کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۶ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۳-۱۳۹۲** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۲/۱۰/۸** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله مرتبه دوم زیر را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$y'' = \sqrt{1+(y')^2} \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

سوال۲- ابتدا معادله همگن $x^2y'' + xy' - y = 0$ را حل کنید و سپس جواب عمومی معادله **۲۰ نمره**

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{2x+1}{x^2}$$

را بیابید.

سوال۳- یک جواب خصوصی برای معادله مرتبه دوم $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$ بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۴- یک جواب معادله دیفرانسیل $2x^2y'' + x(2x-1)y' + y = 0$ را به صورت سری فروبنیوس حول نقطه صفر و به ازای ریشه کوچکتر معادله مشخصه بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۵- دستگاه معادلات مقابل را حل کنید : **۱۵ نمره**

$$\begin{cases} x' + y' + 5x - y = \sin t \\ x' - y' - x = t \end{cases}$$

سوال۶- الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \int_0^t \frac{(1-\cos u)\sin(t-u)}{t-u}\,du$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

ب) تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s) = \ln\frac{s+2}{s-3}$ را محاسبه کنید.

سوال۷- اگر $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < \pi \\ 0 & \pi \le t \end{cases}$ به کمک تبدیل لاپلاس، مساله مقدار اولیه **۱۵ نمره**

$$y'' + y = f(t) \quad ; \quad y(0) = 1 \; , \; y'(0) = 2$$

را حل کنید.

موفق باشید

سوال ۱– این معادله مرتبه دوم فاقد x است. با تغییر متغیر $y'=u$ و $y''=u'$ داریم $u'=\sqrt{1+u^2}$ که یک معادله جدایی‌پذیر است.

می‌نویسیم $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=dx$ و از طرفین معادله انتگرال می‌گیریم. داریم $Arc\sinh u=x+c$ و یا $u=\sinh(x+c)$

پس داریم $y'=\sinh(x+c)$ طبق شرط اولیه $y'(0)=0$ نتیجه می‌شود $c=0$ و $y'=\sinh x$

اکنون داریم $y=\cosh x+a$ و طبق شرط اولیه $y(0)=0$ داریم $a=-1$ و جواب نهایی مساله عبارت است از : $\boxed{y=\cosh x-1}$

سوال۲– این معادله یک معادله اویلر است و معادله مشخصه آن برابر است با $r(r-1)+r-1=0$ که دارای ۲ ریشه $r_1=1$ و $r_2=-1$ است. جواب معادله همگن عبارت است از : $y_h=ax+\frac{b}{x}$

برای حل معادله غیر همگن از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم. داریم : $y_1=x\ ,\ y_2=\frac{2}{x}\ ,\ w(y_1,y_2)=\frac{-2}{x}\ ,\ h(x)=\frac{2x+1}{x^2}$

بنابر این

$$y_p=-x\int\frac{\frac{1}{x}\times\frac{2x+1}{x^2}}{\frac{-2}{x}}dx+\frac{1}{x}\int\frac{x\times\frac{2x+1}{x^2}}{\frac{-2}{x}}dx=\frac{x}{2}\int(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})dx-\frac{1}{2x}\int(2x+1)dx$$

$$=\frac{x}{2}(2\ln x-\frac{1}{x})-\frac{1}{2x}(x^2+x)=x\ln x-1-\frac{x}{2}$$

به کمک قسمت اول مساله، جواب عمومی معادله غیر همگن عبارت است از : $\boxed{y_g=ax+\frac{b}{x}+x\ln x-1}$

سوال۳– به کمک عملگر D داریم $(D^2+2D+5)y=e^{-x}\sin 2x$ و در نتیجه : $y_p=\frac{1}{D^2+2D+5}(e^{-x}\sin 2x)$

$$y_p=e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2+2(D-1)+5}(\sin 2x)=e^{-x}\frac{1}{D^2+4}(\sin 2x)$$

چون نمی‌توانیم به جای D^2 نمی توانیم مقدار -4 را قرار دهیم از اعداد مختلط کمک می‌گیریم.

