



حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی

مهدی قنّاد^۱، غلامحسین رحیمی^{۲*}، سیامک اسماعیل‌زاده خادم^۳

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

۲- دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

۳- استاد بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

* تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵، rahimi_gh@modares.ac.ir

چکیده- در این مقاله با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول ($FSDT$)، معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG در حالت کلی استخراج شده و سپس جابه‌جایی شعاعی و تنش بیشینه برای استوانه‌ای با دو سر بسته و مقید، به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است. جابه‌جایی و تنش به ازای تغییرات ضرایب ناهمگنی بررسی و با حالت استوانه‌ی جدار ضخیم همگن مقایسه شده و نتایج آن با نتایج نظریه الاستیسیته‌ی مستوی (PET) مقایسه و شباهت‌ها نشان داده شده است. جنس استوانه، ماده‌ی ناهمگن و همسانگرد با تغییرات مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به‌صورت توانی و با نسبت پواسون ثابت است.

کلید واژگان: استوانه‌ی جدار ضخیم، ماده‌ی ناهمگن FG ، نظریه تغییر شکل برشی

General Shear Deformation Solution of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylindrical Shells

M. Ghannad¹, G.H. Rahimi^{2}, S. Esmailzadeh Khadem³*

1- Ph.D. Student of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.

2- Assoc. Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.

3- Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.

**P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir*

Abstract- *In this paper, an analytical formulation of FGM axisymmetric thick-walled cylinders based on the first shear deformation theory (FSDT) is presented. The displacements and maximum stresses in thick cylindrical shells are calculated. Solutions are obtained under generalized plane strain assumptions. It is assumed that the material is isotropic heterogeneous with constant Poisson's ratio and radially varying elastic modulus. The results obtained in the present paper have been compared with findings of plane elasticity theory (PET).*

Keywords: *Thick-walled cylinder, FGM, Shear deformation.*

۱- مقدمه

پوسته‌ها به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، مقاومت مطلوب ویژه‌ای دارند. مطالعه‌ی رفتار و به‌کارگیری نظریه‌های مختلف از گذشته‌ی نه‌چندان دور مورد توجه‌ی پژوهشگران قرار گرفته و به‌دلیل کاربرد فراوان، این توجه هم‌چنان ادامه دارد. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای، اهمیت ویژه‌ای دارند و همواره پژوهشگران در پی اعمال تغییرات بر روی جدار و ماده‌ی این دسته از پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر بارگذاری‌ها افزایش و وزن آنها را کاهش دهند.

لامه^۱ نخستین بار در سال ۱۸۵۲ [۱] با استفاده از نظریه الاستیسیته‌ی مستوی^۲، حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از ماده‌ی همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت را ارائه کرد و توزیع تنش و جابه‌جایی را در استوانه‌های توخالی به‌دست آورد که آن در حل مسایل مختلف مهندسی استفاده شده و در متن کتب درسی گنجانیده شد. نقدی^۳ در ۱۹۵۶ [۲] با در نظر گرفتن اثر برش عرضی، نظریه تغییر شکل برشی را پایه‌گذاری کرد. میرسکی و هرمان^۴ در ۱۹۵۸ [۳] با به‌کارگیری نظریه تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول^۵، حل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم از مواد همگن و همسانگرد را ارائه کرد. گرینس‌پن^۶ در ۱۹۶۰ [۴] مقایسه‌ای بین نتایج روش‌های مختلف تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای انجام داده است. زیو و پرل^۷ در ۱۹۷۳ [۵] با به‌کارگیری نظریه میرزسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای نیمه بلند را به‌دست آوردند. سوزوکی و تاکاهاشی^۸ در ۱۹۸۱ [۶] ارتعاش آزاد استوانه‌های دایروی و در ۱۹۸۶ [۷] ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی از مواد همگن و

همسانگرد را با استفاده از *FSDT* بررسی و به کمک سری فریبینوس آن را حل کردند. ایکچی و همکاران در ۲۰۰۳ [۸] معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با استفاده از *FSDT* استخراج و به کمک نظریه اغتشاشی^۹ حل کردند.

لخینتسکی^{۱۰} در ۱۹۵۰ [۹] نظریه الاستیسیته‌ی اجسام مرکب^{۱۱} را فرمول‌بندی کرد. در پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب به دلیل تغییر ناگهانی ساختار ماده و یا ترکیب دو ماده‌ی ناهم‌ساز در کنار یکدیگر و در نتیجه تغییر ناگهانی در رفتار مواد، تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها ایجاد می‌شود. مواد پیشرفته با تغییرات پیوسته‌ی خواص (مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی) یا *FGM*^{۱۲} توسط نینو^{۱۳} و همکاران در ۱۹۸۴ مطرح [۱۰] و به‌دنبال آن مطالعات تحلیلی قابل توجهی در سال‌های نخستین قرن جدید بر روی سازه‌های ساخته شده از این مواد در نقاط مختلف جهان انجام شد.

فوکویی و یاماناکا^{۱۴} در ۱۹۹۲ [۱۱] روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم *FGM* تحت فشار داخلی را به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند. هورگان و چان^{۱۵} در ۱۹۹۹ [۱۲] معادلات حاکم بر یک استوانه‌ی توخالی *FGM* را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به‌دست آوردند. توتونچو و اُزترک^{۱۶} در ۲۰۰۱ [۱۳] حل دقیق مخازن تحت فشار استوانه‌ای و کروی جدار ثابت *FGM* را ارائه کردند. در مقاله‌ی ایشان رابطه و نمودار مربوط به تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی دچار اشتباه شده است. جبّاری و همکاران در ۲۰۰۲ [۱۴] تنش-های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی تحت

9. Perturbation Theory

10. Lekhnitskii

11. Composite Bodies

12. Functionally Graded Materials

13. Niino

14. Fukui & Yamanaka

15. Horgan & Chan

16. Tutuncu & Ozturk

1. Lamé

2. Plane Elasticity Theory (PET)

3. Naghdi

4. Mirsky & Hermann

5. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)

6. Greenspan

7. Ziv & Perl

8. Suzuki & Takahashi

نیز از کرنش برشی و تنش برشی چشم‌پوشی می‌شود. در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل، راست باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته می‌شود.

