کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی ۲-فنی (۵ گروه هماهنگ)**	نیمسال (**اول**/دوم) ۸۷-۱۳۸۶ نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۸۶/۱۲/۱۵** وقت : **۱۲۰ دقیقه**

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- اگر تابع $z = f(x,y)$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته باشد و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ نشان دهید :

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^{۲} + \frac{۱}{r^{۲}}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^{۲} = (\frac{\partial f}{\partial x})^{۲} + (\frac{\partial f}{\partial y})^{۲}$$

۲۰ نمره

سوال۲- اگر S ناحیه محصور به $y = |x|$ ، $x = ۱$ ، $x = -۱$ و محور x ها باشد ، مطلوب است :

$$\iint_S (x^{۲}y + xy^{۲})dxdy$$

۲۰ نمره

سوال۳- مقدار انتگرال $\int_C \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} + ۱}}$ را بیابید که درآن C پاره خطی است که نقطه $A = (۱,۱,۱)$ را به نقطه $B = (۲,۲,۴)$ وصل می کند.

۲۰ نمره

سوال۴- حجم محصور به رویه های $z = ۰$ ، $x + y + z = ۴$ و $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ را بیابید.

۲۰ نمره

سوال۵- اگر $\vec{F} = (e^x, e^y, xyz)$ یک تابع برداری و S سطح خارجی مکعب واحد $۰ \le x \le ۱$ ، $۰ \le y \le ۱$ و $۰ \le z \le ۱$ باشد ، مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$ را بیابید.

۲۰ نمره

سوال۶- انتگرال سه گانه $\int_۰^\infty \int_۰^\infty \int_۰^\infty (x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} + ۱)^{\frac{-۵}{۲}} dx\,dy\,dz$ را محاسبه کنید.

۲۰ نمره

موفق باشید

نام خانوادگی :　　　نام :　　　شماره دانشجویی :　　　نام درس :

شماره ردیف

نمره

پاسخ سوال ۱

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\times\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\times(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}\times(r\cos\theta)$$

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^{۲}+\frac{۱}{r^{۲}}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^{۲}=(\frac{\partial f}{\partial x}\times\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\times\sin\theta)^{۲}+(-\frac{\partial f}{\partial x}\times\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\times\cos\theta)^{۲}$$

$$=(\frac{\partial f}{\partial x})^{۲}+(\frac{\partial f}{\partial y})^{۲}$$

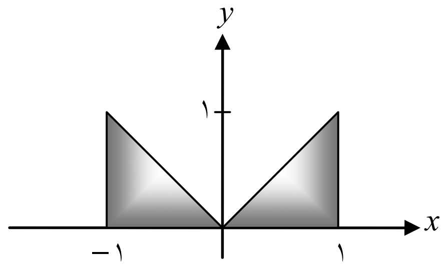
پاسخ سوال ۱

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :   نام :   شماره دانشجویی :   نام درس :   **شماره ردیف**

نمره

پاسخ سوال ۲



راه حل اول :

$$\iint_S (x^۲y+xy^۲)dxdy = \int_{x=-۱}^{۰}\int_{y=۰}^{-x}(x^۲y+xy^۲)dydx + \int_{x=۰}^{۱}\int_{y=۰}^{x}(x^۲y+xy^۲)dydx$$

$$= \int_{x=-۱}^{۰}[\frac{۱}{۲}x^۲y^۲+\frac{۱}{۳}xy^۳]_{y=۰}^{-x}dx + \int_{x=۰}^{۱}[\frac{۱}{۲}x^۲y^۲+\frac{۱}{۳}xy^۳]_{y=۰}^{x}dx$$

$$= \int_{x=-۱}^{۰}(\frac{۱}{۲}x^۴-\frac{۱}{۳}x^۴)dx + \int_{x=۰}^{۱}(\frac{۱}{۲}x^۴+\frac{۱}{۳}x^۴)dx$$

