

صلى الله عليه وسلم





دانشکده برق و رباتیک

رشته برق، گرایش کنترل

رساله دکتری

# تحلیل پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری با المان اشباع

نگارنده: عصمت سادات علویان شهری

استاد راهنما

دکتر علیرضا الفی

استاد مشاور

پرفسور تنریو ماچادو

بهمن ۱۳۹۶





فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)  
(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم عصمت سادات علویان شهری دانشجوی دکتری رشته برق - کنترل به شماره دانشجویی ۹۳۰۰۹۹۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۳ در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۱۲ از رساله نظری / عملی  خود با عنوان:

تحلیل پایداری سیستمهای خطی مرتبه کسری با المان اشباع

دفاع و با اخذ نمره ۱۹، ۷۳ به درجه: عالی ..... نائل گردید.


<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	<input checked="" type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی
۱	دکتر علی رضا الفی	استاد/ استادیار	دانشیار
۲	دکتر سحر مازنی	مشاور / مشورین	پروفسور
۳	دکتر حسن علی زینوند	استاد مدعو داخلی / خارجی	دانشیار
۴	دکتر کریم صدرازی	استاد مدعو داخلی / خارجی	دانشیار
۵	دکتر ابوالفضل ربیعی	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد
۶	دکتر کریم علی هدیریا	سرپرست ( نماینده ) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم عصمت سادات علویان شهری بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: کریم صدرازی  
 تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ۱۳۹۶/۱۱/۱۳





تقديم به  
فاطمة وأبيها وبعليها وبنيتها وسرّ المستودع  
فيها

## سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب ”من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ“ :

از پدر و مادر عزیزم؛ این دو معلم بزرگوارم؛ که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یآوری بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکترعلیرضا الفی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و با اخلاق، جناب آقای پرفسور ماچادو که زحمت مشاوره این رساله را متقبل شدند و بدون مساعدت ایشان، این رساله به نتیجه مطلوب نمی‌رسید؛

و از استادان فرزانه و دلسوز که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید

عصمت سادات علویان شهری

بهمن ۱۳۹۶



## تعهد نامه

اینجانب عصمت سادات علویان شهری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته برق برق و رباتیک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان تحلیل پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری با المان اشباع ، تحت راهنمایی دکتر غلیرضا الفی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

عصمت سادات علویان شهری

بهمن ۱۳۹۶

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.



## چکیده

هدف اصلی از این رساله، تحلیل پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری همسان<sup>۱</sup> با در نظر گرفتن محدودیت اشباع می باشد. بدین منظور، ابتدا یک شرط پایداری جدید برای تخمین ناحیه جذب با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف ارائه می شود. سپس پایداری کلاس خاصی از سیستم های غیر خطی مرتبه کسری تحت اشباع با استفاده از قضیه گرانوال-بلمن<sup>۲</sup> و شرط قطاعی محدود<sup>۳</sup> بررسی می شود. تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین<sup>۴</sup> نیز با روش تخمین حل معادله دیفرانسیل انجام می شود. در نهایت، آنالیز پایداری با در نظر گرفتن محدودیت اشباع بر روی حالت های سیستم برای کلاس خاصی از سیستم های مرتبه کسری نامعین انجام می شود. شبیه سازی ها نشان دهنده عملکرد مناسب کنترل کننده های طراحی شده می باشد.

کلمات کلیدی: سیستم های مرتبه کسری، اشباع، پایداری، نامعینی

---

<sup>1</sup>Commensurate

<sup>2</sup>Gronwall-Bellman

<sup>3</sup>Sector condition

<sup>4</sup>Uncertain



## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. An extension of estimation of domain of attraction for fractional order linear system subject to saturation control, *Applied Mathematics Letters*, vol. 47, pp. 26-34, 2015.
2. Stabilization of Fractional-Order Systems Subject to Saturation Element Using Fractional Dynamic Output Feedback Sliding Mode Control, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 12, no. 3, 2017.
3. Robust stability and stabilization of uncertain fractional order systems subject to input saturation, *Journal of Vibration and Control*, DOI. 10.1177/1077546317708927, 2017.
4. Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems under control input saturation, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, accepted



# فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
قا	فهرست جداول
۱	۱ معرفی و ضرورت انجام رساله
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ معرفی
۳	۳.۱ انگیزه
۳	۴.۱ اهداف
۳	۵.۱ روش های مورد استفاده
۴	۶.۱ ساختار رساله
۵	۲ مروری بر حسابان کسری
۵	۱.۲ مقدمه و تاریخچه ی حسابان کسری
۶	۲.۲ تعریف تابع گاما
۷	۳.۲ تابع میتاگ- لفلر
۸	۱.۳.۲ تبدیل لاپلاس تابع میتاگ- لفلر
۹	۴.۲ انتگرال مرتبه کسری
۱۰	۵.۲ مشتقات مرتبه کسری
۱۰	۱.۵.۲ تعریف ریمان- لیوویل
۱۰	۲.۵.۲ تعریف کپوتو
۱۱	۶.۲ تعریف گرانوالد- لتنیکوف
۱۱	۷.۲ قوانین ضرب دو تابع در حسابان کسری
۱۲	۸.۲ مدل و نمایش سیستم های مرتبه کسری
۱۵	۳ مروری بر تحقیقات گذشته: مباحث پایداری، نامعینی و اشباع
۱۶	۱.۳ پایداری

