نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

گروه آموزشی : **رياضي**

تاریخ : **۱۳۹۲/۱/۲۴**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده رياضي

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۶ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۲**- **۱۳۹۱**

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ – معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای $y = ax^2 + be^{-x}$ را بنویسید. ۱۵ نمره

سوال ۲ – با اعمال تغییر متغیر $z = \sin y$ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. ۱۵ نمره

$$(x - 2\sin y + 3)dx + (2x - 4\sin y - 3)\cos y\, dy = 0$$

سوال ۳ – معادله مرتبه اول $y' = \dfrac{y}{x^3 y^2 \ln y - x}$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال ۴ - معادله $y(3xy-1)dx + x(1-xy)dy = 0$ یک عامل انتگرالساز به صورت $\mu = x^m y^n$ دارد.
با یافتن این عامل انتگرالساز، معادله را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال ۵ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین بیابید. ۲۰ نمره

$$y'' + 4y = 4\cos 2x + 8x^2 - 8$$

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل (۱۶ گروه هماهنگ)

نیمسال دوم ۹۲-۱۳۹۱

جواب سوال۱ : روش اول : از طرفین رابطه دو بار مشتق می گیریم. $y' = 2ax - be^{-x}$ و $y'' = 2a + be^{-x}$

از جمع طرفین دو تساوی داریم $y'' + y' = 2a(x+1)$ یعنی : $a = \dfrac{y''+y'}{2(x+1)}$ و از تساوی اول داریم $y' = \dfrac{y''+y'}{x+1}x - be^{-x}$

یعنی $(x+1)y' = xy'' + xy' - b(x+1)e^{-x}$ یا : $b = \dfrac{xy''-y'}{(x+1)e^{-x}}$

اگر مقادیر a و b را در معادله اصلی قرار دهیم داریم : $y = \dfrac{y''+y'}{2(x+1)}x^2 + \dfrac{xy''-y'}{(x+1)e^{-x}}e^{-x}$

این معادله را می توان به صورت $x(x+2)y'' + (x^2-2)y' - 2(x+1)y = 0$ نوشت.

روش دوم : می نویسیم $ye^x = ax^2e^x + b$ و از طرفین مشتق می گیریم. $y'e^x + ye^x = 2axe^x + ax^2e^x$

اکنون داریم $\dfrac{y'+y}{2x+x^2} = a$ باز هم از طرفین مشتق می گیریم : $\dfrac{(y''+y')(2x+x^2) - (y'+y)(2+2x)}{(2x+x^2)^2} = 0$

و در نتیجه : $x(x+2)y'' + (x^2-2)y' - 2(1+x)y = 0$

جواب سوال۲ : اگر $z = \sin y$ آنگاه $dz = \cos y dy$ و معادله به صورت $(x-2z+3)dx + (2x-4z-3)dz = 0$ در می آید.

اکنون داریم $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{x-2z+3}{2x-4z-3}$. با تغییر متغیر $u = x-2z+3$ داریم $\dfrac{du}{dx} = 1 - \dfrac{2dz}{dx}$ و معادله به شکل

$\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{du}{dx}) = -\dfrac{u}{2u-9}$ در می‌آید. اکنون داریم : $\dfrac{du}{dx} = 1 + \dfrac{2u}{2u-9} \to \dfrac{2u-9}{4u-9}du = dx \to \dfrac{1}{2}u - \dfrac{9}{8}\ln(4u-9) = x + c$

$$\to 4(x-2z+3) - 9\ln(4(x-2z+3)-9) = 8x + 8c \to 4x + 8z + 9\ln(4x-8z+3) = c_1$$

جواب معادله برابر است با : $4x + 8\sin y + 9\ln(4x - 8\sin y + 3) = c_2$

جواب سوال۳ : روش اول : اگر معادله را به صورت $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^3y^2\ln y - x}{y}$ بنویسیم داریم $x' + \dfrac{1}{y}x = x^3 y\ln y$ که یک معادله برنولی بر حسب x است. طرفین معادله را بر x^3 تقسیم می کنیم : $\dfrac{x'}{x^3} + \dfrac{1}{y}\times\dfrac{1}{x^2} = y\ln y$

با اعمال تغییر متغیر $u = \dfrac{1}{x^2}$ داریم $-\dfrac{1}{2}u' + \dfrac{1}{y}u = y\ln y$ و یا $u' - \dfrac{2}{y}u = -2y\ln y$ که یک معادله خطی مرتبه اول است.

