

مساله ۱: در معادله انتگرالی $\int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega x) d\omega = \begin{cases} 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$ تابع $f(\omega)$ چیست؟

Ans. $\frac{2}{\pi\omega^2} [1 - \cos(\omega)]$

مساله ۲: سری فوریه تابع $f(x) = 4 \sin(x) \cos^2(x)$ را پیدا کنید.

Ans. $\sin(x) + \sin(3x)$

مساله ۳: در معادله انتگرالی $\int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega x) dx = \begin{cases} 1/2 & , 0 \leq x < 1 \\ 1/4 & , x = 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$ تابع $f(\omega)$ را بیابید.

Ans. $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

مساله ۴: با استفاده از بسط فوریه تابع متناوب $f(t) = 4 - t^2$ ، $-2 \leq t \leq 2$ ، مقدار $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ را بیابید.

Ans. $\frac{\pi^2}{12}$

مساله ۵: انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < \pi \\ -\sin(x) & , x \geq \pi \end{cases}$ چیست؟

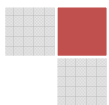
Ans. This function has no Fourier integral, because the integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ does not exist.

مساله ۶: در بسط فوریه تابع $f(x) = x + \sin(x)$ به ازای $-\pi < x < \pi$ ، ضریب جمله $\sin(x)$ چیست؟

Ans. 3

مساله ۷: سری فوریه زوج و فرد $f(x)$ ، $0 < x < L$ را پیدا کنید و بگویید کدامیک زودتر همگرا می شود؟

Ans. $f(x) = x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$; $f(x) = x = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$



مساله ۸: سری فوريه تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & , -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$ را تعيين كنيد.

Ans. $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [(-1)^{n+1} + 1] \cos(nx)$

مساله ۹: اگر فرم مختلط انتگرال فوريه تابعی $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega} \exp(i\omega x) d\omega$ باشد، فرم حقیقی انتگرال فوريه آن چگونه خواهد بود؟

Ans. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega} \cos(\omega x) d\omega$

مساله ۱۰: در بسط فوريه تابع $f(t) = \begin{cases} 1+t & , -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & , 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ با دوره تناوب $T = 2$ ، ضریب a_3 را بیابید.

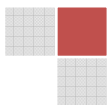
Ans. $\frac{4}{9\pi^2}$

مساله ۱۱: اگر تبدیل فوريه $f(t)$ با $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$ تعريف شود، تبدیل فوريه تابع $f(t) = e^{-a|t|} \sin(bt)$ را به دست آورید.

Ans. $\frac{-4iab\omega}{(a^2 + b^2 + \omega^2)^2 - 4b^2\omega^2}$

مساله ۱۲: مقدار b_3 مربوط به سری فوريه $f(x) = \left(\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{2}\right)^2$ چقدر است؟

Ans. 1/2



مساله ۱۳: پاسخ حالت پایدار معادله گرمای $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a = \frac{\partial T}{\partial t}$ را که در آن a مقداری ثابت است، با توجه به شرایط:

$$T(0, t) = T_0 \equiv \text{constant} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0$$

تعیین کنید.

Ans. $T_s(x) = \frac{ax}{2}(2L - x) + T_0$

مساله ۱۴: در مساله مقدار اولیه مرزی:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 1-x & , \quad \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

$$u(1, t) = 0 = u_x(0, t)$$

مقدار $u(x, t)$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ و در لحظه $t = 7$ را پیدا کنید.

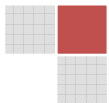
Ans. $u(1/2, 7) = 0$

مساله ۱۵: جواب معادله $\frac{u_x}{x} - \frac{u_y}{y} = 0$ که در آن $u(0, 0) = 1$ است را پیدا کنید.

Ans. $e^{\frac{k}{2}(x^2+y^2)}$

مساله ۱۶: چه تغییر متغیری، مساله $\left. \begin{cases} u_t = u_{xx} + 6x \\ u(0, t) = 1 \\ u(1, t) = 1 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \right\}$ را به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می کند؟

Ans. $u(x, t) = w(x, t) - x^3 + x + 1$



مساله ۱۷: مقدار $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ مربوط به مساله مقدار مرزی زیر را حساب کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & ; \quad 0 < x < \pi, 0 < y < 1 \\ u_x(0, y) = 0 & , \quad u(\pi, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 & , \quad u(x, 1) = \cos \frac{x}{2} \end{cases}$$

Ans. $\frac{1}{2\sqrt{2} \cosh(1/4)}$

مساله ۱۸: تغییر متغیرهای لازم برای تبدیل معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ به فرم کانونی را به دست آورید.