$$y_p=e^{-x}\frac{1}{D^2+4}(\operatorname{Im}(e^{2ix}))=e^{-x}\operatorname{Im}(\frac{1}{D^2+4}(e^{2ix}))=e^{-x}\operatorname{Im}(e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2+4}(1))$$

$$y_p=e^{-x}\operatorname{Im}(e^{2ix}\frac{1}{D(D+4i)}(1))=e^{-x}\operatorname{Im}(e^{2ix}\frac{1}{D}(\frac{1}{4i}+\frac{D}{16}+\cdots)(1))=e^{-x}\operatorname{Im}(e^{2ix}\frac{1}{D}(\frac{1}{4i}))$$

$$y_p=e^{-x}\operatorname{Im}(\frac{x}{4i}e^{2ix})=e^{-x}\operatorname{Im}(\frac{x}{4i}(\cos 2x+i\sin 2x))=-\frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x$$

یک جواب خصوصی معادله داده شده عبارت است از : $\boxed{y_p=-\frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x}$

سوال۴– نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم معادله است زیرا اگر معادله را به صورت $y''+\frac{2x-1}{2x}y'+\frac{1}{2x^2}y=0$ بنویسیم به وضوح $x=0$ یک نقطه غیر عادی است. اما چون حدهای $p_0=\lim_{x\to0}x\frac{2x-1}{2x}=\frac{-1}{2}\ ,\ q_0=\lim_{x\to0}x^2\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$ وجود دارند پس $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم معادله است. معادله مشخصه عبارت است از $r(r-1)-\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}=0$ و یا $2r^2-3r+1=0$ که دو ریشه $r_1=1$ و $r_2=\frac{1}{2}$ دارد. چون r_1-r_2 عددی صحیح نیست پس معادله، دو جواب به صورت سری فروبنیوس دارد.

به ازای ریشه کوچکتر، جواب معادله را محاسبه می‌کنیم.

جواب را به صورت $y = x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}\ ,\ a_0 \neq 0$ در نظر گرفته و در معادله قرار می‌دهیم. داریم :

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})a_n x^{n-\frac{3}{2}} + x(2x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_n x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-\frac{1}{2})a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n x^{n+\frac{3}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-\frac{1}{2})a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)a_{n-1} x^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(2n^2-n)a_n + (2n-1)a_{n-1}]x^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

اکنون باید $(2n^2-n)a_n + (2n-1)a_{n-1} = 0\ ,\ n=1,2,3,\cdots$ و یا $a_n = \frac{-1}{n}a_{n-1}\ ,\ n=1,2,3,\cdots$

از این رابطه نتیجه می‌شود :

$$a_1 = -a_0\ ,\ a_2 = \frac{-1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0\ ,\ a_3 = \frac{-1}{3}a_2 = \frac{-1}{2\times 3}a_0\ ,\ a_4 = \frac{-1}{4}a_3 = \frac{1}{2\times 3\times 4}a_0 \ \rightarrow\ a_n = \frac{(-1)^n}{n!}a_0\ ,\ n=1,2,3,\cdots$$

اکنون با فرض $a_0 = 1$ ، یک جواب معادله به صورت $\boxed{y = x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n = x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = \sqrt{x}e^{-x}}$ به دست می‌آید.

سوال ۵- اگر دو معادله دستگاه را با هم جمع کنیم داریم : $2x' + 4x - y = t + \sin t$ یعنی : $y = 2x' + 4x - t - \sin t$

بنابر این کافی است تابع x را پیدا کنیم. به کمک عملگر D داریم :

$$\begin{cases}(D+5)x + (D-1)y = \sin t\\ (D-1)x - Dy = t\end{cases}$$

با ضرب معادله اول در D و ضرب معادله دوم در $(D-1)$ داریم :

$$\begin{cases}D(D+5)x + D(D-1)y = \cos t\\ (D-1)^2 x - D(D-1)y = 1-t\end{cases}$$

و در نتیجه : $(2D^2+3D+1)x = 1 - t + \cos t$

اکنون اگر $2D^2+3D+1=0$ آنگاه $D=-1,-\frac{1}{2}$ یعنی جواب معادله همگن عبارت است از : $x_h = Ae^{-t} + Be^{\frac{-t}{2}}$