$\mu = e^{\int \frac{-2}{y}dy} = y^{-2}$ و $u = y^2(c + \int y^{-2}(-2y\ln y)dy) = y^2(c - \int 2y^{-1}\ln y dy) = y^2(c - \ln^2 y)$

پس $\dfrac{1}{x^2} = y^2(c-\ln^2 y)$ یعنی : $x^2y^2(c - \ln^2 y) = 1$

روش دوم : اگر معادله را به صورت $(x^3y^2\ln y - x)dy - ydx = 0$ بنویسیم خواهیم داشت :

$$(x^3y^2\ln y)dy - (xdy + ydx) = 0 \to (xy)^3\frac{\ln y}{y}dy - d(xy) = 0$$

با اعمال تغییر متغیر $u = xy$ داریم $u^3\dfrac{\ln y}{y}dy - du = 0$ که یک معادله جدایی پذیر است :

$$\frac{\ln y}{y}dy = \frac{du}{u^3} \to \frac{1}{2}\ln^2 y = \frac{-1}{2u^2} + c = \frac{-1}{2x^2y^2} + c \to x^2y^2(2c - \ln^2 y) = 1$$

دانشکده ریاضی
۱۳۹۲/۱/۲۴

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل (۱۶ گروه هماهنگ)

نیمسال دوم ۹۲-۱۳۹۱

جواب سوال۴ : طرفین معادله را در $\mu = x^m y^n$ ضرب می کنیم :

$$(3x^{m+1}y^{n+2} - x^m y^{n+1})dx + (x^{m+1}y^n - x^{m+2}y^{n+1})dy = 0$$

$$M_y = 3(n+2)x^{m+1}y^{n+1} - (n+1)x^m y^n \ , \ N_x = (m+1)x^m y^n - (m+2)x^{m+1}y^{n+1}$$

باید داشته باشیم : $3(n+2) = -(m+2) \ , \ -(n+1) = m+1 \ \rightarrow$

که نتیجه می دهد $m+3n=-8 \ , \ m+n=-2$ و یا : $m=1 \ , \ n=-3$

بنابر این $\mu = \dfrac{x}{y^3}$ و با ضرب این عامل انتگرالساز در طرفین معادله داریم : $(\dfrac{3x^2}{y} - \dfrac{x}{y^2})dx + (\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{x^3}{y^2})dy = 0$

که یک معادله کامل است و جواب آن عبارت است از : $\dfrac{x^3}{y} - \dfrac{x^2}{2y^2} = c$ و یا : $x^2(2xy-1) = 2cy^2$

جواب سوال۵ : $y'' + 4y = 4\cos 2x + 8x^2 - 8$

معادله مشخصه معادله همگن عبارت است از $m^2 + 4 = 0$ که دو ریشه مختلط $m = \pm i$ دارد

یعنی جواب معادله همگن برابر است با : $y_h = A\sin 2x + B\cos 2x$

برای یافتن جواب خصوصی به کمک روش ضرایب نامعین فرض می کنیم $y_{p_1} = x(a\sin 2x + b\cos 2x)$ و $y_{p_2} = cx^2 + dx + e$

و داریم : $y''_{p_1} = -4x(a\sin 2x + b\cos 2x) + 4(a\cos 2x - b\sin 2x)$ و $y''_{p_2} = 2c$

$$y = y_{p_1} \rightarrow 4(a\cos 2x - b\sin 2x) = 4\cos 2x \ \rightarrow \ a=1 \ , \ b=0 \ \rightarrow \ y_{p_1} = x\sin 2x$$

$$y = y_{p_2} \rightarrow 4cx^2 + 4dx + 4e + 2c = 8x^2 - 8 \ \rightarrow \ c=2 \ , \ d=0 \ , e=-3 \rightarrow \ y_{p_2} = 2x^2 - 3$$

و جواب عمومی معادله برابر است با : $y_g = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = A\sin 2x + B\cos 2x + x\sin 2x + 2x^2 - 3$

سیدرضا موسوی