Ans. $r = x + at$ & $s = x - at$

مساله ۱۹: به ازای کدام مقادیر α و β ، معادله $\alpha u_{xx} + \beta u_{yy} = 0$ از نوع هایپربولیک است؟

Ans. $\alpha < 0, \beta > 0$

مساله ۲۰: جواب خصوصی معادله $yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy$ که از منحنی $x^2 + y^2 = 16$ و خط $z = 3$ می‌گذرد را بیابید.

Ans. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

مساله ۲۱: سطح انتگرالی معادله $yz_x + xz_y = 0$ را که از منحنی $C: x=0, y=t, z=t^4$ می‌گذرد به دست آورید.

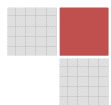
Ans. $z = (x^2 - y^2)^2$

مساله ۲۲: نشان دهید معادله $yz_x + xz_y = 0$ جوابی ندارد که از منحنی $C: x=t, y=\sqrt{t^2-1}, z=t$ بگذرد.

مساله ۲۳: جواب عمومی معادله‌های زیر را بیابید.

(الف) $(x+z)z_x + (y+z)z_y = 0$ ، (ب) $z_x + xz_y = z$ و (پ) $(xz+y)z_x - (x+yz)z_y = x^2 - y^2$

Ans. $F\left(z, \frac{x+z}{y+z}\right) = 0, F(2y-x^2, z \exp(-x)) = 0, F(x^2+y^2-z^2, xy+z) = 0$



مساله ۲۴: جواب عمومی معادله $z_x + zz_y = 1$ را پیدا کنید و جوابی را که از منحنی $C: x=t, y=t, z=2$ می‌گذرد به دست آورید.

Ans. $F(x-z, y-z^2/2) = 0$, $z = 1 + \sqrt{1-2(x-y)}$

مساله ۲۵: معادله $z(yz_y - xz_x) = y^2 - x^2$ را حل کنید.

Ans. $F(xy, x^2 + y^2 + z^2) = 0$

مساله ۲۶: نشان دهید جواب عمومی $2xz_x - yz_y = 0$ عبارت است از: $z = f(xy^2)$

مساله ۲۷: معادله $u_t = u_{xx}$ را با توجه شرط اولیه $u(x, 0) = u_0 x$ و شرایط مرزی $\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 0 \end{cases}$ حل کنید. ($u_0 > 0$)

Ans. $u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t / L}{4}\right] \sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right]$

نکته مهم: هرگاه لازم باشد یک مساله مقدار مرزی را روی یک ناحیه نیمه بینهایت یا بینهایت حل کنیم، روش‌های تبدیلی مانند تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس مناسب هستند.

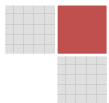
مساله ۲۸: معادله $u_t = u_{xx}$ را با توجه به شرایط $\begin{cases} u(0, t) = u_0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \end{cases}$ حل کنید.

Ans. $u(x, t) = u_0 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} \exp(-v^2) dv \right] = u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

مساله ۲۹: معادله $u_t = u_{xx}$ را با توجه به شرایط زیر حل کنید. (a و b ثابت هستند)

$$u(x, 0) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{d}x\right), \quad 0 < x < d \quad \text{و} \quad \begin{cases} u(0, t) = a \\ u(d, t) = a \end{cases}, \quad t > 0$$

Ans. $u(x, t) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{d}x\right) \exp(-\pi^2 t / d^2)$



مساله ۳۰: پاسخ معادله $u_{tt} = u_{xx} + \sin\left(\frac{\pi}{c}x\right)\sin(\omega t)$, $0 < x < c$, $t > 0$ را با توجه به شرایط مرزی و اولیه زیر به

دست آورید.

$$u(0,t) = 0, \quad u(c,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \quad , \quad 0 < x < c$$

Ans. $u(x,t) = c^2 \sin\frac{\pi}{c}x / (\pi^2 - c^2\omega^2) \left[\sin(\omega t) - \frac{c\omega}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{c}t\right) \right]$

