بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک

رساله دکتری مکانیک‌سنگ

عنوان

تحلیل عددی اثر تنش بر جریان سیال در توده‌سنگ درزه‌دار با کاربرد روش‌های حل تکراری کریلف

نگارنده

سهیل مهاجرانی

اساتید راهنما

دکتر سیدمحمداسماعیل جلالی

دکتر سید رحمان ترابی

استاد مشاور

سید فرخ فروهنده

شهریور ۱۳۹۷

شماره: ۵۹ ۳۰ ۶/۹۷ م.ش
تاریخ: ۹۷/۶/۲۰
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای سهیل مهاجرانی دانشجوی دکتری رشته مهندسی معدن – مکانیک‌سنگ به شماره دانشجویی ۹۲۱۶۶۵۵ ورودی ماه ۶ سال ۱۳۹۲ در تاریخ ۱۳۹۷/۶/۱۰ از رساله **نظری☑ / عملی☐** خود با عنوان : تحلیل عددی اثر تنش بر جریان سیال در توده‌سنگ درزه‌دار با کاربرد روش‌های حل تکراری کریلف
دفاع و با اخذ نمره ۱۹/۵ به درجه : عالی نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷☐
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹ – ۱۵☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر سیدمحمداسماعیل جلالی	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر سیدرحمان ترابی	استاد راهنما	استاد	
۳	سید فرخ فروهنده	مشاور	استادیار	
۴	دکتر محمد فاتحی مرجی	داور	دانشیار	
۵	دکتر محسن نظری	داور	دانشیار	
۶	دکتر شکراله زارع	داور	دانشیار	
	دکتر فرهنگ سرشکی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استاد	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای سهیل مهاجرانی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده : دکتر محمد عطائی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. او که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه سار درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه ی آنان شاخ و برگ گیرم و با سبزی امیدشان در راه کسب علم و دانش گام بردارم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم.

و آموزگاران و اساتیدی که عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجودم و روشنگر راهم باشند و برایم شرافت و انسانیت را معنا کردند.

حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان....

خداوندا! توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش در جهت رشد و شکوفایی ایران عزیز را عنایت بفرما.

تعهدنامه

اینجانب **سهیل مهاجرانی** دانشجوی دوره دکتری رشته **مهندسی معدن – مکانیک‌سنگ** دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **تحلیل عددی اثر تنش بر جریان سیال در توده‌سنگ درزه‌دار با کاربرد روش‌های حل تکراری کریلف** تحت راهنمائی **آقایان دکتر سیدمحمداسماعیل جلالی و سیدرحمان ترابی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

تخلخل مؤثر و ناپیوستگی‌های به‌هم متصل به‌عنوان مسیرهای اصلی جریان سیال در توده‌سنگ شناخته می‌شوند. بر اساس این واقعیت که نفوذپذیری متن توده‌سنگ در برابر شکستگی‌ها قابل چشم‌پوشی است، تاکنون روش‌های مدل‌سازی مختلفی توسعه‌یافته‌اند که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا اشاره نمود. این شبکه بر مبنای توابع توزیع آماری تولید می‌شود و می‌تواند شبیه‌سازی واقعی‌تری را ارایه نماید. مدل‌سازی سه‌بعدی حتی می‌تواند این شبیه‌سازی‌ها را دقیق‌تر کند. در شبیه‌سازی‌های سه‌بعدی شبکه‌های شکستگی مجزا، هر شکستگی به‌صورت یک جفت صفحه‌ی موازی با یک موقعیت فضایی - آماری مشخص مدل‌سازی می‌شود. از آن‌جا که روابط تحلیلی کلاسیک برای محاسبه‌ی جریان سیال، به‌صورت تک‌بعدی توسعه یافته‌اند و برای شبیه‌سازی سه‌بعدی شبکه‌های شکستگی این روابط باید به حالت صفحه‌ای تعمیم یابند، استفاده از روش‌های مجزاسازی عددی الزامی است. این روش‌ها محدوده‌های دو بعدی را به اجزای خطی تبدیل کرده و دستگاهی از معادلات جدید را بازسازی می‌کنند. یکی از این روش‌ها که به دلیل مزیت‌های گسترده، از نیم قرن گذشته تاکنون همواره مورد توجه بوده است، روش اجزای محدود است. پیش‌نیاز استفاده از این روش یک مش‌بندی کارآمد است که به‌طور مناسبی برای محیط‌های ناپیوسته سازگار شده باشد. حاصل مدل‌سازی ماتریس بزرگ و تنکی به‌نام ماتریس نفوذپذیری، بردار جریان و بردار گرادیان هد هیدرولیکی (ارتفاع ستون سیال) است که دستگاهی از معادلات را تشکیل می دهند که شرایط خاصی دارد. روش‌های حل عددی ویژه‌ای برای تعیین پاسخ مدل برای دستگاه‌هایی با شرایط فوق ضروری است. روش‌های حل دستگاه‌های معادلات با ماتریس‌های ضرایب بزرگ و تنک بسیار متنوع هستند که در دو دسته‌ی کلی روش‌های مستقیم و تکراری طبقه‌بندی می‌شوند. روش‌های مستقیم ساده‌اند اما برای تمامی انواع ماتریس‌ها به‌اندازه‌ی کافی کارآمد نیستند. از مهم‌ترین روش‌های تکراری می‌توان به روش‌های زیرفضای کریلف اشاره نمود. هرچند، این روش‌ها برای استفاده در کدهای کامپیوتری سازگاری خوبی دارند و درنتیجه

پس از تعداد مشخصی از تکرارها، هرکدام برای نوع خاصی از مسایل به پاسخ همگرا می‌شوند، تاکنون در مهندسی سنگ کمتر مورد توجه قرارگرفته‌اند. از طرفی، مدل‌های ساختاری شکستگی، روابط تجربی را معرفی می‌کنند که به‌کمک تعداد زیادی از آزمایش‌های آزمایشگاهی یا میدانی تعیین شده‌اند. این مدل‌ها می‌توانند با دقت قابل قبولی میزان بازشدگی شکستگی‌ها در معرض تنش را پیش‌بینی نمایند که نتیجه‌ی آن محاسبه‌ی سریع و خلاقانه‌ای از یک فرآیند هیدرومکانیکی است. هدف از این تحقیق، توسعه‌ی روش‌های پایه در بخش‌های تولید هندسه‌ی محیط سنگی شکسته، مش‌بندی محدوده برای کاربرد روش المان محدود، تلفیق فرمولاسیون المان محدود با مدل‌های ساختاری شکستگی و سپس حل تکراری دستگاه معادلات مدل است که امکان محاسبه‌ی میدان جریان سیال در معرض تنش در سنگ‌های شکسته را در سریع‌ترین زمان و با کم‌ترین الزامات سخت‌افزاری فراهم نموده است. چارچوب هندسی محیط سنگی درزه‌دار با استفاده از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی تولید شده و برای نزدیک‌تر نمودن شرایط مساله به حالت واقعی، اثر تغییرات تنش برجا بر جریان سیال همراه با یک فرآیند غیرمستقیم هیدرومکانیکی با استفاده از مدل‌های ساختاری شکستگی در نظر گرفته شده است. ابزار مورد استفاده برای پیاده‌سازی فرمولاسیون مدل، یک برنامه‌ی کامپیوتری است که توسط نویسندگان توسعه داده شده است. این مدل بهینه، شبیه‌سازی مسایل پیچیده را در حداقل زمان ممکن و کمترین هزینه‌ی محاسباتی امکان‌پذیر می‌سازد. با اعتبارسنجی بخش‌های اصلی مدل به‌کمک روش‌های مختلف تحلیلی و عددی، صحت نتایج آن تأیید شده و سپس تحلیل‌های حساسیتی برای تعیین اثر پارامترهای کلیدی شامل اثر میدان تنش‌های برجا بر جریان سیال در سنگ‌های شکسته، تعداد تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی و تعیین بهترین روش‌های محاسبه‌ی پاسخ با محوریت دو پارامتر دقت محاسبات و زمان پردازش، انجام شده است.

کلمات کلیدی: شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی، روش مش‌بندی، روش المان محدود، مدل‌های ساختاری شکستگی، روش‌های زیرفضای کریلف، FlowSHUT^{3D}.

لیست مقالات مستخرج از رساله

مقالات علمی - پژوهشی

- مهاجرانی، س.، جلالی، س. م.، ترابی، س. ر. (۱۳۹۷) "ارزیابی روش‌های تکراری زیرفضای کریلف برای محاسبه‌ی جریان سیال در شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی"، مجله‌ی روش‌های تحلیلی و عددی در مهندسی معدن، دانشگاه یزد.
- Mohajerani, S., Jalali, S.M.E., Torabi, S.R. (2018) “A new conforming mesh generator for three-dimensional discrete fracture networks”, IJMGE, Tehran University, Tehran, Iran, 10.22059/ijmge.2018.249428.594710.

- Mohajerani, S.,Wang, W., Jalali, S.M.E., Torabi, S.R. (2018) “An efficient algorithm computational model for modelling simulating stress-dependent flow rate in three-dimensional discrete fracture networks”, KSCE, Shpringer, *Under review*.

مقالات کنفرانسی

- مهاجرانی، س.، جلالی، س. م.، ترابی، س. ر. و فروهنده، س. ف. (۱۳۹۶) "کاربرد یک روش مش بندی بهینه برای تحلیل جریان سیال در شبکه ی شکستگی های مجزای سه بعدی"، دومین کنفرانس بین المللی عمران ، معماری و طراحی شهری ، بانکوک ، دبیرخانه دایمی کنفرانس، دانشگاه Kasem Bundit، https://www.civilica.com/Paper-ICCACS02-ICCACS02_202.html
- مهاجرانی، س.، جلالی، س. م.، ترابی، س. ر. و فروهنده، س. ف. (۱۳۹۶) "یک کد نرم افزاری جدید بر مبنای مدل هندسی شبکه ی شکستگی های مجزای سه بعدی برای حل جریان سیال در توده سنگ"، شانزدهمین کنفرانس هیدرولیک ایران، اردبیل، انجمن هیدرولیک ایران-دانشگاه محقق اردبیلی، https://www.civilica.com/Paper-IHC16-IHC16_052.html
- مهاجرانی، س.، جلالی، س. م.، ترابی، س. ر. و فروهنده، س. ف. (۱۳۹۶) "کاربرد یک روش المان محدود کریلف برای تحلیل میدان جریان در شبکه ی شکستگی های مجزای سه بعدی"، دومین کنفرانس ملی یافته های نوین پژوهشی و آموزشی عمران معماری شهرسازی و محیط زیست ایران، تهران، دبیرخانه دایمی کنفرانس، https://www.civilica.com/Paper-IRCIVIL02-IRCIVIL02_082.html

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها .... ف

فهرست جدول‌ها .... ش

فصل اول ؛ کلیات ۱

۱-۱. مقدمه ۲

۱-۲.ضرورت انجام تحقیق ۳

۱-۳. بیان مساله ۳

۱-۴. هدف از انجام تحقیق ۶

۱-۵. ساختار رساله ۸

فصل دوم؛ مروری بر تحقیقات پیشین ۹

۲-۱. مقدمه ۱۰

۲-۲. مروری بر پیشینه‌ی تحلیل اثر تنش بر جریان سیال در محیط ناپیوسته.......................... ۱۰

۲-۳. مروری بر پیشینه‌ی شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا ۱۳

۲-۴. مروری بر پیشینه‌ی روش‌های مش‌بندی محیط ناپیوسته ۱۵

۲-۵. مروری بر پیشینه‌ی روش المان محدود ۱۸

۲-۶. مروری بر پیشینه‌ی روش‌های زیرفضای کریلف ۲۳

۲-۷. جمع‌بندی ۲۷

فصل سوم ؛ توسعه‌ی مدل عددی اثر تنش بر جریان سیال در توده‌سنگ درزه‌دار ۲۹

۳-۱. مقدمه ۳۰

۳-۲. ویژگی‌های اصلی روش DFN ۳۱

۳-۲-۱. شبیه‌سازی موقعیت شکستگی‌ها ۳۵
۳-۲-۲. تولید پارامترهای هندسی شکستگی‌ها ۳۷
۳-۲-۳. شبیه‌سازی ویژگی‌های جریان مربوط به شکستگی.. ۴۰
۳-۳. حذف شکستگی‌های منفرد و بن‌بست.. ۴۱
۳-۴. مش‌بندی DFN.. ۴۳
۳-۴-۱. چالش‌ها و محدودیت‌ها.. ۴۴
۳-۴-۲. مفهوم مثلث‌بندی ۴۶
۳-۴-۲-۱. معرفی دیاگرام ورنویی.. ۴۶
۳-۴-۲-۲. مثلث‌بندی دلانه.. ۴۷
۳-۴-۲-۳. ویژگی دلانه موضعی.. ۴۹
۳-۴-۳. بهینه‌سازی مش‌بندی ۵۰
۳-۴-۴. الگوریتم مش‌بندی مورداستفاده در تحقیق.. ۵۲
۳-۵. معرفی نماد ماتریسی برای محاسبه‌ی جریان ۵۹
۳-۶. مراحل اصلی روش FEM ۶۲
۳-۷. مجزاسازی محدوده ۶۴
۳-۸. روش‌های تکراری زیرفضای کریلف ۶۷
۳-۸-۱. فرمولاسیون روش‌های پایه.. ۷۰
۳-۸-۲. توصیف روش‌های پایه‌ی متعامدسازی.. ۷۱
۳-۸-۲-۱. روش‌های متعامدسازی آرنولدی و لنکزوس ۷۴

۳-۸-۲-۲. روش‌های تکراری GMRES، Q-GMRES، CG ، CR و GCR ۷۸

۳-۸-۲-۳. روش‌های تکراری MINRES و SYMMLQ ۸۳

۳-۸-۲-۴. روش‌های تکراری BiCG، لنکزوس، FOM و QMR ۸۴

۳-۸-۳. روش‌های پیش‌شرط‌گذاری ۸۷

۳-۹. مدل‌های ساختاری شکستگی ۸۹

۳-۱۰. فرمولاسیون محاسبه‌ی جریان تابع تنش ۹۲

۳-۱۱. جمع‌بندی ۹۴

فصل چهارم ؛ تدوین برنامه‌ی $\mathbf{FlowSHUT^{3D}}$ ۹۵

۴-۱. مقدمه ۹۶

۴-۲. معرفی برنامه‌ی $\mathrm{FlowSHUT^{3D}}$ ۱۰۰

۴-۳. جمع‌بندی ۱۰۶

فصل پنجم ؛ اعتبارسنجی مدل و تحلیل حساسیت ۱۰۷

۵-۱. مقدمه ۱۰۸

۵-۲. اعتبارسنجی مدل تحقیق ۱۰۹

۵-۲-۱. اعتبارسنجی DFN ۱۰۹

۵-۲-۲. اعتبارسنجی مش‌بندی - مثال اول ۱۱۱

۵-۲-۳. اعتبارسنجی مش‌بندی - مثال دوم ۱۱۲

۵-۲-۴. اعتبارسنجی مش‌بندی - مثال سوم ۱۱۳

۵-۲-۵. اعتبارسنجی راه‌حل محاسبه‌ی جریان ۱۲۲

۵-۲-۶. اعتبارسنجی روش‌های زیرفضای کریلف ۱۲۵

۵-۳. تحلیل حساسیت ۱۲۷

۵-۳-۱. تعیین حجم عنصر نماینده ۱۲۷

۵-۳-۲. تحلیل حساسیت پارامترهای مؤثر بر جریان سیال تابع تنش ۱۲۸

۵-۳-۳. تحلیل حساسیت روش‌های زیرفضای کریلف ۱۳۴

۵-۴. جمع‌بندی ۱۴۶

فصل ششم ؛ نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۱۴۷

۶-۱. نتیجه‌گیری ۱۴۸

۶-۲. پیشنهادها ۱۵۱

فهرست منابع ۱۵۳

فهرست شکل‌ها

شکل ۲-۱ اثر میدان تنش بر جریان سیال در شکستگی‌های سنگ. ۱۵
شکل ۳-۱ موقعیت مراکز شکستگی‌ها در مختصات سه بعدی ۳۷
شکل ۳-۲ موقعیت فضایی یک شکستگی در فضای سه‌بعدی و پارامترهای هندسی آن ۳۹
شکل ۳-۳ نمونه‌ای از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی ۴۰
شکل ۳-۴ شکل شماتیک از انواع شکستگی‌های موجود (منفرد، بن-بست و با تقاطع چندگانه) در شبکه‌ی شکستگی‌ها ۴۲
شکل ۳-۵ خطوط تقاطع شکستگی‌ها با شکستگی‌های دیگر (به‌رنگ مشکی) و با مرزهای مدل (به‌رنگ سبز) ۴۳
شکل ۳-۶ دیاگرام ورنویی (خطوط توپر) ترسیم‌شده بر روی مش‌بندی دلانه (نقطه‌چین) برای بیست‌ویک نقطه‌ی ثابت ۴۷
شکل ۳-۷ یک رأس ورنویی درجه‌ی پنج و یک پنج‌ضلعی متناظر آن در مثلث‌بندی دلانه ۴۸
شکل ۳-۸ در این شکل یال uv دلانه موضعی است اما به مثلث‌بندی دلانه تعلق ندارد. ۵۰
شکل ۳-۹ نمایش توانایی روش راپرت برای دستیابی به تغییرات زیاد در ابعاد مثلث‌ها در فواصل کوتاه ۵۱
شکل ۳-۱۰ فرآیند حذف مثلث‌های نامناسب و ایجاد مثلث‌های بهینه ۵۲
شکل ۳-۱۱ فلوچارت الگوریتم مش‌بندی مورد استفاده در تحقیق ۵۵
شکل ۳-۱۲ یک مثلث‌بندی دلانه-پایه با نمایش ویژگی دایره خالی ۵۶
شکل ۳-۱۳ مثال‌هایی از مثلث‌بندی دلانه بهینه‌ی تولیدشده در روند تحقیق ۵۸
شکل ۳-۱۴ مراحل کلی روش اجزای محدود .... **Error! Bookmark not defined.**
شکل ۳-۱۵ شکل شماتیک از یک شکستگی و بازشدگی آن در برابر ابعاد مدل ۹۱

شکل ۴-۱ فلوچارت الگوریتم مورداستفاده برای تحلیل میدان جریان تابع تنش در تحقیق حاضر .. ۹۸
شکل ۴-۲ پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۰
شکل ۴-۳ نواحی مختلف پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۱
شکل ۴-۴ ناحیه‌ی ۲ از پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۲
شکل ۴-۵ ناحیه‌ی ۳ از پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۳
شکل ۴-۶ ناحیه‌ی ۴ از پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۴
شکل ۴-۷ ناحیه‌ی ۵ از پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۴
شکل ۴-۸ ناحیه‌ی ۶ از پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۵
شکل ۴-۹ ناحیه‌ی ۷ از پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۵
شکل ۴-۱۰ ناحیه‌ی ۸ از پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۵
شکل ۴-۱۱ تصویری از ارایه‌ی نتایج بصری توسط برنامه $FlowSHUT^{3D}$ ۱۰۶
شکل ۵-۱ یک مقطع دو بعدی که از مدل سه‌بعدی در امتداد ۹۰ درجه توسط نرم‌افزار $FlowSHUT^{3D}$ استخراج شده است. ۱۱۰
شکل ۵-۲ ساختار هندسی و هیدرولیکی مثال اول ۱۱۱
شکل ۵-۳ ساختار هندسی و هیدرولیکی مثال دوم ۱۱۳
شکل ۵-۴ ساختار هندسی و هیدرولیکی یکی از حالت‌های تصادفی از مثال سوم ۱۱۵
شکل ۵-۵ نمودار زاویه‌ی حداقل (θmin) در برابر اندازه‌ی مثلث‌بندی (hs) ۱۱۶
شکل ۵-۶ نمودار پارامترهای مختلف مش‌بندی در برابر اندازه‌ی مثلث‌بندی ۱۱۷
شکل ۵-۷ نمودار تعداد رووس در برابر تعداد مثلث‌های مدل ۱۱۸
شکل ۵-۸ نمودارهای مقایسه‌ی شدت‌جریان متوسط در برابر اندازه‌ی مثلث‌بندی ۱۱۹
شکل ۵-۹ مقایسه‌ی پارامترهای مربوط به زمان و تعداد رووس مدل ۱۲۱
شکل ۵-۱۰ ساختار هندسی و نمودارهای هیدرولیکی برای اعتبارسنجی راه‌حل محاسبه‌ی جریان۱۲۳

شکل ۵-۱۱ نمودار نرخ جریان در برابر مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش برجا برای سه مدل ساختاری شکستگی مختلف با استفاده از $FlowSHUT^{3D}$ و برنامه‌ی 3DEC.................................... ۱۲۵
شکل ۵-۱۲ نمودار تغییرات ضریب انتقال‌پذیری در برابر طول ضلع REV ۱۲۸
شکل ۵-۱۳ نمودار توزیع هد هیدرولیکی در یکی از حالت‌های تولیدشده توسط $FlowSHUT^{3D}$ ۱۲۹
شکل ۵-۱۴ اثر تنش بر بازشدگی المان‌های مجزای مدل ۱۳۰
شکل ۵-۱۵ نمودار درصد خطای محاسبات در برابر تعداد تکرارهای الگوریتم ۱۳۱
شکل ۵-۱۶ نمودارهای مقدار مؤلفه‌ی قائم میدان تنش برجا در برابر نرخ جریان.................. ۱۳۳
شکل ۵-۱۷ نمودار نسبت مؤلفه‌ی افقی به قائم میدان تنش برجا در برابر نرخ جریان ۱۳۴
شکل ۵-۱۸ مقایسه‌ی بین الگوی همگرایی روش‌های CG، MINREs و QMR برای مساله‌ی DFN دو بعدی با اندازه‌ی متوسط ۱۳۸
شکل ۵-۱۹ نمودار هد هیدرولیکی در مدل شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی در دو نمای مختلف ۱۴۰

فهرست جدول‌ها

جدول ۳-۱ توابع توزیع احتمال و پارامترهای آن‌ها.. ۳۸
جدول ۵-۱ پارامترهای آماری ویژگی‌های هندسی دسته‌درزه‌ها. ۱۱۰
جدول ۵-۲ پارامترهای هندسی دسته‌درزه‌ها ۱۱۴
جدول ۵-۳ تعداد شکستگی‌ها و فصل مشترک‌های موجود در حالت‌های تصادفی مختلف ۱۱۵
جدول ۵-۴ پارامترهای ژئومکانیکی و رئولوژیکی مدل‌سازی جریان تابع تنش...................... ۱۲۴
جدول ۵-۵ نتایج محاسبه‌ی جریان مدل با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کریلف، روش مستقیم فاکتورگیری LQ و برنامه‌ی 3DEC... ۱۲۶
جدول ۵-۶ کارایی روش‌های مختلف زیرفضای کریلف در رابطه با تغییرات ویژگی‌های شبکه‌ی شکستگی و ویژگی‌های طیفی ماتریس مربوط به مدل DFN ۱۳۷
جدول ۵-۷ کارایی روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای یک حالت تصادفی متفاوت از شبکه‌ی شکستگی‌های ارایه شده در جدول ۶-۱ .... ۱۳۹
جدول ۵-۸ جریان محاسبه‌شده برای حالت تصادفی اول از مدل شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا از طریق روش‌های مختلف زیرفضای کریلف ۱۴۱
جدول ۵-۹ جریان محاسبه‌شده برای حالت تصادفی دوم از مدل شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا از طریق روش‌های مختلف زیرفضای کریلف ۱۴۱
جدول ۵-۱۰ خطای محاسباتی روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی اول از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا.. ۱۴۲
جدول ۵-۱۱ خطای محاسباتی روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی دوم از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا.. ۱۴۲

جدول ۵-۱۲ زمان پردازش روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی اول از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا ۱۴۴
جدول ۵-۱۳ زمان پردازش روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی دوم از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا ۱۴۴

فصل اول؛ کلیات

۱-۱. مقدمه

تعیین میزان جریان سیال یا تراوایی در محیط‌های سنگی شکسته برای متخصصین مهندسی سنگ همواره از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده است. طراحی و اجرای سازه‌های سنگی مثل، تونل‌های انتقال انرژی و حمل‌ونقل، چاه‌ها و مخازن مواد هیدروکربوری، مهندسی تزریق، مغارهای دفن زباله‌های هسته‌ای، نفوذپذیری شالوده‌ی سدها، سازه‌های ژئوترمال و فضاهای معدنی روباز و زیرزمینی، بدون در نظر گرفتن اثر تراوایی سنگ درون‌گیر بسیار پرهزینه و در برخی موارد ناممکن است. علاوه‌بر آن، تحقیقات نشان می‌دهد، یکی از مواردی که می‌تواند تراوایی سنگ را به‌طور چشمگیری تحت تأثیر قرار دهد، اثر تنش‌ها است. بنابراین، تاکنون تحقیقات گسترده‌ای بر روی تحلیل اثر توأمان جریان سیال و تنش‌ها متمرکز شده که به سمت توسعه‌ی روش‌های مختلف تجربی، تحلیلی، عددی، مدل‌سازی‌های کامپیوتری و روش‌های ترکیبی سوق یافته است.

هر یک از روش‌های تحلیل اثر تنش بر جریان سیال دارای مزایا و معایبی است که دلیلی برای انتخاب هر یک از این روش‌ها توسط محققان مختلف بوده است. بااین‌وجود، از نیم قرن اخیر تا به امروز با توسعه‌ی همه‌جانبه‌ی کامپیوترها، مدل‌سازی‌های کامپیوتری با کاربرد روزافزونی همراه بوده‌اند. با استفاده از روش‌های عددی که در قالب کدهای کامپیوتری توسعه یافته‌اند، می‌توان اثر تنش بر جریان سیال در محیط‌های سنگی شکسته را با کمترین هزینه‌ی محاسباتی ممکن در طراحی سازه‌ها، مورد بررسی قرار داد.

در نظر گرفتن اثر تنش‌های برجا می‌تواند به سوق دادن مدل به سمت یک مدل واقعی‌تر، یک گام مهم روبه‌جلو محسوب شود. برای بررسی اثر متقابل یک فرآیند توأمان هیدرومکانیکی درک مفهوم تنش

مؤثر ضروری است و می‌تواند به‌صورت تغییراتی در بازشدگی یا ضریب انتقال‌پذیری[1] شکستگی‌ها نشان داده شود.

۱-۲.ضرورت انجام تحقیق

ضرورت شبیه‌سازی دقیق و نزدیک به واقعیت چارچوب هندسی مسایل مهندسی سنگ که بحث پیرامون شکستگی‌های با امتدادیافتگی توزیع شده و محدود را شامل می‌شود و همچنین، لزوم کاهش هزینه‌ی محاسباتی برای تسهیل فرآیند مدل‌سازی فرآیندهای هیدرومکانیکی در مسایل با ابعاد بزرگ‌تر و پیچیدگی بیشتر، انگیزه‌ی اصلی نویسندگان جهت انجام تحقیق حاضر است. بنابراین در این تحقیق با درک اهمیت و ضرورت موضوع و با بررسی نقاط ضعف مدل‌های ارایه‌شده‌ی پیشین که در فصل دوم به‌تفصیل بررسی می‌شود، به توسعه‌های بیشتر در این زمینه پرداخته شده است.

۱-۳. بیان مساله

روش شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا به‌عنوان یک روش کارآمد برای مدل‌سازی ساختار هندسی سنگ‌های شکسته شناخته می‌شود. با کاربرد این روش می‌توان مدل‌سازی‌هایی با حالت‌های تصادفی آماری متعدد را برای نزدیک‌تر کردن خروجی مدل به یک حالت واقعی‌تر، تحلیل نمود. به دلیل این‌که رفتار مدل می‌تواند در بعد سوم بسیار متفاوت از دو بعد دیگر باشد، لذا نتایج مدل‌سازی‌های سه‌بعدی نسبت به نوع دو بعدی آن‌ها از دقت بالاتری برخوردار است، هرچند که در این شرایط پیچیدگی‌های محاسباتی افزایش چشمگیری خواهد داشت. بنابراین، روش شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی می‌تواند چارچوب هندسی مناسب‌تری برای مدل‌سازی جریان در شکستگی‌های موجود در توده‌سنگ باشد به‌شرط آن‌که بتوان تمهیداتی برای کاهش بار محاسباتی مدل پیش‌بینی نمود.

---
[1] Transmissivity

در شبکه‌های شکستگی مجزای سه‌بعدی که تجسم واقع‌بینانه‌تری از سنگ شکسته ارایه می‌دهد، ناپیوستگی‌ها به‌صورت صفحه‌ای مدل‌سازی می‌شوند. در این مدل هر شکستگی به‌صورت یک جفت صفحه‌ی موازی با بازشدگی مشخص در نظر گرفته می‌شود که دارای اشکال هندسی متنوعی است (دایره، بیضی، مستطیل و چندضلعی). این صفحات که به‌صورت فضایی و با استفاده از پارامترهای آماری (شیب، جهت شیب و امتدادداری) آرایش یافته‌اند، با یکدیگر تلاقی کرده و الگوی اتصال‌پذیری شبکه را تشکیل می‌دهند. هرچند، با وجود شکستگی‌هایی که دارای امتدادداری توزیع شده به‌طور آماری و با طول محدود در یک دامنه‌ی مشخص هستند، عملاً پیچیدگی قابل توجهی به مدل‌سازی‌های هیدرومکانیکی تحمیل می‌شود، با اختصاص دادن ویژگی‌های هندسی، هیدرولیکی و مکانیکی مناسب به هر یک از جفت صفحات موازی (مثل، زبری، ضریب انتقال‌پذیری هیدرولیکی و سختی سطوح شکستگی)، عملاً مسیر اصلی جریان سیال در توده‌سنگ از یک مرز مدل به مرز دیگر، برقرار می‌شود. بر اساس فرض‌های ساده‌سازی معتبر، سیال در هر ناپیوستگی در بین دو دیواره‌ی صاف موازی جریان می‌یابد و بنابراین لازم است که جریان در داخل این ناپیوستگی‌ها به‌صورت دو بعدی بررسی شود.

از طرفی، به دلیل عدم وجود روابط تحلیلی برای جریان صفحه‌ای (دو بعدی) و همچنین اهمیت سرعت همگرایی به پاسخ مدل، محققان تلاش نموده‌اند که برای مدل‌سازی و تحلیل مساله‌ی جریان از روش‌های عددی ویژه‌ای مثل روش اجزای محدود استفاده نمایند. روش اجزای محدود برای بیش از نیم‌قرن به‌عنوان یک روش قابل اطمینان در مسایل مهندسی سنگ موردتوجه قرارگرفته است و با توسعه‌ی همه‌جانبه و روزافزون در آن، همچنان کارآمد است.

کاربرد و توانایی روش اجزای محدود برای حل مسایل گوناگون بسیار گسترده است. توسعه‌ی این روش، مستقیماً به پیشرفت‌های سریع در تکنولوژی‌های کامپیوتری به‌ویژه در دو دهه‌ی اخیر و پتانسیل محاسبه‌ای و انطباق‌پذیری آن وابسته است و با افزایش توان کامپیوترها، تحلیل مسایل بزرگ‌تر و پیچیده‌تر امکان‌پذیر شده است.

گستره‌ی مسایلی که برای تحلیل با استفاده از روش اجزای محدود مناسب است، بسیار وسیع است و درواقع بسیاری از این مسایل قبل از آن‌که روش اجزای محدود به وجود آمده باشد قابل‌حل نبوده‌اند. پیچیدگی‌ها و تقریب‌ها در الگوریتم مورد استفاده دربسته‌های اجزای محدود تجاری که در حال حاضر مورد استفاده قرار می‌گیرند، به‌تدریج برای کاربران کمتر توضیح داده می‌شوند. فرآیندهای اساسی این روش به میزان زیادی به‌واسطه‌ی پیش‌پردازنده و پس‌پردازنده‌های پیشرفته مخفی مانده است. با توجه به آن‌که هزینه‌ی نرم‌افزاری و سخت‌افزاری کاهش ولی هزینه‌ی مربوط به دستمزد نیروی کار افزایش‌یافته است، سطوح تماس مشترک کاربر - برنامه، اهمیت بیشتری پیداکرده است. برخلاف گذشته که عامل محدودکننده در استفاده از روش اجزای محدود، قدرت کامپیوترها بود، در حال حاضر این عامل محدودکننده نیروی انسانی و دانش فنی است.

توسعه‌ی همه‌جانبه‌ی پردازنده‌های کامپیوتری و مساله‌ی تطبیق آن‌ها با روش‌های عددی، نه‌تنها کاربران را از این روش ناامید نکرد، بلکه به برنامه‌ها، چارچوبی با دقت غیرقابل‌انکار بخشید. اکنون پیش پردازنده‌ها به‌سادگی می‌توانند مدل‌های پیچیده، جذاب و به‌ظاهر قابل‌اعتمادی را با دریافت حداقل میزان ورودی از کاربر، تولید نمایند. پس‌پردازنده‌ها به نحوی مشابه خروجی‌های ترسیمی جذاب و متقاعدکننده‌ای تولید می‌کنند. هنگامی‌که روش اجزای محدود به‌درستی مورد استفاده قرار گیرد، می‌تواند نتایج دقیق و قابل‌اعتمادی تولید نماید، ولی باید به یاد داشت که این روش فقط یک روش تقریبی است و اعتبار و دقت حل مدل به‌دقت بیان مساله و رویه‌ی صحیح تحلیل آن بستگی دارد.

یکی از پیش‌شرط‌های اصلی استفاده از روش اجزای محدود، مجزاسازی هندسه‌ی مساله به اجزای محدود و تشکیل گره‌های محاسباتی است که به‌کمک یک روش مش‌بندی بهینه قابل انجام است. تاکنون روش‌های مختلفی برای مش‌بندی ساختارهای هندسه‌ی مختلف توسعه یافته‌اند که یکی از پرکاربردترین آن‌ها، روش دلانه است. هرچند، این روش برای هندسه‌های پیوسته بسیار پرکاربرد است،

برای تطبیق با هندسه‌ی محیط گسسته با چالش‌های جدی مواجه است و نیاز به روشی کارآمد که پاسخگوی این چالش‌ها باشد، احساس می‌شود.

پس از مثلث‌بندی سطح شکستگی‌ها، توابع تقریب مناسب (توابع شکل[1]) تعیین می‌شود. نتیجه‌ی اصلی حل مسایل مختلف با استفاده از روش اجزای محدود، معمولاً یک ماتریس بزرگ و تنک تحت عنوان ماتریس مجزاسازی یا ضرایب است که ابعاد آن متناسب با گستردگی و پیچیدگی‌های مساله افزایش می‌یابد. مؤلفه‌های این ماتریس ضرایب در مسایل هیدرولیکی مجهولاتی هستند که می‌توان آن‌ها را همسان با نفوذپذیری گره‌ها در سرتاسر مدل در نظر گرفت. متناسب با ابعاد و پیچیدگی‌های مدل مورد بررسی، این ماتریس‌های ضرایب بزرگ‌تر می‌شود در حالی‌که تعداد مؤلفه‌های غیر صفر آن معدود است.

حل دستگاه های معادلات با ماتریس ضرایب بسیار بزرگ و تنک[2] مساله‌ی پیچیده‌ای است و تاکنون روش‌های مختلفی برای حل دستگاه معادلات مرتبط با آن‌ها پیشنهاد شده است. یکی از کارآمدترین آن‌ها، روش‌های زیرفضای کریلف است که در دسته‌ی روش‌های تکراری قرار می‌گیرد. در این دسته، ایده‌ی اصلی، آن است که زیرفضای برداری اولیه به‌منظور کاهش بار محاسباتی و الزامات سخت‌افزاری تغییر کند و به‌جای حل یک‌باره دستگاه معادلات از حلقه‌های تکراری استفاده شود.

۱-۴. هدف از انجام تحقیق

مرور تحقیقات پیشین نشان می‌دهد که ارایه‌ی یک روش عددی جامع برای مدل‌سازی اثر تغییرات میدان تنش برجا بر جریان سیال در سنگ‌های شکسته که بتواند در یک مدل‌سازی نزدیک به حالت واقعی (با در نظر گرفتن شکل، موقعیت و ابعاد واقعی شکستگی‌ها) در کوتاه‌ترین زمان ممکن و نیاز به

[1] Shape functions
[2] Sparse

کمترین الزامات محاسباتی و تجهیزات سخت‌افزاری، تاکنون کمتر مورد توجه قرار گرفته است. همان‌طور که در فصل دوم بحث شده است، بیشتر مطالعات قبلی شکستگی‌ها را به‌صورت برش دهنده‌های بلوک اصلی مدل و با امتدادداری بی‌نهایت در نظر می‌گیرند. بنابراین، بلوک‌های با اشکال هندسی ساده‌ای در بین شکستگی‌ها تشکیل خواهد شد که محاسبات را تا حدود زیادی ساده می‌کند. اما در حقیقت، شکستگی‌ها با امتدادداری محدود (از ریزترک‌ها تا گسل‌ها) توزیع شده‌اند و انجام محاسبات فرآیندهای هیدرومکانیکی در چنین مدل‌هایی می‌تواند بسیار پیچیده باشد. با توسعه‌ی این مدل بهینه امکان مدل‌سازی مسایل پیچیده‌تر و با ابعاد بزرگ‌تر در حداقل زمان ممکن و با کمترین هزینه‌ی محاسباتی فراهم خواهد شد. بنابراین، روندی که برای دستیابی به هدف فوق مطرح می‌شود، عبارت است از:

- تدوین و توسعه‌ی الگوریتمی جامع که بتوان با استفاده از مجزاسازی عددی، روابط تحلیلی تک‌بعدی کلاسیک برای محاسبه‌ی جریان سیال را به یک محیط سنگی درزه‌دار سه‌بعدی تعمیم داد
- توسعه‌ی یک روش بهینه برای مش‌بندی ساختار هندسی پیچیده‌ی شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی
- ایجاد فضای مناسب برای استفاده از روش المان محدود با تلفیق مدل‌های ساختاری شکستگی
- ارایه‌ی بهترین و سریع‌ترین روش برای حل دستگاه‌های معادلات بزرگ و تنک حاصل از روش مجزاسازی برای افزایش کارآمدی مدل
- تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای هندسی محیط ناپیوسته، پارامترهای هیدرولیکی سیال و میدان تنش بر جریان سیال و همچنین پارامترهای حل عددی

در این تحقیق، برای پیاده‌سازی الگوریتم‌هایی که به‌کمک ابزار فوق طراحی می‌شوند، برنامه‌ی کامپیوتری $\mathrm{FlowSHUT}^{3D}$ در محیط C# توسعه داده شده است. در این برنامه، این امکان فراهم شده است که علاوه بر نمایش نتایج به‌صورت کمی، از یک واسطه‌ی گرافیکی نیز برای نمایش بصری نتایج استفاده شود.

از نتایج حاصل از برنامه $\mathrm{FlowSHUT}^{3D}$ می‌توان برای تعیین میزان نرخ جریان، هد هیدرولیکی، ضریب انتقال‌پذیری متوسط، ارزیابی ابعاد حجم عنصر نماینده و تحلیل حساسیت پارامترهای مختلف هندسی و رئولوژیکی و همچنین، سنجش کارایی روش‌های تکراری محاسباتی استفاده نمود. از مزایای عمده‌ی این برنامه می‌توان به جامع بودن آن اشاره کرد که به‌معنای مستقل بودن برنامه از مرحله‌ی دریافت داده‌های اولیه تا مرحله‌ی ساخت خروجی‌های کیفی و کمی است. در بین مطالعات انجام‌شده در متون علمی مختلف کمتر مطالعه‌ای را می‌توان یافت که عملاً بر مدل‌سازی فرآیند هیدرومکانیکی در سه بعد با محوریت کاهش هزینه‌های محاسباتی، تمرکز داشته باشد.

۱-۵. ساختار رساله

در فصل دوم در ارتباط با مرور مطالعات پیشین به‌طور مفصل بحث خواهد شد. فصل سوم و چهارم به‌ترتیب به تشریح فرآیند توسعه‌ی مدل عددی در تحقیق حاضر و تدوین برنامه‌ی $\mathrm{FlowSHUT}^{3D}$ اختصاص داده شده است. در فصل پنجم تمرکز اصلی بر اعتبارسنجی و تحلیل حساسیت مدل قرار داده شده است و در فصل ششم جمع‌بندی و پیشنهادها ارایه شده است.

فصل دوم؛ مروری بر تحقیقات پیشین

۲-۱. مقدمه

این فصل به مرور تحقیقاتی اختصاص دارد که در گذشته توسط محققین مختلف در ارتباط با هر یک بخش‌های اصلی تحقیق حاضر انجام شده است. مطالعات مختلف در ارتباط با توسعه‌های اخیر در محاسبات جریان تابع تنش و فرآیندهای توأمان هیدرومکانیکی در محیط سنگی ناپیوسته و همچنین تاریخچه‌ی روش شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا، روش مش‌بندی محیط‌های ناپیوسته، روش المان محدود و روش‌های تکراری زیرفضای کریلف در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲-۲. مروری بر پیشینه‌ی تحلیل اثر تنش بر جریان سیال در محیط ناپیوسته

از دهه‌ی هشتاد میلادی، اثر میدان تنش بر جریان سیال در تک شکستگی‌ها و یا سنگ‌های شکسته با روش‌های مختلف (تحلیلی، تجربی و عددی) به‌طور گسترده مورد مطالعه قرارگرفته و در این زمینه پیشرفت‌های مهمی توسط جینگ[1] و همکارانش در سال ۲۰۱۳ حاصل شده است. به‌طورکلی، نتایج نشان می‌دهد که الگوی اتصال‌پذیری شبکه‌ی شکستگی‌ها یا نفوذپذیری معادل سنگ شکسته می‌تواند به‌طور قابل‌توجهی به‌دلیل تغییر شرایط میدان تنش دگرگون شود. بااین‌وجود، به‌دلیل پیچیدگی‌های محاسبات اثر تنش بر جریان سیال در محیط‌های ناپیوسته‌ی سه‌بعدی، تنها تعداد محدودی از تحقیقات به بررسی چنین مواردی پرداخته‌اند [۱] و مدل‌سازی فرآیند هیدرومکانیکی در شبکه‌های شکستگی به‌ندرت مورد بحث قرارگرفته است [۲].

[1] Jing

یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی پیوسته‌ی معادل برای تحلیل کوپل هیدرومکانیک، تئوری تنسور ترک[1]است که توسط ادا[2]توسعه داده شده است [۳]، هرچند، مدل پیوسته‌ی معادل[3]نیز توسط محققین مختلف در این زمینه مورد استفاده قرار گرفته است [۶-۴]. اگرچه در این روش‌ها اثر طول محدود شکستگی‌ها دیده می‌شود، قضاوت مهندسی در آن‌ها بسیار اثرگذار است و ممکن است برای برخی از کاربردهای خاص با دقت مناسبی پاسخگو نباشند.

باوجود این‌که بیان شده است که بعضی از روش‌های عددی مانند المان محدود تنها با شرایط خاصی، برای مدل‌های بدون شکستگی یا با تعداد کمی از شکستگی‌ها می‌تواند کاربرد داشته باشد [۷]، یک مدل عددی ناپیوسته بر مبنای این روش برای تحلیل کوپل هیدرومکانیک توسط گودمن[4]توسعه یافت که در آن، هندسه‌ی مدل از مجموعه‌ای از بلوک‌های به‌هم متصل با فصل مشترک شکستگی‌ها تشکیل شده است [۸]. همچنین، یک مدل عددی برای تحلیل کوپل هیدرومکانیک با ادغام تئوری بایوت[5]و روش المان محدود[6]توسط نوریشاد و همکارانش برای محیط‌های متخلخل ارایه شد [۹]. سپس، یک روش تلفیقی المان محدود – المان مرزی برای تحلیل کوپل هیدرومکانیک در سه بعد توسط السوورث[7] توسعه یافت [۱۰]. از آن زمان به بعد، تعداد زیادی از روش‌های عددی ناپیوسته برای تحلیل کوپل هیدرومکانیک مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. از آن جمله می‌توان به کاربردهایی از روش المان محدود [۱۳-۱۱]، روش المان مرزی [۱۴, ۱۵]، روش المان مجزا [۲, ۱۶]، روش تحلیل تغییر شکل ناپیوسته[8] [۷, ۱۷] و روش‌های ترکیبی[9][۱, ۱۸, ۱۹] اشاره نمود.

---

[1] Crack tensor theory
[2] Oda
[3] Equivalent continuum model
[4] Goodman
[5] Biot
[6] Finite Element Method
[7] Elsworth
[8] Discontinuous Deformation Analysis
[9] Hybrid Methods

ریاحی و همکارانش در سال ۲۰۱۴ یک فرآیند هیدرومکانیکی را با استفاده از روش اجزای مجزا[1] مدل‌سازی کردند [۲۰]. بناتو[2]و همکارانش، از نرم‌افزار FLAC3D[3] که بر اساس روش عددی تفاضل محدود[4]توسعه‌یافته است، برای مدل‌سازی فرآیند هیدرومکانیکی در سیستم‌های ژئوترمالی استفاده نمودند [۲۱].

مطالعاتی در رابطه با تأثیر تنش‌های برجا بر تغییر شکل یک مدل هیدرومکانیکی در محیط شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا و سپس مقایسه‌ی نتایج با مدل موسوم به AFN[5] نیز توسط لی[6]و همکارانش صورت گرفته است [۲۲]. تحقیقاتی درزمینه‌ی مدل‌سازی هیدرومکانیکی برای بررسی اثر شکست القایی ناشی از فعالیت‌های معدنی در توده‌سنگ و اثر تزریق سیال بر جریان سیال در چارچوب روش اجزای محدود با روش حل موازی در سه بعد توسط بک[7]صورت گرفته و تأثیر پارامترهای مختلف بر یکدیگر تحلیل شده است. بک از روش حل مستقیم در مطالعه‌ی خود استفاده نموده است [۲۳]. بیدگلی و جینگ اثر فشار منفذی و فشار سیال بر تغییرشکل‌پذیری و استحکام سنگ در شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای دو بعدی را مطالعه نمودند [۲۴]. هرچند، در این روش‌ها از الگوریتم‌های خلاقانه‌ای برای بهینه‌سازی محاسبات استفاده شده است، شکستگی‌ها با امتداد یافتگی محدود در نظر گرفته می‌شوند که می‌تواند الگوی اتصال‌پذیری شبکه را با چالش مواجه سازد.

در استفاده از منابع انرژی ژئوترمال (HDR[8])، یک مخزن مصنوعی با تحریک و گسترش شکستگی در سنگ برای فعال‌سازی جریان ژئوترمال ایجاد می‌شود [۲۵]؛ در طراحی و اجرای مخازن زیرزمینی برای ذخیره‌سازی ایمن مواد و دفن زباله‌های خطرناک، پتانسیل جریان آلودگی در شکستگی‌های طبیعی

---

[1] Discrete Element Method
[2] Benato
[3] Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions
[4] Finite Diference Method
[5] Analogous Fracture Network
[6] Lei
[7] Beck
[8] Hot Dry Rock

سنگ ارزیابی می‌شود [۲۶]؛ در انتقال آب در سفره‌های زیرزمینی در مهندسی هیدرولوژی، میزان آبگذری در شبکه‌ی شکستگی‌های توده‌سنگ محاسبه می‌شود [۲۷] و در مخازن هیدروکربوری، حرکت نفت و گاز برای افزایش تولید مخازن موردمطالعه قرار می‌گیرد [۲۸]. همچنین شکستگی‌های سنگ عامل تعیین‌کننده‌ای در پایداری شیروانی‌های سنگی و معدنکاری زیرزمینی به‌ویژه در شرایط وجود آب زیرزمینی، محسوب می‌شوند [۲۹]. این مواردی تنها گوشه‌ای از کاربردهای مهم بررسی اثر شکستگی‌ها در توده‌سنگ هستند.

۲-۳. مروری بر پیشینه‌ی شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا

توده‌سنگ ترکیبی از ماده‌سنگ و ناپیوستگی است. ناپیوستگی ازنظر مقیاس می‌تواند تخلخل، شکستگی، درزه، گسل و صفحات لایه‌بندی را شامل شود. در بیشتر کاربردهای مهندسی، ناپیوستگی، عاملی حیاتی است که ویژگی‌های اصلی توده‌سنگ؛ مثل استحکام و نفوذپذیری را کنترل می‌کند. برای مثال، شبکه‌ی ناپیوستگی‌های سنگ به‌عنوان مهم‌ترین مسیر انتقال سیال در توده‌سنگ در زیر سطح زمین به‌ویژه در اعماق زیاد ایفای نقش می‌کند [۳۰].

DFN یک روش ویژه است که جریان سیال در توده‌های سنگ را تنها در امتداد شکستگی‌های به هم متصل، مدل‌سازی می‌کند. این روش در دهه‌ی ۸۰ میلادی برای مسایل دو و سه‌بعدی مطرح شد و پس‌ازآن به‌طور مداوم با کاربردهای روزافزونی در مهندسی سنگ و علوم زمین توسعه یافت [۳۷-۳۱]. این روش یکی از شاخص‌ترین روش‌های مطالعه‌ی جریان سیال در سنگ‌های شکسته است که برای آن ساخت مدل پیوسته معادل تحلیلی، مشکل است و یا حتی می‌توان برای محاسبه‌ی جریان پیوسته‌ی معادل در توده‌های سنگی از آن استفاده نمود [۳۸, ۳۹]. کاربردهای روش شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا در مهندسی سنگ و به‌ویژه در سال‌های اخیر در مطالعات مختلف به‌وفور قابل مشاهده است [۴۴-۴۰]. همچنین، مدل DFN کاربردهای بسیاری برای مسایل مربوط به جریان سیال در سنگ‌های شکسته

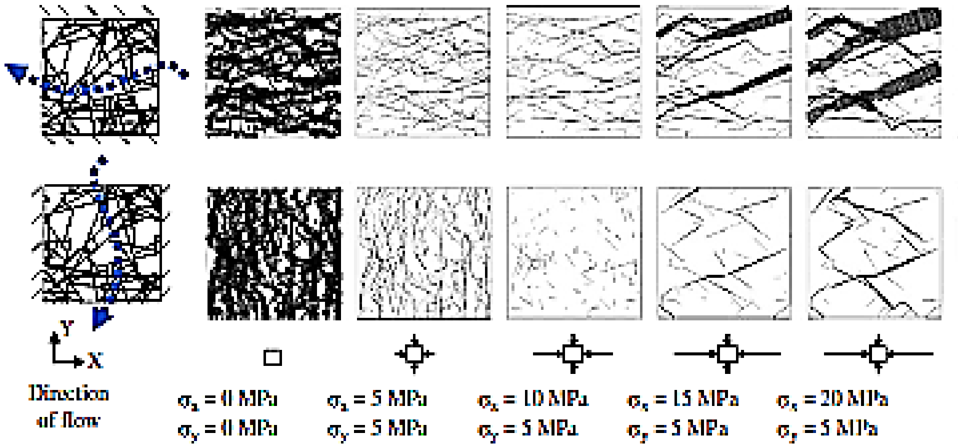
دارد [۴۷-۴۵] تاکنون تعدادی کد کامپیوتری نیز در ارتباط با مدل‌های DFN توسعه یافته‌اند که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به FRACMAN/MAFIC و NAPSAC اشاره نمود [۴۸]. اگرچه این کدها برای محاسبه‌ی جریان در حالت استاتیکی به‌خوبی توسعه یافته‌اند، برای مدل‌سازی تنش‌ها و فرآیندهای هیدرومکانیکی سازگاری خوبی ندارند.

در ارتباط با استفاده از ساختار شبکه‌های شکستگی مجزا[۱](DFN) در محاسبات مربوط به جریان سیال می‌توان به موارد ذیل اشاره نمود. یون[۲] و همکارانش در سال ۲۰۱۳ مدل‌های دو بعدی هیدرومکانیکی مربوط به شکست هیدرولیکی در چارچوب هندسی شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای دو بعدی با کاربرد کد[۳]PFC2D را مطالعه نمودند [۴۹]. ژائو[۴] و همکارانش در همان سال تعیین اثر میدان تنش بر جریان سیال و انتقال محلول از طریق همرفتی و انتشار در متن سنگ شکسته در دو محیط شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا و مدل هندسی محیط معادل در دو بعد را مورد مطالعه قراردادند [۲]. جینگ و همکارانش، یک بررسی کلی از اثر تنش بر انتقال محلول و حرکت سیال را همراه با مطالعات آزمایشگاهی و عددی در دو بعد با استفاده از نرم‌افزار[۵]UDEC مطالعه کردند [۵۰]. در شکل ۱-۲ اثر میدان تنش بر روی شبکه‌ی شکستگی‌ها، نشان داده‌شده است. این شکل نشان می‌دهد که در فضای دو بعدی و در شرایط ثابت بودن مقدار تنش عمودی، با تغییرات تنش افقی چگالی شکستگی‌ها تغییر می‌کند. این یکی از عواملی است که می‌تواند باعث تغییر در الگوی اتصال‌پذیری شبکه و درنتیجه تغییر در جریان سیال در دو جهت عمودی و افقی شود. مطالعاتی نیز توسط بارتن[۶] و همکارانش بر روی اثر مستقیم تغییرات میدان تنش بر بازشدگی و ضریب انتقال‌پذیری شبکه‌ی شکستگی‌ها انجام‌شده است. آن‌ها بیان نمودند که شکستگی‌ها می‌توانند به دلیل کاهش تنش مؤثر (ناشی از تزریق) یا افزایش آن

---

[1] Discrete Fracture Network
[2] Yoon
[3] Particle Flow Code 2D
[4] Zhao
[5] Universal Discrete Element Code
[6] Barton

(ناشی از تولید مخزن) به‌صورت هیدرولیکی بسته یا باز شوند. به دلیل این‌که ویژگی‌های جریان تابعی از بازشدگی مؤثر شکستگی هستند، این امکان وجود دارد که رفتار مدل (مخزن) با استفاده از روابط بین رفتار مکانیکی شکستگی‌های طبیعی (در پاسخ به تنش‌های برجا و تغییرات فشار منفذی) و ویژگی‌های هیدرولیکی آن‌ها، قابل پیش‌بینی شود [۵۱].



شکل ۲-۱ اثر میدان تنش بر جریان سیال در شکستگی‌های سنگ [۵۰].

۲-۴. مروری بر پیشینه‌ی روش‌های مش‌بندی محیط ناپیوسته

معمولاً برای محاسبه‌ی عددی جریان سیال در DFN، تک-شکستگی‌ها، مش‌بندی و معادلات جریان به‌صورت صریح در سرتاسر شبکه، حل می‌شود [۵۲, ۵۳]. علی‌رغم مزایای DFN در مدل‌سازی جریان سیال در محیط‌های سنگی درزه‌دار، تولید مش‌بندی باکیفیت بالا، یک مشکل اساسی در استفاده از این روش است. واضح است که یک DFN با دامنه‌ی وسیعی از ابعاد شکستگی‌ها، می‌تواند شامل تعداد زیادی از شکستگی‌های بسیار کوچک و بسیار بزرگ باشد. لذا این مدل‌ها نیازمند یک روش مش‌بندی خودکار هستند که قابلیت حل جریان در شکستگی‌های کوچک را به‌خوبی فراهم کند و هزینه‌ی محاسبات را بیش‌ازحد افزایش ندهد [۵۴].

به‌منظور این‌که معادلات جریان در شکستگی‌های کوچک بتوانند حل شوند، مش‌بندی در این شکستگی‌ها باید کوچک‌تر از حداقل اندازه‌ی شکستگی‌های شبکه باشد. علاوه بر دامنه‌ی مقیاس‌ها، پیچیدگی هندسی شکستگی‌ها و لزوم در نظر گرفتن تقاطع بین شکستگی‌ها، چنین مش‌بندی را امری پیچیده می‌نماید [۵۴].

