نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : **سید رضا موسوی**

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۱-فنی**

نیمسال تابستانی ۸۷-۱۳۸۶

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۸۷/۵/۱۲**

وقت : **۷۰ دقیقه**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱ : اگر $z = 2+3i$ یکی از ریشه های معادله $p(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 26z + 169$ باشد ، تمام ریشه های آن را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ : اگر $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<2 \\ \dfrac{x}{2} & 2 \le x \end{cases}$ ، مطلوب است $f \circ f$. **۱۵ نمره**

سوال ۳ : اگر $y = x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$ ، مقدار عبارت $y'' + 2y' + y$ را بیابید. **۱۰ نمره**

سوال ۴ : نمودار تابع $y = \arccos 3x$ محور y ها را در نقطه M قطع می کند. مختصات نقطه M و معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی در نقطه M را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال ۵ : نمودار تابع $y = \dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم نمایید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

خرمن نکرده توده کسی موسم درو   در مزرعی که وقت عمل برزگر نداشت

پروین اعتصامی

دانشگاه صنعتی شاهرود

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۱-فنی

دانشکده ریاضی | **ترم تابستانی ۸۷-۱۳۸۶** | **سیدرضا موسوی**

پاسخ سوال ۱: $p(z)=z^4+2z^3+2z^2+26z+169$

چون $z_1=2+3i$ ریشه یک چند جمله ای با ضرایب صحیح است پس مزدوج آن یعنی $z_2=2-3i$ نیز یک ریشه معادله است یعنی $p(z)$ بر $(z-2-3i)(z-2+3i)=z^2-4z+13$ بخشپذیر است. $p(z)=(z^2-4z+13)(z^2+6z+13)$

اکنون $z^2+6z+13=0$ نتیجه می‌دهد : $z_3=-3+2i$ و $z_4=-3-2i$

پاسخ سوال ۲: اگر $x^2+1<2$ پس $-1<x<1$ و اگر $\frac{x}{2}<2$ پس $x<4$

در نتیجه اگر $-1<x<1$ و یا $2\le x<4$ آنگاه $f(x)<2$ و در غیر این صورت $f(x)\ge 2$

$$f\circ f(x)=\begin{cases}(f(x))^2+1 & f(x)<2\\ \dfrac{f(x)}{2} & f(x)\ge 2\end{cases}$$

$$f\circ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{2} & x\le -1\\ (x^2+1)^2+1 & -1<x<1\\ \dfrac{x^2+1}{2} & 1\le x<2\\ (\dfrac{x}{2})^2+1 & 2\le x<4\\ \dfrac{x}{4} & 4\le x\end{cases}$$

پاسخ سوال ۳: $y=x^2e^{-x}+2xe^{-x}$ ، $y'=-x^2e^{-x}+2e^{-x}$ ، $y''=x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}$

و در نتیجه $y''+2y'+y=2e^{-x}$.

پاسخ سوال ۴: $y=\arccos 3x$ اگر $x=0$ آنگاه $y=\frac{\pi}{2}$ پس $M=(0,\frac{\pi}{2})$ و همچنین $y'=\frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$

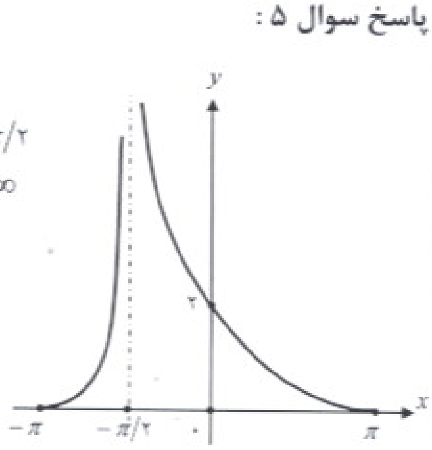
پس $m=-3$ و $m'=\frac{1}{3}$ به ترتیب شیب خطوط مماس و عمود بر منحنی در نقطه M هستند

پس $y=-3x+\frac{\pi}{2}$ معادله خط مماس و $y=\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{2}$ معادله خط قائم می‌باشد.