مطابق شکل ۱، فاصله‌ی هر نقطه از پوسته از محور تقارن (r)، برابر است با مجموع شعاع صفحه‌ی میانی (R) و فاصله‌ی آن نقطه از صفحه‌ی میانی (z).

$$r = R + z \quad \text{و} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2} \quad (1)$$

h ضخامت و L طول استوانه است.

$$h = r_o - r_i \quad \text{و} \quad 0 \leq x \leq L \quad (2)$$

بر اساس نظریه الاستیسیته‌ی مستوی، جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{R + z} \quad (3)$$

با توجه به شرط $\left| \frac{z}{R} \right| < 1$ و به کمک بسط تیلور، جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$u_r = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) \\ = \left(C_1 R + \frac{C_2}{R} \right) + \left(C_1 - \frac{C_2}{R^2} \right) z + \frac{C_2}{R^2} z^2 + \dots \quad (4)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$u_r = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots \quad (5)$$

بر اساس رابطه (۵)، می‌توان جابه‌جایی شعاعی استوانه را به صورت چند جمله‌ای بر حسب z نوشت. اگر $z = 0$ شود، جابه‌جایی صفحه‌ی میانی به دست می‌آید.

بارهای متقارن و در ۲۰۰۳ [۱۵] تحت بارهای پایدار نامتقارن محوری را با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی ارائه کردند. ژیفای و هونگ‌جون^۱ در ۲۰۰۶ [۱۶] حل دقیق استوانه‌های توخالی با تغییرات خطی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را با لایه‌های همگن ارائه کردند. ایشان در ۲۰۰۷ [۱۷] با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت خطی و توانی، استوانه‌ی FGM را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، تحلیل و با حل توتونچو (۲۰۰۱) مقایسه کردند. توتونچو در ۲۰۰۷ [۱۸] مشابه مقاله‌ی پیشین ولی با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت نمایی، توزیع تنش‌ها را در یک استوانه‌ی ناهمگن به دست آورد.

قناد و همکاران در ۲۰۱۰ [۱۹] حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری FGM را بر مبنای نظریه الاستیسیته‌ی مستوی به‌ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه و اشتباه مقاله‌ی [۱۳] را تصحیح کردند. در مقاله‌ی حاضر با استفاده از $FSDT$ ، حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم FGM متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی ارائه می‌شود.

۲- روابط اساسی

در نظریه الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود. در نظریه کلاسیک پوسته‌های نازک، فرض می‌شود که خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل، همچنان راست و عمود باقی می‌مانند و جابه‌جایی هر نقطه از پوسته، جابه‌جایی صفحه‌ی میانی در نظر گرفته می‌شود. در این نظریه

است. $r = R + z$ را در رابطه‌ی (۸) قرار می‌دهیم.

$$E(z) = E_i \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n = \frac{E_i}{r_i^n} (R+z)^n \quad (9)$$

تنش‌ها بر اساس روابط رفتاری^۲ برای مواد ناهمگن و همسانگرد عبارتند از:

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{cases} = \frac{E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{cases} \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}$$

و به‌شکل خلاصه‌تر:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E(z) [(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k)] \\ \tau_{xz} = \frac{1-2\nu}{2} \lambda E(z) \gamma_{xz}, \quad \lambda = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (11)$$

نیروهای محوری بر حسب متجه‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/r}^{h/r} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} dz \quad (12-الف)$$

لنگرهای خمشی بر حسب متجه‌های تنش برابرند با:

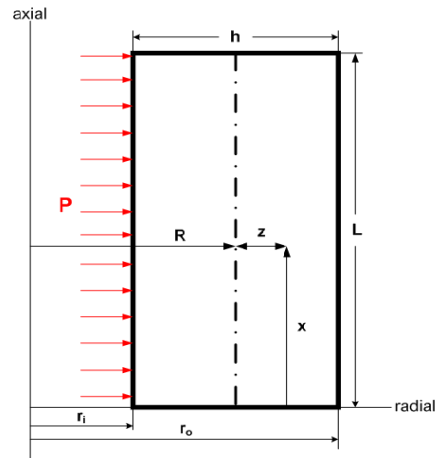
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/r}^{h/r} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} z dz \quad (12-ب)$$

نیروی برشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$Q_x = \int_{-h/r}^{h/r} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (12-پ)$$

و لنگر پیچشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$M_{xz} = \int_{-h/r}^{h/r} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (12-ت)$$



شکل ۱ پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت

در این مقاله از تقریب مرتبه‌ی یک (نظریه میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اول) استفاده می‌شود. جابجایی‌ها برای استوانه‌ی متقارن محوری^۱ عبارتند از [۳]:

$$\begin{cases} U_x = u(x) + \phi(x)z \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w(x) + \psi(x)z \end{cases} \quad (6)$$

و کرنش‌ها بر اساس روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{du}{dx} + \frac{d\phi}{dx} z \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r} = \frac{w}{R+z} + \frac{\psi}{R+z} z \\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \psi \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \left(\phi + \frac{dw}{dx} \right) + \frac{d\psi}{dx} z \end{cases} \quad (7)$$

مدول الاستیسیته تابعی از شعاع استوانه به صورت توانی و نسبت پواسون ثابت فرض می‌شود:

$$E(r) = E_i \bar{r}^n = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \quad \text{و} \quad \bar{r} = \frac{r}{r_i} \quad (8)$$

E_i مدول یانگ و r_i شعاع در سطح داخلی استوانه و n ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n = 0$ یعنی ماده همگن

$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - RQ_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P \left(R - \frac{h}{\gamma} \right) \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = P \frac{h}{\gamma} \left(R - \frac{h}{\gamma} \right) \end{cases} \quad (1-19)$$

$$R [N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi]_0^L = 0 \quad (2-19)$$