مش‌بندی «منطبق[1]» روشی است که در آن موقعیت هندسی گره‌ها به‌طور منحصربه‌فرد توزیع می‌شوند. اولین روش برای مش‌بندی DFN، توسط کودینا[2]و همکارانش ارایه شد. در این روش، ابتدا شکستگی‌ها و خطوط تقاطع بین آن‌ها تولیدشده و سپس با استفاده از روش جبهه‌ی پیش‌رونده[3] به‌صورت منطبق مش‌بندی می‌شوند [۵۵]. این روش با موفقیت در چند تحقیق مختلف مورد استفاده قرارگرفته است [۵۲, ۵۶, ۵۷]. بااین‌وجود، روش مذکور نمی‌تواند برای شکستگی‌های کوچک تولید شده در شبکه به‌طور مناسبی پاسخگو باشد. تعداد زیادی از تحقیقات برای حل چالش‌های مرتبط با مش‌بندی DFN روش مشابهی را مورد استفاده قرار داده‌اند که در آن ابتدا یک شبکه‌ی نامحصور شکستگی تولیدشده و مش‌بندی می‌شود و در مرحله‌ی بعد نواقص آن به‌طور سامانمند برطرف می‌شود. به‌عنوان مثال، رووس و یال‌هایی که مثلث‌های باکیفیت پایین را تولید می‌کنند، به‌منظور افزایش کیفیت مش‌بندی، اصلاح می‌شوند. نمونه‌ای از این روش‌ها بر اساس یک مش‌بندی سنگفرشی توسط وانگ[4]و همکارانش پیشنهاد شده است [۵۸].

ماریسکا[5]و همکارانش روش دیگری برای مش‌بندی منطبق برای DFN را ارایه نمودند [۵۹]. در روش آن‌ها اگرچه، چالش‌های موجود تا حدودی مرتفع می‌شود، ولی ساختار هندسی شبکه تغییر می‌کند. در این روش فصل مشترک شکستگی‌های شبکه در معرض تغییر طول و جابه‌جایی قرار

---

[1] Conforming Mesh
[2] Koudina
[3] Advancing front technique
[4] Wang
[5] Maryška

می‌گیرند. این امر می‌تواند الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها را دستخوش تغییر قرار دهد و در این حالت مش‌بندی نماینده‌ی واقعی هندسه‌ی شبکه نخواهد بود.

روش مش‌بندی مشابهی توسط مصطفی و مصطفی [۶۰] و ارهل[1]و همکارانش [۶۱] پیشنهادشده است که در آن ابتدا مرز شکستگی‌ها و فصل مشترک آن‌ها با مکعب‌های منظم با طول یال ثابت که بین شکستگی‌های متقاطع مشترک هستند، شبیه‌سازی می‌شود و پس‌ازآن مکعبی که عناصر یک شکستگی در آن قرار دارند دوباره بر روی سطح شکستگی تصویر می‌شود. اگرچه، این روش توانایی ایجاد یک مش‌بندی باکیفیت خوب را دارد ولی نمی‌تواند تقاطع بیش از دو شکستگی را مدل کند. تعمیمی از روش فوق توسط مصطفی و همکارانش ارایه‌شده است که در آن رووس المان‌های مثلثی (حالت دو بعدی) [۶۲] یا هرمی (حالت سه‌بعدی) [۶۳] در داخل مکعب‌های منظم برای بهبود کیفیت مش‌بندی جابه‌جا و ادغام شده است و سپس دوباره روی سطوح شکستگی‌ها تصویر می‌شوند. تعمیم دیگری از این روش نیز توسط کریمی‌فرد و دورلوفسکی[2][۶۴] توسعه‌یافته است که در آن‌یک مش‌بندی منطبق با جابه‌جایی، اضافه کردن، حذف و ادغام رووس مثلث‌ها تولید می‌شود.

روش دیگری نیز توسط هایمن[3]و همکارانش [۵۴] توسعه‌یافته است که در آن با استفاده از الگوریتم رد شکستگی (FRAM[4]) در حین تولید شبکه‌ی شکستگی‌ها از تولید شکستگی‌های با شرایط نامناسب ممانعت به‌عمل می‌آید. هرچند در این روش چالش‌های مش‌بندی DFN پوشش داده می‌شود، ولی هندسه‌ی شبکه به‌طور کامل دستخوش تغییر می‌شود و لذا الگوی اتصال‌پذیری ممکن است تغییر کند.

لی[5]و همکارانش روشی را برای مش‌بندی منطبق برای DFN ارایه نمودند که با استفاده از مولد مش‌بندی پرسون و استرانگ[6]مکان رووس مثلث‌ها را با حل دستگاه معادلات تعادل نیرو در خرپا یافته

---

[1] Erhel
[2] Durlofsky
[3] Hyman
[4] Fracture Rejection Algorithm
[5] Li
[6] Persson & Strang

و یک مش‌بندی باکیفیت خوب را نتیجه می‌دهد. این روش به دلیل حل دستگاه‌های معادلات مضاعف برای هر مثلث، روشی بهینه ازنظر محاسباتی محسوب نمی‌شود و نمی‌تواند پاسخ‌گوی مناسبی برای چالش‌های مش‌بندی DFN باشد [۵۴].

مطالعاتی نیز بر توسعه‌ی روش‌های حل جریان در DFN با استفاده از مش‌بندی غیر منطبق توسعه‌یافته است. همان‌طور که قبلاً شرح داده شد، این روش‌ها هزینه‌ی محاسباتی بیش‌تری نسبت به روش‌های مش‌بندی منطبق دارند و بنابراین برای شبکه‌های با تعداد بسیار زیادی از شکستگی‌ها شاید مناسب نباشند [۶۷-۶۵].

بنیدیتو[1]و همکارانش یک روش مش‌بندی ترکیبی منطبق و غیر منطبق برای حل جریان در DFN با استفاده از روش المان مجازی[2](VEM) ارایه نمودند که در آن رووسی بر روی فصل مشترک شکستگی‌ها اضافه می‌شود که ایجاد مثلث‌های منطبق را تسهیل کند. هرچند کاربرد این روش تنها به VEM خلاصه می‌شود [۶۸].

۲-۵. مروری بر پیشینه‌ی روش المان محدود

پیدایش روش FEM به حل مسایل پیچیده‌ی الاستیسیته و تحلیل سازه‌ها در مهندسی عمران و هوا-فضا بازمی‌گردد. این روش حاصل کار هرنیکف[3]در سال ۱۹۴۱و کورانت[4]در سال ۱۹۴۲ است. با وجود این‌که روش کار این دو پژوهشگر کاملاً متفاوت بود، ویژگی مشترک تقسیم یک محدوده‌ی پیوسته به یک سری زیر محدوده به نام «اجزا» در هر دو تحقیق مشهود است [۶۹, ۷۰]. توسعه‌ی قابل‌ملاحظه‌ی روش FEM درزمینه‌ی مهندسی سازه توسط مک هنری[5]در سال ۱۹۴۳ شروع شد که از یک شبکه‌ی

[1] Benedetto
[2] Virtual Element Method
[3] Hrennikoff
[4] Courant
[5] McHenry

اجزای خطی (تک‌بعدی) از قبیل میله‌ها و تیرها در تعیین تنش در جامدات پیوسته استفاده شد [۷۱]. پس از مقاله‌ای که در سال ۱۹۴۳ به چاپ رسید علی‌رغم بی‌توجهی به آن تا چند سال، کورانت پیشنهاد نمود که حل تنش‌ها به‌صورت تفاضلات[1] در نظر گرفته شود. او توابعی را به‌صورت تقریبی بر محدوده‌های مثلثی شکل کوچکی که کل ناحیه موردنظر را پوشش می‌دادند به‌عنوان راه‌حل تقریبی ارایه کرد [۷۱]. لوی[2] در سال ۱۹۴۷ روش انعطاف‌پذیری یا نیرو را ارایه نمود و در سال ۱۹۵۳ همین محقق روش سختی یا جابجایی که می‌توانست جایگزین مناسبی در تجزیه و تحلیل استاتیکی سازه‌های تکراری در فضاپیماها باشد را معرفی کرد. البته حل دستی معادلات او کار بسیار مشکلی بود و درنتیجه روش او تا پیش‌از این‌که رایانه‌های دیجیتال با سرعت محاسباتی زیاد وارد بازار شوند، مقبولیتی نیافت [۷۲].

در سال ۱۹۵۴، آرگریس[3] و کلسی[4] با استفاده از اصول انرژی روش‌های تجزیه و تحلیل ماتریسی را توسعه دادند. این توسعه نقش مهم اصول انرژی را در روش FEM آشکار نمود [۷۳, ۷۴].

اولین کاربرد اجزای دو بعدی توسط تونه[5] و همکارانش در سال ۱۹۵۶ صورت گرفت. آن‌ها ماتریس‌های سختی را برای اجزای خرپا و تیر، و اجزای دو بعدی مثلثی و مستطیلی را برای حالت تنش دو بعدی استخراج نمودند و روشی را برای تعیین ماتریس سختی کل سازه که روش مستقیم سختی نامیده می‌شود ارایه کردند. در اوایل سال ۱۹۵۰ و همگام با گسترش رایانه‌های دیجیتالی سریع، تونه و همکارانش معادلات سختی اجزای محدود را که به‌صورت ماتریسی تشریح شده بود گسترش دادند [۷۵]. عبارت اجزای محدود اولین بار توسط کلاف[6] در سال ۱۹۶۰، هنگامی‌که از اجزای مثلثی و مستطیلی در تجزیه و تحلیل تنش استفاده گردید، به‌کاربرده شد [۷۶].

---

[1] Differences
[2] Levy
[3] Argyris
[4] Kelsey
[5] Turner
[6] Clough

در سال ۱۹۶۱ ماتریس سختی برای اجزای مسطح مستطیل شکل تحت خمش توسط ملاش[1] محاسبه شد [۷۷]. به دنبال آن در سال ۱۹۶۳ ماتریس سختی اجزای پوسته‌ای تحت خمش برای پوسته‌های متقارن محوری و مخازن تحت‌فشار توسط گرافتون و استروم[2]توسعه یافت [۷۸].

توسعه‌ی FEM در مسایل سه‌بعدی با به‌وجود آمدن ماتریس سختی برای المان‌های چهاروجهی توسط مارتین[3]در سال ۱۹۶۱ [۷۹]، گالگر[4]و همکارانش در سال ۱۹۶۲ [۸۰] و ملش در سال ۱۹۶۳ [۸۱] صورت گرفت. المان‌های سه‌بعدی دیگر در سال ۱۹۶۴ توسط آرگریس مورد مطالعه قرار گرفتند [۸۲]. در سال ۱۹۶۵ حالت خاص اجسام صلب متقارن محوری توسط کلاف و رشید[5][۸۳] و ویلسون[6] [۸۴] بررسی شد.

بیشترین تحقیقات انجام شده درزمینه‌ی اجزای محدود تا اوایل سال‌های ۱۹۶۰ در ارتباط با کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های بزرگ و تجزیه و تحلیل حرارتی در همان سال توسط تونه و همکاران [۸۵] و در ارتباط با کرنش‌های غیرخطی بودن مواد توسط گالگر و همکارانش در سال ۱۹۶۲ بررسی گردید [۸۰]. مسایل مربوط به کمانش نیز ابتدا توسط گالگر و پدلاگ[7]در سال ۱۹۶۳ موردبحث قرار گرفت [۸۶]. تعمیم این روش به مسایل ویسکو-الاستیک توسط زینسکویچ[8]و همکارانش در سال ۱۹۶۸ انجام شد [۸۷]. در سال ۱۹۶۵، آرچه[9]تحلیل دینامیکی را در تعیین ماتریس جرم یک‌پارچه که کاربرد آن در تحلیل سیستم‌هایی با جرم زیاد از قبیل میله‌ها، تیرها و تحلیل سازه‌ها است، به کار گرفت [۸۸].

---

[1] Melosh
[2] Grafton & Strome
[3] Martin
[4] Gallegher
[5] Rashid
[6] Wilson
[7] Padlog
[8] Zienckiewicz
[9] Archer

با ابتکار ملش در سال ۱۹۶۳ [۸۱] در خصوص استفاده از فرمولاسیون تفاضلات در روش اجزای محدود، استفاده از این روش در کاربردهای غیر سازه‌ای آغاز شد. مسایل میدانی از قبیل تعیین پیچش یک محور، جریان سیال و انتقال حرارت از طریق تشابه با جابه‌جایی به ترتیب توسط زینسکوویچ و چونگ[1]در سال ۱۹۶۵ [۸۹]، مارتین در سال ۱۹۶۸ [۹۰] و ویلسون و نیکل[2]در سال ۱۹۶۶ [۹۱] امکان‌پذیر شد.

علاوه‌براین، توسعه‌ی روش توابع پسماند وزن‌دار ابتدا به‌منظور استخراج معادلات الاستیسیته که در تجزیه و تحلیل سازه‌ها کاربرد دارد توسط زابو و لی[3]در سال ۱۹۶۹ [۹۲] و سپس برای مسایل مربوط به میدان‌های گذرا توسط زینسکوویچ و پارک[4]در سال ۱۹۷۰ [۹۳] انجام شد. پس‌ازآن مشخص شد که اگر استفاده از فرمولاسیون مستقیم و تغییرات تابع، مشکل و یا غیرممکن باشد روش پسماندهای وزن‌دار می‌تواند در بسیاری از مواقع مناسب باشد. برای مثال در سال ۱۹۷۷، زینسکوویچ و همکارانش از روش پسماند وزن‌دار برای محاسبه‌ی میدان مغناطیسی استفاده نمودند [۹۴].

در سال ۱۹۷۶ بلیچکو[5]مسایل مربوط به جابه‌جایی‌های بزرگ در رفتار دینامیکی غیرخطی را بررسی نموده و روش‌های عددی را برای حل دستگاه معادلات به‌دست‌آمده، بهبود بخشیدند [۹۵]. عرصه‌ی نسبتاً جدیدتری از کاربرد روش FEM درزمینه‌ی مهندسی است. در این مورد هنوز مشکلاتی از قبیل رفتار غیرخطی مواد، شکل هندسی غیرخطی و پیچیدگی‌های دیگری که هنوز باید مورد بررسی قرار گیرند، وجود دارد [۹۶, ۹۷].

از اوایل سال ۱۹۵۰ تاکنون پیشرفت‌های گسترده‌ای درزمینه‌ی کاربرد FEM در حل مسایل مهندسی صورت گرفته است. بدون شک در آینده نیز، مهندسان، ریاضی‌دانان و دیگر دانشمندان به‌منظور

[1] Cheung
[2] Nickel
[3] Szabo & Lee
[4] Parekh
[5] Belytschko

دستیابی به کاربردهای جدید روش اجزای محدود فعالیت خواهند نمود. تا آن زمان روش‌های ماتریسی و روش FEM به دلیل تعداد زیاد معادلات دیفرانسیل، روش‌های قابل‌قبولی در حل مسایل پیچیده به شمار نمی‌آمدند [۹۸].

علی‌رغم آن‌که از روش FEM در تشریح سازه‌های پیچیده استفاده می‌شد، ولی تعداد زیاد معادلاتی که از این روش در تجزیه و تحلیل سازه‌ها حاصل می‌شد استفاده از آن را بسیار دشوار و غیرعملی می‌نمود. به‌هرحال با اختراع رایانه، حل هزاران معادله طی زمان کوتاهی امکان‌پذیر شد. باوجود نسل جدید رایانه‌ها حل مسایل بزرگ‌تر اجزای محدود با درجه‌های آزادی بیشتر ممکن شد. از سال ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰، دستگاه‌های رایانه در مقیاس زیاد و نیز سیستم‌های نرم‌افزاری با رابط‌های گرافیکی مشابه با سیستم‌عامل ویندوز همراه با موس در کنار هم قرار گرفتند. اولین رایانه‌ای که موس در کنار آن قرار داشت در ۱۷ نوامبر سال ۱۹۷۰ به ثبت رسید. امروزه، رایانه‌های شخصی به تعداد بسیار زیاد تولید می‌شوند. چنین گسترشی در کنار ظهور ارتباطات شبکه‌ای، که پیامد آن پیدایش شبکه‌ی جهانی اینترنت بود پا به عرصه‌ی وجود نهاد. در دهه‌ی نود میلادی سیستم‌عامل ویندوز به بازار آمد که به‌وسیله‌ی آن کار با IBM و رایانه‌های شخصی سازگار با آن با ارایه‌ی رابط گرافیکی کاربرپسند از پیش طراحی‌شده درون این سیستم‌عامل آسان‌تر شد [۱۰۳-۹۹].

گسترش رایانه موجب توسعه‌ی برنامه‌هایی درزمینه‌ی محاسبات عددی گردید. تاکنون برنامه‌های عمومی و اختصاصی متعددی نوشته‌شده است که توسط آن‌ها حل مسایل مهندسی پیچیده تسهیل می‌گردد. برنامه‌هایی که در این زمینه نوشته‌شده است نمایانگر ظرافت روش FEM بوده و نیاز به درک کامل آن را توجیه می‌نماید [۱۰۲].

امروزه، برنامه‌های رایانه‌ای مبتنی بر اجزای محدود را می‌توان در رایانه‌هایی که دارای یک پردازنده‌ی چندهسته‌ای است، مانند رایانه‌های شخصی (PC) یا رایانه‌های قابل‌حمل (Laptop) و یا بر روی شبکه‌ای

از رایانه‌ها اجرا نمود. حافظه‌های قدرتمند رایانه‌های شخصی و مزیت برنامه‌های تحلیل‌گر، امکان حل مسایلی با تعداد زیادی مجهول را فراهم می‌سازد [۱۰۰].

برای استفاده از رایانه، تحلیل‌گر پس از مدل‌سازی مساله به‌روش FEM، اطلاعات مربوطه را وارد رایانه می‌کند. این اطلاعات می‌توانند شامل مختصات گره‌های یک جزء، ترتیب اتصال اجزا به یکدیگر، خواص ماده‌ای اجزا، بارهای اعمال‌شده یا هد هیدرولیکی، جریان سیال، شرایط مرزی، موانع و یا هر نوع بررسی مورد نظر باشد. رایانه از اطلاعات داده‌شده به‌منظور ایجاد و حل معادلات لازم برای تجزیه و تحلیل‌های موردنظر استفاده می‌نماید [۱۰۰].

۲-۶. مروری بر پیشینه‌ی روش‌های زیرفضای کریلف

روش‌های زیرفضای کریلف برای حل تکراری دستگاه‌های معادلات بزرگ و پیچیده به‌کار می‌روند. روش‌های «پیش‌شرط‌گذاری»[1] به‌معنای استفاده از یک ماتریس یا عملگر برای تبدیل دستگاه موجود به یک دستگاه معادل دیگر است. در ارتباط با روش‌های تکراری زیرفضای کریلف، مطالعاتی در مورد کاربرد و مقایسه‌ی این روش‌ها و همچنین روش‌های پیش‌شرط‌گذاری در مهندسی سنگ انجام گرفته است. ریچنبرگر[2]و همکارانش، یک روش تکراری توسعه‌یافته (LTG[3]) برای حل مساله‌ی انتقال محلول در شبکه‌ی شکستگی‌های متخلخل بزرگ – مقیاس را به کمک روش ضمنی حجم محدود همراه با یک کد شتاب‌دهنده موسوم به ORTHOMIN به کار گرفتند [۱۰۴]. دی‌دروزی[4][۱۰۵] حل جریان و انتقال آلودگی در سفره‌های آب زیرزمینی با درجه‌ی اشباع متغیر سیال را در شکستگی‌های یک شبکه‌ی منظم سه‌بعدی موردمطالعه قرار داد. مجزا سازی سطوح شکستگی‌ها با استفاده از روش ضمنی حجم

[1] Preconditioning
[2] Reichenberger
[3] Laplace Transform Galerkin
[4] De Dreuzy

کنترلی[1]با تفکیک معادله‌ی انتقال محلول با استفاده از روش گالرکین هماهنگ شده با زمان انجام گرفته و سپس حل معادله‌ی جریان با استفاده از روش تکراری نیوتن-رافسون توسعه‌یافته است.

روش اجزای مرزی (BEM) برای محاسبات جریان سیال در مدل لوله‌ای معادل برای یک شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی توسط می[2]و همکارانش، موردبررسی قرارگرفته است [۱۰۶]. وودبری[3] و همکارانش جریان سیال و انتقال محلول درون شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا را توسط روش اجزای محدود مدل‌سازی نمودند و به کمک روش‌های تکراری زیرفضای کریلف و نیوتنی دستگاه معادلات حاصله را حل کردند. در مطالعه‌ی آن‌ها از روش متعامدسازی لنکزوس پیش‌شرط‌گذاری شده شامل بسط چندجمله‌ای ساده و روش‌های بلوکی چندمرحله‌ای همراه با روش‌های کمکی تجزیه‌ی دامنه‌ی شوارتز[4]و تجزیه‌ی ناقص[5]استفاده‌شده است [۱۰۷]. مطالعه‌ی جریان آب زیرزمینی در محیط شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای متخلخل با استفاده از روش FEM توسط ژانگ[6] و وودبری انجام شد و حل دستگاه نهایی با الگوریتم توسعه داده‌شده‌ای بر پایه‌ی روش آرنولدی محاسبه گردید. در مطالعه‌ی مذکور الگوریتم توسعه داده‌شده نوعی روش گرادیان مزدوج پیش‌شرط‌گذاری شده بر اساس کد شتاب‌دهنده‌ی ORTHOMIN است. به دلیل این‌که این روش برای محاسبه‌ی پاسخ با دقت یکسان با سایر روش‌ها (مثل: گالرکین هماهنگ شده با زمان و تخلخل دوگانه)، در تعداد تکرارهای کمتری به جواب می‌رسد، بهبود قابل‌توجهی در کارایی روش لنکزوس ارایه می‌دهد [۱۰۸]. مطالعاتی نیز با محاسبه‌ی جریان در شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا با استفاده از روش DDA توسط جینگ و همکارانش، انجام‌شده است [۱۰۹]. تعیین میدان جریان در محیط شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا با استفاده از روش FEM و حل

[1] Control volume
[2] May
[3] Woodbury
[4] Scwartz domain Decomposition
[5] Incomplete Decomposition
[6] Zhang

دستگاه معادلات نهایی با استفاده از روش آرنولدی توسط سودکی و مک‌لارن[1] پیشنهادشده است. در مطالعه‌ی آن‌ها از کد شتاب‌دهنده‌ی ORTHOMIN و همچنین روش انتقال مقدار ویژه‌ی ماتریس برای افزایش سرعت همگرایی استفاده شد و نتایج نهایی با روش LTG مقایسه گردید و کارایی بهتر روش آرنولدی تأیید شد [۱۱۰]. درشوویتز و فیدلیباس[2] سه روش پیش‌شرط‌گذاری زیرفضای کریلف و همچنین الگوریتم موازی‌سازی برای حل دستگاه معادلات سیستم شکستگی‌ها را با شبکه‌بندی منظم به کار بردند [۱۱۱]. روش های صریح[3] و ضمنی[4] دو روش رایج در حل مسایل غیر خطی FEM و هر کدام دارای مزایا و معایب خود هستند. در روش ضمنی ماتریس ضرایب مربوط به تمام سیستم تشکیل می‌شود و برای هر گره جابه‌جایی متناظر آن به‌دست می‌آید. در ادامه، حل مساله بر پایه به‌دست آوردن معکوس این ماتریس است. روش صریح معمولاً برای حل مسایل دینامیکی با سرعت همگرایی بالا کاربرد دارد. در این روش، محاسبات به‌نحوی صورت می‌گیرد که نیازی به تشکیل ماتریس سختی نیست. همچنین، نتایجی که از روش ضمنی به‌دست می‌آیند دقیق‌تر است. محاسبه‌ی جریان در محیط متخلخل شکسته دوفازی در دو و سه بعد با الگوریتم‌های مجزاسازی کاملاً ضمنی و جفت شده[5] با استفاده از روش حجم کنترلی توسط شدید موردمطالعه قرارگرفته است و سپس دستگاه معادلات نهایی با استفاده از روش نیوتنی چند مشی حل شده است [۱۱۲]. گاول[6] و همکارانش از روش‌های زیرفضای کریلف توسعه‌یافته‌ای (مثل GIRKS و SRKS) برای انتشار ترک شکننده در محیط شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا استفاده کردند [۱۱۳].

[1] Sudicky & McLaren
[2] Dershowitz & Fidelibus
[3] Explicit
[4] Implicit
[5] Fully-Coupeled
[6] Gavoille

در مطالعه‌ی انجام‌شده توسط پاراشار و ریوس[1] هشت روش زیرفضای کریلف برای تعیین جریان در یک شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای دو بعدی مورداستفاده قرارگرفته و سرعت همگرایی و الزامات سخت‌افزاری آن‌ها با یکدیگر مقایسه شده است [۱۱۴].

این مقایسه‌ها در مطالعه‌ی می[2]و همکارانش نیز قابل‌مشاهده است که در آن از روش اجزای محدود پیوندی مختلط برای مجزا سازی شکستگی‌ها در محیط شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا استفاده‌شده است. بر طبق این مطالعه، برای دستگاه‌های کوچک، روش مستقیم چند جبهه‌ای و برای دستگاه‌های بزرگ، روش CG پیش‌شرط‌گذاری شده با چندجمله‌ای‌های جبری، کارایی بهتری دارند [۱۰۶].

حل جریان سیال ویسکو-پلاستیک در محیط شبکه‌ی شکستگی‌های منظم سه‌بعدی به کمک روشی موسوم به «بازیابی زیرفضای کریلف» که ترکیبی از روش‌های زیرفضای کریلف و روش‌های پیش‌شرط‌گذاری است نیز توسط نوکالا و شیمانویچ[3]موردمطالعه قرارگرفته است. همچنین در مطالعه‌ی آن‌ها حل دستگاه معادلات با پیش‌شرط‌گذار شبکه‌ی چندگانه و روش‌های همگرایی بدون ماتریس انجام‌شده است [۱۱۵]. مهاجرانی و همکارانش، میزان گسترش سیال‌های نیوتنی و غیر نیوتنی تزریق شده در شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای دو بعدی با استفاده از الگوریتم توسعه داده‌شده‌ی کاملاً صریح EGFP[4] را مورد بررسی قرار دادند و نرم‌افزار محاسبه‌گر آن GroutIUT^{2D} را توسعه بخشیدند [۱۱۶, ۱۱۷].

---

[1] Parashar & Reeves

[2] May

[3] Nukala & Šimunovic

[4] Explicit Grout Forehead Pressure

۲-۷. جمع‌بندی

در این فصل پیشینه‌ی مطالعات مرتبط با بخش‌های اصلی تحقیق حاضر به تفکیک مورد بررسی قرار گرفت. مطالعات نشان می‌دهد که باوجود توسعه‌های تحقیقاتی معتنابهی که در گذشته انجام گرفته است، خلأ ناشی از عدم وجود روشی که با تمرکز بر بهینه‌سازی سرعت محاسبات و حداقل‌سازی هزینه‌ی آن، جریان سیال تابع تنش را در محیط سنگی شکسته مدل‌سازی نماید، احساس می‌شود. با ارایه‌ی چنین روش بهینه‌ای امکان مدل‌سازی مسایل پیچیده‌تر و با ابعاد بزرگ‌تر در حداقل زمان ممکن و با کمترین هزینه‌ی محاسباتی میسر خواهد شد.

فصل سوم ؛ توسعه ی مدل عددی اثر تنش بر جریان سیال در توده سنگ درزه دار

۳-۱. مقدمه

در این فصل به توصیف فرآیند توسعه‌ی مدل تحقیق حاضر پرداخته می‌شود. این مدل عددی که با هدف تعیین میدان جریان تابع تنش در شبکه‌های شکستگی مجزا با شکستگی‌های با امتداداری توزیع شده و طول محدود و همچنین، بهینه‌سازی سرعت محاسبات و کاهش هزینه‌های محاسباتی توسعه یافته است، از پنج بخش اصلی تشکیل می‌شود. این بخش‌ها عبارت‌اند از: شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی، روش مش‌بندی بهینه‌ی محیط‌های ناپیوسته، روش اجزای محدود، مدل‌های ساختاری شکستگی و روش‌های تکراری زیرفضای کریلف.

مدل حاضر قادر است حالت‌های تصادفی مختلف DFN سه‌بعدی با ابعاد دلخواه را بر اساس داده‌های برداشت شده‌ی میدانی تولید نموده و سپس با یک الگوریتم مش‌بندی بهینه و خودکار، مسایل جریان سیال در معرض تنش را با استفاده از روش المان محدود تلفیق شده با روابط ساختاری شکستگی و روش‌های تکراری زیرفضای کریلف حل کند. در این مدل امکان تولید شبیه‌سازی‌های با ابعاد دلخواه وجود دارد، بنابراین، با استفاده از این قابلیت و سرعت بالای مدل‌سازی می‌توان تاجایی که محدودیت‌های سخت‌افزاری اجازه می‌دهد، مدل نهایی را با ابعاد بزرگ‌تری تولید نمود که برای تحلیل‌های بزرگ-مقیاس جریان بسیار راهگشا است. این مدل با تلفیق الگوریتم‌های نوآورانه، برای تحلیل سریع اثر تنش بر جریان سیال در محیط‌های سنگی درزه‌دار در یک برنامه‌ی کامپیوتری تعبیه می‌شود که خروجی آن شامل داده‌های کمی و بصری است که در فصل بعد به‌تفصیل به‌آن پرداخته خواهد شد.

در این فصل، بنیان هندسی مدل عددی حاضر توصیف می‌شود که می‌تواند برای تولید تک شکستگی‌ها، شبکه‌های شکستگی منظم و شبکه‌های شکستگی سه‌بعدی مورد استفاده قرار گیرد. الگوریتم‌ها و کدهای موردنیاز برای پیاده‌سازی ساختار هندسی سه‌بعدی مدل در ادامه‌ی تحقیقات قبلی نویسندگان در مدل‌سازی آماری دو بعدی شکستگی‌ها در توده‌های سنگی درزه‌دار قرار دارد [۴۰].

همچنین، در این فصل به توسعه‌ی نوآورانه‌ی یک الگوریتم مش‌بندی بهینه برای هندسه‌های ناپیوسته پرداخته می‌شود. در بخش‌های بعدی این فصل به بیان چالش‌ها و محدودیت‌های روش‌های مش‌بندی قبلی مرتبط با شبکه‌ی شکستگی‌ها، روش‌های بهینه‌سازی مش‌بندی و شرح روش مش‌بندی توسعه یافته در این تحقیق، پرداخته می‌شود.

علاوه‌بر آن، جزئیات فرمولاسیون و کاربرد روش اجزای محدود برای بررسی جریان تابع تنش با تلفیق مدل‌های مختلف ساختاری شکستگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. معرفی و شرح الگوریتم‌های مختلف روش‌های تکراری زیرفضای کریلف و نحوه‌ی کاربرد آن‌ها نیز در این فصل ارایه می‌شود.

۳-۲. ویژگی‌های اصلی روش DFN

نحوه‌ی اتصال شکستگی‌ها به یکدیگر در توده‌سنگ، میدان جریان سیال را کنترل می‌کند. هنگامی‌که نفوذپذیری سنگ بکر در مقایسه با نفوذپذیری شکستگی‌ها بسیار کم باشد (به‌ویژه برای سنگ‌های با تخلخل پایین) بیشتر حجم سیال در امتداد مسیرهای ایجادشده به‌وسیله‌ی شکستگی‌های به هم متصل، انتقال می‌یابد. در شبکه‌ای از شکستگی‌ها، هنگامی‌که جریان در مدل فیزیکی توده‌سنگ به حد تراوش کاهش می‌یابد، میدان جریان به الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها حساس‌تر می‌شود. در چنین حالتی، حتی تغییر کوچکی در نحوه‌ی اتصال شکستگی‌ها (به‌عنوان‌مثال، حتی اضافه شدن یا جابه‌جایی یک شکستگی کوچک در مدل) می‌تواند موجب تغییر قابل‌توجهی در میدان جریان شود. هرچند، تغییرشکل‌پذیری یا کرنش توده سنگ به تعداد و جهت‌یابی دسته‌درزه‌ها نسبت به الگوی اتصال‌پذیری آن‌ها ارتباط بیشتری دارد [۱۱۸].

محاسبه‌ی جریان در امتداد هر یک از شکستگی‌ها برای دستیابی به میدان جریان کل مدل، با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی می‌تواند به‌دست آید. یکی از این روش‌ها روش DFN است. اگر متن سنگ، صلب و ناتراوا در نظر گرفته شود، قوانین ساده‌ی جریان برای توصیف رفتار شکستگی‌ها می‌تواند مورداستفاده قرار گیرد. یک مدل DFN معمولاً بر مبنای دو پارامتر تولید می‌شود: هندسه‌ی سیستم شکستگی‌ها و ویژگی‌های مربوط به جریان سیال در تک شکستگی‌ها. پارامتر اول، پارامتر اصلی است و شبیه‌سازی‌های محیط شکسته را در برمی‌گیرد که با استفاده از توابع توزیع احتمال پارامترهای هندسی شکستگی (شامل؛ چگالی، موقعیت، جهت‌یابی و اندازه) و بر اساس داده‌های حاصل از برداشت میدانی تهیه می‌شود. همچنین شکل هندسی شکستگی‌ها (دایره‌ای، بیضوی و یا چندضلعی)، فرض می‌شود. به دلیل این‌که قابلیت اطمینان شبکه‌ی شکستگی‌ها به‌طور مستقیم به کیفیت برداشت و نمونه‌گیری میدانی وابسته است، فرآیند ارزیابی پیچیده‌ای دارد. پارامتر دوم یک پارامتر فرعی است و در صورت نیاز به مدل اضافه می‌شود. این پارامتر تعیین میزان بازشدگی شکستگی‌ها را شامل می‌شود. تعیین بازشدگی شکستگی‌ها به‌وسیله‌ی آزمون‌های آزمایشگاهی و برجا تنها می‌تواند با استفاده از تعداد یا حجم محدودی از نمونه‌ها انجام شود و در نظر گرفتن اثر مقیاس نیز پیچیده است.

در مدل‌سازی شبکه‌ی شکستگی‌ها معمولاً شکستگی‌ها به زیرمجموعه‌هایی مطابق با جهت‌یابی آن‌ها تقسیم‌بندی می‌شوند. این تقسیم‌بندی بر اساس این مفهوم است که شکستگی‌های ایجادشده توسط فعالیت‌های زمین‌شناسی معین، ویژگی‌های یکسانی (مثل جهت‌یابی) نشان می‌دهند. طبقه‌بندی دسته‌درزه‌ها به کمک نمودارهای گل رز[1] در کاربردهای دو بعدی و تصاویر نیم‌کره‌ای[2] در کاربردهای سه‌بعدی انجام می‌شود. هر شکستگی در هر دسته‌درزه به‌طور مجزا شبیه‌سازی می‌شود و مدل نهایی ترکیب ساده‌ای از همه‌ی دسته‌درزه‌های مستقل است [۴۵].

[1] Rose diagram
[2] Hemispherical projection

شکستگی‌های سنگ معمولاً به‌صورت یک جفت صفحه‌ی صاف موازی فرض می‌شوند، به‌طوری‌که قانون کوبیک[1] بتواند به‌راحتی مورداستفاده قرار گیرد. قانون کوبیک در ساده‌ترین شکل آن به‌صورت زیر است [۱۱۹].

$$Q/\Delta h = ca^3 \qquad (۱-۳)$$

که در آن، Q نرخ جریان، Δh اختلاف در هد هیدرولیکی، c عدد ثابتی که به هندسه‌ی جریان و ویژگی‌های سیال بستگی دارد و a بازشدگی شکستگی است.

چنین فرض‌های ساده‌کننده‌ای به‌ویژه برای مدل‌های DFN بزرگ-مقیاس که با تعداد زیادی از شکستگی‌ها سروکار دارند، می‌تواند مناسب باشد اما، در حالت واقعی، سطوح شکستگی‌ها کاملاً صاف و صیقلی نیستند و کاربرد قانون کوبیک ممکن است به‌طور کامل عملی نباشد. از طرفی، بسیاری از محققان مشاهده نموده‌اند که سطوح شکستگی‌ها یک ویژگی فراکتالی از خود نشان می‌دهند که معمولاً به‌وسیله‌ی نمای هورست[2](یک تخمین زننده‌ی بدون بعد برای خود تشابهی سری‌های زمانی) از تابع توانی[3] تعیین می‌شود، هرچند، دلیل این پدیده‌ی جالب هنوز به‌خوبی مشخص نشده است. این اندیس‌های توانی وجود اثر مقیاس که ممکن است تأثیر عمیقی در مدل‌سازی ریاضی شکستگی‌ها داشته باشند را نشان می‌دهند. اگر این اثر در همه‌ی مقیاس‌ها وجود داشته باشد، ویژگی‌های فیزیکی شکستگی‌ها باید تابعی از اندازه‌ی شکستگی‌ها باشد که این امر می‌تواند چالش پیچیده‌ای برای تعیین ویژگی‌های فیزیکی شکستگی‌های بزرگ-مقیاس را نسبت به مقیاس‌های آزمایشگاهی نشان دهد. آزمایش‌ها نشان داده است که یک حد آستانه از زبری سطوح می‌تواند وجود داشته باشد و در حقیقت، یک ویژگی فیزیکی موسوم به «زبری نماینده[4]» می‌تواند در یک مقیاس ویژه به نام حجم عنصر نماینده

---

[1] Cubic law
[2] Hurst
[3] Power-law
[4] Representative Roughness

(REV[1]) تعیین شود. بنابراین، برای محاسبه‌ی جریان در مدل‌هایی با مقیاس بزرگ‌تر یا مساوی با REV تعیین شده، می‌توان از قانون کوبیک با یک حداکثر خطای قابل قبول استفاده نمود [۱۷, ۱۲۲-۱۲۰].

در کنار اثر مقیاس به دلیل زبری سطوح شکستگی، مورد چالش برانگیز دیگر تعریف و اندازه‌گیری بازشدگی برای ارزیابی ضریب انتقال‌پذیری تک شکستگی‌ها است. تعاریف مختلفی برای بازشدگی وجود دارد: بازشدگی هندسی، بازشدگی مکانیکی و بازشدگی هیدرولیکی. ضریب انتقال‌پذیری تابعی از بازشدگی هیدرولیکی است. عملاً بازشدگی هیدرولیکی در آزمایشگاه و یا از طریق آنالیز برگشتی در آزمایش‌های میدانی با فرض معتبر بودن قانون کوبیک، تخمین زده می‌شود (یعنی به‌طور مستقیم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) [۱۲۳].

شکل تک شکستگی‌ها در بیشتر کدهای DFN برای سهولت به‌صورت دایره‌ای، مستطیلی و چندضلعی در نظر گرفته می‌شود. زیرا تعیین شکل واقعی شکستگی‌های زیرسطحی به‌طور مشخص بسیار دور از ذهن است. از طرفی، برای مدل‌های DFN بزرگ-مقیاس با چگالی بالایی از شکستگی‌ها، تأثیر شکل شکستگی بر روی نتایج نهایی کم‌اهمیت است. از طرف دیگر، اگر تعداد شکستگی‌ها محدود باشد، شکل تک شکستگی‌ها ممکن است در اثرگذاری بر الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها، مهم تلقی شود [۱۱۸].

شبیه‌سازی آماری سیستم‌های شکستگی بنیان هندسی روش DFN را تشکیل می‌دهد و نقش قابل توجهی در کارایی و قابلیت اطمینان مدل‌های DFN ایفا می‌کند. فرآیند کلیدی با ساخت توابع توزیع احتمال (PDF[2]) از پارامترهای هندسی دسته‌درزه‌ها (چگالی، موقعیت، جهت‌یابی و اندازه) بر اساس نتایج برداشت‌های میدانی مثل، چاه‌نگاری، برداشت سطحی، اسکن‌لاین، پنجره‌ی برداشت و یا روش‌های

[1] Representative Elementary Volume
[2] Probability Density Function

ژئوفیزیکی آغاز می‌شود. پس‌ازآن، تولید حالت‌های تصادفی مختلف DFN مطابق با این PDFها با فرض شکل هندسی شکستگی، یک فرآیند عددی معکوس پیشرو است [۴۵, ۱۲۷-۱۲۴].

موقعیت شکستگی مهم‌ترین پارامتر توزیع شبکه‌های شکستگی‌ها است و معمولاً به‌صورت مجزا از دیگر پارامترهای شبکه‌ی شکستگی مدل‌سازی می‌شود. یکی از معمول‌ترین روش‌ها برای نمایش مکان شکستگی، استفاده از یک نقطه‌ی منفرد به‌عنوان مرکز هندسی شکستگی (خط در دو بعد و دایره یا چندضلعی در سه بعد) است. بنابراین، روش زمین‌آمار یا یک فرآیند نقطه‌ای می‌تواند برای توزیع فضایی شکستگی‌ها مورد استفاده قرار گیرد. اندازه و جهت‌یابی شکستگی نیز با استفاده از PDFهای مشخص، مدل‌سازی می‌شود [۴۲, ۱۲۸].

در ساده‌ترین حالت، پارامترهای هندسی برای یک شکستگی با استفاده از نمونه‌سازی مونت-کارلو برای PDF متناظر با آن شبیه‌سازی می‌شود و سپس به‌عنوان یک پارامتر مستقل برای ساخت شکستگی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در صورت نیاز، ویژگی‌های جریان شکستگی (مانند بازشدگی و زبری) نیز می‌توانند در شبیه‌سازی شامل شوند. این ویژگی‌ها نیز به‌وسیله‌ی یک PDF و نمونه‌سازی مونت-کارلو، مدل‌سازی می‌شوند.

۳-۲-۱. شبیه‌سازی موقعیت شکستگی‌ها

شبیه‌سازی موقعیت شکستگی اولین مرحله در شبیه‌سازی شبکه‌های شکستگی است و مرحله‌ی بعد شبیه‌سازی هندسه‌ی تک شکستگی‌ها است. برای شبیه‌سازی موقعیت شکستگی‌ها فرآیندهای گوناگونی وجود دارد، مانند، فرآیند پوآسن همگن، فرآیند غیر همگن، فرآیند خوشه‌ای[1]و فرآیند کُکس[2][۳۰]. در این تحقیق روش مورد استفاده برای شبیه‌سازی مکان شکستگی‌ها، فرآیند پوآسن همگن است که

[1] Cluster
[2] Cox

علاوه بر سهولت در استفاده، برای ساخت مدل‌های سه‌بعدی پایدارتر است. این روش، یک الگوی نقطه‌ای را توصیف می‌کند که یک حالت تصادفی فضایی کامل را نشان می‌دهد. در تحقیق حاضر فرآیند شبیه‌سازی الگوی نقطه‌ای توصیف شده به‌وسیله‌ی فرآیند پوآسن همگن، به‌صورت زیر صورت می‌پذیرد [۱۲۹]:

- کل دامنه به تعدادی زیرناحیه $A_1, A_1, ..., A_m$ تقسیم می‌شود.
- میانگین توزیع پوآسن برای مدل شکستگی‌های موردنظر توسط رابطه‌ی $\mu_i = \lambda . A_i,$ داده می‌شود که در آن λ چگالی ثابت شکستگی‌ها است.
- یک متغیر تصادفی N_i از تابع توزیع پوآسن مانند رابطه‌ی (۳-۲) برای هر زیرناحیه تولید می‌شود.

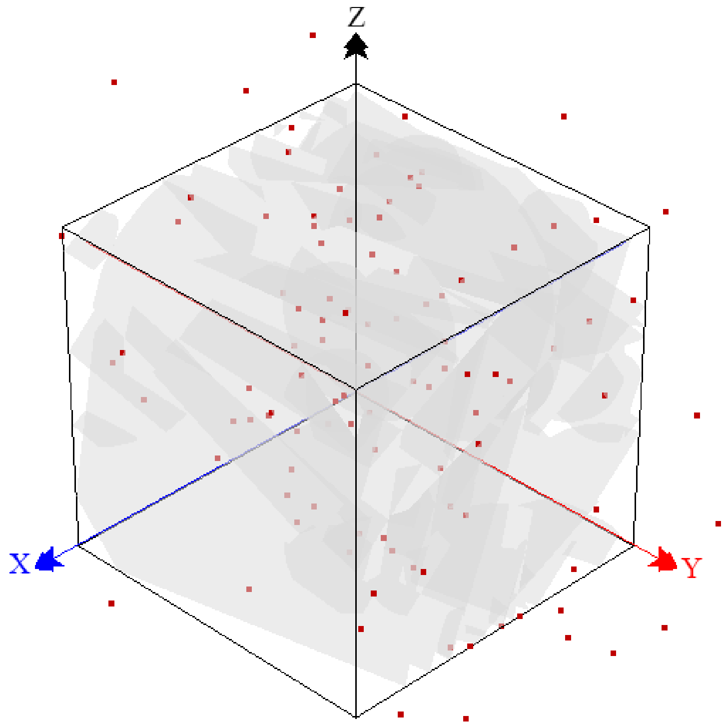
$$P(N_i = n) = \frac{\mu_i^n}{n!} e^{-\mu_i}, \qquad (۳-۲)$$

- با استفاده از تابع توزیع یکنواخت دنباله‌ای از اعداد تصادفی x_i در بازه‌ی [۰و۱] و تا زمانی که رابطه‌ی ۳-۳ برقرار باشد، تولید می‌شود.

$$\prod_{j=1}^{k} x_j < e^{-\mu_i} \qquad (۳-۳)$$

- برای هر $n = k$ رخداد در هر زیرناحیه، سه مقدار با قرار دادن P در تابع توزیع یکنواخت محاسبه‌شده و به‌عنوان مختصات مرکز شکستگی در نظر گرفته می‌شود.
- فرآیند فوق برای تمام زیرناحیه‌ها تکرار می‌شود.

شکل (۳-۱) تصویری از مراکز شکستگی‌هایی که درون محدوده قرار دارند و یا مراکز شکستگی‌هایی که امتداد آن‌ها به‌نوعی از محدوده‌ی موردنظر عبور می‌کند را در فضای سه‌بعدی، نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱ موقعیت مراکز شکستگی‌ها در مختصات سه بعدی

۳-۲-۲. تولید پارامترهای هندسی شکستگی‌ها

امتدادداری و جهت‌داری دو پارامتر هندسی هستند که به نقاط مرکز شکستگی‌های تولیدشده در مرحله‌ی قبل نسبت داده می‌شوند و با استفاده از نمونه‌سازی مونت-کارلو از PDF متناظر آن‌ها تولید می‌شوند. در بیشتر مواقع، توابع توزیع نمایی منفی، لاگ-نرمال و گاما برای پارامتر اندازه‌ی خطوط اثر شکستگی‌های دو بعدی برداشت‌شده، استفاده می‌شود [۱۳۰]. توابع توزیع آماری پرکاربرد برای تولید شبکه‌ی شکستگی‌ها در جدول (۳-۱) ارایه شده است.

جدول ۳-۱ توابع توزیع احتمال و پارامترهای آن‌ها

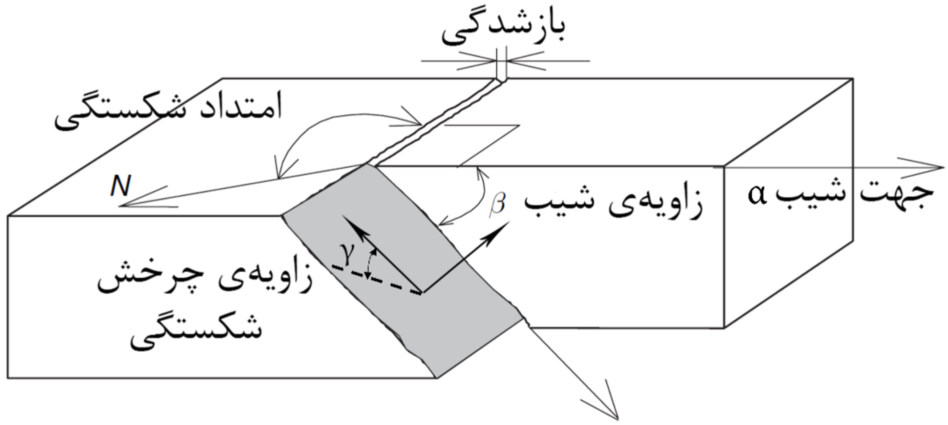
تابع توزیع	رابطه	پارامترها
یکنواخت	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$	a و b
فیشر	$f(\theta)=k\,\mathrm{Sin}\,\theta e^{k\,\mathrm{Cos}\theta}/e^{k}-e^{-k}$	$\theta_{Average}$ و k
نرمال	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x>a\\ 0 & x\le a\end{cases}$	a، μ و σ
لاگ-نرمال	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma e^{x}}e^{-\frac{(\ln(x-a)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x>a\\ 0 & x\le a\end{cases}$	a، μ و σ
توانی	$f(x)=ax^{-k}$	a و k
نمایی منفی	$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-\mu)} & x>\mu\\ 0 & x\le\mu\end{cases}$	λ و μ

به‌طورکلی فرض می‌شود که اندازه‌ی شکستگی‌های سه‌بعدی ویژگی‌های آماری مشابهی با برداشت‌های دو بعدی دارند. برای کاربرد سه‌بعدی DFN در تحقیق حاضر، شکل شکستگی‌ها به‌صورت دایره‌ای و مربعی فرض می‌شود و بنابراین، در هر دو حالت قطر این اشکال به‌عنوان پارامتر اندازه در نظر گرفته می‌شود. رابطه‌ی بین توزیع طول شکستگی‌ها و خط اثر آن‌ها مطابق با رابطه‌ی (۳-۴) است [۱۳۱].

$$f(l)=\frac{1}{m}\int_{l}^{\infty}\frac{g(s)ds}{\sqrt{s^2-l^2}} \qquad (۳-۴)$$

که در آن، $g(s)$، تابع توزیع اندازه‌ی دیسک‌ها و $f(l)$ تابع توزیع طول خط اثر شکستگی‌های متقاطع با صفحه‌ی نمونه‌گیری است. امکان ساده‌سازی بیشتر عبارت فوق وجود ندارد، اما $f(l)$ می‌تواند به‌محض این‌که $g(s)$ مشخص شد، به‌صورت عددی تخمین زده شود.

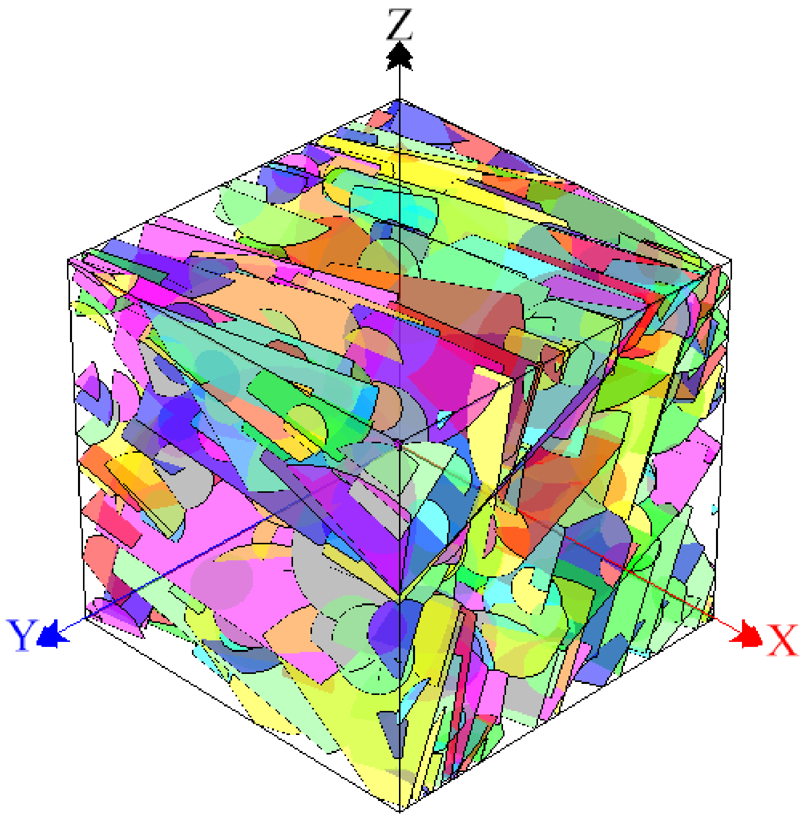
برای جهت‌یابی شکستگی‌ها در دو بعد، دو پارامتر برای شبیه‌سازی جهت شیب و شیب شکستگی‌ها لازم است. این پارامترها معمولاً از برداشت‌های دو بعدی شکستگی‌ها مشتق می‌شود. برای کاربردهای سه‌بعدی، سه زاویه برای توصیف کاملی از جهت‌یابی صفحه لازم است: جهت شیب (α)، زاویه‌ی شیب سطح شکستگی (β) و زاویه‌ی چرخش جهت شیب (γ) (شکل ۳-۲). بنابراین سه مجموعه از پارامترها موردنیاز است.



شکل ۳-۲ موقعیت فضایی یک شکستگی در فضای سه‌بعدی و پارامترهای هندسی آن

اگرچه، این امکان وجود دارد که پارامترهای زاویه‌ی شیب و جهت شیب صفحات شکستگی بر اساس برداشت‌های شکستگی از رخنمون‌های سطحی محاسبه شود، چنین برداشت‌هایی اغلب به‌طور جدی دارای خطا هستند. این خطا می‌تواند به دلیل بعضی عوامل طبیعی مانند فرسایش سطحی و یا عوامل انسانی مانند آتشباری یا پدیده‌ی آزادسازی تنش[1]باشد. توزیع فیشر معمولاً برای مدل‌سازی جهت‌یابی شکستگی‌ها مورداستفاده قرار می‌گیرد، هرچند در منابع مختلف توزیع‌های نامتقارن مثل توزیع بینگهام نیز گزارش‌شده است [۱۳۰]. شکل (۳-۳) یک DFN تولیدشده برای حالت سه‌بعدی بر اساس مکان‌های مرکز نشان داده‌شده در شکل (۳-۱) را نشان می‌دهد.

[1] Relaxation



شکل ۳-۳ نمونه‌ای از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی

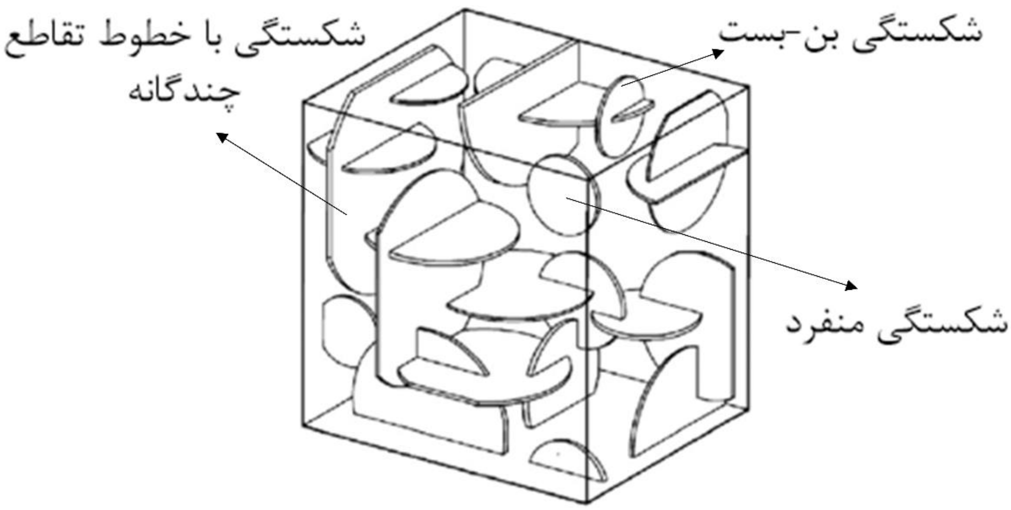
۳-۲-۳. شبیه‌سازی ویژگی‌های جریان مربوط به شکستگی

پس از شبیه‌سازی هندسی شکستگی‌ها، ویژگی‌های جریان نظیر بازشدگی و زبری سطوح درزه، شبیه‌سازی‌شده و به شکستگی‌ها نسبت داده می‌شود. این مرحله نیز مشابه فرآیند توصیف‌شده در بخش‌های قبل به‌وسیله‌ی نمونه‌سازی مونت-کارلو از PDFهای مختلف مثل، توزیع یکنواخت، فیشر، نرمال، لاگ-نرمال، توانی و نمایی منفی انجام می‌شود. مقادیر پارامترهای تولیدشده جهت تحلیل‌ها و مدل‌سازی‌های مکانیکی - هیدرولیکی مورداستفاده قرار می‌گیرند.

