کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی ۲-فنی**	نیمسال (اول/دوم/**تابستانی**) **۸۷**-۱۳۸۶ — نام مدرس: سیدرضا موسوی
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۸۷/۶/۲** — وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- اگر $f(x,y)=x(x^{2}+y^{2})^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(xy)}$ ، مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۲- معادله خط مماس بر منحنی تقاطع رویه های $z=x^{2}+y^{2}$ و $4x^{2}+y^{2}+z^{2}=9$ در نقطه $(-1,1,2)$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال۳- x و y دو عدد هستند بطوری که $x^{2}+xy+y^{2}=1$ ، مقادیر ماکزیمم و مینیمم عبارت $p(x,y)=x^{2}+y^{2}$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۴- D ناحیه محدود به خطوط $x=a$ ، $y=a$ و دایره $x^{2}+y^{2}=a^{2}$ است ، مقدار انتگرال $\iint_{D}\frac{dxdy}{(\sqrt{x^{2}+y^{2}})^{3}}$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۵- حجم ناحیه محدود به صفحات $z=0$ ، $y=1$ و رویه های $y=x^{2}$ و $z=x^{2}+y^{2}$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۶- منحنی C قسمتی از نمودار تابع برداری $f(t)=(t,2t\sqrt{t},t)$ با شرط $1\le t\le 2$ است ، انتگرال منحنی الخط $\int_{C}\frac{x+y}{y+z}ds$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۷- <u>**فقط**</u> به یکی از ۲ سوال زیر پاسخ دهید. (۲۰ نمره) **۲۰ نمره**

الف) اگر $\vec{F}=(y^{2},xy,xz)$ یک تابع برداری ، S سطح خارجی نیمکره $z=\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}$ و $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر S باشد مطلوب است مقدار انتگرال $\iint_{S} curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$.

ب) V ناحیه محدود به کره $x^{2}+y^{2}+z^{2}=a^{2}$ است ، مقدار انتگرال سه گانه $\iiint_{V}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+(z-a)^{2}}}$ را بیابید.

موفق باشید

سوال ۱ : اگر $f(x,y)=x(x^۲+y^۲)^{-\frac{۳}{۲}}e^{\sin(xy)}$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}(۱,۰)$ را بیابید.

<u>راه حل اول</u> : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=[(x^۲+y^۲)^{-\frac{۳}{۲}}-۳x^۲(x^۲+y^۲)^{-\frac{۵}{۲}}+xy\cos(xy)(x^۲+y^۲)^{-\frac{۳}{۲}}]e^{\sin(xy)} \to \frac{\partial f}{\partial x}(۱,۰)=۱-۳=-۲$

<u>راه حل دوم</u> : $\frac{\partial f}{\partial x}(۱,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h,۰)-f(۱,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h)^{-۲}-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲(۱+h)^{-۳}}{۱}=-۲$

سوال ۲ : معادله خط مماس بر منحنی تقاطع رویه های $z=x^۲+y^۲$ و $۴x^۲+y^۲+z^۲=۹$ در نقطه $(-۱,۱,۲)$ را بنویسید.

<u>راه حل اول</u> : این خط در صفحات مماس بر این رویه ها قرار دارد بنابر این بر بردارهای نرمال دو رویه در این نقطه عمود است.
$N_۱=(-۲,۲,-۱)$ بردار نرمال رویه $z=x^۲+y^۲$ و $N_۲=(-۸,۲,۴)$ بردار نرمال رویه $۴x^۲+y^۲+z^۲=۹$ است پس بردار هادی خط مورد نظر برابر $u=N_۱\times N_۲=(۱۰,۱۶,۱۲)$ و معادله خط عبارت است از : $\frac{x+۱}{۵}=\frac{y-۱}{۸}=\frac{z-۲}{۶}$

<u>راه حل دوم</u> : معادله پارامتری منحنی را می نویسیم. اگر قرار دهیم $z=۳t$ آنگاه $f(t)=(-\sqrt{۳-t-۳t^۲},\sqrt{-۳+۴t+۳t^۲},۳t)$
و $f(\frac{۲}{۳})=(-۱,۱,۲)$. اکنون داریم : $f'(t)=(\frac{۱+۶t}{۲\sqrt{۳-t-۳t^۲}},\frac{۲+۳t}{\sqrt{-۳+۴t+۳t^۲}},۳)$ و $f'(\frac{۲}{۳})=(\frac{۵}{۲},۴,۳)$
یعنی معادله خط عبارت است از : $\frac{x+۱}{۵}=\frac{y-۱}{۸}=\frac{z-۲}{۶}$

سوال ۳ : x و y دو عدد هستند بطوری که $x^۲+xy+y^۲=۱$. مقادیر ماکزیمم و مینیمم عبارت $p(x,y)=x^۲+y^۲$ را بیابید.