رابطه‌ی (۲-۱۹) شرایط مرزی هستند که می‌باید در دو انتهای استوانه صفر باشند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱-۱۹) باید نیروها و ولنگرها را با استفاده از روابط (۱۲) به متجه‌های تنش و با استفاده از روابط (۱۱) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۷) بر حسب جابه‌جایی‌ها نوشت. در نتیجه یک دستگاه ۴ معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به دست می‌آید که به‌طور خلاصه به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} [A] \frac{d^r}{dx^r} \{y\} + [A_r] \frac{d}{dx} \{y\} + [A_r] \{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{u \ \phi \ w \ \psi\}^T \\ \{F\} = \frac{Pr_i^n}{\lambda E_i} \left(R - \frac{h}{\gamma} \right) \{0 \ 0 \ -1 \ h/\gamma\}^T \end{cases} \quad (20)$$

ماتریس‌های $[A]_{r \times r}$ و $[A_r]_{r \times r}$ متقارن و پادمتقارن هستند. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۰) دارای حل عمومی و حل خصوصی است.

$$\begin{aligned} A_r \{y''\} + A_r \{y'\} + A_r \{y\} &= \{F\} \\ \Rightarrow \{y\} &= \{y\}_g + \{y\}_p \end{aligned} \quad (21)$$

برای حل عمومی دستگاه (۲۱)، مقدار $\{y\} = \{v\} e^{mx}$ را در معادلات آن می‌گذاریم.

$$e^{mx} [m^r A_r + mA_r + A_r] \{v\} = \{0\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} e^{mx} &\neq 0 \\ |m^r A_r + mA_r + A_r| &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

بر اساس اصل کار مجازی^۱، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (13)$$

انرژی کرنشی:

$$\begin{cases} U = \iiint_V U^* dV, dV = r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* = \frac{1}{\gamma} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \end{cases} \quad (14)$$

و کار نیروهای خارجی:

$$\begin{cases} W = \iint_S (\vec{f} \cdot \vec{u}) dS, dS = r_r d\theta dx = \left(R - \frac{h}{\gamma} \right) d\theta dx \\ \vec{f} \cdot \vec{u} = P U_z \end{cases} \quad (15)$$

انتگرال‌گیری در محدوده‌ی زیر انجام می‌شود:

$$0 \leq x \leq L \quad \text{و} \quad -\frac{h}{\gamma} \leq z \leq \frac{h}{\gamma} \quad (16)$$

تغییرات انرژی کرنشی برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta U &= R \int_0^L \int_{-h/\gamma}^{h/\gamma} \delta U^* \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz dx d\theta \\ \Rightarrow \frac{\delta U}{\gamma \pi} &= R \int_0^L \int_{-h/\gamma}^{h/\gamma} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz dx \end{aligned} \quad (17)$$

و تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L \int_0^{2\pi} P \delta U_z \left(R - \frac{h}{\gamma} \right) dx d\theta \\ \Rightarrow \frac{\delta W}{\gamma \pi} &= PR \int_0^L \delta U_z \left(1 - \frac{h}{2R} \right) dx \end{aligned} \quad (18)$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۷) در روابط (۱۷) و (۱۸) و نیز به کارگیری اصول حساب بردشی^۲ و اصل کار مجازی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{\gamma \pi} = \frac{\delta W}{\gamma \pi}$$

1. Virtual Work Principle
2. Variational Calculus

$$\sigma_{max} = \sigma_\theta = \lambda E_i \bar{r}^n [(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r] \quad (31)$$

۳- حل استوانه‌های همگن

در استوانه‌ی همگن و همسانگرد، مدول یانگ و نسبت پواسون هر دو ثابت هستند. با قرار دادن مقدار $n = 0$ در رابطه‌ی (۹)، ماده‌ی همگن نتیجه می‌شود.

$$E = E_i = const. \quad (32)$$

روابط سینماتیک (۷) را در روابط رفتاری (۱۰) قرار داده، متجه‌های تنش را در معادلات (۱۲) می‌گذاریم و انتگرال‌گیری می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{aligned} N_x &= \lambda Eh \left[(1-\nu) \left(\frac{du}{dx} + \frac{h^\nu}{12R} \frac{d\phi}{dx} \right) + \nu \left(\frac{w}{R} + \psi \right) \right] \\ N_\theta &= \lambda E \left[\nu h \frac{du}{dx} + (1-\nu) \alpha w + (h - (1-\nu)R\alpha) \psi \right] \\ N_z &= \lambda Eh \left[\nu \left(\frac{du}{dx} + \frac{h^\nu}{12R} \frac{d\phi}{dx} \right) + \nu \frac{w}{R} + (1-\nu) \psi \right] \end{aligned} \right. \quad (33-الف)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_x &= \lambda E \frac{h^\nu}{12R} \left[(1-\nu) \left(\frac{du}{dx} + R \frac{d\phi}{dx} \right) + 2\nu\psi \right] \\ M_\theta &= \lambda E \left\{ \nu \frac{h^\nu}{12} \frac{d\phi}{dx} + (1-\nu) \times \left[(h - R\alpha)w + (R^\nu\alpha - Rh)\psi \right] \right\} \end{aligned} \right. \quad (33-ب)$$

$$Q_x = K(1-\nu) \lambda E \frac{h}{\nu} \left[\phi + \frac{dw}{dx} + \frac{h^\nu}{12R} \frac{d\psi}{dx} \right] \quad (33-پ)$$

$$M_{xz} = K(1-\nu) \lambda E \frac{h^\nu}{12R} \left[\phi + \frac{dw}{dx} + R \frac{d\psi}{dx} \right] \quad (33-ت)$$

K ضریب تصحیح برشی^۳ است که بسته به هندسه‌ی

از حل معادله‌ی (۲۳)، مقادیر ویژه^۱ m_i محاسبه می‌شوند که با قرار دادن آنها در معادله‌ی (۲۲)، بردارهای ویژه^۲ $\{v\}_i$ به دست می‌آیند. در نتیجه حل عمومی عبارت است از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{v\}_i e^{m_i x} \quad (24)$$

برای حل خصوصی با توجه به اینکه $\{F\}$ ثابت است، لذا جواب تابعی از x نمی‌شود.

