

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی برق و ریاتیک

رشته مهندسی برق گرایش کنترل

پایان نامه کارشناسی ارشد

## تلفیق سیستم موقعیت یاب جهانی و اینرسی برای بهبود عملکرد سیستم ناوبری با استفاده از فیلتر کالمن مکعبی

نگارنده: حسین سعیدی

اساتید راهنما:

دکتر حسین قلی زاده نرم

دکتر علیرضا الفی

بهمن ۱۳۹۷

شماره: ۱۲۵۵، ۱۰۱  
تاریخ: ۹۷، ۱۱، ۱۰

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای حسین سعیدی با شماره دانشجویی ۹۳۰۹۴۷۴ رشته مهندسی برق گرایش کنترل تحت عنوان: تلفیق سیستم موقعیت یاب جهانی و اینرسی برای بهبود عملکرد سیستم ناوبری با استفاده از فیلتر کالمن مکعبی که در تاریخ ۱۳۹۷/۱۱/۱۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input checked="" type="checkbox"/> قبول (با امتیاز ۱۵/۴ ..... درجه ممتاز)
<input type="checkbox"/> عملی	<input checked="" type="checkbox"/> نظری

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر ملی زارده نزم	۱- استاد راهنمای اول
	دانشیار	دکتر الفی	۲- استاد راهنمای دوم
	—	—	۳- استاد مشاور
	دانشیار	دکتر حداد ظریف	۴- نماینده تحصیلات تکمیلی
	دانشیار	دکتر مهدریا	۵- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر مله نوری	۶- استاد ممتحن دوم



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده، هم، تحقیقات و فناوری

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

## تقدیر و تشکر

از زحمات و راهنمایی‌های اساتید بزرگوار جناب آقایان دکتر قلی‌زاده و دکتر الفی، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

## تعهد نامه

این جانب حسین سعیدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی برق-کنترل دانشکده مهندسی برق و رباتیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تلفیق سیستم موقعیت یاب جهانی و اینرسی برای بهبود عملکرد سیستم ناوبری با استفاده از فیلتر کالمن مکعبی تحت راهنمایی دکتر حسین قلی زاده نرم و دکتر علیرضا الفی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط این جانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافت های آن ها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن ( مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

در تلفیق سیستم موقعیت یاب جهانی و اینرسی، به طور گسترده از فیلتر کالمن توسعه یافته برای تخمین حالات استفاده می شود. با این حال، این فیلتر یک تقریب مرتبه اول از سیستم غیرخطی است و وقتی غیرخطی بودن سیستم زیاد شود، دقت تخمین تنزل می یابد.

فیلتر بیزین به فرآیند تخمین پشت سرهم حالت جاری یک سیستم پویا از اندازه گیری های آغشته به نویز با استفاده از قانون بیز اشاره دارد. فیلتر کالمن حجم مکعبی، فیلتر بیزین تقریبی جدیدی برای مسئله فیلتر کردن غیرخطی زمان-گسسته است. برای توسعه ای این فیلتر فرض شده است که چگالی پیش بینی مشترک متغیر تصادفی حالت-اندازه گیری، گوسی است. به این طریق، فیلتر بیزین بهینه به مسئله محاسبه ای انتگرال های لحظه ای چندبعدی با وزن گوسی تقلیل می یابد. برای محاسبه ای عددی این انتگرال ها، یک قانون حجم مکعبی کروی-شعاعی درجه ی سه پیشنهاد می شود. این قانون حجم مکعبی، مجموعه ای از نقاط حجم مکعبی را فراهم می کند که به صورت خطی با بعد بردار حالت رشد می کند. به این ترتیب فیلتر کالمن حجم مکعبی، راه حل مؤثری را حتی برای مسائل فیلتر کردن غیرخطی دارای ابعاد زیاد فراهم می کند. در این پایان نامه، روش فیلتر غیرخطی کالمن حجم مکعبی توسط بسط تیلور مورد تحلیل قرار گرفته و توانایی این فیلتر در حفظ عبارات مرتبه ای بالاتر سیستم غیرخطی نشان داده می شود. سپس با در نظر گرفتن مدلی غیرخطی از وضعیت زوایا در سیستم تلفیق موقعیت یاب جهانی و اینرسی، عملکرد این دو فیلتر بر اساس درجه ای رویت پذیری زوایا، مورد تحلیل قرار می گیرد.

**کلمات کلیدی:** رویت پذیری - سیستم موقعیت یاب جهانی - سیستم ناوبری اینرسی - فیلتر کالمن

توسعه یافته - فیلتر کالمن حجم مکعبی

## فهرست مطالب

### فصل اول-مباحث مقدماتی

- ۱-۱ مقدمه..... ۲
- ۲-۱ دستگاه‌های مختصات..... ۴
- ۱-۲-۱ دستگاه مختصات لخت زمین مرکز (ECI)..... ۴
- ۲-۲-۱ دستگاه مختصات زمین-مرکز زمین-متصل (ECEF)..... ۵
- ۳-۲-۱ دستگاه مختصات ناوبری محلی..... ۶
- ۴-۲-۱ دستگاه مختصات بدنه..... ۷
- ۳-۱ نمادگذاری..... ۸
- ۴-۱ مدل زمین..... ۹
- ۵-۱ مدل جاذبه‌ی زمین..... ۱۰
- ۶-۱ بردار سرعت زاویه‌ای..... ۱۰
- ۷-۱ فاکتورهای کلیدی عملکرد ژيروسکوپ و شتاب‌سنج..... ۱۱
- ۱-۷-۱ گام تصادفی زاویه..... ۱۲
- ۲-۷-۱ گام تصادفی در شتاب‌سنج..... ۱۳
- ۸-۱ فیلتر کالمن..... ۱۴

### فصل دوم-بررسی فیلتر کالمن حجم‌مکعبی

- ۱-۲ فیلتر بیزین..... ۱۸
- ۲-۲ قوانین حجم مکعبی..... ۱۹
- ۳-۲ فیلتر کالمن حجم‌مکعبی..... ۲۳
- ۱-۳-۲ مرحله‌ی پیش‌بینی..... ۲۳
- ۲-۳-۲ مرحله‌ی به‌روزرسانی..... ۲۴
- ۴-۲ مقایسه‌ی فیلترهای EKF و CKF..... ۲۵
- ۱-۴-۲ به‌روزرسانی زمانی..... ۲۵
- ۲-۴-۲ به‌روزرسانی اندازه‌گیری..... ۲۸

### فصل سوم-شبیه‌سازی و نتایج

- ۱-۳ درجه‌ی رویت‌پذیری بر اساس تجزیه به مقدار ویژه..... ۳۴
- ۲-۳ معادلات حاکم بر INS..... ۳۶

۳۶	..... ۱-۲-۳ معادلات وضعیت
۳۸	..... ۲-۲-۳ معادلات سرعت
۳۹	..... ۳-۲-۳ معادلات موقعیت
۳۹	..... ۳-۳ چگونگی شبیه‌سازی
۳۹	..... ۱-۳-۳ شبیه‌سازی ژيروسکوپ‌ها
۴۰	..... ۲-۳-۳ شبیه‌سازی شتاب‌سنج‌ها
۴۲	..... ۳-۳-۳ شبیه‌سازی گیرنده‌ی GPS
۴۵	..... ۴-۳-۳ تلفیق GPS/INS
۴۹	..... ۴-۳ سناریوهای پیشنهادی برای شبیه‌سازی
۵۰	..... ۱-۴-۳ شبیه‌سازی اول
۵۳	..... ۲-۴-۳ شبیه‌سازی دوم

#### فصل چهارم- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۵۸	..... ۱-۴ تحلیل نتایج
۵۹	..... ۲-۴ پیشنهادات
۶۰	..... منابع



## فهرست اشکال

- شکل (۱-۱): محوره‌های دستگاه ECI ..... ۵
- شکل (۲-۱): محوره‌های دستگاه ECEF ..... ۶
- شکل (۳-۱): محوره‌های دستگاه محلی ..... ۷
- شکل (۴-۱): دستگاه مختصات بدنه ..... ۸
- شکل (۵-۱): بردار سرعت زاویه‌ای ..... ۱۰
- شکل (۱-۳): تلفیق GPS/INS ..... ۴۶
- شکل (۲-۳): خطای زاویه‌ی رول در شبیه‌سازی اول ..... ۵۱
- شکل (۳-۳): خطای زاویه‌ی پیچ در شبیه‌سازی اول ..... ۵۲
- شکل (۴-۳): خطای زاویه‌ی یاو در شبیه‌سازی اول ..... ۵۲
- شکل (۵-۳): خطای زاویه‌ی رول در شبیه‌سازی دوم ..... ۵۴
- شکل (۶-۳): خطای زاویه‌ی پیچ در شبیه‌سازی دوم ..... ۵۴
- شکل (۷-۳): خطای زاویه‌ی یاو در شبیه‌سازی دوم ..... ۵۵

## فهرست جداول

- جدول (۱-۱): پارامترهای مدل زمین..... ۹
- جدول (۱-۳): درجه‌ی رویت‌پذیری زوایای خطا تحت مانورهای مختلف..... ۳۵
- جدول (۲-۳): مشخصات ADIS16488 IMU..... ۵۰
- جدول (۳-۳): مشخصات گیرنده‌ی Garmin GPS..... ۵۱

فصل اول

مباحث مقدماتی

## ۱-۱ مقدمه

سیستم موقعیت‌یاب جهانی (GPS)<sup>۱</sup> و سیستم ناوبری لختی (INS)<sup>۲</sup>، مشخصات عملکردی مکمل یکدیگر دارند. داده‌های سیستم GPS مستعد تأثیرپذیری از پارازیت هستند و به علت محدودیت‌های امواج الکترومغناطیسی، ممکن است از دست بروند. از طرفی سیستم INS سیستمی مستقل است که می‌تواند موقعیت، سرعت و وضعیت جسم را در اختیار بگذارد. برای بازه‌های زمانی کوتاه، انتگرال‌گیری نسبت به زمان از شتاب خطی و سرعت زاویه‌ای رصدشده توسط INS، منتج به تخمین دقیقی از موقعیت، سرعت و وضعیت می‌شود؛ اما خطای تخمین با زمان افزایش می‌یابد. اجتماع INS و GPS راه‌حلی مناسب برای فراهم کردن سیستمی ناوبری است که مزایای همزمان هر یک از این دو سیستم را دارا می‌باشد. این اجتماع به طور معمول از طریق فیلتر کالمن صورت می‌گیرد.

ملزومات فیلتر کالمن در خطی بودن و نویز توزیع شده به صورت گوسی، در شرایط عملی به سختی قابل حصول است. برای به کار بردن فیلتر کالمن در سیستم‌های غیرخطی از فیلتر کالمن توسعه‌یافته<sup>۳</sup> استفاده می‌شود که بر اساس بسط تیلور مرتبه‌ی اول از تابع غیرخطی عمل می‌کند. با اینکه فیلتر کالمن توسعه‌یافته کارآمدی فیلتر کالمن را از لحاظ کارآمدی محاسبات حفظ می‌کند، دارای نقص‌هایی مثل تنزل در دقت تخمین است که از چشم‌پوشی از عبارت‌های مرتبه‌ی بالاتر سیستم غیرخطی ناشی می‌شود.

بر اساس چارچوب نمونه‌گیری قطعی، فیلتر کالمن بی‌بو<sup>۴</sup> و فیلتر کالمن اختلاف مرکزی<sup>۵</sup>، از یک سری نقاط سیگما برای انتشار حالات و ماتریس کوواریانس استفاده می‌کنند [1,2]. نقاط سیگما به طور قطعی از

---

<sup>۱</sup> Global Positioning System

<sup>۲</sup> Inertial Navigation System

<sup>۳</sup> Extended Kalman Filter (EKF)

<sup>۴</sup> Unscented Kalman Filter (UKF)

<sup>۵</sup> Central Difference Kalman Filter (CDKF)

میانگین و تجزیه‌ی ریشه‌ی دوم ماتریس کوواریانس متغیر تصادفی پیشین انتخاب می‌شوند [3]. هر دو فیلتر UKF و CDKF به خانواده‌ی فیلترهای کالمن نقاط سیگما تعلق دارند. تفاوت اصلی بین آن‌ها در روش‌های تولید نقاط سیگما است [3,4]. فیلتر UKF نقاط سیگما را از راه تبدیل بی‌بو تولید می‌کند، در حالی که CDKF از فرمول میان‌یابی استرلینگ برای تولید نقاط سیگما استفاده می‌کند. فیلترهای UKF و CDKF می‌توانند به عنوان تخمینی مرتبه‌ی دوم از سیستم غیر خطی به کار روند. بنابراین از لحاظ تئوری، دقت تخمین بالاتری از EKF دارند. از این دو فیلتر در ترکیب GPS/INS استفاده شده و نشان داده شده است که عملکرد بهتری از EKF از خود نشان می‌دهد [3,5-8].

فیلتر کالمن حجم‌مکعبی<sup>۱</sup> از فیلترهای غیرخطی است که اخیراً توسعه یافته و بر اساس قانون مکعبی کروی-شعاعی بنا نهاده شده است که برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی به فرم یک تابع غیرخطی ضرب در چگالی گوسی به کار می‌رود [9-11]. این فیلتر می‌تواند به عنوان تخمینی مرتبه‌ی دوم از سیستم غیرخطی به کار رود و راه‌حلی مؤثر حتی برای سیستم‌های با ابعاد بالا ارائه کند. همچنین CKF از مرتبه‌های بالاتر هم به عنوان تقریبی دقیق‌تر از یک سیستم غیر خطی در [12-14] پیشنهاد شده است. برخلاف UKF که از  $2n+1$  نقطه‌ی بی‌بو برای انتشار حالت و ماتریس کوواریانس استفاده می‌کند، CKF حالت و ماتریس کوواریانس را با  $2n$  نقطه‌ی حجم‌مکعبی انتشار می‌دهد که به همین خاطر وقتی که روش‌های تجزیه‌ی ماتریس یکسانی مثل تجزیه‌ی مقادیر ویژه یا روش چولسکی به این دو فیلتر اعمال شود، CKF بار محاسباتی نسبتاً کمتری از EKF دارد. با وجود اعمال نقطه‌های حجم‌مکعبی، CKF همچنان متعلق به خانواده‌ی فیلترهای کالمن نقاط سیگما است. فیلتر CKF در زمینه‌ی پایداری عملکرد بهتری نسبت به UKF از خود نشان می‌دهد، مخصوصاً وقتی که بعد سیستم بالاتر از ۳ باشد [9-11].

---

<sup>۱</sup> Cubature Kalman Filter (CKF)

در این پایان‌نامه، پس از مرور مباحث مقدماتی در فصل اول، به معرفی و مقایسه‌ی فیلتر کالمن مکعبی با فیلتر کالمن توسعه‌یافته در فصل دوم می‌پردازیم و سپس بعد از انجام شبیه‌سازی در فصل سه، به تحلیل نتایج می‌پردازیم.

## ۲-۱ دستگاه‌های مختصات

در مسائل مکانیکی ساده، حرکت، نسبت به زمین مدل می‌شود، در حالی که فرض می‌شود زمین یک دستگاه مختصات لخت است و از چرخش آن صرف‌نظر می‌شود. برای مسائل ناوبری نمی‌توان این‌گونه عمل کرد؛ چرخش زمین نقش بسزایی در محاسبات ناوبری دارد. همین‌طور مسئله‌ی ناوبری، یک مسئله‌ی چند دستگاه مختصاتی می‌باشد؛ سنسورها حرکتشان را نسبت به مختصات لخت اندازه می‌گیرند و یا این‌که کاربر می‌خواهد مکانش را نسبت به زمین بداند.

