کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی ۱- فنی** نیمسال (اول/دوم/**تابستانی**) **۸۷**-۱۳۸۶ نام مدرس: سیدرضا موسوی

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۸۷/۶/۴** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- الف) محاسبه کنید : $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x)$ **۲۰ نمره**

ب) اگر $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+(1-a)x-1}=1$ ، مقدار a را بیابید.

سوال۲- الف) اگر به ازای هر x ، $h(x)>0$ و $f(x)=\frac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$ ، $f'(-1)$ چقدر است؟ **۲۰ نمره**

ب) مقدار تقریبی $\sqrt[4]{15}$ را بیابید.

سوال۳- نزدیکترین نقطه از منحنی تابع $y=x+\frac{1}{x}$ به مبدا مختصات را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۴- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به محورهای مختصات و منحنی تابع $y=\ln x$ حول محور xها را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۵- منحنی تابع $y=\ln x$ ، $0<x\le 1$ ، حول محور yها دوران می کند. مساحت سطح دوار حاصل را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۶- الف) کدامیک از سریهای زیر واگراست ؟ **۲۰ نمره**

$\frac{1}{1}+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}+\cdots$ $\frac{1}{1}+\frac{1}{11}+\frac{1}{111}+\frac{1}{1111}+\frac{1}{11111}+\cdots$

ب) تمام ریشه های معادله $z^3=i$ را بایبید.

سوال۷- فقط یکی از انتگرالهای نامعین زیر را حل کنید : **۲۰ نمره**

$I_2=\int\frac{8x+7}{x^4-1}dx$ $I_1=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$

موفق باشید

دانشگاه صنعتی شاهرود – دانشکده ریاضی ۱۳۸۶/۶/۴

پاسخ سوالات امتحان ریاضی۱-فنی پایان ترم تابستانی ۸۷-۱۳۸۶ سیدرضا موسوی

سوال ۱ : الف) محاسبه کنید: $\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x]$

روش اول :

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x^2}{\sqrt[3]{(1+1/x+1/x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+1/x+1/x^3}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

روش دوم :

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x]=\lim_{t\to0^+}[\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^2}+1}-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to0^+}[\frac{\sqrt[3]{1+t+t^3}-1}{t}]=\lim_{t\to0^+}[\frac{1+3t^2}{3\sqrt[3]{(1+t+t^3)^2}}]=\frac{1}{3}$$

ب) اگر $\lim_{x\to1}\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+(1-a)x-1}=1$ ، مقدار a را بیابید. (کنکور ۱۳۷۱- علوم تجربی)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+(1-a)x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2+4ax-1}{2ax+(1-a)}=\frac{4a+2}{a+1}=1\to4a+2=a+1\to a=-\frac{1}{3}$$

سوال ۲ : الف) اگر به ازای هر x ، $h(x)>0$ و $f(x)=\frac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$ ، $f'(-1)$ چقدر است؟ (کنکور ۱۳۷۱- علوم تجربی)

روش اول : می نویسیم $f(x)=(x+1)\times\frac{h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$ و در نتیجه

$$f'(x)=\frac{h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}+(x+1)\times(\frac{h(x)}{(2x+1)h(2x+1)})'\to f'(-1)=\frac{h(-1)}{(-1)h(-1)}+0=-1$$

روش دوم :

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}=\frac{h(-1)}{(-1)h(-1)}=-1$$

ب) مقدار تقریبی $\sqrt[4]{15}$ را بیابید.

جواب : قرار می دهیم $f(x)=\sqrt[4]{x}$ و در نتیجه $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ $f(16)=2$ و $f'(16)=\frac{1}{32}=0.03125$

بنابر این $f(15)=\sqrt[4]{15}\cong2+(15-16)(0.03125)$ یعنی $\sqrt[4]{15}\cong1.96875$ ($\sqrt[4]{15}=0.96798967\cdots$)

سوال ۳ : نزدیکترین نقطه از منحنی تابع $y=x+\frac{1}{x}$ به مبدا مختصات را بیابید.

جواب : اگر $A=(x,y)$ یک نقطه از منحنی باشد فاصله آن تا مبدا برابر است با $d(x)=\sqrt{x^2+(x+\frac{1}{x})^2}=\sqrt{2x^2+2+\frac{1}{x^2}}$

اکنون اگر $d'(x)=0$ کافی است داشته باشیم $4x-\frac{2}{x^3}=0$ و یا $x^4=\frac{1}{2}$ یعنی $x=\frac{\pm1}{\sqrt[4]{2}}$

بنابر این نزدیکترین نقاط منحنی به مبدا عبارتند از $A=\pm(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{2})$ که فاصله آنها از مبدا برابر است با $\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

سوال ۴ : حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به محورهای مختصات و منحنی تابع $y=\ln x$ حول محور x ها را محاسبه کنید.

روش اول :

$$V=\int_{x=0}^{1}\pi\ln^2x\,dx=\pi[x\ln^2x-2x\ln x+2x]_0^1=\pi[2+\lim_{x\to0}x\ln^2x-2\lim_{x\to0}x\ln x]=2\pi$$

روش دوم :

$$V=\int_{x=0}^{1}2\pi x|y|dy=-\int_{x=0}^{1}2\pi\ln x\,dx=-2\pi[x\ln x-x]_0^1=-2\pi[-1+\lim_{x\to0}x\ln x]=2\pi$$

روش سوم :

$$V=\int_{x=0}^{1}2\pi x|y|dy=-\int_{y=-\infty}^{0}2\pi y e^y dx=-2\pi[ye^y-e^y]_{-\infty}^{0}=-2\pi[-1+\lim_{y\to-\infty}ye^y]=2\pi$$

سوال ۵ : منحنی تابع $y=\ln x$ ، $0<x\le1$ ، حول محور y ها دوران می کند ، مساحت سطح دوار حاصل را بیابید.