$$\{y\}_p = \{K_\theta\} \quad (25)$$

در نتیجه جواب کلی:

$$\{y\} = \{y\}_p + \{y\}_g = \{K_\theta\} + \sum_{i=1}^6 C_i \{v\}_i e^{m_i x} \quad (26)$$

در یک استوانه‌ی ضخیم متقارن محوری با دو سر بسته و مقید (کرنش صفحه‌ای)، اگر ضخامت ثابت و فشار یکنواخت باشد، جابه‌جایی شعاعی در نقاط دور از مرز به x بستگی ندارد. بنابراین معادله‌ی (۲۰) ساده می‌شود:

$$[A_r]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [A_r]^{-1} \{F\} \quad (27)$$

از حل معادله‌ی (۲۷) و روابط (۷) نتیجه می‌شود که کرنش برشی و تنش برشی صفر هستند و این نتیجه با فرضیات نظریه الاستیسیته‌ی مستوی هم‌خوانی دارد. در نتیجه ماتریس $[A_3]_{2 \times 2}$ برای محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی استفاده می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{P(R-h/\nu)r_i^n}{\lambda E_i} [A_r]_{rxr}^{-1} \begin{Bmatrix} -1 \\ h/\nu \end{Bmatrix} \quad (28)$$

جابه‌جایی شعاعی عبارت است از:

$$U_z = w + \psi z \rightarrow u_r = (w - R\psi) + \psi r \quad (29)$$

کرنش‌ها بر اساس روابط سینماتیک عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \psi \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \psi + \frac{w - R\psi}{r} \end{cases} \quad (30)$$

و تنش پیشینه در استوانه بر اساس روابط رفتاری:

3. Shear Correction Factor

1. Eigenvalues
2. Eigenvectors

برای استوانه‌ی ضخیم با جدار ثابت و فشار یکنواخت در حالت کرنش صفحه‌ای در نقاط دور از مرز و با استفاده از معادله‌ی (۲۷) داریم:

$$\begin{cases} \mu R h \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \\ \gamma_{xz} = \phi + \frac{dw}{dx} + \frac{d\psi}{dx} z = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

صفر شدن کرنش برشی و تنش برشی برای استوانه‌ی مذکور با فرضیات نظریه الاستیسیته‌ی مستوی هم‌خوانی دارد. براساس رابطه‌ی (۲۸) داریم:

$$\begin{cases} w \\ \psi \end{cases} = \begin{bmatrix} (1-\nu)\alpha & h-(1-\nu)R\alpha \\ h-(1-\nu)R\alpha & (1-\nu)R\alpha \end{bmatrix}^{-1} \times \frac{P(R-h/r)}{\lambda E} \begin{Bmatrix} 1 \\ -h/r \end{Bmatrix} \quad (37)$$

و جابه‌جایی شعاعی مطابق رابطه‌ی (۲۹) نتیجه می‌شود:

$$u_r = \frac{Pr_i^2}{\lambda E h [h - r(1-\nu)R\alpha]} \{ [h - (1-\nu) \times r_i \alpha] \bar{r} - h k \} \quad (38)$$

۴- مقایسه‌ی نتایج FSDT و PET

براساس نظریه الاستیسیته‌ی مستوی، جابه‌جایی شعاعی در حالت کرنش صفحه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۹]:

$$u_r^P = \frac{Pr_i \bar{r} (1+\nu)}{E(k^2-1)} \left[(1-\nu) + \frac{k^2}{\bar{r}^2} \right] \quad (39)$$

برای مقایسه و بررسی نتایج دو روش، یک استوانه‌ی جدار ضخیم را با مشخصات: شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ تحت فشار یکنواخت داخلی $P = 80 \text{ MPa}$ با مدول یانگ $E = 200 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ در نظر گرفته می‌شود.

شکل ۲ نشان می‌دهد که جابه‌جایی شعاعی ناشی از دو روش در محدوده‌ی لایه‌ی میانی، تقریباً یکسان است و در سطح داخلی اختلاف بیشتر می‌شود ولیکن در مجموع اختلاف اندکی وجود دارد (کمتر از ۰.۴٪). برای بررسی تأثیر

پوسته در عبارت تنش برشی وارد می‌شود. این ضریب در حالت استاتیک برای استوانه $K = \frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است [۲۰].

$$\begin{cases} \alpha = \ln \left(\frac{R+h/r}{R-h/r} \right) = \ln k \quad \text{و} \quad k = \frac{r_o}{r_i} \\ \mu = \frac{K}{2} (1-\nu) \end{cases} \quad (34)$$

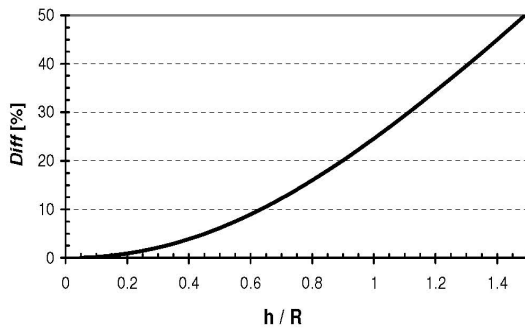
نیروها و لنگرهای روابط (۳۳) را در معادلات دیفرانسیل (۱۹-۱) می‌گذاریم و ماتریس‌های رابطه‌ی (۲۰) را به دست می‌آوریم.

$$A_1 = \begin{bmatrix} (1-\nu)Rh & (1-\nu)\frac{h^r}{12} & 0 & 0 \\ (1-\nu)\frac{h^r}{12} & (1-\nu)\frac{Rh^r}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu Rh & \mu \frac{h^r}{12} \\ 0 & 0 & \mu \frac{h^r}{12} & \mu \frac{Rh^r}{12} \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu h & \nu Rh \\ 0 & 0 & -\mu Rh & -(\mu - \nu) \frac{h^r}{12} \\ -\nu h & \mu Rh & 0 & 0 \\ -\nu Rh & (\mu - \nu) \frac{h^r}{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu Rh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\nu)\alpha & -[h - (1-\nu)R\alpha] \\ 0 & 0 & -[h - (1-\nu)R\alpha] & -(1-\nu)R\alpha \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

$$\{F\} = \frac{P}{\lambda E} \left(R - \frac{h}{2} \right) \{ 0 \quad 0 \quad -1 \quad h/r \}^T \quad (4-35)$$



