مساله ۱: در معادله انتگرالی $\int_0^\infty f(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega = \begin{cases} 1-x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$ ، تابع $f(\omega)$ چیست؟

Ans. $\frac{2}{\pi\omega^2}\left[1-\cos(\omega)\right]$

مساله ۲: سری فوریه تابع $f(x) = 4\sin(x)\cos^2(x)$ را پیدا کنید.

Ans. $\sin(x) + \sin(3x)$

مساله ۳: در معادله انتگرالی $\int_0^\infty f(\omega)\cos(\omega x)\,dx = \begin{cases} 1/2 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1/4 & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$ ، تابع $f(\omega)$ را بیابید.

Ans. $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

مساله ۴: با استفاده از بسط فوریه تابع متناوب $-2 \le t \le 2 \quad , \quad f(t) = 4 - t^2$ ، مقدار $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$ را بیابید.

Ans. $\frac{\pi^2}{12}$

مساله ۵: انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \pi \\ -\sin(x) & , \quad x \ge \pi \end{cases}$ چیست؟

Ans. This function has no Fourier integral, because the integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ does not exist.

مساله ۶: در بسط فوریه‌ی تابع $f(x) = x + \sin(x)$ به ازای $-\pi < x < \pi$ ، ضریب جمله $\sin(x)$ چیست؟

Ans. 3

مساله ۷: سری فوریه زوج و فرد $0 < x < L \quad , \quad f(x)$ را پیدا کنید و بگویید کدامیک زودتر همگرا می‌شود؟

Ans. $f(x) = x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad f(x) = x = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

مساله ۸: سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+x & , \quad -\pi\le x<0\\ \dfrac{\pi}{2}-x & , \quad 0\le x<\pi\end{cases}$ را تعیین کنید.

Ans. $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\cos(nx)$

مساله ۹: اگر فرم مختلط انتگرال فوریه تابعی $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin(\omega\pi)}{\omega}\exp(i\omega x)\,d\omega$ باشد، فرم حقیقی انتگرال فوریه آن چگونه خواهد بود؟

Ans. $\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\dfrac{\sin(\omega\pi)}{\omega}\cos(\omega x)\,d\omega$

مساله ۱۰: در بسط فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}1+t & , \quad -1\le t\le 0\\ 1-t & , \quad 0\le t\le 1\end{cases}$ با دوره تناوب $T=2$، ضریب a_3 را بیابید.

Ans. $\dfrac{4}{9\pi^2}$

مساله ۱۱: اگر تبدیل فوریه $f(t)$ با $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}f(t)\,dt$ تعریف شود، تبدیل فوریه تابع $f(t)=e^{-a|t|}\sin(bt)$ را به دست آورید.

Ans. $\dfrac{-4iab\omega}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-4b^2\omega^2}$

مساله ۱۲: مقدار b_3 مربوط به سری فوریه $f(x)=\left(\cos^2 x+\sin x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ چقدر است؟

Ans. $1/2$

مساله ۱۳: پاسخ حالت پایدار معادله گرمای $\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+a$ را که در آن a مقداری ثابت است، با توجه به شرایط:

$$T(0,t)=T_0\equiv \text{constant} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L,t)=0$$

تعیین کنید.

Ans. $T_s(x)=\frac{ax}{2}(2L-x)+T_0$

مساله ۱۴: در مساله مقدار اولیه مرزی:

$$u_{tt}-u_{xx}=0 \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad t>0$$
$$u(x,0)=\begin{cases} 2x & , \quad 0\le x\le \frac{1}{3} \\ 1-x & , \quad \frac{1}{3}\le x\le 1 \end{cases}$$
$$u_t(x,0)=0$$
$$u(1,t)=0=u_x(0,t)$$

مقدار $u(x,t)$ در نقطه $x=\frac{1}{2}$ و در لحظه $t=7$ را پیدا کنید.

Ans. $u(1/2,7)=0$

مساله ۱۵: جواب معادله $\frac{u_x}{x}-\frac{u_y}{y}=0$ که در آن $u(0,0)=1$ است را پیدا کنید.

Ans. $e^{\frac{k}{2}\left(x^2+y^2\right)}$

مساله ۱۶: چه تغییر متغیری، مساله $\left\{\begin{array}{l} u_t=u_{xx}+6x \\ u(0,t)=1 \\ u(1,t)=1 \\ u(x,0)=f(x) \end{array}\right\}$ را به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌کند؟

Ans. $u(x,t)=w(x,t)-x^3+x+1$

مساله ۱۷: مقدار $u\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ مربوط به مساله مقدار مرزی زیر را حساب کنید.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & ; \quad 0<x<\pi, 0<y<1 \\ u_x(0,y)=0 & , \quad u(\pi,y)=0 \\ u(x,0)=0 & , \quad u(x,1)=\cos\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Ans. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}\cosh(1/4)}$

مساله ۱۸: تغییر متغیرهای لازم برای تبدیل معادله $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ به فرم کانونی را به دست آورید.