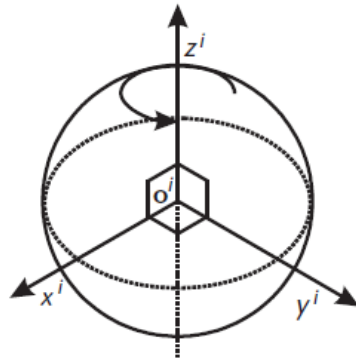
### ۱-۲-۱ دستگاه مختصات لخت زمین-مرکز (ECI)<sup>۱</sup>

در فیزیک، یک دستگاه مختصات لخت آن است که نسبت به بقیه‌ی جهان، شتاب نمی‌گیرد یا نمی‌چرخد. این، یک دستگاه مختصات یکتا را تعریف نمی‌کند. در ناوبری، شکل مشخص‌تری از مختصات لخت به کار می‌رود که با عنوان دستگاه مختصات لخت زمین-مرکز شناخته می‌شود و با نماد  $I$  نشان داده می‌شود. شکل (۱-۱) محورهای دستگاه ECI را نشان می‌دهد. چرخشی که نشان داده شده است، چرخش زمین نسبت به فضا است. محور  $Z$  همواره در امتداد محور چرخش زمین و از مرکز به سمت قطب شمال است. محورهای  $x$  و  $y$  در صفحه‌ی استوایی زمین قرار دارند. آن‌ها همراه با زمین نمی‌چرخند اما محور  $y$ ،  $90^\circ$  درجه جلوتر از محور  $x$  در جهت چرخش زمین است. این به طور یکتا دستگاه مختصات را تعریف نمی‌کند و لازم است زمانی را که محورهای مختصات لخت با محورهای مختصات ECEF (بخش ۱-۲-۱ را ببینید) منطبق

---

<sup>۱</sup> Earth-Centered Inertial Frame

می‌شوند را مشخص کنیم. یک راه این است که به راحتی، وقتی که حل ناوبری آغاز می‌شود، دو دستگاه را منطبق کنیم.



شکل (۱-۱): محورهای دستگاه ECI

دستگاه مختصات لخت از آن جهت در ناوبری حائز اهمیت است که سنسورهای اینرسی، حرکت را نسبت به آن اندازه می‌گیرند و همچنین این دستگاه، ساده‌ترین شکل معادلات ناوبری را برای استفاده مهیا می‌سازد.

### ۱-۲-۲ دستگاه مختصات زمین-مرکز زمین-متصل (ECEF)<sup>۱</sup>

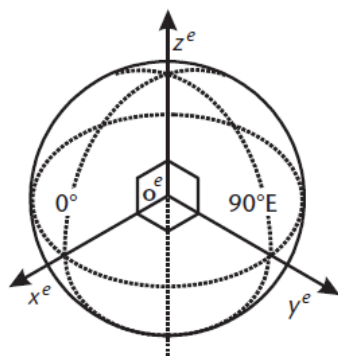
دستگاه مختصات زمین-مرکز زمین-متصل، که معمولاً آن را به اختصار دستگاه زمین می‌گویند، مشابه دستگاه ECI است، به جز این که تمام محورها نسبت به زمین متصل باقی می‌مانند. دستگاه ECEF با نماد  $e$  نشان داده می‌شود و مرکزش در مرکز بیضی‌ای است که سطح زمین را مدل می‌کند، که به طور تقریبی در مرکز جرم قرار دارد.

شکل (۱-۲)، محورهای دستگاه ECEF را نشان می‌دهد. محور  $z$  همواره در امتداد محور چرخش زمین و از مرکز به سمت قطب شمال است. محور  $x$  در راستای تقاطع استوا و نصف‌النهار مرجع است که طول

<sup>۱</sup> Earth-Centered Earth-Fixed Frame

جغرافیایی صفر درجه را تعریف می‌کند. محور  $y$  هم مجموعه‌ی متعامد تشکیل شده با قانون دست راست را تکمیل می‌کند.

دستگاه زمین از آن جهت در ناوبری مهم است که کاربر می‌خواهد مکانش را نسبت به زمین بداند، بنابراین معمولاً از این دستگاه هم به عنوان دستگاه مرجع و هم دستگاه حل استفاده می‌شود.



شکل (۲-۱): محورهای دستگاه ECEF

### ۱-۲-۳ دستگاه مختصات ناوبری محلی<sup>۱</sup>

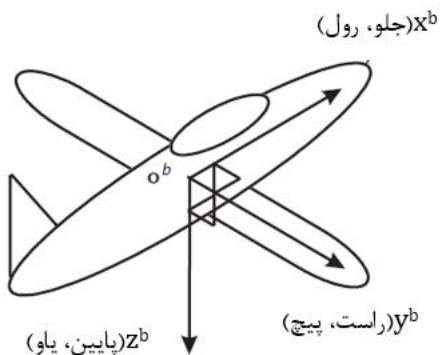
از نماد  $n$  برای نشان دادن این دستگاه استفاده می‌شود. مرکز آن، نقطه‌ای است که در آن به دنبال یک حل ناوبری هستیم (یعنی مثلاً در مرکز جرم وسیله‌ی مورد نظر). شکل (۳-۱) محورهای دستگاه مختصات محلی را نشان می‌دهد. محور  $z$ ، که با عنوان محور پایین ( $D$ ) هم شناخته می‌شود، به صورت بردار عمود بر سطح بیضی‌شکل مدل زمین و تقریباً به سمت مرکز زمین است. محور  $x$  یا محور شمال ( $N$ )، تصویر خط بین کاربر تا قطب شمال بر روی صفحه‌ی متعامد بر محور  $z$  است. با کامل کردن مجموعه‌ی متعامد، محور  $y$  همیشه به سمت شرق است و به همین خاطر محور شرق ( $E$ ) نامیده می‌شود. در شکل (۳-۱) همچنین عرض و طول جغرافیایی که به ترتیب با نمادهای  $L$  و  $\lambda$  نشان داده می‌شوند، آورده شده است.

<sup>۱</sup> Local Navigation Frame





برای حرکت زاویه‌ای، محورهای  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  را به ترتیب محورهای رول، پیچ و یاو هم می‌نامند. شکل (۴-۱) محورهای این دستگاه را نشان می‌دهد.



شکل (۴-۱): دستگاه مختصات بدنه

### ۳-۱ نمادگذاری

در ناوبری، حرکت خطی و زاویه‌ای یک دستگاه مختصات با توجه به دیگری بیان می‌شود. اکثر کمیت‌های جنبش‌شناسی، مثل مکان، سرعت، شتاب و سرعت زاویه‌ای، با سه دستگاه مختصات سروکار دارند  $X_{\alpha\beta}^{\gamma}$ :

- دستگاهی که حرکت آن تشریح می‌شود، که دستگاه هدف<sup>۱</sup> نام می‌گیرد،  $\alpha$ .
- دستگاهی که حرکت انجام شده نسبت به این دستگاه بوده و دستگاه مرجع<sup>۲</sup> نام می‌گیرد،  $\beta$ .
- دستگاهی که حرکت انجام شده، در این دستگاه بیان می‌شود و دستگاه حل<sup>۳</sup> نام می‌گیرد،  $\gamma$ .

<sup>۱</sup> Object Frame

<sup>۲</sup> Reference Frame

<sup>۳</sup> Resolving Frame

## ۴-۱ مدل زمین

به دلیل پهن‌شدگی نسبی زمین در قطب‌ها، متداول است که زمین را به صورت یک بیضی مرجع مدل می‌کنند. مطابق این مدل و بر اساس استاندارد WGS84<sup>۱</sup>، پارامترهای جدول (۱-۱) تعریف می‌شوند.

جدول (۱-۱): پارامترهای مدل زمین

$a = 6378137.0 \text{ m}$	شعاع اصلی (بزرگ) <sup>۲</sup>
$b = a(1 - f) = 6356752.3142\text{m}$	شعاع فرعی (کوچک) <sup>۳</sup>
$f = (a - b)/a = 1/298.257223563$	فشرده‌گی بیضی <sup>۴</sup>
$e = [f(2 - f)]^{1/2} = 0.0818191908426$	خروج از مرکزیت اصلی <sup>۵</sup>
$\Omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$	نرخ چرخش زمین

با مدل کردن زمین مطابق بیضی مرجع گفته‌شده، برای عرض جغرافیایی مشخص، شعاع نصف‌النهار  $R_N$  و شعاع متقاطع  $R_E$  با معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$R_N = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{3/2}} \quad (1-1)$$

$$R_E = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{1/2}} \quad (2-1)$$

<sup>۱</sup> World Geodetic System 1984

<sup>۲</sup> Length of the semi-major axis

<sup>۳</sup> Length of the semi-minor axis

<sup>۴</sup> Flattening of the ellipsoid

<sup>۵</sup> Major eccentricity of the ellipsoid

## ۵-۱ مدل جاذبه‌ی زمین

در این پایان‌نامه از مدل مرجع ارائه‌شده در [15] برای مدل کردن جاذبه‌ی زمین (g) استفاده شده است. در معادله‌ی (۳-۱) تغییرات میزان جاذبه با عرض جغرافیایی در سطح دریا داده شده و نرخ تغییرات آن با افزایش ارتفاع (h) در (۴-۱) آورده شده است.

$$g(0) = 9.780318(1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 L - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2L) \text{ m/s}^2 \quad (۳-۱)$$

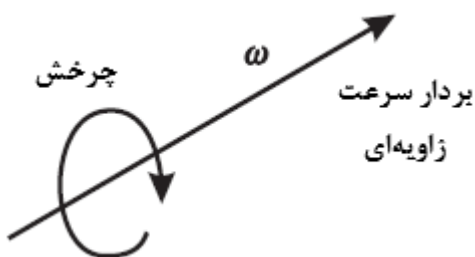
$$g(h) = \frac{g(0)}{(1 + h/R_0)^2} \quad (۴-۱)$$

که:

$$R_0 = (R_E R_N)^{1/2} \quad (۵-۱)$$

## ۶-۱ بردار سرعت زاویه‌ای

بردار سرعت زاویه‌ای  $\omega_{\beta\alpha}^{\gamma}$  سرعت چرخش دستگاه مختصات  $\alpha$  نسبت به دستگاه مختصات  $\beta$  است که در مختصات  $\gamma$  بیان می‌شود. شکل (۵-۱)، چرخش و همینطور جهت بردار سرعت زاویه‌ای مربوط به آن را نمایش می‌دهد. بردار سرعت زاویه‌ای بر صفحه‌ی چرخش عمود است.



شکل (۵-۱): بردار سرعت زاویه‌ای

در ادامه از بردارهای سرعت زاویه‌ای زیر در معادلات حاکم بر INS استفاده خواهد شد:

$$\omega_{ie}^n = [\Omega \cos L \quad 0 \quad -\Omega \sin L]^T \quad (6-1)$$

$$\omega_{en}^n = \left[ \frac{v_E}{R_0 + h} \quad \frac{-v_N}{R_0 + h} \quad \frac{-v_E \tan L}{R_0 + h} \right]^T \quad (7-1)$$

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n \quad (8-1)$$

که  $v_D$  و  $v_E$ ،  $v_N$  و  $v_e^n$  در راستاهای شمال، شرق و پایین هستند.

### ۷-۱ فاکتورهای کلیدی عملکرد ژيروسکوپ و شتابسنج

از عوامل تاثیرگذار در عملکرد ژيروسکوپ می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

**نویز یا گام تصادفی زاویه<sup>۱</sup>:** خطای متوسطی که در نتیجه‌ی نویز سفید فرکانس بالا رخ می‌دهد.

**خطای آفست بایاس<sup>۲</sup>:** یک ژيروسکوپ ثابت می‌تواند مقداری را به اشتباه ثبت کند که به آن خطای بایاس

آفست می‌گویند. این انحراف از صفر، معمولاً در دمای  $25^\circ\text{C}$  برای یک محیط ایده‌آل (یعنی بدون تغییر دما،

لرزش، شوک یا میدان مغناطیسی) داده می‌شود.

**ناپایداری بایاس<sup>۳</sup>:** ناپایداری آفست بایاس در هر دمای ثابت و محیط ایده‌آل که به وسیله‌ی تکنیک واریانس

آلن<sup>۴</sup> اندازه‌گیری می‌شود.

**حساسیت دمایی:** آفست بایاس یک ژيروس با تغییرات دمایی تغییر می‌کند. این مورد را می‌توان با

کالیبراسیون بهبود بخشید.

<sup>۱</sup> Angle Random Walk (ARW)

<sup>۲</sup> Bias Offset Error

<sup>۳</sup> Bias Instability

<sup>۴</sup> Allan Variance

**حساسیت به شوک و لرزش:** شوک و لرزش را می‌توان با نویز و آفست بایاس در خروجی ژيروسکوپ مدل کرد که باعث خطاهای بزرگی می‌شوند که نمی‌توان آن‌ها را به آسانی با کالیبراسیون بهبود داد. عواملی مشابه عوامل یادشده در عملکرد شتاب‌سنج هم نقش دارند. در ادامه به بررسی عامل گام تصادفی در ژيروسکوپ و شتاب‌سنج خواهیم پرداخت.

### ۱-۷-۱ گام تصادفی زاویه

خروجی ژيروسکوپ تحت مزاحمت نویزهای ترمومکانیکی است که با نرخ بسیار بالاتر از نرخ نمونه‌برداری سنسور، بالا و پایین می‌شود. در نتیجه نمونه‌های به دست آمده از سنسور، تحت مزاحمت نویز سفیدی با واریانس  $\sigma^2$  است.

برای مشاهده‌ی تأثیر این نویز بر سیگنال انتگرال گرفته‌شده فرض می‌کنیم که از قانون مستطیلی برای انتگرال‌گیری استفاده شده است. فرض کنید  $N_i$ ،  $i$ -امین متغیر تصادفی در سلسله‌ی نویز سفید باشد. هر  $N_i$  به طور مشابه با میانگین  $E(N_i) = 0$  و واریانس  $Var(N_i) = 0$  توزیع شده است. نتیجه‌ی به‌کارگیری قانون مستطیلی برای انتگرال‌گیری سیگنال نویز سفید  $\epsilon(t)$  در بازه‌ی زمانی  $t = n \cdot \delta t$  به صورت زیر است:

$$\int_0^t \epsilon(t) = \delta t \sum_{i=1}^n N_i \quad (9-1)$$

که  $n$  تعداد نمونه‌های برداشته شده توسط دستگاه در بازه‌ی زمانی است و  $\delta t$  زمان بین نمونه‌برداری‌ها است. با استفاده از فرمول‌های  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$  و

$$Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$$

می‌توان نتیجه‌گیری کرد که:

$$E\left(\int_0^t \epsilon(\tau) d\tau\right) = n \cdot \delta t \cdot E(n) = 0 \quad (10-1)$$

$$\text{Var}\left(\int_0^t \epsilon(\tau) d\tau\right) = \delta t^2 \cdot n \cdot \text{Var}(N) = \delta t \cdot t \cdot \sigma^2 \quad (11-1)$$

در نتیجه نویز، یک خطای گام تصادفی با میانگین صفر در سیگنال انتگرال گرفته شده تولید می کند که انحراف معیارش به صورت زیر است:

$$\sigma_\theta(t) = \sigma \cdot \sqrt{\delta t \cdot t} \quad (12-1)$$

یعنی انحراف معیار متناسب با جذر زمان رشد می کند.