شکل ۳ تغییر درصد اختلاف جابه‌جایی با تغییر ضخامت

۵- حل استوانه‌های ناهمگن

با استفاده از روابط (۱۰) و (۹) و توزیع مدول الاستیک در محدوده‌ی $-2 \leq n \leq 2$ ، تنش‌ها را بر حسب کرنش‌ها، سپس با بهره‌گیری از روابط (۷)، کرنش‌ها را بر حسب پارامترهای جابه‌جایی و سرانجام با انتگرال‌گیری از روابط (۱۲)، نیروها و لنگرها را به دست می‌آوریم. با قرار دادن آنها در معادلات (۱۹-۱)، ماتریس‌های معادله‌ی (۲۰) و در نهایت بر اساس روابط (۲۸) و (۲۹)، جابه‌جایی شعاعی و با رابطه‌ی (۳۱)، تنش بیشینه را به صورت پارامتری محاسبه می‌نماییم. ماتریس‌های معادله‌ی (۲۰) عبارتند از:

$$\begin{cases} [A_1]_{r \times r} = [a_{ij}] & [A_2]_{r \times r} = [b_{ij}] \\ [A_3]_{r \times r} = [c_{ij}] \end{cases} \quad (43)$$

که در آن ثابت‌های بکار رفته در روابط عبارتند از:

$$\begin{cases} k = \frac{r_o}{r_i}, \quad \alpha = \ln k, \quad \mu = \frac{K}{\nu}(1-\nu) \\ \beta = \frac{h}{(R-h/\nu)(R+h/\nu)} = \frac{k-1}{kr_i} \end{cases} \quad (44)$$

۵-۱- ثابت ناهمگنی $n=1$

مدول الاستیک بر اساس رابطه‌ی (۹) عبارت است از:

$$E(z) = \frac{E_i}{r_i}(R+z) \quad (45)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_1]_{r \times r}$:

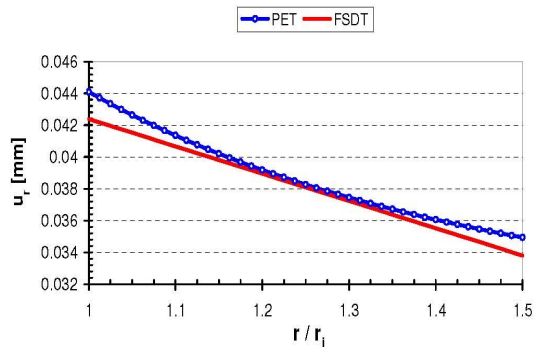
$$a_{11} = (1-\nu) \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right)$$

ضخامت جدار بر روی جابه‌جایی شعاعی، روابط (۳۸) و

(۳۹) را بر حسب $\bar{h} = \frac{h}{R}$ در جدار داخلی که منشأ بروز بیشترین اختلاف است، می‌نویسیم.

$$\begin{cases} u_r^P = \frac{PR(1+\nu)(1-\bar{h}/\nu)}{E(k^2-1)} [(1-\nu) + k^\nu] \\ k = \frac{\nu + \bar{h}}{\nu - \bar{h}} \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} u_r^F = -\frac{PR(1-\bar{h}/\nu)}{\lambda E \bar{h} [\bar{h} - \nu(1-\nu)\alpha]} [\bar{h}^\nu + (1-\nu)] \\ \times (1-\bar{h}/\nu)^\nu \alpha \\ \alpha = \ln \left(\frac{\nu + \bar{h}}{\nu - \bar{h}} \right) \end{cases} \quad (41)$$



شکل ۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن

شکل ۳ درصد اختلاف مقادیر جابه‌جایی شعاعی به-

دست آمده از $FSDT$ و PET را نشان می‌دهد. هرچه استوانه به سمت توپر شدن پیش می‌رود، اختلاف نتایج دو نظریه نیز بیشتر می‌شود. بیشینه اختلاف در محدوده‌ی

$\frac{1}{20} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{16}{20}$ می‌رسد، که برای تحلیل

استوانه‌های جدار ضخیم دقت قابل قبولی می‌باشد. در حالتی که ضخامت جدار با شعاع صفحه‌ی میانی برابر باشد ($\bar{h} = 1$) اختلاف حدود ۲۵٪ می‌شود.

$$Diff = \left(\frac{u_r^P - u_r^F}{u_r^P} \right) \times 100 \quad (42)$$

$$E(z) = \frac{E_i r_i}{(R+z)} \quad (48)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A]_{r \times r}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-\nu)h \\ a_{22} &= (1-\nu)\frac{h^r}{12} \\ a_{33} &= \mu h \\ a_{44} &= \mu\frac{h^r}{12} \end{aligned} \quad (1-49)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس پادمتقارن $[A_r]_{r \times r}$:

$$\begin{aligned} b_{1r} &= -b_{r1} = \nu\alpha \\ b_{1r} &= -b_{r1} = \nu(\nu h - R\alpha) \\ b_{2r} &= -b_{r2} = \nu(h - R\alpha) - \mu h \\ b_{3r} &= -b_{r3} = \nu(R\alpha - Rh) \end{aligned} \quad (2-49)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_r]_{r \times r}$:

$$\begin{aligned} c_{2r} &= -\mu h \\ c_{3r} &= -(1-\nu)\beta \\ c_{4r} &= \nu(R\alpha - h) - (1-\nu)R\beta \\ c_{rr} &= c_{rr} = -\alpha + (1-\nu)R\beta \end{aligned} \quad (3-49)$$

و بردار $\{F\}_{r \times 1}$:

$$\{F\} = \frac{P}{\lambda E_i r_i} \left(R - \frac{h}{\nu} \right) \{0 \quad 0 \quad -1 \quad h/\nu\}^T \quad (4-49)$$

جابه‌جایی شعاعی بر اساس رابطه‌ی (۲۹) می‌شود:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{Pr_i}{\lambda E_i \left[\alpha^\nu - \nu(1-\nu)h\beta \right]} \\ &\times \left\{ \left[\alpha - (1-\nu)\beta r_i \right] \bar{r} + \left(\alpha - \frac{\nu h}{r_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