پاسخ سوال ۵: $y=\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$ $\quad D_y=[-\pi,\pi]-\{\frac{-\pi}{2}\}$ $\quad \left|\begin{array}{l}x=\pm\pi\\ y=2\end{array}\right.$ ، $\left|\begin{array}{l}x\to-\pi/2\\ y\to+\infty\end{array}\right.$

$y'=-\frac{\sin x+\cos x+1}{(1+\sin x)^2}$ $\quad y'=0\to\sin x+\cos x=-1\to\left|\begin{array}{l}x=\pm\pi\\ y=0\end{array}\right.,\left|\begin{array}{l}x=-\pi/2\\ y\to+\infty\end{array}\right.$

x	$-\pi$		$-\pi/2$			π
y'	0	$+$			$-$	0
y	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0



نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : **سید رضا موسوی**

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی**

نیمسال تابستانی ۸۷-۱۳۸۶

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۸۷/۵/۱۲**

وقت : **۷۰ دقیقه**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱ : معادله منحنی $(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$ را در دستگاه مختصات قطبی نوشته و شکل تقریبی آن را رسم نمایید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ : اگر نقاط $A=(4,0)$ و $C=(0,3)$ دو راس مقابل یک مربع باشند مختصات دو راس دیگر آن را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۳ : اگر $r(t)=(t+\frac{1}{t},t-\frac{1}{t},2\ln t)$ یک تابع برداری باشد : **۲۰ نمره**

الف) بردارهای یکه مماس ، قائم و قائم دوم را بیابید.

ب) طول منحنی را در بازه $t\in[\frac{1}{2},2]$ بیابید.

سوال ۴ : انحنا و تاب منحنی $f(t)=(\sin t,\sin 2t,\sin 3t)$ را در نقطه $(1,0,-1)$ بیابید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

خرمن نکرده توده کسی موسم درو　　　در مزرعی که وقت عمل برزگر نداشت

پروین اعتصامی

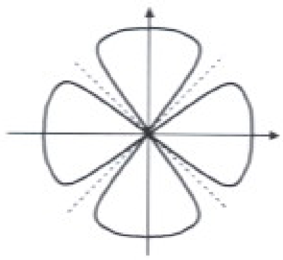
دانشگاه صنعتی شاهرود

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۲-فنی

دانشکده ریاضی | **ترم تابستانی ۸۷-۱۳۸۶** | **سیدرضا موسوی**

پاسخ سوال ۱ : $(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$

پس $r^6=r^4\cos^2 2\theta$ و یا $r=\pm\cos 2\theta$



پاسخ سوال ۲ : می دانیم $O=(2,\frac{3}{2})$ مرکز مربع است.

اگر $B=(m,n)$ راس دیگر مربع باشد طول بردار

$\overrightarrow{OB}=(m-2,n-\frac{3}{2})$ نصف طول بردار $\overrightarrow{AC}=(-4,3)$ بوده و بر آن عمود است. پس داریم :

$$(m-2)^2+(n-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4} \quad \text{و} \quad -4(m-2)+3(n-\frac{3}{2})=0$$

یعنی $\frac{25}{4}=(m-2)^2+\frac{16}{9}(m-2)^2$ و در نتیجه $m=2\pm\frac{3}{2}$. دو راس دیگر مربع عبارتند از : $B=(\frac{7}{2},\frac{7}{2})$ و $D=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

پاسخ سوال ۳ : $r(t)=(t+\frac{1}{t},t-\frac{1}{t},2\ln t)\to \quad r'(t)=(1-\frac{1}{t^2},1+\frac{1}{t^2},\frac{2}{t})\to \quad |r'(t)|=\sqrt{2}(\frac{t^2+1}{t^2})$