از آنجا که معمولاً علاقه مندیم تأثیر نویز را بر سیگنال انتگرال گرفته شده مطالعه کنیم، سازنده ها معمولاً نویز را با گام تصادفی زاویه (ARW) مشخص می کنند:

$$\text{ARW} = \sigma_\theta(1) \quad (13-1)$$

که دارای واحد  $^\circ/\sqrt{h}$  است. برای مثال یک ژيروسکوپ با ARW برابر با  $0.2^\circ/\sqrt{h}$ ، انحراف معیار خطای زاویه اش بعد از یک ساعت  $0.2^\circ$  و بعد از دو ساعت برابر با  $0.2\sqrt{2}^\circ$  خواهد بود و به همین ترتیب.

### ۱-۷-۲ گام تصادفی در شتابسنج

نمونه های خروجی به دست آمده از شتابسنج تحت تأثیر نویز سفید قرار دارند. در بخش ۱-۷-۱ نشان داده شد که انتگرال گیری از نویز سفید، یک گام تصادفی ایجاد می کند که انحراف معیارش متناسب با  $\sqrt{t}$  رشد می کند. در نتیجه نویز سفید روی خروجی شتابسنج، چنین گام تصادفی ای را روی سرعت محاسبه شده ایجاد می کند. برای بررسی تأثیر نویز سفید شتابسنج روی موقعیت مکانی محاسبه شده، تحلیلی مشابه انجام می دهیم و از نمونه های به دست آمده از شتابسنج، دو بار انتگرال می گیریم.

$$\int_0^t \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau d\tau = \delta t \sum_{i=1}^n \delta t \sum_{j=1}^i N_j = \delta t^2 \sum_{i=1}^n (n-i+1) N_i \quad (14-1)$$

خطای مورد انتظار برای موقعیت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E\left(\int_0^t \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau d\tau\right) = \delta t^2 \sum_{i=1}^n (n-i+1) E(N_i) = 0 \quad (15-1)$$

و واریانس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\int_0^t \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau d\tau\right) &= \delta t^4 \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 \text{Var}(N_i) = \\ \frac{\delta t^4 n(n+1)(2n+1)}{6} \text{Var}(N) &\approx \frac{1}{3} \cdot \delta t \cdot t^3 \cdot \sigma^2 \end{aligned} \quad (16-1)$$

که تقریب زدن با این فرض صورت گرفته که  $\delta t$  کوچک است (یعنی فرکانس نمونه برداری بزرگ است). این تحلیل نشان می‌دهد که نویز سفید شتاب سنج یک گام تصادفی با میانگین صفر و انحراف معیار  $\sigma_s(t)$  در موقعیت تولید می‌کند که:

$$\sigma_s(t) \approx \sigma \cdot t^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma t}{3}} \quad (17-1)$$

## ۸-۱ فیلتر کالمن

همان‌طور که گفته شد، اجتماع INS و GPS از طریق فیلتر کالمن صورت می‌گیرد. فیلتر کالمن توسعه یافته<sup>۱</sup> معمول‌ترین فیلتر برای این کار است که در این بخش به اختصار توضیح داده می‌شود.

<sup>۱</sup> Extended Kalman Filter (EKF)



سیستم خطی گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1} \quad (18-1)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (19-1)$$

که  $w_k$ ، نویز پردازش و  $v_k$  نویز اندازه گیری بوده و هر دو فرایند نویز سفید، ناهمبسته، با میانگین صفر و دارای ماتریس کوواریانس به ترتیب  $Q_k$  و  $R_k$  می باشند.

فیلتر کالمن، تخمین جاری بهینه  $x_k$  را بر اساس معلومات دنباله‌ای خروجی  $z_0, z_1, \dots, z_k$  تعیین می‌کند. معیار تخمین بهینه، می‌نیمم کردن کوواریانس خطای تخمین  $P_k$  است که برابر  $E[e_k e_k^T]$  می باشد و  $e_k$  بردار خطا است که از تفاضل تخمین بهینه از بردار حالت به دست می آید. یعنی آنکه می‌خواهیم تخمین بهینه  $x_k$  را چنان تعیین کنیم که شکل درجه‌ی دوم  $\alpha^* P(k) \alpha$  که در آن  $\alpha$  یک  $n$ -بردار دلخواه است می‌نیمم باشد. همچنین هنگامی که  $P(k)$  می‌نیمم است، آنگاه میانگین مربع خطا  $E[e_k^T e_k]$  می‌نیمم می‌شود. الگوریتم فیلتر کالمن در دو مرحله‌ی پیش‌بینی و به‌روزرسانی مطابق زیر است:

### مرحله‌ی پیش‌بینی

$$x_{k|k-1} = \Phi_k x_{k-1|k-1} \quad (20-1)$$

$$P_{k|k-1} = \Phi_k P_{k-1|k-1} \Phi_k^T + Q_k \quad (21-1)$$

### مرحله‌ی به‌روزرسانی

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (22-1)$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k x_{k|k-1}) \quad (23-1)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} \quad (24-1)$$

که  $K_k$  بهره کالمن است.

در عمل بیشتر سیستم‌ها دارای معادلات غیرخطی می‌باشند. سیستم غیرخطی گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1} \quad (25-1)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (26-1)$$

که  $f(\cdot)$  و  $h(\cdot)$  توابعی غیرخطی هستند. در الگوریتم EKF، با استفاده از بسط تیلور، اقدام به خطی‌سازی سیستم می‌کنیم. به این صورت که اگر ماتریس‌های ژاکوبین توابع  $f(\cdot)$  و  $h(\cdot)$  را  $\Phi_k$  و  $H_k$  بنامیم، می‌توانیم از فرمول‌های (۲۰-۱) تا (۲۴-۱) برای فیلتر کالمن توسعه یافته استفاده کنیم.

## فصل دوم

بررسی فیلتر کالمن حجم مکعبی

## ۱-۲ فیلتر بیزین

معادلات سیستم شامل مدل سیستم و مدل مشاهده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + q_{k-1} \quad (۱-۲)$$

$$z_k = h(x_k, u_k) + r_k \quad (۲-۲)$$

که  $q_{k-1}$ ، نویز پردازش و  $r_k$  نویز اندازه گیری بوده و هر دو فرایند نویز گوسی، ناهمبسته، با میانگین صفر و دارای ماتریس کوواریانس به ترتیب  $Q_{k-1}$  و  $R_k$  می باشند. در تخمین بیزین هدف اصلی، محاسبه‌ی تابع چگالی احتمال  $p(x_k | D_k)$  است که در آن  $D_k$  مشاهدات صورت گرفته و ورودی‌ها از زمان ۱ تا  $k$  است. در مرحله‌ی پیش‌بینی به معادلات زیر برای محاسبه‌ی میانگین  $\hat{x}_{k|k-1}$  و کوواریانس  $P_{k|k-1}$  می‌رسیم [10]:

$$\hat{x}_{k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} f(x_{k-1}, u_{k-1}) \mathcal{N}(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) dx_{k-1} \quad (۳-۲)$$

$$\begin{aligned} & P_{k|k-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} f(x_{k-1}, u_{k-1}) f^T(x_{k-1}, u_{k-1}) \mathcal{N}(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) dx_{k-1} \quad (۴-۲) \\ & - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned}$$

که  $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$  نماد چگالی گوسی است. برای مرحله‌ی بهنگام‌سازی اندازه‌گیری، با فرض گوسی بودن اشتراکی حالت-اندازه‌گیری داریم [10]:

$$p(x_k | D_k) = \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k}) \quad (۵-۲)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + W_k(z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (۶-۲)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_k P_{zz,k|k-1} W_k^T \quad (۷-۲)$$

که:

$$W_k = P_{xz,k|k-1} P_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (۸-۲)$$

$$P_{xz,k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} x_k h^T(x_k, u_k) \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) dx_k - \hat{x}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T \quad (۹-۲)$$

$$P_{zz,k|k-1} = E[(z_k - \hat{z}_{k|k-1})(z_k - \hat{z}_{k|k-1})^T | D_{k-1}] \quad (۱۰-۲)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} h(x_k, u_k) h^T(x_k, u_k) \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) dx_k - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T + R_k$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = E[z_k | D_{k-1}] = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} h(x_k, u_k) \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) dx_k \quad (۱۱-۲)$$

## ۲-۲ قوانین حجم مکعبی

توجه خود را به انتگرالی به شکل زیر معطوف می‌کنیم:

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-x^T x) dx \quad (۱۲-۲)$$

با تغییر متغیر از مختصات کارتزین به مختصات کروی یعنی با تبدیل  $x = ry$ ، این انتگرال به دو انتگرال

تفکیک می‌شود؛ یک انتگرال شعاعی

$$I(f) = \int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr \quad (۱۳-۲)$$

و یک انتگرال کروی

$$S(r) = \int_{S_n} f(ry) d\sigma(y) \quad (۱۴-۲)$$

که  $S_n$  سطح کره‌ای است که با  $S_n = \{y \in \mathbb{R}^n | y^T y = 1\}$  تعریف می‌شود و  $\sigma(\cdot)$  المان سطحی روی  $S_n$

است. حال این دو انتگرال کروی و شعاعی را می‌توان به طور جدا و به ترتیب با قانون حجم مکعبی کروی و

قانون تربیع گوسی<sup>۱</sup> محاسبه کرد.

---

<sup>۱</sup> Gaussian Quadrature Rule

در یک مجموعه نقاط حجم مکعبی متقارن، نقاط با وزن یکسان به طور متقارن، حول مبدأ توزیع شده‌اند. به نقطه‌ی  $u$ ، نقطه‌ی مولد<sup>۱</sup> این مجموعه گویند اگر برای مؤلفه‌های  $u$  به شکل  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  داشته باشیم:

$$u_i \geq u_{i+1} > 0, i=1, 2, \dots, r-1$$

برای مثال،  $[1] \in \mathbb{R}^2$  نماینده‌ی مجموعه نقاط حجم مکعبی زیر است

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

که  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  مولد است.

با توجه به قضیه‌ی عدم تغییر<sup>۲</sup>، انتگرال (۱۴-۲) می‌تواند با یک قانون حجم مکعبی کروی درجه‌ی سه تخمین زده شود که در نتیجه به حاصل جمع زیر می‌رسیم:

$$\int_{S_n} f(ry) d\sigma(y) \approx \omega \sum_{i=1}^{2n} f([u]_i) \quad (15-2)$$

مجموعه نقاط  $[u]$  تحت جایگشت و تغییر علامت، نامتغیر است، که به معنی آن است که  $2n$  نقطه‌ی حجم مکعبی برای تخمین انتگرال کافی است. برای انتخاب بالا، تک جمله‌ای‌های  $y_1^{d_1} y_2^{d_2} \dots y_n^{d_n}$  که مجموع  $\sum_{i=1}^n d_i$  فرد باشد، به طور دقیق انتگرال گیری می‌شوند.

برای اینکه این قانون را برای همه‌ی تک جمله‌ای‌های تا درجه‌ی سه دقیق سازیم، نیاز داریم که قانون برای ابعاد زوج  $\sum_{i=1}^n d_i = \{0, 2\}$  دقیق باشد. این کار با حل پارامترهای نامعلوم برای یک تابع تک جمله‌ای از

---

<sup>۱</sup> Generator

<sup>۲</sup> Invariance Theory

درجه‌ی  $n=0$  و  $n=2$  محقق می‌شود. ما دو تابع  $f(\cdot)$  را به شکل  $f(y)=1$  و  $f(y) = y_1^2$  در نظر می‌گیریم. از این کار به دو معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$f(y) = 1: \quad 2n\omega = \int_{S_n} d\sigma(y) = A_n \quad (۱۶-۲)$$

$$f(y) = y_1^2: \quad 2\omega u^2 = \int_{S_n} y_1^2 d\sigma(y) = \frac{1}{n} A_n \quad (۱۷-۲)$$

که  $A_n$  ناحیه‌ی سطحی کره‌ی واحد  $n$ -بعدی است. حل این معادلات نتیجه می‌دهد که  $u^2 = 1$  و  $\omega = \frac{A_n}{2n}$ . در نتیجه نقاط حجم مکعبی می‌توانند به گونه‌ای انتخاب شوند که در تقاطع کره‌ی واحد و محورها واقع شده باشند.

انتگرال شعاعی تعریف شده در معادله‌ی (۲-۱۳) با یک تغییر متغیر دیگر به صورت  $t = r^2$ ، می‌تواند به فرم انتگرال گوس-لاگر<sup>۱</sup> تبدیل شود، که نتیجه می‌دهد:

$$\int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty \tilde{S}(t) t^{\frac{n}{2}-1} \exp(-t) dt = \sum_{i=1}^m \omega_i \tilde{S}(t_i) \quad (۱۸-۲)$$

که  $t_i$ ،  $i$  - امین ریشه‌ی چند جمله‌ای لاگر  $L_m(t)$  است و وزن‌های  $\omega_i$  توسط رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$\omega_i = \frac{t_i}{(m+1)^2 (L_{m+1}(t_i))^2} \quad (۱۹-۲)$$

یک قانون گوس-لاگر درجه‌ی اول برای  $\tilde{S}(t) = \{1, t\}$  (یا به طور معادل برای  $S(r) = \{1, r^2\}$ ) دقیق است. به خاطر خصوصیات قانون حجم مکعبی کره‌ی که در قبل آمده، قانون کره‌ی شعاعی ترکیبی به علت تقارن برای همه‌ی چندجمله‌ایهای درجه‌ی فرد، صفر می‌شود. بنابراین برای اینکه قانون کره‌ی شعاعی برای

---

<sup>۱</sup> Gauss-Laguerre

همه‌ی چندجمله‌ای‌های تا درجه‌ی سه در  $x \in \mathbb{R}^n$  دقیق باشد کافی است از قانون گوس - لاگور درجه‌ی اول به فرم زیر استفاده شود:

$$\int_0^\infty \tilde{S}_i(t) t^{\frac{n}{2}-1} \exp(-t) dt = \omega_1 \tilde{S}_i(t_1), \quad i = \{0,1\} \quad (20-2)$$

که  $\tilde{S}_0(t) = 1$  و  $\tilde{S}_1(t) = t$ . تخمین گوس - لاگور درجه‌ی اول با استفاده از نقطه‌ی  $t_1 = \frac{n}{2}$  و وزن  $\omega_1 = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$  ساخته شده است که  $\Gamma(\cdot)$  تابع گاما است. تخمین فرم شعاعی نهایی می‌تواند با استفاده از معادله‌ی (2-18) به شکل زیر نوشته شود:

$$\int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr \approx \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) S\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \quad (21-2)$$

حال ما یک تخمین برای انتگرال کروی معادله‌ی (2-15) داریم، که قانون درجه‌ی سوم از نقطه‌ی حجم مکعبی [1] و وزن  $\frac{A_n}{2^n}$  به دست می‌آید که ناحیه‌ی سطحی  $A_n$  برابر است با  $2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ . با به‌کارگیری نتایج به‌دست‌آمده برای انتگرال کروی و شعاعی، معادلات (2-15) و (2-21) را ترکیب می‌کنیم تا یک تخمین حجم مکعبی درجه‌ی سه برای (2-12) به صورت زیر به دست آوریم:

$$I(f) \approx \frac{\sqrt{\pi^n}}{2^n} \sum_{i=1}^{2n} f\left(\sqrt{\frac{n}{2}} [1]_i\right) \quad (22-2)$$

با یک تغییر متغیر می‌توانیم قانون حجم مکعبی کروی - شعاعی درجه‌ی سه را برای یک انتگرال دلخواه به شکل تابع غیرخطی ضرب در گوسی، به دست آوریم. نتیجه به صورت زیر است:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{N}(x|\mu, \Sigma) dx \approx \sum_{i=1}^{2n} \omega_i f(\sqrt{\Sigma} \xi_i + \mu) \quad (23-2)$$



که نقاط حجم مکعبی به صورت  $\xi_i = \sqrt{n}[1]_i$  ، اوزان به صورت  $\omega_i = \frac{1}{2n}$  ، و نقاط  $[1]_i$  نقاط تقاطع بین محورهای کارترین و کره‌ی  $n$  - بعدی واحد هستند.

