کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

**(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)**
**دانشکده ریاضی**

| | | | |
|---|---|---|---|
| گروه آموزشی : **ریاضی** | امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل** | نیمسال تابستان **۹۲** | نام مدرس : **سیدرضا موسوی** |
| نام و نام خانوادگی : | شماره دانشجویی : | تاریخ : **۱۳۹۲/۵/۳۰** | وقت : **۱۲۰** دقیقه |

**توجه :**
**استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.**
**قسمتهایی که با مداد نوشته شده باشد چرکنویس محسوب می‌شود.**
**در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.**

---

**سوال ۱-** معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(3x^2 + y)dx + (-x + x^2 y)dy = 0$ را حل کنید. **۳۰ نمره**

---

**سوال ۲-** ابتدا نشان دهید که یک تابع ثابت وجود دارد که در معادله **۲۵ نمره**

$$y' + (3 - 2x)y + xy^2 = 3 - x$$

صدق می کند و سپس تمام جوابهای این معادله را بیابید.

---

**سوال ۳-** معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + y = -\dfrac{e^x}{x^2}$ را حل کنید. **۳۰ نمره**

---

**سوال ۴-** معادله دیفرانسیل $y'' + (1 - x^2)y = 0$ را حل کنید. **۳۰ نمره**

---

**سوال ۵-** برای دستگاه معادلات زیر یک جواب خصوصی پیدا کنید. **۳۰ نمره**

$$\begin{cases} x'' + y' = 1 + \sin t \\ 2x' + 3y' = x + y \end{cases}$$

---

**سوال ۶-** الف) اگر $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$ تبدیل لاپلاس $f''(t)$ را بیابید. **۱۵ نمره**

ب) محاسبه کنید : $g(t) = L^{-1}\{\dfrac{1}{(s-1)^2(s-2)}\}$ **۱۵ نمره**

---

**سوال ۷-** معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید : **۲۵ نمره**

$$y' = 3 + 9\int_0^x y(t)dt \ , \ y(0) = 5$$

---

**موفق باشید**

**سوال ۱-** داریم $M = ۳x^۲ + y \ , \ N = -x + x^۲ y$ و در نتیجه $M_y = ۱ \ , \ N_x = -۱ + ۲xy$

بنابر این، این معادله کامل نیست اما چون عبارت $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{۲ - ۲xy}{-x + x^۲ y} = \dfrac{-۲}{x}$ تابعی یک متغیره بر حسب $x$ است پس عامل انتگرالساز یک متغیره به صورت $\mu = e^{\int \frac{-۲}{x}dx} = e^{-۲\ln x} = \dfrac{۱}{x^۲}$ دارد. با ضرب این عامل انتگرالساز در طرفین معادله به معادله کامل

$$(۳ + \frac{y}{x^۲})dx + (\frac{-۱}{x} + y)dy = ۰$$

می رسیم.

$$f(x,y) = \int (۳ + \frac{y}{x^۲})dx = ۳x - \frac{y}{x} + h(y) \ , \quad f_y = N \ \rightarrow \ -\frac{۱}{x} + h'(y) = -\frac{۱}{x} + y$$

$$\rightarrow \ h'(y) = y \ \rightarrow \ h(y) = \frac{۱}{۲}y^۲ \ \rightarrow \ f(x,y) = ۳x - \frac{y}{x} + \frac{۱}{۲}y^۲$$

جواب معادله عبارت است از : $\boxed{۳x - \dfrac{y}{x} + \dfrac{۱}{۲}y^۲ = c}$

**سوال ۲-** اگر تابع ثابت $y_۱ = c$ در معادله صدق کند باید داشته باشیم : $۰ + (۳ - ۲x)c + xc^۲ = ۳ - x$

و یا $(c^۲ - ۲c + ۱)x + ۳(c - ۱) = ۰$ که نتیجه می دهد $c = ۱$ .