$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{t^2-1}{t^2+1},1,\frac{2t}{t^2+1})\to T'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{4t}{(t^2+1)^2},0,\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2})\to |T'(t)|=\frac{\sqrt{2}}{t^2+1}$$

$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}=(\frac{2t}{t^2+1},0,\frac{-(t^2-1)}{t^2+1}) \quad \text{و} \quad B(t)=T(t)\times N(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{-(t^2-1)}{t^2+1},1,\frac{-2t}{t^2+1})$$

ب) $$l=\int_{1/2}^{2}|r'(t)|\,dt=\int_{1/2}^{2}\sqrt{2}(\frac{t^2+1}{t^2})dt=\sqrt{2}(t-\frac{1}{t})\Big|_{1/2}^{2}=3\sqrt{2}$$

پاسخ سوال ۴ : $f(t)=(\sin t,\sin 2t,\sin 3t)\to \ f'(t)=(\cos t,2\cos 2t,3\cos 3t)\to$

$$f''(t)=(-\sin t,-4\sin 2t,-9\sin 3t)\to f'''(t)=(-\cos t,-8\cos 2t,-27\cos 3t)$$

$$f(\frac{\pi}{2})=(1,0,-1)\ ،\ f'(\frac{\pi}{2})=(0,-2,0)\ ،\ f''(\frac{\pi}{2})=(-1,0,9)\ ،\ f'''(\frac{\pi}{2})=(0,8,0)$$

$$|f'(\frac{\pi}{2})|=2\ ،\ f'(\frac{\pi}{2})\times f''(\frac{\pi}{2})=(-18,0,-2)\ ،\ |f'(\frac{\pi}{2})\times f''(\frac{\pi}{2})|=2\sqrt{82}\ ،\ (f'(\frac{\pi}{2})\times f''(\frac{\pi}{2}))\cdot f'''(\frac{\pi}{2})=0$$

$$\rho(\frac{\pi}{2})=0 \quad \text{و} \quad k(\frac{\pi}{2})=\frac{2\sqrt{82}}{8}=\frac{\sqrt{82}}{4}$$

نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : **سید رضا موسوی**

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل**

نیمسال تابستانی ۸۷-۱۳۸۶

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۸۷/۵/۱۲**

وقت : **۷۰ دقیقه**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید :

سوال ۱ : $y' = ۱۳y + ۸۷y^{۲}$ **۱۵ نمره**

سوال ۲ : $yy' + y^{۲} = \cos x \quad , y(۰) = ۱$ **۱۵ نمره**

سوال ۳ : $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = ۰$ **۲۰ نمره**

سوال ۴ : $y'' = \frac{y'}{x}(۱ + \ln\frac{y'}{x}) \quad , y(۱) = \frac{۱}{۲} , y'(۱) = ۱$ **۲۰ نمره**

موفق باشید

خرمن نکرده توده کسی موسم درو   در مزرعی که وقت عمل برزگر نداشت

پروین اعتصامی

دانشگاه صنعتی شاهرود

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل

دانشکده ریاضی | **ترم تابستانی ۸۷-۱۳۸۶** | **سیدرضا موسوی**

پاسخ سوال ۱ : $y' = ۱۳y + ۸۷y^۲$

راه حل اول : $\frac{dy}{y(۱۳+۸۷y)} = dx \to \frac{۱}{۱۳}\int(\frac{۱}{y} - \frac{۸۷}{۱۳+۸۷y})dy = \int dx \to \frac{۱}{۱۳}(\ln y - \ln(۱۳+۸۷y)) = x + c_۱$

$$\ln\frac{y}{۱۳+۸۷y} = ۱۳x + c_۱ \to \frac{y}{۱۳+۸۷y} = c_۲e^{۱۳x} \to \frac{۱۳+۸۷y}{y} = c_۳e^{-۱۳x} \to \frac{۱۳}{y} = c_۳e^{-۱۳x} - ۸۷ \to \boxed{y = \frac{۱۳}{c_۳e^{-۱۳x} - ۸۷}}$$