### ۳-۲ فیلتر کالمن حجم مکعبی

در این بخش الگوریتم فیلتر کالمن حجم مکعبی در دو مرحله‌ی پیش‌بینی و به‌روزرسانی ارائه می‌شود.

#### ۱-۳-۲ مرحله‌ی پیش‌بینی

۱. نقاط حجم مکعبی  $\xi_i, i = 1, \dots, 2n$  را از تقاطع کره‌ی واحد  $n$ -بعدی و محورهای کارترین به دست آورید. سپس آن‌ها را در  $\sqrt{n}$  ضرب کنید. یعنی:

$$\xi_i = \begin{cases} \sqrt{n}e_i, & , i = 1, \dots, n \\ -\sqrt{n}e_{i-n}, & , i = n + 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (24-2)$$

۲. نقاط حجم مکعبی را انتشار دهید. ماتریس ریشه‌ی دوم، فاکتور چولسکی<sup>۱</sup> پایین‌مثنی است.

$$X_{i,k-1|k-1} = \sqrt{P_{k-1|k-1}} \xi_i + \hat{x}_{k-1|k-1} \quad (25-2)$$

۳. نقاط حجم مکعبی را با تابع دینامیک مدل، ارزیابی کنید.

$$X_{i,k|k-1}^* = f(X_{i,k-1|k-1}) \quad (26-2)$$

۴. میانگین حالت پیش‌بینی شده را تخمین بزنید.

$$\hat{x}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k|k-1}^* \quad (27-2)$$

---

<sup>۱</sup> Cholesky Factor

۵. کوواریانس خطای پیش‌بینی شده را تخمین بزنید.

$$P_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k|k-1}^* X_{i,k|k-1}^{*\top} - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^{\top} + Q_{k-1} \quad (28-2)$$

## ۲-۳-۲ مرحله‌ی به‌روزرسانی

۱. نقاط حجم‌مکعبی  $\xi_i, i = 1, \dots, 2n$  را از تقاطع کره‌ی واحد  $n$ -بعدی و محورهای کارترین به

دست آورید. سپس آن‌ها را در  $\sqrt{n}$  ضرب کنید.

۲. نقاط حجم‌مکعبی را انتشار دهید.

$$X_{i,k|k-1} = \sqrt{P_{k|k-1}} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1} \quad (29-2)$$

۳. نقاط حجم‌مکعبی را با کمک تابع مدل اندازه‌گیری ارزیابی کنید.

$$Z_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1}) \quad (30-2)$$

۴. اندازه‌ی پیش‌بینی شده را تخمین بزنید.

$$\hat{z}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Z_{i,k|k-1} \quad (31-2)$$

۵. ماتریس کوواریانس تغییر<sup>۱</sup> را تخمین بزنید.

$$P_{zz,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Z_{i,k|k-1} Z_{i,k|k-1}^{\top} - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^{\top} + R_k \quad (32-2)$$

۶. ماتریس کوواریانس متقابل<sup>۲</sup> را تخمین بزنید.

<sup>۱</sup> Innovation Covariance Matrix

<sup>۲</sup> Cross\_covariance Matrix

$$P_{xy,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k-1|k-1} Z^T - \hat{x}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T \quad (33-2)$$

۷. بهره‌ی کالمن  $W_k$  و میانگین و کوواریانس حالت به‌روزشده را حساب کنید.

$$W_k = P_{xz,k|k-1} P_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (34-2)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + W_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (35-2)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_k P_{zz,k|k-1} W_k^T \quad (36-2)$$

## ۴-۲ مقایسه‌ی فیلترهای EKF و CKF

در این بخش، عملکرد CKF و دقت تخمین آن با استفاده از بسط تیلور مورد ارزیابی قرار گرفته و ارتباط بین CKF و EKF در تحلیل آورده شده است.

### ۴-۲-۱ به‌روزرسانی زمانی

ابتدا CKF را به عبارات تیلور بسط می‌دهیم. با در نظر گرفتن متغیر تصادفی  $x_{k-1|k-1}$  با میانگین  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  و ماتریس کوواریانس  $P_{k-1|k-1}$  که از توزیع گوسی  $x_{k-1|k-1} \sim \mathcal{N}(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$  تبعیت می‌کند و با تعریف  $\Delta x_{k-1|k-1}$  به صورت  $x_{k-1|k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}$  با توزیع گوسی  $\Delta x_{k-1|k-1} \sim \mathcal{N}(0, P_{k-1|k-1})$ ، تابع گذار حالت  $f(x_{k-1|k-1})$  می‌تواند مطابق زیر حول  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  به یک سری تیلور بسط داده شود:

$$\begin{aligned} f(x_{k-1|k-1}) &= f(\hat{x}_{k-1|k-1} + \Delta x_{k-1|k-1}) \\ &= f(\hat{x}_{k-1|k-1}) + D_{\Delta x_{k-1|k-1}} f + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f}{2!} + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^3 f}{3!} + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^4 f}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (37-2)$$

که  $D_{\Delta x} f = [(\Delta x^T \nabla) f(x)]^T |_{x=\hat{x}}$  و  $\nabla$ ، دیفرانسیل  $f(x)$  است.

با جایگذاری نقاط حجم مکعبی  $\chi_{i,k-1|k-1} = \hat{x}_{k-1|k-1} + \sqrt{nP_{k-1|k-1}}[1]_i$  در معادله‌ی (۳۷-۲) ، مقدار پیش‌بینی‌شده‌ی تابع گذار حالت برای هر نقطه‌ی حجم مکعبی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \chi_{i,k|k-1}^* &= f(\chi_{i,k-1|k-1}) = f(\hat{x}_{k-1|k-1} + \Delta x_{k-1|k-1}) = \\ & f(\hat{x}_{k-1|k-1}) + D_{\Delta x_{k-1|k-1}} f + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f}{2!} + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^3 f}{3!} + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^4 f}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (۳۸-۲)$$

تخمین پیش‌بینی‌شده برای میانگین به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_{k|k-1} &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \chi_{i,k|k-1}^* = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f(\hat{x}_{k-1|k-1} + \Delta x_{k-1|k-1}) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left( f(\hat{x}_{k-1|k-1}) + D_{\Delta x_{k-1|k-1}} f + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f}{2!} + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^3 f}{3!} \right. \\ & \left. + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^4 f}{4!} + \dots \right) \end{aligned} \quad (۳۹-۲)$$

با در نظر گرفتن اینکه  $\Delta x_{k|k-1}$  به صورت متقارن توزیع شده است، تمام لحظات فرد، حاصل جمع صفر را می‌دهند. بنابراین  $x_{k|k-1}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f}{2!} + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^4 f}{4!} + \dots \right) \quad (۴۰-۲)$$

با صرف نظر از عبارات بالاتر از مرتبه‌ی دو داریم:

$$x_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}) + E \left[ \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f}{2!} \right] \quad (۴۱-۲)$$

$$\cdot \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f}{2!} = D_{\Delta x_{k-1|k-1}} (D_{\Delta x_{k-1|k-1}} f) / 2! = (\nabla^T \Delta x_{k-1|k-1} \Delta^T x_{k-1|k-1} \nabla / 2!) f$$

که با توجه به تعریف ماتریس کوواریانس که  $E[\Delta x \Delta x^T] = P$  ، عبارت مرتبه‌ی دوم در بسط تیلور به صورت

$$E \left[ \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f}{2!} \right] = \frac{\nabla^T P_{k-1|k-1} \nabla f}{2!} \quad (۴۲-۲)$$

به دست می آید.

در نتیجه پیش‌بینی حالت توسط CKF به این صورت به دست می آید:

$$x_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}) + \frac{\nabla^T P_{k-1|k-1} \nabla f}{2!} \quad (۴۳-۲)$$

همانطور که در معادله‌ی (۲۸-۲) از الگوریتم CKF آورده شده،  $P_{k|k-1}$  به صورت رابطه‌ی زیر است:

$$P_{k|k-1} = E \left[ (\chi_{i,k|k-1}^* - x_{k|k-1})(\chi_{i,k|k-1}^* - x_{k|k-1})^T \right] + Q_k \quad (۴۴-۲)$$

پس از چشم‌پوشی از عبارات بالاتر از مرتبه‌ی سوم،  $\chi_{i,k|k-1}^* - x_{k|k-1}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \chi_{i,k|k-1}^* - x_{k|k-1} \\ &= D_{\Delta x_{k|k-1}} f + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 f}{2!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^3 f}{3!} - E \left[ \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 f}{2!} \right] \end{aligned} \quad (۴۵-۲)$$

با در نظر گرفتن تقارن  $\Delta x_{k|k-1}$ ، مقدار میانگین تمام عبارات فرد  $\Delta x_{k|k-1}$  برابر صفر می‌شود و ماتریس کوواریانس حقیقی به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= E \left[ D_{\Delta x_{k|k-1}} f (D_{\Delta x_{k|k-1}} f)^T + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}} f (D_{\Delta x_{k|k-1}}^3 f)^T}{3!} \right. \\ &+ \left. \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 f (D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 f)^T}{2 \times 2!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^3 f (D_{\Delta x_{k|k-1}} f)^T}{3!} \right] \\ &- E \left[ \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 f}{2!} \right] E \left[ \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 f}{2!} \right]^T + Q_k \end{aligned} \quad (۴۶-۲)$$

اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$D_{\Delta x} f = \Phi_k \Delta x \quad (۴۷-۲)$$

که  $\Phi_k$  ماتریس ژاکوبین  $f(\cdot)$  است، معادله‌ی (۴۶-۲) می‌تواند به شکل رابطه‌ی (۴۸-۲) بازنویسی شود.

$$\begin{aligned}
P_{k|k-1} &= \Phi_k P_{k-1|k-1} \Phi_k^T + E\left[\frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}} f(D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^3 f)^T}{3!} + \right. \\
&\left. \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f(D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^2 f)^T}{2 \times 2!} + \frac{D_{\Delta x_{k-1|k-1}}^3 f(D_{\Delta x_{k-1|k-1}} f)^T}{3!} \right] - \\
&\left[ \left( \frac{\nabla^T P_{k-1|k-1} \nabla}{2!} \right) f \right] \left[ \left( \frac{\nabla^T P_{k-1|k-1} \nabla}{2!} \right) f \right]^T + Q_k
\end{aligned} \tag{۴۸-۲}$$

از معادلات (۴۳-۲) و (۴۸-۲) می‌توان فهمید که CKF قادر به نگهداری و تولید عبارات مرتبه‌ی دوم یک سیستم غیرخطی است. باین حال اگر این فیلتر به یک سیستم خطی یا خطی‌سازی شده اعمال شود، عبارات مرتبه‌ی بالاتر از جمله مرتبه‌ی دوم، صفر خواهد شد. در نتیجه، معادلات (۴۳-۲) و (۴۸-۲) مشابه EKF خواهد شد.

#### ۲-۴-۲ به‌روزرسانی اندازه‌گیری

با در نظر گرفتن متغیر تصادفی  $x_{k|k-1}$  با میانگین  $\hat{x}_{k|k-1}$  و ماتریس کوواریانس  $P_{k|k-1}$  با توزیع گوسی  $x_{k|k-1} \sim \mathcal{N}(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$  و با تعریف  $\Delta x_{k|k-1}$  به عنوان  $x_{k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}$  و با توزیع گوسی  $\Delta x_{k|k-1} \sim \mathcal{N}(0, P_{k|k-1})$  ، همان‌طور که در تحلیل قبل نشان داده شد، تابع اندازه‌گیری  $h(x_{k|k-1})$  می‌تواند به یک سری تیلور حول  $\hat{x}_{k|k-1}$  بسط داده شود:

$$\begin{aligned}
h(x_{k|k-1}) &= h(\hat{x}_{k|k-1} + \Delta x_{k|k-1}) = h(\hat{x}_{k|k-1}) + D_{\Delta x_{k|k-1}} h + \\
&\frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 h}{2!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^3 h}{3!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^4 h}{4!} + \dots
\end{aligned} \tag{۴۹-۲}$$

با جایگذاری نقاط حجم مکعبی  $x_{i,k|k-1} = \hat{x}_{k|k-1} + \sqrt{n P_{k|k-1}} [1]_i$  در معادله‌ی (۴۹-۲) ، پیش‌بینی هر نقطه‌ی حجم مکعبی توسط تابع اندازه‌گیری به صورت رابطه‌ی (۵۰-۲) است.

$$Z_{i,k|k-1} = h(\chi_{i,k|k-1}) = h(\hat{x}_{k|k-1} + \Delta x_{k|k-1}) = h(\hat{x}_{k|k-1}) + D_{\Delta x_{k|k-1}} h + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 h}{2!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^3 h}{3!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^4 h}{4!} + \dots \quad (50-2)$$

همانند محاسبات در مقدار پیش‌بینی‌شده‌ی تابع گذار حالت، با صرف نظر از عبارات مرتبه‌ی بالاتر، مقدار میانگین نقاط حجم مکعبی اندازه‌گیری به این صورت است:

$$z_{k|k-1} = h(\hat{x}_{k|k-1}) + \frac{\nabla^T P_{k|k-1} \nabla h}{2!} \quad (51-2)$$

طبق تعریف  $P_{zz,k|k-1}$  داریم:

$$P_{zz,k|k-1} = E \left[ (Z_{k|k-1} - z_{k|k-1})(Z_{k|k-1} - z_{k|k-1})^T \right] + R_k \quad (52-2)$$

عبارت  $Z_{k|k-1} - z_{k|k-1}$  می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$Z_{k|k-1} - z_{k|k-1} = D_{\Delta x_{k|k-1}} h + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 h}{2!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^3 h}{3!} - E \left[ \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 h}{2!} \right] \quad (53-2)$$

با اعمال تقارن  $\Delta x_{k|k-1}$ ، مقدار میانگین تمام عبارات مرتبه‌ی فرد  $\Delta x_{k|k-1}$  برابر صفر می‌شود و ماتریس کوواریانس به این صورت محاسبه می‌شود:

$$P_{zz,k|k-1} = E \left[ D_{\Delta x_{k|k-1}} h \left( D_{\Delta x_{k|k-1}} h \right)^T + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}} h \left( D_{\Delta x_{k|k-1}}^3 h \right)^T}{3!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 h \left( D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 h \right)^T}{2 \times 2!} + \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^3 h \left( D_{\Delta x_{k|k-1}} h \right)^T}{3!} \right] - E \left[ \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 h}{2!} \right] E \left[ \frac{D_{\Delta x_{k|k-1}}^2 h}{2!} \right]^T + R_k \quad (54-2)$$

اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$D_{\Delta x} h = H_k \Delta x \quad (55-2)$$

که  $H_k$  ماتریس ژاکوبین  $h(\cdot)$  است، معادله‌ی (۵۴-۲) می‌تواند به شکل زیر بازنویسی شود:

$$P_{zz,k|k-1} = H_k P_{k|k-1} H_k^T + E \left[ \frac{D_{\Delta x k|k-1} h(D_{\Delta x k|k-1}^3 h)^T}{3!} + \frac{D_{\Delta x k|k-1}^2 h(D_{\Delta x k|k-1}^2 h)^T}{2 \times 2!} + \frac{D_{\Delta x k|k-1}^3 f(D_{\Delta x k|k-1} h)^T}{3!} \right] - E \left[ \left( \frac{\nabla^T P_{k|k-1} \nabla}{2!} \right) h \right] E \left[ \left( \frac{\nabla^T P_{k|k-1} \nabla}{2!} \right) h \right]^T + R_k \quad (56-2)$$

طبق تعریف،  $P_{xz,k|k-1}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{xz,k|k-1} = E \left[ (X_{k|k-1} - x_{k|k-1})(Z_{k|k-1} - z_{k|k-1})^T \right] = E \left[ \Delta X_{k|k-1} \left( D_{\Delta x k|k-1} h + \frac{D_{\Delta x k|k-1}^2 h}{2!} + \frac{D_{\Delta x k|k-1}^3 h}{3!} \right)^T \right] \quad (57-2)$$

با اعمال معادلات (۵۵-۲) تا (۵۷-۲) می‌توان به معادله‌ی زیر رسید:

$$P_{xz,k|k-1} = P_{k|k-1} H_k^T + E \left[ \Delta X_{k|k-1} \frac{D_{\Delta x k|k-1}^3 h}{3!} \right]^T \quad (58-2)$$

و سپس بهره‌ی کالمن حجم مکعبی و مقادیر به‌روزشده‌ی حالت و ماتریس کوواریانس مطابق فرمول‌های (۳۴-۲) تا (۳۵-۲) به دست می‌آیند.