Ans. $r=x+at \quad \& \quad s=x-at$

مساله ۱۹: به ازای کدام مقادیر α و β، معادله $\alpha u_{xx}+\beta u_{yy}=0$ از نوع هایپربولیک است؟

Ans. $\alpha<0, \quad \beta>0$

مساله ۲۰: جواب خصوصی معادله $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2xy$ که از منحنی $x^2+y^2=16$ و خط $z=3$ می‌گذرد را بیابید.

Ans. $x^2+y^2+z^2=25$

مساله ۲۱: سطح انتگرالی معادله $y\,z_x+x\,z_y=0$ را که از منحنی $C: x=0, \quad y=t, \quad z=t^4$ می‌گذرد به دست آورید.

Ans. $z=\left(x^2-y^2\right)^2$

مساله ۲۲: نشان دهید معادله $y\,z_x+x\,z_y=0$ جوابی ندارد که از منحنی $C: x=t, \quad y=\sqrt{t^2-1}, \quad z=t$ بگذرد.

مساله ۲۳: جواب عمومی معادله‌های زیر را بیابید.

(الف) $(x+z)z_x+(y+z)z_y=0$ ، (ب) $z_x+x\,z_y=z$ و (پ) $(xz+y)z_x-(x+yz)z_y=x^2-y^2$

Ans. $F\left(z,\dfrac{x+z}{y+z}\right)=0, \quad F\left(2y-x^2, z\exp(-x)\right)=0, \quad F\left(x^2+y^2-z^2, xy+z\right)=0$

مساله ۲۴: جواب عمومی معادله $z_x + zz_y = 1$ را پیدا کنید و جوابی را که از منحنی $C: x=t, \quad y=t, \quad z=2$ می‌گذرد به دست آورید.

Ans. $F\left(x-z, y-z^2/2\right)=0 \quad , \quad z=1+\sqrt{1-2(x-y)}$

مساله ۲۵: معادله $z\left(yz_y - xz_x\right) = y^2 - x^2$ را حل کنید.

Ans. $F\left(xy, x^2+y^2+z^2\right)=0$

مساله ۲۶: نشان دهید جواب عمومی $2xz_x - yz_y = 0$ عبارت است از: $z = f\left(xy^2\right)$

مساله ۲۷: معادله $u_t = u_{xx}$ را با توجه شرط اولیه $u(x,0)=u_0 x$ و شرایط مرزی $\begin{Bmatrix} u(0,t)=0 \\ u_x(1,t)=0 \end{Bmatrix}$ حل کنید. $(u_0>0)$

Ans. $u(x,t)=\dfrac{8u_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\exp\left[\dfrac{-(2n-1)^2\pi^2 t/L}{4}\right]\sin\left[\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}\right]$

نکته مهم: هرگاه لازم باشد یک مساله مقدار مرزی را روی یک ناحیه نیمه بینهایت یا بینهایت حل کنیم، روش‌های تبدیلی مانند تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس مناسب هستند.

مساله ۲۸: معادله $(x>0, t>0)$ $\quad u_t = u_{xx}$ را با توجه به شرایط $\begin{Bmatrix} u(0,t)=u_0 & , & t>0 \\ u(x,0)=0 & , & x>0 \end{Bmatrix}$ حل کنید.

Ans. $u(x,t)=u_0\left[1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}\exp\left(-v^2\right)dv\right]=u_0\,\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

مساله ۲۹: معادله $u_t = u_{xx}$ را با توجه به شرایط زیر حل کنید. (a و b ثابت هستند)

$$u(x,0)=a+b\sin\left(\frac{\pi}{d}x\right), \quad 0<x<d \quad \text{و} \quad \begin{Bmatrix} u(0,t)=a \\ u(d,t)=a \end{Bmatrix}, \quad t>0$$

Ans. $u(x,t)=a+b\sin\left(\dfrac{\pi}{d}x\right)\exp\left(-\pi^2 t/d^2\right)$

مساله ۳۰: پاسخ معادله $u_{tt}=u_{xx}+\sin\left(\frac{\pi}{c}x\right)\sin(\omega t),\quad 0<x<c,\quad t>0$ را با توجه به شرایط مرزی و اولیه زیر به دست آورید.

$$\begin{aligned} &u(0,t)=0,\quad u(c,t)=0 \quad , \quad t>0 \\ &u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0 \quad , \quad 0<x<c \end{aligned}$$

Ans. $u(x,t)=c^2\sin\frac{\pi}{c}x/\left(\pi^2-c^2\omega^2\right)\left[\sin(\omega t)-\frac{c\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{c}t\right)\right]$