راه حل دوم : معادله ریکاتی است و $y_۱ = ۰$ یک جواب آن است پس با تغییر متغیر $y = \frac{۱}{v}$ خواهیم داشت

$\frac{-v'}{v^۲} = \frac{۱۳}{v} + \frac{۸۷}{v^۲}$ و یا $v' + ۱۳v = -۸۷$ که یک معادله خطی مرتبه اول است و $v = e^{-\int ۱۳dx}(c + \int -۸۷e^{-\int ۱۳dx}dx)$

یعنی $v = ce^{-۱۳x} + \frac{۸۷}{۱۳}$ پس $\boxed{y = \frac{۱۳}{c_۳e^{-۱۳x} - ۸۷}}$

پاسخ سوال ۲ : $yy' + y^۲ = \cos x$ یک معادله برنولی است و با تغییر متغیر $u = y^۲$ داریم $\frac{u'}{۲} + u = \cos x$ و

$u' + ۲u = ۲\cos x$ که یک معادله خطی مرتبه اول است و $u = e^{-\int ۲dx}(c + \int ۲\cos x e^{\int ۲dx}dx)$

یعنی $u = ce^{-۲x} + ۲e^{-۲x}\int e^{۲x}\cos x dx$

و در نتیجه $y^۲ = ce^{-۲x} + \frac{۲}{۵}(\sin x + ۲\cos x)$ و با شرط $y(۰) = ۱$ خواهیم داشت $\boxed{۵y^۲ = ce^{-۲x} + ۲(\sin x + ۲\cos x)}$

پاسخ سوال ۳ : $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = ۰$

$$M = x\sin y + y\cos y \to M_y = x\cos y + \cos y - y\sin y \quad , \quad N = x\cos y - y\sin y \to N_x = \cos y$$

چون $\frac{M_y - N_x}{N} = ۱$ تابعی مستقل از y است پس $\mu = e^{\int dx} = e^x$ یک عامل انتگرالساز معادله است یعنی معادله

$$e^x(x\cos y - y\sin y)dy + e^x(x\sin y + y\cos y)dx = ۰$$

یک معادله کامل است و $f(x,y) = \int e^x(x\cos y - y\sin y)dy = e^x(x\sin y + y\cos y - \sin y) + h(x)$

اما باید $f_x = M$ یعنی $e^x(x\sin y + y\cos y) + h'(x) = e^x(x\sin y + y\cos y)$ و در نتیجه $h'(x) = ۰$

پس جواب معادله عبارت است از : $\boxed{e^x(x\sin y + y\cos y - \sin y) = c}$

پاسخ سوال ۴ : $y'' = \frac{y'}{x}(۱ + \ln\frac{y'}{x}) \quad ; y(۱) = \frac{۱}{۲}, y'(۱) = ۱$

معادله مرتبه دوم و فاقد y است با تغییر متغیر $u = y'$ و $u' = y''$ معادله مرتبه اول $u' = \frac{u}{x}(۱ + \ln\frac{u}{x})$ را خواهیم داشت

که یک معادله همگن است. اکنون با تغییر متغیر $u = xv$ داریم : $v + xv' = v + v\ln v \to xv' = v\ln v$

که یک معادله جدایی پذیر است

$$\frac{dv}{v\ln v} = \frac{dx}{x} \to \ln\ln v = \ln(cx) \to \ln v = cx \to v = e^{cx} \to u = xe^{cx}$$

$$y' = xe^{cx} \xrightarrow{y'(۱)=۱} ۱ = e^c \to c = ۰ \quad \Rightarrow \quad y' = x \to y = \frac{x^۲}{۲} + c \xrightarrow{y(۱)=\frac{۱}{۲}} c = ۰$$

پس جواب معادله عبارت است از : $\boxed{y = \frac{x^۲}{۲}}$