۳-۵- ثابت ناهمگنی $n=2$

مدول الاستیک بر اساس رابطه‌ی (۹) عبارت است از:

$$E(z) = \frac{E_i}{r_i^\nu} (R+z)^\nu \quad (51)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A]_{r \times r}$:

$$a_{2r} = (1-\nu) \left(\frac{R^\nu h^\nu}{12} + \frac{h^\delta}{\lambda_0} \right)$$

$$a_{3r} = \mu \left(R^\nu h + \frac{h^r}{12} \right)$$

$$a_{4r} = \mu \left(\frac{R^\nu h^\nu}{12} + \frac{h^\delta}{\lambda_0} \right)$$

$$a_{1r} = a_{r1} = (1-\nu) \frac{Rh^\nu}{\epsilon} \quad (1-46)$$

$$a_{rr} = a_{rr} = \mu \frac{Rh^\nu}{\epsilon}$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس پادمتقارن $[A_r]_{r \times r}$:

$$b_{1r} = -b_{r1} = \nu Rh$$

$$b_{1r} = -b_{r1} = \nu \left(R^\nu h + \frac{h^r}{\epsilon} \right)$$

$$b_{2r} = -b_{r2} = -\mu \left(R^\nu h + \frac{h^r}{12} \right) + \nu \frac{h^r}{12} \quad (2-46)$$

$$b_{3r} = -b_{r3} = -(\nu\mu - \nu\nu) \frac{Rh^\nu}{12}$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_r]_{r \times r}$:

$$c_{2r} = -\mu \left(R^\nu h + \frac{h^r}{12} \right)$$

$$c_{3r} = -(1-\nu)h$$

$$c_{4r} = -(1-\nu)R^\nu h - \frac{h^r}{\epsilon} \quad (3-46)$$

$$c_{rr} = c_{rr} = -\nu Rh$$

و بردار $\{F\}_{r \times 1}$:

$$\{F\} = \frac{Pr_i}{\lambda E_i} \left(R - \frac{h}{\nu} \right) \{0 \quad 0 \quad -1 \quad h/\nu\}^T \quad (4-46)$$

جابه‌جایی شعاعی بر اساس رابطه‌ی (۲۹) می‌شود:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{Pr_i^\nu}{\lambda E_i h \left[(1-\nu)R^\nu + (1-\nu)\frac{h^\nu}{\epsilon} \right]} \\ &\times \left[\left(Rkr_i + \frac{h^\nu}{\epsilon} \right) - \left(\frac{h}{\nu} + \nu r_i \right) r_i \bar{r} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

۲-۵- ثابت ناهمگنی $n=1$

مدول الاستیک بر اساس رابطه‌ی (۹) عبارت است از:

$$\times \left\{ \left[(R+h/\nu) \frac{h}{\nu} + \nu R r_i \right] \bar{r} - \left[(\Delta R + h/\nu) \frac{h^r}{\nu r_i} + R^r k \right] \right\} \quad (53)$$

۵-۴- ثابت ناهمگنی $n=-2$

مدول الاستیک بر اساس رابطه‌ی (۹) عبارت است از:

$$E(z) = \frac{E_i r_i^r}{(R+z)^r} \quad (54)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A]_{r \times r}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-\nu)\alpha \\ a_{rr} &= (1-\nu)(R^r\alpha - Rh) \\ a_{rr} &= \mu\alpha \\ a_{rr} &= \mu(R^r\alpha - Rh) \\ a_{1r} &= a_{r1} = (1-\nu)(h - R\alpha) \\ a_{rr} &= a_{rr} = \mu(h - R\alpha) \end{aligned} \quad (1-55)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس پادمتقارن $[A]_{r \times r}$:

$$\begin{aligned} b_{1r} &= -b_{r1} = \nu\beta \\ b_{1r} &= -b_{r1} = \nu(\alpha - R\beta) \\ b_{rr} &= -b_{rr} = -\mu\alpha + \nu(\alpha - R\beta) \\ b_{rr} &= -b_{rr} = -\mu(h - R\alpha) \\ &+ \nu(\alpha h - \nu R\alpha + R^r\beta) \end{aligned} \quad (2-55)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A]_{r \times r}$:

$$\begin{aligned} c_{rr} &= -\mu\alpha \\ c_{rr} &= -(1-\nu) \frac{R}{h} \beta^r \\ c_{rr} &= -\nu\alpha + (1+\nu)R\beta - (1-\nu) \frac{Rh}{4} \beta^r \\ c_{rr} &= c_{rr} = -\nu\beta + (1-\nu) \frac{h}{4} \beta^r \end{aligned} \quad (3-55)$$

و بردار $\{F\}_{r \times 1}$:

$$\{F\} = \frac{P}{\lambda E_i r_i^r} \left(R - \frac{h}{\nu} \right) \{0 \quad 0 \quad -1 \quad h/\nu\}^T \quad (4-55)$$

جابه‌جایی شعاعی بر اساس رابطه‌ی (۲۹) می‌شود:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-\nu) \left(R^r h + \frac{Rh^r}{\nu} \right) \\ a_{rr} &= (1-\nu) \left(\frac{R^r h^r}{\nu} + \frac{\nu Rh^o}{\lambda} \right) \\ a_{rr} &= \mu \left(R^r h + \frac{Rh^r}{\nu} \right) \\ a_{rr} &= \mu \left(\frac{R^r h^r}{\nu} + \frac{\nu Rh^o}{\lambda} \right) \\ a_{1r} &= a_{r1} = (1-\nu) \left(\frac{R^r h^r}{\nu} + \frac{h^o}{\lambda} \right) \\ a_{rr} &= a_{rr} = \mu \left(\frac{R^r h^r}{\nu} + \frac{h^o}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (1-52)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس پادمتقارن $[A]_{r \times r}$:

$$\begin{aligned} b_{1r} &= -b_{r1} = \nu \left(R^r h + \frac{h^r}{\nu} \right) \\ b_{1r} &= -b_{r1} = \nu \left(R^r h + \frac{\Delta Rh^r}{\nu} \right) \\ b_{rr} &= -b_{rr} = -\mu \left(R^r h + \frac{Rh^r}{\nu} \right) + \nu \frac{Rh^r}{\nu} \\ b_{rr} &= -b_{rr} = -\mu \left(\frac{R^r h^r}{\nu} + \frac{h^o}{\lambda} \right) + \nu \left(\frac{R^r h^r}{\nu} + \frac{h^o}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2-52)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A]_{r \times r}$:

$$\begin{aligned} c_{rr} &= -\mu \left(R^r h + \frac{Rh^r}{\nu} \right) \\ c_{rr} &= -(1-\nu) Rh \\ c_{rr} &= -(1-\nu) R^r h - \frac{Rh^r}{\nu} \\ c_{rr} &= c_{rr} = -\left(\nu R^r h + \frac{h^r}{\nu} \right) \end{aligned} \quad (3-52)$$