از تحلیل دقت تخمین CKF می‌توان فهمید که CKF نه تنها به عبارات مرتبه‌ی اول، بلکه به عبارات مرتبه‌ی دوم ماتریس کوواریانس مرتبط است که نشان از توانایی CKF برای حفظ مراتب بالاتر توابع غیرخطی را



دارد. با این حال اگر غیرخطی بودن سیستم خیلی زیاد نباشد یا اینکه سیستم خطی باشد، عبارات مرتبه‌ی بالاتر صفر می‌شوند و رفتار CKF به EKF تنزل می‌یابد.

همان‌طور که در [16-18] نشان داده شده، روش‌های فیلتر غیر خطی مثل UKF هنگام اعمال به سیستم ناوبری GPS/IMU که مدلی خطی داشته باشد، بهبودی در دقت تخمین نشان نمی‌دهند، هرچند این منابع به بهبود میزان مقاومت<sup>۱</sup>، با به کارگیری این روش‌های فیلتر غیرخطی اشاره می‌کنند. محققان حساسیت EKF و UKF را تحلیل کرده و به دقت تخمین مشابه EKF و UKF در [19,20] اشاره دارند. هر چند مدل به کارگرفته شده در آن تحلیل، رفتاری همانند یک مدل خطی دارد. بنابراین انتظار عملکردی مشابه از روش‌های فیلتر خطی و غیر خطی می‌رود. در تحلیل پیش‌رو در این پایان‌نامه، CKF به یک سیستم با تابع گذار غیر خطی اعمال می‌شود تا مزایای آن در سیستم ناوبری GPS/IMU نشان داده شود.

---

<sup>۱</sup> Robustness



## فصل سوم

### شبیه‌سازی و نتایج

### ۱-۳ درجه‌ی رویت‌پذیری بر اساس تجزیه به مقدار ویژه

در این فصل پس از معرفی درجه‌ی رویت‌پذیری بر اساس تجزیه به مقدار ویژه<sup>۱</sup> و سپس توضیح چگونگی شبیه‌سازی تلفیق GPS/INS، سناریوی پیشنهادی برای بررسی عملکرد CKF و مقایسه‌ی آن با EKF را مطرح کرده و سپس نتایج شبیه‌سازی را بیان می‌کنیم.

یک سیستم گسسته‌ی تکه‌ای ثابت به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\begin{cases} X(k+1) = \phi_j X(k) + \varphi_j U(k) \\ Z(k+1) = H_j X(k) \end{cases} \quad j=1,2,\dots,r \quad (1-3)$$

برای هر بخش زمانی  $j$  ماتریس‌های  $\phi_j$ ،  $\varphi_j$  و  $H_j$  ثابت هستند، اما ممکن است از بخشی به بخش دیگر تغییر کنند. از آنجا که ماتریس رویت‌پذیری هر بخش  $j$  به صورت

$$Q_j^T = [H_j^T : \phi_j^T H^T : \dots : (\phi_j^{n-1})^T H_j^T] \quad (2-3)$$

تعریف شده است، ماتریس رویت‌پذیری برهنه به صورت  $Q_S(r) = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_r]^T$  تعریف می‌شود.

بر اساس تئوری SVD، ماتریس‌های متعامد واحد  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  و  $V = [v_1, v_2, \dots, v_r]$  وجود دارند به طوری که:

$$Q_S(r) = U \Sigma V^T \quad (3-3)$$

<sup>۱</sup> Singular Value Decomposition (SVD)

که  $\Sigma = [S \ 0_{(m-r) \times r}]$  است و  $S = \text{diag}(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r)$  ماتریسی قطری است که  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$  می‌باشد و  $\sigma_i$  ها مقادیر ویژه‌ی  $Q_S(r)$  هستند. در نتیجه معادله‌ی اندازه‌گیری را می‌توان با مقادیر ویژه به صورت زیر تجزیه کرد:

$$Z = \sum_{i=1}^r \sigma_i (v_i^T X(1)) u_i \quad (4-3)$$

که  $X(1)$  بردار حالت‌های اولیه است.

درجه‌ی رویت‌پذیری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n_k = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}, \quad i=1,2,\dots,r, \quad \sigma_i \sim \max(u_i^T z v_i / \sigma_i) \quad (5-3)$$

که  $\sigma_i$  مقدار ویژه‌ی حالت ماکزیمم در  $X(1)$ ،  $\sigma_0$  مقدار ویژه‌ی حالت در هنگام اندازه‌گیری مستقیم، و  $n_k$  درجه‌ی رویت‌پذیری  $k$ -امین حالت است.

جدول (۱-۳): درجه‌ی رویت‌پذیری زوایای خطا تحت مانورهای مختلف

زوایا	حرکت خطی			حرکت زاویه‌ای			
	یکنواخت	شتاب‌دار شمال	شتاب‌دار شرق	محور رول	محور پیچ	محور یاو	چرخش سه‌محوری
<b>رول</b>	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر
<b>پیچ</b>	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر
<b>یاو</b>	رویت ناپذیر	رویت‌پذیر ضعیف	رویت‌پذیر ضعیف	رویت‌پذیر ضعیف	رویت‌پذیر ضعیف	رویت‌پذیر	رویت‌پذیر

جدول (۱-۳) بر اساس [21] آورده شده است. بر اساس این مرجع، برای حرکت خطی، درجه‌ی رویت‌پذیری حین حرکت شتاب‌دار به سمت شمال، بهترین است. برای حرکت زاویه‌ای، درجه‌ی رویت‌پذیری حین چرخش حول محور یاو بهتر از سایر چرخش‌های حول یک محور است؛ و درجه‌ی رویت‌پذیری حین چرخش سه‌محوری بهترین است.

### ۲-۳ معادلات حاکم بر INS

در این بخش معادلات خطای وضعیت، سرعت و موقعیت در INS تشریح می‌شود.

#### ۱-۲-۳ معادلات وضعیت

با استفاده از مدل زاویه‌ی سای<sup>۱</sup> و با برخورد با خطای زوایا همانند زاویه‌ی نامیزانی بین مختصات حقیقی و تخمینی، به مدلی غیر خطی برای خطای وضعیت دست می‌یابیم. به دلیل خطای نامیزانی و دریافت تصادفی ژيروسکوپ و شتاب‌سنج، دستگاه ناوبری تخمینی (دستگاه مختصات p) بر دستگاه ایده‌آل n منطبق نمی‌شود. ماتریس دوران از دستگاه مختصات حقیقی به تخمینی به صورت زیر است:

$$C_n^p = \begin{bmatrix} c\delta\beta c\delta\gamma & c\delta\beta s\delta\gamma & -s\delta\beta \\ -c\delta\alpha s\delta\gamma + s\delta\beta s\delta\alpha c\delta\gamma & c\delta\alpha c\delta\gamma + s\delta\beta s\delta\alpha s\delta\gamma & c\delta\beta s\delta\alpha \\ s\delta\alpha s\delta\gamma + c\delta\alpha s\delta\beta c\delta\gamma & -s\delta\alpha c\delta\gamma + c\delta\alpha s\delta\beta s\delta\gamma & c\delta\beta c\delta\alpha \end{bmatrix} \quad (۶-۳)$$

که C و S، نماینده‌ی توابع کسینوس و سینوس هستند.  $\psi = [\delta\alpha \ \delta\beta \ \delta\gamma]^T$  بردار نامیزانی<sup>۲</sup> است و  $\delta\alpha$ ،  $\delta\beta$  و  $\delta\gamma$  به ترتیب خطاهای زوایای رول، پیچ و یاو هستند.

$$C_n^p = C_b^p - C_b^n = (I - C_b^n) C_b^p \quad (۷-۳)$$

با مشتق‌گیری از (۷-۳) داریم:

<sup>۱</sup> Psi-angle expression

<sup>۲</sup> Misalignment Vector

$$\dot{C}_n^p = -\dot{C}_p^n C_b^p + (I - C_p^n) \dot{C}_b^p \quad (8-3)$$

و:

$$\dot{C}_n^p = C_b^p (\omega_{pb}^b \times) - C_b^n (\omega_{nb}^b \times) \quad (9-3)$$

که  $\times$  نماد ماتریس شبه‌متقارن<sup>۱</sup> است. با مساوی‌قرار دادن معادلات (۸-۳) و (۹-۳) داریم:

$$-C_p^n (\omega_{np}^n \times) C_b^p + (I - C_p^n) C_b^p (\omega_{pb}^b \times) - C_b^p (\omega_{pb}^b \times) + C_b^n (\omega_{nb}^b \times) = 0 \quad (10-3)$$

ضرب معادله‌ی (۱۰-۳) از سمت چپ در  $C_n^p$  و از سمت راست در  $C_p^b$  نتیجه می‌دهد:

$$(\omega_{np}^n \times) + C_b^p (\omega_{pb}^b \times) C_p^b - C_b^p (\omega_{nb}^b \times) C_p^b = 0 \quad (11-3)$$

با جایگزین کردن دو تساوی زیر:

$$C_b^p (\omega_{pb}^b \times) C_p^b = (\omega_{pb}^b \times)$$

$$C_b^p (\omega_{nb}^b \times) C_p^b = (\omega_{nb}^b \times)$$

در (۱۱-۳) و ساده‌سازی، مدل غیرخطی زیر را برای خطای وضعیت به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \omega_{np}^n = \dot{\psi} &= \omega_{nb}^p - \omega_{pb}^p = C_b^p [(\omega_{ib}^b - C_n^b \omega_{in}^n) - (\hat{\omega}_{ib}^b - C_p^b \hat{\omega}_{in}^p)] \\ &= C_b^p [(\omega_{ib}^b - C_n^b \omega_{in}^n) - (\omega_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b - C_p^b (\omega_{in}^n + \delta \omega_{in}^n))] \\ &= (I - C_n^p) \omega_{in}^n - C_b^p \delta \omega_{ib}^b + \delta \omega_{in}^n \end{aligned} \quad (12-3)$$

با فرض کوچک بودن خطای زوایا در معادله‌ی (۱۲-۳)، به مدل خطی زیر برای وضعیت خطای زوایا می‌رسیم:

$$\dot{\psi} \approx (\psi \times) \omega_{in}^n - C_b^n \delta \omega_{ib}^b + \delta \omega_{in}^n \quad (13-3)$$

---

<sup>۱</sup> Skew Symmetric Matrix

### ۲-۲-۳ معادلات سرعت

معادله‌ی سرعت به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\dot{v} = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v + g_1 \quad (۱۴-۳)$$

که  $f^b$  نیروی مخصوص<sup>۱</sup> در مختصات بدنه و  $g_1$  بردار گرانش است. به طور مشابه سرعت تخمینی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{\hat{v}} = C_b^p \hat{f}^b - (2\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \times \hat{v} + \hat{g}_1 \quad (۱۵-۳)$$

با تفاضل این دو معادله از هم داریم:

$$\delta\dot{v} = \dot{\hat{v}} - \dot{v} = C_b^p \hat{f}^b - C_b^n f^b - (2\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \times \hat{v} + (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v + \hat{g}_1 - g_1 \quad (۱۶-۳)$$

با ساده‌سازی، معادله‌ی غیرخطی زیر را برای خطای سرعت داریم:

$$\delta\dot{v} = (I - C_p^n) C_b^p f^b + C_b^p \delta f^b - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times v - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta v - \delta g \quad (۱۷-۳)$$

که  $\hat{\omega}_{en}^n - \omega_{en}^n = \delta\omega_{en}^n$  ،  $\hat{\omega}_{ie}^n - \omega_{ie}^n = \delta\omega_{ie}^n$  ،  $\hat{v} - v = \delta v$  ،  $\hat{f}^b - f^b = \delta f^b$  برای مدل خطای سرعت داریم:

$$\delta\dot{v} = [C_b^n f^b \times] \psi + C_b^n \delta f^b - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times v - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta v - \delta g \quad (۱۸-۳)$$

با نوشتن  $C_b^n f^b = f^n$  داریم:

$$\delta\dot{v} = [f^n \times] \psi + C_b^n \delta f^b - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times v - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta v - \delta g \quad (۱۹-۳)$$

---

<sup>۱</sup> Specific Force



### ۳-۲-۳ معادلات موقعیت

خطای موقعیت مکانی به ترتیب برای عرض و طول جغرافیایی و ارتفاع از زمین به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \dot{L} = \frac{\delta v_N^n}{R_N + h} - \frac{\delta h v_N^n}{(R_N + h)^2} \quad (۲۰-۳)$$

$$\delta \dot{\lambda} = \frac{\delta v_E^n \sec L}{R_E + h} + \frac{\delta L v_E^n \tan L \sec L}{R_E + h} - \frac{\delta h v_E^n \sec L}{(R_E + h)^2} \quad (۲۱-۳)$$

$$\delta \dot{h} = -\delta v_D^n \quad (۲۲-۳)$$

### ۳-۳ چگونگی شبیه‌سازی

در این بخش توضیحات لازم در خصوص روش شبیه‌سازی ارائه می‌شود.

#### ۱-۳-۳ شبیه‌سازی ژيروسکوپ‌ها

خروجی‌های ۳ ژيروسکوپ متعامد در حالت ایدئال به صورت زیر هستند:

$$\omega_{ib}^b = \omega_{nb}^b + C_n^b (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \quad (۲۳-۳)$$

که  $C_n^b$  ماتریس کسینوس جهت از مختصات محلی به مختصات بدنه است. در این شبیه‌سازی، تنها ۳ منبع

خطا، شامل ARW و بایاس‌های استاتیک و دینامیک در نظر گرفته شده‌اند. ARW از سه ژيروسکوپ

می‌تواند به شکل نویز سفید  $\eta_g \sim \mathcal{N}(0, \sigma_g^2)$  بیان شود که  $\sigma_g^2 = [\sigma_{gx}^2, \sigma_{gy}^2, \sigma_{gz}^2]^T$ . بایاس استاتیک  $b_g$

هر بار که ژيروسکوپ روشن می‌شود متفاوت است، اما در حین کار ثابت می‌ماند. بنابراین، به صورت یک

پروسه‌ی تصادفی ثابت مدل می‌شود و با اضافه کردن مقدار ثابتی به  $\omega_{ib}^b$  شبیه‌سازی می‌شود. این عدد به

صورت تصادفی از یک بازه‌ی زمانی مشخص گرفته می‌شود. در مقابل، بایاس دینامیکی، معمولاً در

فرکانس‌های پایین مشاهده می‌شود و با استفاده از زمان همبستگی<sup>۱</sup>  $\tau_g$  بیان می‌شود. بایاس دینامیکی به صورت یک پروسه‌ی اسکالر گوس-مارکوف<sup>۲</sup> مدل می‌شود که فرمول‌های زمان گسسته‌اش به صورت زیر است:

$$\eta_{g\delta b(+)} = \alpha \eta_{g\delta b} + \omega_c \quad (24-3)$$

$$\alpha = e^{-(\delta t \cdot 1/\tau_g)} \quad (25-3)$$

$$\sigma_c^2 = \sigma_{g\delta b}^2 (1 - \alpha^2) \quad (26-3)$$

به روش تکرارشونده و با  $b_g = \eta_{g\delta b(1)}$  به دست می‌آید.  $\omega_c$  سلسله‌ای نرمال با واریانس  $\sigma_c^2$  است. اگر واریانس  $\sigma_{g\delta b}^2$  توسط تولیدکننده داده نشده باشد، معمولاً می‌تواند حدود ۱۰ درصد بایاس استاتیک در نظر گرفته شود.