$$= \int_{x=-۱}^{۰}\frac{۱}{۶}x^۴dx + \int_{x=۰}^{۱}\frac{۵}{۶}x^۴dx = \frac{۱}{۳۰}x^۵\,\Big|_{x=-۱}^{۰} + \frac{۱}{۶}x^۵\,\Big|_{x=۰}^{۱}$$

$$= \frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۵}$$

راه حل دوم :

$$\iint_S (x^۲y+xy^۲)dxdy = \int_{y=۰}^{۱}[\int_{x=-۱}^{-y}(x^۲y+xy^۲)dx + \int_{x=y}(x^۲y+xy^۲)dx\,]dy$$

$$= \int_{y=۰}^{۱}(\,[\frac{۱}{۳}x^۳y+\frac{۱}{۲}x^۲y^۲]_{x=-۱}^{-y} + [\frac{۱}{۳}x^۳y+\frac{۱}{۲}x^۲y^۲]_{x=y}^{۱}\,]dy$$

$$= \int_{y=۰}^{۱}(\,[\frac{-۱}{۳}y^۴+\frac{۱}{۲}y^۴+\frac{۱}{۳}y-\frac{۱}{۲y^۲}]+[\frac{۱}{۳}y+\frac{۱}{۲}y^۲-\frac{۱}{۳}y^۴-\frac{۱}{۲}y^۴]\,)\,dy$$

$$= \int_{y=۰}^{۱}(\frac{-۲}{۳}y^۴+\frac{۲}{۳}y)\,dy = \frac{-۲}{۱۵}y^۵+\frac{۱}{۳}y^۲\,\Big|_{y=۰}^{۱}$$

$$= \frac{-۲}{۱۵}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۵}$$

پاسخ سوال ۲

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

پاسخ سوال ۳

راه حل اول : معادله پارامتري خطي كه از نقاط $A=(۱,۱,۱)$ و $B=(۲,۲,۴)$ مي گذرد عبارت است از :

$$x=t+۱\quad,\quad y=t+۱\quad,\quad z=۳t+۱$$

$$\int_C \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲+۱}}=\int_{t=۰}^{۱}\frac{(t+۱)+(t+۱)+۳(۳t+۱)}{\sqrt{(t+۱)^۲+(t+۱)^۲+(۳t+۱)^۲+۱}}dt$$

$$=\int_{t=۰}^{۱}\frac{۱۱t+۵}{\sqrt{۱۱\,t^۲+۱۰\,t+۴}}dt=\sqrt{۱۱\,t^۲+۱۰\,t+۴}\Big|_{t=۰}^{۱}$$

$$=۵-۲=۳$$

راه حل دوم : اگر تابع $f(x,y,z)=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲+۱}$ را در نظر بگیریم

$grad\ f(x,y,z)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲+۱}}(x,y,z)$ بنابر این انتگرال مستقل از مسیر است و داریم :

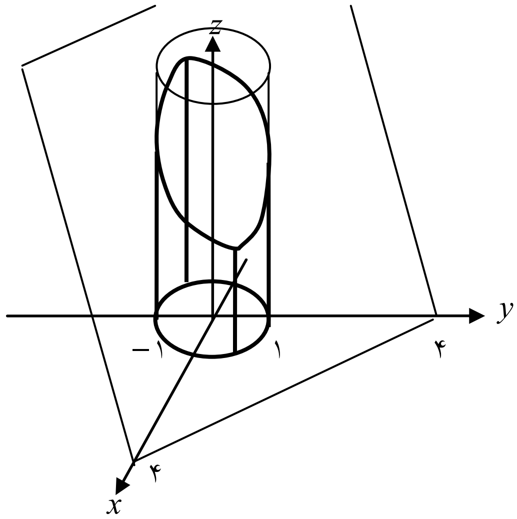
$$\int_C \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲+۱}}=\int_C grad\ f\cdot dr=f(B)-f(A)=\sqrt{۲۵}-\sqrt{۴}=۵-۲=۳$$