روش اول :

$$S=\int_{x=0}^{1}2\pi x\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{x=0}^{1}2\pi x\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}dx=\int_{x=0}^{1}2\pi\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$=\pi[x\sqrt{x^2+1}+\sinh^{-1}x]_0^1=\pi[\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1)]=\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$$

روش دوم :
$$S=\int_{x=0}^{1}2\pi x\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{y=-\infty}^{0}2\pi e^y\sqrt{e^{2y}+1}\,dy$$
$$=\pi[e^y\sqrt{e^{2y}+1}+\sinh^{-1}e^y]_{-\infty}^{0}=\pi[\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1)]=\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$$

سوال ۶ : الف) کدامیک از سریهای مقابل واگراست ؟
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{11}+\frac{1}{111}+\frac{1}{1111}+\frac{1}{11111}+\cdots \qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}+\cdots$$

جواب : جمله عمومی سری اول برابر $\{a_n\}=\frac{1}{10n-9}$ و جمله عمومی سری دوم برابر است با $\{b_n\}=\frac{1}{\underbrace{11\cdots1}_{n}}=\frac{9}{\underbrace{99\cdots9}_{n}}=\frac{9}{10^n-1}$.

روش اول : آزمون مقایسه : سری $\sum\frac{1}{10(n+1)}=\frac{1}{10}\sum\frac{1}{n+1}$ واگراست و $\frac{1}{10n-9}>\frac{1}{10(n+1)}$ پس سری اول واگراست.

سری $\sum\frac{1}{10^{n-1}}$ همگراست و $\frac{9}{10^n-1}<\frac{1}{10^{n-1}}$ پس سری دوم همگراست.

روش دوم : آزمون مقایسه حدی : سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(10n-9)}{1/n}=10$ پس سری اول واگراست.

سری $\sum 10^{-n}$ همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9/(10^n-1)}{10^{-n}}=9$ پس سری دوم همگراست.

روش سوم : آزمون انتگرال : $\int_1^\infty\frac{1}{10n-9}dn=\frac{1}{10}\ln(10n-9)\Big|_1^\infty=\infty$ پس سری اول واگراست.

$\int_1^\infty\frac{9}{10^n-1}dn=\frac{9}{\ln 10}\ln(1-10^{-n})\Big|_1^\infty=\frac{-9}{\ln 10}\ln\frac{9}{10}$ پس سری دوم همگراست.

آزمونهای نسبت و ریشه ، همگرایی سری دوم را نتیجه می دهند اما در مورد سری اول بی نتیجه هستند.

ب) تمام ریشه های معادله $z^3=i$ را بیابید.

روش اول : قرار می دهیم $z=re^{i\theta}$ بنابر این $r^3e^{3i\theta}=i=e^{i(\pi/2+2k\pi)}$ در نتیجه $r=1$ و $3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

اگر $k=0$ ، $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $z_0=e^{i\pi/6}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ اگر $k=1$ ، $\theta=\frac{5\pi}{6}$ و $z_1=e^{5i\pi/6}=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$

اگر $k=2$ ، $\theta=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$ و $z_2=e^{3i\pi/2}=-i$

روش دوم : قرار می دهیم $x+iy$ بنابر این $x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)=i$ در نتیجه $x(x^2-3y^2)=0$ و $y(3x^2-y^2)=1$

اگر $x=0$ آنگاه $y=-1$ پس یک جواب عبارت است از $z_2=-i=e^{3i\pi/2}$

اگر $x=\sqrt{3}y$ آنگاه $y=\frac{1}{2}$ و $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ پس یک جواب عبارت است از $z_0=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)=e^{i\pi/6}$

اگر $x=-\sqrt{3}y$ آنگاه $y=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ پس یک جواب عبارت است از $z_1=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)=e^{5i\pi/6}$

سوال ۷ : فقط یکی از انتگرالهای نامعین مقابل را حل کنید : $I_2=\int\frac{8x+7}{x^4-1}dx \qquad I_1=\int\frac{dx}{1+\sin^2x}$

جواب : روش اول :
$$I_1=\int\frac{2dx}{2+2\sin^2x}=\int\frac{2dx}{3-\cos 2x}=\int\frac{2(1+\tan^2x)dx}{2+4\tan^2x}=\int\frac{(1+\tan^2x)dx}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+c$$

روش دوم : اگر از تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{2}$ استفاده کنیم به انتگرال $\int\frac{2(1+t^2)dt}{t^4+6t^2+1}$ می رسیم که حل آن از I_1 سخت تر است.

$$I_2=\int\frac{8x+7}{x^4-1}dx=\int\frac{8x+7}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}dx=\int\left(-\frac{4x+7/2}{x^2+1}+\frac{1/4}{x+1}+\frac{15/4}{x-1}\right)dx$$
$$=-2\ln(x^2+1)-\frac{7}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{15}{4}\ln(x-1)+c$$