کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی شاهرود

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی ۱- فنی (۱۴ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۸۷-۱۳۸۶** نام مدرس:

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۸۶/۱۱/۶** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- نمودار تقریبی منحنی $r = ۱ + ۳\sin\theta$ را رسم کنید. **۱۵ نمره**

سوال۲- الف) مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x\sin x}{-۱+\cos(\sin x)}$ را بدون استفاده از هم ارزی بیابید. **۱۰ نمره**

ب) مطلوب است محاسبه : $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{۳}^{x^{\tan x}} \tan\sqrt{t}\, dt$ **۱۰ نمره**

سوال۳- طول قوس منحنی تابع $f(x) = \cosh x$ را در بازه $[\,۰\,, \ln ۳\,]$ بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۴- انتگرال نامعین مقابل را حل کنید : $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{۹+e^{۲x}}}\,dx$ **۱۵ نمره**

سوال۵- انتگرال مثلثاتی مقابل را حل کنید : $\displaystyle\int \frac{۳+\sin x}{۲+\cos x}\,dx$ **۱۵ نمره**

سوال۶- سطح محصور بین محور xها و منحنی تابع $y = e^{-x^۲}$ (واقع در ناحیه اول) حول محور yها دوران می کند. حجم جسم حاصل را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۷- الف) حوزه همگرایی سری $\displaystyle\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k\left(\frac{۵}{۷}\right)^k(x+۱)^k$ را بیابید. **۱۰ نمره**

ب) بسط مک لورن تابع $f(x) = (۸+x)^{\frac{-۱}{۳}}$ را تا چهار جمله بنویسید. **۱۰ نمره**

موفق باشید

نام خانوادگی : نام : شماره دانشجویی : نام درس : **شماره ردیف**

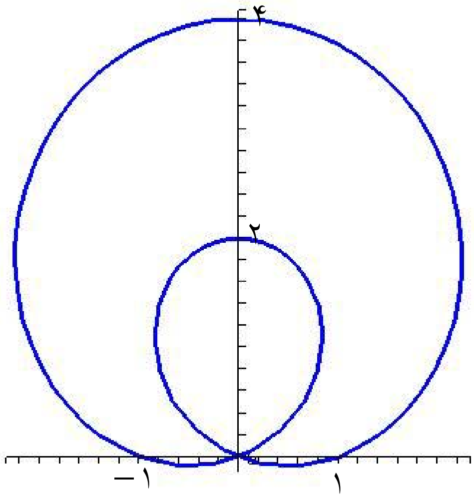
نمره ۱۵

پاسخ سوال ۱

$$r = ۱ + ۳\sin\theta$$

θ	$۰,\pi,۲\pi$	$\pi/۶,۵\pi/۶$	$\pi/۴,۳\pi/۴$	$\pi/۳,۲\pi/۳$
r	۱	۲,۵	۳,۱	۳,۵

θ	$\pi/۲$	$-\pi/۴,-۳\pi/۴$	$-۳\pi/۲$
r	۴	$-۱,۱$	-۲



توجه : چون با تبدیل θ به $\pi-\theta$ مقدار r تغییر نمی کند بنابر این شکل نسبت به محور x ها متقارن است و کافی است شکل را فقط در بازه $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ رسم کنیم .

پاسخ سوال ۱

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :　　نام :　　شماره دانشجویی :　　نام درس :　　شماره ردیف

نمره
۲۰

پاسخ سوال ۲

الف)

راه حل اول : با دو بار استفاده از هوپیتال

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin x}{-۱+\cos(\sin x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x+x\cos x}{-\cos x\sin(\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos x-x\sin x}{\sin x\sin(\sin x)-\cos^{۲}x\cos(\sin x)}=-۲$$

روش دوم : با استفاده از قضیه $\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin x}{-۱+\cos(\sin x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴x}{-۲\sin x}\,\frac{(\frac{\sin x}{۲})^{۲}}{\sin^{۲}(\frac{\sin x}{۲})}=-۲\times ۱\times ۱^{۲}-۲$$

ب)

$$\frac{d}{dx}\int_{۳}^{x^{\tan x}}\tan\sqrt{t}\,dt=\frac{d}{dx}(x^{\tan x})\times\tan\sqrt{x^{\tan x}}$$

$$=[(۱+\tan^{۲}x)\ln x+\frac{\tan x}{x}]\,x^{\tan x}\tan\sqrt{x^{\tan x}}$$

پاسخ سوال ۲

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

شماره ردیف

نام خانوادگی : نام : شماره دانشجویی : نام درس :

نمره

۱۵

پاسخ سوال ۳

$$f(x)=\cosh x \quad ، \quad x\in[\,۰,\ln ۳\,]$$

$$l=\int_{۰}^{\ln ۳}\sqrt{۱+(f'(x))^{۲}}\,dx=\int_{۰}^{\ln ۳}\sqrt{۱+(\sinh x)^{۲}}\,dx$$

$$=\int_{۰}^{\ln ۳}\cosh x\,dx=\sinh x\,\Big|_{۰}^{\ln ۳}=\frac{۳-۱/۳}{۲}=\frac{۴}{۳}$$

پاسخ سوال ۳

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :   نام :   شماره دانشجویی :   نام درس :

شماره ردیف

نمره
۱۵

پاسخ سوال ۴

با تغییر متغیر $e^{x}=۳\sinh t$ داریم :

$$\int \frac{e^{x}}{\sqrt{۹+e^{۲x}}}dx=\int \frac{۳\cosh t}{\sqrt{۹+۹\sinh^{۲} t}}dt=\int dt=t+c=\sinh^{-۱}(\frac{e^{x}}{۳})+c$$