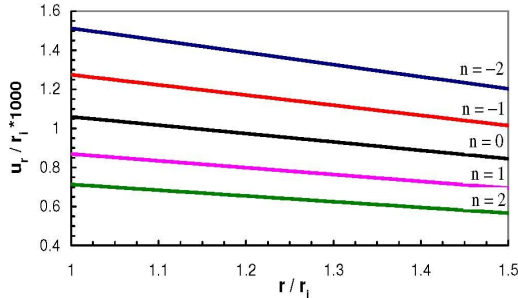
و بردار $\{F\}_{r \times 1}$:

$$\{F\} = \frac{Pr_i^r}{\lambda E_i} \left(R - \frac{h}{\nu} \right) \{0 \quad 0 \quad -1 \quad h/\nu\}^T \quad (4-52)$$

جابه‌جایی شعاعی بر اساس رابطه‌ی (۲۹) می‌شود:

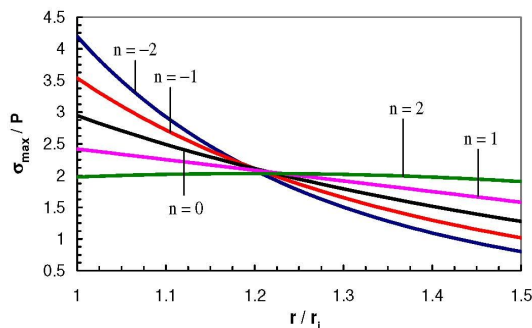
$$u_r = \frac{Pr_i^r}{\lambda E_i h \left[\frac{h^r}{\nu} - (1-\nu)R^r - (\nu-3\nu)R^r h^r/\nu \right]}$$

ماده‌ی همگن است و میزان تغییرات به مقدار $|n|$ بستگی دارد.



شکل ۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن

شکل ۶ توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جدار به ازای n های مختلف نشان می‌دهد. (در مرجع [۱۳] این نمودار اشتباه رسم شده است). تنش محیطی به ازای $n < 0$ در نیمه‌ی داخلی جدار، بیشتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جدار، کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد و برعکس به‌ازای $n > 0$ در نیمه‌ی داخلی جدار، کمتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جدار، بیشتر از ماده‌ی همگن است. در محدوده‌ی لایه‌ی میانی استوانه، رفتار ماده‌ی ناهمگن همانند رفتار ماده‌ی همگن می‌شود.



شکل ۶ توزیع تنش بیشینه در استوانه‌ی ناهمگن

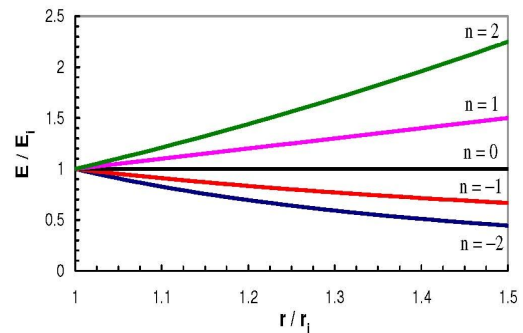
۷- نتیجه‌گیری

نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد که جابه‌جایی‌های به‌دست آمده از روش $FSDT$ در سطح میانی با روش PET کاملاً

$$u_r = \frac{P}{\lambda E_i \left[1 - \nu(1-\nu) \frac{R\alpha}{h} \right] \beta^{\nu}} \times \left\{ \left[\nu\beta - (1-\nu) \left(\frac{h}{\rho} - \frac{R}{\rho} \right) \beta^{\nu} \right] \bar{r} + \left(\beta - \frac{\nu\alpha}{r_i} \right) \right\} \quad (56)$$

۶- بررسی نتایج

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، یک استوانه‌ی جدار ضخیم با مشخصات زیر را با توزیع متفاوت مدول الاستیک در راستای جدار در نظر می‌گیریم. استوانه‌ی جدار ثابت به شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ تحت فشار یکنواخت داخلی $P = 80 \text{ MPa}$ قرار گرفته است. مدول الاستیک سطح داخلی استوانه $E_i = 200 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ می‌باشد. شکل ۴ توزیع مدول الاستیک را نسبت به شعاع $E/E_i = (r/r_i)^n$ در استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به ازای مقادیر صحیح n نشان می‌دهد.



شکل ۴ توزیع مدول الاستیک در راستای شعاعی

شکل ۵ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جدار به ازای n های مختلف نشان می‌دهد. به ازای $n < 0$ جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن بیشتر است و به‌ازای $n > 0$ کمتر می‌شود، ولیکن این نسبت در طول جدار تقریباً ثابت می‌ماند، یعنی تغییرات جابه‌جایی ماده‌ی ناهمگن مشابه تغییرات جابه‌جایی در

در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که به ازای n های مثبت یا منفی، تنش بیشینه در یک نیمه‌ی جدار استوانه، کاهش و در نیمه‌ی دیگر جدار، افزایش می‌یابد. به ازای n های مثبت، جابه‌جایی شعاعی در جدار استوانه، کاهش و به ازای n های منفی، افزایش می‌یابد و هر چقدر $|n|$ بزرگتر باشد، کاهش یا افزایش تنش یا جابه‌جایی استوانه‌ی ناهمگن نسبت به استوانه‌ی همگن بیشتر می‌شود. بنابراین بهتر است $|n|$ بزرگ نباشد. n های مثبت موجب کاهش جابه‌جایی و تنش در سطح داخلی می‌شود که برای بسیاری از صنایع اهمیت دارد. به ازای $n = \pm 1$ حدود $\pm 20\%$ تغییرات در رفتار ماده نسبت به ماده‌ی همگن ایجاد می‌شود.