۳-۳. حذف شکستگی‌های منفرد و بن‌بست

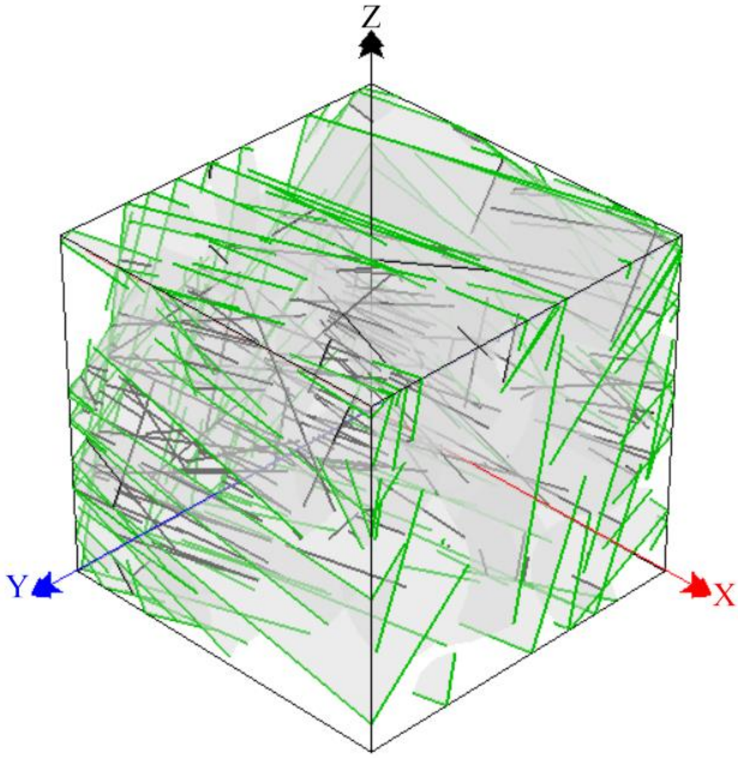
شکستگی‌ها می‌توانند به یکی از سه حالت اصلی با یکدیگر اتصال داشته باشند: اتصال چندگانه (شکستگی امتدادیافته[1])، بدون اتصال (شکستگی منفرد[2]) و تنها یک اتصال (شکستگی بن‌بست[3]). همان‌طور که در شکل (۳-۴) نشان داده‌شده است، شکستگی‌های با اتصال چندگانه معمولاً دارای اندازه‌ی بزرگ‌تری هستند و چند تقاطع (حداقل دو) با شکستگی‌های دیگر را شامل می‌شوند. یک شکستگی با اتصال چندگانه می‌تواند به‌وسیله‌ی مرزهای مدل مورد نظر قطع شود یا دارای قطعات بن-بست در انتها و کاملاً داخل مدل باشد. اثبات شده است که هرچند، شکستگی‌های بن-بست و منفرد می‌توانند تأثیر قابل‌توجهی در مقاومت و ویژگی‌های مکانیکی توده‌سنگ داشته باشند، تأثیر مهمی در ویژگی‌های هیدرولیکی مدل ندارند [۱۱۸, ۱۳۲]. با توجه به این‌که در این مطالعه هدف از ساخت شبکه‌ی شکستگی‌های سه‌بعدی انجام تحلیل‌های هیدرولیکی است، لذا بهتر است که شکستگی‌های منفرد و بن-بست از دامنه‌ی مدل حذف شوند. این امر کارایی و سرعت حل مساله را به‌طور چشمگیری افزایش می‌دهد، به‌ویژه اگر مدل متراکم و شامل تعداد زیادی از شکستگی‌ها باشد.

[1] Persistent
[2] Isolate
[3] Dead-end



شکل ۳-۴ شکل شماتیک از انواع شکستگی‌های موجود (منفرد، بن-بست و با تقاطع چندگانه) در شبکه‌ی شکستگی‌ها

حذف شکستگی‌های مذکور یک فرآیند تکراری پیشرو است به‌این صورت که ابتدا باید خطوط تقاطع هر شکستگی با شکستگی‌های دیگر جستجو شود. شکل (۳-۵) تصویری از خطوط تقاطع شکستگی‌ها را نشان می‌دهد. در این شکل خطوط تقاطع شکستگی‌ها با یکدیگر به رنگ مشکی و خطوط تقاطع شکستگی‌ها با مرزهای مدل به رنگ سبز، ترسیم‌شده است. پس‌ازآن، به ترتیب شکستگی‌های بدون خط تقاطع و شکستگی‌های تنها با یک خط تقاطع، از دامنه‌ی مدل حذف می‌شوند. این رویه تا جایی تکرار می‌شود که دیگر هیچ شکستگی منفرد یا بن‌بستی در مدل پیدا نشود.



شکل ۳-۵ خطوط تقاطع شکستگی‌ها با شکستگی‌های دیگر (به‌رنگ مشکی) و با مرزهای مدل (به‌رنگ سبز)

۳-۴. مش‌بندی DFN

برای تولید یک شبکه‌ی مش‌بندی کارآمد علاوه بر این‌که تعداد رووس مثلث‌ها به‌منظور کاهش هزینه‌ی محاسبات باید پایین نگاه داشته شود، کیفیت مش‌ها برای پایداری و دقت همگرایی روش حل باید به حداکثر ممکن برسد. متأسفانه، این دو معیار با یکدیگر در تضاد هستند. تعریف دقیق کیفیت برای یک مساله با یک کاربرد خاص، باید الزامات فیزیک آن مساله را لحاظ کند. یکی از اهداف تحقیق حاضر، استفاده از روش المان محدود برای حل جریان در شبکه‌های DFN سه‌بعدی است و بنابراین نیازمند یک الگوریتم مش‌بندی بهینه است. روش المان محدود بر پایه‌ی تقریب دونقطه‌ای جریان توسعه‌یافته است و بنابراین لازم است که الزاماتی برای دقت مساله در نظر گرفته شود. به همین دلیل مش‌بندی هر

شکستگی بهتر است با روش مثلث‌بندی دلانه[1]انجام گیرد [۱۳۳]. این روش، ویژگی‌های منحصربه‌فردی دارد که در ادامه این بخش مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۳-۴-۱. چالش‌ها و محدودیت‌ها

هنگام مش‌بندی DFNهای پیچیده، موارد چالش‌برانگیز زیادی می‌تواند رخ دهد که به کاهش کیفیت مش‌بندی منجر می‌شود. از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به تقاطع بین دو شکستگی اشاره نمود. برای حل جریان در یک شکستگی کوچک در شبکه، طول یال مثلث‌هایی که خط تقاطع را احاطه می‌کنند می‌تواند حداکثر به‌اندازه‌ی خط تقاطع شکستگی باشد. برای خطوط تقاطع بسیار کوچک، این الزام از نظر محاسباتی امکان‌پذیر نخواهد بود؛ مورد بحرانی دیگر نیز هنگامی به وجود می‌آید که خط تقاطع به مرز مدل بیش‌ازحد نزدیک شود.

چالش دیگر وجود دو خط تقاطع موازی با بازشدگی کوچک بر روی سطح شکستگی سوم است. مش‌بندی شکستگی سوم باید مثلث‌هایی داشته باشد که یال‌های آن فاصله‌ی کوچک بین دو خط را پوشش دهند. تمامی این موارد و موارد چالش برانگیز دیگر از این دست، شرایطی را به مدل تحمیل می‌کند که ازنظر محاسباتی، حل شبکه را بسیار پرهزینه و زمان‌گیر خواهد کرد و کیفیت مش‌بندی را به دلیل دامنه‌ی وسیعی از طول یال‌ها، کاهش می‌دهد. همچنین با بزرگ‌تر شدن ابعاد DFN، اندازه‌ی شکستگی‌ها به‌تدریج کوچک و کوچک‌تر می‌شود و این پیچیدگی به‌طور تصاعدی بیشتر خواهد شد. اگرچه، عملاً حل معادلات جریان در شکستگی‌های بسیار کوچک از نظر محاسباتی امکان‌ناپذیر است، خوشبختانه، تأثیر این شکستگی‌ها بر کل جریان شبکه ناچیز است و می‌توان از آن‌ها چشم‌پوشی نمود [۱۳۴].

ویژگی‌های بزرگ-مقیاس DFN نیز می‌تواند چالش‌هایی را برای مش‌بندی ایجاد کند. از طرفی، واضح است که با افزایش تعداد شکستگی‌ها، تعداد مثلث‌ها نیز افزایش می‌یابد و این امر هزینه‌ی

[1] Delaunay triangulation

محاسبات را بالا می‌برد. از طرف دیگر، با افزایش ابعاد شبکه، اختلاف بین طول خطوط تقاطع‌ها می‌تواند مشکلاتی را برای دقت حل مساله ایجاد کند. در یک مش‌بندی منطبق خط حاصل از تقاطع دو شکستگی صفحه‌ای پاره‌خط‌های منحصربه‌فردی را شامل می‌شوند. این پاره‌خط‌ها، یال‌های تمامی مثلث‌های مشترک روی شکستگی‌های متقاطع هستند. اگرچه مش‌بندی منطبق ضروری نیست، ولی شکستگی‌ها حتماً باید در حالتی که خط تقاطع را حفظ می‌کنند، مش‌بندی شوند. همچنین، محاسبات تا حدود زیادی با مش‌بندی منطبق ساده‌تر خواهد شد [۱۳۵].

هدف اصلی این بخش از تحقیق ارایه‌ی یک الگوریتم جدید و از نظر محاسباتی کارآمد برای مش‌بندی DFNهای سه‌بعدی است. در این روش ساختار هندسی شبکه و درنتیجه الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها تغییر نمی‌کند و مش‌بندی حاضر می‌تواند به‌خوبی نماینده‌ی هندسه‌ی واقعی DFN باشد. المان‌های مثلثی مش‌بندی که بر اساس معیار دلانه[1] ایجاد می‌شوند، از کیفیت خوبی برخوردار هستند و بنابراین، ماتریس مجزا سازی آن دچار شرایط نامناسب[2] نمی‌شود. به دلیل تعداد بالای شکستگی‌ها، این روش طوری طراحی‌شده است که ابعاد مثلث‌های مش‌بندی از حد مشخصی کوچک‌تر نشوند و به همین دلیل هزینه‌ی محاسباتی پایینی دارد. همچنین ابعاد مثلث‌ها از حد مشخصی بزرگ‌تر نخواهد شد و بنابراین، روش حاضر از دقت بالایی نیز برخوردار است. به این معنا که یک حالت تعادل بین دقت و کارآمدی قابل‌دستیابی است. این الگوریتم می‌تواند به‌خوبی شرایط مش‌بندی بحرانی نظیر برخورد دو فصل مشترک متقاطع با زاویه‌ی کوچک یا دو فصل مشترک موازی بافاصله‌ی کم روی شکستگی سوم را پوشش دهد.

[1] Delaunay
[2] Ill conditions

۳-۴-۲. مفهوم مثلث‌بندی

در این بخش بنیان و فرمولاسیون روش مش‌بندی دلانه توصیف می‌شود و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳-۴-۲-۱. معرفی دیاگرام ورنویی[1]

با فرض یک مجموعه‌ی نقطه‌ی S، معرفی مثلث‌بندی دلانه به‌طور غیرمستقیم با تعریف یک روش خاص برای تقسیم صفحه به تعدادی زیر ناحیه (یک زیر ناحیه برای هر نقطه در S) آغاز می‌شود. فرض می‌شود که n تعداد نقاط موجود در S است. زیر ناحیه‌ی نقطه‌ی u در S شامل تمام نقاط x در صفحه است که حداقل به‌اندازه‌ی u با هر نقطه‌ی دیگر v در S فاصله داشته باشد، به این معنا که [۱۳۶]:

$$V_u = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-u\| \leq \|x-v\|, v \in S\} \qquad (۵-۳)$$

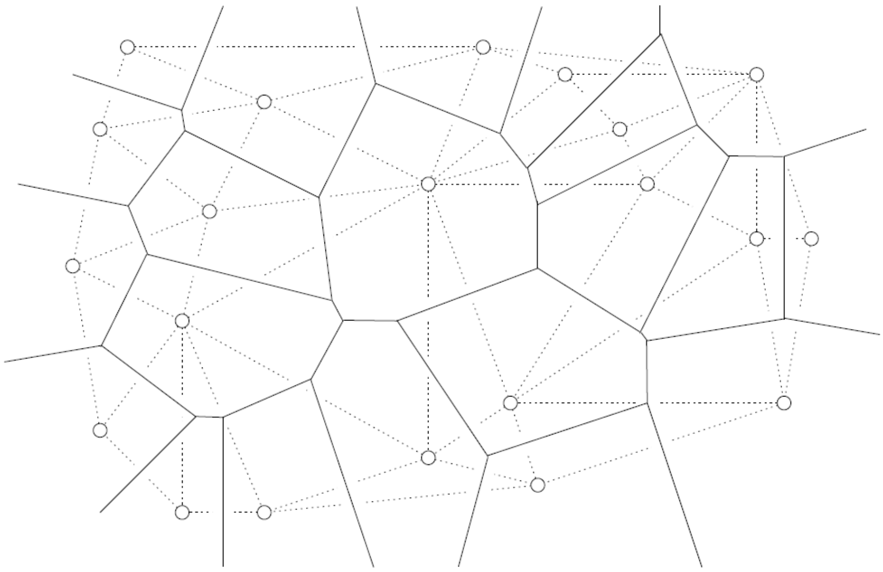
که در آن، $\|x-u\| = [(x_1-u_1)^2 + (x_2-u_2)^2]^{1/2}$ فاصله‌ی اقلیدسی بین نقطه‌ی x و u است. به V_u ناحیه‌ی ورنویی u اطلاق می‌شود. این ناحیه بسته است و مرزهای آن شامل یال‌های ورنویی می‌شود که در آن V_u با نواحی ورنویی همسایه، اشتراک دارد. یک یال ورنویی به رووس ورنویی منتهی می‌شود که با دیگر یال‌های ورنویی مشترک هستند. مطابق شکل ۳-۶، دیاگرام ورنویی S، مجموعه‌ای از نواحی ورنویی، یال‌ها و رووس است.

برخی از ویژگی‌های مهم دیاگرام ورنویی عبارت‌اند از [۱۳۶]:

- هر ناحیه‌ی ورنویی یک چندضلعی محدب ساخته‌شده از $n-1$ تقاطع از نیم‌صفحه‌های بسته است.

---
[1] Voronoi diagram

- ناحیه‌ی ورنویی V_u محدود است اگر u در بخش داخلی و محدب S قرار بگیرد.
- نواحی ورنویی یک زوج ناحیه‌ی مجزا دارند که همراه باهم کل صفحه را پوشش می‌دهند.



شکل ۳-۶ دیاگرام ورنویی (خطوط توپر) ترسیم‌شده بر روی مش‌بندی دلانه (نقطه‌چین) برای بیست‌ویک نقطه‌ی ثابت [۱۳۶]

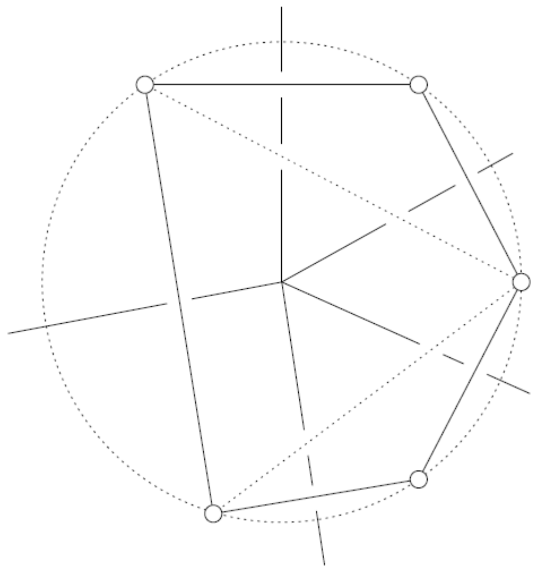
۳-۴-۲-۲. مثلث‌بندی دلانه

مثلث‌بندی دلانه، دوگان[1] خطی دیاگرام ورنویی تعریف می‌شود. به‌طور خاص، برای هر جفت ناحیه‌ی ورنویی V_u و V_v، که در یک یال مشترک هستند، پاره‌خطی از u به v، ترسیم می‌شود. ازنظر ساختاری، هر رأس ورنویی x، $j \geq 3$ نقطه‌ی همسایه‌ی دارد. در عمل، دقیقاً سه‌نقطه‌ی همسایه u, v, w وجود دارد که مثلثی که آن‌ها را پوشش می‌دهد، به مثلث‌بندی دلانه متعلق است. باید دقت نمود که x از u,v و w به‌طور یکسان و بیش از بقیه نقاط در S ، فاصله دارد. این مفهوم ویژگی دایره خالی[2] مثلث‌بندی

[1] Dual
[2] Empty circle

دلانه را توجیه می‌کند: همه‌ی نقاط $S-\{u,v\}$، بیرون از دایره‌ی محاطی u,v,w قرار می‌گیرند. به‌طور مشابه، برای هر یال u,v، دایره‌ای وجود دارد که از u و v عبور می‌کند به‌طوری‌که همه‌ی نقاط $S-\{u,v\}$ بیرون از آن قرار گیرند. برای مثال، در این حالت، دایره‌ای با مرکز قرارگرفته در وسط یال ورنویی مشترک با V_u و V_v خالی خواهد بود. این ویژگی می‌تواند برای اثبات این‌که بنیان مثلث‌بندی دلانه، یک ترکیب خطی از یک گراف صفحه‌ای است، مورد استفاده قرار گیرد [۱۳۶].

فرض می‌شود که یک رأس با درجه‌ی $j>3$ وجود دارد که با یک چندضلعی با $j>3$ یال در مثلث‌بندی دلانه، متناظر است (شکل ۳-۷). واضح است که مش‌بندی دلانه در حال حاضر یک مثلث‌بندی نیست، اما می‌توان با تجزیه‌ی متوالی هر چندضلعی (با j یال) به یک چندضلعی (با $j-2$ یال)، آن را به یک مثلث‌بندی تبدیل کرد. در شکل ۳-۷، خط‌چین‌ها پنج‌ضلعی را به سه مثلث تجزیه کرده و مثلث‌بندی را تکمیل می‌کنند. این عمل با درهم ریختن نقاط داده در هر بازه‌ی کوچک، آن‌چنان‌که رووس ورنویی درجه‌ی j به الگوهای درختی تجزیه شوند و در آن، سه رأس درجه‌ی $j-2$ توسط $j-3$ یال کوچک به هم متصل شوند، متناظر است [۱۳۶].



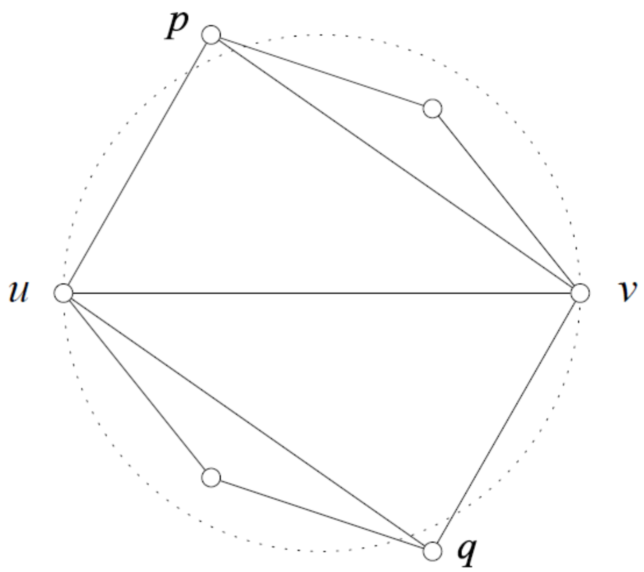
شکل ۳-۷ یک رأس ورنویی درجه‌ی پنج و یک پنج‌ضلعی متناظر آن در مثلث‌بندی دلانه [۱۳۶]

۳-۴-۲-۳. ویژگی دلانه موضعی[1]

با در اختیار داشتن یک مثلث‌بندی با مجموعه‌ی نقاط متناهی S، می‌توان دلانه بودن مثلث‌بندی را بررسی نمود. این عمل با آزمودن هر یال، با دو مثلثی که در آن یال اشتراک دارند انجام می‌شود. مطابق با شکل ۳-۸، فرض می‌شود که یال uv در مثلث‌بندی T بین مثلث‌های uvp و uvq مشترک است. اگر q بیرون یا روی دایره‌ای قرار گیرد که از u,v,p عبور می‌کند، uv دلانه موضعی است و به‌اختصار ld نامیده می‌شود. شرایط در p و q متقارن است زیرا دایره‌ای که از u,v,p عبور می‌کند، دایره‌ی اول را در نقاط u و v قطع می‌کند. درنتیجه، اگر q بیرون یا روی دایره‌ی u,v,p قرار گیرد، p بیرون یا روی دایره‌ی u,v,q قرار می‌گیرد. علاوه بر این، اگر uv مرز چندضلعی محدب S باشد، دلانه موضعی نامیده می‌شود و بنابراین تنها به یک مثلث، متعلق است. شرایط دلانه موضعی بر روی هر یال یک ویژگی کلی را نشان می‌دهد [۱۳۶].

لِم دلانه بیان می‌کند که اگر هر یال در مثلث‌بندی K از چندضلعی S دلانه موضعی باشد، پس مثلث‌بندی K دلانه خواهد بود. اگرچه، هر یال از یک مثلث‌بندی دلانه، دلانه موضعی است، لِم دلانه همیشه صادق نیست. همان‌طور که در شکل ۳-۸ نشان داده‌شده است، در حقیقت، K می‌تواند یالی را شامل شود که به‌طور محلی دلانه است، اما یک مثلث‌بندی دلانه را تشکیل نمی‌دهند. بااین‌وجود، لم دلانه می‌تواند به الگوریتم‌های راهبردی و ساده‌تری منجر شود [۱۳۶].

[1] Locally Delaunay



شکل ۳-۸ در این شکل یال uv دلانه موضعی است اما به مثلث‌بندی دلانه تعلق ندارد [۱۳۶].

۳-۴-۳. بهینه‌سازی مش‌بندی

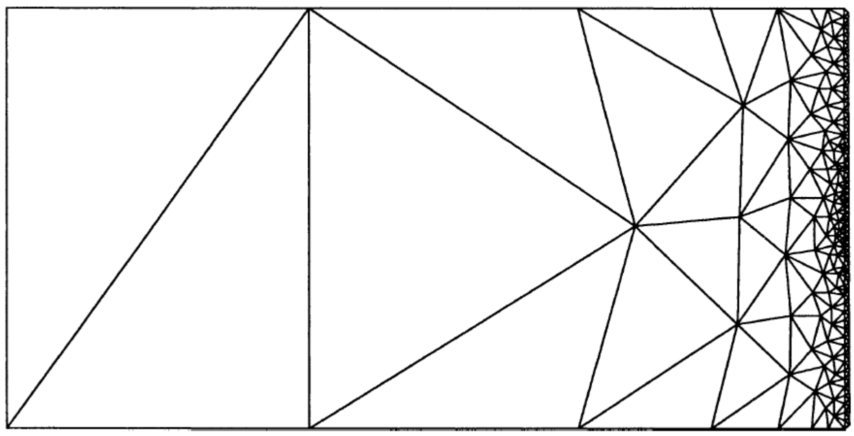
بهینه‌سازی مش‌بندی، روشی است برای تولید مش‌های مثلثی باکیفیت مناسب برای استفاده در الگوریتم‌های درون‌یابی، روش المان محدود (FEM) و روش حجم محدود[1](FVM). هدف، یافتن یک مثلث‌بندی است که دامنه‌ی خاصی را پوشش دهد و تنها مثلث‌هایی را شامل شود که شکل و اندازه‌ی آن‌ها ویژگی‌های مطلوبی داشته باشد: زوایای داخلی آن نباید کوچک‌تر و یا بزرگ‌تر از محدوده‌ای مشخص و ابعاد مثلث‌ها نباید بزرگ‌تر از حد معینی باشد. الگوریتم‌های بهینه‌سازی مش‌بندی تضمین‌های ریاضی را پیشنهاد می‌دهد که در آن چنین ویژگی‌هایی صدق می‌کند. ساختار الگوریتم‌های بهینه‌سازی مثلث‌بندی، حفظ آن به‌صورت دلانه است که با اضافه کردن رووس جدید تا برآورده شدن ویژگی‌های مطلوب برای بهبود کیفیت و ابعاد مثلث‌ها، ادامه می‌یابد. الگوریتم راپرت[2]برای بهبود کیفیت مش‌بندی دو بعدی، اولین الگوریتم بهینه‌سازی مش‌بندی است که ازلحاظ تئوری تضمین‌شده و در

---

[1] Finite Volume Method

[2] Ruppert

عمل رضایت‌بخش است. این الگوریتم، بر اساس الگوریتم بهینه‌سازی ابتدایی چو[1]توسعه‌یافته است. اگرچه، الگوریتم اولیه‌ی چو المان‌های مش‌بندی یکنواختی را تولید می‌کند، همان‌طور که در شکل ۳-۹ نشان داده‌شده است الگوریتم راپرت اجازه می‌دهد که ابعاد مثلث‌ها به‌سرعت در فواصل کوتاه تغییر کند. در این شکل زاویه‌ی داخلی هیچ مثلثی کوچک‌تر از ۲۴ درجه نیست [۱۳۷].

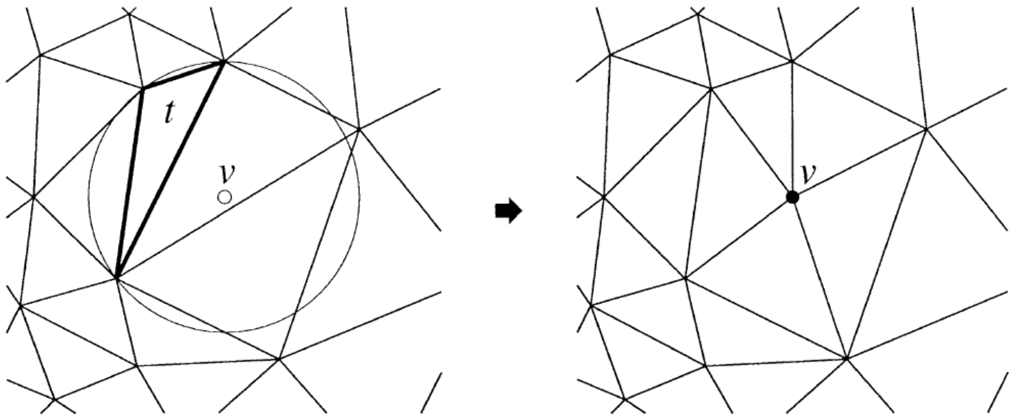


شکل ۳-۹ نمایش توانایی روش راپرت برای دستیابی به تغییرات زیاد در ابعاد مثلث‌ها در فواصل کوتاه [۱۳۷]

الگوریتم راپرت در طی یک جستجوی پیشرو، مثلث‌های باکیفیت پایین را یافته و آن‌ها را حذف می‌نماید و رأسی را در مرکز دایره‌ی محاطی مثلث حذف‌شده، قرار می‌دهد. این بار عملیات جستجو برای حذف مثلث‌هایی که این بار در اثر اضافه شدن رأس جدید خاصیت دلانه بودن خود را ازدست‌داده‌اند ادامه می‌یابد. درنهایت با تمامی رووس جدید در مجموعه‌ی S، یک مثلث‌بندی جدید تولید می‌شود (شکل ۳-۱۰) [۱۳۷]. هر مثلث که کیفیت مناسبی نداشته باشد، با قرار دادن یک رأس در مرکز دایره‌ی محاطی، تجزیه می‌شود درحالی‌که خاصیت دلانه مثلث‌بندی حفظ می‌شود. به دلیل سرعت اجرای بالای

[1] Chew

الگوریتم راپرت و انعطاف‌پذیری آن جهت انطباق با روش DFN، از آن به‌عنوان الگوریتم بهینه‌سازی موارداستفاده در تحقیق حاضر استفاده‌شده است.



شکل ۳-۱۰ فرآیند حذف مثلث‌های نامناسب و ایجاد مثلث‌های بهینه [۱۳۷]

۳-۴-۴. الگوریتم مش‌بندی مورداستفاده در تحقیق

الگوریتم مش‌بندی در تحقیق حاضر، المان‌های مثلثی را به‌صورت دو بعدی بر روی مختصات محلی صفحه‌ای هر یک از شکستگی‌ها (x و y) با استفاده از معیار دلانه تولید می‌کند و مش‌بندی نهایی در دستگاه مختصات سه‌بعدی کل (X، Y و Z)، مجموعه‌ای از این مش‌بندی‌های صفحه‌ای است. برای افزایش کیفیت مثلث‌بندی و اصلاح و بهینه‌سازی مثلث‌های باکیفیت پایین از الگوریتم راپرت استفاده می‌شود. از طرفی به دلیل ساختار پیچیده‌ی DFN و شکل و موقعیت فضایی - تصادفی شکستگی‌ها و فصل مشترک آن‌ها و از طرف دیگر به‌منظور عدم‌تغییر در ساختار هندسی اولیه‌ی DFN در حین تولید

مش‌بندی (جلوگیری از تغییر در الگوی اتصال‌پذیری شکستی‌ها)، این الگوریتم یک مثلث‌بندی ساختار نیافته[1] را ارایه می‌کند.

یک مش‌بندی ساختار نیافته یک‌شکل موزاییکی از بخشی از صفحه یا فضای اقلیدسی است که به‌وسیله‌ی اشکال ساده مثل مثلث یا چهاروجهی در یک الگوی نامنظم تولید می‌شود. در این نوع مش‌بندی برخلاف مش‌بندی‌های ساختاریافته (منظم)، به فهرستی از الگوی اتصال رووس نیاز است که تعیین می‌کند چگونه مجموعه‌ی مشخصی از رووس المان‌های مش‌بندی را می‌سازند [۱۳۸].

در این تحقیق شکستگی‌ها به‌صورت صفحه‌ای فرض می‌شوند و فصل مشترک دو شکستگی به‌صورت یک پاره‌خط است. جهت تعیین مختصات دو انتهای پاره‌خط فصل مشترک در مختصات کل، تقاطع شکستگی‌ها یک‌به‌یک با یکدیگر و با مرزهای مدل بررسی می‌شوند. هر فصل مشترک با $s_i = f_j \cap f_k.\ \ j.k = 1 \cdots N_f$ و مجموعه‌ی همه‌ی آن‌ها با $S = \bigcup_{i=1}^{N_s} s_i$ نشان داده می‌شود که در آن N_s تعداد کل فصل مشترک‌های مدل است. به‌این‌ترتیب محدوده‌ی مدل با عبارت $\Omega = \mathrm{F} \cup \mathrm{S}$ توصیف می‌شود.

الگوریتم مش‌بندی حاضر از پنج مرحله‌ی اصلی تشکیل‌شده است:

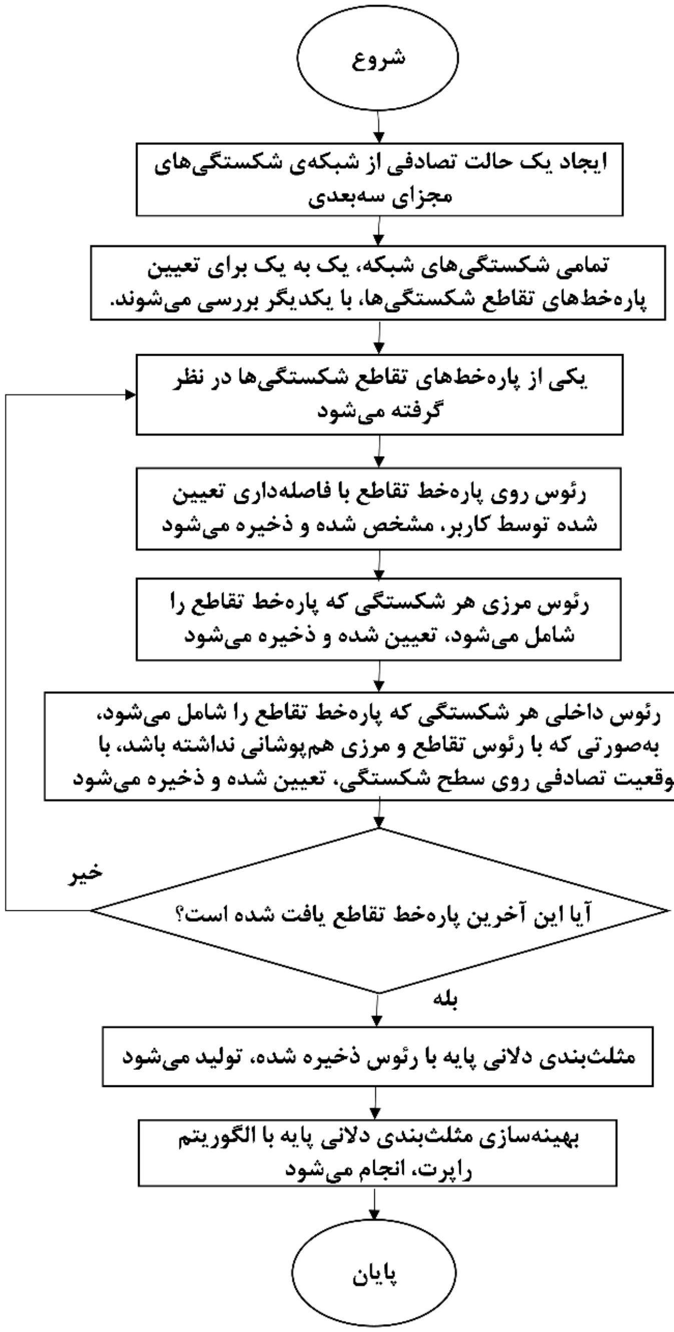
- در مرحله‌ی اول، رووس فصل مشترک ($\mathrm{v}_{\mathrm{s_i}}^{\mathrm{j}}$) بر روی مجموعه‌ی S تشکیل می‌شود.
- در مرحله‌ی دوم، رووس مرزی ($\mathrm{v}_{\mathrm{b_i}}^{\mathrm{j}}$) بر روی مرزهای شکستگی‌ها ($\Gamma_{\mathrm{f_i}}$) تشکیل می‌شوند.
- در مرحله‌ی سوم، با مجموعه‌ی رووس شکستگی $\mathrm{f_i}$، $\mathrm{V_i^j} = (\bigcup_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{N_{vs_i}}} \mathrm{v_{s_i}^j}) \cup (\bigcup_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{N_{vb_i}}} \mathrm{v_{b_i}^j})$ که در آن $\mathrm{N_{vs_i}}$ تعداد کل رووس فصل مشترک و $\mathrm{N_{vb_i}}$ تعداد کل رووس مرزی شکستگی i ام است، یک مثلث‌بندی دلانه-پایه ($\mathrm{T_i}$) تشکیل می‌شود.
- در مرحله‌ی چهارم، $\mathrm{T_i}$ با استفاده از الگوریتم راپرت اصلاح و بهینه‌سازی می‌شود.
- مرحله‌ی پنجم: مراحل ۲ تا ۴ برای $\mathrm{i = 1.\cdots.N_f}$ تکرار می‌شود.

[1] Unstructured triangulation

با توجه به فلوچارت شکل ۳-۱۱، فرض می‌شود که در مرحله‌ی اول، s_i از مجموعه‌ی S برای یافتن تقاطع احتمالی با سایر فصل مشترک‌ها، موردبررسی قرار می‌گیرد. اگر چنین تقاطعی یافت شود، پس رأس $i.j = 1.\cdots.N_s$ $v_{s_i}^k = s_i \cap s_j.$ ثبت‌شده و به آن‌یک شعاع پوشش h_s اختصاص داده می‌شود. میزان h_s «اندازه‌ی مش‌بندی» را کنترل می‌کند و با توجه به شرایط مساله توسط کاربر تعیین می‌شود. در بخش‌های بعد در ارتباط با تعیین h_s بحث خواهد شد. پس‌ازآن، نقطه‌ی وسط پاره‌خط فصل مشترک s_i با استفاده از مختصات دو انتهای آن محاسبه می‌شود. اگر مختصات محاسبه شده، در داخل کره‌ای با شعاع h_s با مرکزیت رووس $v_{s_i}^k$ قرار نگیرد، رأس جدیدی با مختصات مرکز فصل مشترک ($\hat{v}_{s_i}$) ثبت شده و به آن شعاع پوشش h_s اختصاص داده می‌شود. باید به این نکته توجه نمود که برای حفظ الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها اگر هر دو رأس $v_{s_i}^k$ و $\hat{v}_{s_i}$ با رووس قبلی همپوشانی داشته باشند، حداقل یکی از آن‌ها باید ثبت شود. سپس، یک حلقه ایجاد می‌شود و برای هر مرحله l از این حلقه، دو رأس در دو سوی $\hat{v}_{s_i}$ روی فصل مشترک s_i و بافاصله‌ی $l \times h_s$ با شرط این‌که این رووس در داخل کره‌ای با شعاع h_s و با مرکزیت رووس ثبت‌شده‌ی قبلی قرار نگیرند، ثبت‌شده و به آن‌ها شعاع پوشش h_s اختصاص داده می‌شود. این رووس $\check{v}_{s_i}^k$ نامیده می‌شوند. شکست حلقه زمانی حادث می‌شود که فاصله‌ی بین دو رأس تعیین‌شده از طول پاره‌خط s_i بیشتر شود. این روند برای تمام s_i ها ($i = 1.\cdots N_s$) تا یافتن همه‌ی رووس منحصربه‌فرد در دستگاه مختصات عمومی مدل ادامه می‌یابد. مجموعه‌ی تمام این رووس $V_s = \bigcup_{i=1}^{N_s}(\bigcup_k v_{s_i}^k \cup \check{v}_{s_i}^k) \cup \hat{v}_{s_i}$ خواهد بود.

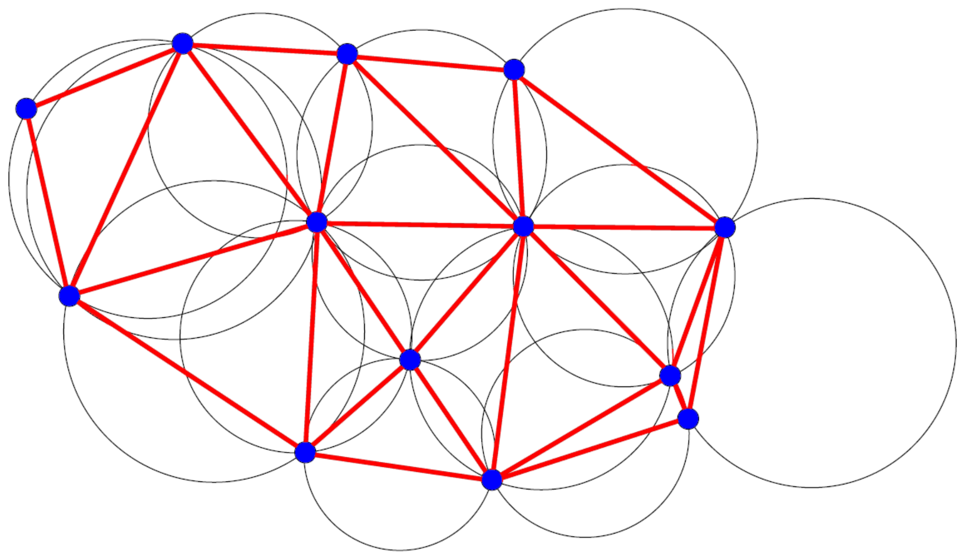
در مرحله‌ی دوم، تمرکز بر f_i از مجموعه‌ی F قرار می‌گیرد ($i = 1.\cdots N_f$). تمامی فصل مشترک‌های موجود در مجموعه‌ی S که بر روی f_i قرار دارند (s_j)، انتخاب می‌شوند. سپس رووس هر یک از این s_j ها از مجموعه‌ی V_s انتخاب می‌شوند و در مجموعه‌ی V_i^j قرار می‌گیرند. با استفاده از یک ماتریس انتقال، مختصات این رووس از مختصات عمومی مدل به مختصات محلی شکستگی تبدیل می‌شود. حالا رووس روی مرز شکستگی Γ_{f_i}، ($v_{b_i}^j$) با فاصله‌داری h_s تعیین می‌شود. اگر رووس تعیین‌شده در دایره‌ای با شعاع پوشش و مرکزیت رووس مجموعه‌ی V_i^j قرار نگیرد، به مجموعه‌ی V_i^j اضافه می‌شود و شعاع پوشش h_s

به این رووس اختصاص داده می‌شود. در پایان این مرحله، مجموعه‌ی V_i^j با تعداد کل رووس موجود روی شکستگی i ام (N_{v_i}) حاصل می‌شود.



شکل ۳-۱۱ فلوچارت الگوریتم مش‌بندی مورد استفاده در تحقیق

می‌توان با هر مجموعه‌ای از نقاط، یک مثلث‌بندی دلانه-پایه تولید نمود [۱۳۸]. بنابراین، در مرحله‌ی سوم، با مجموعه‌ی رووس V_i^j یک مثلث‌بندی دلانه-پایه (T_i) تولید خواهد شد. اگر در یک فضای دو بعدی معیار دایره خالی[1] برای همه‌ی المان‌های T_i صادق باشد ، T_i دلانه است [۶۳]. معیار دایره خالی بررسی می‌کند که آیا دایره‌ی محاطی مثلث j ام (t_i^j) شامل رأس دیگری بجز رووس t_i^j هست یا خیر. شکل ۳-۱۲، تصویر شماتیکی از معیار دایره خالی و مثلث‌بندی دلانه را نشان می‌دهد. در این شکل هیچ رأسی درون دایره‌ی محاطی مثلث‌ها قرار نمی‌گیرد. علاوه بر آن، سه رأس مستقل در V_i که یک مثلث دلانه را تشکیل می‌دهند باید دارای خاصیت قابلیت دید[2] نیز باشند. خاصیت قابلیت دید به معنای آن است که رووسی که تشکیل یک مثلث را می‌دهند نباید در دو طرف مخالف یک s_i واقع‌شده باشند [۱۳۸].



شکل ۳-۱۲ یک مثلث‌بندی دلانه-پایه با نمایش ویژگی دایره خالی [۱۳۸]

[1] Empty circle
[2] Visibility

مثلث‌بندی T_i که تا این مرحله تشکیل‌شده است، یک مثلث‌بندی ساختار نیافته است و ممکن است اندازه و کیفیت مثلث‌ها هنوز مناسب نباشد و موجب ایجاد ماتریس مجزا سازی با شرایط نامناسب[1] شود. بنابراین در مرحله‌ی چهارم، با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی، مثلث‌بندی T_i اصلاح و بهینه می‌شود.

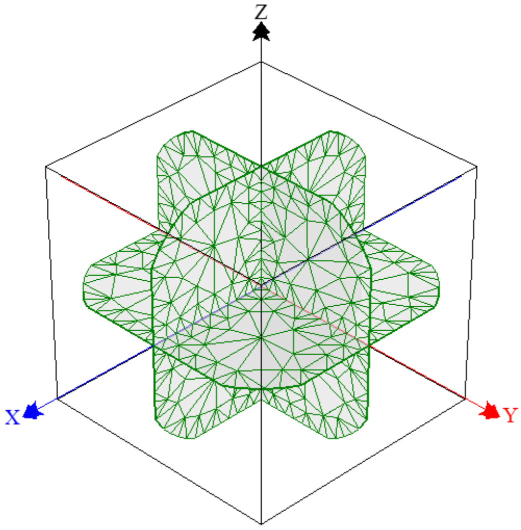
الگوریتم راپرت در طی یک جستجوی پیشرو، t_i^j باکیفیت پایین را یافته و آن‌ها را از T_i حذف می‌نماید و رأسی را در مرکز دایره‌ی محاطی t_i^j حذف‌شده، قرار می‌دهد. این بار عملیات جستجو برای حذف مثلث‌هایی که در اثر ورود رأس جدید خاصیت دلانه بودن خود را ازدست‌داده‌اند ادامه می‌یابد. درنهایت با تمامی رووس جدید و رووسی که مثلث آن‌ها حذف‌شده‌اند، یک مثلث‌بندی جدید تولید می‌شود و به مجموعه‌ی T_i اضافه می‌شود [۱۳۷].

یکی از روش‌های تعیین کیفیت مثلث‌ها نسبت کوچک‌ترین یال مثلث به شعاع دایره‌ی محاطی آن است (ω). حداقل زاویه‌ی داخلی هر مثلث می‌تواند از رابطه‌ی ۳-۶ محاسبه شود [۱۳۸].

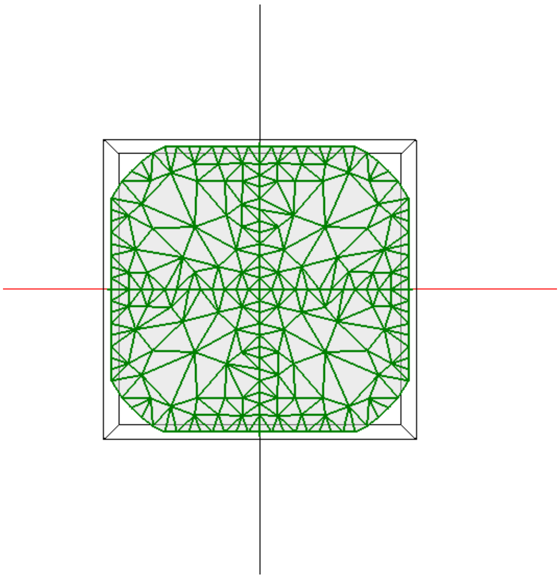
$$\theta_{\min} = \arcsin(\frac{1}{2\omega}) \qquad (۶-۳)$$

مقدار بحرانی $\theta_{\min}$، برای اطمینان از پایان یافتن الگوریتم در حالت تئوری20.7 درجه است [۱۳۹]. پس اگر مقدار $\theta_{\min}$ محاسبه‌شده برای هر مثلث از مقدار بحرانی کوچک‌تر شود، آن مثلث باید به‌وسیله‌ی الگوریتم راپرت اصلاح شود. تصاویری از مثلث‌بندی دلانه بهینه‌شده در شکل ۳-۱۳ نشان داده‌شده است.

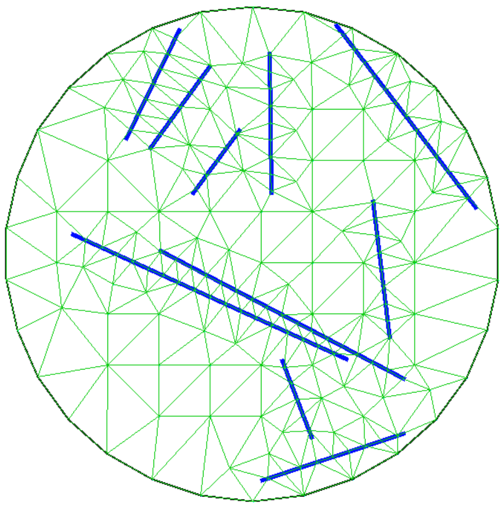
[1] Ill-conditioned matrix



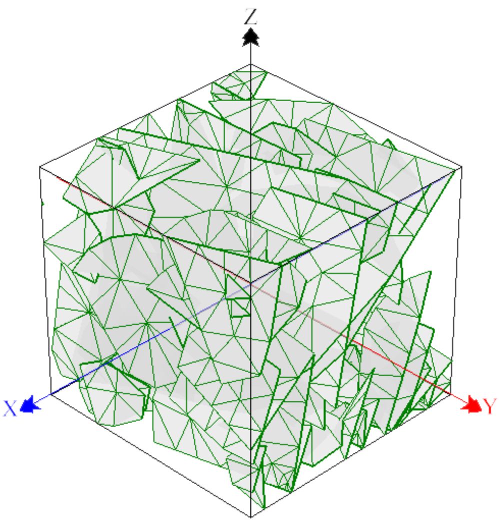
(الف) مثلث‌بندی دلانه بهینه‌شده برای سه شکستگی متعامد.



(ب) مثلث‌بندی دلانه بهینه‌شده برای یک تک شکستگی با دو خط تقاطع عمود برهم.



(پ) مثلث‌بندی دلانه بهینه‌شده برای یک تک شکستگی با چندین خط تقاطع.



(ت) مثلث‌بندی دلانه بهینه‌شده برای DFN.

شکل ۳-۱۳ مثال‌هایی از مثلث‌بندی دلانه بهینه‌ی تولیدشده در روند تحقیق

پارامتر h_s پارامتری کلیدی در الگوریتم مش‌بندی حاضر است. h_s حساسیت این الگوریتم به حداقل طول فصل مشترک‌ها را مشخص می‌کند و اندازه‌ی مش‌بندی را با توجه به گسترش هر یک از شکستگی‌ها تعیین می‌کند. با افزایش مقدار h_s فصل مشترک‌هایی که طول آن‌ها کوچک‌تر از این مقدار

باشند، عملاً به یک نقطه کاهش می‌یابند ولی حذف نمی‌شوند. بنابراین نه‌تنها الگوی اتصال‌پذیری حفظ می‌شود، بلکه مش‌بندی به‌خوبی محدودیت‌هایی که قبلاً ذکر شد را مرتفع می‌کند بنابراین، h_s با دقت مساله ارتباط مستقیم دارد. با کاهش مقدار این پارامتر دقت حل عددی بالاتر خواهد رفت ولی واضح است که به دلیل افزایش تعداد مثلث‌ها، هزینه‌ی محاسبات نیز افزایش خواهد یافت. بنابراین، مقدار بهینه‌ی h_s باید برای مسایل مختلف به‌صورت مجزا تعیین شود.

تا این مرحله فرآیند مش‌بندی محدوده تکمیل و امکان به‌کارگیری روش FEM در مرحله‌ی بعد فراهم شده است. به‌منظور درک بهتر روند FEM ابتدا نمادهای ماتریسی مورد بحث قرار می‌گیرد.

۳-۵. معرفی نماد ماتریسی برای محاسبه‌ی جریان

در روش FEM به‌منظور ساده‌تر نمودن فرمولاسیون معادلات سختی و نفوذپذیری اجزا، روش‌های ماتریسی می‌توانند ابزار لازم و سودمندی باشند که از آن‌ها برای حل مسایل مختلف و مهم‌تر از آن در برنامه‌نویسی برای رایانه‌های دیجیتالی با سرعت بالا استفاده می‌شود. بنابراین نماد ماتریسی معادلات، روش ساده‌ای است که به‌راحتی می‌توان از آن برای نوشتن و حل دستگاه معادلات جبری استفاده نمود. آشنایی با نماد ماتریسی در این بخش می‌تواند به درک بهتر مفاهیم بخش‌های بعد کمک کند. در این بخش نماد ماتریسی مربوط به المان‌های هیدرولیکی مورد بررسی قرار می‌گیرند [۷۰].

یک ماتریس، رشته‌ی مستطیل شکلی از کمیت‌ها است که به‌صورت ردیف‌ها و ستون‌ها در کنار هم قرارگرفته و اغلب به‌منظور کمک به معرفی و حل دستگاه معادلات جبری از آن استفاده می‌شود. می‌توان مؤلفه‌های جریان ($q_{1x}, q_{1y}, q_{1z}, q_{2x}, q_{2y}, q_{2z}, \ldots, q_{nx}, q_{ny}, q_{nz}$) در نقاط یا گره‌های مختلف یک مدل را ($N = 1, 2, \ldots, n$) همراه با هد هیدرولیکی گره‌ای متناظر که هر دو به‌صورت ماتریسی آرایش می‌یابند ($h_1, h_2, \ldots, h_n$) (رابطه‌ی ۳-۷)، در نظر گرفت [۷۰].

$$\{q\} = \underline{q} = \begin{Bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{1z} \\ q_{2x} \\ q_{2y} \\ q_{2z} \\ \vdots \\ q_{nx} \\ q_{ny} \\ q_{nz} \end{Bmatrix} \qquad \{h\} = \underline{h} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} \tag{۷-۳}$$

زیرنویس‌های کوچکی که در سمت راست q و h قرار دارند به ترتیب دلالت بر شماره‌ی گره و جهت جریان می‌نمایند. به‌عنوان‌مثال q_{1x} معرف جریان در گره‌ی ۱ است که در جهت x اعمال می‌شود. ماتریس‌هایی که در رابطه‌ی ۱ آورده شده‌اند ماتریس‌های ستونی هستند و ابعاد آن‌ها $n\times 1$ است. در اینجا از علامت آکولا ({}) به‌منظور شناسایی ماتریس‌های ستونی استفاده می‌شود. کلیه‌ی مقادیر نیروها و جابه‌جایی‌هایی که در ماتریس‌های ستونی آورده شده‌اند به‌اختصار به‌صورت $\{q\}$ یا $\{h\}$ نشان داده می‌شوند. علامت اختصاری دیگری که برای معرفی هر ماتریس مستطیل شکل از آن استفاده می‌شود خط کوچکی است که در زیر متغیر رسم می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، $\underline{q}$ و $\underline{h}$ معرف ماتریس هستند.

حالت کلی‌تری از یک ماتریس مستطیلی با استفاده از علامت کروشه [] مشخص می‌شود. برای مثال ماتریس نفوذپذیری هر جزء $[k]$ و نیز ماتریس نفوذپذیری کل $[K]$ که برای اجزای مختلف به‌دست می‌آیند توسط ماتریس‌های مربعی به‌صورت روابط ۳-۸ و ۳-۹ معرفی می‌شوند [۷۰].

$$[k] = \underline{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{۸-۳}$$

$$[K] = \underline{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \qquad (۹-۳)$$

در هیدرولیک، اجزای k_{ij} و K_{ij} را اغلب ضرایب مؤثر نفوذپذیری می‌نامند. نرخ جریان گره‌های اصلی $\underline{q}$ و نیز هدهای هیدرولیکی مربوط به آن‌ها $\underline{h}$، از طریق ماتریس نفوذپذیری کل $\underline{K}$ به هم مربوط می‌شوند.

$$\underline{q} = \underline{K}\underline{h} \qquad (۱۰-۳)$$

رابطه‌ی ۱۰-۳ معادله‌ی نفوذپذیری اصلی نامیده شده و معرف تعدادی رابطه‌ی هم‌زمان است. این معادله اساسی‌ترین رابطه در روش تجزیه و تحلیل مسایل به روش نفوذپذیری یا هد هیدرولیکی است. استفاده از روش خلاصه‌تری که در آن خط کوچکی در زیر متغیر رسم می‌شود، (معادله‌ی ۳-۱۰)، نباید باعث شود تا در نحوه‌ی تعیین ماتریس‌های ستونی یا مستطیل شکل مشکلی به وجود آید.

برای درک بهتر مؤلفه‌های K_{ij}، با استفاده از معادله‌ی ۳-۷ می‌توان معادله‌ی ۳-۱۰ را به‌صورت گسترده‌تر زیر نوشت.

$$\begin{Bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ \vdots \\ q_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} \qquad (۱۱-۳)$$

به‌عنوان مثال، فرض می‌شود که سیالی در یک مدل جریان دارد که در آن $h_1 = 1$، بنابراین با توجه به ۱۱-۳ می‌توان نوشت:

$$q_{1x} = K_{11} \text{ و } q_{1y} = K_{21}, \dots, q_{nz} = K_{n1} \qquad (۱۲-۳)$$

معادلات فوق شامل کلیه‌ی اجزا در اولین ستون $\underline{K}$ است. علاوه بر این، معادلات نشان می‌دهند که اجزای $K_{11}, K_{21}, \dots, K_{n1}$ برابر با کلیه‌ی ضرایب نفوذپذیری در گره‌هایی هستند که باعث می‌شوند که

هد هیدرولیکی اعمال‌شده بر مدل حفظ شود. به طریقی مشابه، دومین ستون ماتریس $\underline{K}$ معرف مقادیر نرخ جریانی است که باعث می‌شوند که هد هیدرولیکی $h_{1y}=1$ شده و هد هیدرولیکی گره‌های دیگر برابر صفر شوند.

۳-۶. مراحل اصلی روش FEM

در فلوچارت شکل ۳-۱۴ به‌طور خلاصه مراحل کلی روش FEM نشان داده‌شده است. در تمامی زمینه‌های کاربرد روش FEM، این هشت مرحله با اندک تغییراتی دنبال می‌شوند. به‌طورکلی این فرآیند شامل سه مرحله‌ی مشخص واصلی است: مرحله‌ی پیش‌پردازش، مرحله‌ی تحلیل و مرحله‌ی پس‌پردازش [۹۸].

مرحله‌ی ۱: مجزاسازی محدوده

مرحله‌ی اول در روش FEM تقسیم مساله یا ناحیه‌ی موردنظر به بخش‌های کوچک‌تر به‌نام «اجزا» است. بنابراین محدوده‌ی مورد تحلیل را باید با اجزای محدود مناسب مدل‌سازی نمود. در مورد تعداد، نوع، اندازه و ترتیب اجزا باید به‌دقت تصمیم‌گیری شود.

مرحله‌ی ۲: انتخاب یک مدل درون‌یاب یا تابع تقریب‌زنی مناسب

به دلیل این‌که راه‌حل مربوط به هد هیدرولیکی یک مدل هیدرولیکی در نرخ جریان مشخص را نمی‌توان به‌طور دقیق پیش‌بینی نمود، باید یک راه‌حل مناسب برای به‌دست آوردن جواب تقریبی مجهولات در اجزا را مدنظر قرار داد. ازنقطه‌نظر کامپیوتری این راه‌حل فرضی باید ساده باشد ولی در شرایط همگرایی معینی صدق کند. معمولاً این راه‌حل یا مدل درون‌یاب به شکل یک چندجمله‌ای بانام «تابع تقریب‌زنی» در نظر گرفته می‌شود.