پاسخ سوال ۴

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

پاسخ سوال ۵

راه حل اول : داریم

$$\int \frac{۳+\sin x}{۲+\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{۲+\cos x}dx + \int \frac{۳}{۲+\cos x}dx = -\ln(۲+\cos x) + \int \frac{۳}{۲+\cos x}dx$$

$$= -\ln(۲+\cos x) + ۲\sqrt{۳}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{۳}(۱+\cos x)} + c$$

زیرا با تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{۲}$ داریم :

$$\int \frac{۳}{۲+\cos x}dx = \int \frac{\frac{۶dt}{۱+t^۲}}{۲+\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}} = \int \frac{۶dt}{۳+t^۲} = ۲\sqrt{۳}\int \frac{dt}{\sqrt{۳}(۱+(t/\sqrt{۳})^۲}$$

$$= ۲\sqrt{۳}\arctan\frac{t}{\sqrt{۳}} + c = ۲\sqrt{۳}\arctan\frac{\tan(x/۲)}{\sqrt{۳}} + c = ۲\sqrt{۳}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{۳}(۱+\cos x)} + c$$

راه حل دوم : با تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{۲}$ داریم :

$$\int \frac{۳+\sin x}{۲+\cos x}dx = \int \frac{۳+\frac{۲t}{۱+t^۲}}{۲+\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}} \times \frac{۲dt}{۱+t^۲} = ۲\int \frac{۳t^۲+۲t+۳}{(۳+t^۲)(۱+t^۲)}dt = \int (\frac{-۲t+۶}{۳+t^۲} + \frac{۲t}{۱+t^۲})dt$$

$$= -\ln(۳+t^۲) + \int \frac{۶dt}{۳+t^۲} + \ln(۱+t^۲) = \ln\frac{۱+t^۲}{۳+t^۲} + ۲\sqrt{۳}\arctan\frac{t}{\sqrt{۳}} + c$$

$$= \ln\frac{۱+(\frac{\sin x}{۱+\cos x})^۲}{۳+(\frac{\sin x}{۱+\cos x})^۲} + ۲\sqrt{۳}\arctan\frac{(\frac{\sin x}{۱+\cos x})}{\sqrt{۳}} + c$$

$$= -\ln(۲+\cos x) + ۲\sqrt{۳}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{۳}(۱+\cos x)} + c$$

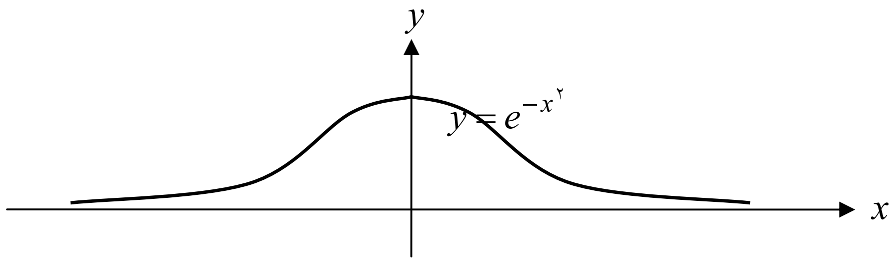
پاسخ سوال ۵

نام خانوادگی :　　　　نام :　　　　شماره دانشجویی :　　　　نام درس :

شماره ردیف

نمره
۲۰

پاسخ سوال ۶



راه حل اول : روش پوسته استوانه ای

$$V = \int_0^\infty 2\pi\, xy\, dx = \int_0^\infty 2\pi\, x e^{-x^2}\, dx = -\pi e^{-x^2}\, \Big|_0^\infty = \pi$$

راه حل دوم :

$$V = \int_0^1 \pi\, x^2 dy = \int_0^1 \pi\, (-\ln y) dy = -\pi \int_0^1 \ln y\, dy = -\pi (y \ln y - y)\, \Big|_0^1 = \pi$$

پاسخ سوال ۶

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :   نام :   شماره دانشجویی :   نام درس :

شماره ردیف

نمره
۲۰

پاسخ سوال ۷

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{5}{7}\right)^k(x+1)^k$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{5}{7}\right)^{k+1}(x+1)^{k+1}}{(-1)^k\left(\frac{5}{7}\right)^k(x+1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{5}{7}|x+1| = \frac{5}{7}|x+1| < 1$$

$$|x+1| < \frac{7}{5} \rightarrow x \in \left(\frac{-12}{5},\frac{2}{5}\right)$$

اگر $x=\frac{-12}{5}$ آنگاه $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{5}{7}\right)^k(x+1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}1$ و سری واگراست.

و اگر $x=\frac{2}{5}$ آنگاه $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{5}{7}\right)^k(x+1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ و سری واگراست.

پس حوزه همگرایی برابر است با $\left(\frac{-12}{5}, \frac{2}{5}\right)$

ب)

$$f(x)=(8+x)^{\frac{-1}{3}} \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{3}(8+x)^{\frac{-4}{3}}$$

$$\rightarrow f''(x)=\frac{4}{9}(8+x)^{\frac{-7}{3}} \rightarrow f'''(x)=\frac{-28}{27}(8+x)^{\frac{-10}{3}}$$

$$f(0)=\frac{1}{2} \rightarrow f'(0)=\frac{-1}{48} \rightarrow f''(0)=\frac{1}{288} \rightarrow f'''(0)=\frac{-7}{27\times 256}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{48}x+\frac{1}{576}x^2-\frac{7}{81\times 512}x^3+\cdots$$

پاسخ سوال ۷

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.