و اگر $2D^2+3D+1\neq 0$ آنگاه :

$$x_p = \frac{1}{2D^2+3D+1}(1-t) + \frac{1}{2D^2+3D+1}\cos t$$

$$x_p = (1-3D+\cdots)(1-t) + \frac{1}{-2+3D+1}\cos t \ \rightarrow\ x_p = 1-t+3+\frac{3D+1}{9D^2-1}\cos t \ \rightarrow\ x_p = 2-t+\frac{3D+1}{-10}\cos t$$

و جواب خصوصی عبارت است از : $x_p = 2 - t + \frac{1}{10}(3\sin t - \cos t)$

اکنون جواب عمومی تابع x محاسبه شده است : $\boxed{x_g = Ae^{-t} + Be^{\frac{-t}{2}} + 2 - t + \frac{1}{10}(3\sin t - \cos t)}$

اکنون از تساوی $y = 2x' + 4x - t - \sin t$ استفاده می‌کنیم.

$$y_g = -2Ae^{-t} - Be^{\frac{-t}{2}} - 2 + \frac{1}{5}(3\cos t - \sin t) + 4Ae^{-t} + 4Be^{\frac{-t}{2}} + 8 - 4t + \frac{2}{5}(3\sin t - \cos t) - t - \sin t$$

$$\boxed{y_g = 2Ae^{-t} + 3Be^{\frac{-t}{2}} + 6 - 5t + \frac{1}{5}(4\sin t - 3\cos t)}$$

سوال۶- اگر قرار دهیم $h(t)=\frac{\sin t}{t}$ و $g(t)=1-\cos t$ آنگاه داریم $f(t)=(g*h)(t)$ و در نتیجه $L\{f\}=L\{g\}L\{h\}$

$$L\{g\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s(s^2+1)} \quad \text{و} \quad L\{h\}=\int_s^\infty L\{\sin t\}ds=\int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1}=\arctan s\,|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\arctan s$$

جواب مساله عبارت است از : $\boxed{L\{f\}=\frac{1}{s(s^2+1)}(\frac{\pi}{2}-\arctan s)}$

ب) داریم $F'(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-3}$ یعنی $F'(s)=L\{e^{-2t}-e^{3t}\}$. اگر $F(s)=L\{f\}$ آنگاه $-L\{t\,f(t)\}=L\{e^{-2t}-e^{3t}\}$

و در نتیجه $-t\,f(t)=e^{-2t}-e^{3t}$. اکنون داریم : $\boxed{f(t)=\frac{e^{3t}-e^{-2t}}{t}}$

سوال۷- به کمک تابع پله ای واحد، تابع f را به صورت $f(t)=t-u_\pi(t)\,t$ می‌نویسیم. پس داریم :

$$y''+y=t-u_\pi(t)\,t \quad ; \quad y(0)=1\,,\; y'(0)=2$$

تبدیل لاپلاس دو طرف معادله را محاسبه می‌کنیم. $L\{y''\}+L\{y\}=L\{t\}-L\{u_\pi(t)\,t\}$

$$s^2L\{y\}-s-2+L\{y\}=\frac{1}{s^2}-e^{-\pi s}L\{\,t+\pi\} \quad \rightarrow \quad (s^2+1)L\{y\}=\frac{1}{s^2}+s+2-e^{-\pi s}(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s})$$

$$L\{y\}=\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{s+2}{s^2+1}-e^{-\pi s}(\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{\pi}{s(s^2+1)})$$

$$L\{y\}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{s+2}{s^2+1}-e^{-\pi s}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{\pi}{s}-\frac{\pi s}{s^2+1})$$

$$L\{y\}=\frac{1}{s^2}+\frac{s+1}{s^2+1}-e^{-\pi s}L\{t+\pi-\sin t-\pi\cos t\}$$

$$L\{y\}=L\{t+\sin t+\cos t\}-L\{u_\pi(t)(t-\pi+\pi-\sin(t-\pi)-\pi\cos(t-\pi)\}$$

جواب معادله عبارت است از : $y=t+\sin t+\cos t-u_\pi(t)(t+\sin t+\pi\cos t)$

و یا : $\boxed{y=\begin{cases} t+\sin t+\cos t & 0\le t<\pi \\ (1-\pi)\cos t & \pi\le t\end{cases}}$

۱۳۹۲/۱۰/۸