مرحله‌ی ۳: به‌دست آوردن معادلات جزئی پایه

از مدل جابه‌جایی فرض شده و با استفاده از شرایط تعادل، باقیمانده‌های وزن‌دار یا اصل تغییری مناسب، ماتریس نفوذپذیری ($[K^{(e)}]$) و بردار نرخ جریان جزئی ℓ، ($P^{(e)}$) به‌دست می‌آید.

مرحله‌ی ۴: تشکیل معادلات کلی تعادل

به دلیل این‌که مساله از تعدادی جزء محدود تشکیل‌شده است، ماتریس‌های نفوذپذیری و بردارهای نرخ جریان اجزای منفرد را باید با یک روش مناسب با یکدیگر جمع نموده و معادلات کلی تعادل را به‌صورت زیر تشکیل داد:

$$[\underset{\sim}{K}]\underset{\sim}{\vec{\Phi}} = \underset{\sim}{\vec{P}} \qquad (۱۳-۳)$$

که در آن، $[\underset{\sim}{K}]$ ماتریس نفوذپذیری مجموع، $\underset{\sim}{\vec{\Phi}}$ بردار هدهیدرولیکی گره‌ها و $\underset{\sim}{\vec{P}}$ بردار نرخ جریان گره‌ای برای کل مدل است.

مرحله‌ی ۵: اعمال شرایط مرزی

معادلات کلی تعادل (۳-۱۳) باید برای اعمال شرایط مرزی اصلاح شوند. پس از اعمال شرایط مرزی، معادلات تعادل را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$[K]\vec{\Phi} = \vec{P} \qquad (۱۴-۳)$$

مرحله‌ی ۶: حل معادلات سیستم

برای مسایل خطی، بردار $\vec{\Phi}$ را به‌آسانی می‌توان حل کرد. اما برای مسایل غیرخطی این حل طی مراحل متوالی که هر مرحله شامل اصلاح ماتریس نفوذپذیری $[K]$ و یا بردار نرخ جریان $\vec{P}$ و یا هردو است، به‌دست می‌آید. در رابطه با روش‌های حل عددی در فصل پنجم بیشتر بحث شده است.

مرحله‌ی ۷: پس‌پردازش

با توجه به‌دقت موردنیاز برای حل مساله و اندازه‌ی اجزا، پاسخ‌ها ممکن است به‌طور ساده در گره‌ها ارزیابی‌شده و یا با استفاده از برون‌یابی یا ارزیابی انتگرال‌گیری در نقاط غیر گره‌ای برای اجزای مرتبه‌ی بالاتر محاسبه شود. این مهم نیازمند یک مرحله بانام پس‌پردازش شناخته می‌شود.

مرحله‌ی ۸: ارایه‌ی نتایج

پس از درونیابی پاسخ‌های محاسبه‌شده از نقاط گره‌ای، نتایج برای ارایه به‌صورت چاپ یا ترسیم نمودار آماده می‌شود.

۳-۷. مجزاسازی محدوده

تقسیم مدل به اجزای محدود به این دلیل است که جواب مساله برای هر یک از اجزاء، با دقت بالا تعیین شود و سپس با برهم‌نهی جواب در تمام اجزا، جواب کلی مساله تعیین شود. قوانین عمومی ایجاد مش‌بندی برای روابط اجزای محدود شامل موارد زیر است [۱۴۰]:

- تعداد، شکل و نوع (یعنی خطی یا درجه دوم) اجزا باید به‌گونه‌ای باشد که هندسه‌ی محدوده را با دقت موردنظر تقسیم‌بندی کند.
- تراکم اجزا باید به‌گونه‌ای باشد که نواحی با گرادیان زیاد متغیر مساله، به‌طور مناسب شبیه‌سازی شوند (یعنی اجزای مرتبه بالا باید در نواحی با گرادیان زیاد به‌کاربرده شوند).
- آرایش شبکه باید به‌تدریج از نواحی با تراکم زیاد به نواحی با تراکم کم تغییر کند.
- هندسه مساله باید توسط اجزا، به‌طور کامل پوشش داده شود.

نشان دادن یک محدوده با مجموعه‌ای از اجزای محدود، مستلزم رعایت نکات زیادی است. تعداد، نوع (خطی یا درجه دوم)، شکل (مثلثی، مستطیلی، هرمی یا ...) و تراکم (یعنی حذف اجزای کم‌اهمیت و اصلاح شبکه) اجزای به‌کاربرده شده در یک مساله بستگی به ملاحظات زیر دارد [۱۴۰]:

- تقسیم‌بندی محدوده به اجزای قابل‌قبول، به‌طوری‌که تا حد امکان نزدیک به یکدیگر باشند.
- تقسیم‌بندی جسم یا قسمتی از جسم به اجزای نسبتاً کوچک به‌طوری‌که مقدار شیب گرادیان‌ها، دقیقاً قابل‌محاسبه باشند.

همان‌طور که در فصل قبل به‌تفصیل موردبحث قرار گرفت، برای اصلاح شبکه‌ی مش‌بندی سه شرط زیر باید تأمین شود [۱۴۰]:

الف) ساختار هندسی مساله نباید تغییر کند.

ب) جایگاه گره‌ها نباید تغییر کند.

پ) مرتبه‌ی تقریب در کلیه مراحل روند اصلاح مش‌بندی، باید ثابت باقی بماند.

قسمت مهم روش اجزای محدود مربوط به مش‌بندی است که شامل شماره‌گذاری گره‌ها، اجزا و ایجاد مختصات گرهی و ماتریس اتصال است. درحالی‌که ایجاد چنین اطلاعاتی کاملاً ساده هستند و نوع اطلاعات روی بازده محاسبات و دقت آن‌ها تأثیر چشمگیری دارد. همچنین، دقت حل اجزای محدود وابسته به انتخاب شبکه اجزای محدود است. برای مثال اگر شبکه انتخاب‌شده تقارن فیزیکی مساله را برهم بزند، جواب دقت کمتری نسبت به حل به‌دست‌آمده با استفاده از تقارن آن دارد. ازلحاظ هندسی یک جزء مثلثی خطوط تقارن کمتری در مقایسه با جزء مستطیلی دارد، بنابراین باید شبکه‌های مش‌بندی اجزای مثلثی را با دقت به کار برد.

دقت پاسخ‌های روش FEM به‌اندازه مش‌بندی آن بستگی دارد. چنانچه با ریزتر کردن مش‌بندی، پاسخ‌ها به مقدار خاصی همگرا شوند، گفته می‌شود که راه‌حل دارای همگرایی است. انتخاب پاسخ‌های گره‌ای و همچنین تابع‌های وزن‌دار در همگرایی پاسخ FEM مؤثر است. تابع‌های وزنی و همچنین پاسخ‌های آزمونی باید به‌اندازه کافی ملایم باشند (همگرایی به‌طور ناگهانی حاصل نشود). این ملایم بودن به درجه‌ی مشتق‌های ظاهرشده در شکل ضعیف معادله حاکم بستگی دارد. در اجزای محدود، تابع‌های وزنی و همچنین پاسخ آزمونی و مشتق‌های آن‌ها تا درجه‌ای که در شکل ضعیف معادله حاکم وجود دارد، باید بتوانند مقدارهای ثابت را بپذیرند [۱۴۰].

شکل ۳-۱۴ مراحل کلی روش اجزای محدود [۹۶]

تا این مرحله روش FEM به‌طور مناسب در مدل پیاده‌سازی شده است. نتیجه‌ی حاصل از آن دستگاه معادلات تنک و بزرگی است که برای همگرایی به پاسخ مدل، نیاز به روش‌های ویژه‌ای است. طیفی از آن‌ها، روش‌های زیرفضای کریلف هستند که در ادامه این فصل به‌طور کامل مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳-۸. روش‌های تکراری زیرفضای کریلف

مفهوم زیرفضای کریلف اولین بار در سال ۱۹۳۱ توسط ریاضیدان و مهندس نیروی دریایی روس الکسی کریلف[1]معرفی شد. بنیان روش زیرفضای کریلف بر تئوری کیلی – همیلتون[2]استوار است که بیان می‌کند، معکوس یک ماتریس می‌تواند برحسب ترکیبات خطی توان‌های آن یافت شود. روش‌های زیرفضای کریلف به‌طور گسترده برای حل تکراری دستگاه‌های خطی n×n؛ به‌ویژه معادلاتی که از مجزا سازی معادلات دیفرانسیل نتیجه می‌شوند (رابطه‌ی ۳-۱۵)، مورداستفاده قرار می‌گیرند [۱۴۱].

$$Ax = b \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

امروزه روش‌های زیرفضای کریلف باوجود رایانه‌های قدرتمندتر و روش‌های بهینه‌سازی محاسباتی، حل مسایل بزرگ‌تر و پیچیده‌تر را در زمینه‌های کاربردی مهندسی از کرومودینامیک[3]گرفته تا کنترل ترافیک‌های هوایی ممکن ساخته است. بنابراین، احتمال ساخت مدل‌های محاسباتی دقیق‌تر به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد که به‌نوبه‌ی خود به‌عنوان یک مورد الهام‌بخش برای تدوین روش‌های مؤثرتر در حل مسایل مختلف، مطرح می‌شود [۱۴۲, ۱۴۳].

در برخی موارد، روش‌های مستقیم بر اساس مجزا سازی ماتریس‌های تنک[4]می‌تواند برای حل مسایل بزرگ و پیچیده مورد استفاده قرار گیرد، به‌عنوان‌مثال، در رفتار عددی برخی معادلات دیفرانسیل دو

[1] Alexei Krylov
[2] Cayley–Hamilton
[3] نظریه‌ای در مورد نیروهای بین هسته‌ای قوی کوانتمی.
[4] Sparse

بعدی یا در مسایل مربوط به شبکه‌های برق – قدرت [۱۴۷-۱۴۴]. بااین‌وجود، کاربرد روش‌های تکراری در حل عددی معادلات دیفرانسیل سه‌بعدی بزرگ و پیچیده، تنوع وسیعی از مسایل کاربردی مهندسی و حتی در روش‌های مجزا سازی عددی که در آن خود ماتریس به‌صورت صریح موجود نیست، اجتناب‌ناپذیر است. همچنین، داف[1] در سال ۲۰۰۴ در ترکیب روش‌های مستقیم و تکراری، روش جالب‌توجهی را ارایه داده است [۱۴۸].

بعضی از پرکاربردترین روش‌های زیرفضای کریلف برای حل دستگاه‌های نامتقارن، روش‌های GMRES و Bi-CGStab باشد. در ادامه‌ی این بخش این روش‌ها به‌تفصیل مورد بحث قرارگرفته است. مزایای Bi-CGStab در کمینه کردن ملزومات و تجهیزات ذخیره‌سازی اطلاعات است، اما مسایل بسیاری وجود دارند که این روش برای آن‌ها قابل کاربرد نیست. برای این دسته از مسایل GMRES انتخاب مناسب‌تری خواهد بود و برای آن در متون مختلف مطالعات فراوان و بسط‌های گوناگونی وجود دارد. به‌طورکلی بعضی از روش‌های زیرفضای کریلف که در اینجا به‌طور مختصر موردبحث قرار می‌گیرند، برای برخی از مسایل کاربرد بهتری دارند و برای برخی دیگر از مسایل ممکن است اصلاً قابل‌استفاده نباشند. ایده‌های جدید معمولاً مختص به حالت‌های خاص هستند و معمولاً برای تمامی حالت‌های پاسخگو نیستند [۱۴۹] و بنابراین هرجا که لازم است در این مورد توضیحات بیشتری ارایه می‌شود.

یکی از مواردی که روش‌های تکراری زیرفضای کریلف را کاربردی‌تر می‌سازد، استفاده از روش‌های پیش‌شرط‌گذاری[2] است و به معنای استفاده از یک ماتریس یا عملگر M برای تبدیل رابطه‌ی (۱۵-۳) به یک مساله‌ی معادل دیگر به شکل رابطه‌ی (۳-۱۶) است [۱۵۰].

---

[1] Duff

[2] Preconditioning

$$AM^{-1}y = b \quad \text{با} \quad y = Mx \qquad \text{(پیش‌شرط‌گذاری راست)} \qquad (۱۶-۳)$$

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b \qquad \text{(پیش‌شرط‌گذاری چپ)}$$

موارد متعددی از کاربرد روش‌های پیش‌شرط‌گذاری در مراجع مختلف می‌توان یافت [۱۵۲-۱۵۰]. برای تکمیل بحث روش‌های زیرفضای کریلف، در بخش سوم این فصل، به‌صورت خلاصه، پیش‌شرط‌گذاری، موردبررسی قرار می‌گیرد. برای تشریح ساده‌تر موضوع و تمرکز بر توسعه‌های محاسباتی، حساب کامل[۱] مفروض می‌شود. در بعضی موارد، به تأثیر ممیز شناور در محتوای روش‌های زیرفضای کریلف و درک اهمیت این‌که اصولاً هدف از این تحلیل چیست، پرداخته می‌شود [۱۵۳, ۱۵۴].

استفاده از حساب ممیز شناور[۲]می‌تواند به‌طور قابل‌توجهی کارایی روش‌های زیرفضای کریلف را بهبود بخشد. در عمل، به‌خوبی مشخص‌شده است که الگوریتم‌هایی که ازلحاظ ریاضی معادل هستند، می‌توانند رفتار همگرایی متفاوتی در هنگام پیاده‌سازی از خود نشان دهند [۱۵۵]. لازم به ذکر است که تنها الگوریتم گرام - اشمیت[۳]اصلاح‌شده از روش GMRES در حالت معکوس، در عمل پایدار ارزیابی‌شده است، آن‌هم درحالتی‌که معکوس خطا (مفهوم دقت) متناسب با دقت ماشین محاسبه‌گر باشد [۱۵۶]. تا پیش از این روش، عدم پایداری یک مشکل عمده محسوب می‌شد، زیرا مهندسین از روش GMRES به مدت طولانی استفاده می‌کردند و تنها الگوریتم هاوسهولدر[۴]از روش GMRES به نظر مناسب می‌رسید، درحالی‌که این الگوریتم در همه‌ی مسایل پایدار نیست [۱۵۳].

[1] Exact Arithmetic

[2] در رایانه‌ها به‌طوری که بتوانند محدوده‌ای وسیع از مقادیر را بپذیرند. روشی برای نمایش اعداد حقیقی

[3] Gram - Schmidt

[4] Householder

۳-۸-۱. فرمولاسیون روش‌های پایه

فرض شود که x_* پاسخ دقیق معادله‌ی (۳-۱۵) و $\langle x, y\rangle$ ضرب داخلی بین دو بردار x, y در فضای $x, y \in \mathbb{R}^n$ باشد. ترانهاده‌ی ماتریس A با A^T نشان داده شده و ساختار ضرب داخلی به آن بستگی دارد، یعنی، $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$ [۱۵۷].

یک ماتریس هرمیتی ماتریسی است مربعی که ترانهاده مزدوج مختلط آن با خودش برابر باشد. می‌توان از تعاریف ضرب‌های داخلی مختلفی استفاده نمود و در هر مورد، نُرم برداری حاصل به‌صورت $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ است. در بیشتر موارد، از ضرب داخلی اقلیدسی استفاده می‌گردد، یعنی، $\langle x, y\rangle = x^T y$ و نُرم حاصل آن نُرم دوم خواهد بود. برای هر ماتریس مثبت معین M (ماتریس مثبت معین، ماتریس هرمیتی است که تمام مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشد)، نُرم M از x, y به‌صورت $\langle x, y\rangle_M = x^T M y$ تعریف می‌شود. برای بردارهای مختلط، ترانهاده‌ی مزدوج با x^* مشخص می‌شود. عملگر نُرم ماتریس از نُرم برداری بلافاصله تعریف‌شده در حالت عادی از $\|A\| = \max_{\{\|x\|=1\}} \|Ax\|$ نتیجه گرفته می‌شود. تنها استثنا نُرم فروبنیوس[1] به‌صورت $\|A\|_{Fr} = (\sum_{i,j} a_{i,j}^2)^{1/2}$ است که در آن $a_{i,j}$ مؤلفه‌ی ماتریس A است [۱۵۷].

ماتریس I_m ماتریس یکه‌ی $m \times m$ است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقادیر منفرد (غیر صفر) از A به ترتیب با $\sigma_{\max}$ و $\sigma_{\min}$ نشان داده می‌شود. عدد شرط A به‌صورت $k(A) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ تعریف می‌شود و بردار اقلیدسی e_j، j امین ستون از یک ماتریس یکه با ترتیب مناسب است. دامنه یا فضای ستونی از ماتریس M با $\Re(M)$ نشان داده می‌شود. ماتریس مربعی A نرمال قلمداد می‌شود اگر $A^T A = A A^T$. ویژگی‌های بسیاری از الگوریتم روش‌های زیرفضای کریلف و همچنین باندهای مشخص از همگرایی آن‌ها بر اساس نرمال بودن یا نبودن ماتریس ضرایب می‌تواند تغییر کند. به‌طورکلی همه‌ی ماتریس‌های متقارن، نرمال هستند. همچنین می‌توان به ماتریس‌های کشیده‌ی متقارن (یعنی آن‌هایی که در معادله‌ی

[1] Frobenius

$A=-A^T$ صدق می‌کنند)، ماتریس‌های متعامد، مضاربی از ماتریس‌های متعامد به‌علاوه‌ی یک عدد ثابت مختلط و همچنین ماتریس‌های به شکل $A=M+\sigma I$ (M ماتریس حقیقی و σ عدد مختلط) اشاره نمود [۱۵۷]. هر یک از این ماتریس‌ها ویژگی‌های خاصی دارند و روش مجزایی برای حل معادلاتی که ماتریس ضرایب آن‌ها از این دست باشد مورد نیاز است [۱۵۷].

۳-۸-۲. توصیف روش‌های پایه‌ی متعامدسازی

با فرض این‌که x_0 یک تقریب اولیه از پاسخ معادله‌ی (۳-۱۵) و $r_0=b-Ax_0$ باقیمانده‌ی اولیه باشد، بنابراین:

$$\kappa_m(A,r_0)=span\left\{r_0,Ar_0,A^2r_0,...,A^{m-1}r_0\right\} \tag{۳-۱۷}$$

زیرفضای کریلف با بعد m است که با A و r_0 تعریف می‌شود. علامت κ_m هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرد که وابستگی زیرفضا به A,r_0 از قبل مشخص‌شده باشد. توجه شود که این زیرفضا تودرتو است، یعنی $\kappa_m \subseteq \kappa_{m+1}$. روش‌های زیرفضای کریلف در زمره‌ی روش‌های تکراری محسوب می‌شوند که در آن در m امین مرحله تقریبی از پاسخ معادله‌ی (۳-۱۵)، (x_m) در $x_0+\kappa_m$ یافت می‌شود. یعنی این تقریب به شکل $x_m=x_0+q_{m-1}(A)r_0$ است که در آن q_{m-1} یک چندجمله‌ای با حداکثر درجه‌ی $m-1$ است. اگر دستگاه معادلات حقیقی باشد، پس q_{m-1} می‌تواند ضرایبی حقیقی داشته باشد. این عبارت بیان‌گر آن است که باقیمانده‌ی $r_m=b-Ax_m$ با چندجمله‌ای باقیمانده‌ی P_m با حداکثر درجه‌ی m در ارتباط است که در شرط $P_m(0)=1$ صدق می‌کند زیرا [۱۵۷]:

$$\begin{aligned} r_m &= b-Ax_m \\ &= r_0-Aq_{m-1}(A)r_0 \\ &= P_m(A)r_0 \end{aligned} \tag{۳-۱۸}$$

به‌طور مشابه، مقدار خطا در تابع $x_m - x_* = P_m(A)(x - x_*)$ صدق می‌کند، که در آن x_* پاسخ دقیق معادله‌ی (۳-۱۵) است. فرض شود که مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌های P با بیشترین درجه‌ی m، که در شرط $P(0)=1$ صدق کنند، به‌صورت P_m باشند. تقریب $x_m \in x_0 + \kappa_m$ (یا چندجمله‌ای مطابق آن) اغلب با تعیین x به‌دست می‌آید که برخی توابع را حداقل کند. روش‌های مختلف زیرفضای کریلف به انتخاب این توابع، ویژگی‌های ماتریس و برخی جزئیات پیاده‌سازی مربوط هستند و بنابراین هر روش به‌طور ضمنی یک چندجمله‌ای متفاوت ($P_m \in \mathrm{P}_m$) را تعریف می‌نماید. برای مثال، در روش پرکاربرد GMRES که توسط سعد و شولتز[1] توسعه‌یافته است، تقریب x_m حداقل کننده‌ی نُرم دوم باقیمانده است [۱۵۸].

در فرآیند تکراری ایجاد یک پایه از زیرفضای κ_m، هر روش می‌تواند طوری پیاده‌سازی شود که در هر مرحله از تکرار تنها یک یا دو ضرب ماتریس در بردار همراه با A به شکل $z = Av$ لازم باشد (در بعضی از روش‌ها یک عملیات $y = A^T w$ نیز موردنیاز است). این امر باعث می‌شود که این روش‌ها کاربرد عملی داشته باشند. در حقیقت خود ماتریس لازم نیست، تنها اثر آن به‌صورت یک عملگر بر روی بردار (معمولاً به‌صورت فراخوانی یک زیربرنامه) مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۵۱].

در همه‌ی روش‌ها کار با یک بردار اولیه‌ی x_0 و باقیمانده‌ی اولیه‌ی $r_0 = b - Ax_0$ آغاز شده و در m امین مرحله یک جزء x_m از $x_0 + \kappa_m(A, r_0)$ که در یک تصویر[2] یا شرط حداقل کننده صدق کند، به‌دست می‌آید. فرض می‌شود که $r_m = b - Ax_m$ باقیمانده در m امین مرحله باشد. یک شرط کلی به‌صورت زیر است [۱۵۱]:

[1] Saad & Schultz

[2] Projection

الف) شرط پتروف –گالرکین:[1]

$$r_m \perp L_m \qquad (۳-۱۹)$$

که در آن، r_m بر L_m عمود است و L_m یک زیرفضای m بعدی است. اگر $L_m = \kappa_m$، رابطه‌ی (۳-۱۹) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

ب) شرط گالرکین:

$$r_m = \kappa_m \qquad (۳-۲۰)$$

همچنین با فرض شرط زیر،

پ) شرط حداقل باقیمانده:

$$\|r_m\| = \min_{x \in x_0 + \kappa_m} \|b - Ax\| \qquad (۳-۲۱)$$

می‌توان نشان داد که رابطه‌ی (۳-۲۱) با انتخاب $L_m = A\kappa_m$، همان شرط پتروف – گالرکین است. باید توجه شود که ویژگی تودرتویی زیرفضاهای کریلف بر این نکته تأکید دارد که هر روشی که برای آن‌یکی از شرایط (۳-۱۹) تا (۳-۲۰) صادق باشد، در حساب کامل، حداکثر تا تعداد تکرار معینی همگرا خواهد شد. البته، در عمل مقصود آن است که روش موردنظر در کمتر از تعداد مراحل پیش‌بینی‌شده به جواب قابل قبول همگرا شود (یعنی افزایش سرعت همگرایی).

در ادامه‌ی این بخش، روش‌های زیرفضای کریلف که به‌خوبی شناخته‌شده و بسیار پرکاربرد هستند، شرح داده می‌شوند و در چند مورد توسعه‌ی جدیدترین روش‌ها بررسی و به مراجع مربوطه اشاره خواهد شد. بارت[2] در سال ۱۹۹۳ توصیفی مقدماتی از روش‌های زیرفضای کریلف را بدون اشاره به جزییات پیاده‌سازی آن‌ها بیان نموده است [۱۵۰]. سعد و همکارانش در سال ۱۹۹۶ جزییات بیشتری از این

[1] Petrov - Galerkin
[2] Barret

روش‌ها را ذکر نموده‌اند [۱۵۱]. همچنین، سعد و همکارانش در سال ۲۰۰۰ تاریخچه‌ی توسعه‌ی این روش‌ها را به‌طور کامل مطالعه کرده‌اند [۱۵۹]. اینک با حفظ کلیت موضوع، می‌توان فرض نمود که $x_0=0$ و بنابراین $r_0=b$ مگر این‌که فرض‌های دیگری در نظر گرفته شود که به‌طور مجزا ذکر می‌شود.

۳-۸-۲-۱. روش‌های متعامدسازی آرنولدی[1]و لنکزوس[2]

پیش‌ازاین که روش‌های زیرفضای کریلف مطرح شود، روش آرنولدی برای ساخت و متعامدسازی پایه‌های زیرفضای کریلف شرح داده می‌شود. هنگامی‌که ماتریس موردبررسی متقارن باشد، این روش ساده‌سازی شده و به روش لنکزوس مبدل خواهد شد.

فرض شود که $\beta=\|r_0\|$ و $v_1={r_0}/{\beta}$ باشد. یک پایه‌ی متعامد $v_1,\dots,v_m$ از زیرفضای $\kappa_m(A,r_0)$ ، با متعامدسازی بردار v_1 روی بردارهای قبلی $v_1,\dots,v_k$ و نرمالایز کردن آن، در هر مرحله به‌دست می‌آید. به‌عبارت‌دیگر، رابطه‌ای به‌صورت زیر حاصل می‌شود [۱۶۰]:

$$v_{k+1}h_{k+1,k}=Av_k-\sum_{j=1}^{k}v_j h_j k \tag{۳-۲۲}$$

که در آن ضرایب $h_{jk}=\langle v_j,Av_k\rangle,\ j\le k$ به صورتی هستند که ویژگی تعامد ایجاد می‌شود و $h_{k+1,k}$ مثبت است، به‌طوری‌که $\|v_{k+1}\|=1$. اگر بردارهای متعامد در ماتریس $V_m=\ v_1,\dots,v_m$ و ضرایب h_{jk} در ماتریس هسنبرگ[3] ($H_{(m+1),m}$) با بعد $(m+1)\times m$ قرار گیرند، می‌توان رابطه‌ی اصلی آرنولدی را به‌صورت زیر نوشت [۱۶۰]:

$$AV_m=V_{m+1}H_{m+1,m} \tag{۳-۲۳}$$

---
[1] Arnoldi
[2] Lanczos
[3] Hessenberg

$$AV_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T \quad (۲۴-۳)$$

که در آن H_m ماتریس $m \times m$ شامل اولین ردیف از ماتریس $H_{(m+1),m}$ است، یعنی [۱۶۰]:

$$H_{(m+1),m} = \begin{bmatrix} H_m \\ h_{m+1,m} e_m^T \end{bmatrix} \quad (۲۵-۳)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۳) مرتبه‌ی $H_{(m+1),m}$ با مرتبه‌ی AV_m یکسان است. یعنی اگر بردار جدید Av_m به‌طور خطی مستقل از بردارهای قبلی $v_1,\ldots,v_m$ باشد، $H_{(m+1),m}$ دارای مرتبه‌ی m است. همچنین مشاهده می‌شود که اگر $h_{m+1,m} = 0$ باشد، این m بردار یک زیرفضای نامتغیر از A را تشکیل می‌دهند و حل رابطه‌ی (۳-۱۵) به این زیرفضا متعلق است. از روابط (۳-۲۳) و (۳-۲۴) چنین دریافت می‌شود که [۱۶۰]:

$$V_m^T A V_m = H_m \quad (۲۶-۳)$$

باید توجه داشت که در اینجا برای توصیف روش آرنولدی از روش متعامدسازی گرام – اشمیت استاندارد استفاده‌شده است. در کاربردهای عملی معمولاً روش گرام – اشمیت اصلاح شده (MGS) مورد استفاده قرار می‌گیرد که عملیات یکسانی را در مرتبه‌ای متفاوت لحاظ می‌کند که پایداری بیشتری نیز به همراه دارد [۱۶۱].

اگر ماتریس A متقارن باشد، روش آرنولدی به روش لنکزوس مبدل می‌شود و به همان صورت قابل‌استفاده است، به‌جز این‌که متعامدسازی برحسب تنها دو بردار قبلی کفایت می‌کند. به‌عبارت‌دیگر، به‌محض این‌که Av_k بر v_{k-1} و v_k عمود شد، برهر v_j نیز به‌صورت خودبه‌خود عمود خواهد بود، یعنی، $j < k-1$. بنابراین، طرف سمت راست رابطه‌ی (۳-۲۱) تنها سه عبارت دارد و ماتریس رابطه‌ی (۳-۲۵) سه‌قطری خواهد بود. این ماتریس با $T_{m+1,m}$ نمایش و به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۶۲]:

$$T_{(m+1),m} = \begin{bmatrix} T_m \\ t_{m+1,m} e_m^T \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۷)$$

که در آن T_m یک ماتریس متقارن است.

همچنین یک روش لنکزوس (دوطرفه) نیز برای ماتریس‌های متقارن وجود دارد که توسط آن‌یک پایه‌ی نامتعامد $w_1,...,w_m$ از زیرفضای $\kappa_m(A, r_0)$ ساخته می‌شود [۱۶۳]. یک زیرفضای کریلف (چپ) یعنی، $\kappa_m(A^T, \hat{r}_0)$، تعریف‌شده با ترانهاده‌ی A و تعدادی بردار کمکی $\hat{r}_0$ طوری در نظر گرفته می‌شود که $\langle r_0, \hat{r}_0 \rangle \neq 0$ (یک انتخاب ساده می‌تواند $\hat{r}_0 = r_0$ باشد).

فرض شود که $\hat{w}_1,...,\hat{w}_m$ پایه‌ای برای این زیرفضا باشد. روش لنکزوس (دوطرفه) به‌طور پیشرو این دو پایه را طوری می‌سازد که متعامد دوگانه[1]باشند، یعنی، هنگامی‌که $i \neq j$ عبارت $\langle \hat{w}_i, w_j \rangle = 0$ و $\langle \hat{w}_j, w_j \rangle \neq 0$ برقرار باشد. به‌عبارت‌دیگر، اگر $W_m = w_1,...,w_m$ و $\hat{W}_m = \hat{w}_1,...,\hat{w}_m$، پس $\hat{W}_m^T W_m$ قطری است. چگونگی مقیاس‌بندی بردارهای w_j و $\hat{w}_j$ دلخواه است. مقیاس‌بندی این دو بردار به‌گونه‌ای که $\langle \hat{w}_j, w_j \rangle = 1$ و $j = 1,...,m$ باشد، کاملاً برحسب انتخاب است، به این معنا که: $\hat{W}_m^T W_m = I$. این الگوریتم همیشه موفق نیست و زمانی با شکست مواجه می‌شود که برداری مثل $\hat{w}_j$ عمود بر w_j پیدا شود (یعنی، $\langle w_j . \hat{w}_j \rangle = 0$ که طبق ساختار پیشنهادی نامطلوب است).

باید به تمایز بین شکست الگوریتم فوق که به دلیل عدم وجود بردارهای پایه‌ی جدید حادث می‌شود و گاهی «شکست صحیح» نامیده می‌شود و شکست الگوریتم به دلیل پیاده‌سازی عبارات بازگشتی که این بردارها را تولید می‌کند، توجه شود.

راهکارهایی موجودند که سعی بر جلوگیری از این شکست‌ها دارند و در مراجع مختلف پیشنهاد شده‌اند. به‌عنوان‌مثال مورد «شکست نزدیک» که در آن $\langle \hat{w}_j, w_j \rangle \approx 0$ است. یک روش استاندارد که

[1] Bi-Orthogonal

«روش لنکزوس مستقیم»[1] نامیده می‌شود، شامل از بین بردن محدودیت‌های ماتریس $\hat{W}_m^T W_m$ برای قطری شدن است. درنتیجه، روش لنکزوس مستقیم برای بردارهای پایه‌ی بعدی، به‌طور مستقیم روبه‌جلو عمل می‌کند که این امر غیر منفرد بودن $\hat{W}_m^T W_m$ را حفظ می‌کند. بنابراین تنها لازم است که یک ماتریس قطری بلوکی به‌جای قطری ساده در نظر گرفته شود. ایده‌ی روش لنکزوس مستقیم که اولین بار توسط پارلت[2] تیلور[3] و لیو[4] برای جبران شکست الگوریتم لنکزوس مطرح شد، تنها بلوک‌های قطری 2×2 را در نظر می‌گرفت [۱۶۴]، درحالی‌که محققان دیگری پیاده‌سازی این روش را برای بلوک‌های قطری با اندازه‌ی دلخواه ارایه کرده‌اند [۱۶۵].

یکی از مزایای روش لنکزوس دوطرفه آن است که فرض می‌کند هیچ شکستی رخ نمی‌دهد. این پایه‌ها می‌توانند با یک عبارت بازگشتی سه‌بخشی یا دو عبارت بازگشتی دوبخشی ساخته شوند. بنابراین تنها دو تا سه بردار قبلی در هر توالی باید ذخیره‌سازی شود و این موضوع توسط لنکزوس مدنظر قرارگرفته است [۱۶۲]. در این صورت ماتریسی که ضرایب متعامد را در برمی‌گیرد، متقارن سه‌قطری است. بنابراین رابطه‌ای به‌صورت (۳-۲۳) و (۳-۲۴) کاربردی خواهد بود:

$$AW_m = W_m T_m + t_{m+1,m} w_{m+1} e_m^T \qquad (۳-۲۸)$$

لازم به ذکر است که تمامی علایم و پارامترها قبلاً توصیف شده‌اند.

[1] look-ahead Lanczos
[2] Parlett
[3] Taylor
[4] Liu

۳-۸-۲-۲. روش‌های تکراری GMRES، Q-GMRES، CG ، CR و GCR

یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین روش‌های زیرفضای کریلف روش GMRES[1] است که در ابتدا توسط سعد و شولتز پیشنهاد شد. شرایط تصویرسازی رابطه‌ی (۳-۲۰)، برای کمینه کردن تمامی بردارهای ممکن در زیرفضای کریلف $\kappa_m(A, r_0)$ است. به همین دلیل x_m به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۶۱]:

$$\|r_m\| = \|b - Ax_m\| = \min_{x \in \kappa_m(A, r_0)} \|b - Ax\| \tag{۳-۲۹}$$

برای GMRES، معمولاً نُرم دوم مورداستفاده قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که پاسخ مساله‌ی حداقل مربعات (۳-۲۹) تا جایی که A از مرتبه‌ی کامل است، منحصر به‌فرد است.

کلید GMRES پیاده‌سازی روش حل مساله‌ی حداقل مربعات (۳-۲۹) با استفاده از پایه‌های متعامد زیرفضای کریلف تولیدشده به کمک روش آرنولدی است. تقریب GMRES در مرحله‌ی mام برای $y_m \in \mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۵۱]:

$$x_m = V_m y_m \tag{۳-۳۰}$$

بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی آرنولدی (۳-۲۳) و این‌که $V_{m+1}e_1 = v_1 = b/\beta$ نتیجه می‌شود [۱۵۱]:

$$\begin{aligned} r_m &= b - Ax_m = b - AV_m y_m \\ &= \beta v_1 - V_{m+1} H_{m+1,m} y_m = V_{m+1}(\beta e_1 - H_{m+1,m} y_m) \end{aligned} \tag{۳-۳۱}$$

(۳۲-۱)

چون V_{m+1} دارای ستون‌های متعامد است، بنابراین مساله‌ی حداقل مربعات (۳-۲۹) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود [۱۵۱]:

$$\|r_m\| = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|\beta e_1 - H_{m+1,m} y\| \tag{۳-۳۳}$$

[1] Generalized Minimal Residual

ویژگی پیاده‌سازی کلیدی دیگر GMRES استفاده از فاکتورگیری QR به‌صورت زیر است [۱۵۸]:

$$H_{m+1,m}=Q_{m+1}R_{m+1,m} \tag{۳-۳۴}$$

که در آن، ماتریس Q_{m+1} که دارای بعد $(m+1)\times(m+1)$ است، متعامد است و رابطه‌ی آن به‌صورت زیر است [۱۵۸]:

$$R_{m+1,m}=\begin{bmatrix} R_m \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۳۵}$$

که در آن، ماتریس R_m با بعد $m\times m$ و بالامثلثی است. معمولاً فاکتورگیری QR (رابطه‌ی (۳-۳۳)) با دوران‌های مناسب طوری انجام می‌شود که تنها دو ورودی در هر مرحله برای محاسبه لازم باشد و برای به‌روزآوری ماتریس بالامثلثی R_m به کار می‌رود. مساله‌ی حداقل مربعات (۲-۳۳) می‌تواند با رابطه‌ی زیر جایگزین شود [۱۶۶]:

$$\|r_m\|=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\|Q_{m+1}^T\beta e_1-R_{m+1,m}y\right\| \tag{۳-۳۶}$$

هنگامی‌که $H_{m+1,m}$ از مرتبه‌ی کامل است یعنی، مرتبه‌ی m، رابطه‌ی (۳-۳۶) حل منحصربه‌فردی دارد و در این حالت، R_m غیر منفرد خواهد بود، فرض شود که [۱۶۶]:

$$Q_{m+1}^T\beta e_1=\begin{bmatrix} t_m \\ \rho_{m+1} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۷}$$

پس حل رابطه‌ی (۳-۳۳)، $y_m=R_m^{-1}t_m$ است و می‌توان نوشت [۱۶۶]:

$$x_m=V_m(R_m^{-1}t_m) \tag{۳-۳۸}$$

به‌علاوه، از رابطه‌ی (۳-۳۶) دریافت می‌شود که:

$$\|r_m\|=\left\|Q_{m+1}^T\beta e_1-R_{m+1,m}y_m\right\|=|\rho_{m+1}| \tag{۳-۳۹}$$

و این نشان می‌دهد که چگونه نُرم باقیمانده در پیاده‌سازی‌های عملی بررسی می‌شود. قبلاً به‌طور خلاصه اشاره شد که در حساب کامل، امکان ندارد که تساوی $\|b - Ax_m\| = |\rho_{m+1}|$ برقرار باشد.

توالی نُرم‌های باقیمانده $\|r_m\|$ تولیدشده توسط GMRES افزایشی نیست، مشابه با همه‌ی روش‌هایی که در شرایط باقیمانده‌ی حداقل در زیرفضاهای تودرتو صدق می‌کنند. نقطه‌ضعف اصلی GMRES آن است که همراه با تکرارها، گسترش می‌یابد. یعنی، همان‌طور که m افزایش می‌یابد، ملزومات ذخیره‌سازی اطلاعات نیز افزایش می‌یابد. $m \times n$ محل ذخیره‌سازی برای ذخیره‌ی ماتریس V_m موردنیاز است. چند روش برای برطرف نمودن این نقطه‌ضعف، مثل روش‌های راه‌اندازی مجدد[1] و کوتاه کردن[2] وجود دارد. روش QGMRES[3] الگوریتمی مشابه با GMRES دارد با این تفاوت که به‌محض رسیدن به شرایط نسبی همگرایی، فرآیند تکرارها متوقف می‌شود.

روش‌های گرادیان مزدوج[4](CG) و باقیمانده‌ی مزدوج[5](CR) کاربردهای عمومی از پایه‌ی لنکزوس متقارن و روش GCR تلفیقی از دو روش مذکور است. روش قدیمی‌تری که تقریب‌های x_m تعریف‌شده با رابطه‌ی (۳-۲۹) را تولید می‌کند، روش GCR پیشنهاد شده توسط آیزن استیت[6]، المن[7] و شولتز است [۱۶۷]. تفاوت این روش با GMRES در پیاده‌سازی آن است. GCR از پایه‌ای از κ_m استفاده می‌کند که متعامد نیست. در عوض، پایه‌های استفاده شده‌ی $p_1, p_2, \ldots, p_m$ طوری هستند که $p_i^T A^T A p_j = 0, i \neq j$ ، و این بردارها با استفاده از روش آرنولدی بر روی زیرفضای $A\kappa_m$ می‌توانند به‌دست آیند. چون هر دو بردار p_i و Ap_i باید ذخیره شوند، لذا GCR نسبت به GMRES جذابیت کمتری دارد و در عبارات بازگشتی کامل به‌ندرت مورداستفاده قرار می‌گیرد.

---

[1] Restarting
[2] Truncating
[3] Quasi-GMRES
[4] Conjugate gradient method
[5] Conjugate residual method
[6] Eisenstat
[7] Elman

روش CG توسط هستینز[1] و استیفل[2] پیشنهادشده است [۱۶۸]. این روش برای دستگاه‌های خطی مثبت معین متقارن مناسب است. برای توصیف مختصری از این روش، بحث با در نظر گرفتن روش لنکزوس (متقارن) آغاز می‌شود و بنابراین پایه‌ای به‌صورت $v_1,\ldots,v_m$ از زیرفضای κ_m در نظر گرفته می‌شود. اگر تقریب روش CG به‌صورت $x_m = V_m y_m$ برای تعدادی $y_m \in \mathbb{R}^n$ فرض شود، شرط گالرکین (رابطه‌ی (۳-۱۷)) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود [۱۶۹]:

$$0 = V_m^T(b - Ax_m) = V_m^T b - V_m^T A V_m y_m = \beta e_1 - T_m y_m \tag{۳-۴۰}$$

که در آن T_m سه‌قطری متقارن است. این موضوع تصریح می‌کند که y_m پاسخ معادله‌ی زیر است [۱۶۹]:

$$T_m y_m = \beta e_1 \tag{۳-۴۱}$$

چون A مثبت معین است، بنابراین، $T_m = V_m^T A V_m$ و درنتیجه دستگاه خطی رابطه‌ی (۳-۴۰) همیشه قابل‌حل خواهد بود و فاکتورگیری چولسکی[3] ($T_m = L_m D_m L_m^T$) همیشه وجود خواهد داشت. نتیجه‌ای که حاصل می‌شود آن است که ماتریس قطری D_m و ماتریس دوقطری واحد L_m به ترتیب زیر-ماتریس‌های اصلی ماتریس D_{m+1} و L_{m+1} (از مرحله‌ی بعدی) هستند. ستون‌های $P_m = p_1,\ldots,p_m$ به‌عنوان «جهت‌های جستجو» نام‌گذاری می‌شوند که در آن $P_m = V_m L_m^{-T}$ است. پس خواهیم داشت $p_1 = v_1$ و همچنین:

$$p_m = v_m + \lambda_m p_{m-1}, \quad m > 1 \tag{۳-۴۲}$$

برای تعیین ثابت λ_m روش‌های خاصی در دسترس است. با این جهت‌های جستجو می‌توان تقریب CG را مستقیماً از تقریب قبلی به‌دست آورد، یعنی [۱۷۰]:

[1] Hestenes
[2] Stiefel
[3] Cholesky

$$x_m = x_{m-1} + \alpha_m p_m \qquad (۴۳-۳)$$

که در آن α_m یک عدد ثابت است. بنابراین عبارت فوق نشان می‌دهد که چطور تقریب CG (x_m) در پیاده‌سازی‌های واقعی به‌روزآوری می‌شود. در چنین پیاده‌سازی‌هایی می‌توان بردارهای لنکزوس و جهت‌های جستجو را با استفاده از عبارات بازگشتی دوبخشی جفت‌شده به دست آورد [۱۷۱].

در مورد ماتریس مثبت معین متقارن، شرط گالرکین (رابطه‌ی (۳-۱۷)) با شرط حداقل‌سازی $\min_{x \in \kappa_m} \psi(x)$ که در آن $\psi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$ و همچنین حداقل نُرم خطای A به‌صورت زیر، معادل است [۱۷۲]:

$$\min_{x \in \kappa_m} \|x - x_*\|_A \qquad (۴۴-۳)$$

که در آن، نُرم A با ضرب داخلی A برابر است ($\langle x, y \rangle = x^T A y$). این نُرم اغلب به نُرم انرژی موسوم است. می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای جهت جستجو، مزدوج هستند. یعنی، بر اساس ضرب داخلی A که در عبارت $p_i^T A p_i = 0, \quad i \neq j$ صدق می‌کند، متعامد هستند. عدد ثابت α در رابطه‌ی (۳-۴۳) می‌تواند به‌صورت حل مساله‌ی حداقل‌سازی $\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \psi(x_{m-1} + \alpha p_m)$ تفسیر شود و در حقیقت [۷۸]:

$$x_m = x_{m-1} + \alpha_m p_m = average \min_{x \in \kappa_m} \psi(x) \qquad (۴۵-۳)$$

یعنی، حداقل‌سازی تک‌بعدی در جهت p_m با حداقل‌سازی کلی بر روی زیرفضای $\kappa_m = span \ p_1, ..., p_m$ یکسان است.

روش CG می‌تواند برای حل معادله‌ی (۳-۱۵) در حالتی که A نامتقارن یا مستطیلی است نیز استفاده شود. درنتیجه، با ضرب کردن دستگاه اولیه در A^T دستگاهی از معادلات نرمال $A^T A x = A^T b$ به‌دست می‌آید که ضریب ماتریس آن متقارن و مثبت معین است. اگر A از مرتبه‌ی ستونی کامل باشد،

یک پیاده‌سازی خوب از روش CG برای معادلات نرمالی که LSQR[1] نام دارد، توسط پیج[2]و ساندرز [3]پیشنهادشده است [۱۷۳].

۳-۸-۲-۳. روش‌های تکراری MINRES و SYMMLQ

پیج و ساندرز دو روش برای دستگاه‌های خطی متقارن اما نامعین پیشنهاد دادند [۱۷۰]. در روش حداقل باقیمانده[4](MINRES) شرط حداقل باقیمانده (رابطه‌ی (۳-۲۲)) تحمیل می‌شود و روش لنکزوس برای تولید پایه‌های متعامد K_m مورداستفاده قرار می‌گیرد و همان‌طور که در ادامه بیان خواهد شد، تنها دو بردار پایه برای محاسبه‌ی x_m در آن موردنیاز است. پیاده‌سازی روش MINRES به فاکتورگیری QR ماتریس سه قطری (مستطیلی) $T_{m+1,m} = Q_{m+1}R_m$ مربوط است.

فرض شود که $P_m = V_m R_m^{-1} = \ p_1, ..., p_m$ باشد. ستون‌های P_m درآن‌واحد می‌تواند محاسبه شود، چون $P_m R_m = V_m$ به مجموعه‌ای از عبارات بازگشتی سه‌بخشی برای ستون‌های P_m تبدیل می‌شود و R_m تنها سه قطر غیر صفر دارد. درنتیجه، تقریب حداقل باقیمانده (رابطه‌ی (۳-۳۸)) به‌صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$x_m = P_m t_m = x_{m-1} + \tau_m p_m \qquad (۳-۴۶)$$

که‌درآن $t_m^T = (\tau_1, ..., \tau_m)$، یعنی تنها مؤلفه‌ی آخر t_m از مرحله‌ی قبل تغییر می‌کند. در این‌جا P_m، m امین بردار جهت است (رابطه‌ی (۳-۳۷ تا ۳-۴۲)) [۱۷۰].

---

[1] Sparse Equations and Least Squares

[2] Paige

[3] Saunders

[4] Minimal residual method

روش دوم شرط گالرکین (رابطه‌ی (۳-۱۹)) را به همان صورتی که در روش CG و دستگاه خطی (۳-۴۰) به کار رفته است، در نظر می‌گیرد. در این روش، ماتریس سه قطری T_m ممکن است منفرد یا شبه منفرد باشد. به‌عبارت‌دیگر، نشان دادن این‌که T_m منفرد است و T_{m+1} منفرد نیست، ساده است، مگر آن‌که $t_{m+1,m}=0$ باشد که در این مورد $r_m=0$ است (معادلات (۳-۲۸) و (۳-۳۲)).

پیج و ساندرز استفاده از روش فاکتورگیری LQ برای ماتریس T_m را پیشنهاد نمودند که تقریب روش CG (اگر موجود باشد) و توالی از تقریب‌ها را تولید می‌کند. این روش به LQ متقارن یا SYMMLQ موسوم است [۱۷۰].

این محققان از این موضوع اطلاع نداشتند که توالی دوم از تقریب‌ها، در حقیقت نُرم دوم خطا را بر روی زیرفضای $\kappa_m(A, Ar_0)$ حداقل می‌کند. فریدمن[1] الگوریتم حداقل‌سازی خطا را پیشنهاد کرده است [۱۷۴]. فلچر[2] به‌طور مستقل روش فریدمن را کشف نمود و نشان داد که روش SYMMLQ تکرارهای مشابهی را تولید می‌کند [۱۷۵]. استور و فروند[3] نشان دادند که روش SYMMLQ می‌تواند پیاده‌سازی پایداری‌تری از روش فریدمن را عملی کند [۱۷۶].

۳-۸-۲-۴. روش‌های تکراری BiCG، لنکزوس، FOM و QMR

با استفاده از روش متعامدسازی آرنولدی برای ماتریس نامتقارن A، اگر شرط گالرکین اعمال شود، یعنی $V_m^T(b-Ax_m)=0$، می‌توان روش کامل (FOM) را توسعه داد. همانند روش CG، با استفاده از عبارت $x_m=V_my_m$ و رابطه‌های (۳-۲۶) و (۳-۳۱)، این شرط به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود [۱۷۷]:

$$0=V_m^Tb-V_m^TAV_my_m=\beta e_1-H_my_m \qquad (۳-۴۷)$$

---
[1] Fridman
[2] Fletcher
[3] Stoer & Freund

بنابراین، پاسخ مساله از طریق روش FOM با حل دستگاه خطی $m \times m$ در هر مرحله به‌دست می‌آید.

ویژگی خوب روش FOM آن است که باقیمانده و نُرم آن به‌راحتی قابل‌محاسبه است. درنتیجه با استفاده از رابطه‌ی آرنولدی (رابطه‌ی (۳-۲۴)) می‌توان نوشت:

$$r_m = b - AV_m y_m = \beta v_1 - V_m H_m y_m - h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T y_m \tag{۳-۴۸}$$

و چون $v_m e_1 = v_1$ ، با استفاده از رابطه‌ی (۳-۴۶) می‌توان در نظر گرفت:

$$r_m = -h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T y_m \tag{۳-۴۹}$$

و بنابراین:

$$\|r_m\| = -h_{m+1,m} \left|e_m^T y_m\right| \tag{۳-۵۰}$$

به‌جای روش آرنولدی، می‌توان از روش لنکزوس دوطرفه و تحمیل شرط پترف – گالرکین (رابطه‌ی (۳-۱۸)) با $L_m = \kappa_m(A^T, r_0)$ استفاده نمود، یعنی، $\hat{W}_m^T(b - Ax_m) = 0$ ،که بنابراین روش موسوم به لنکزوس توسعه می‌یابد [۱۶۱].

با در نظر گرفتن $\hat{W}_m^T(b - Ax_m) = 0$ با استفاده از رابطه‌ی (۳-۲۸) و مقیاس‌بندی $\hat{W}_m$ طوری که $y_m = \hat{W}_m^T W_m = I$ ، y_m با حل معادله‌ی (۳-۴۰) و با در نظر گرفتن ماتریس T به‌صورت نامتقارن و سه‌قطری حاصل می‌شود. چندجمله‌ای به‌صورت $r_m = p_m(A) r_0$ چندجمله‌ای (باقیمانده) لنکزوس نامیده می‌شود [۱۵۷].

فلچر استفاده از روش فاکتورگیری LU از ماتریس سه‌قطری غیرمتقارن T_m را پیشنهاد نمود. این روش به روش گرادیان دو مزدوجی[۱] (BiCG) موسوم است. باوجوداین‌که BiCG روش پیاده‌سازی

[۱] Bi-Conjugate gradient method

مجزایی نسبت به لنکزوس دارد، در حساب کامل، تقریب x_m از این روش با تقریب x_m از روش لنکزوس یکسان است و بنابراین $r_m = p_m(A)r_0$ خواهد بود که در آن p_m چندجمله‌ای لنکزوس است. مسایل نامتقارن روش لنکزوس در BiCG نیز مطرح می‌شوند. به‌علاوه، روش BiCG ممکن است درصورتی‌که شرایط استفاده از روش فاکتورگیری LU بدون دوران وجود داشته باشد، با شکست مواجه شود که به شکست دورانی موسوم است [۱۷۵].

روش شبه-حداقل باقیمانده[1] QMR با حل مساله‌ی حداقل مربعات به‌جای حل ضمنی دستگاه معادله‌ی خطی $m \times m$ همراه با T_m بر مشکل فوق غلبه می‌کند. روش لنکزوس (و بنابراین BiCG) هنگامی‌که $A = A^T$ و A مثبت معین باشد به روش CG تبدیل می‌شود. در این مورد، روش امکان استفاده از فاکتورگیری چولسکی از ماتریس T_m همیشه وجود دارد. شکست روش به دلیل منفرد یا شبه‌منفرد بودن ماتریس سه‌قطری T_m می‌تواند با نادیده گرفتن مرحله‌ی تکینگی[2]برطرف شود و با نام مرحله‌ی مرکب ادامه یابد. راه‌حل آن در صورت لزوم استفاده از یک ماتریس دوران 2×2 و به‌دست آوردن یک روش فاکتورگیری LDU از ماتریس T_m است که در آن D هم بلوک‌های 1×1 و هم بلوک‌های 2×2 دارد. شایان ذکر است که شکست روش BiCG به دلیل شکست لنکزوس یا شکست محوری در روش لنکزوس، احتمالاً می‌تواند با استفاده از روش لنکزوس مستقیم حل شود [۱۷۸]. همچنین، روش‌های اصلاح‌شده از روش لنکزوس که حساسیت شکست را کمتر می‌کنند نیز وجود دارند که توسط ژوبرت[3]پیشنهادشده‌اند [۱۷۹].

هاچبروک و لوبیچ[4]کران بالا را بین نُرم باقیمانده‌ی BiCG که دراین‌جا با r_m^B نشان داده‌شده است و نُرم باقیمانده‌ی GMRES در مرحله‌ی قبل (r_{m-1}^G) ارایه کرده‌اند [۱۸۰]:

---

[1] Quasi- minimal residual method

[2] Singularization

[3] Joubert

[4] Houchbruck & Lubich

$$\left\|r_m^B\right\| \leq \sqrt{m}\left\|g_m\right\|\left\|r_{m-1}^G\right\| \qquad (۵۱-۳)$$

که در آن، g_m پاسخ معادله‌ی $T_m^T g_m = t_{m+1,m} e_m$ است [۱۸۱]. این‌چنین دریافت می‌شود که $\sqrt{m}\left\|g_m\right\|$ نسبت باقیمانده‌ها را به‌صورت کیفی به‌خوبی نشان می‌دهد [۱۸۰].

دلایل مختلفی وجود دارد که چرا روش‌های لنکزوس و BiCG امروزه کاربرد زیادی ندارند. علاوه بر احتمال شکست لنکزوس دوطرفه و نیاز به‌دسترسی به هر دو عملگر A و A^T، لنکزوس چندان پایدار نیست و نُرم‌های باقیمانده ممکن است نوسان زیادی داشته باشند که گاهی به همگرایی نامنظم تعبیر می‌شود. در حقیقت، برخلاف روش‌های حداقل باقیمانده، در روش‌های توصیف شده در این قسمت، نُرم‌های باقیمانده الزاماً غیر افزایشی نیستند. این موضوع تاجایی‌که روند کاهشی وجود داشته باشد، مشکل‌ساز نیست، اما محققان زیادی به مشاهده‌ی روند کاهشی ملایم تأکید دارند و این امر به چگونگی دسترسی به روش‌های ملایم‌سازی روند، سوق می‌یابد.

روش‌های GpBiCG[1]و Ml(k)BiCGStab[2] الگوریتم‌هایی مشابه با روش BiCG دارند با این تفاوت که زیر الگوریتم‌های تسریع‌کننده‌ی و پایدارسازی همگرایی به الگوریتم اصلی اضافه‌شده‌اند و در مسایلی با شرایط خاص می‌توانند سرعت رسیدن به پاسخ مدل را افزایش دهند [۱۸۲, ۱۸۳]. همچنین، روش TFQMR[3]بر پایه‌ی روش QMR توسعه‌یافته است که دارای زیر الگوریتم تسریع‌کننده‌ی همگرایی در شرایط خاص است [۱۸۴].

۳-۸-۳. روش‌های پیش‌شرط‌گذاری

پیش‌شرط‌گذاری، به معنای انتقال مساله از فرم رابطه‌ی (۳-۱۵) به فرم زیر است [۱۵۱]:

[1] Generalized product BiCG
[2] Multiple-Lanczos BiCG stabilized
[3] The transpose-free QMR

$$M_1^{-1}AM_2^{-1}\hat{x} = M_1^{-1}b, \quad \hat{x}=M_2x \qquad (۵۲-۳)$$

که در آن M_1 و M_2 ماتریس‌های غیر منفردی با ویژگی‌های اصلی زیر هستند:

الف) معکوس آن‌ها باید به‌سادگی قابل‌محاسبه باشد.