<u>راه حل اول</u> : از $x^۲+xy+y^۲=۱$ داریم $y=\frac{-x\pm\sqrt{۴-۳x^۲}}{۲}$ و در نتیجه $p=\frac{x^۲}{۲}+۱\mp\frac{x\sqrt{۴-۳x^۲}}{۲}$ پس
$p'=x\mp\frac{۲-۳x^۲}{\sqrt{۴-۳x^۲}}$ واگر $p'=۰$ آنگاه $x^۲=\frac{۴-۱۲x^۲+۹x^۴}{۴-۳x^۲}$ و در نهایت داریم $۱۲x^۴-۱۶x^۲+۴=۰$ یعنی $x=\pm ۱,\frac{\pm ۱}{\sqrt{۳}}$
اکنون ۶ نقطه داریم. مقدار ماکزیمم برابر است با $p(۱,-۱)=p(-۱,۱)=۲$ و مقدار مینیمم برابر است با
$p(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}})=p(\frac{-۱}{\sqrt{۳}},\frac{-۱}{\sqrt{۳}})=\frac{۲}{۳}$ و مقدار $p(\pm ۱,۰)=۱$ که نه مینیمم است و نه ماکزیمم.

<u>راه حل دوم</u> : داریم : $y_x=-\frac{۲x+y}{x+۲y}$ و $p_x=۲x+۲y(-\frac{۲x+y}{x+۲y})=\frac{۲(x^۲-y^۲)}{x+۲y}$. اگر $p_x=۰$ آنگاه $x=y=\frac{\pm ۱}{\sqrt{۳}}$ و یا
$x=-y=\pm ۱$. $p(۱,-۱)=p(-۱,۱)=۲$ مقدار ماکزیمم و $p(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}})=p(\frac{-۱}{\sqrt{۳}},\frac{-۱}{\sqrt{۳}})=\frac{۲}{۳}$ مقدار مینیمم p است.

<u>راه حل سوم (ضرایب لاگرانژ)</u> : تابع $f(x,y,\lambda)=x^۲+y^۲-\lambda(x^۲+xy+y^۲-۱)$ را در نظر می‌گیریم.
داریم : $f_x=۲x-\lambda(۲x+y)$ ، $f_y=۲y-\lambda(۲y+x)$ و $f_\lambda=-(x^۲+xy+y^۲-۱)$
در دستگاه معادلات $f_x=۰$ ، $f_y=۰$ و $f_\lambda=۰$ باید $\lambda xy\neq ۰$ و در نتیجه $\frac{\lambda(۲x+y)}{\lambda(۲y+x)}=\frac{۲x}{۲y}$ یعنی $x^۲=y^۲$
اگر $x=y$ پس $x=y=\frac{\pm ۱}{\sqrt{۳}}$ و اگر $x=-y$ آنگاه $x=-y=\pm ۱$ بنابر این $p(۱,-۱)=p(-۱,۱)=۲$ مقدار ماکزیمم و
$p(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}})=p(\frac{-۱}{\sqrt{۳}},\frac{-۱}{\sqrt{۳}})=\frac{۲}{۳}$ مقدار مینیمم p است.

سوال ۴ : D ناحیه محدود به خطوط $x=a$ ، $y=a$ و دایره $x^۲+y^۲=a^۲$ است ، مقدار انتگرال $\iint_D\frac{dxdy}{(\sqrt{x^۲+y^۲})^۳}$ را بیابید.

<u>راه حل اول</u> :
$$\iint_D\frac{dxdy}{(\sqrt{x^۲+y^۲})^۳}=\int_۰^a\int_{\sqrt{a^۲-x^۲}}^{a}\frac{dydx}{(\sqrt{x^۲+y^۲})^۳}=\int_۰^a\frac{۱}{x^۲}[\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}]_{\sqrt{a^۲-x^۲}}^{a}dx$$
$$=\int_۰^a\frac{۱}{x^۲}[\frac{a}{\sqrt{x^۲+a^۲}}-\frac{\sqrt{a^۲-x^۲}}{a}]dx=[-\frac{\sqrt{x^۲+a^۲}}{ax}+\frac{\sqrt{a^۲-x^۲}}{ax}+\frac{۱}{a}\arcsin\frac{x}{a}]_۰^a=-\frac{\sqrt{۲}}{a}+\frac{\pi}{۲a}=\frac{۱}{۲a}(\pi-۲\sqrt{۲})$$