در آخر، خروجی‌های شبیه‌سازی شده‌ی آغشته به نویز از سه ژيروسکوپ متعامد به صورت زیر هستند:

$$\tilde{\omega}^b = \omega_{ib}^b + \eta_g + b_g + \eta_{g\delta b} \quad (27-3)$$

معمولاً، سازنده‌های ژيروسکوپ، ARW را برحسب جذر چگالی طیفی توان (PSD<sup>۳</sup>) بیان می‌کنند. اگر ARW بر حسب  $\left(\frac{\text{deg}}{\sqrt{h}}\right)$  باشد، داریم:

$$\eta_g = \frac{ARW}{60} \frac{\pi}{180} \left(\frac{\text{rad/s}}{\sqrt{\text{HZ}}}\right) \quad (28-3)$$

و از معادله‌ی (۷۲-۳) برای به دست آوردن  $\sigma_g^2$  استفاده می‌شود.

### ۲-۳-۳ شبیه‌سازی شتاب‌سنج‌ها

در مرحله‌ی اول بردار حقیقی شتاب،  $a$ ، باید از مختصات محلی NED به مختصات بدنه تبدیل شود. یعنی:

<sup>۱</sup> Correlation time

<sup>۲</sup> Gauss-Markov process

<sup>۳</sup> Power Spectral Density

$$a^b = C_b^b a^n \quad (29-3)$$

شتاب‌سنج‌ها از دیدگاه ناوبری، دارای خروجی‌های تحریف‌شده و نادرستی هستند. دلیل آن، وجود دو عامل جاذبه و نیروی ساختگی کوریولیس<sup>۱</sup> است. جاذبه طبق فرمول‌های (۳-۱) و (۴-۱) به دست می‌آید. فرمول محاسبه‌ی نیروی ساختگی کوریولیس به قرار زیر است:

$$f_{cor}^n = S (2 \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \quad (30-3)$$

که  $S = [v^n \times]$  ماتریس شبه متقارن سرعت است. بردارهای جاذبه و کوریولیس باید به مختصات بدنه تبدیل شوند. به این ترتیب، خروجی‌های سه شتاب‌سنج متعامد به صورت زیر هستند:

$$f^b = a^b - C_n^b (f_{cor}^n + g^n) \quad (31-3)$$

همانند ژيروسکوپ، شتاب‌سنج‌های واقعی هم دارای نویز هستند. خروجی‌های شبیه‌سازی‌شده‌ی آغشته به نویز شتاب‌سنج‌ها با مدلی مشابه مدل استفاده‌شده برای ژيروسکوپ‌ها، به قرار زیر هستند:

$$\tilde{f}^b = f^b + \eta_f + b_f + \eta_{f\delta b} \quad (32-3)$$

که  $\eta_f \sim \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$  و با واریانس  $\sigma_f^2 = [\sigma_{fx}^2, \sigma_{fy}^2, \sigma_{fz}^2]^T$  است.  $b_f$  بایاس استاتیک و  $\eta_{f\delta b}$  نویز بایاس دینامیک با زمان همبستگی  $T_f$  و واریانس  $\sigma_{f\delta b}^2$  است. معمولاً مشخصات میزان دقت شتاب‌سنج‌ها بر حسب گام تصادفی سرعت (VRW)<sup>۲</sup> داده می‌شود. اگر VRW بر حسب  $\left(\frac{m/s}{\sqrt{h}}\right)$  داده شده باشد داریم:

$$\eta_f = \frac{VRW}{60} \left(\frac{m/s^2}{\sqrt{HZ}}\right) \quad (33-3)$$

معادله‌ی (۳-۳) برای به‌دست‌آوردن مقادیر واریانس  $\sigma_f^2$  استفاده می‌شود.

<sup>۱</sup> Coriolis fictitious force

<sup>۲</sup> Velocity Random Walk

### ۳-۳-۳ شبیه‌سازی گیرنده‌ی GPS

یک گیرنده‌ی GPS ارزان‌قیمت معمولاً تخمین‌های موقعیت را همان‌گونه که در استاندارد WGS84 بیان شده، تحویل می‌دهد. علاوه بر این، گیرنده‌ی GPS ممکن است تخمین‌های سرعت را هم در مختصات محلی NED فراهم کند.

بیشتر گیرنده‌های GPS ارزان‌قیمت، تخمین‌ها را در فرکانس‌های پایین‌تری از IMU فراهم می‌کنند. آن‌ها معمولاً در فرکانس‌هایی بین ۱ تا ۲۰ هرتز کار می‌کنند. بنابراین ضروری است که در شبیه‌سازی نرخ نمونه‌برداری را برای گیرنده‌ی GPS کاهش دهیم.

### ۳-۳-۳-۱ موقعیت GPS

موقعیت  $p$  که جزء داده‌هاست باید به موقعیت GPS حقیقی  $p^n = [L, \lambda, h]^T$  تبدیل شود که  $L$  عرض جغرافیایی،  $\lambda$  طول جغرافیایی و  $h$  ارتفاع از بیضی مرجع زمین است. موقعیت GPS در شبیه‌سازی در دو مرحله تولید می‌شود. ابتدا موقعیت در مختصات محلی NED در قالب مختصات ECEF به صورت  $p^e = [x^e, y^e, z^e]^T$  بیان می‌شود. سپس موقعیت ECEF به  $p^n$  تغییر می‌یابد.

فرمول‌های تبدیل از مختصات محلی NED به ECEF به قرار زیر هستند [22]:

$$p^e = p_o^e + R^e p \quad (34-3)$$

$$R^e = \begin{bmatrix} -\sin L_o \cos \lambda_o & -\sin \lambda_o & -\cos L_o \cos \lambda_o \\ -\sin L_o \sin \lambda_o & \cos \lambda_o & -\cos L_o \sin \lambda_o \\ \cos L_o & 0 & -\sin L_o \end{bmatrix} \quad (35-3)$$

نقطه‌ی مرجع محلی  $p_0^n = [L_0, \lambda_0, h_0]^T$  نقطه‌ایست که مسیر حرکت<sup>۱</sup> از آن‌جا شروع می‌شود و  $p_0^e =$

$[x_0^e, y_0^e, z_0^e]^T$  نقطه‌ی مرجع محلی در مختصات ECEF است که مطابق زیر به دست می‌آید [23]:

$$x_0^e = (R_N(L_0) + h_0) \cos L_0 \cos \lambda_0 \quad (36-3)$$

$$y_0^e = (R_N(L_0) + h_0) \cos L_0 \sin \lambda_0 \quad (37-3)$$

$$z_0^e = (R_N(L_0)(1 - e^2) + h_0) \sin L_0 \quad (38-3)$$

که  $R_N$  در [23] آمده است.

در قدم بعد، محاسبات میانی لازم برای تبدیل از موقعیت ECEF به موقعیت GPS مطابق [24] به صورت زیر است:

$$p = (x^{e2} + y^{e2}) / a^2 \quad (39-3)$$

$$q = z^{e2} (1 - e^2) / a^2 \quad (40-3)$$

$$r = (p + q - e^4) / 6 \quad (41-3)$$

$$s = (e^4 pq) / (4r^3) \quad (42-3)$$

$$t = \sqrt[3]{1 + s + \sqrt{s(2 + s)}} \quad (43-3)$$

$$u = r(1 + t + \frac{1}{t}) \quad (44-3)$$

$$v = \sqrt{u^2 + e^4 q} \quad (45-3)$$

$$\omega = e^2(u + v - q) / (2v) \quad (46-3)$$

$$c = \sqrt{u + v + \omega^2} - \omega \quad (47-3)$$

$$E = c\sqrt{x^{e2} + y^{e2}} / (c + e^2) \quad (48-3)$$

---

<sup>۱</sup> Trajectory

که ثابت‌های  $a$  و  $e$  از جدول (۱-۱) گرفته شده‌اند.

در آخر موقعیت GPS حقیقی  $p^n = [L, \lambda, h]^T$  به شکل زیر بیان می‌شود [24]:

$$L = \arctan2(z^e, E) \quad (۴۹-۳)$$

$$\lambda = \arctan2(y^e, x^e) \quad (۵۰-۳)$$

$$h = \frac{c + e^2 - 1}{c} \sqrt{E^2 + z^{e2}} \quad (۵۱-۳)$$

یک گیرنده‌ی GPS تخمین‌های موقعیت را با میزانی پراکندگی تحویل می‌دهد. در نتیجه، باید نویز را به  $p^n$  اضافه کرد. معمولاً سازنده‌های GPS میزان دقت موقعیت افقی (دو بعدی) را به صورت احتمال خطای دایره‌ای (CEP)<sup>۱</sup> بر حسب متر بیان می‌کنند. CEP شعاع دایره‌ای به مرکزیت مکان صحیح است که شامل ۵۰٪ خطاهای مکانی افقی موردانتظار است [23]. اگر انحراف‌های معیار عرض و طول جغرافیایی، به ترتیب  $\sigma_{\lambda m}$  و  $\sigma_{Lm}$ ، برابر در نظر گرفته شوند، آن‌گاه با توجه به [23] داریم:

$$\sigma_{Lm} = \sigma_{\lambda m} = 0.8493 \text{ CEP (m)} \quad (۵۲-۳)$$

انحراف معیارهای GPS بر حسب رادیان، مورد نیاز هستند و می‌توانند از روابط زیر به دست آیند:

$$\sigma_L = \frac{\sigma_{Lm}}{R_M(L_0) + h_0} \quad (۵۳-۳)$$

$$\sigma_\lambda = \frac{\sigma_{\lambda m}}{(R_N(L_0) + h_0) \cos L_0} \quad (۵۴-۳)$$

که  $R_M$  در [23] داده شده است.

در نهایت برای پیدا کردن تخمین‌های موقعیت فراهم‌شده توسط GPS یعنی  $\tilde{p}_G^n = [\tilde{L}_G, \tilde{\lambda}_G, \tilde{h}_G]^T$  با  $p^n$ ، نویزهای سفید گوسی  $\eta_L \sim \mathcal{N}(0, \sigma_L^2)$ ،  $\eta_\lambda \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\lambda^2)$  و  $\eta_h \sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2)$  جمع می‌شود:

<sup>۱</sup> Circular Error Probable

$$\tilde{L}_G = L + \eta_L \quad (55-3)$$

$$\tilde{\lambda}_G = \lambda + \eta_\lambda \quad (56-3)$$

$$\tilde{h}_G = h + \eta_h \quad (57-3)$$

### GPS سرعت ۲-۳-۳-۳

شبه‌سازی سرعت داده‌شده توسط GPS سراسر است. بردار  $v^n$  که جزء داده‌هاست با نویز سفید گوسی

$\eta_v \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$  جمع می‌شود که توسط سازنده‌ی GPS داده می‌شود:

$$v_G^n = v^n + \eta_v \quad (58-3)$$

### GPS/INS تلفیق ۴-۳-۳

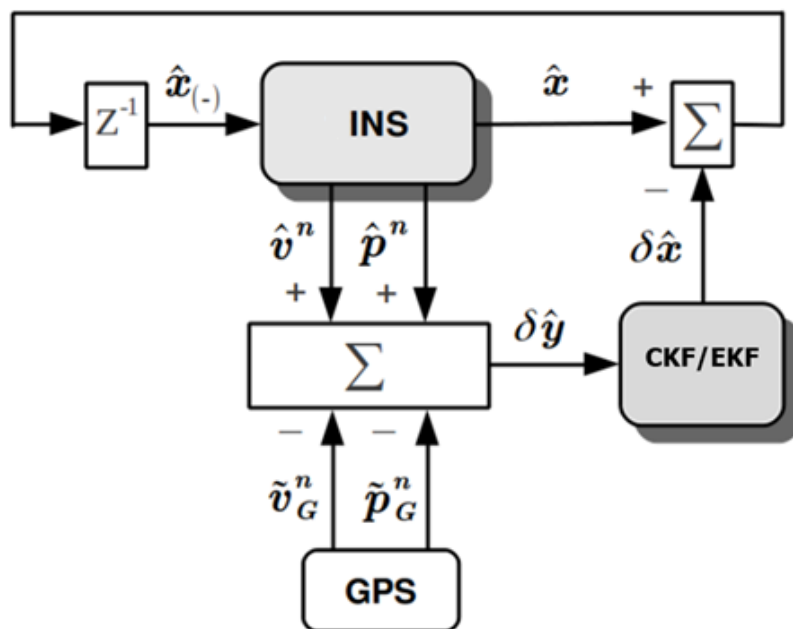
در این پایان‌نامه از مدل جفت‌شدن سست<sup>۱</sup> GPS/INS مطابق شکل (۱-۳) استفاده شده است. این نوع

انضمام به عنوان اجرای پس‌خورد<sup>۲</sup> شناخته می‌شود [23].

---

<sup>۱</sup> Loosely-coupled Integration

<sup>۲</sup> Feedback Implementation



شکل (۱-۳): تلفیق GPS/INS

حال با توجه به مدل‌های شبیه‌سازی گفته شده برای ژيروسکوپ، شتاب‌سنج و GPS در قسمت‌های قبل، متغیرهای شکل (۱-۳) را مرور می‌کنیم.