ب) استفاده از آن‌ها نباید مستلزم تجهیزات حافظه‌ی ذخیره‌سازی زیادی باشد.

پ) مساله‌ی تبدیل یافته باید نسبت به مساله‌ی اصلی سریع‌تر همگرا شود (زمان محاسباتی کمتری نیاز داشته باشد).

تضاد واضحی بین این سه ویژگی خصوصاً برای ایجاد پیش‌شرط‌گذارهای با کاربردهای عمومی‌تر وجود دارد. فرمول‌بندی کلی فوق پیش‌شرط‌گذاری چپ ($M_2 = I$)، پیش‌شرط‌گذاری راست ($M_1 = I$) و پیش‌شرط‌گذاری چپ- راست را مجاز می‌کند. چون تنها ضرب ماتریس در بردار همراه با ماتریس ضرایب (پیش‌شرط‌گذاری شده) از نوع $v = M_1^{-1}AM_2^{-1}$، در زیرفضای کریلف لازم هستند، ماتریس‌های M_1^{-1} و/یا M_2^{-1} باید به‌طور صریح معلوم و یا محاسبه‌شده باشند [۱۵۱].

آن‌چه ضروری به نظر می‌رسد، زیربرنامه‌ای است که مثلاً $M_1^{-1}w$ را برای بردار w محاسبه کند. در برخی از روش‌های پیش‌شرط‌گذاری، به‌طور کاربردی این ویژگی اجازه می‌دهد که به‌طور مثال ویژگی‌های (الف) و (ب) قابل‌دسترس باشند. در مورد ماتریس‌های معین مثبت و متقارن، M_1 و M_2 می‌توانند طوری انتخاب شوند که $\kappa(M_1^{-1}AM_2^{-1}) \leq \kappa(A)$ باشد. که در آن κ نسبت بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس به کوچک‌ترین آن است. با تعمیم این مفهوم، یک پیش‌شرط‌گذار مناسب آن‌چنان است که در برخی حالت‌های $M_1^{-1}AM_2^{-1}$ نزدیک به ماتریس واحد باشد. برای مثال، با مقادیر ویژه‌ای که حول مقدار ۱ پراکنده شده‌اند، ساده‌ترین و کم‌هزینه‌ترین پیش‌شرط‌گذار می‌تواند به‌عنوان نمونه $M_1 = diag(A)$ و $M_2 = I$ باشد، یعنی، مقیاسی که در آن $M_1^{-1}A$ مؤلفه‌های واحدی داشته باشد. این انتخاب می‌تواند هنگامی‌که A کاملاً غالب قطری است، مؤثر باشد [۱۵۲].

توسعه‌ی روابط این بخش، به تکمیل روش‌های تکراری محاسبه‌ی پاسخ را سوق یافته است. پیش از پیاده‌سازی مدل برای انجام محاسبات و تحلیل‌ها، نیاز است که مدل های ساختاری شکستگی برای در نظر گرفتن اثر تنش بر جریان (فرآیند هیدرومکانیکی) سیال تشریح شوند.

۳-۹. مدل‌های ساختاری شکستگی

یکی از پرکاربردترین مدل‌های ساختاری برای شبیه‌سازی بسته‌شدگی[1] غیرخطی دیواره‌های شکستگی‌ها تحت تنش مؤثر عمودی به‌وسیله‌ی معادله‌ی هذلولوی[2] تجربی باندیس (رابطه‌ی ۳-۵۳) تعیین می‌شود. همچنین، رابطه‌ی ۳-۵۴ رابطه‌ی تنش مؤثر را نشان می‌دهد [۱۸۵].

$$\delta = \frac{\sigma_{en}\delta_m}{k_{n0}\delta_m + \sigma_{en}} \quad (۳-۵۳)$$

$$\sigma_{en} = \sigma_n - p_p \quad (۳-۵۴)$$

که در آن، δ بسته‌شدگی شکستگی [mm] ، σ_{en} تنش مؤثر [MPa]، σ_n مؤلفه‌ی تنش برجای عمود بر سطح شکستگی [MPa]، p_p فشار منفذی سیال [MPa]، k_{n0} سختی عمودی شکستگی [MPa/mm] و δ_m حداکثر بسته‌شدگی مجاز [mm] است. مقادیر k_{n0} و δ_m به‌وسیله‌ی روابط ۳-۵۵ و ۳-۵۶ تعیین می‌شود [۱۸۵].

$$k_{n0} = -7.15 + 1.75JRC + 0.02 \times \frac{JCS}{a_f} \quad (۳-۵۵)$$

$$\delta_m = -0.1032 - 0.0074JRC + 1.1350 \times (\frac{JCS}{a_f})^{-0.2510} \quad (۳-۵۶)$$

که در آن، JRC ضریب زبری شکستگی و JCS استحکام فشاری شکستگی [MPa] است. باید توجه شود که مقادیر JRC و JCS وابسته به مقیاس هستند و باید متناسب با مقیاس موردنظر اصلاح شوند.

---
[1] Closure
[2] Hyperbolic

a_f بازشدگی اولیه‌ی شکستگی $[mm]$ است. مقدار بازشدگی شکستگی (a)، از رابطه‌ی $a = a_f - \delta$ تعیین می‌شود.

یکی دیگر از مدل‌های ساختاری تجربی برای بررسی اثر تنش بر بازشدگی شکستگی‌ها، مدل ساختاری ارایه شده توسط رغوان و چین[1] [۱۸۶] مطابق رابطه‌ی ۳-۵۷ است.

$$a = a_f e^{-0.5(\varrho \sigma_{en})} \tag{۳-۵۷}$$

که در آن، ϱ یک ضریب ثابت تجربی است به‌طوری‌که: $6.895 \times 10^{-7} \leq \varrho \leq 6.895 \times 10^{-6}$.

مدل ساختاری تجربی دیگری که به‌طور ویژه برای کاربرد در DFN توسعه‌یافته، توسط اومن[2] و همکارانش [۱۸۷] مطابق رابطه‌ی ۳-۵۸ پیشنهادشده است.

$$a = \frac{a_f}{(1 + \sigma_{en})^{\frac{2}{3}}} \tag{۳-۵۸}$$

در این مدل، نفوذپذیری که بر اساس بازشدگی محاسبه‌شده از رابطه‌ی ۳-۵۸ تعین می‌شود ($\grave{k}_f$)، باید بر اساس رابطه‌ی ۳-۵۹ تصحیح شود [۱۸۷].

$$k_f = 10^{Log(\grave{k}_f) + Log(t)} \tag{۳-۵۹}$$

که در آن، t متغیری از تابع توزیع نرمال است و تغییرپذیری نفوذپذیری در هر شکستگی را نشان می‌دهد.

در این تحقیق، برای مدل‌سازی میدان تنش‌های برجا از رابطه‌ی ۳-۶۰ و ۳-۶۱ استفاده شده است [۱۸۸].

$$\sigma_V = \rho_r g D \tag{۳-۶۰}$$

$$\sigma_H = \kappa \sigma_v \tag{۳-۶۱}$$

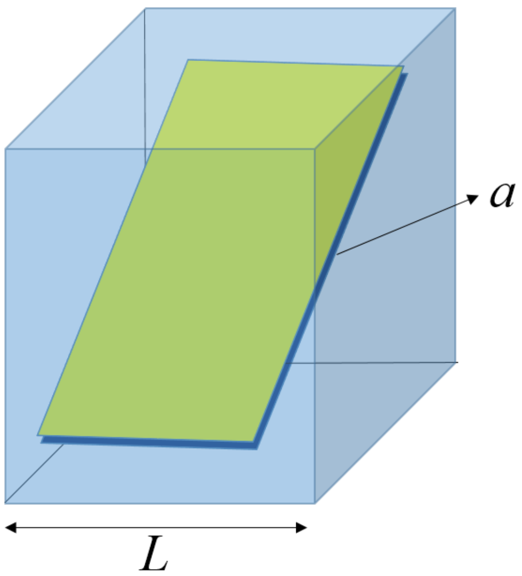
---

[1] Chin & Raghavan

[2] Öhman

که در آن، σ_V و σ_H به ترتیب تنش‌های برجای قائم و افقی [MPa]، ρ_r چگالی سنگ درون‌گیر [Kg/m^3]، D عمق قرارگیری مرکز شکستگی از سطح زمین [m] و κ نسبت تنش افقی به قائم است. با استفاده از یک تانسور انتقال، مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش انتقال یافته به‌عنوان تنش عمودی برجا (σ_n) بر روی سطح شکستگی در نظر گرفته می‌شود.

باید توجه شود که در مدل‌های ساختاری شکستگی، بازشدگی یک پارامتر مجازی است، به‌این معنا که فرض می‌شود که اثر تغییرات تنش بر بازشدگی و جابه‌جایی دیواره‌های شکستگی در اثر اتساع در مقایسه با ابعاد مدل بسیار کوچک و قابل اغماض است. بنابراین، باتوجه به شکل ۳-۱۵، $a << L$ خواهد بود و مدل همواره در یک حالت پایدار شبیه استاتیکی باقی می‌ماند.



شکل ۳-۱۵ شکل شماتیک از یک شکستگی و بازشدگی آن در برابر ابعاد مدل

۳-۱۰. فرمولاسیون محاسبه‌ی جریان تابع تنش

جریان در هر شکستگی از شبکه، توسط یک بازشدگی اولیه‌ی a_f تعیین‌شده و فرض می‌شود که این بازشدگی بسیار کوچک‌تر از طول شکستگی است. در این مطالعه از یک تابع توزیع یکنواخت برای تعیین a_f استفاده می‌شود. بر اساس قانون پویزویل[1] نفوذپذیری یک شکستگی با عرض واحد k_f مطابق رابطه‌ی ۳-۶۲ است [۱۸۹].

$$k_f = \frac{a^3}{12} \tag{۳-۶۲}$$

که در آن، a بر اساس روابط ساختاری توصیف‌شده در بخش ۳-۱۵ تعیین می‌شود. معادلات کلاسیک که جریان در محیط سنگی شکسته را کنترل می‌کنند، معادلات دارسی[2] و بقای جرم (روابط ۳-۶۳ و ۳-۶۴) هستند [۵۵].

$$\begin{cases} v_f = -\dfrac{1}{\mu} K_f \cdot \nabla p \\ \quad vq_f = 0 \end{cases} \tag{۳-۶۳}$$

$$\nabla p = \rho_f \cdot g \cdot \nabla h \tag{۳-۶۴}$$

که در آن، v_f نرخ تخلیه‌ی متوسط شکستگی $[m/s]$، K_f تانسور نفوذپذیری شکستگی $[m^2]$ ، ∇p گرادیان فشار $[Pa]$، ∇h گرادیان هد هیدرولیکی $[m]$، ρ_f چگالی سیال $[Kg/m^3]$، μ ویسکوزیته‌ی سیال $[Pa.s]$، g شتاب ثقل $[m/s^2]$ و h هد هیدرولیکی $[m]$ است.

[1] Poiseuille

[2] Darcy

هر نوع شرایط مرزی استانداردی می‌تواند به این سیستم معادلات اعمال شود. این شرایط مرزی هم می‌تواند از نوع دریکله[1]و هم از نوع نویمان[2]باشد. فرض می‌شود که Γ_D و Γ_N به ترتیب، قسمتی از مرز مدل سه‌بعدی با شرایط مرزی دریکله و نویمان باشد. شرایط مرزی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [۵۵]:

$$\begin{cases} h = h_D & on\ \Gamma_D \\ q = q_N & on\ \Gamma_N \end{cases} \tag{۶۵-۳}$$

که در آن، h_D و q_N شرایط مرزی هد هیدرولیکی و نرخ جریان حجمی هستند.

همان‌طور که در بخش ۳-۸ موردبحث قرار گرفت، برای هر شکستگی شبکه با توجه به تعداد درجات آزادی شکستگی (N_{dof}) و تعداد رووس مثلث‌بندی هر شکستگی (N_v)، ماتریس نفوذپذیری $K_f \in \mathbb{R}^{N_{dof}\times N_v} \times \mathbb{R}^{N_{dof}\times N_v}$ برهم‌نهی می‌شود. سپس بردارهای ستونی $q_f \in \mathbb{R}^{N_{dof}\times N}$ و $h_f \in \mathbb{R}^{N_{dof}\times N}$ به ترتیب تحت عنوان بردار جریان و بردار مقادیر نقطه‌ای هد هیدرولیکی تشکیل می‌شوند. با استفاده از ماتریس‌های انتقال برای یک مدل DFN از روابط ۳-۶۶ می‌توان نوشت [۵۵]:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1\acute{N}} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{\acute{N}1} & \cdots & \cdots & K_{\acute{N}\acute{N}} \end{bmatrix}. \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{\acute{N}} \end{pmatrix}. \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{\acute{N}} \end{pmatrix} \tag{۶۶-۳}$$

$$K = \iiint_V [B]^T [k_f][B] dv \tag{۶۷-۳}$$

که در آن، $[B]$ گرادیان ماتریس توابع شکل، $\acute{N} = N_{v_t} \times N_{dof_t}$ و N_{v_t} و N_{dof_t} به ترتیب تعداد کل رووس و تعداد کل درجات آزادی مدل سه‌بعدی است. مقدار هد هیدرولیکی باید در هر رأس از المان‌های مش‌بندی تعیین شود. تعداد کل معادلات دستگاه برابر با تعداد کل رووس مدل خواهد بود که با شرط تعادل جریان به‌دست می‌آید [۱۹۰]. همان‌طور که پیش‌تر تشریح شد، در این تحقیق این دستگاه معادلات با استفاده از شمای FEM تولید می‌شود [۵۵].

---
[1] Dirichlet
[2] Neumann

۳-۱۱. جمع‌بندی

در این فصل هریک از بخش‌های اصلی تشکیل دهنده‌ی مدل تحقیق شامل روش شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی، روش مش‌بندی محیط ناپیوسته، روش المان محدود، مدل‌های ساختاری شکستگی و روش‌های تکراری زیرفضای کریلف به‌تفکیک مورد بحث قرار گرفتند. چالش‌ها و محدودیت‌های هر بخش ذکر شد، ایده‌ها و راه‌حل‌های مناسب ارایه شد و کاربرد هر یک از روش‌ها مورد بررسی قرار گرفت. روند توسعه‌ی مدل تحقیق با تولید حالت‌های تصادفی مختلف شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا آغاز می‌شود و به‌این ترتیب چارچوب هندسی مدل تولید می‌شود. شبکه شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی که به نزدیک‌ترین شکل ممکن به واقعیت، توده‌سنگ را مدل‌سازی می‌کند، آمیزه‌ای ناهمگون و نامنظم از موقعیت فضایی شکستگی‌ها را نشان می‌دهد. بنابراین، ممکن است شکستگی‌های موازی با فواصل بسیار نزدیک و شکستگی‌های متقاطع با زاویه‌ی داخلی حاده‌ی بسیار کوچک از چالش برانگیزترین موارد ممکن برای استفاده از روش‌های مش‌بندی باشد. در حقیقت، مش‌بندی مانند پلی بین محیط ناپیوسته و روش المان محدود توسعه‌یافته در محیط پیوسته، خودنمایی می‌کند. در این تحقیق یک روش مش‌بندی بهینه برای مواجه شدن با چالش‌های مذکور توسعه یافته است. حاصل استفاده از روش المان محدود در محاسبه‌ی جریان در مدل، دستگاه معادلات پیچیده‌ای است که نیازمند روش‌های هوشمندانه‌ای برای حل آن‌ها است. به همین منظور، روش‌های تکراری زیرفضای کریلف مورد بحث قرار گرفتند. بنیان اصلی محاسبات مدل تحقیق حاضر بر اساس فرمولاسیون المان محدود تلفیق شده با مدل‌های ساختاری شکستگی است. این امر نه‌تنها یک فرآیند هیدرومکانیکی را به‌آسانی شبیه‌سازی می‌کند، بلکه محاسبات را کم‌هزینه‌تر و سریع‌تر می‌نماید.

فصل چهارم؛ تدوین برنامه‌ی $\mathbf{FlowSHUT^{3D}}$

۴-۱. مقدمه

در این تحقیق، تحلیل جریان سیال تابع تنش‌های برجا در سنگ شکسته مورد بررسی قرارگرفته است و یک مدل عددی جدید توسعه یافته که در قالب یک برنامه‌ی کامپیوتری تحت عنوان $\mathrm{FlowSHUT^{3D}}$ پیاده‌سازی شده است. از مزایای اصلی این مدل عددی می‌توان به مدل‌سازی جریان نابع تنش در شبکه شکستگی‌های با طول توزیع‌شده، سرعت بالای محاسبات و هزینه‌ی محاسباتی پایین اشاره نمود که امکان مدل‌سازی مسایل بزرگ‌تر و پیچیده‌تر را با کمترین الزامات سخت‌افزاری و در کوتاه‌ترین زمان، ممکن می‌سازد. این مهم با تلفیق مدل‌های ساختاری مختلف شکستگی در فرمولاسیون روش FEM که عملاً یک فرآیند هیدرومکانیکی غیرمستقیم را شبیه‌سازی می‌کند امکان‌پذیر می‌شود. پس از تشکیل دستگاه معادلات جریان مدل تا این مرحله، نیاز به یک روش بهینه که بتواند در کوتاه‌ترین زمان همگرایی به پاسخ مدل را مقدور سازد، احساس می‌شود. بنابراین، در کنار روش مستقیم فاکتورگیری LQ، از چند روش تکراری زیرفضای کریلف بهره گرفته شده است.

همچنین، یک روش مش‌بندی بهینه توسعه داده شده است که پل ارتباطی بین استفاده از روش المان محدود (که اساساً برای محیط پیوسته طراحی شده است) و محیط گسسته‌ی DFN سه‌بعدی را فراهم می‌کند. در این بخش به شرح الگوریتم مدل عددی تحقیق و تدوین برنامه‌ی کامپیوتری $\mathrm{FlowSHUT^{3D}}$ پرداخته می‌شود. فلوچارت الگوریتم در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. الگوریتم طراحی‌شده در این تحقیق شامل مراحل زیر است:

I. شبکه‌ی شکستگی‌ها بر اساس داده‌های هندسی-آماری ورودی تولید می‌شود. به‌منظور کاهش اثر عدم قطعیت در محاسبه‌ی جریان، حالت‌های تصادفی مختلف[1] از یک DFN

[1] Realizations

یکسان تولیدشده و در انتها میدان جریان محاسبه‌شده از تمامی این حالت‌های تصادفی، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد.

II. برای هر حالت تصادفی، شکستگی‌های منفرد و بن‌بست شناسایی شده و از دامنه‌ی مدل حذف می‌شوند.

III. حالت تصادفی اصلاح‌شده در مرحله‌ی II به‌طور مجزا مش‌بندی می‌شود.

IV. میدان تنش برجای کل برای مدل محاسبه‌شده و با استفاده از تانسورهای دوران، σ_n بر روی سطح هر شکستگی محاسبه می‌شود.

V. یک حلقه‌ی تکرار در نظر گرفته می‌شود که در آن در مرحله‌ی $i = 1$ بردار هد هیدرولیکی (h^0) برای رووس مرزی مقداردهی می‌شود و برای رووس غیر مرزی صفر در نظر گرفته می‌شود. برای مراحل $i \geq 2$ این بردار برابر با بردار هد هیدرولیکی محاسبه‌شده در مرحله‌ی $i - 1$، (h^{i-1}) خواهد بود.

VI. توزیع مجدد بازشدگی با استفاده از مدل‌های ساختاری شکستگی با محاسبه‌ی مقدار تنش مؤثر عمودی ($\sigma_{en}^i = \sigma_n - (\rho_f g h^{i-1})$) برای هر المان مش‌بندی انجام شده و k_f^i متناظر با آن محاسبه می‌شود.

VII. با استفاده از شمای FEM بردار h^i به‌روزآوری شده و دستگاه معادلات $q^i = [K]h^i$ تشکیل می‌شود.

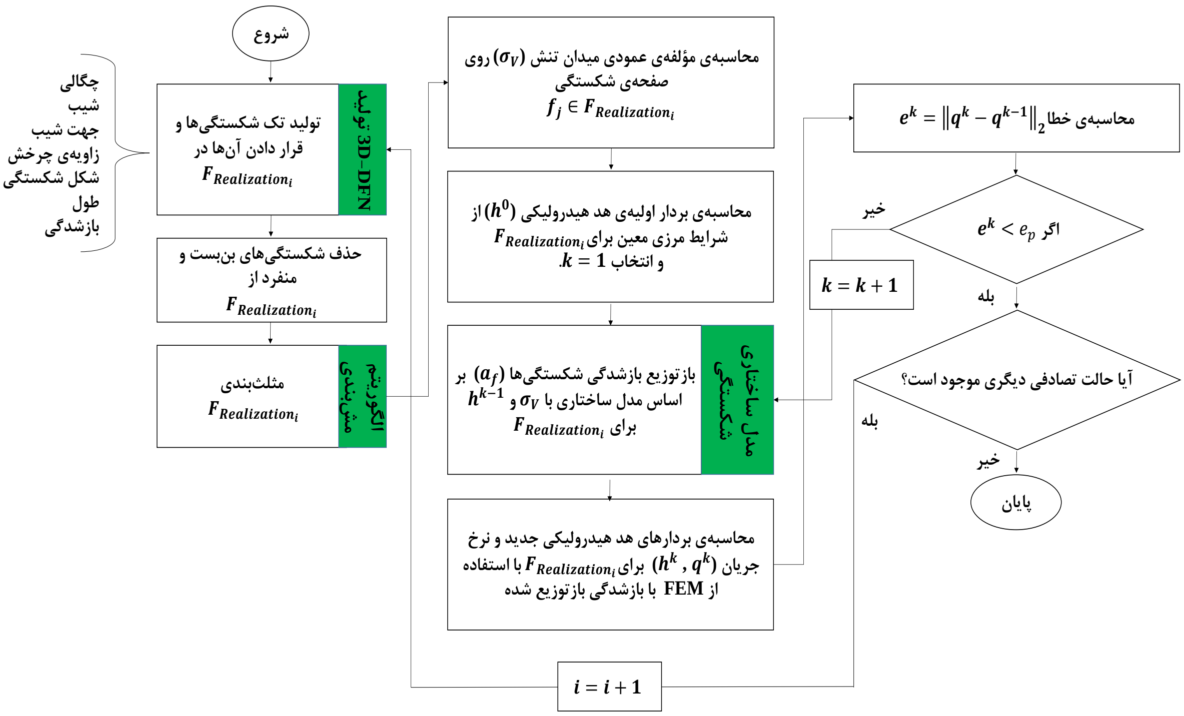
VIII. حل دستگاه معادلات $q^i = [K]h^i$ با استفاده از روش مستقیم فاکتورگیری LQ یا یکی از روش‌های تکراری زیرفضای کریلف که در فصل سوم تشریح شد صورت می‌پذیرد و بردار جریان (q^i) محاسبه می‌شود.

IX. مقدار خطای $e^i = \|q^i - q^{i-1}\|_2$ محاسبه می‌شود که در آن $\|\cdot\|_2$ نرم اقلیدسی را نشان می‌دهد. اگر مقدار $|e^i|$ از دقت تعیین‌شده در مساله (e_p) کوچک‌تر باشد، الگوریتم به مرحله‌ی X می‌رود در غیر این صورت، مراحل V تا VIII تکرار می‌شود.

X. حلقه‌ی تکرار پایان می‌یابد و q^i به‌عنوان بردار نهایی جریان تابع تنش برای حالت تصادفی موردنظر تعیین می‌شود.

XI. الگوریتم برای محاسبه‌ی حالت تصادفی بعدی به مرحله‌ی II می‌رود و اگر وجود نداشته باشد، الگوریتم پایان می‌پذیرد.

XII. نتایج به‌صورت کمی و بصری به خروجی می‌رود.



شکل ۴-۱ فلوچارت الگوریتم مورداستفاده برای تحلیل میدان جریان تابع تنش در تحقیق حاضر

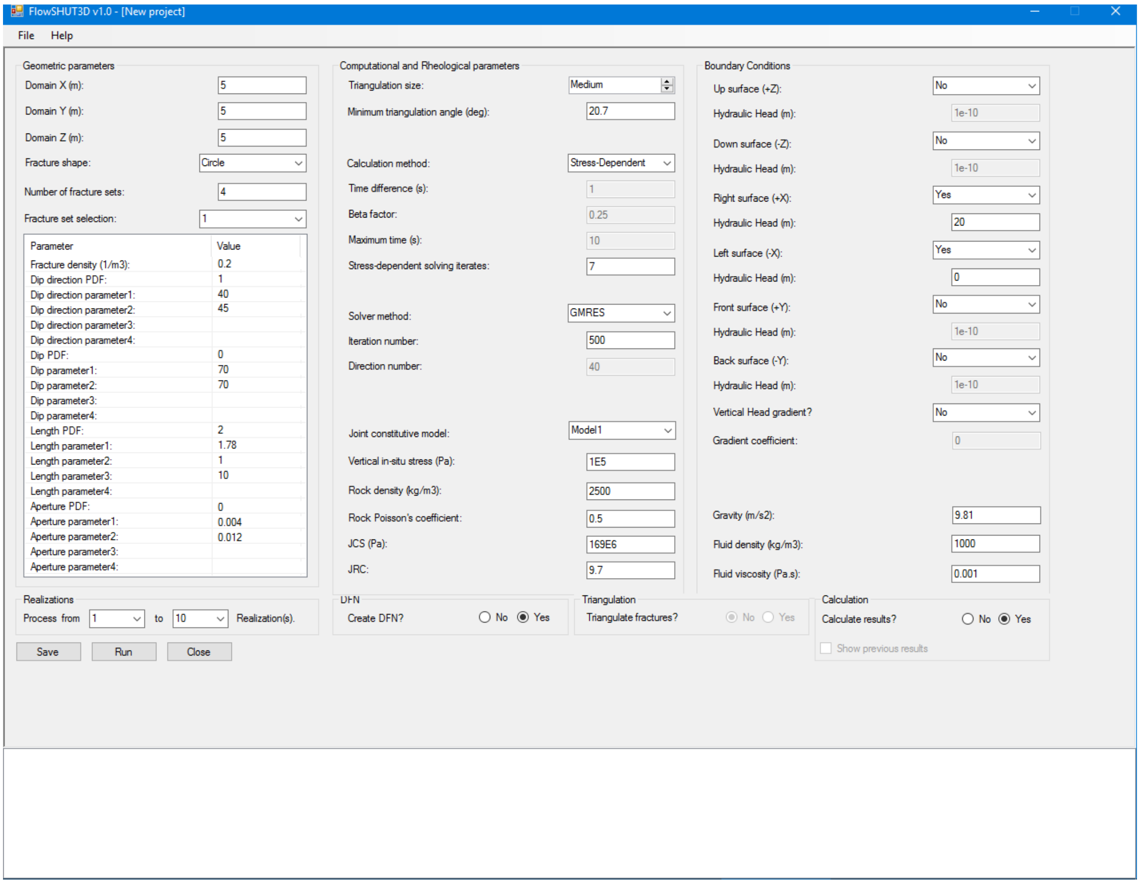
مدل عددی توصیف شده در فصل سوم در محیط #C با یک واسطه‌ی گرافیکی سه‌بعدی برای نمایش بصری نتایج در محیط Windows پیاده‌سازی شده و درنهایت برنامه‌ی $\mathrm{FlowSHUT}^{3D}$ توسعه یافته است. شایان ذکر است که $\mathrm{FlowSHUT}^{3D}$ از مرحله‌ی تولید DFN تا مرحله‌ی ارایه‌ی نتایج، کاملاً مستقل عمل می‌کند و می‌تواند به‌طور کارآمدی برای تحلیل‌های حساسیت و مدل‌سازی‌های مختلف مورد استفاده قرار گیرد.

برخی از فرض‌های ساده‌سازی در ارتباط با مدل‌سازی اثر تنش‌های برجا بر جریان سیال در این تحقیق عبارت‌اند از:

- اثر تغییرات تنش و فشار منفذی سیال (تنش مؤثر) صرفاً بر میزان بازشدگی و درنتیجه ضریب انتقال‌پذیری شکستگی‌ها، در نظر گرفته می‌شود.
- از جریان در شکستگی‌های منفرد و بن‌بست صرف نظر می‌شود.
- از اثر تغییرات تنش بر گسترش شکستگی‌های شبکه و ایجاد شکستگی‌های جدید صرف‌نظر می‌شود.
- مدل در محدوده‌ی الاستیک، متن سنگ تغییر شکل ناپذیر، صلب و ناتراوا و شکستگی‌ها به‌صورت صفحات صاف موازی فرض می‌شود.
- از اثر تنش‌های القایی ناشی از حفر فضاهای زیرزمینی و اثر پدیده‌ی رهایی تنش در محیط سنگی چشم‌پوشی می‌شود.
- جریان سیال در شکستگی‌ها در حالت پایدار و تک فازی (یعنی شکستگی‌ها در هرلحظه یا کاملاً اشباع از سیال و یا کاملاً خشک هستند) در نظر گرفته می‌شود.

۲-۴. معرفی برنامه‌ی $FlowSHUT^{3D}$

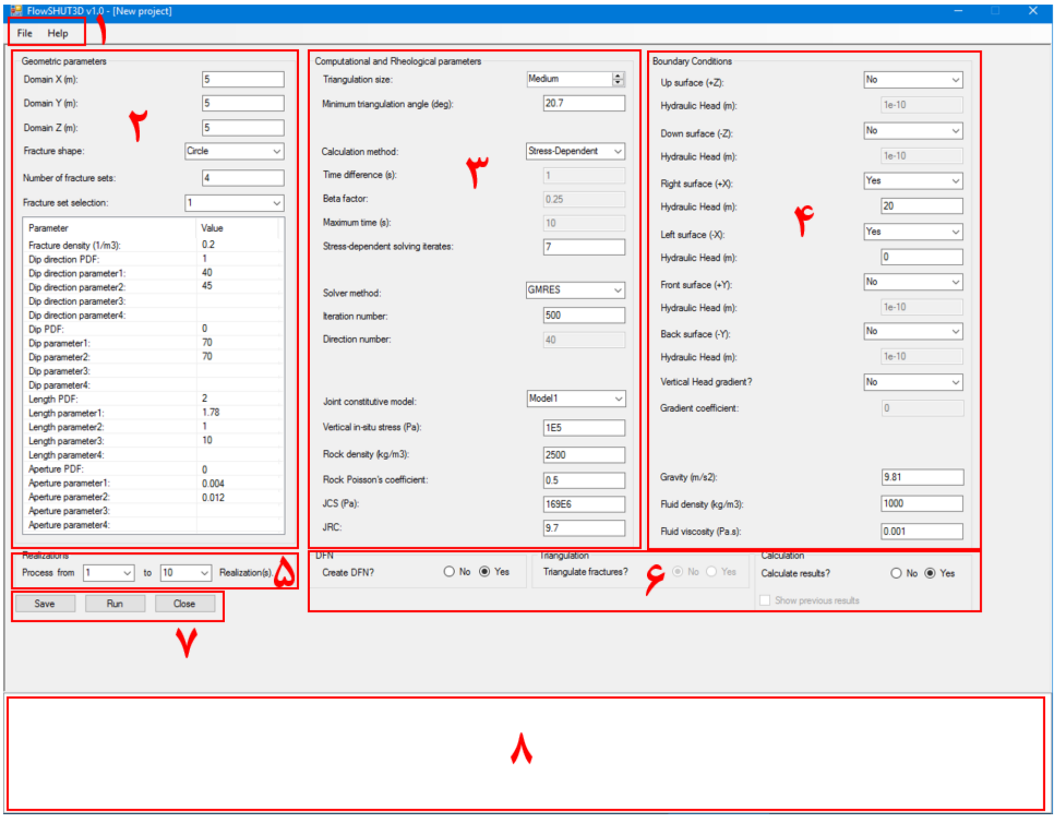
با اجرای برنامه‌ی $FlowSHUT^{3D}$ پنجره‌ی اصلی برنامه به‌صورت شکل ۴-۲ نمایان می‌شود. همان‌طور که در شکل ۴-۳ نشان داده شده، این پنجره از ۸ ناحیه‌ی اصلی تشکیل شده است. ناحیه‌ی ۱ منوهای اصلی برنامه را نشان می‌دهد که شامل گزینه‌های File و Help است. گزینه‌ی File برای فراخوانی یک پروژه‌ی جدید و گزینه‌ی Help دستورالعمل‌های استفاده از برنامه را در خود جای داده است.



شکل ۴-۲ پنجره‌ی اصلی برنامه $FlowSHUT^{3D}$

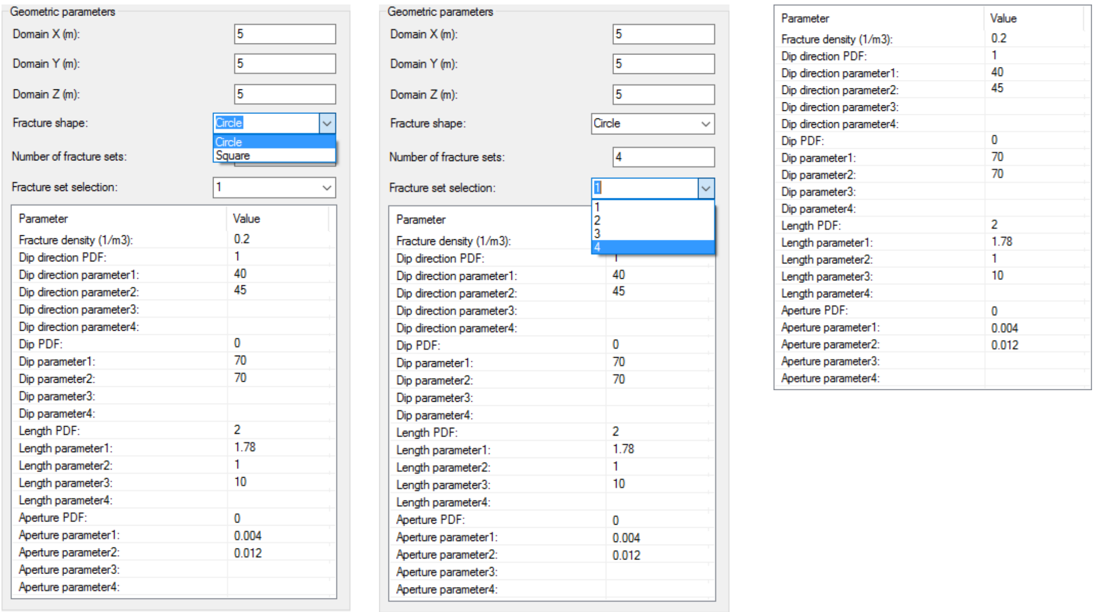
ناحیه‌ی ۲ مربوط به ورود پارامترهای هندسی - آماری مدل و ناحیه‌ی ۳ مربوط به ورود پارامترهای محاسباتی و رئولوژیکی است. ورود پارامترهای مربوط به شرایط مرزی مدل در ناحیه‌ی ۴ در نظر گرفته شده است و در ناحیه‌ی ۵ به انتخاب حالت‌های تصادفی مختلف از تولید DFN اختصاص دارد. ناحیه‌ی

۶ برای تعیین وضعیت نحوه‌ی ساخت شبکه‌ی شکستگی‌ها، لزوم مش‌بندی و محاسبات مربوط به جریان است. کلیدهای فرمان برنامه برای اجرای محاسبات، ذخیره‌ی اطلاعات ورودی جاری و خروج از پروژه در ناحیه‌ی ۷ تعبیه شده است و ناحیه‌ی ۸ تابلو اعلانات برنامه را نشان می‌دهد.



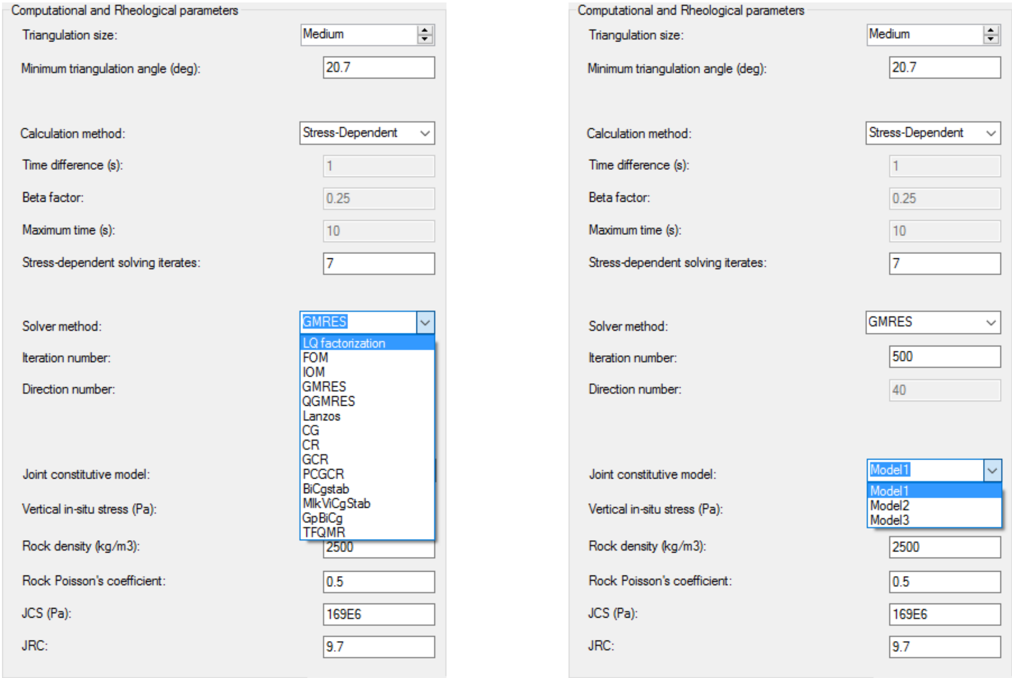
شکل ۴-۳ نواحی مختلف پنجره‌ی اصلی برنامه FlowSHUT^{3D}

در شکل ۴-۴ ناحیه‌ی ۲ با وضوح بیشتری نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، در این ناحیه امکان تعیین ابعاد مدل در جهت‌های X، Y و Z، شکل شکستگی (دایره یا مربع) و تعیین تعداد دسته درزه‌ها و پارامترهای آماری (چگالی، شیب، جهت شیب، طول و بازشدگی) مربوط به هر یک از آن‌ها بر طبق دستورالعمل برنامه وجود دارد. به هر یک از PDFهای دسته درزه‌ها یک شماره اختصاص داده شده است و هر تابع توزیع می‌تواند حداکثر تا چهار پارامتر را بپذیرد.



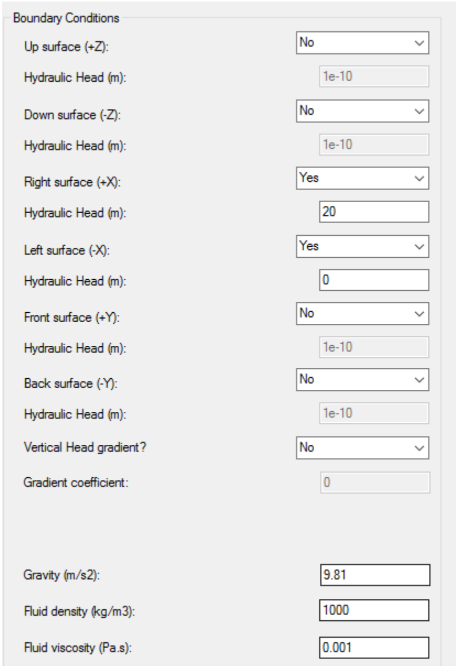
شکل ۴-۴ ناحیه‌ی ۲ از پنجره‌ی اصلی برنامه FlowSHUT^{3D}

در شکل ۴-۵ ناحیه‌ی ۳ پنجره اصلی برنامه مشخص شده است. در این ناحیه تعیین ابعاد و زاویه‌ی حداقل مش‌بندی، تعیین نوع موتور محاسباتی برنامه و تعداد تکرارهای مربوط به محاسبه‌ی اثر تنش امکان‌پذیر خواهد بود. علاوه‌بر آن، می‌توان در این ناحیه روش‌های زیرفضای کریلف و تعداد تکرارهای مربوط به آن‌ها و یا حتی روش مستقیم فاکتورگیری LQ را انتخاب نمود. در انتهای این ناحیه نیز گزینه‌هایی برای انتخاب یکی از سه مدل ساختاری و پارامترهای مربوط به مؤلفه‌ی عمودی تنش برجا و مشخصات ژئومکانیکی سنگ درون‌گیر (چگالی، ضریب پواسن، JRC و JCS) وجود دارد.



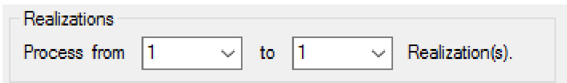
شکل ۴-۵ ناحیه‌ی ۳ از پنجره‌ی اصلی برنامه FlowSHUT^{3D}

در شکل ۴-۶ که ناحیه چهارم پنجره‌ی برنامه را نشان می‌دهد، امکان تعیین نوع و مقدار شرایط مرزی هد هیدرولیکی فراهم شده است که می‌توان آن‌را به‌صورت مقدار یا گرادیان ثابت بر هر وجه شش‌گانه مدل در نظر گرفت. همچنین در انتهای این ناحیه گزینه‌های برای تعیین پارامترهای سیال (چگالی و ویسکوزیته) و شتاب ثقل زمین تعبیه شده است.



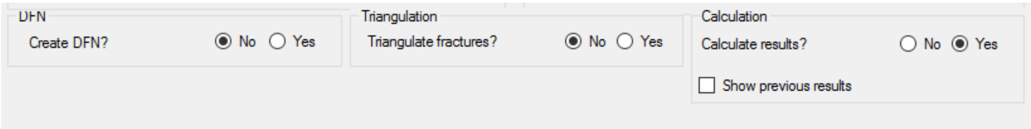
شکل ۴-۶ ناحیه‌ی ۴ از پنجره‌ی اصلی برنامه FlowSHUT^{3D}

شکل ۴-۷ نحوه‌ی انتخاب تعداد حالت‌های تصادفی و تعیین حالت تصادفی جاری یا توالی محاسبه‌ی آن‌ها را در ناحیه‌ی ۵ نشان می‌دهد.



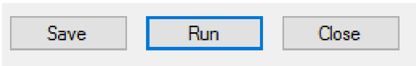
شکل ۴-۷ ناحیه‌ی ۵ از پنجره‌ی اصلی برنامه FlowSHUT^{3D}

شکل ۴-۸ ناحیه‌ی ۶ را به‌تصویر می‌کشد. در این بخش از کاربر سؤال می‌شود که هر یک از فرآیندهای ساخت شبکه‌ی شکستگی‌ها، مش‌بندی شبکه و محاسبه‌ی جریان ضرورت دارد یا خیر. با توجه به ماهیت تصادفی شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا و عدم تکرارپذیری آن، جلوگیری از ایجاد DFN جدید و حفظ ساختار قبلی در تحلیل‌های حساسیتی که ساختار هندسی یکسانی را نیاز دارد، الزام‌آور است.



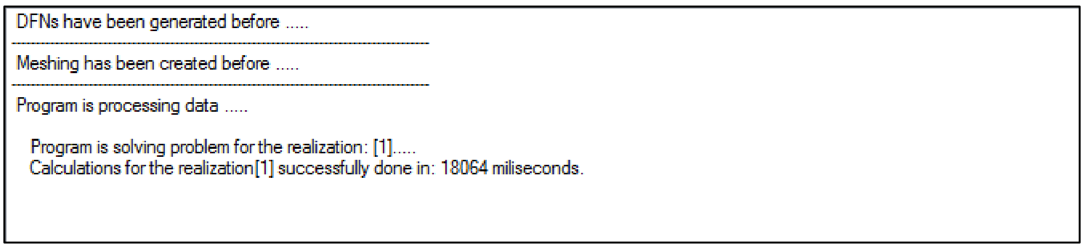
شکل ۴-۸ ناحیه‌ی ۶ از پنجره‌ی اصلی برنامه FlowSHUT^{3D}

پس از تعیین پارامترهای ورودی مدل، تنها کافی است که این پارامترها در حافظه‌ی کامپیوتر ذخیره شوند و دستور اجرای برنامه صادر شود. این دستورات در ناحیه‌ی ۷ جانمایی شده که در شکل ۴-۹ به‌تصویر کشیده شده است.



شکل ۴-۹ ناحیه‌ی ۷ از پنجره‌ی اصلی برنامه FlowSHUT^{3D}

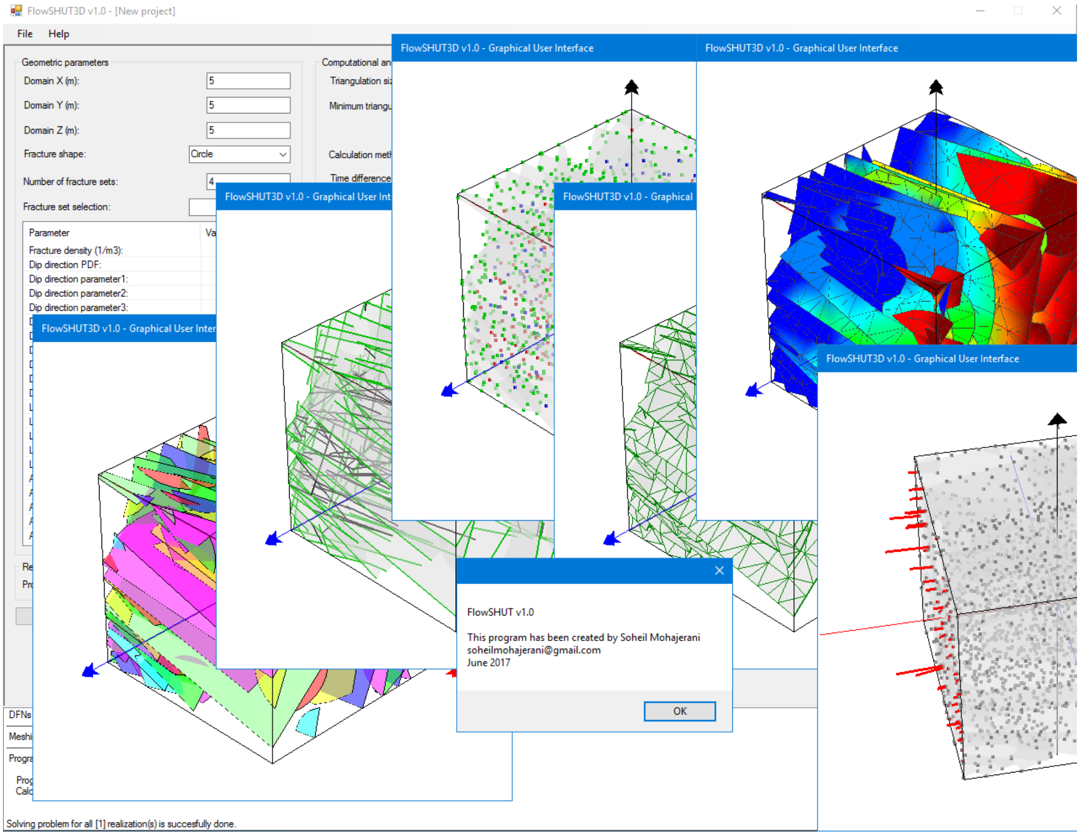
تابلو اعلانات برنامه (ناحیه‌ی ۸) که در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است، اطلاعات مربوط به پردازش هر بخش را به تفکیک حالت‌های تصادفی مختلف در حین پردازش نشان می‌دهد. همچنین اطلاعاتی نظیر زمان پردازش و خطای محاسبات نیز ارایه می‌شود.



شکل ۴-۱۰ ناحیه‌ی ۸ از پنجره‌ی اصلی برنامه FlowSHUT^{3D}

شکل ۴-۱۱، تصویر نهایی از محاسبات مدل را نشان می‌دهد. این برنامه قادر است نتایج تصویری و کمی از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا، موقعیت فضایی گره‌ها، خطوط تقاطع مدل، ساختار مش‌بندی،

نمودار هد هیدرولیکی و نمودار مقداری و برداری میدان جریان را محاسبه و ارایه کند. نتایج کمی به‌صورت فایل مجزا در حافظه‌ی کامپیوتر ذخیره می‌شود.



شکل ۴-۱۱ تصویری از ارایه‌ی نتایج بصری توسط برنامه FlowSHUT^{3D}

۴-۳. جمع‌بندی

در این فصل به تشریح جزئیات، فرض‌های ساده‌سازی و روند توسعه‌ی الگوریتم برنامه‌ی FlowSHUT^{3D} پرداخته شد و به‌طور خلاصه معرفی بخش‌های مختلف و نحوه‌ی استفاده از آن‌ها بیان شد. در فصل بعد اعتبارسنجی مدل عددی و تحلیل حساسیت پارامترها با استفاده از خروجی برنامه ارایه خواهد شد.

فصل پنجم؛ اعتبارسنجی مدل و تحلیل حساسیت

۵-۱. مقدمه

در این فصل اعتبارسنجی و کالیبراسیون مدل برای اطمینان از صحت عملکرد بخش‌های اصلی آن و همچنین تحلیل حساسیت پارامترهای مختلف به‌منظور درک میزان اثر آن‌ها در نظر گرفته شده است. در مرحله‌ی اعتبارسنجی، ابتدا روش ساخت شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا اعتبارسنجی می‌شود و سپس عملکرد روش مش‌بندی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نتایج $\mathrm{FlowSHUT^{3D}}$ با نتایج برنامه‌ی 3DEC و مدل‌های تحلیلی مقایسه شده و پس از تعیین مدل ساختاری مناسب، تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش و نسبت تنش افقی به قائم در حالت‌های تصادفی مختلف شبکه‌ی شکستگی‌ها می‌شود. همچنین، اثر مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش برجا بر بازشدگی سیستم شکستگی و همچنین اثر تعداد حلقه‌های تکرار بر همگرایی نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرد.

علاوه‌بر آن، عملکرد روش‌های مختلف زیرفضای کریلف که به‌عنوان سریع‌ترین روش‌های حل دستگاه‌های معادلات تنک و بزرگ حاصل از اجرای روش FEM شناخته می‌شوند، موردبررسی می‌گیرد. برای ارزیابی عملکرد روش‌های مختلف زیرفضای کریلف، یک تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای دقت و زمان پردازش برنامه $\mathrm{FlowSHUT^{3D}}$ با استفاده از این روش‌ها انجام می‌شود و درنهایت دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش‌های زیرفضای کریلف برای محاسبه‌ی جریان سیال در شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی تعیین می‌شود.

۵-۲. اعتبارسنجی مدل تحقیق

در این قسمت به بحث در مورد اعتبارسنجی قسمت‌های مختلف برنامه‌ی FlowSHUT^{3D} پرداخته می‌شود. اعتبارسنجی شامل سه بخش اصلی اعتبارسنجی DFN، الگوریتم مش‌بندی و روش محاسبه‌ی جریان می‌شود.

۵-۲-۱. اعتبارسنجی DFN

در این بخش اعتبارسنجی مدل‌های DFN تولیدشده به‌وسیله‌ی نرم‌افزار FlowSHUT^{3D} مورد بحث قرار می‌گیرد. برای این منظور، ابتدا با استفاده از PDFهای مربوط به تعداد دسته‌درزه‌ها، چگالی، شیب، جهت شیب و بازشدگی شکستگی‌ها که در جدول ۵-۱ نشان داده‌شده است، یک DFN سه‌بعدی با شکل شکستگی‌های فرضی دایره‌ای به کمک نرم‌افزار FlowSHUT^{3D} ساخته می‌شود. سپس، برای اعتبارسنجی و اطمینان از کیفیت شبکه‌ی ساخته‌شده، دو مقطع دو بعدی با امتداد ۹۰ و ۱۸۰ درجه از ساختار سه‌بعدی استخراج می‌شود و با کمک فرآیندی مشابه با روش اسکن لاین در دو جهت قائم و افقی برای هر مقطع، چگالی شبکه‌ی شکستگی‌ها با استفاده از تحلیل‌های آماری تخمین زده می‌شود (شکل ۵-۱).

با استفاده از رابطه‌ی ۵-۱ میزان چگالی میانگین کل شبکه‌ی شکستگی‌ها محاسبه می‌شود [۱۹۱].

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\cos(\alpha_{si} - \alpha_{mi}) \cos\beta_{si} \cos\beta_{mi} + \sin\beta_{si} \sin\beta_{mi}), \qquad (۵-۱)$$

که در آن، λ چگالی شبکه، N تعداد دسته‌درزه‌ها، λ_i چگالی هر دسته‌درزه، α_{si} شیب هر دسته‌درزه، β_{si} جهت شیب هر دسته‌درزه و α_{mi} و β_{mi} شیب و جهت شیب صفحه مقطع است.

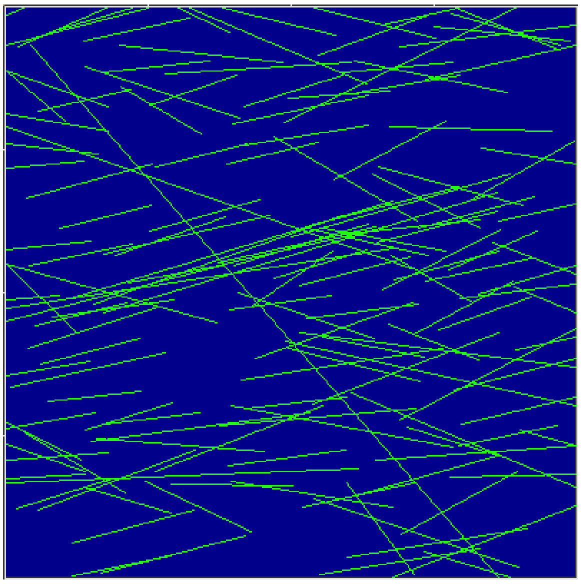
جدول ۵-۱ پارامترهای آماری ویژگی‌های هندسی دسته‌درزه‌ها.

شماره‌ی دسته‌درزه	چگالی (تعداد بر سطح)	شیب (درجه)*	جهت شیب (درجه)	طول (متر)**	بازشدگی (میلی‌متر)
۱	۲	۸۴/۲۹ (۲۲/۵۹)	۴۳/۵۵	۰/۸ تا ۴۰ (۱/۷۸)	۰/۵ تا ۲/۵
۲	۲	۸۴/۹۹ (۱۳/۷۵)	۱۳۱/۶	۰/۸ تا ۴۰ (۱/۷۸)	۰/۵ تا ۲/۵
۳	۲	۳۸/۱ (۱۴/۳)	۲۴۶/۳۳	۰/۸ تا ۴۰ (۱/۷۸)	۰/۵ تا ۲/۵
تابع توزیع	پوآسن	فیشر	یکنواخت	توانی	یکنواخت

* عدد داخل پرانتز ثابت فیشر را نشان می‌دهد.

** عدد داخل پرانتز نمای تابع توزیع توانی را نشان می‌دهد.

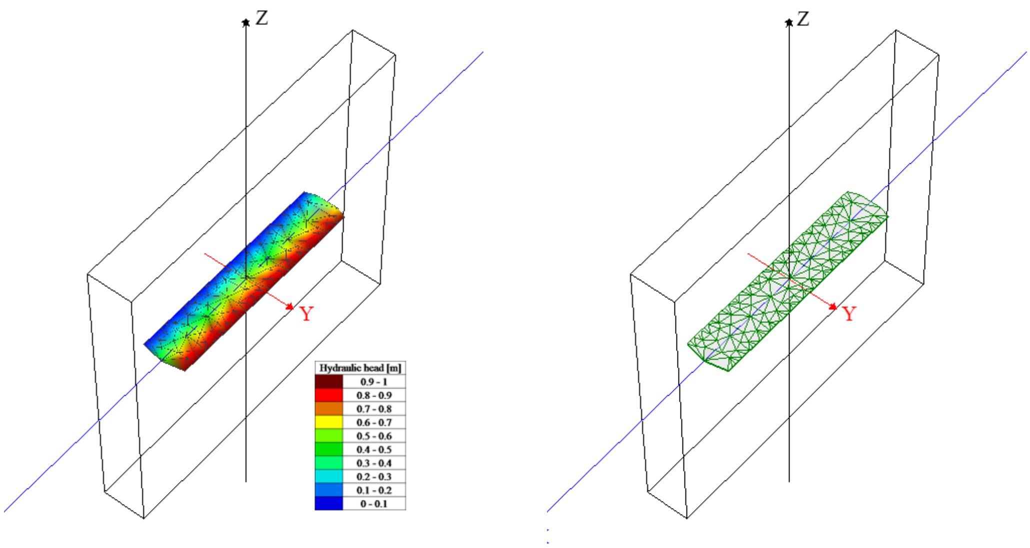
با توجه به محاسبات انجام شده در این بخش، چگالی میانگین شبکه، برابر با ۵,۲۷ شکستگی بر واحد سطح محاسبه شده است که با مقدار ۶ (مجموع چگالی همه‌ی دسته‌درزه‌ها) همبستگی زیادی دارد و دقت بالای ساخت DFN توسط نرم‌افزار مذکور را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱ یک مقطع دو بعدی که از مدل سه‌بعدی در امتداد ۹۰ درجه توسط نرم‌افزار FlowSHUT^{3D} استخراج شده است.