می توان دید که تابع ثابت $y_۱ = ۱$ یک جواب معادله ریکاتی داده شده است. با تغییر متغیر $y = ۱ + \dfrac{۱}{v}$ معادله را حل می کنیم.

$$\frac{-v'}{v^۲} + (۳ - ۲x)(۱ + \frac{۱}{v}) + x(۱ + \frac{۲}{v} + \frac{۱}{v^۲}) = ۳ - x$$

$$\rightarrow \ \frac{-v'}{v^۲} + \frac{۳}{v} + \frac{x}{v^۲} = ۰ \ \rightarrow \ v' - ۳v = x \ \rightarrow \ v = e^{\int ۳dx}(c + \int e^{\int -۳dx} x dx) \ \rightarrow \ v = e^{۳x}(c + \int x e^{-۳x} dx)$$

$$\rightarrow \ v = e^{۳x}(c + -\frac{۱}{۳}x e^{-۳x} - \frac{۱}{۹}e^{-۳x}) \ \rightarrow \ v = ce^{۳x} - \frac{۱}{۹}(۳x + ۱)$$

با مشخص شدن تابع $v$ جواب معادله ریکاتی به شکل $\boxed{y = ۱ + \dfrac{۹}{۹ce^{۳x} - (۳x + ۱)}}$ به دست می‌آید.

**سوال ۳-** ابتدا معادله همگن نظیر معادله اصلی یعنی $y'' - ۲y + y = ۰$ را حل می کنیم.

معادله مشخصه عبارت است از $m^۲ - ۲m + ۱ = ۰$ که ریشه مضاعف $m = ۱$ دارد. بنابر این : $y_h = (a + bx)e^x$

برای پیدا کردن جواب خصوصی باید از روش تغییر پارامتر استفاده کنیم. داریم :

$$y_۱ = e^x \ , \ y_۲ = xe^x \ , \ w(y_۱, y_۲) = e^{۲x} \ , \ h(x) = -\frac{e^x}{x^۲}$$

بنابر این

$$y_p = -e^x \int \frac{xe^x(\frac{-e^x}{x^۲})}{e^{۲x}}dx + xe^x \int \frac{e^x(\frac{-e^x}{x^۲})}{e^{۲x}}dx$$

$$y_p = e^x \int \frac{۱}{x}dx + xe^x \int \frac{-۱}{x^۲}dx \qquad \rightarrow \qquad y_p = e^x \ln x + e^x$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g = y_h + y_p = (a + ۱ + bx + \ln x)e^x$

و یا : $\boxed{y_g = (c + bx + \ln x)e^x}$

**سوال۴-** نقطه $x=0$ یک نقطه عادی معادله $y''+(1-x^2)y=0$ است پس یک جواب به شکل سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارد.

این جواب را در معادله قرار می دهیم.
$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=0\ \to\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=0$$

$$(2a_2+a_0)+(6a_3+a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n-a_{n-2}]x^n=0$$

$$2a_2+a_0=0\ ,\ 6a_3+a_1=0\ ,\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n-a_{n-2}=0\ ,\ n=2,3,4,\cdots$$

$$a_2=\frac{-1}{2}a_0\ ,\ a_3=\frac{-1}{6}a_1\ ,\ a_{n+2}=\frac{-a_n+a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}\ ,\ n=2,3,4,\cdots$$

$$a_4=\frac{-a_2+a_0}{12}=\frac{1}{8}a_0\ ,\ a_5=\frac{-a_3+a_1}{20}=\frac{7}{120}a_1\ ,\ a_6=\frac{-a_4+a_2}{30}=\frac{-1}{48}a_0\ ,\ a_7=\frac{-a_5+a_3}{42}=\frac{-3}{560}a_1$$

$$y=a_0+a_1x-\frac{1}{2}a_0x^2-\frac{1}{6}a_1x^3+\frac{1}{8}a_0x^4+\frac{7}{120}a_1x^5-\frac{1}{48}a_0x^6-\frac{3}{560}a_1x^7+\cdots$$

جواب عمومی معادله :
$$\boxed{y=a_0(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\cdots)+a_1(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{120}x^5-\frac{3}{560}x^7+\cdots)}$$

**سوال۵- روش اول** ( عملگر $D$ ) :
$$\begin{cases}D^2x+Dy=1+\sin t\\2Dx+3Dy=x+y\end{cases}\ \to\ \begin{matrix}(3D-1)\\-D\end{matrix}\begin{cases}D^2x+Dy=1+\sin t\\(2D-1)x+(3D-1)y=0\end{cases}$$

$$\to\ (3D^3-3D^2+D)x=-1+3\cos t-\sin t$$

$$\to\ x_p=\frac{1}{3D^3-3D^2+D}(-1)+\frac{1}{3D^3-3D^2+D}(3\cos t-\sin t)$$

$$\to\ x_p=\frac{1}{D}\times\frac{1}{3D^2-3D+1}(-1)+\frac{1}{-3D+3+D}(3\cos t-\sin t)$$

$$\to\ x_p=\frac{1}{D}(1+3D+\cdots)(-1)+\frac{1}{3-2D}(3\cos t-\sin t)\ \to\ x_p=\frac{1}{D}(-1)+\frac{3+2D}{9-4D^2}(3\cos t-\sin t)$$

$$\to\ x_p=-t+\frac{3+2D}{9+4}(3\cos t-\sin t)\qquad\to\ \boxed{x_p=-t+\frac{1}{13}(7\cos t-9\sin t)}$$

اکنون از معادله دوم دستگاه داریم $y=2x'+3y'-x$ و از معادله اول دستگاه داریم $y'=-x''+1+\sin t$

و در نتیجه : $y=2x'+3(-x''+1+\sin t)-x$ یعنی $y=-3x''+2x'-x+3(1+\sin t)$

بنابر این داریم :
$$y_p=-\frac{3}{13}(-7\cos t+9\sin t)-2+\frac{2}{13}(-7\sin t-9\cos t)+t-\frac{1}{13}(7\cos t-9\sin t)+3(1+\sin t)$$

$$\boxed{y_p=t+1+\frac{1}{13}(-4\cos t+7\sin t)}$$

**روش دوم** ( ضرایب نامعین ) : جواب را به شکل
$$\begin{cases}x_p=at+b+A\sin t+B\cos t\\y_p=a't+b'+A'\sin t+B'\cos t\end{cases}$$
حدس زده و در دستگاه قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}(-A\sin t-B\cos t)+(a'+A'\cos t-B'\sin)=1+\sin t\\2(a+A\cos t-B\sin t)+3(a'+A'\cos t-B'\sin)=(a+a')t+(b+b')+(A+A')\sin t+(B+B')\cos t\end{cases}$$

$$\begin{cases}a'+(-B+A')\cos t-(A+B')\sin=1+\sin t\\(2a+3a')+(2A+3A')\cos t-(2B+3B')\sin t=(a+a')t+(b+b')+(A+A')\sin t+(B+B')\cos t\end{cases}$$

از مقایسه ضرایب در طرفین تساویها داریم :
$$\begin{cases} a'=۱\,,\ ۲a+۳a'=b+b'\ ,\ a+a'=۰ \\ -B+A'=۰\ ,\ A+B'=-۱\,,\ ۲A+۳A'=B+B'\,,\ -(۲B+۳B')=A+A' \end{cases}$$

و در نتیجه
$$a'=۱\ ,\ a=-۱\,,\ b'=۱-b\ ,\ A'=B\ ,\ B'=-A-۱\ \rightarrow ۳A+۲B=-۱\,,\ ۲A-۳B=-۳$$

اکنون با فرض $b=۰$ داریم :
$$a'=۱\ ,\ a=-۱\ ,\ b=۰\ ,\ b'=۱\,,\ A=\frac{-۹}{۱۳}\ ,\ A'=B=\frac{۷}{۱۳}\ ,\ B'=\frac{-۴}{۱۳}$$