بردار حالت به صورت  $\delta \hat{x} = [\psi^T, \delta \hat{v}^{nT}, \delta \hat{p}^{nT}, \delta \hat{b}_g^T, \delta \hat{b}_f^T, \delta \hat{b}_g^T, \delta \hat{b}_f^T]^T$  می‌باشد و مدل کلاسیک و خطی معادلات INS جهت محاسبات فیلتر کالمن توسعه یافته به صورت زیر است:

$$\delta \dot{\hat{x}}(t) = F_{(t)} \delta \hat{x}(t) + G_{(t)} u_{(t)} + \xi_{(t)} \quad (۵۹-۳)$$

که تابع F به شکل زیر خواهد بود:



$$F_{(t)\{21 \times 21\}} = \begin{bmatrix} F_{\psi\psi} & F_{\psi v} & F_{\psi p} & -\hat{C}_b^n & 0 & -\hat{C}_b^n & 0 \\ F_{v\psi} & F_{vv} & F_{vp} & 0 & \hat{C}_b^n & 0 & \hat{C}_b^n \\ 0 & F_{pv} & F_{pp} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_g} & -\frac{1}{\tau_f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_f} \end{bmatrix} \quad (60-3)$$

:45

$$F_{\psi\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -(\Omega \sin L + \frac{v_E}{R} \tan L) & \frac{v_N}{R} \\ (\Omega \sin L + \frac{v_E}{R} \tan L) & 0 & \Omega \cos L + \frac{v_E}{R} \\ -\frac{v_N}{R} & -\Omega \cos L - \frac{v_E}{R} & 0 \end{bmatrix} \quad (61-3)$$

$$F_{\psi v} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan L}{R} & 0 \end{bmatrix} \quad (62-3)$$

$$F_{\psi p} = \begin{bmatrix} -\Omega \sin L & 0 & -\frac{v_E}{R^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{R^2} \\ -\Omega \cos L - \frac{v_E}{R \cos^2 L} & 0 & \frac{v_E \tan L}{R^2} \end{bmatrix} \quad (63-3)$$

$$F_{v\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -f_D & f_E \\ f_D & 0 & -f_N \\ -f_E & f_N & 0 \end{bmatrix} \quad (64-3)$$

$$F_{vv} = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{R} & -2(\Omega \sin L + \frac{v_E}{R} \tan L) & \frac{v_N}{R} \\ (2\Omega \sin L + \frac{v_E}{R} \tan L) & \frac{1}{R}(v_N \tan L + v_D) & 2\Omega \cos L + \frac{v_E}{R} \\ -\frac{2v_N}{R} & -2(\Omega \cos L + \frac{v_E}{R}) & 0 \end{bmatrix} \quad (65-3)$$

$$F_{vp} = \begin{bmatrix} -v_E(2\Omega \cos L + \frac{v_E}{R \cos^2 L}) & 0 & \frac{1}{R^2}(v_E^2 \tan L - v_N v_D) \\ (2\Omega(v_N \cos L - v_D \sin L) + \frac{v_N v_E}{R \cos^2 L}) & 0 & -\frac{v_E}{R^2}(v_N \tan L + v_D) \\ 2\Omega v_E \sin L & 0 & \frac{1}{R^2}(v_N^2 + v_E^2) \end{bmatrix} \quad (66-3)$$

$$F_{pv} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R \cos L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (67-3)$$

$$F_{pp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N}{R^2} \\ \frac{v_E \tan L}{R \cos L} & 0 & -\frac{v_E}{R^2 \cos L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (68-3)$$

برای مدل غیرخطی ارائه شده برای INS فرمول‌ها مطابق بخش ۲-۳ است. ماتریس‌های  $G$  و  $u$  به صورت زیر هستند:

$$G_{\{21 \times 12\}} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_b^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{C}_b^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69-3)$$

$$u = [\tilde{\omega}^b{}^T, \tilde{f}^b{}^T, \eta_{g\delta b}^T, \eta_{f\delta b}^T]^T \quad (70-3)$$

همچنین برای نویز  $\xi \sim \mathcal{N}(0, Q)$  داریم:

$$Q_{\{12 \times 12\}} = \text{diag}([n_g^2{}^T, n_f^2{}^T, n_{g\delta b}^2{}^T, n_{f\delta b}^2{}^T]) \quad (71-3)$$

$$n_g^2 = \sigma_g^2 \delta t \quad (72-3)$$

$$n_f^2 = \sigma_f^2 \delta t \quad (73-3)$$

$$n_{g\delta b}^2 = \sigma_{g\delta b}^2 \cdot \tau_g \quad (74-3)$$

$$n_{f\delta b}^2 = \sigma_{f\delta b}^2 \cdot \tau_f \quad (75-3)$$

که  $n_{f\delta b}^2$ ،  $n_{g\delta b}^2$ ،  $n_f^2$ ،  $n_g^2$  به ترتیب چگالی‌های طیفی توان نویز تصادفی ژيروسکوپ، نویز تصادفی شتاب‌سنج، بایاس دینامیکی ژيروسکوپ و بایاس دینامیکی شتاب‌سنج هستند.

برای بردار  $\delta\hat{y} = [\delta\hat{y}_v^T, \delta\hat{y}_p^T]^T$  داریم:

$$\delta\hat{y}_{(t)} = H\delta\hat{x}_{(t)} + v_{(t)} \quad (76-3)$$

$$H_{\{6 \times 21\}} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{T}_p^r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (77-3)$$

$$\delta\hat{y}_v = [\hat{v}^n - \hat{v}_G^n] \quad (78-3)$$

$$\delta\hat{y}_p = \hat{T}_p^r(\hat{p}^n, \hat{p}_G^n) + \hat{C}_b^n I_{ba}^b \quad (79-3)$$

که  $I_{ba}^b$  بازوی اهرم<sup>۱</sup> از آنتن GPS به IMU است.  $\hat{T}_p^r$  ماتریس تبدیل منحنی به کارتزین<sup>۲</sup> مطابق [25] است.

$$\hat{T}_p^r = \text{diag}([\hat{R}_M + \hat{h}], (\hat{R}_N + \hat{h}) \cos(\hat{L}), -1] \quad (80-3)$$

همچنین برای نویز  $v \sim \mathcal{N}(0, R)$  داریم:

$$R_{\{6 \times 6\}} = \text{diag}([\sigma_v^{2T}, \sigma_{Lm}^2, \sigma_{\lambda m}^2, \sigma_h^2]) \quad (81-3)$$

### ۴-۳ سناریوهای پیشنهادی برای شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد دو فیلتر EKF و CKF را با انجام دو شبیه‌سازی متفاوت مورد بررسی قرار می‌دهیم.

<sup>۱</sup> Lever arm

<sup>۲</sup> Curvilinear-to-Cartesian Transformation Matrix

### ۳-۴-۱ شبیه‌سازی اول

در این شبیه‌سازی وسیله‌ای را در نظر می‌گیریم که در ۴۰ ثانیه‌ی اول از سرعت 0 m/s تا 40 m/s در راستای شرق شتاب می‌گیرد و سپس این سرعت را برای ۲۶۰ ثانیه‌ی بعد حفظ می‌کند. مقایسه‌ی دریافت زاویه‌ی یاو در بازه‌ی زمانی با سرعت ثابت، مسئله‌ی اصلی شبیه‌سازی است. در شبیه‌سازی از مشخصات ADIS16488 IMU مطابق جدول (۳-۲) استفاده شده است. همین‌طور مشخصات گیرنده‌ی GPS در جدول (۳-۳) آورده شده است.

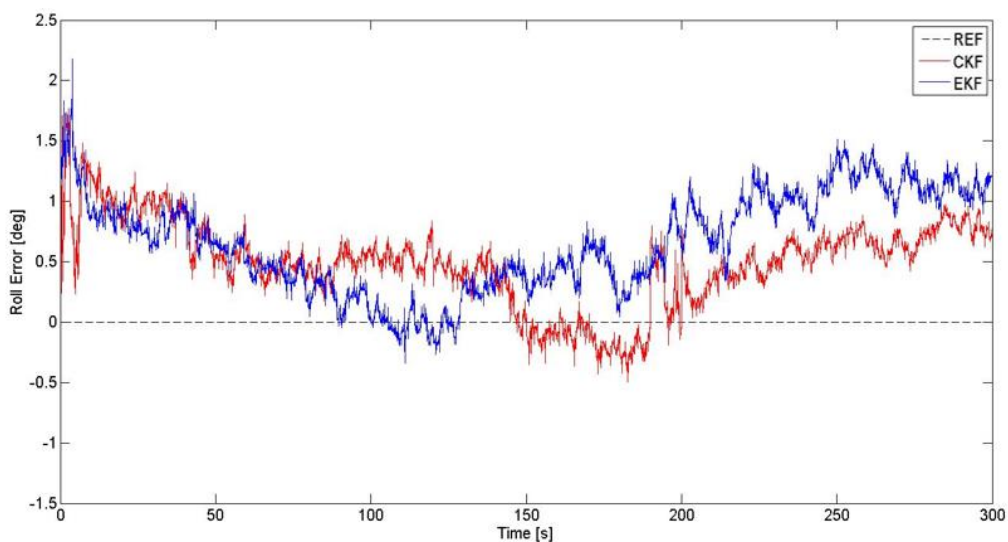
جدول (۳-۲): مشخصات ADIS16488 IMU

[0.3 0.3 0.3] deg/ $\sqrt{h}$	گام تصادفی زاویه [x y z]
[0.029 0.029 0.029] m/s/ $\sqrt{h}$	گام تصادفی سرعت [x y z]
[0.2 0.2 0.2] deg/s	بایاس استاتیک ژيروسکوپ [x y z]
[16 16 16] mg	بایاس استاتیک شتاب‌سنج [x y z]
[6.5/3600 6.5/3600 6.5/3600] deg/s	بایاس دینامیک ژيروسکوپ [x y z]
[0.1 0.1 0.1] mg	بایاس دینامیک شتاب‌سنج [x y z]
[100 100 100] s	زمان همبستگی ژيروسکوپ [x y z]
[100 100 100] s	زمان همبستگی شتاب‌سنج [x y z]
100 Hz	فرکانس عملکرد IMU

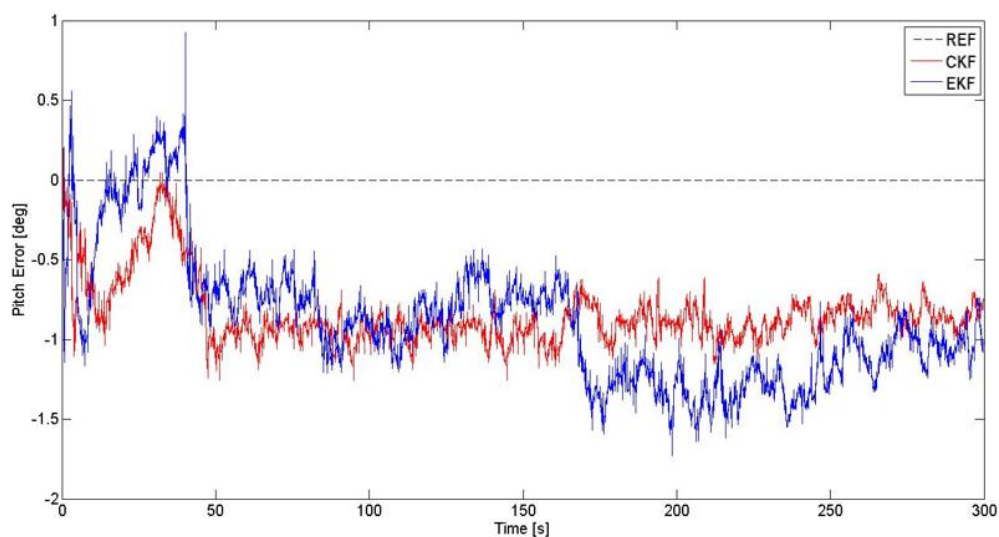
جدول (۳-۳): مشخصات گیرنده‌ی Garmin GPS

[5 5 10] m	انحراف معیار موقعیت GPS [lat lon h]
[0.0514 0.0514 0.0514] m/s	انحراف معیار سرعت GPS [ $v_N v_E v_D$ ]
5 Hz	فرکانس عملکرد GPS

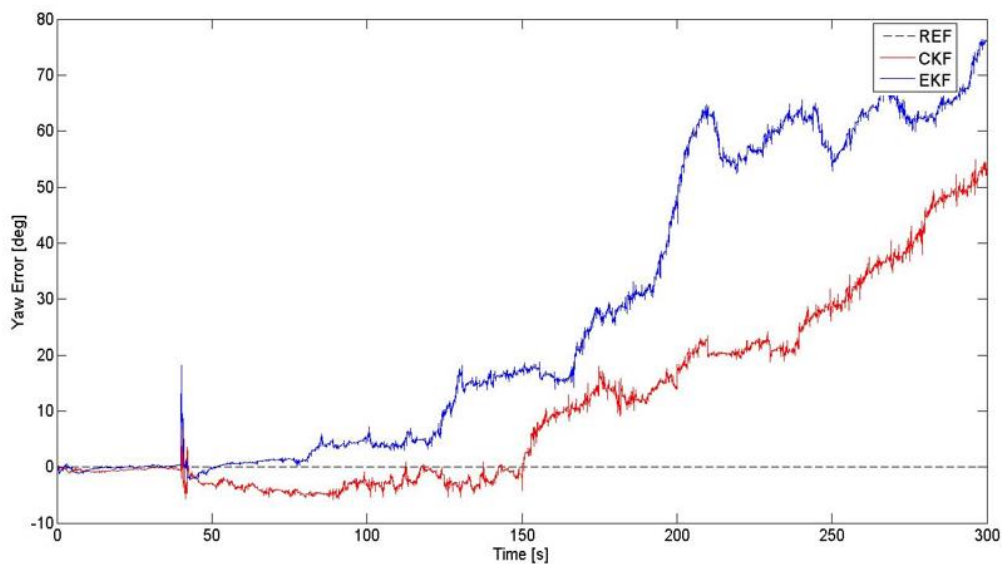
نتایج شبیه‌سازی برای خطای زوایای رول، پیچ و یابو به ترتیب در شکل‌های (۲-۳)، (۳-۳) و (۴-۳) آورده شده است.



شکل (۲-۳): خطای زاویه‌ی رول در شبیه‌سازی اول



شکل (۳-۳): خطای زاویه‌ی پیچ در شبیه‌سازی اول



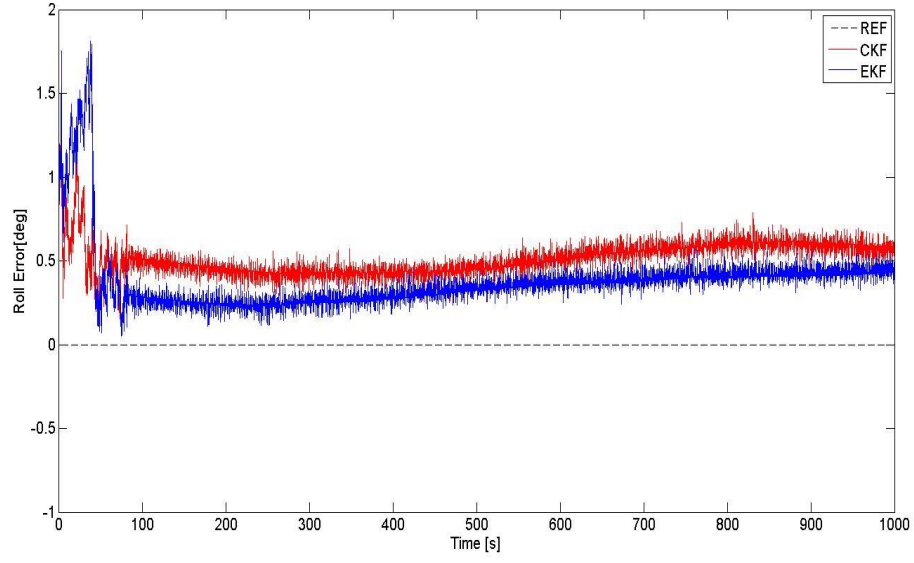
شکل (۴-۳): خطای زاویه‌ی یاو در شبیه‌سازی اول

مطابق جدول (۱-۳)، بر خلاف زاویه‌ی یاو، زوایای رول و پیچ همواره مشاهده‌پذیر هستند. بنابراین حتی با وجود در نظر گرفتن مدل غیرخطی، تفاوت معناداری را بین CKF و EKF شاهد نیستیم.