۵-۲-۲. اعتبارسنجی مش‌بندی - مثال اول

در این بخش یک مثال ساده برای اعتبارسنجی الگوریتم مش‌بندی ارایه شده است. ساختار هندسی Ω شامل یک شکستگی دایره‌ای با مرکز واقع در مبدأ مختصات و شعاع ۵ متر است که بین دو مرز صفحه‌ای قائم موازی بافاصله‌ی ۲ متر محصور شده است. مقدار هد هیدرولیکی در مرز اول $H_1 = 1\ m$ و در مرز دوم $H_2 = 0$ و مقدار نفوذپذیری شکستگی $k = 1\ m^2/s$ است. اکنون تمرکز بر محاسبه‌ی جریان طولی در باریکه مستطیلی بین دو مرز و روی سطح شکستگی قرار می‌گیرد. حل تحلیلی جریان برای یک باریکه‌ی مستطیلی با ابعاد ۱۰×۲ متر برابر ۵ m^3/s خواهد بود [۱۹۲]. در مدل عددی حاضر مجموع جریان گره‌های واقع بر روی مرز مدل مقدار ۴,۹۴۲ m^3/s را نشان می‌دهد که با مقدار تحلیلی تطابق خوبی دارد. تصاویری از مش‌بندی و توزیع هد هیدرولیکی در شکل ۵-۲ نشان داده‌شده است.



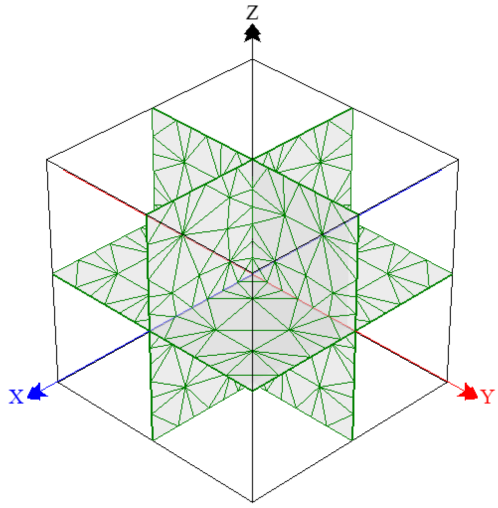
(الف) نمودار مش‌بندی باریکه‌ی مستطیلی

(ب) نمودار هدهیدرولیکی

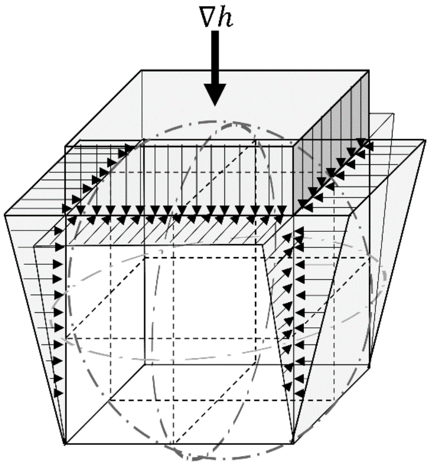
شکل ۵-۲ ساختار هندسی و هیدرولیکی مثال اول

۵-۲-۳. اعتبارسنجی مش‌بندی - مثال دوم

مطابق شکل ۵-۳ یک ساختار هندسی (Ω) دیگر با سه شکستگی صفحه‌ای دایره‌ای متعامد و سه فصل مشترک در فضای سه‌بعدی برای اعتبارسنجی الگوریتم مش‌بندی در نظر گرفته شده است. شکل‌های ۳-۵-الف و ۳-۵-ب، به‌ترتیب مش‌بندی مدل و نمودار هدهیدرولیکی در راستای محور Z را نشان می‌دهد. این مثال بر تشریح وضعیت گره‌های منطبق در یک ساختار هندسی ساده متمرکز است. مرکز هر سه شکستگی بر مبدأ مختصات واقع‌شده و شعاع هر یک از آن‌ها برابر ۷۱ متر است. بردار عمود بر سطح شکستگی‌ها در جهت محورهای X، Y و Z هستند. محدوده‌ی Ω یک مکعب با طول یال ۱۰۰ متر و با نفوذپذیری همگن $0.8172 \times 10^{-5}\ m^2/s$ در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی هد هیدرولیکی مدل در شکل ۵-۳-الف تشریح شده است. وجوه بالا و پایین مدل به ترتیب دارای هد هیدرولیکی ثابت $H_1 = 1\ m$ و $H_2 = 0\ m$ و وجوه جانبی دارای یک گرادیان ثابت هد هیدرولیکی هستند. در این مثال، حل عددی با حل تحلیلی ارایه شده توسط لانگ و همکارانش مورد مقایسه قرارگرفته است [۱۹۲]. حل تحلیلی جریان برابر $1.634 \times 10^{-5}\ m^3/s$ است که با حل عددی برای این مثال کاملاً مطابقت دارد. باید توجه نمود که در این مثال هدهیدرولیکی بر روی مرزهای شکستگی افقی ثابت است و بنابراین جریانی از آن عبور نمی‌کند. شکل ۵-۳-پ این واقعیت را به‌خوبی نشان داده و هد هیدرولیکی بر روی گره‌های داخلی شکستگی مزبور را ثابت نشان می‌دهد. همچنین با توجه به حل عددی، مجموع جریان بر روی گره‌های تمامی مرزهای مدل و مجموع جریان بر روی گره‌های تمامی خطوط تقاطع آن برابر صفر محاسبه شده است که به ترتیب نشان‌دهنده‌ی قانون بقای جرم عمومی و موضعی در Ω است و همگرایی روش حل عددی را نشان می‌دهد.

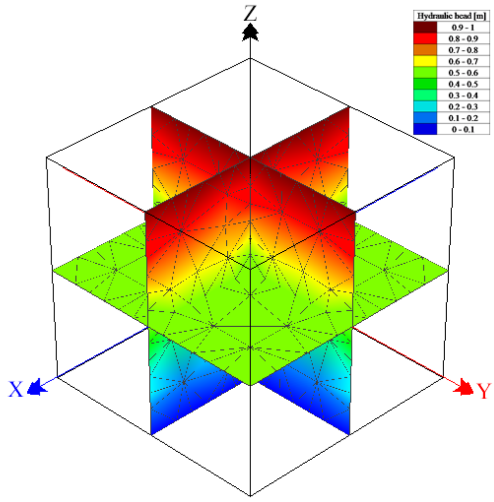


(الف) ساختار مش‌بندی



(ب)

شرایط مرزی هدهیدرولیکی



(پ) توزیع هد هیدرولیکی

شکل ۵-۳ ساختار هندسی و هیدرولیکی مثال دوم

۵-۲-۴. اعتبارسنجی مش‌بندی - مثال سوم

در این مثال محاسبه‌ی عددی جریان به کمک الگوریتم مش‌بندی حاضر در ۱۰ حالت تصادفی مختلف از یک DFN مورد بررسی قرارگرفته است. معمولاً به‌منظور کاهش اثر عدم قطعیت، از نتایج محاسبات عددی در حالت‌های تصادفی مختلف میانگین‌گیری هندسی شده و نتیجه به‌عنوان نماینده‌ی DFN معرفی می‌شود. این حالت‌های تصادفی مختلف با استفاده از داده‌های جدول ۵-۲ و بر اساس روش ارایه

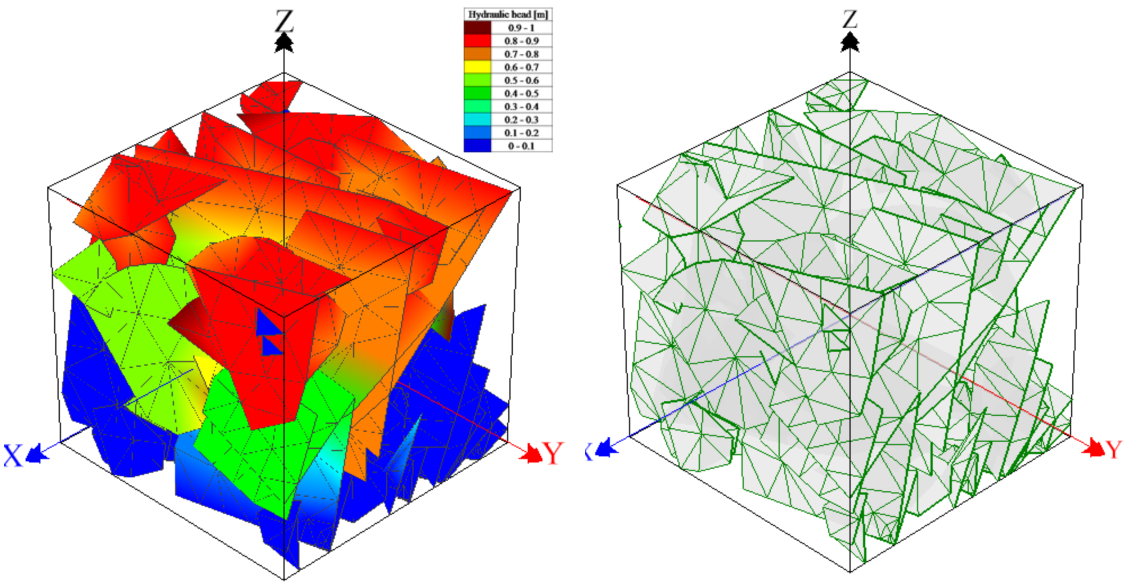
شده در فصل سوم تولید شده‌اند. تعداد شکستگی‌ها و تعداد فصل مشترک‌های حالت‌های تصادفی مختلف در جدول ۵-۳ ارایه شده است. چگالی و ویسکوزیته‌ی سیالی که در این مطالعه مورد استفاده قرارگرفته به ترتیب برابر kg/m^3 ۱۰۰۰ و $Pa\cdot s$ ۱ است. برای تعیین اثر اندازه مثلث‌بندی بر پارامترهای حل عددی، مقدار h_s در هفت سطح مختلف تغییر داده می‌شود و بنابراین ۷۰ نمونه برای تحلیل حساسیت پارامترها در دسترس است. در شکل ۵-۴، تصویری از یکی از حالت تصادفی نشان داده شده است. همچنین تصاویری از مش‌بندی و توزیع هد هیدرولیکی برای این مثال به تصویر کشیده شده است.

جدول ۵-۲ پارامترهای هندسی دسته‌درزه‌ها

بازشدگی [mm]		**طول [m]**			**چگالی [1/m³]**	**جهت شیب [Deg]**		**شیب [Deg]**	**پارامتر**
یکنواخت		توانی			پوآسن	فیشر		یکنواخت	
حداکثر	حداقل	حداکثر	حداقل	α	میانگین	میانگین	k	میانگین	
۱۲	۴	۱۰	۱	۱,۷۸	۰,۲	۴۵	۴۰	۷۰	۱
۱۲	۴	۱۰	۱	۱,۷۸	۰,۱۲	۱۳۵	۲۰	۳۰	۲
۱۲	۴	۱۰	۱	۱,۷۸	۰,۱	۱۳۵	۴۰	۸۰	۳
۱۲	۴	۱۰	۱	۱,۷۸	۰,۱۵	۳۱۵	۲۰	۴۵	۴

جدول ۵-۳ تعداد شکستگی‌ها و فصل مشترک‌های موجود در حالت‌های تصادفی مختلف

شماره حالت تصادفی	تعداد شکستگی	تعداد فصل مشترک
۱	۱۲۵	۳۱۳
۲	۱۱۵	۲۷۱
۳	۱۱۹	۳۳۱
۴	۱۳۰	۳۶۱
۵	۱۱۴	۳۲۴
۶	۱۱۷	۳۰۴
۷	۱۰۹	۲۶۹
۸	۱۲۲	۳۰۳
۹	۱۱۴	۲۷۰
۱۰	۱۱۱	۳۱۳

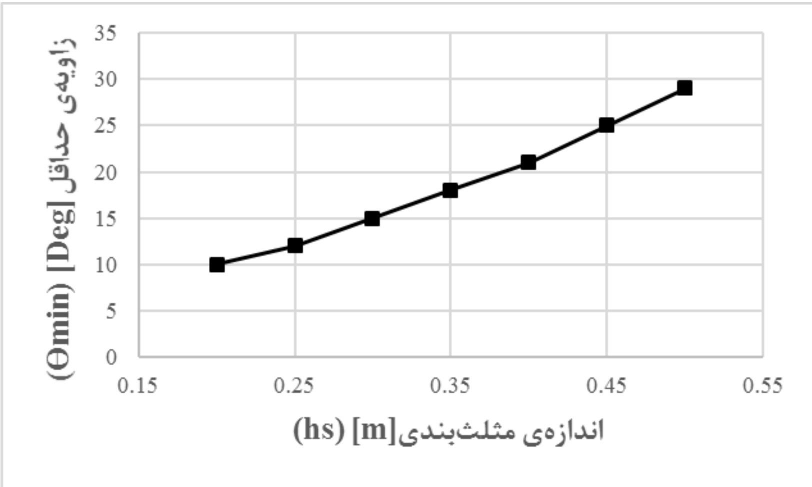


(ب) نمودار توزیع هدهیدرولیکی

(الف) ساختار مش‌بندی

شکل ۵-۴ ساختار هندسی و هیدرولیکی یکی از حالت‌های تصادفی از مثال سوم

اولین مورد تعیین θ_{min} برای هر سطح از h_s است. یک بررسی اولیه نشان می‌دهد که با شرط ثابت بودن θ_{min} و با تغییر h_s، پایان‌یابی الگوریتم مثلث‌بندی به‌شدت تحت تأثیر قرار می‌گیرد. بنابراین، لازم است که در وهله‌ی اول برای هر h_s یک θ_{min} بهینه برای تضمین پایان‌یابی الگوریتم مش‌بندی و مناسب بودن دقت حل مساله انتخاب شود. در حقیقت این θ_{min} حداقل مقداری است که در آن پایان‌یابی الگوریتم تضمین می‌شود. این نتایج در شکل ۵-۵ نشان داده‌شده است که با افزایش h_s، θ_{min} نیز افزایش می‌یابد.

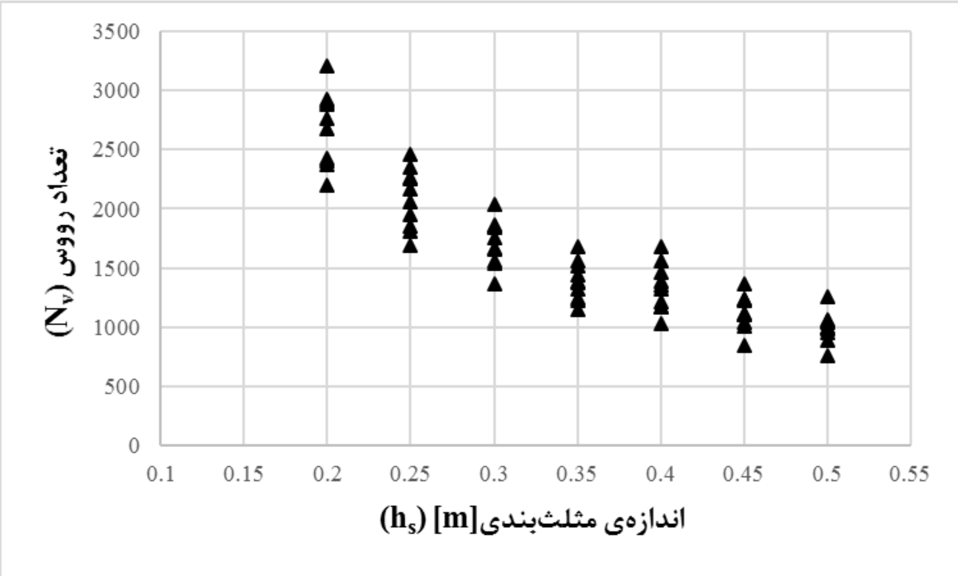


شکل ۵-۵ نمودار زاویه‌ی حداقل (θ_{min}) در برابر اندازه‌ی مثلث‌بندی (h_s)

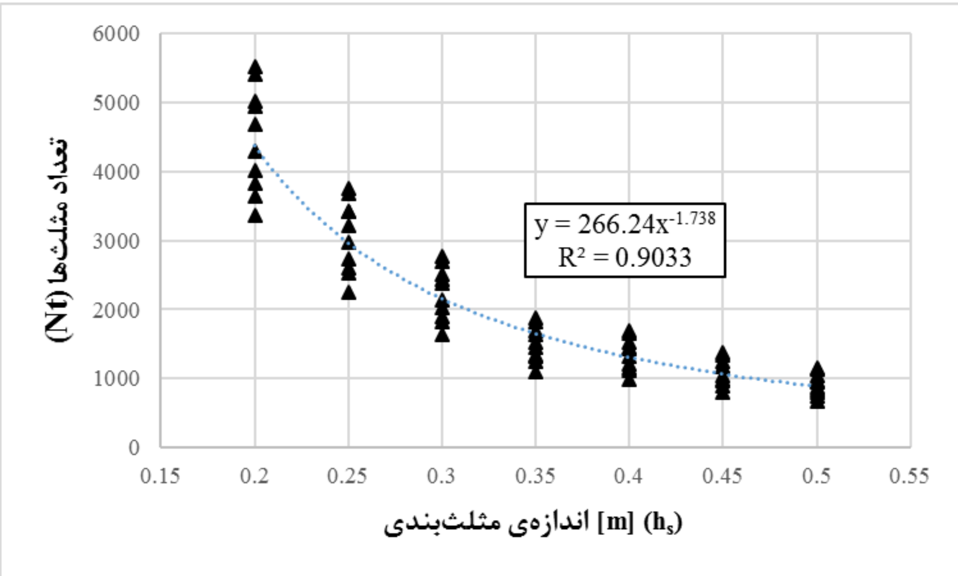
در شکل ۵-۶، نمودار تعداد رووس/ مثلث‌های مدل در برابر h_s رسم شده است. هرچند، روند کاهشی تعداد رووس و مثلث‌های مدل با افزایش h_s بدیهی به نظر می‌رسد، دستیابی به این نتایج نشان‌دهنده‌ی موفقیت‌آمیز بودن فرآیند مش‌بندی DFN است. زیرا ناهمگونی و عدم همگرایی در تعداد رووس تشکیل شده مشاهده نمی‌شود. همچنین با افزایش مقدار h_s به نظر می‌رسد که تعداد رووس و مثلث‌ها به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند که این مقادیر به ترتیب مجموع تعداد رووس فصل مشترک و مرزی مدل، و تعداد مثلث‌های دلانه–پایه‌ی تشکیل‌شده از آن‌هاست. همچنین، در شکل ۵-۶-ب رابطه‌ی بین تعداد

مثلث‌های مدل و اندازه‌ی مثلث‌بندی (h_s) نشان داده شده است. با ضریب همبستگی ۰٫۹ رابطه‌ی ۵-۲ حاصل می‌شود.

$$N_t = 266.24\, h_s^{-1.738} \qquad (۵-۲)$$



(الف) نمودار تعداد رووس در برابر اندازه‌ی مثلث‌بندی

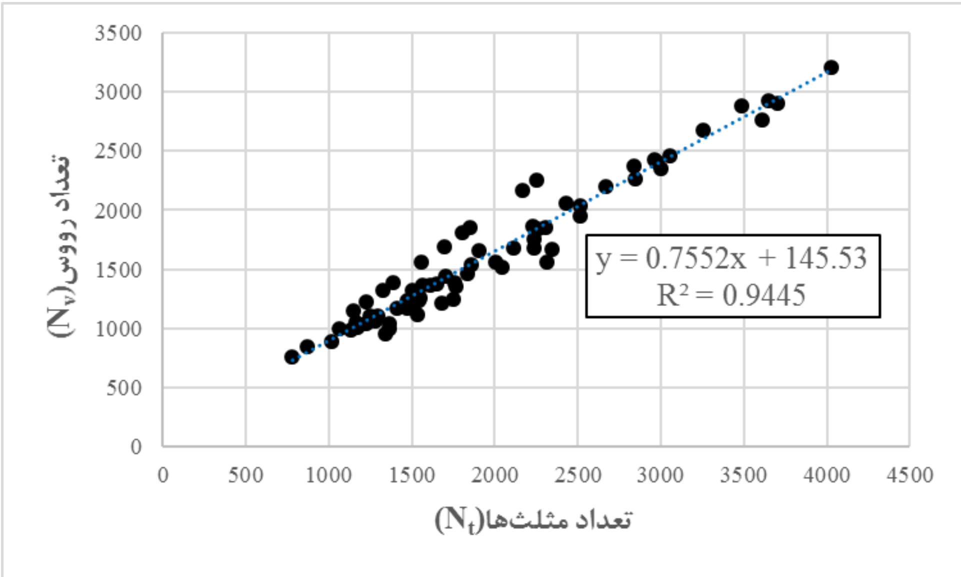


(ب) نمودار تعداد کل مثلث‌های مش‌بندی در برابر اندازه‌ی مثلث‌بندی

شکل ۵-۶ نمودار پارامترهای مختلف مش‌بندی در برابر اندازه‌ی مثلث‌بندی

شکل ۵-۷ نمودار تعداد رووس مدل در برابر تعداد مثلث‌های مدل را نشان می‌دهد. با یک ضریب همبستگی ۰,۹۴۹۵ رابطه‌ی بین تعداد مثلث‌ها (N_t) و تعداد رووس (N_v) مدل مطابق رابطه‌ی ۵-۳ است.

$$N_v = 0.7552\, N_t + 145 \cdot 53 \qquad (۵\text{-}۳)$$



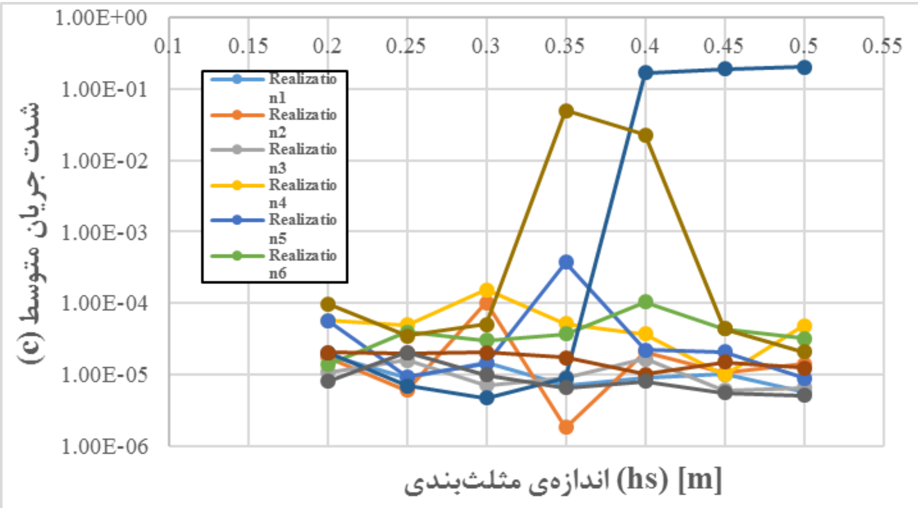
شکل ۵-۷ نمودار تعداد رووس در برابر تعداد مثلث‌های مدل

مطابق با رابطه‌ی ۵-۴، در این مطالعه برای تعیین دقت حل مساله از معیار نرخ جریان متوسط c استفاده شده است.

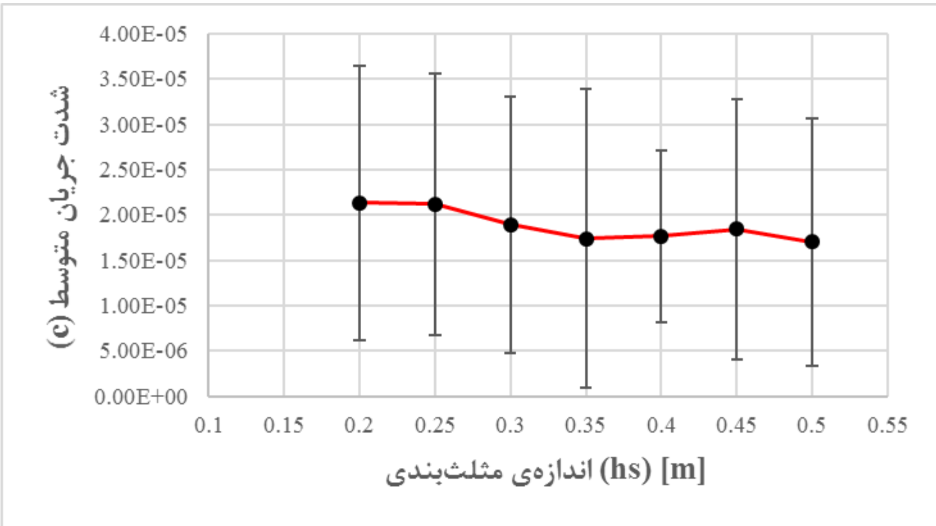
$$c = \frac{\|q\|_2}{N_{dof_t} \times N_{v_t}} \qquad (۵\text{-}۴)$$

که در آن، N_{dof_t} تعداد کل درجات آزادی و N_{v_t} تعداد کل رووس مدل است. q بردار جریان کل یعنی، $q=\{q_x^1, q_y^1, q_z^1, q_x^2, \ldots\}$ و $\|q\|_2$ نرم اقلیدسی بردار جریان است. نمودار c برای هر یک از ۱۰ حالت تصادفی و برای میانگین هندسی حالت‌های تصادفی در برابر h_s در شکل ۵-۸ نشان داده شده است. همان‌طور که شکل ۵-۸-الف نشان می‌دهد، بعضی از مقادیر h_s موجب عدم همگرایی حل عددی در تعدادی از حالت‌های تصادفی می‌شود که این ناپایداری برای مقادیر بیش‌تر از $h_s = 0.3$ اتفاق می‌افتد.

اگر از نتایج حل عددی برای حالت‌های تصادفی واگرا چشم‌پوشی شود، نمودار شکل ۵-۸-ب برای جریان میانگین c در برابر h_s به‌دست می‌آید. به‌این دلیل که نمودار حاضر با توجه به مقادیر آن روند تقریباً ثابتی را نشان می‌دهد، بنابراین به نظر می‌رسد که همگرایی DFN برای مقادیر $h_s \leq 0.3$ تضمین شود.



(الف) نمودار جریان متوسط c در برابر اندازه‌ی مش‌بندی h_s برای هر یک از حالت‌های تصادفی



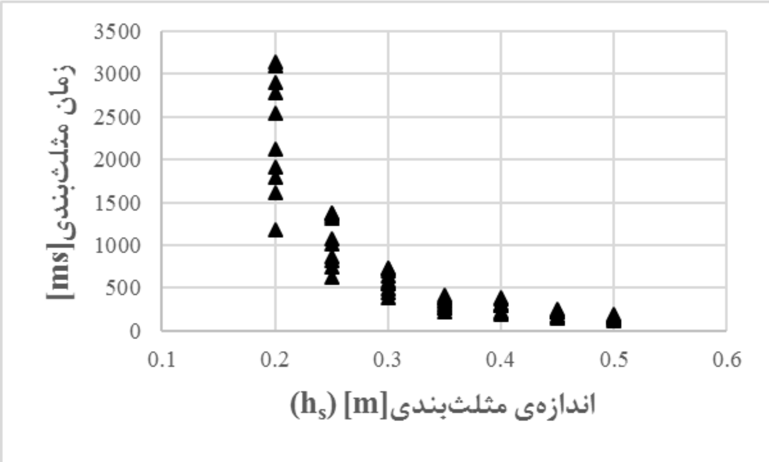
(ب) نمودار جریان متوسط c در برابر اندازه‌ی مش‌بندی h_s برای تحلیل میانگین هندسی حالت‌های تصادفی مختلف

شکل ۵-۸ نمودارهای مقایسه‌ی شدت‌جریان متوسط در برابر اندازه‌ی مثلثبندی

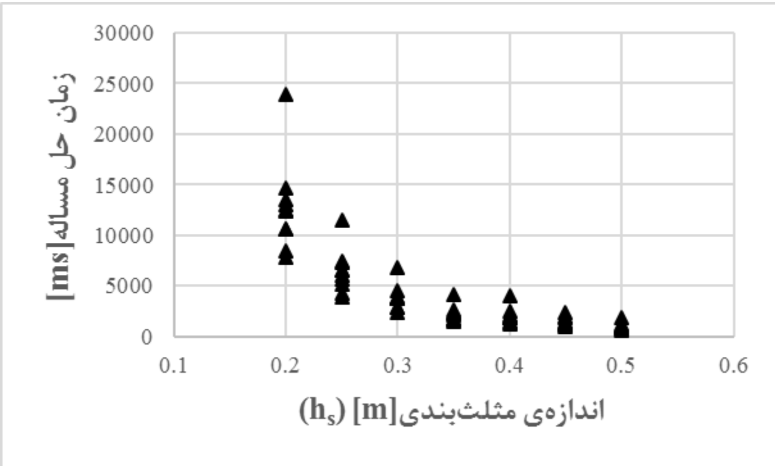
با دقت بیشتر در این شکل این نکته دریافت می‌شود که افزایش اندازه‌ی مثلث‌بندی به‌تنهایی تأثیر قابل توجهی بر پاسخ مدل ندارد. این نتیجه‌گیری منطقی به‌نظر می‌رسد چرا که توابع تقریب روش المان محدود نسبت به فاصله‌ی گره‌ها نرمالایز شده‌اند و افزایش فاصله‌ی گره‌ها تنها ممکن است دقت درونیابی را تحت تأثیر قرار دهد.

در شکل ۵-۹-الف و ب به ترتیب نمودار زمان اجرای الگوریتم مش‌بندی و زمان اجرای روش حل عددی المان محدود در برابر h_s ترسیم‌شده است. در حقیقت N_v تعداد کل متغیرها و معادلات سیستم را برای هر یک از درجات آزادی نشان می‌دهد. تمامی محاسبات با یک سیستم سخت‌افزاری یکسان انجام شده‌اند و بنابراین قابل مقایسه هستند. به دلیل این‌که تغییرات زمان مثلث‌بندی و زمان حل عددی در برابر h_s روندی تقریباً نمایی دارد، پس واضح است که استفاده از h_s های کوچک می‌تواند به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای زمان محاسبات را افزایش دهد. همچنین، مطابق با شکل ۵-۹-پ ، روند تغییرات زمان محاسبات در برابر تعداد رووس مدل تطابق نسبتاً خوبی با نتایج ارایه شده توسط ارهل[1] و همکارانش [۶۱] دارد.

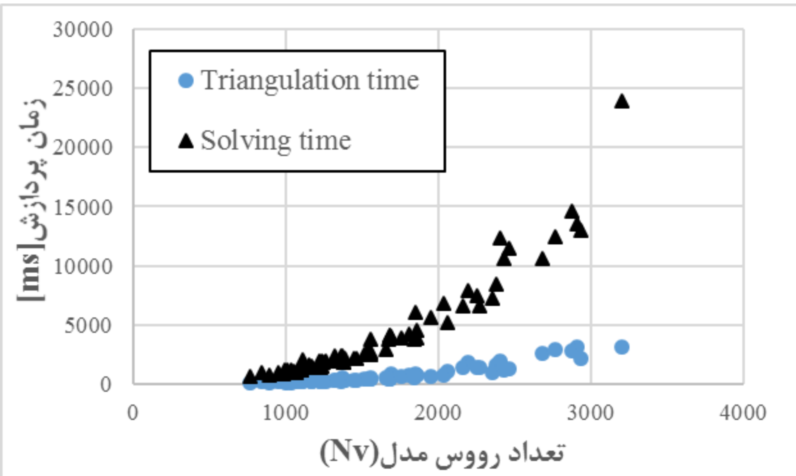
[1] Erhel



(الف) نمودار اندازه‌ی مثلث‌بندی (h_S) در برابر زمان مثلث‌بندی



(ب) نمودار اندازه‌ی مثلث‌بندی (h_S) در برابر زمان حل مساله

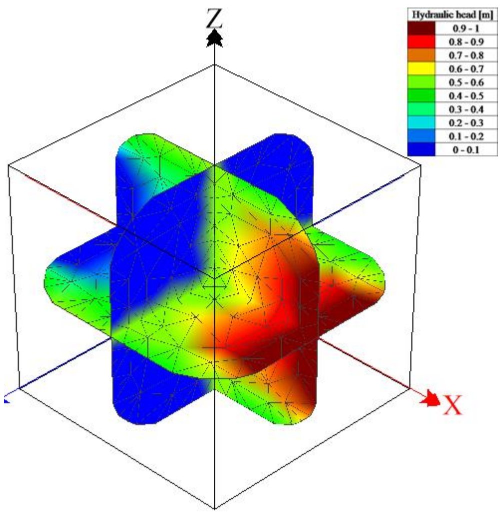


(پ) نمودار زمان مثلث‌بندی و زمان حل مساله در برابر تعداد رووس مدل

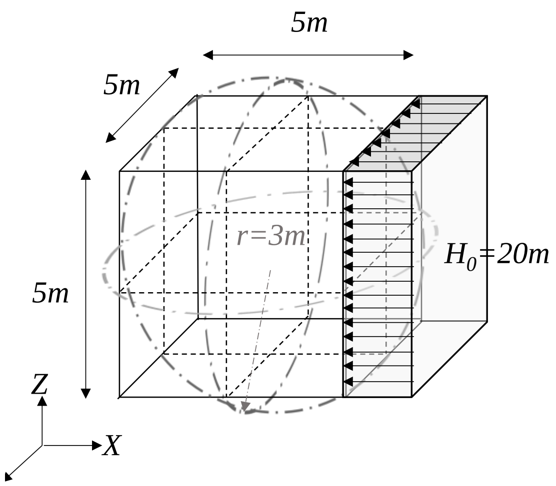
شکل ۵-۹ مقایسه‌ی پارامترهای مربوط به زمان و تعداد رووس مدل

۵-۲-۵. اعتبارسنجی راه‌حل محاسبه‌ی جریان

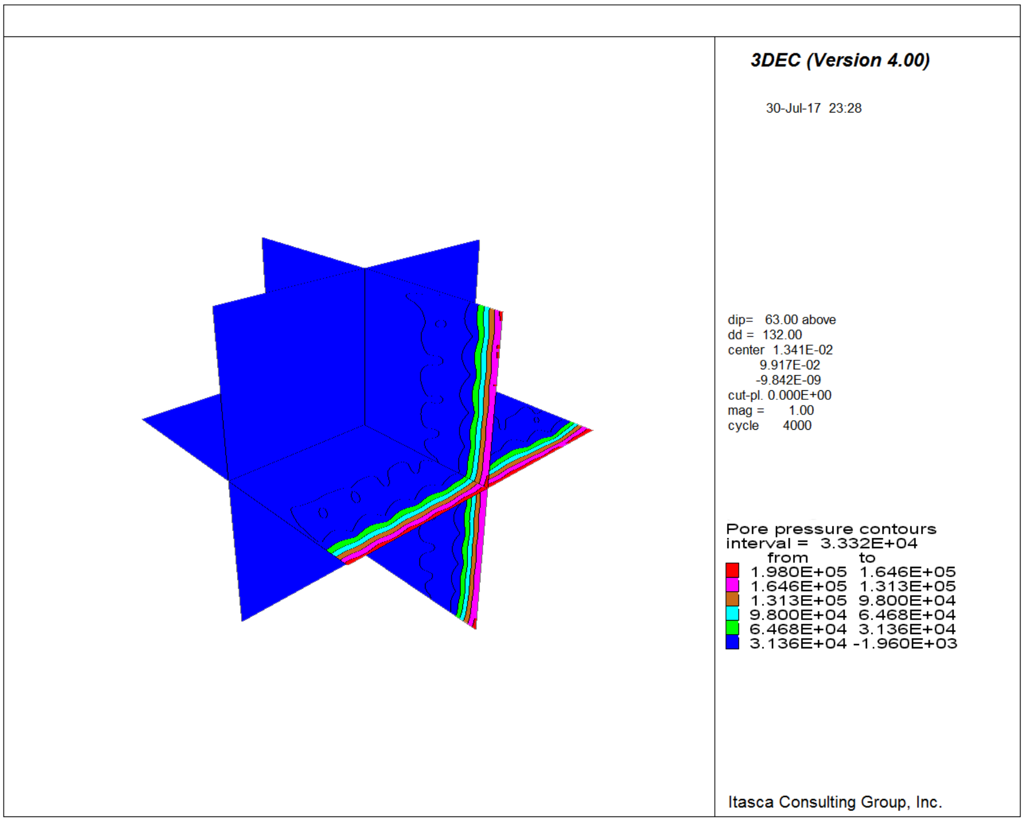
به‌منظور اعتبارسنجی بخش محاسبه‌ی جریان مدل ارایه شده تحقیق حاضر، نتایج تحلیل اثر تنش بر جریان سیال با نرم‌افزار 3DEC، برای سه مدل ساختاری شکستگی مختلف توصیف شده در بخش ۳-۱۵، مقایسه شده است. 3DEC یک برنامه‌ی عددی سه‌بعدی توسعه‌یافته بر اساس روش المان مجزا (DEM) برای مدل‌سازی‌های محیط ناپیوسته است. بنیان این برنامه فرمولاسیون عددی است که به‌طور گسترده در نگارش دو بعدی این برنامه یعنی UDEC اعتبارسنجی شده و مورد استفاده قرارگرفته است. یکی از کاربردهای 3DEC تعیین پاسخ محیط ناپیوسته (مثل توده‌سنگ شکسته) در معرض بارگذاری‌های ایستایی است. در این برنامه، محیط ناپیوسته به‌عنوان مجموعه‌ای از بلوک‌های مجزا در نظر گرفته می‌شود و ناپیوستگی‌ها، مرز بین این بلوک‌ها را تشکیل می‌دهند [۱۹۳]. برای مدل‌سازی کوپل هیدرومکانیک در این برنامه باید هر بلوک را به‌طور مجزا برای استفاده از روش FDM مجزا سازی نمود. بنابراین، روش حل جریان تابع تنش در برنامه‌ی 3DEC عملاً به روش پیوندی FDM-DEM مبدل می‌گردد. ساختار هندسی و شرایط مرزی مدل همان‌طور که در شکل ۵-۱۰-الف نشان داده‌شده است، شامل یک بلوک با ابعاد $5 \times 5 \times 5\ \mathrm{m}^3$ با مرکزیت مبدأ مختصات است که در آن سه شکستگی متعامد دایره‌ای با شعاع ۳ متر و بازشدگی ۱ میلی‌متر تعبیه شده‌اند. یک هد هیدرولیکی ۲۰ متری بر وجه سمت راست مدل (در جهت مثبت محور X) اعمال‌شده است و سایر وجوه مدل دارای هد هیدرولیکی صفر هستند. پارامترهای ژئومکانیکی و رئولوژیکی مدل در جدول ۵-۴ ارایه شده است. برای انجام مقایسه، مقدار تنش برجای عمودی اعمال‌شده درون مدل از مقدار 10^5 تا 10^7 در سطوح مختلف تغییر داده می‌شود و مقدار جریان عبوری از مدل ثبت می‌گردد. مثالی از نمودار توزیع هد هیدرولیکی محاسبه‌شده توسط $\mathrm{FlowSHUT}^{3D}$ و نمودار توزیع فشار در 3DEC به ترتیب در اشکال ۵-۱۰-ب و پ نشان داده‌شده است.



(ب) نمودار توزیع هد هیدرولیکی در برنامه‌ی FlowSHUT^{3D}



(الف) ساختار هندسی و شرایط مرزی در برنامه‌ی FlowSHUT^{3D}



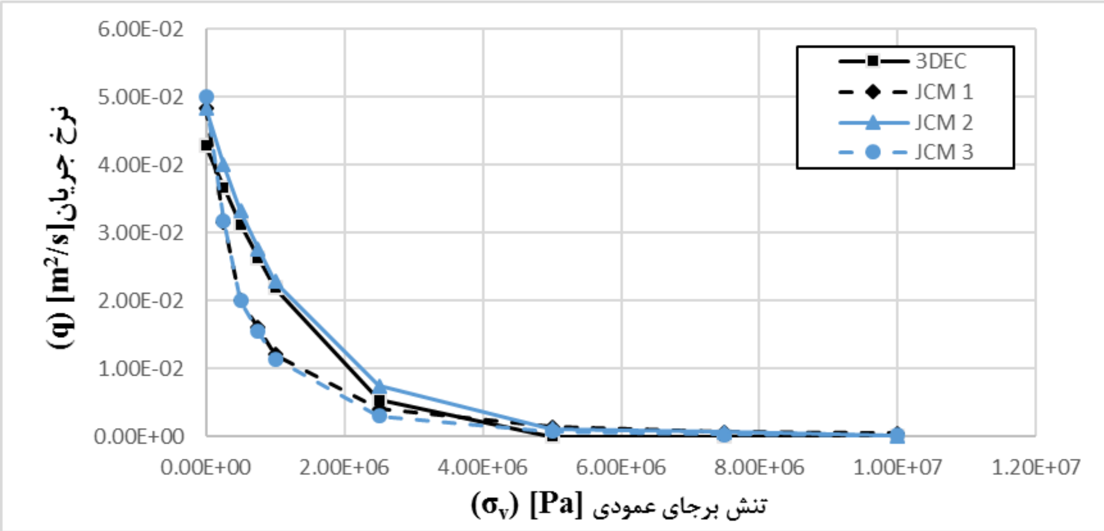
(پ) نمودار توزیع فشار در برنامه‌ی 3DEC

شکل ۵-۱۰ ساختار هندسی و نمودارهای هیدرولیکی برای اعتبارسنجی راه‌حل محاسبه‌ی جریان

جدول ۵-۴ پارامترهای ژئومکانیکی و رئولوژیکی مدل‌سازی جریان تابع تنش

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
$\rho_r\ [kg/m^3]$	۲۵۰۰	$a_f\ [mm]$	۰,۰۰۱
$k_n\ [GPa/m]$	۱,۳۲	$\rho_f\ [kg/m^3]$	۱۰۰۰
$JCS\ [MPa]$	۵۰	$\mu\ [Pa.s]$	۰,۰۰۱
JRC	۵	$g\ [m/s^2]$	۹,۸۱
$K\ [GPa]$	۱		
$G\ [GPa]$	۱		

همان‌طور که در شکل ۵-۱۱، نشان داده شده است، هر سه مدل ساختاری رابطه‌ی ۳-۵۲ (JCM1)، رابطه‌ی ۳-۵۶ (JCM2) و رابطه‌ی ۳-۵۷ (JCM3) روند مشابهی (روند نمایی) با آن‌چه که توسط 3DEC محاسبه شده است را با نقاط ابتدایی و انتهایی تقریباً یکسان نشان می‌دهد. نقاط میانی در مدل JCM1 اختلاف مقادیر نسبتاً کوچکی را نشان می‌دهند که دراین‌ارتباط اومن و همکارانش پس‌از انجام آزمایش‌های تجربی فراوان بیان کرده‌اند که مدل تجربی آن‌ها برای سطوح تنش پایین‌تر نتایج واقع‌بینانه‌تری را ارایه می‌کند [۱۸۷]. از آن‌جا که JCM3 در تحقیقات مختلف بسیار پرکاربرد بوده است و توسط محققین متعددی نیز پیشنهاد شده است، در تحقیق حاضر نیز نتایج آن به JCM1 قرابت نزدیکی نشان می‌دهد. مدل JCM2 که تنها بر اساس آزمایش‌های آزمایشگاهی توسعه یافته است برای مطالعه‌ی موردی حاضر بیشترین تطابق را با مدل 3DEC نشان می‌دهد. هرچند، این مدل تاکنون در تحقیقات وسیع مورد اعتبارسنجی قرار نگرفته است. در این تحقیق، به دلیل این‌که مدل ساختاری اومن و همکارانش به‌طور انحصاری برای DFN توسعه یافته و به‌صورت تجربی اعتبارسنجی شده است و همچنین، روند نتایج تقریباً نزدیکی را به 3DEC نشان می‌دهد، به‌عنوان مدل ساختاری اصلی شکستگی برای انجام تحلیل‌های حساسیت انتخاب شده است.



شکل ۵-۱۱ نمودار نرخ جریان در برابر مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش برجا برای سه مدل ساختاری شکستگی مختلف با استفاده از FlowSHUT^{3D} و برنامه‌ی 3DEC

۵-۲-۶. اعتبارسنجی روش‌های زیرفضای کریلف

برای اعتبارسنجی محاسبات مربوط به تعیین میدان جریان با استفاده از روش‌های زیرفضای کریلف در این تحقیق، از همان مدل عددی بخش ۵-۲-۵ استفاده شده است. در این مدل جریان سیال گذرنده از یک شبکه‌ی شکستگی با سه شکستگی صفحه‌ای – دایره‌ای متعامد، محاسبه می‌شود. چارچوب هندسی شکستگی‌ها و شرایط مرزی مدل در شکل ۵-۹-الف نشان داده‌شده است. شعاع و بازشدگی هر شکستگی به ترتیب ۳ متر و ۱ میلی‌متر و مرکز آن‌ها در مبدأ مختصات واقع‌شده است. مدل شامل یک بلوک با ابعاد ۵×۵×۵ مترمکعب با مرکز واقع در مبدأ مختصات است. یک هد هیدرولیکی ۲۰ متری بر وجه سمت راست مدل (در جهت مثبت محور X) اعمال‌شده و هد هیدرولیکی در بقیه مرزها صفر است. چگالی ماده‌سنگ و سختی عمودی سطوح شکستگی‌ها به ترتیب ۲۵۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و ۱٫۳۲ گیگا پاسکال بر متر است. بازشدگی شکستگی‌ها ۱ میلی‌متر در نظر گرفته شده و چگالی و گرانروی سیال به ترتیب برابر ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و ۰٫۰۰۱ پاسکال ثانیه است.

برای اعتبارسنجی روش‌های زیرفضای کریلف مورد استفاده در تحقیق حاضر نتایج محاسبه‌ی جریان با استفاده از روش‌های FOM, IOM, CG, CR, GCR, PCGCR, GMRES, QGMRES, Lanczos, BiCG, Ml(k)CGStab, GpBiCG و TFQMR، با روش مستقیم فاکتورگیری LQ و همچنین با نتایج مدل‌سازی در نرم‌افزار 3DEC مورد مقایسه قرارگرفته و در جدول ۵-۵ ارایه شده است.

جدول ۵-۵ نتایج محاسبه‌ی جریان مدل با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کریلف، روش مستقیم فاکتورگیری LQ و برنامه‌ی 3DEC

روش	جریان (m^3/s)	روش	جریان (m^3/s)
3DEC	2.34×10^{-2}	LANCZOS	2.4×10^{-2}
فاکتورگیری LQ	2.4×10^{-2}	GMRES	2.4×10^{-2}
FOM	2.4×10^{-2}	QGMRES	2.4×10^{-2}
IOM	2.4×10^{-2}	GPBiCG	2.4×10^{-2}
CG	2.4×10^{-2}	BiCG	2.4×10^{-2}
CR	2.4×10^{-2}	Ml(k)BiCGStab	واگرا
GCR	2.4×10^{-2}	TFQMR	واگرا
PCGCR	واگرا		

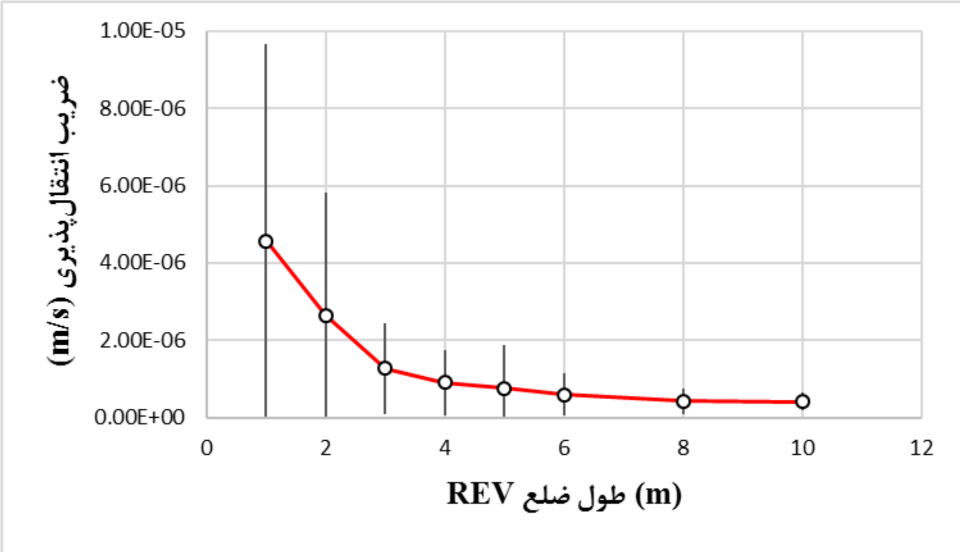
نتایج بیان‌گر آن است که به‌جز روش‌های PCGCR، Ml(k)CGStab, و TFQMR که از همگرایی به پاسخ مدل ناتوان هستند، بقیه روش‌ها جریان عبوری از مدل را دقیقاً برابر با روش مستقیم فاکتورگیری LQ و معادل $2.4 \times 10^{-2}\ m^3/s$ محاسبه می‌کنند. همچنین نتایج مذکور همبستگی زیادی با پاسخ مدل‌سازی 3DEC از خود نشان می‌دهند. بنابراین، روش‌های QGMRES, CR, GCR, GMRES, Lanczos, BiCG و GpBiCG برای انجام تحلیل‌های حساسیت در بخش‌های بعدی انتخاب شده‌اند.

۵-۳. تحلیل حساسیت

در این بخش به تحلیل حساسیت پارامترهای مختلف مؤثر بر جریان سیال تابع تنش و پارامترهای مربوط به روش‌های زیرفضای کریلف پرداخته می‌شود. در ابتدا تحلیل‌های حساسیت مربوط به راه‌حل محاسبه‌ی جریان تا مرحله‌ی تشکیل دستگاه‌های معادلات، در نظر گرفته می‌شود و سپس روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حل دستگاه‌های معادلات حاصل مقایسه می‌شوند، روش‌های ناکارآمد کنار گذاشته می‌شوند و بهترین آن‌ها انتخاب می‌شود.

۵-۳-۱. تعیین حجم عنصر نماینده

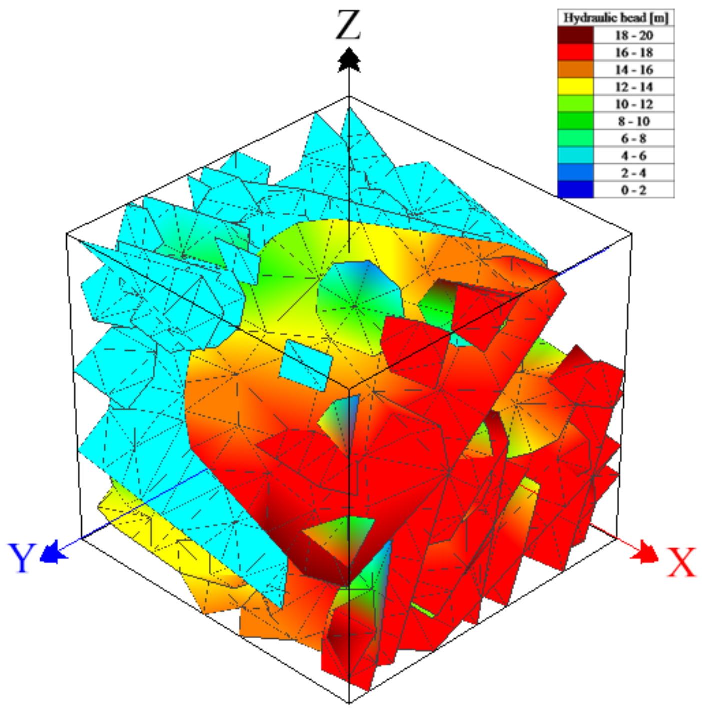
تحلیل حساسیتی برای درک اثر ابعاد مدل بر نرخ جریان و در نهایت تعیین حجم عنصر نماینده (REV) انجام شده است که در آن، طول ضلع مکعب مدل در هشت سطح مختلف تغییر می‌کند و برای هر سطح میانگین هندسی ضریب انتقال‌پذیری از ۲۰ حالت تصادفی مختلف از DFN با مشخصات هندسی-آماری ارایه شده در جدول ۵-۲، محاسبه می‌شود. در شکل ۵-۱۲، این تحلیل حساسیت نشان داده شده که برای آن انحراف معیار هر سطح نیز مشخص شده است. با توجه به‌این شکل، علاوه‌بر این‌که با افزایش ابعاد مدل، انحراف معیار روند کاهشی از خود نشان می‌دهد، به‌نظر می‌رسد که شبیه‌سازی‌ها به حد مشخصی همگرا می‌شوند (10^{-6} m/s). نقطه‌ی شروع این همگرایی در طول ضلع ۵ متری آغاز می‌شود. بنابراین، و برای جلوگیری از بار محاسباتی بیش‌ازحد محاسبات در تحلیل‌های حساسیت با یک REV ۵ متری می‌شود.



شکل ۵-۱۲ نمودار تغییرات ضریب انتقال‌پذیری در برابر طول ضلع REV

۵-۳-۲. تحلیل حساسیت پارامترهای مؤثر بر جریان سیال تابع تنش

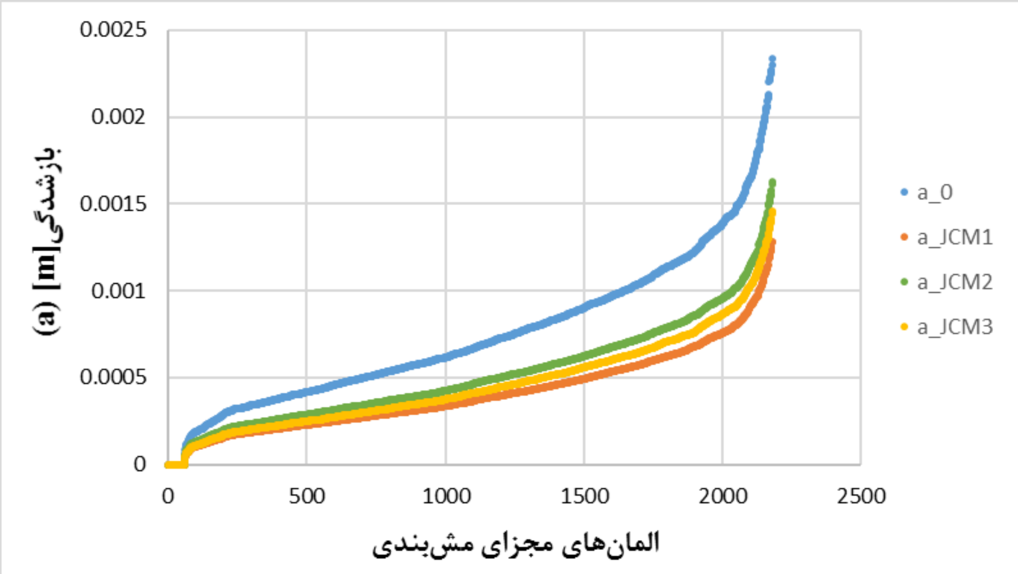
یک مدل DFN با مشخصات هندسی-آماری ارایه شده در جدول ۵-۲، برای انجام تحلیل حساسیت در نظر گرفته شده است. تعداد ۳۰ حالت مستقل تصادفی مختلف برای کاهش اثر عدم قطعیت در محاسبه‌ی جریان از DFN فوق تولید شده است. ویژگی‌های ژئومکانیکی و رئولوژیکی مدل مطابق جدول ۵-۴ است و یک هد هیدرولیکی ۲۰ متری بر وجه سمت راست مدل اعمال‌شده است و سایر وجوه مدل هد هیدرولیکی صفر دارند. در شکل ۵-۱۳ مثالی از نمودار توزیع هد هیدرولیکی در مدل برای یکی از حالت‌های تصادفی نشان داده‌شده است.