نام خانوادگی :   نام :   شماره دانشجویی :   نام درس :

شماره ردیف

نمره

پاسخ سوال ۴



با استفاده از مختصات استوانه اي ، حجم جسم حاصل برابر است با :

$$V=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{۱} z(rdrd\theta)=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{۱}(۴-r\cos\theta-r\sin\theta)(rdrd\theta)$$

$$=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}[۲r^{۲}-\frac{۱}{۳}r^{۳}(\cos\theta+\sin\theta)]_{r=۰}^{۱}d\theta$$

$$=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(۲-\frac{۱}{۳}(\cos\theta+\sin\theta))d\theta=۲\theta-\frac{۱}{۳}(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_{\theta=۰}^{۲\pi}$$

$$=۴\pi$$

پاسخ سوال ۴

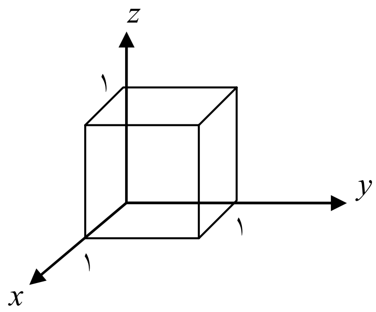
در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :　　　　　نام :　　　　　شماره دانشجویی :　　　　　نام درس :

شماره ردیف

نمره

پاسخ سوال ۵



راه حل اول : اگر سطحي را كه بردار يكه قائم آن u باشد با S_u نشان دهيم داريم :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS=\iint_{S_i}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS+\iint_{S_{-i}}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS+\iint_{S_j}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

$$+\iint_{S_{-j}}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS+\iint_{S_k}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS+\iint_{S_{-k}}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

$$=\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}e^{1}dzdy+\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}-e^{0}dzdy+\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}e^{1}dzdx$$

$$+\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}-e^{0}dzdx+\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}xy\,dydx+\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}0\,dydx$$

$$=e-1+e-1+\frac{1}{4}+0=2e-\frac{7}{4}$$

راه حل دوم : اگر حجم محصور به سطح بسته S (داخل مكعب) را V بنامبم با استفاده از قضيه ديورژانس داريم

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS=\iiint_V div\vec{F}\,dV=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(e^x+e^y+xy)dzdydx=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(e^x+e^y+xy)dydx$$

$$=\int_{x=0}^{1}(e^x+e+\frac{1}{2}x-1)dx=e+e+\frac{1}{4}-1-1=2e-\frac{7}{4}$$

پاسخ سوال ۵

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :　　　　　نام :　　　　　شماره دانشجویی :　　　　　نام درس :

شماره ردیف

نمره

پاسخ سوال ۶

ناحیه انتگرالگیری یک هشتم اول دستگاه مختصات دکارتی است بنابر این با استفاده از مختصات کروی داریم :

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (x^2+y^2+z^2+1)^{\frac{-5}{2}}\,dx\,dy\,dz=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\infty}(\rho^2+1)^{\frac{-5}{2}}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2}d\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\sin\varphi\;d\varphi\right)\left(\int_{\rho=0}^{\infty}(\rho^2+1)^{\frac{-5}{2}}\rho^2\;d\rho\right)$$

اکنون داریم : $\int_{\theta=0}^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{2}$ و $\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\sin\varphi\;d\varphi=1$.

با تغییر متغیر $\rho=\tan t$ خواهیم داشت :

$$\int_{\rho=0}^{\infty}(\rho^2+1)^{\frac{-5}{2}}\rho^2\;d\rho=\int_{t=0}^{\pi/2}(1+\tan^2 t)^{\frac{-5}{2}}\tan^2 t\,(1+\tan^2 t)\,dt$$

$$=\int_{t=0}^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_{t=0}^{\pi/2}=\frac{1}{3}$$

$$I=\frac{\pi}{2}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}$$

پاسخ سوال ۶