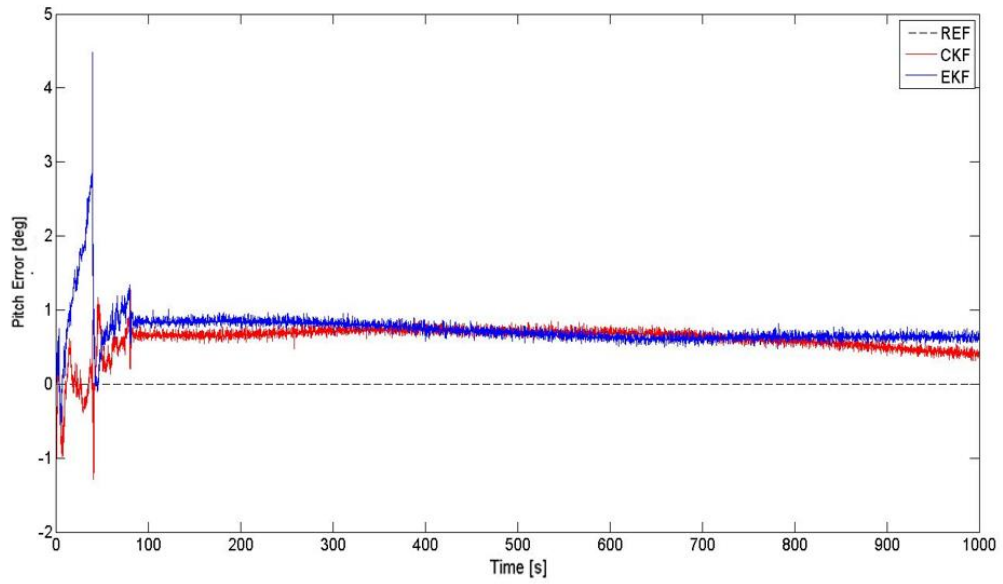
در طول بازه‌ی زمانی شتاب‌گیری یعنی تا ثانیه‌ی ۴۰، به دلیل رویت‌پذیری ضعیف زاویه‌ی یاو مطابق جدول (۱-۳)، EKF و CKF عملکرد تقریباً مشابهی از خود نشان می‌دهند. در بازه‌ی زمانی سرعت ثابت، زاویه‌ی یاو رویت‌ناپذیر است و به سرعت دریافت پیدا می‌کند. همانطور که در شکل (۳-۴) دیده می‌شود، این میزان دریافت در CKF با بیان غیر خطی وضعیت زوایا، آهسته‌تر از EKF است. تفاوت دقت دو فیلتر در تخمین زاویه‌ی یاو با تخمین زوایای رول و پیچ، تأثیر رویت‌پذیری را بر تفاوت عملکرد روش‌های فیلترکردن نشان می‌دهد.

### ۳-۴-۲ شبیه‌سازی دوم

در این شبیه‌سازی وسیله‌ای را در نظر می‌گیریم که در ۴۰ ثانیه‌ی اول از سرعت 0 m/s تا 40 m/s در راستای شرق شتاب می‌گیرد و سپس در ۴۰ ثانیه‌ی بعد با شتابی ثابت، سرعت خود را به صفر رسانده و ۹۲۰ ثانیه‌ی پایانی شبیه‌سازی را بی‌حرکت می‌ایستد. وقتی که وسیله بی‌حرکت باشد یا مشاهده‌ای در کار نباشد، خطاهای وضعیت بویژه خطای زاویه‌ی یاو به سرعت انباشته می‌شود [26]. در این مورد، استفاده از مدل خطی منجر به بروز خطاهای برش در تخمین وضعیت می‌شود. نتایج شبیه‌سازی برای خطای زوایای رول، پیچ و یاو در آزمایش حالت ایستا به ترتیب در شکل‌های (۳-۵)، (۳-۶) و (۳-۷) آورده شده است.

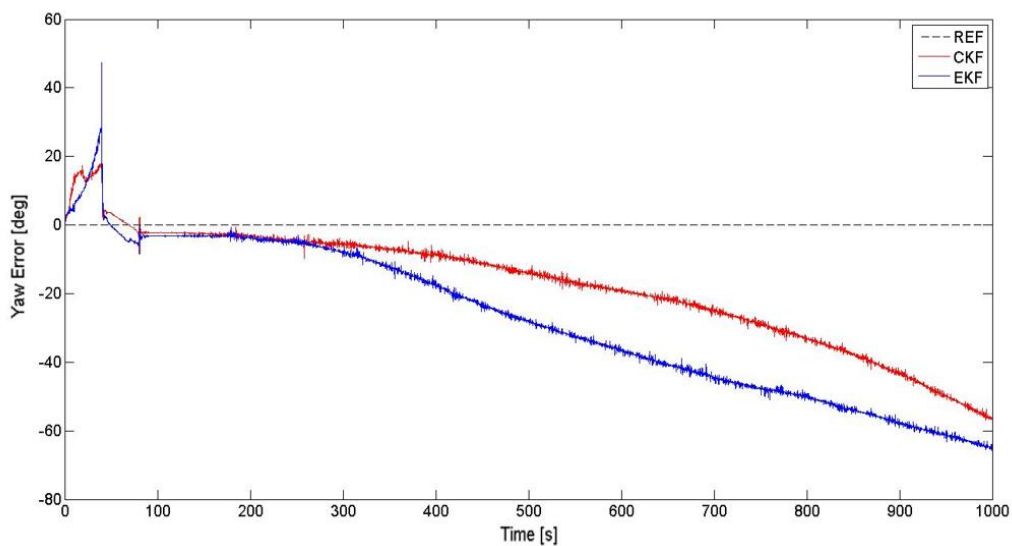


شکل (۳-۵): خطای زاویه‌ی رول در شبیه‌سازی دوم



شکل (۳-۶): خطای زاویه‌ی پیچ در شبیه‌سازی دوم





شکل (۷-۳): خطای زاویه‌ی یاو در شبیه‌سازی دوم

همان‌طور که در اشکال (۵-۳) و (۶-۳) مشاهده می‌شود، چون زوایای رول و پیچ همواره مشاهده‌پذیر هستند، دقت تخمین مشابهی در روش‌های EKF و CKF از خود نشان می‌دهند. بر اساس تحلیل مشاهده‌پذیری، زاویه‌ی یاو در حالت ایستا کاملاً رویت‌ناپذیر است. با توجه به شکل (۷-۳)، رشد خطا در روش CKF آهسته‌تر از روش EKF است.



## فصل چهارم

### نتیجه‌گیری و پیشنهادات

#### ۱-۴ تحلیل نتایج

در این پایان‌نامه ابتدا توانایی فیلتر CKF در حفظ عبارات مرتبه‌ی دوم معادلات غیرخطی، با استفاده از بسط تیلور نشان داده می‌شود که نشان از برتری این فیلتر بر EKF در هنگام زیاد بودن رفتار غیرخطی سیستم دارد. از ارزیابی دقت تخمین دو فیلتر کالمن توسعه‌یافته و حجم‌مکعبی می‌توان فهمید که اگر یک روش فیلترکردن غیرخطی مثل CKF به یک مدل خطی اعمال شود، از آن‌جا که عبارات مرتبه‌ی بالاتری وجود ندارد که CKF آن‌ها را حفظ کند، دقت تخمین بهبود نخواهد یافت. به همین سبب با در نظر گرفتن نامیزانی بین مختصات تخمینی و حقیقی به عنوان خطاهای وضعیت و استفاده از ماتریس کسینوس جهت از محور تخمینی به حقیقی، از مدلی غیرخطی در معادلات سیستم استفاده می‌کنیم.

سپس با در نظر گرفتن دو سناریوی متفاوت شبیه‌سازی که به علت عدم مشاهده‌پذیری زاویه‌ی یاو، رفتار غیر خطی سیستم افزایش یافته و خطای تخمین این زاویه به سرعت زیاد می‌شود، به بررسی رفتار دو فیلتر EKF و CKF در این سناریوها می‌پردازیم. وقتی که وسیله بی‌حرکت باشد یا مشاهده‌ای در کار نباشد، خطاهای وضعیت بویژه خطای زاویه‌ی یاو به سرعت انباشته می‌شود. در این موارد، کوچک‌بودن خطای زوایا که لازمه‌ی توصیف زاویه‌ی سای در مدل خطی است، نمی‌تواند محقق شود و استفاده از مدل خطی منجر به بروز خطاهای برش در تخمین وضعیت می‌شود و اگر تخمین وضعیت به خوبی انجام نشده باشد، تخمین موقعیت و سرعت هم تنزل خواهد یافت.

در مواردی که حالت‌های سیستم رویت‌ناپذیر باشند، مشاهدات فایده‌ای برای تخمین حالت سیستم ندارند و دقت وضعیت وسیله، نهایتاً تحت تأثیر دقت مرحله‌ی پیش‌بینی فیلتر کالمن است. با توجه به نتایج به دست‌آمده از فصل سوم، مشاهده می‌شود که طبق انتظار، نرخ افزایش خطای زاویه‌ی یاو با به‌کارگیری فیلتر کالمن حجم‌مکعبی کمتر از نرخ آن در مقایسه با فیلتر کالمن توسعه‌یافته می‌باشد که نشان از برتری این

فیلتر است و فیلتر کالمن حجم مکعبی را به انتخاب مناسب تری در هنگام طراحی سیستم تلفیقی INS/GPS بدل می سازد.

#### ۲-۴ پیشنهادات

با توجه به نتایج به دست آمده در این پایان نامه، موارد زیر برای ادامه ی کار در زمینه ی به کارگیری فیلترهای کالمن در تلفیق سیستم موقعیت یاب جهانی و سیستم ناوبری لختی پیشنهاد می شود:

- بررسی عملکرد دو فیلتر کالمن حجم مکعبی و فیلتر کالمن توسعه یافته در سناریوهای دیگری که باعث افزایش غیرخطی بودن سیستم می شود. به عنوان مثال در هنگامی که زاویه ی ابتدایی یاو به درستی مشخص نیست و به همین خاطر مقداری غیرخطی بودن به سیستم تزریق می شود.
- بررسی عملکرد دو فیلتر در هنگام قطع سیستم موقعیت یاب جهانی که منجر به تبدیل سیستم تلفیق INS/GPS به سیستم INS تنها شده و به علت نبود حسگرهای کمکی، به انباشته شدن سریع خطاهای تخمین و نامعتبر شدن تقریب زاویه ی کوچک می انجامد.
- به کارگیری مدل های بهبود یافته ی فیلتر کالمن حجم مکعبی و مقایسه ی آن با سایر فیلترها در مبحث تلفیق سیستم موقعیت یاب جهانی و سیستم اینرسی

## منابع

- [1] S. Julier, J. Uhlmann, Unscented filtering and nonlinear estimation, Proc. IEEE, 92 (3) (2004) 401–422.
- [2] S. Julier, J. Uhlmann, New extension of the Kalman filter to nonlinear systems, Proc. AeroSense, 97 (1997) pp. 182–193.
- [3] R. Van Der Merwe, Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state–space models (Ph.D.thesis). Oregon Health & Science University, 2004.
- [4] S. Julier, J. Uhlmann. Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations, in: Proceedings of the American Control Conference, vol. 2, 2002, pp. 887–892.
- [5] V. Bistrov, A. Kluga, The analysis of the ukf-based navigation algorithm during gps outage, Elektron. Elektrotech. 19 (10) (2013) 13–16.
- [6] Q. Wang, Y. Li, C. Rizos, S. Li, The ukf and cdkf for low-cost sdins/gps in-motion alignment, in: Proceedings of International Symposium on GPS/GNSS, 2008, pp. 441–448.
- [7] J.L. Crassidis, Sigma-point Kalman filtering for integrated gps and inertial navigation, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 42 (2) (2006) 750–756.
- [8] S. Julier, R. van der Merwe, E. Wan, Navigation system applications of sigma-point Kalman filters for nonlinear estimation and sensor fusion. October 30 2007. US Patent 7,289,906.
- [9] I. Arasaratnam, S. Haykin, Cubature Kalman filters, IEEE Trans. Autom. Control 54 (6)(2009) 1254–1269.
- [10] I. Arasaratnam, Cubature Kalman filtering: theory & applications (Ph. D. thesis). McMaster University, 2009.
- [11] I. Arasaratnam, S. Haykin, T.R. Hurd, Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: theory and simulations, IEEE Trans. Signal Process. 58 (10) (2010) 4977–4993.
- [12] B. Jia, M. Xin, Y. Cheng, High-degree Cubature Kalman filter, Automatica 49 (2) (2013) 510–518.
- [13] Y. Zhang, Y. Huang, Z. Wu, N. Li, Moving state marine sines initial alignment based on high degree ckf, Math. Probl. Eng., (2014) 546107.
- [14] Y. Zhang, Y. Huang, N. Li, L. Zhao, Embedded cubature Kalman filter with adaptive setting of free parameter, Signal Process. 114 (2015) 112–116.
- [15] Titterton, D.H, Weston, J.L. Strapdown Inertial Navigation Technology. 2nd Edition, AIAA Education Series, Reston 2004.
- [16] Y. Li, J. Wang, C. Rizos, P. Mumford, W. Ding. Low-cost tightly- coupled gps/ins integration based on a nonlinear Kalman filtering design, in: Proceedings of ION National Technical Meeting (IONNTM 2006), 2006, pp. 18–20.

- [17] Y. Yi, D. Grejner-Brzezinska. Tightly-coupled gps/ins integration using unscented Kalman filter and particle filter, in: Proceedings of the 19th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2006), 2006, pp. 2182–2191.
- [18] J. Zhou. Low-cost MEMS-INS/GPS integration using nonlinear filtering approaches (Ph.D. thesis). University of Siegen, 2013.
- [19] M. Rhudy, Y. Gu, J. Gross, S. Gururajan, M. Napolitano, Sensitivity analysis of extended and unscented Kalman filters for attitude estimation, *J. Aerosp. Inf. Syst* 10 (3) (2013) 131–143.
- [20] M. Rhudy Sensitivity and stability analysis of nonlinear Kalman filters with application to aircraft attitude estimations (Ph.D. thesis). West Virginia University, 2013.
- [21] Y. Li, Y. Li, C. Rizos, X. Xu, Observability analysis of sins/gps during in-motion alignment using singular value decomposition, *Adv. Mat. Res.* 433 (2012) 5918–5923.
- [22] Cai, G., Chen, B.M., and Lee, T.H.. *Unmanned Rotorcraft Systems*. Springer London, UK, 2011.
- [23] Farrell, J. *Aided Navigation: GPS With High Rate Sensors*. McGraw-Hill Professional, USA, 2008.
- [24] Vermeille, H. Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates. *Journal of Geodesy*, 76, (2002). 451-454.
- [25] Groves, P.D. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. Artech House, USA, 2008.
- [26] J. Georgy, A. Noureldin, M. Korenberg, M. Bayoumi, Low-cost three- dimensional navigation solution for riss/gps integration using mixture particle filter, *IEEE Trans. Veh. Technol.* 59 (2) (2010) 599–615.

## **Abstract**

In a GPS/INS navigation system, the extended Kalman filter (EKF) is widely used to estimate the navigation states. However, this filter is a first order approximation to the nonlinear system and when the nonlinearity of the system is high, the estimation accuracy degrades. Bayesian filtering refers to the process of sequentially estimating the current state of a complex dynamic system from noisy partial measurements using Bayes' rule. Cubature Kalman filter is a new approximate Bayesian filter for discrete-time nonlinear filtering problem. To develop this filter, it is assumed that the predictive density of the joint state-measurement random variable is Gaussian. In this way, the optimal Bayesian filter reduces to the problem of how to compute various multi-dimensional Gaussian-weighted moment integrals. To numerically compute these integrals, a third-degree spherical-radial cubature rule is proposed. This cubature rule entails a set of cubature points scaling linearly with the state-vector dimension. The cubature Kalman filter therefore provides an efficient solution even for high-dimensional nonlinear filtering problems.

In this thesis, nonlinear filtering method Cubature Kalman filter (CKF) is analysed through Taylor expansion and the CKF's capability in capturing higher-order terms of nonlinear system is shown. Then considering a nonlinear attitude expression, performance comparison between these two filters is analysed based on the degree of observability of the attitude states.

**Keywords:** Observability – GPS - INS – Extended Kalman Filter - Cubature Kalman Filter





**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Electrical and Robotics Engineering**

**MSc Thesis in Control Engineering**

**GPS/IMU integrated system for improving navigation  
performance using Cubature Kalman filter**

**By: Hossein Saeedi**

**Supervisors:**

**Dr Hossein Gholizade-Narm**

**Dr Alireza Alfi**

**January 2019**