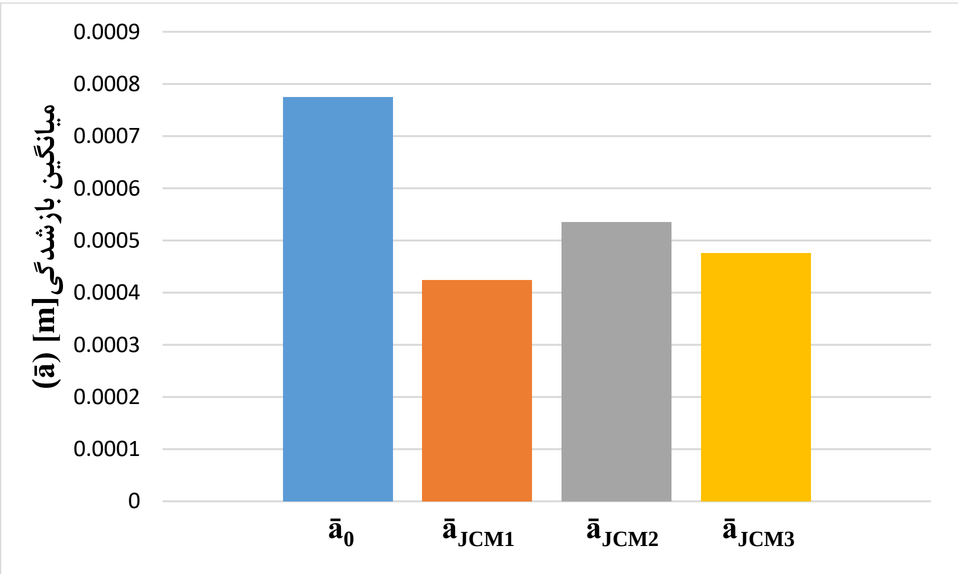
شکل ۵-۱۳ نمودار توزیع هد هیدرولیکی در یکی از حالت‌های تولیدشده توسط FlowSHUT^{3D}

در شکل ۵-۱۴-الف، اثر مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش (σ_V) بر بازشدگی شکستگی‌ها در مدل‌های ساختاری مختلف برای یکی از حالت‌های تصادفی با بازشدگی اولیه (a) مقایسه شده است. مقدار تنش برجای عمودی انتخاب شده در این تحلیل MPa ۱ و نسبت تنش افقی به قائم برابر ۱ است. در این نمودار هر یک از نقاط داده، نماینده‌ی بازشدگی تابع تنش برای یک المان مجزا از روش FEM برای مدل‌های ساختاری ارایه شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، بازشدگی المان‌های مجزا در یک مدل DFN شامل مقادیر مختلفی است که به‌وسیله‌ی تابع مشخصی توزیع شده است. هر سه مدل ساختاری به‌خوبی تابع توزیع اولیه را حفظ کرده‌اند.

اثر σ_V بر میانگین بازشدگی المان‌های مجزای مدل در شکل ۵-۱۴-ب، نشان داده‌شده است. بنابراین، بیشترین و کمترین اثرگذاری σ_V بر بازشدگی محاسبه‌شده از مدل‌های ساختاری به ترتیب توسط JCM1 و JCM2 آشکار می‌شود.



(الف) نمودار اثر مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش بر بازشدگی المان‌های مجزای مش‌بندی



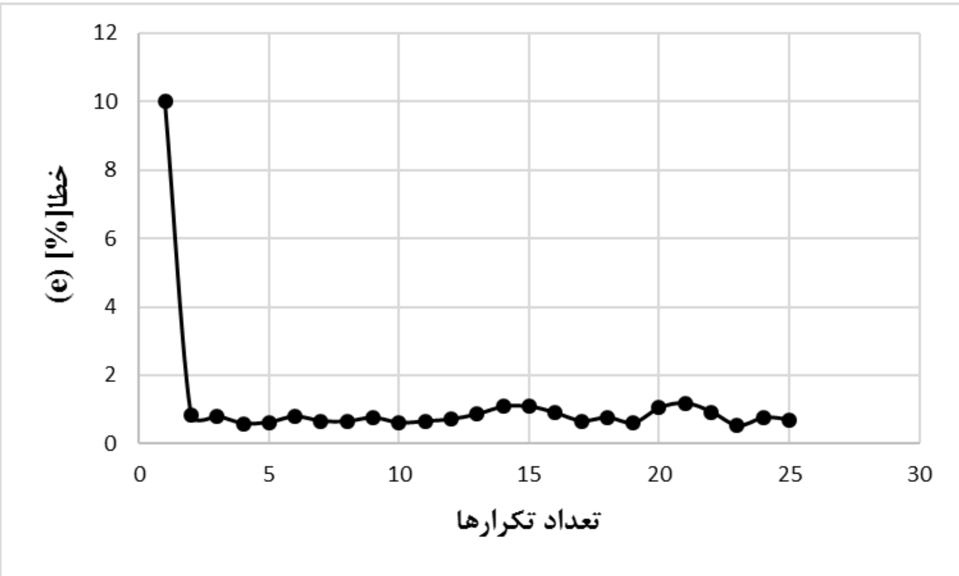
(ب) نمودار اثر مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش بر میانگین بازشدگی‌های مدل

شکل ۵-۱۴ اثر تنش بر بازشدگی المان‌های مجزای مدل

در شکل ۵-۱۵، نمودار تعداد حلقه‌های تکرار محاسبات تنش در برابر درصد خطای محاسباتی برای یکی از حالت‌های تصادفی نشان داده‌شده است. درصد خطای محاسباتی ($\bar{e}$) در این تحقیق از رابطه‌ی ۵-۵ محاسبه می‌شود.

$$\bar{e} = |e^{i}| = \frac{\|q^{i-1} - q^{i}\|_2}{\|q^{i}\|_2} \times 100\% \tag{۵-۵}$$

که در آن، q^{i-1} و q^{i} به ترتیب بردارهای جریان محاسبه‌شده در مراحل قبلی و جاری هستند. همان‌طور که از شکل ۵-۱۵ مشاهده می‌شود، تقریباً پس از پنج حلقه‌ی تکرار میزان خطا به مقدار متوسط ۰,۷٪ همگرا می‌شود، هرچند ممکن است این درصد خطا برای حالت‌های تصادفی مختلف متفاوت باشد. این نتیجه تأیید می‌کند که همگرایی الگوریتم حاضر بسیار سریع است و بنابراین تمامی تحلیل‌های حساسیت بر اساس پنج تکرار برای اطمینان از همگرایی پاسخ مدل صورت گرفته است. شایان ذکر است که با این تعداد از تکرارها عدم همگرایی در هیچ‌یک از تحلیل‌های حساسیت مشاهده نشد. بنابراین، الگوریتم توسعه یافته در این تحقیق همگرایی پاسخ مدل را با دقت مناسبی تضمین می‌نماید.



شکل ۵-۱۵ نمودار درصد خطای محاسبات در برابر تعداد تکرارهای الگوریتم

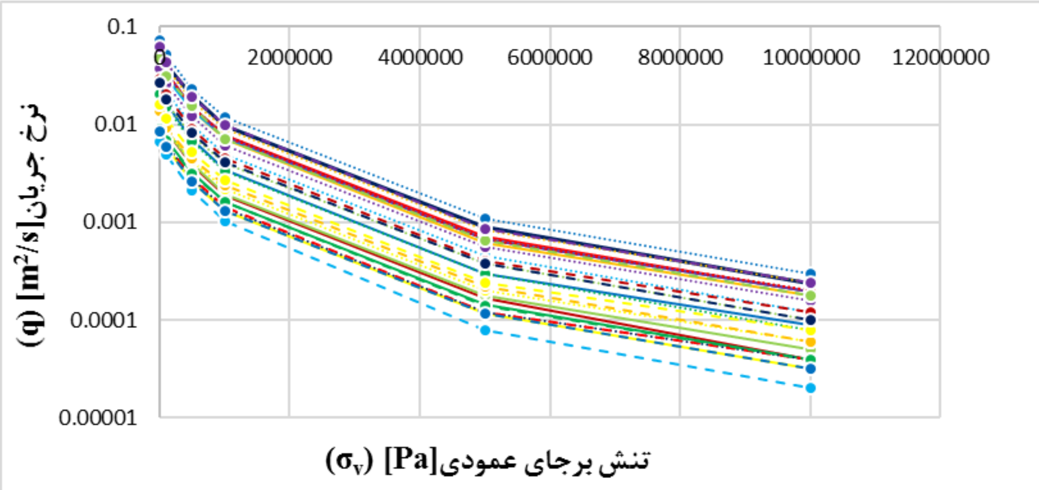
به دلیل این‌که تعداد زیادی از حالت‌های تصادفی مختلف برای ارزیابی دقیق تغییرپذیری مدل مورد نیاز است، در شکل ۵-۱۶-الف نمودار اثر σ_V بر نرخ جریان برای ۳۰ حالت تصادفی مختلف از DFN با یکدیگر مقایسه شده است. نسبت تنش افقی به عمودی (κ) در این تحلیل برابر ۱ در نظر گرفته شده است. در این شکل تغییرات جریان در اثر σ_V برای تمامی حالت‌های تصادفی روند تقریباً مشابهی را به‌صورت کاهشی نشان می‌دهد، هرچند، مقادیر نرخ جریان برای حالت‌های تصادفی مختلف در سطوح تنش ثابت می‌تواند بسیار متفاوت باشد. این تغییرپذیری به دلیل ماهیت تصادفی DFN است. به‌منظور محاسبه‌ی نرخ جریان برای یک REV از DFN باید میانگین هندسی نرخ جریان را از تمامی حالت‌های تصادفی محاسبه نمود. در شکل ۵-۱۶-ب نمودار میانگین هندسی نرخ جریان در برابر σ_V ترسیم‌شده است. بر اساس این نمودار رابطه‌ی ۵-۶ با ضریب همبستگی ۰,۹۴ برازش شده است.

$$q(m^2/s) = 16744\sigma_V{}^{-1.154}(Pa) \qquad (۶-۵)$$

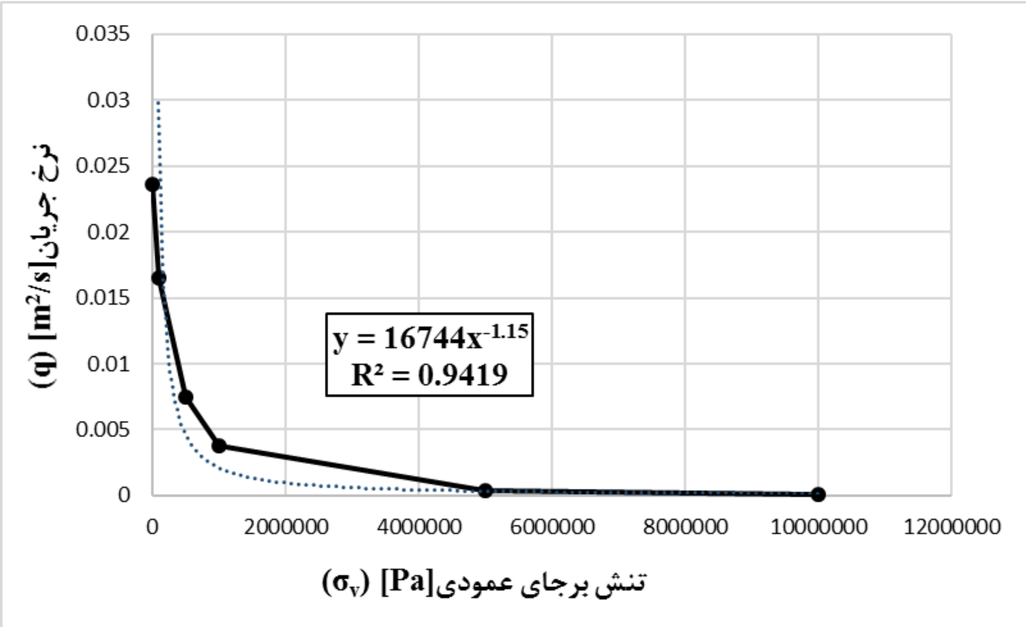
نرخ جریان تقریباً به‌صورت لاگ-نرمال توزیع شده است و بنابراین، انحراف معیار آن می‌تواند به‌صورت زیر محاسبه شود:

$$\sigma_{\ln q} = 0.757 \qquad (۷-۵)$$

در شکل ۵-۱۷، نمودار اثر نسبت κ بر جریان ارایه شده است. با تغییر نسبت κ جهت میدان تنش برجا تغییر می‌کند. با توجه به شکل ۵-۱۷-الف، با افزایش نسبت κ ، میزان نرخ جریان برای تمامی حالت‌های تصادفی کاهش می‌یابد. رابطه‌ی بین نرخ جریان متوسط و κ بر اساس شکل ۵-۱۷-ب با ضریب همبستگی ۰,۹۸، مطابق رابطه‌ی ۵-۸ است.



(الف) نمودار مقدار مؤلفه‌ی قائم میدان تنش برجا در برابر نرخ جریان برای حالت‌های تصادفی مختلف

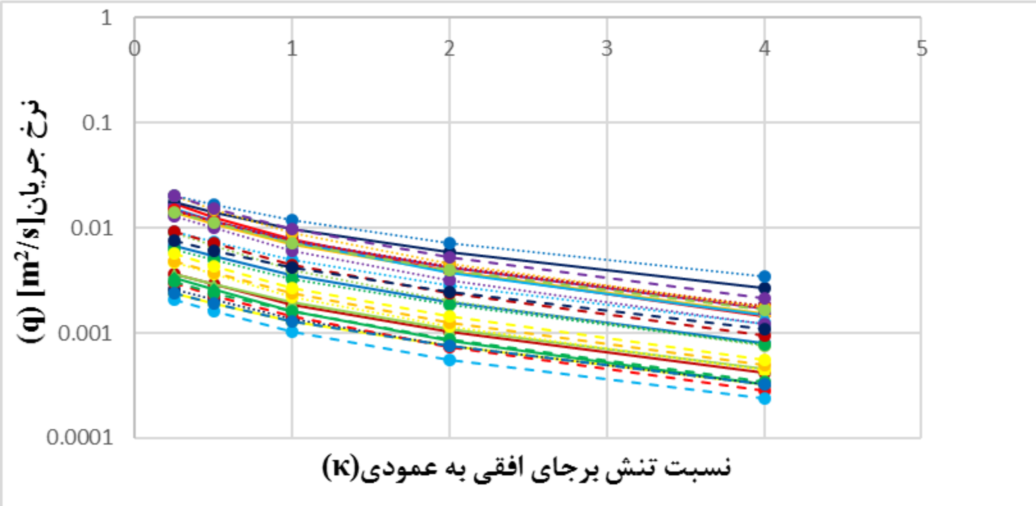


(ب) نمودار مقدار مؤلفه‌ی قائم میدان تنش برجا در برابر نرخ جریان میانگین هندسی نرخ جریان DFN

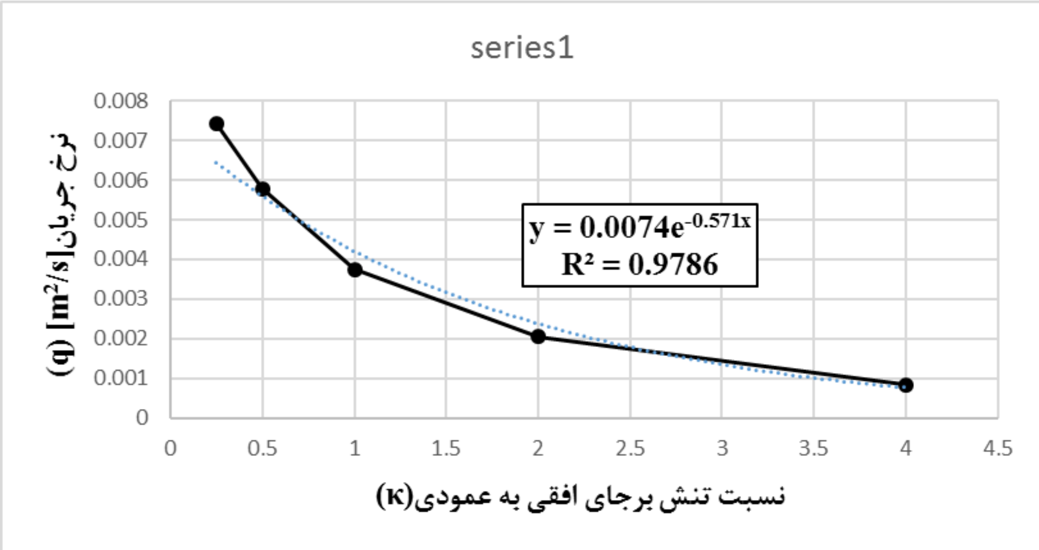
شکل ۵-۱۶ نمودارهای مقدار مؤلفه‌ی قائم میدان تنش برجا در برابر نرخ جریان

$$q(m^2/s) = 0.0074e^{-0.571\kappa} \quad (۵-۸)$$

همچنین، به نظر می‌رسد که نرخ جریان در شکل ۵-۱۷-ب به‌صورت یکنواخت در فضای لاگ-نرمال با انحراف معیار $\sigma_{\ln q} = 0.757$ توزیع شده است.



(الف) نمودار نسبت مؤلفه‌ی افقی به قائم میدان تنش برجا در برابر نرخ جریان برای حالت‌های تصادفی مختلف



(ب) نمودار نسبت مؤلفه‌ی افقی به قائم میدان تنش برجا در برابر میانگین نرخ جریان DFN

شکل ۵-۱۷ نمودار نسبت مؤلفه‌ی افقی به قائم میدان تنش برجا در برابر نرخ جریان

۵-۳-۳. تحلیل حساسیت روش‌های زیرفضای کریلف

پاراشار و ریوس [۱۱۴] تصریح نمودند که هیچ رتبه‌بندی کلی برای روش‌های تکراری زیرفضای کریلف که برای همه‌ی مسایل خطی صادق باشد، وجود ندارد. هنگامی‌که الگوریتم‌های معادل ریاضی در عمل پیاده‌سازی می‌شوند، ممکن است رفتار همگرایی خیلی متفاوتی از خود نشان دهند. بنابراین،

انتخاب روش حل تکراری اغلب وابسته به نوع مساله است. اگرچه، شاید کاربرد یک روش برای نوع خاصی از مسایل بهترین روش ممکن باشد، اما ممکن است به‌خوبی برای مسایل دیگر کاربردی نباشد. این محققان روش‌های تکراری زیرفضای کریلف شامل: GMRES, CG, MINRES, SYMMLQ, BCG, QMR, BI-CGSTAB و CGS را برای مسایل مختلف DFN دو بعدی با چگالی متوسط شبکه‌ی درزه‌ها (چگالی ۱/۵ بر متر، بر روی دامنه‌ی مربعی شکل با طول ضلع ۱۰۰ متر) مورد استفاده قرار دادند. پارامترهای متغیر آن‌ها نمای توزیع توانی برای طول (α) و انحراف معیار توزیع لاگ-نرمال برای انتقال‌پذیری (σ_T) است. این دو پارامترهایی هستند که می‌توانند حداکثر ناهمگنی را به سیستم‌های شکستگی آماری تحمیل کنند. این محققان تصریح کردند که به‌منظور آسان نگه‌داشتن تحلیل، در پارامترهای آماری مختص جهت‌داری، تغییری داده نشده است و مکان مراکز درزه به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند. شبکه‌ی شکستگی شامل دو مجموعه درزه‌ی عمود بر هم (میانگین جهت‌گیری: $\pm 45^\circ$)، با مقادیر ثابت برای میانگین انتقال‌پذیری، $l_{\min}$ و k توزیع ون‌مایسس- فیشر است. تکرارها با حداقل تغییرات 10^{-6} از پارامتر مورد بررسی و حداکثر 3×10^{4} تکرار، مجاز شده است. در مواردی که روش‌های تکراری همگرا شده‌اند، تعداد کل تکرارها و نیز زمان پردازش CPU (بر روی یک کامپیوتری با پردازشگر Core 2 quad) ثبت شده‌اند. بعضی از الگوریتم‌ها، محاسبات کمتری در هر تکرار نیاز دارند، و بنابراین زمان پردازش CPU اندازه‌گیری بهتری برای ارزیابی کارایی روش‌ها به‌جای فقط مقایسه‌ی تعداد کل تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی را ارایه می‌کند.

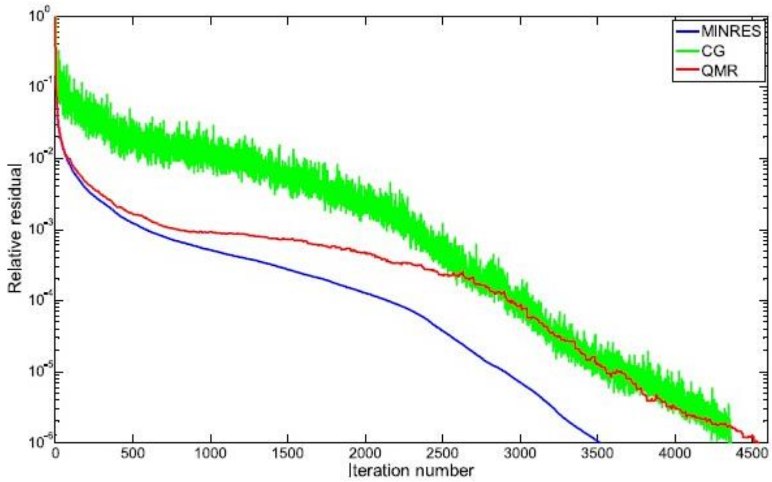
بر اساس ادعای این محققان، روش آرنولدی که پایه‌ی متعامدسازی روش GMRES است برای همگرایی مسایل DFN ناتوان گزارش شده است. این یافته با شواهد دیگری در متون علمی مختلف منطبق است که به‌منظور پایدارسازی روش‌های نوع GMRES ازلحاظ عملی، لازم است که از یک پیش‌شرط‌گذار برای بهبود خواص طیفی دستگاه‌های خطی استفاده شود. روش CG که بر پایه‌ی متعامدسازی لنکزوس است، معمولاً برای دستگاه‌های معین مثبت متقارن مورداستفاده قرار می‌گیرد.

این روش برای شبکه‌های شکستگی آزمایش‌شده همگرا می‌شود اما زمان پردازش CPU با افزایش ابعاد شبکه به‌سرعت افزایش می‌یابد. روش‌های MINRES و SYMMLQ، که از پایه‌ی لنکزوس برای ماتریس‌های معین متقارن استفاده می‌کنند، ویژگی‌های همگرایی بسیار مطلوبی برای مسایل DFN دو بعدی دارند. نه‌تنها این روش‌ها در حداقل تعداد تکرار همگرا می‌شوند بلکه زمان محاسبات در هر تکرار نیز کم‌تر است. زمان پردازش CPU برای MINRES و SYMMLQ معمولاً از ۲۵ ٪ تا ۴۰ ٪ زمان پردازش CPU برای الگوریتم CG متغیر است. همچنین، معمولاً MINRES نسبت به SYMMLQ عملکرد بهتر و الگوی همگرایی ملایم‌تری نشان می‌دهد. الگوی همگرایی برای CG و SYMMLQ هر دو نامنظم به نظر می‌رسند. روش‌های BiCG و QMR که در دسته‌ی روش‌های متعامد دوگانه لنکزوس توسعه یافته برای ماتریس‌های نامتقارن هستند، برای همه‌ی ترکیب‌های پارامترهای موردنظر برای شبکه‌ی شکستگی مجزای دو بعدی همگرا می‌شوند. زمان پردازش CPU موردنیاز برای همگرایی بین ۳ تا ۵ برابر زمان پردازش CPU برای روش‌های MINRES و SYMMLQ است. روش‌های دو-متعامدی لنکزوس یعنی، Bi-CGSTAB و CGS ویژگی‌های همگرایی بسیار ضعیفی برای مسایل DFN نشان می‌دهند. تعداد تکرارها و زمان پردازش CPU موردنیاز برای Bi-CGSTAB حداقل ۲ برابر بیشتر از همه‌ی روش‌های دیگر است و CGS معمولاً همگرا نمی‌شود [۱۱۴]. در جدول ۵-۶ و ۵-۷ کارایی روش‌های MINRES، SYMMLQ، BCG و QMR مقایسه شده است. در این جداول پارامتر α نمای تابع توزیع توانی برای طول، σ_T انحراف معیار تابع توزیع لاگ-نرمال برای انتقال‌پذیری، N تعداد کل گره‌های داخلی (مجهولات)، $nnzA$ تعداد عناصر غیر صفر موجود در ماتریس ضرایب و $\rho(A)$ شعاع طیفی (حداکثر مقادیر ویژه) ماتریس ضرایب است.

جدول ۵-۶ کارایی روش‌های مختلف زیرفضای کریلف در رابطه با تغییرات ویژگی‌های شبکه‌ی شکستگی و ویژگی‌های طیفی ماتریس مربوط به مدل DFN [۱۱۴]

SYMMLQ		QMR		MINRES		BiCG		پارامترهای شبکه‌ی شکستگی و ویژگی‌های ماتریس ضرایب						
زمان پردازش (ثانیه)	تعداد تکرارها	زمان پردازش (ثانیه)	تعداد تکرارها	زمان پردازش (ثانیه)	تعداد تکرارها	زمان پردازش (ثانیه)	تعداد تکرارها	$\Sigma\lambda_i$	$\rho(A)$	nnzA	N	تعداد شکستگی‌ها	σ_T	α
۱۰۹٫۲	۲۰۹۷	۳۱۸٫۹	۲۰۳۵	۹۵	۱۸۲۶	۳۵۷٫۲	۲۲۷۲	۱۰۲۷۹	۱۳۸٫۹	۲۶۸۲۷	۵۷۰۵	۸۷۰	۰	۱
۱۴۱٫۶	۲۷۳۱	۴۵۲٫۳	۲۸۷۹	۱۲۶٫۷	۲۴۴۵	۴۷۳٫۲	۳۰۲۴	۱۱۳۸۵	۳۴۵٫۸	۲۶۸۲۷	۵۷۰۵	۸۷۰	۲	۱
۱۶۴٫۵	۳۱۵۴	۵۵۱٫۶	۳۴۹۹	۱۴۹٫۸	۲۸۴۷	۵۸۲٫۴	۳۶۹۱	۱۵۹۵۳	۱۱۱۲٫۸	۲۶۸۲۷	۵۷۰۵	۸۷۰	۰٫۴	۱
۲۰۴٫۵	۳۹۱۵	۶۶۷٫۸	۴۲۵۲	۱۸۱٫۹	۳۴۷۸	۷۴۴	۴۷۴۳	۲۷۴۸۸	۳۵۸۱٫۳	۲۶۸۲۷	۵۷۰۵	۸۷۰	۰٫۶	۱
۲۵۶٫۹	۴۸۷۲	۷۵۲٫۷	۴۷۹۳	۲۰۸	۳۹۳۰	۹۴۳٫۵	۵۹۶۲	۵۵۸۹۴	۱۱۵۲۶	۲۶۸۲۷	۵۷۰۵	۸۷۰	۰٫۸	۱
۳۲۱٫۸	۶۱۹۱	۱۰۴۳٫۴	۶۶۴۱	۲۶۳٫۶	۵۰۵۱	۱۵۸۴٫۳	۱۰۱۰۳	۱۲۸۹۴۰	۳۷۰۹۵	۲۶۸۲۷	۵۷۰۵	۸۷۰	۱	۱
۲۲۳٫۷	۴۲۷۸	۶۵۹٫۸	۴۱۹۳	۱۷۶٫۴	۳۳۶۰	۷۹۵٫۹	۵۰۸۴	۲۶۴۵۷	۱۱۸۵٫۴	۲۵۹۹۴	۵۷۱۲	۱۳۲۱	۰	۱٫۵
۳۱۹٫۶	۶۱۳۰	۱۰۳۵٫۷	۶۵۹۵	۲۵۰٫۸	۴۸۰۵	۱۲۰۱٫۴	۷۶۳۴	۲۸۳۴۵	۱۷۶۴٫۷	۲۵۹۹۴	۵۷۱۲	۱۳۲۱	۲	۱٫۵
۳۴۳	۶۵۷۱	۱۰۵۶٫۱	۶۷۱۲	۲۷۳	۵۲۳۱	۱۳۲۶٫۹	۸۴۶۲	۳۶۱۰۸	۲۶۲۸٫۱	۲۵۹۹۴	۵۷۱۲	۱۳۲۱	۰٫۴	۱٫۵
۳۸۹٫۸	۷۴۴۴	۱۲۵۷٫۹	۸۰۱۹	۳۰۳٫۲	۵۸۳۳	۱۳۹۲٫۷	۸۹۳۶	۵۲۷۴۴	۴۰۵۱٫۷	۲۵۹۹۴	۵۷۱۲	۱۳۲۱	۰٫۶	۱٫۵
۴۵۲	۸۶۴۲	۱۵۱۳٫۴	۹۶۳۱	۳۶۹٫۹	۷۰۸۱	۱۷۹۶٫۱	۱۱۴۵۷	۸۶۰۶۶	۸۱۲۶٫۱	۲۵۹۹۴	۵۷۱۲	۱۳۲۱	۰٫۸	۱٫۵
۵۰۴٫۴	۹۶۰۴	۱۶۹۹٫۴	۱۰۸۴۰	۴۳۵٫۳	۸۳۰۵	۲۰۱۷٫۴	۱۲۷۹۳	۱۵۴۶۲۰	۱۶۲۹۷	۲۵۹۹۴	۵۷۱۲	۱۳۲۱	۱	۱٫۵
۲۴۱٫۱	۴۵۲۵	۷۳۴٫۱	۴۵۶۱	۲۰۸٫۵	۳۹۰۹	۸۲۶٫۵	۵۱۵۲	۱۶۴۲۰	۵۰۴٫۴	۲۵۷۰۱	۵۷۷۵	۱۶۵۷	۰	۲
۳۱۲٫۷	۵۸۵۷	۱۰۶۲٫۴	۶۵۹۹	۲۷۱٫۹	۵۰۸۲	۱۱۱۲	۶۹۲۸	۱۷۴۳۳	۹۱۵٫۴	۲۵۷۰۱	۵۷۷۵	۱۶۵۷	۲	۲
۳۴۵٫۴	۶۴۸۰	۱۱۴۶٫۳	۷۱۲۴	۲۹۱٫۴	۵۴۴۸	۱۳۰۱٫۹	۸۱۰۳	۲۲۶۲۹	۱۶۶۹٫۲	۲۵۷۰۱	۵۷۷۵	۱۶۵۷	۰٫۴	۲
۳۷۲٫۴	۶۹۸۲	۱۲۰۰٫۸	۷۴۷۸	۲۹۸٫۲	۵۵۷۶	۱۴۱۸٫۴	۸۸۴۰	۳۴۲۵۳	۳۰۴۳٫۵	۲۵۷۰۱	۵۷۷۵	۱۶۵۷	۰٫۶	۲
۴۵۶٫۹	۸۵۶۸	۱۳۹۶٫۹	۸۶۸۹	۳۵۷٫۱	۶۷۰۸	۱۶۹۵٫۳	۱۰۵۷۳	۵۸۴۳۶	۵۵۴۹٫۴	۲۵۷۰۱	۵۷۷۵	۱۶۵۷	۰٫۸	۲
۵۶۰٫۵	۱۰۴۹۵	۱۸۶۳٫۲	۱۱۶۰۳	۴۳۳٫۹	۸۱۴۳	۲۱۳۱٫۸	۱۳۲۹۱	۱۱۰۳۴۰	۱۰۱۱۹	۲۵۷۰۱	۵۷۷۵	۱۶۵۷	۱	۲
۲۳۷٫۶	۴۵۴۹	۷۱۷٫۹	۴۵۷۳	۲۰۰٫۹	۳۸۳۸	۸۱۱٫۴	۵۱۸۲	۱۲۸۳۲	۴۹۹٫۹	۲۴۹۹۹	۵۷۲۷	۱۹۰۸	۰	۲٫۵
۲۵۶٫۵	۴۹۱۸	۷۵۴٫۱	۴۸۰۷	۲۱۶	۴۱۲۳	۹۰۱٫۶	۵۷۵۰	۱۳۰۸۰	۶۹۱٫۹	۲۴۹۹۹	۵۷۲۷	۱۹۰۸	۲	۲٫۵
۲۷۰٫۲	۵۱۹۴	۸۱۵٫۷	۵۲۰۴	۲۱۶٫۳	۴۱۴۰	۹۶۶٫۱	۶۱۸۳	۱۶۵۱۶	۱۱۸۳	۲۴۹۹۹	۵۷۲۷	۱۹۰۸	۰٫۴	۲٫۵
۳۰۱٫۶	۵۷۷۸	۹۱۴	۵۸۳۳	۲۴۰٫۷	۴۶۰۴	۱۰۷۶٫۷	۶۸۹۱	۲۵۲۰۵	۲۰۲۲٫۵	۲۴۹۹۹	۵۷۲۷	۱۹۰۸	۰٫۶	۲٫۵
۳۷۵٫۹	۷۲۰۷	۱۰۷۸٫۲	۶۸۷۴	۲۹۴٫۱	۵۶۳۲	۱۳۳۷٫۵	۸۵۳۱	۴۵۱۱۰	۳۴۵۸	۲۴۹۹۹	۵۷۲۷	۱۹۰۸	۰٫۸	۲٫۵
۵۰۵٫۵	۹۷۰۹	۱۵۶۱٫۹	۹۹۶۵	۴۰۰٫۳	۷۶۷۷	۱۸۳۲٫۷	۱۱۷۲۸	۹۱۹۰۷	۵۹۱۲٫۳	۲۴۹۹۹	۵۷۲۷	۱۹۰۸	۱	۲٫۵
۲۲۲	۴۲۳۵	۶۸۰٫۴	۴۳۲۷	۱۸۷٫۱	۳۵۶۳	۷۹۰٫۸	۵۰۳۵	۱۱۵۹۰	۴۹۹٫۹	۲۴۳۴۰	۵۶۶۰	۲۰۸۷	۰	۳
۲۵۰٫۸	۴۷۵۰	۸۹۶٫۳	۵۶۴۶	۲۰۳٫۵	۳۸۳۶	۹۵۱٫۵	۶۰۱۱	۱۲۶۹۹	۱۰۰۶٫۵	۲۴۳۴۰	۵۶۶۰	۲۰۸۷	۲	۳
۲۷۹٫۷	۵۲۹۰	۹۳۸٫۶	۵۵۶۲	۲۲۱٫۲	۴۱۶۸	۱۰۰۵٫۳	۶۳۲۷	۱۸۱۸۰	۳۰۶۶٫۱	۲۴۳۴۰	۵۶۶۰	۲۰۸۷	۰٫۴	۳
۳۵۲٫۱	۶۶۶۸	۱۲۸۹٫۱	۸۱۱۶	۲۷۵٫۷	۵۲۱۶	۱۳۲۲٫۱	۸۴۲۳	۳۲۹۵۳	۹۳۴۱٫۲	۲۴۳۴۰	۵۶۶۰	۲۰۸۷	۰٫۶	۳
۴۷۲٫۴	۸۹۷۸	۱۷۳۴٫۴	۱۰۹۶۱	۳۶۸٫۱	۶۹۵۱	۱۸۱۸٫۳	۱۱۵۴۹	۷۱۵۷۹	۲۸۴۵۹	۲۴۳۴۰	۵۶۶۰	۲۰۸۷	۰٫۸	۳
۷۰۴٫۵	۱۳۳۵۰	۲۲۱۴٫۴	۱۳۹۵۷	۵۲۲٫۸	۹۹۰۶	۲۷۳۱٫۱	۱۷۲۹۲	۱۷۶۰۲۰	۸۶۷۰۶	۲۴۳۴۰	۵۶۶۰	۲۰۸۷	۱	۳

به نظر می‌رسد که روش MINRES برای همه‌ی موارد آزمایش‌شده کارایی بهتری داشته باشد. برای SYMMLQ نیز تقریباً همین‌گونه است. روش QMR با یک الگوی همگرایی نسبتاً ملایم از روش BiCG که دارای یک الگوی همگرایی نامنظم است، کارایی بهتری دارد. شکل ۵-۱۸ الگوهای همگرایی CG، MINRES، و QMR؛ سه روش متعلق به کلاس‌های مختلف را نشان می‌دهد [۱۱۴].

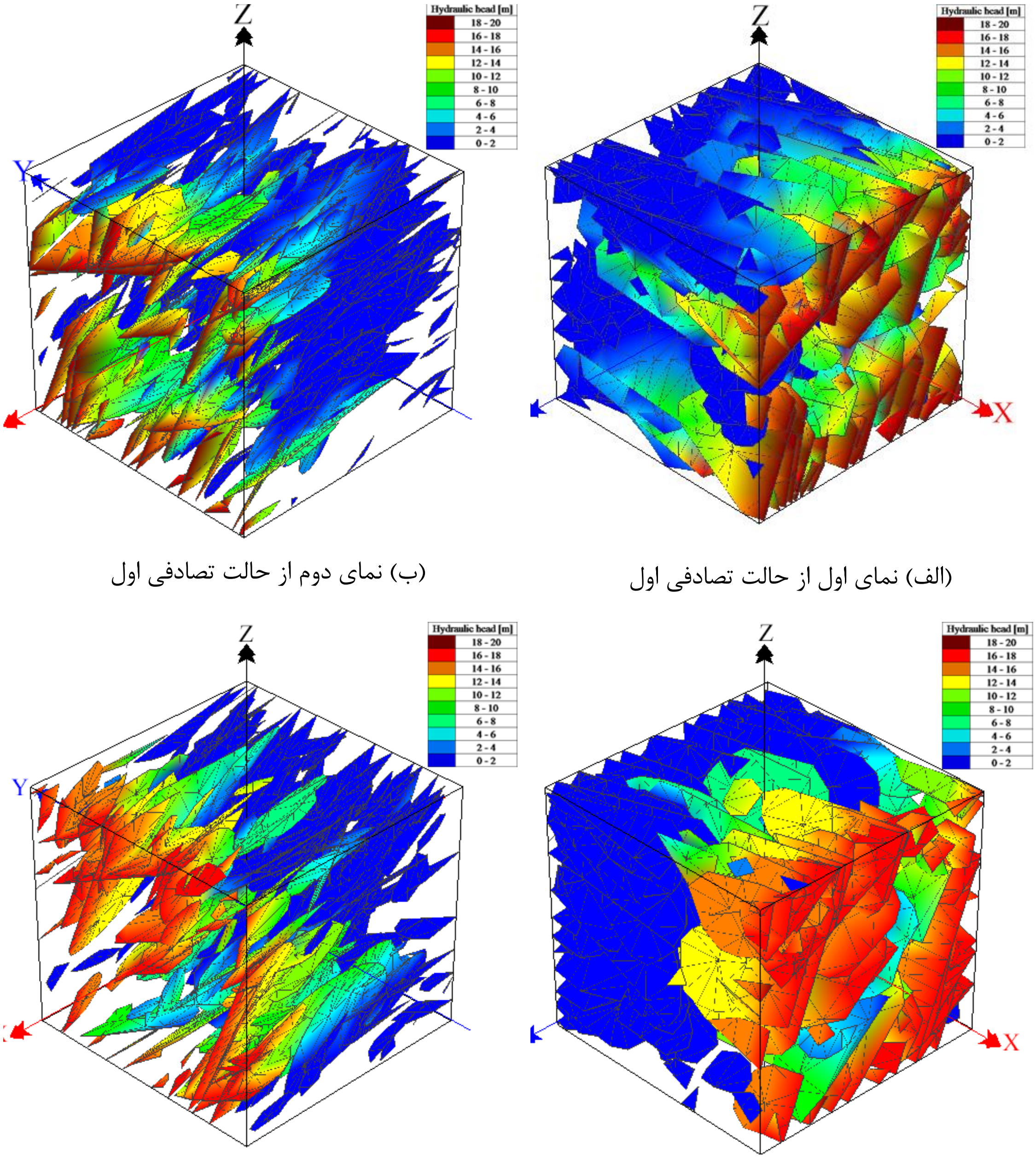


شکل ۵-۱۸ مقایسه‌ی بین الگوی همگرایی روش‌های CG، MINREs و QMR برای مساله‌ی DFN دو بعدی با اندازه‌ی متوسط [۱۱۴]

به‌منظور مقایسه‌ی دقت و سرعت روش‌های حل عددی زیرفضای کریلف، در این بخش به تحلیل حساسیت این پارامترها و اثر آن‌ها بر محاسبه‌ی جریان سیال در مدل شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا پرداخته می‌شود. این مدل هندسی با استفاده از داده‌های هندسی- آماری جدول ۵-۲ تولیدشده است. REV مدل یک مکعب با ابعاد ۱۰×۱۰×۱۰ متر است. یک هد هیدرولیکی ۲۰ متری بر وجه سمت راست مدل (در جهت مثبت محور X) قرار داده‌شده و هد هیدرولیکی سایر وجوه مدل صفر در نظر گرفته شده است. به‌منظور چشم‌پوشی از اثر تغییرپذیری پارامترهای آماری شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا تحلیل حساسیت به‌طور مستقل در دو حالت تصادفی مختلف تولیدشده از شبکه انجام می‌گیرد. پارامترهای ژئومکانیکی و رئولوژیکی مدل مطابق با جدول ۵-۲ در نظر گرفته شده و نمودار سه‌بعدی هد هیدرولیکی در دو نمای مختلف برای دو حالت تصادفی در شکل ۵-۱۹ نشان داده شده است.

جدول ۵-۷ کارایی روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای یک حالت تصادفی متفاوت از شبکه‌ی شکستگی‌های ارایه شده در جدول ۶-۱ [۱۱۴]

پارامترهای شبکه‌ی شکستگی و ویژگی‌های ماتریس ضرایب							BiCG		MINRES		QMR		SYMMLQ	
α	σ_T	تعداد شکستگی‌ها	N	nnzA	$\rho(A)$	$\Sigma\lambda_i$	تعداد تکرارها	زمان پردازش (ثانیه)	تعداد تکرارها	زمان پردازش (ثانیه)	تعداد تکرارها	زمان پردازش (ثانیه)	تعداد تکرارها	زمان پردازش (ثانیه)
۱	۰	۸۹۱	۵۵۸۷	۲۶۱۹۵	۶۱۲٫۹	۱۲۸۲۴	۲۶۱۶	۳۹۶٫۴	۲۰۱۲	۱۰۱٫۸	۲۲۳۰	۳۳۹٫۶	۲۴۶۷	۱۲۴٫۴
۱	۰٫۲	۸۹۱	۵۵۸۷	۲۶۱۹۵	۸۵۲٫۶	۱۲۲۴۱	۳۳۰۶	۵۰۰٫۵	۲۳۹۹	۱۲۱٫۴	۲۹۸۲	۴۵۳٫۳	۲۷۷۷	۱۳۹٫۸
۱	۰٫۴	۸۹۱	۵۵۸۷	۲۶۱۹۵	۱۱۸۷٫۱	۱۴۶۵۷	۲۹۸۲	۴۵۲٫۱	۲۲۵۴	۱۱۳٫۹	۲۶۷۵	۴۰۸٫۱	۲۶۹۱	۱۳۵٫۳
۱	۰٫۶	۸۹۱	۵۵۸۷	۲۶۱۹۵	۱۶۵۲٫۸	۲۱۰۷۶	۳۳۵۴	۵۰۹۲	۲۳۶۵	۱۱۹٫۴	۲۷۹۴	۴۲۶٫۸	۲۹۲۲	۱۴۷٫۶
۱	۰٫۸	۸۹۱	۵۵۸۷	۲۶۱۹۵	۲۳۰۱٫۴	۳۴۹۲۹	۴۲۵۹	۶۴۵۲	۲۸۱۹	۱۴۲٫۵	۳۲۰۷	۴۸۸	۳۵۱۴	۱۷۷٫۶
۱	۱	۸۹۱	۵۵۸۷	۲۶۱۹۵	۳۲۰۴٫۹	۶۴۸۵۲	۵۳۳۱	۸۰۳٫۸	۳۴۹۱	۱۷۴٫۷	۴۸۶۸	۷۳۵٫۸	۴۴۵۲	۲۲۲٫۳
۱٫۵	۰	۱۳۲۹	۵۵۶۴	۲۵۲۷۴	۶۱۲٫۳	۱۵۷۳۰	۳۰۰۰	۴۴۷٫۴	۱۹۶۶	۹۷٫۶	۲۳۲۵	۳۴۸٫۱	۲۶۳۵	۱۳۰٫۷
۱٫۵	۰٫۲	۱۳۲۹	۵۵۶۴	۲۵۲۷۴	۷۱۱٫۶	۱۵۲۰۰	۳۹۱۰	۵۸۲٫۱	۲۴۸۶	۱۲۳٫۴	۳۳۳۷	۴۹۷٫۲	۳۲۵۸	۱۶۱٫۳
۱٫۵	۰٫۴	۱۳۲۹	۵۵۶۴	۲۵۲۷۴	۸۲۸٫۱	۱۷۹۳۱	۳۶۴۱	۵۴۲٫۵	۲۵۷۹	۱۲۷٫۵	۳۱۶۵	۴۷۲٫۲	۳۲۰۰	۱۵۸
۱٫۵	۰٫۶	۱۳۲۹	۵۵۶۴	۲۵۲۷۴	۹۶۳٫۸	۲۵۹۷۹	۳۹۲۷	۵۸۴٫۳	۲۷۷۴	۱۳۷٫۸	۳۴۶۴	۵۱۶٫۷	۳۳۷۳	۱۶۷
۱٫۵	۰٫۸	۱۳۲۹	۵۵۶۴	۲۵۲۷۴	۱۶۵۶٫۵	۴۵۹۹۷	۴۷۶۰	۷۰۸٫۴	۳۳۰۰	۱۶۴٫۲	۳۸۵۳	۵۷۵٫۲	۳۹۵۴	۱۹۶٫۴
۱٫۵	۱	۱۳۲۹	۵۵۶۴	۲۵۲۷۴	۵۷۴۹٫۵	۹۷۳۳۰	۶۳۲۶	۹۴۶	۴۲۶۷	۲۱۲٫۸	۵۲۰۴	۷۸۱٫۱	۵۴۶۹	۲۷۱٫۷
۲	۰	۱۶۶۶	۵۵۶۱	۲۴۵۹۱	۱۱۰۲	۹۹۵۲٫۲	۲۰۹۴	۳۱۳٫۸	۱۵۷۰	۷۹	۱۸۲۵	۲۷۴٫۲	۱۹۱۰	۹۵٫۴
۲	۰٫۲	۱۶۶۶	۵۵۶۱	۲۴۵۹۱	۲۲۰٫۷	۱۰۸۱۶	۲۷۴۸	۴۱۲	۱۸۴۴	۹۲٫۴	۲۳۰۷	۳۴۶٫۸	۲۳۹۶	۱۱۹٫۸
۲	۰٫۴	۱۶۶۶	۵۵۶۱	۲۴۵۹۱	۵۷۰٫۷	۱۴۴۵۵	۳۴۰۸	۵۰۹٫۴	۲۲۴۷	۱۱۲٫۶	۲۸۸۷	۴۳۱٫۵	۲۹۱۰	۱۴۴
۲	۰٫۶	۱۶۶۶	۵۵۶۱	۲۴۵۹۱	۱۴۷۷	۲۳۴۴۹	۴۶۰۸	۶۸۲٫۵	۲۹۵۲	۱۴۶٫۹	۳۸۸۹	۵۷۸٫۹	۳۸۶۹	۱۹۱٫۳
۲	۰٫۸	۱۶۶۶	۵۵۶۱	۲۴۵۹۱	۳۸۲۳٫۱	۴۵۰۳۲	۶۵۰۳	۹۶۶٫۱	۴۰۸۰	۲۰۲٫۳	۵۴۶۶	۸۱۴٫۲	۵۳۷۷	۲۶۶
۲	۱	۱۶۶۶	۵۵۶۱	۲۴۵۹۱	۹۸۹۷٫۱	۹۹۱۱۰	۹۷۷۵	۱۴۶۰٫۶	۵۴۲۸	۲۶۸٫۹	۸۴۴۷	۱۲۵۷٫۷	۷۸۸۶	۳۸۹٫۹
۲٫۵	۰	۱۹۲۹	۵۶۳۱	۲۴۴۳۹	۱۶۸٫۳	۱۰۱۹۰	۲۵۲۹	۳۹۶	۱۸۵۹	۹۸٫۱	۲۲۴۲	۳۵۲٫۱	۲۲۰۰	۱۱۶٫۳
۲٫۵	۰٫۲	۱۹۲۹	۵۶۳۱	۲۴۴۳۹	۳۱۵٫۱	۱۱۵۱۱	۳۲۷۱	۵۱۱٫۴	۲۳۰۶	۱۲۱٫۹	۲۷۱۳	۴۲۶٫۳	۲۸۵۵	۱۵۰٫۶
۲٫۵	۰٫۴	۱۹۲۹	۵۶۳۱	۲۴۴۳۹	۵۸۹٫۸	۱۶۰۷۰	۴۵۵۹	۷۲۳٫۷	۲۸۸۵	۱۵۴	۳۴۹۵	۵۵۳٫۲	۳۶۰۶	۱۹۱٫۷
۲٫۵	۰٫۶	۱۹۲۹	۵۶۳۱	۲۴۴۳۹	۱۴۷۵٫۷	۲۷۴۲۱	۵۹۸۱	۹۴۰٫۱	۳۸۶۲	۲۰۵٫۱	۴۸۵۵	۷۶۵٫۹	۴۸۵۱	۲۵۷٫۹
۲٫۵	۰٫۸	۱۹۲۹	۵۶۳۱	۲۴۴۳۹	۵۳۳۶٫۲	۵۵۸۷۷	۹۰۰۸	۱۴۲۰٫۴	۵۳۵۸	۲۸۵	۷۴۱۰	۱۱۷۲	۶۹۳۲	۳۶۷٫۳
۲٫۵	۱	۱۹۲۹	۵۶۳۱	۲۴۴۳۹	۲۰۶۴۶	۱۳۲۲۳۰	۱۵۶۳۸	۲۴۵۰٫۵	۷۷۷۸	۴۱۱٫۵	۱۲۰۰۶	۱۸۸۷	۱۰۴۲۲	۵۵۰٫۲
۳	۰	۲۰۹۳	۵۶۰۸	۲۴۰۰۶	۲۴۳٫۴	۱۰۸۷۸	۲۸۹۹	۴۴۵٫۳	۲۰۹۰	۱۰۸٫۳	۲۵۷۱	۳۹۶٫۲	۲۶۳۵	۱۳۵٫۹
۳	۰٫۲	۲۰۹۳	۵۶۰۸	۲۴۰۰۶	۲۴۵۲	۱۲۲۶۸	۳۶۶۸	۵۶۰٫۹	۲۴۰۶	۱۲۳٫۹	۲۸۱۴	۴۳۱٫۳	۳۱۵۷	۱۶۲٫۸
۳	۰٫۴	۲۰۹۳	۵۶۰۸	۲۴۰۰۶	۵۷۷٫۳	۱۷۱۴۰	۴۷۳۰	۷۲۶٫۶	۳۰۹۴	۱۶۰	۳۸۹۰	۵۹۸	۳۹۶۴	۲۰۴٫۶
۳	۰٫۶	۲۰۹۳	۵۶۰۸	۲۴۰۰۶	۱۴۹۴٫۱	۲۹۵۴۱	۶۸۱۳	۱۰۴۷٫۶	۴۲۲۵	۲۱۸٫۲	۵۴۸۳	۸۴۵٫۵	۵۵۵۱	۲۸۶
۳	۰٫۸	۲۰۹۳	۵۶۰۸	۲۴۰۰۶	۴۸۵۱٫۹	۶۰۹۸۵	۱۱۳۲۱	۱۷۳۱٫۹	۶۱۶۱	۳۱۷٫۸	۹۲۶۱	۱۴۱۷٫۲	۸۰۳۱	۴۱۳٫۱
۳	۱	۲۰۹۳	۵۶۰۸	۲۴۰۰۶	۱۶۱۱۱	۱۴۴۵۰۰	۱۶۸۱۷	۲۵۶۰٫۸	۹۲۹۱	۴۷۶٫۹	۱۳۶۸۰	۲۱۱۴٫۳	۱۲۵۵۶	۶۵۰



(الف) نمای اول از حالت تصادفی اول

(ب) نمای دوم از حالت تصادفی اول

(پ) نمای اول از حالت تصادفی دوم

(ت) نمای دوم از حالت تصادفی دوم

شکل ۵-۱۹ نمودار هد هیدرولیکی در مدل شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی در دو نمای مختلف

تحلیل حساسیت نشان داده است که برای هر دو حالت تصادفی، سه روش PCGCR، Ml(k)BiCGStab و TFQMR ، که در مرحله‌ی اعتبارسنجی نیز قادر به همگرایی به پاسخ مدل نبودند، نتایج مشابهی را در ارتباط با مدل DFN نشان می‌دهند و همگرایی حاصل نمی‌شود. مقدار جریان محاسبه‌شده از طریق روش مستقیم فاکتورگیری LQ و روش‌های زیرفضای کریلفی که به پاسخ مدل همگرا هستند برای دو

حالت تصادفی مختلف در جداول ۸-۵ و ۵-۹ به کمک مدل‌سازی‌های عددی $FlowSHUT^{3D}$ ارایه شده است.

جدول ۵-۸ جریان محاسبه‌شده برای حالت تصادفی اول از مدل شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا از طریق روش‌های مختلف زیرفضای کریلف

روش	جریان (m^3/s)	روش	جریان (m^3/s)
مستقیم	۳۵,۷۳	GMRES	۳۵,۰۴
FOM	۳۵,۰۳	QGMRES	۳۵,۴۵
IOM	۳۵,۴۴	GPBiCG	۴۶,۸۵
CG	۳۵,۷۸	BiCG	۴۷,۱۹
CR	۳۵,۷۵	LANCZOS	۳۷
GCR	۳۵,۱۰		

جدول ۵-۹ جریان محاسبه‌شده برای حالت تصادفی دوم از مدل شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا از طریق روش‌های مختلف زیرفضای کریلف

روش	جریان (m^3/s)	روش	جریان (m^3/s)
مستقیم	۱۱,۶	GMRES	۱۱,۳۸
FOM	۱۱,۳۵	QGMRES	۱۱,۵
IOM	۱۱,۵	GPBiCG	۱۵,۱۹
CG	۱۱,۶۲	BiCG	۱۵,۳۲
CR	۱۱,۶	LANCZOS	۱۲,۰۱
GCR	۱۱,۴		

در این تحقیق، تعیین میزان دقت روش‌های زیرفضای کریلف با استفاده از میزان خطای محاسباتی ($\bar{e}$) مطابق با رابطه‌ی ۵-۹ محاسبه می‌شود.

$$\bar{e} = \left\| q^{i-1} - q^{i} \right\|_2 \tag{۵-۹}$$

که در آن، q^{i-1} و q^{i} به ترتیب بردارهای جریان محاسبه‌شده در آخرین تکرار و تکرار قبل از آن هستند. $\bar{e}$ به‌خوبی نشان‌دهنده‌ی نحوه‌ی همگرایی و دقت محاسبات روش‌های زیرفضای کریلف در محاسبه‌ی جریان در مدل‌های DFN سه‌بعدی است. نتایج خطای محاسبه‌ی جریان در روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی اول و دوم برای ۵۰۰ تکرار از هر روش به ترتیب در جداول ۵-۱۰ و ۵-۱۱ فهرست شده است.

جدول ۵-۱۰ خطای محاسباتی روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی اول از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا

روش	$\bar{e}$	روش	$\bar{e}$
FOM	۰/۱۱۲	GMRES	۰/۱۱۲
IOM	۰/۱۱۳	QGMRES	۰/۱۱۲
CG	۰/۱۱۸	GPBiCG	۰/۱۲۴
CR	۰/۱۱۳	BiCG	۰/۱۲۵
GCR	۰/۱۱۲	LANCZOS	۰/۱۱۳

جدول ۵-۱۱ خطای محاسباتی روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی دوم از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا

روش	$\bar{e}$	روش	$\bar{e}$
FOM	۰/۱۶۵	GMRES	۰/۱۶۳
IOM	۰/۱۶۷	QGMRES	۰/۱۶۴
CG	۰/۱۷۴	GPBiCG	۰/۱۸۳
CR	۰/۱۶۶	BiCG	۰/۱۸۳
GCR	۰/۱۶۴	LANCZOS	۰/۱۶۶

همان‌طور که جداول ۵-۸ و ۵-۹ نشان می‌دهند، تمام روش‌های زیرفضای کریلف به‌جز دو روش BiCG و GPBiCG، نتایج تقریباً نزدیکی حول مقادیر ۳۵٫۷۳ و ۱۱٫۶ مترمکعب بر ثانیه که به‌وسیله‌ی روش فاکتورگیری مستقیم محاسبه شده است را به‌ترتیب برای حالت‌های تصادفی اول و دوم ارایه می‌کنند. دو روش مذکور مقادیر دورتری را از مقادیر پاسخ روش مستقیم نشان می‌دهند. با توجه به جدول‌های ۵-۱۰ و ۵-۱۱ و این اصل که هرچه میزان خطای محاسبات کمتر باشد، به معنای یک همگرایی دقیق‌تر است، بنابراین دو روش BiCG و GPBiCG با داشتن بیشترین میزان خطا برای هر دو حالت تصادفی اول و دوم، برای انجام محاسبات جریان سیال در مدل‌های DFN مناسب به نظر نمی‌رسند.