هم‌خوانی دارند و در سطح داخلی، کمتر از 4% اختلاف دارند، یعنی روش $FSDT$ با دقت قابل قبولی، جابه‌جایی‌ها را نتیجه می‌دهد.

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که تنش‌های به‌دست آمده از روش $FSDT$ در سطح میانی با روش PET تقریباً هم‌خوانی دارند ولیکن در سطح داخلی، روش $FSDT$ مقادیر بیشتری نسبت به روش PET نشان می‌دهد. البته در طراحی مهندسی، موجب افزایش ضریب اطمینان می‌شود و از این رو مشکلی برای پیش‌بینی تنش بحرانی (تنش تسلیم) ایجاد نمی‌کند. برای دستیابی به دقت‌های بالاتر، می‌توان از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه‌ی دو یا بالاتر استفاده کرد.

جدول ۱ مقایسه‌ی نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با PET و $FSDT$

	$u_r [mm]$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
سطح داخلی $r = r_i$	$PET [19]$	۰/۰۶۲۱۶۳	۰/۰۵۲۶۷۳	۰/۰۴۴۰۹۶	۰/۰۳۶۴۷۱	۰/۰۲۹۸۱۱
	$FSDT$	۰/۰۶۰۵۱۲	۰/۰۵۰۹۸۴	۰/۰۴۲۳۸۸	۰/۰۳۴۷۶۴	۰/۰۲۸۱۲۴
سطح میانی $r = R$	$PET [19]$	۰/۰۵۴۵۴۱	۰/۰۴۵۹۸۹	۰/۰۳۸۲۷۲	۰/۰۳۱۴۲۶	۰/۰۲۵۴۵۸
	$FSDT$	۰/۰۵۴۳۰۹	۰/۰۴۵۷۹۰	۰/۰۳۸۰۹۶	۰/۰۳۱۲۶۶	۰/۰۲۵۳۱۲

جدول ۲ مقایسه‌ی نتایج تنش بیشینه محاسبه شده با PET و $FSDT$

	$\sigma_\theta [MPa]$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
سطح داخلی $r = r_i$	$PET [19]$	۳۰۷/۲۷	۲۵۵/۱۳	۲۰۸	۱۶۶/۱۱	۱۲۹/۵۱
	$FSDT$	۳۳۵/۷۲	۲۸۳/۲۳	۲۳۵/۷۸	۱۹۳/۶۳	۱۵۶/۸۵
سطح میانی $r = R$	$PET [19]$	۱۴۴/۱۵	۱۵۱/۰۸	۱۵۶/۱۶	۱۵۹/۱۲	۱۵۹/۸۱
	$FSDT$	۱۴۱/۳۵	۱۴۹/۳۰	۱۵۵/۶۲	۱۶۰/۰۰	۱۶۲/۲۵

۸- منابع

- material subjected to internal pressure, *JSME, Ser. I: Solid Mech.*; 35(4),1992, 379-385.
- [12] Horgan C.O., Chan A.M.; *The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, J. Elasticity*; 55,1999, 43-59.
- [13] Tutuncu N., Ozturk M.; *Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels, composites: Part B (Eng.)*; 32, 2001, 683-686.
- [14] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; *Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads, Int. J. Pressure Vessel and Piping*; 79, 2002, 493-497.
- [15] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; *General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads, J. App. Mech.*; 70, 2003, 111-118.
- [16] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; *Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, Mech. Res. Comm.*; 33, 2006, 681-691.
- [17] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; *Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, J. Composite Struc.*; 79, 2007, 140-147.
- [18] Tutuncu N.; *Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, J. Eng. Struc.*; 29, 2007, 2032-2035.
- [۱۹] قنّاد مهدی و رحیمی غلامحسین و اسماعیلزاده خادم سیامک؛ حلّ کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه الاستیسیته‌ی مستوی، مجله مکانیک مدرس، دوره ۱۰، شماره ۳، ۱۳۸۹، صص ۳۱-۴۱.
- [20] Vlachoutsis S., *Shear correction factors for plates and shells, Int. J. Num. Math. in Eng.*; 33, 1992, 1537-1552.
- [1] Timoshenko S.P.; *Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems)*, 3rd ed., New York, Van Nostrand Reinhold Co.; 1976.
- [2] Naghdi P.M. & Cooper R.M.; *Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia, J. Acoustical Sc. America*; 28(1), 1956, 56-63.
- [3] Mirsky I. & Hermann G.; *Axially motions of thick cylindrical shells, J. Appl. Mech.*; 25, 1958, 97-102.
- [4] Greenspon J.E.; *Vibration of a thick-walled cylindrical shell-comparison of the exact theory with approximate theories, J. Acous. Sc. America*; 32(5), 1960, 571-578.
- [5] Ziv M. & Perl M.; *Impulsive deformation of Mirsky-Hermann's thick cylindrical shells by a numerical method, J. Appl. Mech.*; 1973, 1009-1016.
- [6] Suzuki K. & Konno M. & Takahashi S.; *Axisymmetric Vibrations of a cylindrical shell with variable thickness, JSME*; 24(198), 1981, 2122-2132.
- [7] Takahashi S. & Suzuki K. & Kosawada T.; *Vibrations of conical shells with variable thickness, JSME*; 29(285), 1986, 4306-4311.
- [8] Eipakchi H.R. & Rahimi G.H. & Esmaeilzadeh Khadem S.; *Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to non-uniform internal pressure, J. Struc. Eng. and Mech.*; 16(6), 2003, 731-748.
- [9] Lekhnitskii S.G.; *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Moscow, Mir Pub., 1981.
- [10] Koizumi M.; *FGM activities in Japan, Composites: Part B (Eng.)*; 28, 1997, 1-4.
- [11] Fukui Y., Yamanaka N.; *Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded*