نام و نام خانوادگی : . . . .
شماره دانشجویی : . . . .
نام مدرس : . . . .

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده رياضي

گروه آموزشی : **رياضي**
تاریخ : **۱۳۹۱/۱/۲۸**
وقت : **۷۰** دقیقه

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۲ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۱**- ۱۳۹۰

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ – معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید. ۱۵ نمره

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0 \quad ; \quad y(3)=4$$

سوال ۲ – معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. ۱۵ نمره

$$xydx+(y^4-3x^2)dy=0$$

سوال ۳ – معادله مرتبه اول $y'-\frac{3y}{x}=\frac{-y^3}{x}$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال ۴ - تابع $y_1=x^2$ یک جواب معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم $x^2y''+xy'-4y=0$ است.
معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'-4y=4x^2$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال ۵ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین بیابید. ۲۰ نمره

$$y''+2y'+y=12\,xe^{-x}$$

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل (۱۲ گروه هماهنگ)

نیمسال دوم ۹۱-۱۳۹۰

جواب سوال۱ : این معادله یک معادله همگن است و داریم $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$ با تغییر متغیر $y=xu$ به معادله $u+xu'=u+\sqrt{1+u^2}$ و یا $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$ می رسیم که جدایی پذیر است. $\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x}$

$$\to \text{arcsin}\,h\,u=\ln(Ax)\to u+\sqrt{1+u^2}=Ax\to y+\sqrt{x^2+y^2}=Ax^2\xrightarrow{y(3)=4}A=1\to \boxed{y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2}$$

جواب سوال۲ : روش اول : داریم $M=xy\ ,\ N=y^4-3x^2$ و در نتیجه $M_y=x\ ,\ N_x=-6x$ این معادله کامل نیست اما چون عبارت $\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{-6x-x}{xy}=\frac{-7}{y}$ مستقل از x است پس $\mu=e^{\int\frac{-7}{y}dx}=\frac{1}{y^7}$ یک عامل انتگرالساز است و معادله $\frac{x}{y^6}dx+(\frac{1}{y^3}-\frac{3x^2}{y^7})dy=0$ کامل است. اگر $f(x,y)=\int(\frac{1}{y^3}-\frac{3x^2}{y^7})dy=\frac{-1}{2y^2}+\frac{x^2}{2y^6}+h(x)$ باید داشته باشیم $f_x=M$. بنابر این $\frac{x}{y^6}+h'(x)=\frac{x}{y^6}$ یعنی $h(x)=c$ و در نتیجه جواب معادله عبارت است از :

$$\frac{-1}{2y^2}+\frac{x^2}{2y^6}+c=0 \quad \text{و یا} \quad \boxed{2cy^6-y^4+x^2=0}$$

روش دوم : اگر معادله را به صورت $\frac{dx}{dy}-\frac{3x}{y}=-\frac{y^3}{x}$ بنویسیم به یک معادله برنولی می‌رسیم.

جواب سوال۳ : این معادله یک معادله برنولی است. $\frac{y'}{y^3}-\frac{3}{xy^2}=\frac{-1}{x}$ قرار می دهیم $u=\frac{1}{y^2}\ ,\ u'=\frac{-2y'}{y^3}$ بنابر این $\frac{-u'}{2}-\frac{3u}{x}=\frac{-1}{x}$ و یا $u'-\frac{6u}{x}=\frac{2}{x}$ که یک معادله مرتبه اول خطی است و در نتیجه :

$$u=e^{-\int\frac{6}{x}dx}(c+\int e^{\int\frac{6}{x}dx}\times\frac{2}{x}dx)\ \to\ u=\frac{1}{x^6}(c+\frac{1}{3}x^6)\ \to\ \frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^6}(c+\frac{1}{3}x^6)\ \to \boxed{3x^6=y^2(3c+x^6)}$$

جواب سوال۴ : از تغییر متغیر $y=x^2u$ استفاده می کنیم. $x^2(2u+4xu'+x^2u'')+x(2xu+x^2u')-4(xu)=4x^2$

پس از ساده کردن عبارتها داریم $x^4u''+5x^3u'=4x^2$ و یا $u''+\frac{5}{x}u'=\frac{4}{x^2}$ که یک معادله خطی قابل تبدیل به مرتبه اول است. قرار می دهیم $v=u'$ و داریم $v'+\frac{5}{x}v=\frac{4}{x^2}$ که یک معادله خطی مرتبه اول است یعنی :

$$v=e^{-\int\frac{5}{x}dx}(c+\int\frac{4}{x^2}e^{\int\frac{5}{x}dx}dx)\to v=\frac{1}{x^5}(c+x^4)\ \to u=\int v\,dx=-\frac{c}{4x^4}+\ln x+c_1\to \boxed{y=c_1x^2+\frac{c_2}{x^2}+x^2\ln x}$$

جواب سوال۵ : ابتدا معادله همگن نظیر آن را حل می‌کنیم. یعنی $y''+2y'+y=0$ که یک معادله خطی همگن با ضرایب ثابت است و معادله مشخصه آن یعنی $m^2+2m+1=0$ دارای ریشه تکراری $m=-1$ است پس جواب همگن عبارت است از :

$$y_h=(a+bx)e^{-x}$$

اکنون چون e^{-x} در سمت راست معادله غیر همگن قرار دارد و در جواب همگن نیز تکرار شده است ، جواب خصوصی را به صورت $y_p=(Ax^3+Bx^2)e^{-x}$ حدس زده و در معادله قرار می دهیم.

$$y_p'=(-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)e^{-x}\ \ ,\ \ y_p''=(Ax^3+(-6A+B)x^2+(6A-4B)x-2B)e^{-x}$$

$$y_p''+2y_p'+y_p=(6Ax-2B)e^{-x}=12\,xe^{-x}\ \to\ A=2\ ,\ B=0\ \to\ y_p=2x^3e^{-x}$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g=(a+bx)e^{-x}+2x^3e^{-x}$ و یا $\boxed{y_g=(a+bx+2x^3)e^{-x}}$

سیدرضا موسوی