تحلیل دوم به مقایسه‌ی زمان پردازش محاسبات مربوط به حل معادلات جریان در مدل DFN با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کریلف اختصاص دارد. زمان پردازش نقش مهمی را در تحلیل‌های مربوط به جریان سیال در مدل‌های سه‌بعدی DFN ایفا می‌کند. هنگامی‌که شبکه‌ای با تعداد زیادی از شکستگی‌ها موردنظر باشد، استفاده از روش‌هایی که محاسبات جریان را در کوتاه‌ترین زمان ممکن انجام دهد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این تحقیق از یک کامپیوتر با سخت‌افزار یکسان برای تمامی تحلیل‌ها استفاده شده است،بنابراین امکان مقایسه‌ی نتایج وجود دارد. با توجه به این‌که بار محاسباتی یک تکرار[1]منفرد از هر یک از روش‌های زیرفضای کریلف می‌تواند با روشی دیگر بسیار متفاوت باشد، زمان کار پردازشگر کامپیوتر برای محاسبه‌ی پاسخ مدل (میدان جریان) با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کریلف می‌تواند معیار مناسبی برای تعیین کارایی نسبی این روش‌ها و تعیین بهترین آن‌ها باشد. در جدول‌های ۵-۱۲ و ۵-۱۳ زمان پردازش محاسبات برای تعیین پاسخ مدل با استفاده از روش فاکتورگیری مستقیم LQ و روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای دو حالت تصادفی از شبکه‌ی شکستگی‌ها، ارایه شده است. لازم به ذکر است که زمان محاسبه‌شده در جداول مذکور زمان حل دستگاه معادلات حاصل از روش FEM و پس از تشکیل دستگاه معادلات است. تمامی روش‌های زیرفضای

[1] Iteration

کریلف در این تحلیل با تعداد ثابت ۵۰۰ تکرار به پاسخ مدل همگرا شده‌اند و گزارش‌های جداول ۵-۱۲ و ۵-۱۳ بیانگر زمان پردازش محاسبات برای این تعداد تکرار برای هر روش است.

جدول ۵-۱۲ زمان پردازش روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی اول از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا

روش	زمان (میلی‌ثانیه)	روش	زمان (میلی‌ثانیه)
مستقیم	۲۸۸۸۷۱۴	GMRES	۹۶۱۳۷۲
FOM	۱۹۷۸۰۰	QGMRES	۹۶۱۳۷۰
IOM	۱۱۰۲۱۷	GPBiCG	۱۰۵۱۶۴
CG	۸۶۰۵۹	BiCG	۱۰۸۸۶۲
CR	۸۶۷۱۱	LANCZOS	۸۷۸۹۴۴
GCR	۸۵۹۴۷۰		

جدول ۵-۱۳ زمان پردازش روش‌های مختلف زیرفضای کریلف برای حالت تصادفی دوم از شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا

روش	زمان (میلی‌ثانیه)	روش	زمان (میلی‌ثانیه)
مستقیم	۱۶۵۰۴۷۳	GMRES	۵۴۹۳۰۰
FOM	۱۱۳۰۲۰	QGMRES	۵۴۹۴۵۰
IOM	۶۲۹۰۰	GPBiCG	۶۰۰۴۳
CG	۴۹۱۷۰	BiCG	۶۲۲۰۰
CR	۴۹۵۴۹	LANCZOS	۵۰۲۲۵۳
GCR	۴۹۱۱۲۵		

همان‌طور که در جداول ۵-۱۲ و ۵-۱۳ نشان داده شده است، روش مستقیم زمان پردازش بسیار زیادی را نتیجه می‌دهد. در حقیقت، تمامی روش‌های زیرفضای کریلف در زمان بسیار کوتاه‌تری به پاسخ مدل همگرا شده‌اند که نشان‌دهنده‌ی برتری نسبی این روش‌ها نسبت به روش‌های مستقیم است. روش‌های CG، CR و IOM به ترتیب کمترین زمان پردازش محاسبات تعیین میدان جریان را در هر دو حالت تصادفی اول و دوم به خود اختصاص داده‌اند. با توجه به آنچه در بخش‌های قبلی موردبحث قرار گرفت، روش‌های CG، CR و IOM از دقت بالایی در محاسبه‌ی جریان در DFN نیز برخوردارند؛ بنابراین می‌توان این روش‌ها را به‌عنوان بهترین روش‌های محاسبه‌ی جریان در محیط DFN در نظر گرفت.

اگرچه، برخی از محققان بر تحلیل اثر پارامترهای آماری- هندسی تولید شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا بر جریان سیال متمرکز شده و بیان نموده‌اند که این پارامترها می‌توانند احتمالاً کمیت‌های فیزیکی مختلف موردمطالعه در شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا را تحت تأثیر قرار دهند [۱۹۴]، بر اساس تحلیل‌های انجام‌شده بر روی دو حالت تصادفی مختلف در این تحقیق، چنین استنباط می‌شود که پیکربندی هندسی شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا و تغییرپذیری پارامترهای آماری - هندسی تولید آن، احتمالاً اثر قابل‌توجهی بر کارایی روش‌های زیرفضای کریلف ندارد. این نتیجه با استناد به این موضوع که پس از مجزا سازی ساختار هندسی شبکه توسط الگوریتم مش‌بندی، رویه‌ی FEM با آرایشی از رووس به هم مرتبط (بجای هندسه اولیه مدل) سروکار دارد، می‌تواند مورد بحث قرار گیرد؛ بنابراین، تغییر جهت‌یابی و موقعیت فضایی شکستگی‌ها الزاماً باعث تغییر نحوه‌ی ارتباط رووس مدل و پیکربندی ماتریس نفوذپذیری نمی‌شود. هرچند، با توجه به پیچیدگی موضوع، تحلیل‌های حساسیت بیشتری در این زمینه موردنیاز است.

۵-۴. جمع‌بندی

در این فصل بخش‌های اصلی برنامه از قبیل روش تولید شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا، روش مش‌بندی محیط گسسته و محاسبات جریان مورد اعتبارسنجی قرار گرفت و پس از تأیید صحت عملکرد آن‌ها، آنالیز حساسیت‌های پارامترهای تنش برجا (مؤلفه‌ی قائم تنش و نسبت تنش‌ها) بر روی محاسبه‌ی جریان با استفاده از نتایج برنامه‌ی FlowSHUT3D، تعداد تکرارهای مورد نیاز و همچنین روش‌های زیرفضای کریلف انجام شد و روش‌هایی که به پاسخ مدل همگرا نمی‌شوند در برابر بهترین روش‌ها شناسایی شدند.

فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادها

۶-۱. نتیجه‌گیری

مدل‌سازی عددی جریان سیال تابع تنش در سنگ‌های شکسته، برای کاربردهای مختلف مهندسی سنگ بسیار حائز اهمیت است. سیال در توده‌سنگ‌هایی که نفوذپذیری متن آن‌ها در مقایسه با نفوذپذیری شکستگی‌ها قابل‌اغماض است، توسط مسیرهایی از شکستگی‌های به‌هم متصل جریان می‌یابد. جریان در شکستگی‌ها تابعی از بازشدگی هیدرولیکی آن‌هاست که به‌نوبه‌ی خود از تنش‌های عمود بر سطح شکستگی و فشار منفذی سیال درون شکستگی‌ها تأثیر می‌پذیرد. از طرفی، تعیین بازشدگی هیدرولیکی شکستگی‌های زیرسطحی (به‌ویژه در اعماق زیاد) امری پیچیده و هزینه‌بر است و از طرف دیگر، تعیین آن با استفاده روش‌های برداشت سطحی به‌دلیل عدم در نظرگرفتن اثرات تنش‌های برجا می‌تواند خطای قابل‌توجهی را به محاسبات تحمیل کند. همچنین، در بیشتر مدل‌سازی‌های عددی که در گذشته انجام شده‌اند، امتدادداری شکستگی‌ها برای تسهیل فرآیند شبیه‌سازی کوپل هیدرومکانیکی، به‌صورت نامتناهی در نظرگرفته می‌شود. این یک چالش جدی برای مدل‌سازی شبکه‌ی شکستگی‌هاست و بنابراین می‌تواند الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها را دگرگون کند. در این تحقیق، یک مدل محاسباتی جدید با تلفیق روش‌های پایه‌ی مختلف توسعه داده شده است. این مدل، شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی را با فرض شکسگی‌هایی با امتدادداری توزیع‌شده و طول محدود در دامنه‌ای مشخص شبیه‌سازی می‌کند. علاوه‌برآن، یک روش مش‌بندی خلاقانه در تحقیق حاضر توسعه داده شده است که به‌طور بهینه چالش‌های مش‌بندی محیط‌های ناپیوسته با تراکم زیاد ناپیوستگی‌ها را پوشش می‌دهد. بنابراین، الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها تغییر نمی‌کند و شبکه‌ی شکستگی‌های مدل‌سازی شده نماینده‌ی شایسته‌ای از سنگ شکسته است.

در این تحقیق، روش المان محدود با مدل‌های ساختاری شکستگی مختلف ادغام شده است که با دقت مناسب اثر تنش‌ها بر میدان جریان سیال را تعیین می‌کند. دستگاه معادلات حاصل از کاربرد روش المان محدود در مسایل هیدرومکانیک در سنگ‌های شکسته شامل ماتریس‌هایی با شرایط ویژه است

که برای حل این دستگاه معادلات روش‌های خاصی توسعه داده شده است. روش‌های تکراری زیرفضای کریلف نمونه‌ی خوبی از این روش‌ها است که در این تحقیق مورد استفاده و ارزیابی قرار گرفته‌اند.

مروری بر پیشینه‌ی مطالعات انجام‌شده در ارتباط با روش‌های پایه که شامل روش شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا، روش مش‌بندی محیط ناپیوسته، روش المان محدود، مدل‌های ساختاری شکستگی و روش‌های تکراری زیرفضای کریلف می‌شود در فصل دوم موردبحث قرار گرفت.

فرآیند توسعه‌ی مدل محاسباتی در فصل سوم به‌طور کامل تشریح شد و تدوین برنامه‌ی FlowSHUT^{3D} به‌عنوان ابزار توسعه‌ی مدل عددی تحقیق در فصل چهارم توصیف شد. اعتبارسنجی بخش‌های مختلف مدل عددی در فصل پنجم به‌تفکیک روش‌های پایه موردبحث قرار گرفت، یک مدل ساختاری شکستگی مناسب انتخاب شد و تحلیل‌های حساسیتی در دو بخش پارامترهای مربوط به راه‌حل جریان و پارامترهای مربوط به روش‌های زیرفضای کریلف ارایه شد.

با توجه به تحلیل‌های انجام‌شده با افزایش مقدار مؤلفه‌ی قائم تنش برجا و نسبت تنش افقی به قائم، جریان سیال در توده‌سنگ کاهش می‌یابد. همچنین، دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش‌های زیرفضای کریلف در شبکه‌ی شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی تعیین شد. با توجه به تحلیل‌های انجام شده روش‌های CG، CR و IOM جزو سریع‌ترین و دقیق‌ترین روش‌های زیرفضای کریلف انتخاب شده‌اند. با توجه به تحلیل‌های حساسیت انجام گرفته در این تحقیق، ارزیابی می‌شود که جهت‌یابی و موقعیت فضایی شکستگی‌ها احتمالاً اثر قابل‌توجهی بر کارایی روش‌های زیرفضای کریلف ندارد، هرچند، درک دقیق اثر پارامترهای آماری - هندسی تولید شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا نیاز به تحلیل‌های حساسیت گسترده‌تری دارد.

در فصل پنجم، پس از اطمینان از صحت عملکرد برنامه‌ی FlowSHUT^{3D} برای همه‌ی بخش‌های اصلی مدل در مرحله‌ی اعتبارسنجی، نتایج تحلیل‌های حساسیت به شرح ذیل ارایه می‌شوند:

- نتایج نشان می‌دهد که اندازه‌ی مثلث‌بندی یک پارامتر اساسی در الگوریتم مش‌بندی حاضر است. اگرچه، با تغییر مقدار این پارامتر، پاسخ مدل تغییری نمی‌کند، با افزایش آن سرعت مش‌بندی و متعاقباً سرعت حل مساله افزایش می‌یابد. از طرفی، افزایش اندازه‌ی مثلث‌بندی ناپایداری و عدم پایان‌یابی الگوریتم مش‌بندی در برخی از حالات تصادفی را در پی دارد. بنابراین، تعیین حداکثر اندازه‌ی مثلث‌بندی برای هر DFN امری ضروری به‌نظر می‌رسد.
- با کاهش اندازه‌ی مش‌بندی به دلیل کاهش حداقل زاویه‌ی داخلی مثلث‌ها، این امکان وجود دارد که مدل‌های پیچیده‌تر و با چگالی بیشتری از شکستگی‌ها را تحلیل نمود، هرچند، هزینه‌ی محاسبات و زمان پردازش ممکن است به‌طور قابل توجهی افزایش یابند.
- تحلیل‌های حساسیت مجزایی برای تعیین ابعاد REV و تعداد تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی مدل عددی تحقیق حاضر انجام گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که مدل حاضر با تعداد تکرارهای اندکی به پاسخ مدل همگرا خواهد شد. این تحلیل‌ها برای دیگر مدل‌های عددی با شرایط هندسی و فیزیکی مورد بررسی باید به‌صورت جداگانه با استفاده از نرم‌افزار انجام پذیرد.
- نتایج محاسبات با سه مدل ساختاری مختلف در تحقیق حاضر نتایج نزدیکی را با نتایج ارایه شده توسط 3DEC و مدل‌های تحلیلی نشان می‌دهد. همچنین، نتایج محاسبه‌ی تغییرات میانگین بازشدگی شکستگی‌های مدل با استفاده از این سه مدل ساختاری مورد بررسی قرار گرفته است و مؤثرترین و کم‌اثرترین آن‌ها مشخص شده است.
- اثر مؤلفه‌ی عمودی میدان تنش‌های برجا و نسبت تنش افقی به قائم بر نرخ جریان سیال در محیط درزه‌دار مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج به‌صورت روابط تحلیلی استخراج شده است. این روابط صرفاً برای مدل عددی تحقیق حاضر معتبر است و برای مدل‌های دیگر تحلیل‌های متفاوتی مورد نیاز است. با افزایش میزان تنش عمودی و نسبت تنش افقی به قائم، میزان جریان سیال در مدل مورد بررسی کاهش می‌یابد.

- با توجه به تحلیل‌های حساسیت انجام گرفته بر روی پارامترهای سرعت و دقت محاسبات مدل با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کریلف، سه روش: Ml(k)BiCGStab، TFQMR و PCGCR برای شبکه‌ی شکستگی مورد بررسی در تحقیق حاضر قادر به همگرایی به پاسخ مدل نیستند، درحالی که سه روش IOM، CR و CG جزو سریع‌ترین و دقیق‌ترین روش‌ها به حساب می‌آیند. برای هر مدل عددی با شرایط هندسی و فیزیکی متفاوت، ممکن است نتایج متفاوتی حاصل شود و شبیه‌سازی مجزایی با استفاده از نرم‌افزار لازم است. همچنین، مشخص شده است که تمامی روش‌های زیرفضای کریلف میدان جریان سیال را در زمان بسیار کوتاه‌تری نسبت به روش مستقیم محاسبه می‌کنند که نشان‌دهنده‌ی عملکرد مناسب این دسته از روش‌ها در کاربردهای هیدرومکانیکی است.

۶-۲. پیشنهادها

به‌منظور افزایش بهره‌وری مدل ارایه شده در این تحقیق و کاربردی‌تر نمودن آن پیشنهادهایی در ذیل ارایه می‌شود که برخی در ادامه‌ی تحقیقات کنونی نویسندگان قرار دارد.

- استفاده از به‌روزترین توسعه‌ها در مدل‌سازی هندسه محیط شکسته و همچنین امکان تلفیق ساختار محیط متخلخل برای تحقیقات آینده.
- توسعه‌ی روش‌های مش‌بندی فضایی محیط گسسته با قابلیت انتقال میدان تنش‌های سطحی بر روی شکستگی‌ها
- استفاده از روش‌های عددی مجزاسازی پیشرفته‌تر با هدف بالاتر بردن سرعت محاسبات
- امکان‌سنجی استفاده از روش‌های تکراری توسعه یافته و روش‌های پیش‌شرط‌گذاری برای محاسبه‌ی پاسخ مدل
- امکان استفاده از مدل‌های ساختاری شکستگی دقیق‌تر و جامع‌تر جهت مدل‌سازی کوپل کامل هیدرومکانیکی

- امکان‌سنجی مدل‌سازی حفاری‌ها و سازه‌های زیرزمینی در مدل عددی حاضر
- بررسی امکان مدل‌سازی سیال دو یا چندفازی در محاسبات هیدرولیکی مدل
- تحلیل حساسیت‌های بیشتر بروی پارامترهایی نظیر پارامترهای هندسی محیط شکسته برای درک اثر آن‌ها بر روی جریان سیال

فهرست منابع

[١] Lei Q., Wang X., Xiang J. and Latham J. P. (2017) "Polyaxial stress-dependent permeability of a three-dimensional fractured rock layer". **Hydrogeology Journal**.Vol., pp.1-12.
[٢] Zhao Z., Rutqvist J., Leung C., Hokr M., Liu Q., Neretnieks I., et al. (2013) "Impact of stress on solute transport in a fracture network: A comparison study". **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**.Vol. 5(2), pp.110-23.
[٣] Oda M. (1986) "An equivalent continuum model for coupled stress and fluid flow analysis in jointed rock masses". **Water resources research**.Vol. 22(13), pp.1845-56.
[٤] Gan Q. and Elsworth D. (2016) "A continuum model for coupled stress and fluid flow in discrete fracture networks". **Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resources**.Vol. 2(1), pp.43-61.
[٥] Ababou R., CAÑAMÓN I. and Elorza F. J. (2005) "Thermo-hydro-mechanical simulation of a 3d fractured porous rock: Preliminary study of coupled matrix-fracture hydraulics". Proceedings of the Comsol Multiphysics Conference pp..٨-١٩٣
[٦] Hu L., Winterfeld P. H., Fakcharoenphol P. and Wu Y. S. (2013) "A novel fully-coupled flow and geomechanics model in enhanced geothermal reservoirs". **Journal of Petroleum Science and Engineering**.Vol. 107(pp.1-11.
[٧] Beyabanaki S. A. R., Jafari A., Biabanaki S. O. R. and Yeung M. R. (2009) "A coupling model of 3-d discontinuous deformation analysis (3-d dda) and finite element method". **AJSE**.Vol. 34(2B), pp.107-19.
[٨] Goodman R. E., Taylor R. L. and Brekke T. L. (1968) "A model for the mechanics of jointed rocks". **Journal of Soil Mechanics & Foundations Div**.Vol.
[٩] Noorishad J., Ayatollahi M. and Witherspoon P. (1982) "A finite-element method for coupled stress and fluid flow analysis in fractured rock masses". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts: Elsevier, pp. 185-93.
[١٠] Elsworth D. (1986) "A hybrid boundary element-finite element analysis procedure for fluid flow simulation in fractured rock masses". **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**.Vol. 10(6), pp.569-84.
[١١] Minkoff S. E., Stone C. M., Bryant S., Peszynska M. and Wheeler M. F. (2003) "Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling". **Journal of Petroleum Science and Engineering**.Vol. 38(1), pp.37-56.
[١٢] Noorishad J., Tsang C. F. and Witherspoon P. (1992) "Theoretical and field studies of coupled hydromechanical behaviour of fractured rocks—1. Development and verification of a numerical simulator". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts: Elsevier, pp. 401-9.
[١٣] Rutqvist J., Noorishad J., Stephansson O. and Tsang C. F. (1992) "Theoretical and field studies of coupled hydromechanical behaviour of fractured rocks—2. Field experiment and modelling". International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts: Elsevier, pp. 411-9.
[١٤] Carpenter C. (2015) "A practical simulation method capturing complex hydraulic-fracturing physics". **Journal of Petroleum Technology**.Vol. 67(10), pp.81-3.
[١٥] Abdollahipour A., Marji M. F., Bafghi A. Y. and Gholamnejad J. (2015) "Simulating the propagation of hydraulic fractures from a circular wellbore using the displacement discontinuity method". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 80(pp.281-91.

[١٦] Min K. B., Rutqvist J., Tsang C. F. and Jing L. (2004) "Stress-dependent permeability of fractured rock masses: A numerical study". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol ,(٧)٤١ .pp.1191-210.
[١٧] Fardin N., Stephansson O. and Jing L. (2001) "The scale dependence of rock joint surface roughness". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 38(5), pp.659-69.
[١٨] Latham J. P., Xiang J., Belayneh M., Nick H. M., Tsang C.-F. and Blunt M. J. (2013) "Modelling stress-dependent permeability in fractured rock including effects of propagating and bending fractures". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 57(pp.100-12.
[١٩] Abdollahipour A., Marji M. F., Bafghi A. Y. and Gholamnejad J. (2016) "Dem simulation of confining pressure effects on crack opening displacement in hydraulic fracturing". **International Journal of Mining Science and Technology**.Vol. 26(4), pp.557-61.
[٢٠] Riahi A., Damjanac B. and Furtney J. (2014) "Discrete element modeling of thermo-hydro-mechanical coupling in enhanced geothermal reservoirs". Proceedings pp. 24-6.
[٢١] Benato S., Reeves D. M., Parashar R., Davatzes N. C., Hickman S., Elsworth D., et al. (2013) " Computational investigation of hydro-mechanical effects on transmissivity evolution during the initial injection phase at the desert peak egs project, nv". Proceedings, Thirty-Eighth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, https://pangea stanford edu/ERE/pdf/IGAstandar d/SGW/2013/Benato pdf.
[٢٢] Lei Q., Latham J. P., Xiang J., Tsang C. F., Lang P. and Guo L. (2014) "Effects of geomechanical changes on the validity of a discrete fracture network representation of a realistic two-dimensional fractured rock". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 70(pp.507-23.
[٢٣] Beck D. (2015) "Applications of hydro-mechanically coupled 3d mine and reservoire scale, discontinuous, strain-softening dilatant models with damage". 49th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium: American Rock Mechanics Association.
[٢٤] Bidgoli M. N. and Jing L. (2015) "Water pressure effects on strength and deformability of fractured rocks under low confining pressures". **Rock Mechanics and Rock Engineering**.Vol. 48(3), pp.971-85.
[٢٥] Watanabe K. and Takahashi H. (1995) "Fractal geometry characterization of geothermal reservoir fracture networks". **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**.Vol. 100(B1), pp.521-8.
[٢٦] Gellasch C. A., Bradbury K. R., Hart D. J. and Bahr J. M. (2013) "Characterization of fracture connectivity in a siliciclastic bedrock aquifer near a public supply well (wisconsin, USA)". **Hydrogeology Journal**.Vol. 21(2), pp.383-99.
[٢٧] Hyman J., Aldrich G., Viswanathan H., Makedonska N. and Karra S. (2016) "Fracture size and transmissivity correlations: Implications for transport simulations in sparse three-dimensional discrete fracture networks following a truncated power law distribution of fracture size". **Water Resources Research**.Vol. 52(8), pp.6472-89.
[٢٨] Karra S., Makedonska N., Viswanathan H. S., Painter S. L. and Hyman J. D. (2015) "Effect of advective flow in fractures and matrix diffusion on natural gas production". **Water Resources Research**.Vol. 51 ,(١٠)pp.8646-57.
[٢٩] Butscher C., Einstein H. H. and Huggenberger P. (2011) "Effects of tunneling on groundwater flow and swelling of clay-sulfate rocks". **Water Resources Research**.Vol. 47(11).

[۳۰] Xu C. and Dowd P. (2010) "A new computer code for discrete fracture network modelling". **Computers & Geosciences**.Vol. 36(3), pp.292-301.
[۳۱] Long J., Remer J., Wilson C. and Witherspoon P. (1982) "Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures". **Water Resources Research**.Vol. 18(3), pp.645.۵۸-
[۳۲] Dershowitz W. S. and Einstein H. H. (1987) "Three dimensional flow modeling in jointed rock masses". 6th ISRM Congress: International Society for Rock Mechanics.
[۳۳] Bear J., Tsang C. F. and De Marsily G. (2012) "**Flow and contaminant transport in fractured rock**": Academic Press.
[۳۴] Sahimi M. (2011) "**Flow and transport in porous media and fractured rock: From classical methods to modern approaches**": John Wiley & Sons.
[۳۵] Council N. R. (1996) "**Rock fractures and fluid flow: Contemporary understanding and applications**": National Academies Press.
[۳۶] Adler P. M. and Thovert J. F. (1999) "**Fractures and fracture networks**": Springer Science & Business Media.
[۳۷] Berkowitz B. (2002) "Characterizing flow and transport in fractured geological media: A review". **Advances in water resources**.Vol. 25(8-12), pp.861-84.
[۳۸] Zimmerman R. and Bodvarsson G. (1995) "Effective transmissivity of two-dimensional fracture networks".Vol.
[۳۹] Yu Q., Tanaka M. and Ohnishi Y. (1999) "An inverse method for the model of water flow in discrete fracture network". Proceedings of the 34th Janan National Conference on Geotechnical Engineering, Tokyo pp. 1303-4.
[۴۰] مهاجرانی س.، باغبانان ع.، رحیمی دیزجی م. و هاشم الحسینی ح. (۱۳۹۲) "پیش‌بینی تزریق پذیری توده سنگ درزه دار ساختگاه سد رودبار لرستان با استفاده از برنامه ی توسعه داده شده" هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران: دانشگاه سیستان و بلوچستان.
[۴۱] نوروزی م.، جلالی س. و کاکایی ر. (۱۳۹۴) "شبیه‌سازی هندسی سه‌بعدی شبکه‌ی ناپیوستگی‌های توده‌سنگ در محل احداث تونل دسترسی سد رودبار لرستان". مجله‌ی مهندسی تونل و فضاهای زیرزمینی. شماره ۱. جلد ۴. ص ۵۳ - ۶۸.
[۴۲] Xu C., Dowd P., Mardia K. and Fowell R. (2003) "Parametric intensity estimation for stochastic fracture modelling". **Geological Sciences**.Vol. 16(pp.63-70.
[۴۳] Lee T., Kim K., Lee K., Lee H. and Lee W. (2018) "Development of fluid flow and heat transfer model in naturally fractured geothermal reservoir with discrete fracture network method". **Geosciences Journal**.Vol. 22(3), pp.477-85.
[۴۴] Hyman J. and Jiménez-Martínez J. (2018) "Dispersion and mixing in three-dimensional discrete fracture networks: Nonlinear interplay between structural and hydraulic heterogeneity". **Water Resources Research**.Vol.
[۴۵] Dershowitz W. S. (1993) "Geometric conceptual models for fractured rock masses: Implications for groundwater flow and rock deformation". ISRM International Symposium-EUROCK 93: International Society for Rock Mechanics.
[۴۶] Stratford R., Herbert A. and Jackson C. (1990) "A parameter study of the influence of aperture variation on fracture flow and the consequences in a fracture network". **Rock joints**.Vol., pp.413-22.
[۴۷] Herbert A. (1996) "**Modelling approaches for discrete fracture network flow analysis**". Developments in geotechnical engineering: Elsevier. pp. 213-29.
[۴۸] Wilcock P. (1996) "**The napsac fracture network code**". Developments in geotechnical engineering: Elsevier. pp. 529-38.

[٤٩] Yoon J. S., Zang A. and Stephansson O. (2013) "**Hydro-mechanical coupled discrete element modeling of geothermal reservoir stimulation and induced seismicity**". Clean energy systems in the subsurface: Production, storage and conversion: Springer. pp. 221-31.
[٥٠] Jing L., Zhou W., Tian G. and Fu H. (2013) "Surface tuning for oxide-based nanomaterials as efficient photocatalysts". **Chemical Society Reviews**.Vol. 42(24), pp.9509-49.
[٥١] Barton C., Moos D., Hartley L., Baxter S., Foulquier L., Holl H., et al. (2013) "Geomechanically coupled simulation of flow in fractured reservoirs". **Proceedings, SGP-TR-198**.Vol.
[٥٢] Adler P. M., Thovert J.-F. and Mourzenko V. V. (2012) "**Fractured porous media**": Oxford University Press.
[٥٣] Cacas M., Ledoux E., De Marsily G., Barbreau A., Calmels P., Gaillard B., et al. (1990) "Modeling fracture flow with a stochastic discrete fracture network: Calibration and validation: 2. The transport model". **Water Resources Research**.Vol. 26(3), pp.491-500.
[٥٤] Hyman J. D., Gable C. W., Painter S. L. and Makedonska N. (2014) "Conforming delaunay triangulation of stochastically generated three dimensional discrete fracture networks: A feature rejection algorithm for meshing strategy". **SIAM Journal on Scientific Computing**.Vol. 36(4), pp.A1871-A94.
[٥٥] Koudina N., Garcia R. G., Thovert J.-F. and Adler P. (1998) "Permeability of three-dimensional fracture networks". **Physical Review E**.Vol. 57(4), pp.4466.
[٥٦] Bogdanov I., Mourzenko V., Thovert J. F. and Adler P. (2003) "Effective permeability of fractured porous media in steady state flow". **Water Resources Research**.Vol. 39(1).
[٥٧] Mourzenko V., Thovert J.-F. and Adler P. (2004) "Macroscopic permeability of three-dimensional fracture networks with power-law size distribution". **Physical Review E**.Vol. 69(6), pp.066307.
[٥٨] Wang K., Peng X., Du Z., Haghighi M. and Yu L. (2016) "An improved grid generation approach for discrete fracture network modelling using line fracture concept for two-phase flow simulation". SPE Asia Pacific Oil & Gas Conference and Exhibition: Society of Petroleum Engineers.
[٥٩] Maryška J., Severýn O. and Vohralík M. (2005) "Numerical simulation of fracture flow with a mixed-hybrid fem stochastic discrete fracture network model". **Computational Geosciences**.Vol. 8(3), pp.217-34.
[٦٠] Mustapha H. and Mustapha K. (2007) "A new approach to simulating flow in discrete fracture networks with an optimized mesh". **SIAM Journal on Scientific Computing**.Vol. 29(4), pp.1439-59.
[٦١] Erhel J., De Dreuzy J.-R. and Poirriez B. (2009) "Flow simulation in three-dimensional discrete fracture networks". **SIAM Journal on Scientific Computing**.Vol. 31(4), pp.2688-705.
[٦٢] Mustapha H., Dimitrakopoulos R., Graf T. and Firoozabadi A. (2011) "An efficient method for discretizing 3d fractured media for subsurface flow and transport simulations". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**.Vol. 67(5), pp.651-70.
[٦٣] Mustapha H. (2012)" A gabriel-delaunay triangulation of complex fractured media for multiphase flow simulations". ECMOR XIII-13th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery.

[٦٤] Karimi-Fard M., Durlofsky L. J. and Aziz K. (2003) "An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators". SPE Reservoir Simulation Symposium: Society of Petroleum Engineers.
[٦٥] Berrone S., Fidelibus C., Pieraccini S. and Scialo S. (2014) "Simulation of the steady-state flow in discrete fracture networks with non-conforming meshes and extended finite elements". **Rock mechanics and rock engineering**.Vol. 47(6), pp.2171.
[٦٦] Pichot G., Erhel J. and de Dreuzy J. R. (2012) "A generalized mixed hybrid mortar method for solving flow in stochastic discrete fracture networks". **SIAM Journal on scientific computing**.Vol. 34(1), pp.B86-B105.
[٦٧] Hu M., Rutqvist J. and Wang Y. (2016) "A practical model for fluid flow in discrete-fracture porous media by using the numerical manifold method". **Advances in Water Resources**.Vol. 97(pp.38-51.
[٦٨] Benedetto M. F., Berrone S. and Scialò S. (2016) "A globally conforming method for solving flow in discrete fracture networks using the virtual element method". **Finite Elements in Analysis and Design**.Vol. 109(pp.23-36.
[٦٩] Hrennikoff A. (1941) "Solution of problems of elasticity by the framework method". **J appl Mech**.Vol.
[٧٠] Courant R. (1943) "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". **Bulletin of the American mathematical Society**.Vol. 49(1), pp.1-23.
[٧١] McHenry D. (1943) "A lattice analogy for the solution of stress problems". **Journal of the Institution of Civil Engineers**.Vol. 21(2), pp.59-82.
[٧٢] Levy S. (1947) "Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweepback". **Journal of the aeronautical Sciences**.Vol. 14(10), pp.547-60.
[٧٣] Argyris J. H. and Kelsey S. (1960) "**Energy theorems and structural analysis**": Springer.
[٧٤] Argyris J. H. (1955) "Energy theorems and structural analysis: A generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and non-linear stress-strain relations part i. General theory". **Aircraft Engineering and Aerospace Technology**.Vol. 27(2), pp.42-58.
[٧٥] Turner M. (1956) "Stiffness and deflection analysis of complex structures". **journal of the Aeronautical Sciences**.Vol. 23(9), pp.805-23.
[٧٦] Clough R. W. (1960) "The finite element method in plane stress analysis". Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa, Sept 8 and 9, 1960.
[٧٧] Melosh R. J. (1961) "A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending". **Journal of the Aerospace Sciences**.Vol. 28(1), pp.34-42.
[٧٨] Grafton P. E. and Stome D. (1963) " Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method". **AIAA journal**.Vol. 1(10), pp.2342-7.
[٧٩] Martin H. (1961) "Plane elasticity problems and the direct stiffness method". **The trend in Engineering**.Vol. 13(pp.5-19.
[٨٠] Gallagher R. H. (1962) "Stress analysis of heated complex shapes". **ARS Journal**.Vol. 32(5), pp.700-7.
[٨١] Melosh R. J. (1963) "Structural analysis of solids". **Journal of the Structural Division**.Vol. 89(4), pp.205-48.
[٨٢] Argyris J. H. (1964) "**Recent advances in matrix methods of structural analysis/progress in aeronautical sciences**": Pergamon Press.

[٨٣] Clough R. W. and Rashid Y. (1965) "Finite element analysis of axi-symmetric solids". **Journal of the Engineering Mechanics Division**.Vol. 91(1), pp.71-86.
[٨٤] Wilson E. L. (1965) "Structural analysis of axisymmetric solids". **AIAA Journal**.Vol. 3(12), pp.2269-74.
[٨٥] Turner M. (1960) "Large deflections of structures subjected to heating and external loads". **Journal of the Aerospace Sciences**.Vol. 27(2), pp.97-106.
[٨٦] Gallagher R. H. and Padlog J. (1963) "Discrete element approach to structural instability analysis". **AIAA Journal**.Vol. 1(6), pp.1437-9.
[٨٧] Zienkiewicz O., Watson M. and King I. (1968) "A numerical method of visco-elastic stress analysis". **International Journal of Mechanical Sciences**.Vol. 10(10), pp.807-27.
[٨٨] Archer J. S. (1965) "Consistent matrix formulations for structural analysis using finite-element techniques". **AIAA journal**.Vol. 3(10), pp.1910-8.
[٨٩] Zienkiewicz O. C. and Cheung Y. K. (1964) " The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs". **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**.Vol. 28(4), pp.471-88.
[٩٠] Martin H. C. (1968) "Finite element analysis of fluid flows". WASHINGTON UNIV SEATTLE DEPT OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS.
[٩١] Wilson E. L. and Nickell R. E. (1966) "Application of the finite element method to heat conduction analysis". **Nuclear engineering and design**.Vol. 4(3), pp.276-86.
[٩٢] Szabo B. A. and Lee G. C. (1969) "Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by galerkin's method". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**.Vol. 1(3), pp.301-10.
[٩٣] Zienkiewicz O. and Parekh C. (1970) "Transient field problems: Two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**.Vol. 2(1), pp.61-71.
[٩٤] Zienkiewicz O., Lyness J. and Owen D. (1977) "Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential--a finite element solution". **IEEE Transactions on Magnetics**.Vol. 13(5), pp.1649-56.
[٩٥] Belytschko T., Liu W. K., Moran B. and Elkhodary K. (2013) "**Nonlinear finite elements for continua and structures**": John wiley & sons.
[٩٦] Huiskes R. and Chao E. (1983) "A survey of finite element analysis in orthopedic biomechanics: The first decade". **Journal of biomechanics**.Vol. 16(6), pp.385-409.
[٩٧] DOLBOW J. and Belytschko T. (1999) "A finite element method for crack growth without remeshing". **Int J Numer Meth Engng**.Vol. 46(pp.131-50.
[٩٨] Fagan M. J. (1992) "**Finite element analysis: Theory and practice**": Longman Scientific & Technical.
[٩٩] Desai C. S. and Abel J. F. (1971) "**Introduction to the finite element method; a numerical method for engineering analysis**": Van Nostrand Reinhold.
[١٠٠] Kitchenham B., Brereton O. P., Budgen D., Turner M., Bailey J. and Linkman S. (2009) "Systematic literature reviews in software engineering–a systematic literature review". **Information and software technology**.Vol. 51(1), pp.7-15.
[١٠١] Swanson J. A. and DeSalvo G. (1989) "Ansys-engineering analysis system user's manual". **Swanson Analysis Systems, Inc, Elizabeth, Pa**.Vol.
[١٠٢] Salon S. (1995) "**Eddy current analysis**". Finite element analysis of electrical machines: Springer. pp. 51-73.
[١٠٣] Bathe K. J., Wilson E. L. and Peterson F. E. (1974) "Sap iv: A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems". Calif. Univ. Press.

[١٠٤] Reichenberger V., Jakobs H., Bastian P. and Helmig R. (2006) "A mixed-dimensional finite volume method for two-phase flow in fractured porous media". **Advances in Water Resources**.Vol. 29(7), pp.1020-36.
[١٠٥] De Dreuzy J. R., Pichot G., Poirriez B. and Erhel J. (2013) "Synthetic benchmark for modeling flow in 3d fractured media". **Computers & Geosciences**.Vol. 50(pp.59-71.
[١٠٦] May D. A., Brown J. and Le Pourhiet L. (2015) "A scalable, matrix-free multigrid preconditioner for finite element discretizations of heterogeneous stokes flow". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**.Vol. 290(pp.496-523.
[١٠٧] Woodbury A. and Zhang K. (2001) "Lanczos method for the solution of groundwater flow in discretely fractured porous media". **Advances in Water Resources**.Vol. 24(6), pp.621-30.
[١٠٨] Zhang K. and Woodbury A. D. (2002) "A krylov finite element approach for multi-species contaminant transport in discretely fractured porous media". **Advances in water resources**.Vol. 25(7), pp.705-21.
[١٠٩] Jing L., Ma Y. and Fang Z. (2001) "Modeling of fluid flow and solid deformation for fractured rocks with discontinuous deformation analysis (dda) method". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 38(3), pp.343-55.
[١١٠] Sudicky E. and McLaren R. (1992) "The laplace transform galerkin technique for large-scale simulation of mass transport in discretely fractured porous formations". **Water Resources Research**.Vol. 28(2), pp.499-514.
[١١١] Dershowitz W. and Fidelibus C. (1999) "Derivation of equivalent pipe network analogues for three-dimensional discrete fracture networks by the boundary element method". **Water Resources Research**.Vol. 35(9), pp.2685-91.
[١١٢] Shadid J. (1999) "A fully-coupled newton-krylov solution method for parallel unstructured finite element fluid flow, heat and mass transfer simulations". **International Journal of Computational Fluid Dynamics**.Vol. 12(3-4), pp.199-211.
[١١٣] Gavoille S., Delaplace A. and Rey C. (2009) "Application of a recycling krylov subspace strategy for discrete element method applied to brittle crack problems". **European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique**.Vol. 18(7-8), pp.647-67.
[١١٤] Parashar R. and Reeves D. M. (2012) "On iterative techniques for computing flow in large two-dimensional discrete fracture networks". **Journal of computational and applied mathematics**.Vol. 236(18), pp.4712-24.
[١١٥] Nukala P. K. V. and Šimunovic S. (2005) "Computational challenges in the large-scale simulations of fracture in disordered media". International conference on Statistical Mechanics of Plasticity and Related Instabilities.
[١١٦] Mohajerani S., Baghbanan A., Wang G. and Forouhandeh S. (2017) "An efficient algorithm for simulating grout propagation in 2d discrete fracture networks". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 98(pp.67-77.
[١١٧] Mohajerani S., Baghbanan A., Bagherpour R. and Hashemolhosseini H. (2015) "Grout penetration in fractured rock mass using a new developed explicit algorithm". **international journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 80(pp.412-7.
[١١٨] Jing L. and Stephansson O. (2007) "**Discrete fracture network (dfn) method**". Developments in geotechnical engineering: Elsevier. pp. 365-98.
[١١٩] Witherspoon P. A., Wang J. S., Iwai K. and Gale J. E. (1980) "Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture". **Water resources research**.Vol. 16(6), pp.1016-24.

[١٢٠] Lanaro F., Jing L. and Stephansson O. (1999) "Scale dependency of roughness and stationarity of rock joints". 9th ISRM Congress: International Society for Rock Mechanics.
[١٢١] Fardin N., Jing L. and Stephansson O. (2001) "Heterogeneity and anisotropy of roughness of rock joints". Proc of the ISRM Regional Symp EUROCK pp. 223-7.
[١٢٢] Fardin N., Stephansson O. and Jing L. (2003) "Scale effect on the geometrical and mechanical properties of rock joints". 10th ISRM Congress: International Society for Rock Mechanics.
[١٢٣] Tsang Y. (1992) "Usage of “equivalent apertures” for rock fractures as derived from hydraulic and tracer tests ."**Water Resources Research**.Vol. 28(5), pp.1451-5.
[١٢٤] Balzarini M., Nicula S., Mattiello D. and Aliverti E. (2001) "Quantification and description of fracture network by mri image analysis". **Magnetic resonance imaging**.Vol. 19(3), pp.539-41.
[١٢٥] Dershowitz W. S. and Einstein H. H. (1984) "Application of artificial intelligence to problems of rock mechanics". The 25th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS): American Rock Mechanics Association.
[١٢٦] Billaux D., Chiles J., Hestir K. and Long J. (1989) "Three-dimensional statistical modelling of a fractured rock mass—an example from the fanay-augeres mine". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts: Elsevier, pp. 281-99.
[١٢٧] Jimenez-Rodriguez R. and Sitar N. (2006) "Inference of discontinuity trace length distributions using statistical graphical models". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 43(6), pp.877-93.
[١٢٨] Viruete J. E., Carbonell R., Martı D. and Pérez-Estaún A. (2003) "Stochastic modeling and simulation of fault zones in the albala granitic pluton, sw iberian variscan massif". **Journal of Structural Geology**.Vol. 25(9), pp.1487-506.
[١٢٩] Ross S. M. (2014) "**Introduction to probability models**": Academic press.
[١٣٠] Zhang L. and Einstein H. (2000) "Estimating the intensity of rock discontinuities". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 37(5), pp.819-37.
[١٣١] Warburton P. (1980) "A stereological interpretation of joint trace data". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts: Elsevier, pp. 181-90.
[١٣٢] Jing L. (2003) "A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 40(3), pp.283-353.
[١٣٣] Murphy M. and Gable C. W. (1998) "Strategies for nonobtuse boundary delaunay triangulations". Los Alamos National Lab., NM (United States).
[١٣٤] Berrone S., Pieraccini S. and Scialo S. (2013) "A pde-constrained optimization formulation for discrete fracture network flows". **SIAM Journal on Scientific Computing**.Vol. 35(2), pp.B487-B510.
[١٣٥] Pichot G., Erhel J. and De Dreuzy J. R. (2010) "A mixed hybrid mortar method for solving flow in discrete fracture networks". **Applicable Analysis**.Vol. 89(10), pp.1629-43.
[١٣٦] George P. L. and Borouchaki H. (1998) "Delaunay triangulation and meshing".Vol.
[١٣٧] Shewchuk J. R. (2002) "Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation". **Computational geometry**.Vol. 22(1-3), pp.21-74.

[١٣٨] Cheng S. W., Dey T. K. and Shewchuk J. (2012) "**Delaunay mesh generation**": CRC Press.
[١٣٩] Ruppert J. (1995) "A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation". **Journal of algorithms**.Vol. 18(3), pp.548-85.
[١٤٠] Strang G. and Fix G. J. (1973) "**An analysis of the finite element method**": Prentice-hall Englewood Cliffs, NJ.
[١٤١] Alur R., La Torre S. and Pappas G. J. (2004) "Optimal paths in weighted timed automata". **Theoretical Computer Science**.Vol. 318(3), pp.297-322.
[١٤٢] Montvay I. and Münster G. (1994) "Quantum fields on a lattice cambridge univ". **Press, Cambridge**.Vol.
[١٤٣] Duff I. S. (2004) "Ma57---a code for the solution of sparse symmetric definite and indefinite systems". **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**.Vol. 30(2), pp.118-44.
[١٤٤] Duff I., Erisman A. and Reid J. (1986) "Direct methods for sparse matrices. Clarendon". Oxford.
[١٤٥] Duff I. S. and Scott J. A. (2004) "A parallel direct solver for large sparse highly unsymmetric linear systems". **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**.Vol. 30(2), pp.95-117.
[١٤٦] Alur R. and Pappas G. (2004) "Hybrid systems: Computation and control: 7th international workshop (hscc 20 .(٠٤Lncs 2993". Springer.
[١٤٧] Abu-Elnaga M. M., El-Kady M. A. and Findlay R. D. (1988) "Sparse formulation of the transient energy function method for applications to large-scale power systems". **IEEE Transactions on Power Systems**.Vol. 3(4), pp.1648-54.
[١٤٨] Duff I. S. (2004) "Combining direct and iterative methods for the solution of large systems in different application areas". **Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique, Toulouse, France, Tech Rep TR/PA/04/128**.Vol.
[١٤٩] Nachtigal N. M., Reddy S. C. and Trefethen L. N. (1992) "How fast are nonsymmetric matrix iterations?". **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**.Vol. 13(3), pp.778-95.
[١٥٠] Barrett B., Chan D., Donato D. and Eijkhout P. (1993) "Romine, and van der vorst". **Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods**.Vol.
[١٥١] Saad Y. (2003) "**Iterative methods for sparse linear systems**": siam.
[١٥٢] Benzi M. (2002) "Preconditioning techniques for large linear systems: A survey". **Journal of computational Physics**.Vol. 182(2), pp.418-77.
[١٥٣] Drkošová J., Greenbaum A., Rozložník M. and Strakoš Z. (1995) "Numerical stability of gmres". **BIT Numerical Mathematics**.Vol. 35(3), pp.309-30.
[١٥٤] Strakoš Z. and Tichý P. (2002) "On error estimation in the conjugate gradient method and why it works in finite precision computations". **Electron Trans Numer Anal**.Vol. 13(56-80), pp.8.
[١٥٥] Liesen J., Rozlozník M. and Strakos Z. (2002) "Least squares residuals and minimal residual methods". **SIAM Journal on Scientific Computing**.Vol. 23(5), pp.1503-25.
[١٥٦] Paige C. C., Rozloˇzník M. and Strakos Z. (2006) "Modified gram-schmidt (mgs), least squares, and backward stability of mgs-gmres". **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**.Vol. 28(1), pp.264-84.
[١٥٧] Saad Y. (1989) "Krylov subspace methods on supercomputers". **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**.Vol. 10(6), pp.1200-32.

[١٥٨] Saad Y. and Schultz M. H. (1986) "Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems". **SIAM Journal on scientific and statistical computing**.Vol. 7(3), pp.856-69.
[١٥٩] Saad Y. and Van Der Vorst H. A. (2001) "**Iterative solution of linear systems in the 20th century**". Numerical analysis: Historical developments in the 20th century: Elsevier. pp. 175-207.
[١٦٠] Arnoldi W. E. (1951) "The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem". **Quarterly of applied mathematics**.Vol. 9(1), pp.17-29.
[١٦١] Bjorck A. (1996) "**Numerical methods for least squares problems**": Siam.
[١٦٢] Lanczos C. (1950) "**An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators**": United States Governm. Press Office Los Angeles, CA.
[١٦٣] Lanczos C. (1952) "Solution of systems of linear equations by minimized iterations". **J Res Nat Bur Standards**.Vol. 49(1), pp.33-53.
[١٦٤] Parlett B. N., Taylor D. R. and Liu Z. A. (1985) "A look-ahead lanczos algorithm for unsymmetric matrices". **Mathematics of computation**.Vol. 44(169), pp.105-24.
[١٦٥] Freund R. W., Gutknecht M. H. and Nachtigal N. M. (1993) "An implementation of the look-ahead lanczos algorithm for non-hermitian matrices". **SIAM journal on scientific computing**.Vol. 14(1), pp.137-58.
[١٦٦] Greenbaum A. (1997) "Estimating the attainable accuracy of recursively computed residual methods". **SIAM journal on matrix analysis and applications**.Vol. 18(3), pp.535-51.
[١٦٧] Eisenstat S. C., Elman H. C. and Schultz M. H. (1983) "Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations". **SIAM Journal on Numerical Analysis**.Vol. 20(2), pp.345-57.
[١٦٨] Hestenes M. R. and Stiefel E. (1952) "**Methods of conjugate gradients for solving linear systems**": NBS Washington, DC.
[١٦٩] Axelsson O. (1987) "A generalized conjugate gradient, least square method". **Numerische Mathematik**.Vol. 51(2), pp.209-27.
[١٧٠] Paige C. C. and Saunders M. A. (1975) "Solution of sparse indefinite systems of linear equations". **SIAM journal on numerical analysis**.Vol. 12(4), pp.617-29.
[١٧١] Axelsson O. (1996) "**Iterative solution methods**": Cambridge university press.
[١٧٢] Van Loan C. F. (1996) "Matrix computations (johns hopkins studies in mathematical sciences)". The Johns Hopkins University Press.
[١٧٣] Paige C. C. and Saunders M. A. (1982) "Lsqr: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares". **ACM transactions on mathematical software**.Vol. 8(1), pp.43-71.
[١٧٤] Fridman V. (1963) "The method of minimum iterations with minimum errors for a system of linear algebraic equations with a symmetrical matrix". **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**.Vol. 2(2), pp.362-3.
[١٧٥] Fletcher R. (1976) "**Conjugate gradient methods for indefinite systems**". Numerical analysis: Springer .pp. 73-89.
[١٧٦] Stoer J. and Freund R. (1982) "On the solution of large indefinite systems of linear equations by conjugate gradient algorithms". **Computing methods in applied sciences and engineering**.Vol. 5(pp.35-53.
[١٧٧] Saad Y. (1981) "Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems". **Mathematics of computation**.Vol. 37(155), pp.105-26.
[١٧٨] Bank R. E. and Chan T. F. (1994) "A composite step bi-conjugate gradient algorithm for nonsymmetric linear systems". **Numerical Algorithms**.Vol. 7(1), pp.1-16.

[۱۷۹] Joubert W. (1992) "Lanczos methods for the solution of nonsymmetric systems of linear equations". **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**.Vol. 13(3), pp.926-43.
[۱۸۰] Hochbruck M. and Lubich C. (1998) "Error analysis of krylov methods in a nutshell". **SIAM Journal on Scientific Computing**.Vol. 19(2), pp.695-701.
[۱۸۱] Axelsson O. and Barker V. A. (2001) "Finite element solution of boundary value problems, volume 35 of classics in applied mathematics". **Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA**.Vol.
[۱۸۲] Yeung M.-C. and Chan T. F. (1999) "Ml (k) bicgstab: A bicgstab variant based on multiple lanczos starting vectors". **SIAM Journal on Scientific Computing**.Vol. 21(4), pp.1263-90.
[۱۸۳] Abe K. and Sleijpen G. L. (2013) "Solving linear equations with a stabilized gpbicg method". **Applied Numerical Mathematics**.Vol. 67(pp.4-16.
[۱۸٤] Qing-bo L., Ping Z. and Hui-ling S. (2010) "Application of the tfqmr method to the analysis of pec target scattering problem in a lossy half space". Electrical and Control Engineering (ICECE), 2010 International Conference on: IEEE, pp. 3385-8.
[۱۸٥] Bandis S., Lumsden A. and Barton N. (1983) "Fundamentals of rock joint deformation". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts: Elsevier, pp. 249-68.
[۱۸٦] Raghavan R. and Chin L. (2002) "Productivity changes in reservoirs with stress-dependent permeability". SPE Annual Technical Conference and Exhibition: Society of Petroleum Engineers.
[۱۸۷] Öhman J., Niemi A. and Tsang C. F. (2005) "Probabilistic estimation of fracture transmissivity from wellbore hydraulic data accounting for depth-dependent anisotropic rock stress". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 42(5), pp.793-804.
[۱۸۸] Hoek E., Kaiser P. K. and Bawden W. F. (2000) "**Support of underground excavations in hard rock**": CRC Press.
[۱۸۹] Baca R., Arnett R. and Langford D. (1984) "Modelling fluid flow in fractured-porous rock masses by finite-element techniques". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**.Vol. 4(4), pp.337-48.
[۱۹۰] Logan D. L. (2011) "**A first course in the finite element method**": Cengage Learning.
[۱۹۱] Priest S. D. (2012) "**Discontinuity analysis for rock engineering**": Springer Science & Business Media.
[۱۹۲] Long J., Gilmour P. and Witherspoon P. A. (1985) "A model for steady fluid flow in random three-dimensional networks of disc-shaped fractures". **Water Resources Research**.Vol. 21(8), pp.1105-15.
[۱۹۳] Itasca. (2004) "**3dec user’s guide, version 4.0**": Itasca Consulting Group Inc.
[۱۹٤] Baghbanan A. and Jing L. (2008) "Stress effects on permeability in a fractured rock mass with correlated fracture length and aperture". **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**.Vol. 45(8), pp.1320-34.

Abstarct

Connected discontinuities are known as main paths to flow fluids through the rock media. One of the most important modelling methods is the Discrete Fracture Network (DFN), in which the discontinuities and their connectivity patterns are considered as the only route for the flow, and the rock matrix is assumed impermeable. The geometry of DFN is established on partial differential equations, thereby statistical simulation of the fractures may resolve uncertainty problems to a large extent and represent more realistic models. These simulations can be even more precise using three-dimensional DFNs. The fractures are often modeled planar with a special – statistical position in the DFN simulation. The classic analytical relations have been developed to calculate the fluid flow in one-dimensional structures. However, these relations must necessarily be generalized to two-dimensional structures in order to simulate three-dimensional DFNs; therefore, the numerical discretization methods could be functioned. These methods reduce two-dimensional regions to linear elements and rebuild a new system of equations. One of them have been used from the recent half century due to its numerous advantages is well-known as the Finite Element Method (FEM). Ussing the FEM in discretizing the problem of the fluid flow in the fractured rocks result in a large sparse matrix called transmissevity matrix, the flow rate and the hydraulic head gradient vectors. Furthermore, particular methods are required to determine the model response. The solving methods of large sparse matrices are quite a lot various and classified to two main categories; direct and iterative methods. The direct methods are straightforward but they are not efficient enough to tackle all matrices. The most important iterative methods are Krylov Subspaces. Nevertheless, these methods have not well regarded in the rock engineering.

In this research, the geometrical framework of the fractured rock medium is generated by the three DFN. In the sake for simulating the problem as real as possible, the effect of in-situ stresses on the fluid flow is considered, which leads to a one-way hydro-mechanic coupling and the calculations are implemented using the computer code, FlowSHUT^{3D}. Validation of the results are performed by two different methods and sensitivity analyses are presented to comprehend the effect of key parameters on the fluid flow in the fractured rocks.

Keywords: DFN, Meshing, FEM, JCM, Krylov Subspaces methods, FlowSHUT^{3D}.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics Engineering
Ph.D. Thesis in Rock Mechanics

Title

Numerical Modelling of Stress Effect on Fluid Flow in Fractured Rock-mass Using Krylov Iterative Solution Methods

By: Soheil Mohajerani

Supervisors:
Dr. Seyed Mohammad Esmaeil Jalali
Dr. Seyed Rahman Torabi

Advisor:
Seyed Farrokh Forouhandeh

September, 2018