

سیدرضا موسوی – ۱۳۸۹/۱۰/۲۷