راه حل دوم : از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^{\frac{a}{\cos\theta}}\frac{drd\theta}{r^2}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_a^{\frac{a}{\sin\theta}}\frac{drd\theta}{r^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[-\frac{\cos\theta}{a}+\frac{1}{a}]d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{\sin\theta}{a}+\frac{1}{a}]d\theta$$

$$=[-\frac{\sin\theta}{a}+\frac{\theta}{a}]_0^{\frac{\pi}{4}}+[\frac{\cos\theta}{a}+\frac{\theta}{a}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2a}+\frac{\pi}{4a}+\frac{\pi}{2a}-\frac{\sqrt{2}}{2a}-\frac{\pi}{4a}=\frac{1}{2a}(\pi-2\sqrt{2})$$

سوال ۵ : حجم ناحیه محدود به صفحات $z=0$ ، $y=1$ و رویه های $y=x^2$ و $z=x^2+y^2$ را محاسبه کنید.

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=x^2}^{1}\int_{z=0}^{x^2+y^2}dzdydx=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=x^2}^{1}(x^2+y^2)dydx=\int_{x=-1}^{1}(x^2-x^4+\frac{1-x^6}{3})dx=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\frac{2}{21}=\frac{264}{315}=\frac{88}{105}$$

سوال ۶ : منحنی C قسمتی از نمودار تابع برداری $f(t)=(t,2t\sqrt{t},t)$ با شرط $1\le t\le 2$ می باشد ، انتگرال منحنی الخط $\int_C\frac{x+y}{y+z}ds$ را محاسبه کنید.

داریم $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{2+9t}dt$ و بنابر این

$$\int_C\frac{x+y}{y+z}ds=\int_{t=1}^{2}\frac{t+2t\sqrt{t}}{2t\sqrt{t}+t}\sqrt{2+9t}dt=\int_{t=1}^{2}\sqrt{2+9t}dt=\frac{2}{27}(\sqrt{2+9t})^3\Big|_1^2=\frac{2}{27}(20\sqrt{20}-11\sqrt{11})$$

سوال ۷ : فقط به یکی از دو سوال زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $\vec{F}=(y^2,xy,xz)$ یک تابع برداری ، S سطح خارجی نیمکره $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر S باشد. مطلوب است مقدار انتگرال $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$.

راه حل اول : $curl\vec{F}=(0,-z,-y)$ ، $\vec{n}=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ و $dS=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ بنابر این

$$\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S-2y\sqrt{1-x^2-y^2}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}-2ydydx=0$$

راه حل دوم :

$$\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C y^2dx+xydy+xzdz$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}(-\sin^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta)d\theta=[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{2\pi}=0$$

ب) V ناحیه محدود به کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ است. مقدار انتگرال سه گانه $\iiint_V\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$ را بیابید.

راه حل اول : با استفاده از مختصات کروی داریم :

$$\iiint_V\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}=\int_{\rho=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2-2a\rho\cos\varphi+a^2}}d\varphi d\theta d\rho$$

$$=\int_{\rho=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}[\frac{\rho}{a}\sqrt{\rho^2-2a\rho\cos\varphi+a^2}]_0^{\pi}d\theta d\rho=\int_{\rho=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}[\frac{\rho}{a}(\rho+a-a+\rho)]_0^{\pi}d\theta d\rho=\frac{4\pi}{a}\int_{\rho=0}^{a}\rho^2d\rho=\frac{4\pi a^2}{3}$$

راه حل دوم : در مختصات استوانه ای داریم :

$$\iiint_V\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}=\int_{z=-a}^{a}\int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{r}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}}d\theta drdz$$

$$=2\pi\int_{z=-a}^{a}\int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{r}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}}drdz=2\pi\int_{z=-a}^{a}\sqrt{r^2+(z-a)^2}\Big|_0^{a^2-z^2}dz=2\pi\int_{z=-a}^{a}(\sqrt{2a^2-2az}+z-a)dz$$

$$=2\pi[\frac{-1}{3a}(\sqrt{2a^2-2az})^3+\frac{(z-a)^2}{2}]_{-a}^{a}=2\pi[\frac{8a^3}{3a}-\frac{4a^2}{2}]=\frac{4\pi a^2}{3}$$