مساله: سیستم مکانیکی مدل‌سازی شده با معادله دیفرانسیل $2y''+0.01y'+18.01y=F(t)$ را در نظر بگیرید. $F(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است:

$$F(t)=\begin{cases}+1 & , \quad 0<t<\pi \\ -1 & , \quad \pi<t<2\pi\end{cases}$$

پاسخ حالت پایدار این معادله دارای نوسان‌های بزرگی است که ممکن است سبب فروپاشی سیستم شود. تابع ورودی $F(t)$ را به گونه‌ای اصلاح کنید که مانع نوسان‌های شدید پاسخ حالت پایدار شود.

حل: سری فوریه $F(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}(+1)\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-1)\,dt\right\}=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}(+1)\cos(nt)\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cos(nt)\,dt\right\}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}(+1)\sin(nt)\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-1)\sin(nt)\,dt\right\}=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi} & , \quad n\equiv odd \\ 0 & , \quad n\equiv even\end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad F(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{n} \qquad or \qquad F(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2m+1)t\right]}{(2m+1)}$$

اگر فرکانس یکی از این هارمونیک‌ها، به فرکانس طبیعی سیستم نزدیک باشد و مقدار اصطکاک در سیستم کم باشد، جمله‌ی مربوطه ممکن است مود نرمال غالب در پاسخ کلی باشد. فرکانس طبیعی این سیستم $\omega=\sqrt{18.01/2}\approx 3.00083$ است، بنابراین به احتمال زیاد، حل حالت پایدار $y_s(t)$، بیش از همه مغلوب مود نرمال سوم $y_3(t)$ خواهد بود. به منظور بررسی دقیق این موضوع، باید دامنه مودهای نرمال را حساب کنیم.

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$2y''+0.01y'+18.01y=\frac{4}{n\pi}\sin(nt) \qquad , \quad n=1,3,5,\dots$$

که سمت راست آن، یک جمله از سری فوریه تابع $F(t)$ است. پاسخ حالت پایدار (حل خصوصی) این معادله به صورت:

$$y_n(t)=A_n\cos(nt)+B_n\sin(nt)$$

است. با جایگزینی این عبارت در معادله دیفرانسیل اخیر، ثابت‌های A_n و B_n را به دست می‌آوریم.

$$-2A_n n^2\cos(nt)-2B_n n^2\sin(nt)-0.01A_n n\sin(nt)+0.01B_n n\cos(nt)$$
$$+18.01A_n\cos(nt)+18.01B_n\sin(nt)=\frac{4}{n\pi}\sin(nt)$$

$$\rightarrow\begin{cases}-2A_n n^2+0.01B_n n+18.01A_n=0 & \rightarrow\quad A_n=\dfrac{0.01nB_n}{2n^2-18.01}\\ -2B_n n^2-0.01A_n n+18.01B_n=\dfrac{4}{n\pi} & \rightarrow\quad B_n=\dfrac{\frac{4}{n\pi}\left(18.01-2n^2\right)}{\left(18.01-2n^2\right)^2+\left(0.01n\right)^2}\end{cases}$$

$$\rightarrow\qquad A_n=\frac{-\dfrac{0.04}{\pi}}{\left(0.01n\right)^2+\left(18.01-2n^2\right)^2}$$

دامنه پاسخ $y_n(t)$ عبارت است از:

$$C_n=\left(A_n^2+B_n^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{n\pi\left[\left(0.01n\right)^2+\left(18.01-2n^2\right)^2\right]}\left[\left(0.01n\right)^2+\left(18.01-2n^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

چون معادله دیفرانسیل اصلی، خطی است مجموع پاسخ‌های $y_n(t)$ نیز پاسخ معادله می‌باشد (اصل برهم نهش[1]):