بنابر این یک جواب خصوصی دستگاه برابر است با :
$$\boxed{\begin{cases} x_p=-t+\frac{۱}{۱۳}(۷\cos t-۹\sin t) \\ y_p=t+۱+\frac{۱}{۱۳}(-۴\cos t+۷\sin t) \end{cases}}$$

**سوال ۶**- الف) داریم
$$L\{\sin ۳t\}=\frac{۳}{s^۲+۹}\ \rightarrow\ L\{e^{-۲t}\sin ۳t\}=L\{f(t)\}=\frac{۳}{(s+۲)^۲+۹}$$

از طرف دیگر داریم : $L\{f''(t)\}=s^۲L\{f(t)\}-f(۰)s-f'(۰)$

می توان دید که $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۳$ بنابر این :
$$L\{f''(t)\}=\frac{۳s^۲}{(s+۲)^۲+۹}-۳=\frac{-۳(۴s+۱۳)}{s^۲+۴s+۱۳}$$

ب ) **روش اول** ( تجزیه کسرها ) :
$$F(s)=\frac{۱}{(s-۱)^۲(s-۲)}=-\frac{۱}{s-۱}-\frac{۱}{(s-۱)^۲}+\frac{۱}{s-۲}$$
$$F(s)=-L\{e^t\}-L\{t\,e^t\}+L\{e^{۲t}\}\qquad\rightarrow\qquad \boxed{L^{-۱}\{F(s)\}=-(t+۱)e^t+e^{۲t}}$$

**روش دوم** ( انتگرال تلفیقی ) :
$$F(s)=\frac{۱}{(s-۱)^۲(s-۲)}=\frac{۱}{(s-۱)^۲}\times\frac{۱}{s-۲}=L\{t\,e^t\}\times L\{e^{۲t}\}$$

بنابر این
$$L^{-۱}\{F(s)\}=\int_۰^t ue^u e^{۲(t-u)}du=e^{۲t}\int_۰^t ue^{-u}du=e^{۲t}[-ue^{-u}-e^{-u}]_۰^t=e^{۲t}[-t\,e^{-t}-e^{-t}+۱]$$

و بالاخره داریم :
$$\boxed{L^{-۱}\{F(s)\}=-(t+۱)e^t+e^{۲t}}$$

**سوال ۷**- **روش اول** ( تبدیل لاپلاس ) :
$$L\{y'\}=L\{۳\}+۹L\{\int_۰^x y(t)dt\}\ \rightarrow\ sL\{y\}-۵=\frac{۳}{s}+\frac{۹L\{y\}}{s}$$
$$\rightarrow\ (s-\frac{۹}{s})L\{y\}=۵+\frac{۳}{s}\ \rightarrow\ L\{y\}=\frac{۵s+۳}{s^۲-۹}=\frac{۳}{s-۳}+\frac{۲}{s+۳}=L\{۳e^{۳x}\}+L\{۲e^{-۳x}\}$$

جواب معادله برابر است با : $\boxed{y=۳e^{۳x}+۲e^{-۳x}}$

**روش دوم** : از طرفین معادله نسبت به $x$ مشتق می گیریم و به معادله مرتبه دوم با شرایط اولیه
$$y''=۹y\quad ;\quad y(۰)=۵\ ,\ y'(۰)=۳$$
می رسیم . این یک معادله خطی همگن با ضرایب ثابت است و معادله مشخصه آن یعنی $m^۲-۹=۰$ دارای دو ریشه $m=\pm۳$ است.

پس جواب معادله به شکل $y=Ae^{۳x}+Be^{-۳x}$ خواهد بود. به کمک شرایط اولیه داریم : $A+B=۵\ ,\ ۳A-۳B=۳$

که نتیجه می دهد $A=۳\ ,\ B=۲$.

پس جواب معادله عبارت است از : $\boxed{y=۳e^{۳x}+۲e^{-۳x}}$

۱۳۹۲/۵/۳۰