کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سوالات امتحانات پایان ترم)

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضي** امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (گروه ۱۱)** نیمسال (اول/**دوم**) **۹۰-۱۳۸۹** نام مدرس:

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۰/۳/۲۳** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مشخصات خود را در صفحه اول پاسخنامه تکمیل نمایید.

در طول برگزاري امتحان به هیچ سوالي پاسخ داده نمي شود.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل $۲xy''+(۱-۴x)y'+(۲x-۱)y=e^x$ را حل کنید.
توجه کنید که $y_۱=e^x$ یک جواب معادله همگن متناظر آن است. **۱۵ نمره**

سوال۲- معادله دیفرانسیل مقابل را حل کنید : $۲x^۲y''-۵xy'+۳y=۰$ **۱۵ نمره**

سوال۳- جواب معادله دیفرانسیل $(x-۱)y''-xy'+y=۰$ را به صورت سری توانی حول نقطه $a=۰$ بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۴- دستگاه معادلات مقابل را حل کنید. **۲۰ نمره**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-y=\sin t \\ \dfrac{dy}{dt}+x=\cos t \end{cases}$$

سوال۵- معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. **۲۰ نمره**

$$x''+x=\begin{cases} t & ۰\le t<۲ \\ ۰ & ۲\le t \end{cases} \quad ; \quad x(۰)=۱, x'(۰)=۲$$

سوال۶- تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید : **۱۵ نمره**

$$f(t)=\int_۰^t (۱-\cos u)\frac{\sin(t-u)}{t-u}\,du$$

سوال۷- مسیرهای قائم دسته منحنی های $x^۲-y^۲=۲cx$ را بیابید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

جواب سوال ۱- با استفاده از روش کاهش مرتبه معادله را حل می کنیم.

$$y = uy_1 = ue^x \to 2x(u'' + 2u' + u)e^x + (1-4x)(u'+u)e^x + (2x-1)ue^x = e^x \to 2xu'' + u' = 1$$

$$\xrightarrow{u'=v} 2xv' + v = 1 \to \frac{dv}{1-v} = \frac{dx}{2x} \to \int \frac{dv}{1-v}dx = \int \frac{dx}{2x}dx \to -\ln(1-v) = \frac{1}{2}\ln x + c \to \frac{1}{1-v} = a\sqrt{x}$$

$$\to v = u' = 1 - \frac{1}{a\sqrt{x}} \to u = x + b\sqrt{x} \to y_g = b_0 e^x + (x + b\sqrt{x})e^x \to y_g = (b_0 + b\sqrt{x} + x)e^x$$

جواب سوال۲- این یک معادله اویلر است. معادله مشخصه آن عبارت است از $2m^2 + (-5-2)m + 3 = 0$

و یا $2m^2 - 7m + 3 = 0$ که ریشه های آن عبارتند از $m_1 = 3$ و $m_2 = \frac{1}{2}$ و در نتیجه جواب معادله عبارت است از :

$$y_h = ax^3 + b\sqrt{x}$$

جواب سوال۳- چون $a = 0$ یک نقطه عادی معادله است پس معادله جوابی به صورت سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارد. آن را در معادله قرار می دهیم :

$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\to \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)na_{n+1} - (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)a_n]x^n = 0$$

$$\to (n+1)na_{n+1} - (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)a_n = 0 \ , n = 0,1,2,\cdots$$

$$\to a_{n+2} = \frac{n}{n+2}a_{n+1} - \frac{n-1}{(n+2)(n+1)}a_n \ , n = 0,1,2,\cdots$$

$$\to a_2 = \frac{1}{2}a_0 \ , \ a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6}a_0 \ , \ a_4 = \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0 \ , \ a_5 = \frac{3}{5}a_4 - \frac{1}{10}a_3 = \frac{1}{120}a_0$$

$$\to y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}a_0 x^2 + \frac{1}{6}a_0 x^3 + \frac{1}{24}a_0 x^4 + \frac{1}{120}a_0 x^5 + \cdots$$

$$\to y = a_1 x + a_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots) \to y = (a_1 - 1)x + a_0 e^x$$