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)+\cdots$$

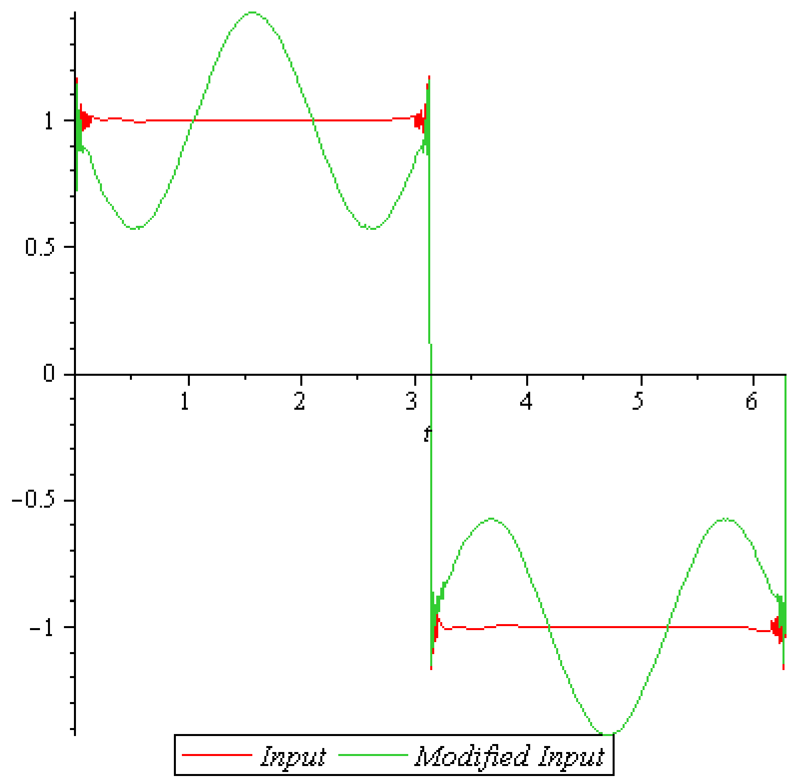
با محاسبه چند دامنه‌ی نخست C_n:

$$C_1=0.07952781317$$
$$C_3=13.42112322$$
$$C_5=0.007960224999$$
$$C_7=0.002273925413$$

درمی‌یابیم که C_3 در مقایسه با سایر دامنه‌ها بسیار بزرگ است، ازاین‌رو $y_3(t)$ جمله غالب در پاسخ $y(t)$ می‌باشد. پس حدس ما در مورد اینکه $y_3(t)$ بر نوسانات سیستم غلبه دارد تایید می‌شود. برای حذف یا برداشتن $y_3(t)$ از $y_s(t)$، باید $F_3(t)$ را از $F(t)$ کم کنیم. به این ترتیب، تابع ورودی تعدیل یافته، $F(t)-\frac{4}{3\pi}\sin(3t)$ است.

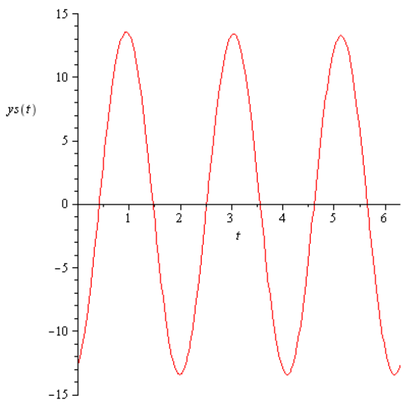
[1] Superposition principle

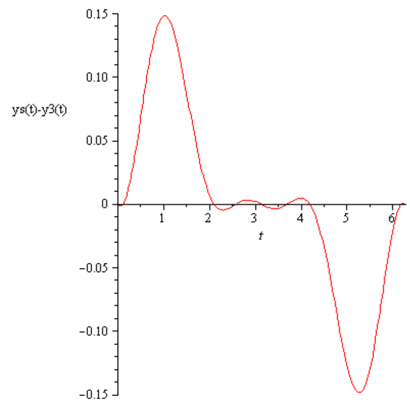
تابع تحریک ورودی و تابع تعدیل یافته‌ی آن، در شکل (۱) نمایش داده شده‌اند.



شکل (۱) تابع ورودی (تحریک) و تابع ورودی تعدیل یافته

همانگونه که از شکل (۲) ملاحظه می‌گردد، دامنه پاسخ سیستم در حالتی‌که مود نرمال سوم حذف شده است، بسیار کوچکتر از دامنه y_s می‌باشد. بنابراین با حذف مولفه‌ای که فرکانس آن، از همه به فرکانس طبیعی سیستم نزدیک‌تر است، در فرونشانی نوسان‌های بزرگ سیستم موفق بوده‌ایم.





شکل (۲) (الف) تابع خروجی (ب) تابع خروجی اصلاح شده