جواب سوال۴-

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - y = \sin t \\ \frac{dy}{dt} + x = \cos t \end{cases} \rightarrow D \begin{cases} Dx - y = \sin t \\ x + Dy = \cos t \end{cases} \rightarrow (D^2+1)x = 2\cos x$$

اگر $D^2+1=0$ آنگاه $D=\pm i$ و در نتیجه $x_h = A\sin t + B\cos t$ و $y_p = \frac{1}{D^2+1}(2\cos t)$

$$x_p = \frac{2}{D^2+1}(\mathrm{Re}(e^{it})) = 2\mathrm{Re}(\frac{1}{(D-i)(D+i)}(e^{it})) = 2\mathrm{Re}(\frac{1}{2i(D-i)}(e^{it})) = \mathrm{Re}(\frac{e^{it}}{i}\frac{1}{D}(1))$$

$$= \mathrm{Re}(\frac{e^{it}}{i}(t)) = \mathrm{Re}(-it\cos t + t\sin t)) = t\sin t \rightarrow x_g = x_h = A\sin t + B\cos t + t\sin t$$

از معادله اول داریم $y = x' - \sin t$ و در نتیجه $y_g = A\cos t - B\sin t + t\cos t$.

جواب سوال۵-

$$x'' + x = t - u_2(t)t \rightarrow L\{x''+x\} = L\{t - u_2(t)t\} \rightarrow s^2L\{x\} - x(0)s - x'(0) + L\{x\} = L\{t\} - e^{-2s}L\{t+2\}$$

$$\rightarrow (s^2+1)L\{x\} = s + 2 + \frac{1}{s^2} - e^{-2s}(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}) \rightarrow L\{x\} = \frac{s+2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)} - e^{-2s}(\frac{2s+1}{s^2(s^2+1)})$$

$$\rightarrow L\{x\} = \frac{s+2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} - e^{-2s}(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2s+1}{s^2+1}) \rightarrow L\{x\} = L\{t + \cos t + \sin t\} - e^{-2s}L\{2 + t - 2\cos t - \sin t\}$$

$$\rightarrow L\{x\} = L\{t + \cos t + \sin t\} - L\{u_2(t)[2 + (t-2) - 2\cos(t-2) - \sin(t-2)]\}$$

$$\rightarrow x = t + \cos t + \sin t - u_2(t)[2 + (t-2) - 2\cos(t-2) - \sin(t-2)]$$

$$x(t) = \begin{cases} t + \cos t + \sin t & 0 \le t < 2 \\ \cos t + \sin t + 2\cos(t-2) + \sin(t-2) & 2 \le t \end{cases}$$

جواب سوال۶-

$$g(u) = 1 - \cos u \ , \ h(u) = \frac{\sin u}{u} \rightarrow f(t) = \int_0^t g(u)h(t-u)du \rightarrow L\{f\} = L\{g\}L\{h\}$$

$$L\{g\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)} \ , \ L\{h\} = \int_s^\infty L\{\sin u\}ds = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

$$L\{f\} = \frac{1}{s(s^2+1)}(\frac{\pi}{2} - \arctan s)$$

جواب سوال۷- ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای داده شده را پیدا می کنیم :

$$x^2 - y^2 = 2cx \rightarrow x - \frac{y^2}{x} = 2c \rightarrow 1 - \frac{2yy'}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2xyy' + y^2 = 0 \rightarrow y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

برای یافتن معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای قائم y' را $\frac{-1}{y'}$ تبدیل می کنیم : $\frac{-1}{y'} = \frac{x^2+y^2}{2xy} \rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

$$(x^2+y^2)dy + 2xydx = 0 \rightarrow x^2y + \frac{y^3}{3} = a \rightarrow y(3x^2+y^2) = c_1$$