۱۷	۱.۱.۳ پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری . . . . .
۱۹	۲.۱.۳ پایداری سیستم های غیر خطی مرتبه کسری . . . . .
۲۳	۲.۳ نامعینی . . . . .
۲۴	۱.۲.۳ پایداری مقاوم و پایداری سازی با کنترل پسخورد . . . . .
۲۸	۲.۲.۳ پایداری سازی مقاوم با کنترل کننده مد لغزشی . . . . .
۳۲	۳.۳ اشباع . . . . .
۵۱	<b>۴ تحلیل پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری با محدودیت اشباع</b>
۵۱	۱.۴ پایداری سیستم خطی مرتبه کسری معین با محدودیت اشباع . . . . .
۵۴	۲.۴ پایداری سیستم خطی مرتبه کسری معین با محدودیت اشباع با پسخورد کمکی . . . . .
۵۵	۳.۴ تخمین ناحیه جذب . . . . .
۵۹	۴.۴ پایداری سیستم خطی مرتبه کسری معین در حضور اغتشاش با محدودیت اشباع
	<b>۵ تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع در ورودی و حالت ها</b>
۷۳	۱.۵ محدودیت اشباع در کنترل کننده . . . . .
۷۸	۲.۵ محدودیت اشباع بر حالت های سیستم . . . . .
۸۱	۱.۲.۵ تحلیل پایداری . . . . .
۹۱	<b>۶ جمع بندی و پیشنهادات</b>
۹۱	۱.۶ خلاصه و جمع بندی . . . . .
۹۲	۲.۶ پیشنهادات . . . . .
۹۳	<b>مراجع</b>



# فهرست تصاویر

۲	۱.۱ ساختار ساده یک سیستم کنترل با وجود اشباع در پسخورد
۸	۱.۲ تابع میتاگ - لفلو $E_{r,(-vt)}$ به ازای تغییرات مرتبه مشتق
۱۳	۲.۲ دسته بندی سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان
۱۶	۱.۳ ناحیه پایداری و ناحیه ناپایداری سیستم های مرتبه کسری
۳۳	۲.۳ نمودار تابع اشباع
۳۴	۳.۳ سیستم حلقه بسته (۳.۶۱)
۳۶	۴.۳ تخمینی از ناحیه پایداری در [۶۸]
۳۸	۵.۳ تخمینی از ناحیه پایداری در [۷۰]
۳۹	۶.۳ تخمین ناحیه جذب در [۷۱]
۳۹	۷.۳ تخمین ناحیه حذف اغتشاش [۷۱]
۴۲	۸.۳ تخمین کوچکترین و بزرگترین ناحیه ناوردا در حضور اغتشاش [۷۲]
۴۳	۹.۳ تخمینی از ناحیه ناوردا در حضور اغتشاش [۷۳]
۴۴	۱۰.۳ تخمین ناحیه ناوردا در [۷۴]
۴۶	۱۱.۳ تخمین ناحیه ناوردا در [۷۵]
۴۷	۱۲.۳ تخمین ناحیه حذف اغتشاش در [۷۹]
۵۷	۱.۴ مقایسه ناحیه های جذب
۵۷	۲.۴ تخمین ناحیه جذب با استفاده از پسخورد کمکی
۵۸	۳.۴ صفحه فاز سیستم بدون استفاده از پسخورد کمکی
۵۸	۴.۴ صفحه فاز سیستم با استفاده از پسخورد کمکی
۶۰	۵.۴ نمایش بلوکی معادله (۲۸.۴)
۶۴	۶.۴ صفحه فاز سیستم با $v = ۰/۹۷$
۶۵	۷.۴ نحوه تغییرات متغیر های حالت سیستم حلقه باز موتور بدون جاروبک DC با $v = ۰/۹۷$
۶۶	۸.۴ صفحه فاز سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک DC با مرتبه مشتق $v = ۰/۹۷$
۶۷	۹.۴ مسیر حالت برای سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک DC با $v = ۰/۹۷$

۶۸	۱۰.۴ صفحه. فاز سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک $DC$ با $v = 9/97$ و $v = 9/99$ . . .
۶۹	۱۱.۴ نحوه تغییرات $x_1$ سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک $DC$ با $v = 9/97$ و $v = 9/99$ .
۶۹	۱۲.۴ نحوه تغییرات $x_2$ سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک $DC$ با $v = 9/97$ و $v = 9/99$ .
۷۰	۱۳.۴ نمودار فاز سیستم حلقه باز چن با $v = 9/95$ . . . . .
۷۰	۱۴.۴ صفحه فاز حالت های سیستم حلقه بسته چن با $v = 9/95$ . . . . .
۷۱	۱۵.۴ مسیر حالت های سیستم حلقه بسته چن با $v = 9/95$ . . . . .
۷۱	۱۶.۴ نحوه تغییرات حالت $x_2$ برای سیستم حلقه بسته چن با $v = 9/95$ و $v = 9/97$ . . . . .
۷۷	۱.۵ نحوه تغییرات متغیرهای حالت حلقه باز (۱۶.۵) با $v = 9/5$ . . . . .
۷۸	۲.۵ نحوه تغییرات متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته (۱۶.۵) با $v = 9/5$ . . . . .
۷۹	۳.۵ نحوه تغییرات حالت های سیستم حلقه بسته (۱۴.۵) با $v = 9/45$ . . . . .
۸۶	۴.۵ نحوه تغییرات حالت های سیستم حلقه بسته (۶۲.۵) با $v = 9/7$ . . . . .
۸۶	۵.۵ نحوه تغییرات حالت های کنترل کننده سیستم (۶۲.۵) با $v = 9/7$ . . . . .
۸۷	۶.۵ تغییرات سیگنال کنترلی با $v = 9/7$ . . . . .
۸۷	۷.۵ تغییرات سطح لغزش با $v = 9/7$ . . . . .
۸۸	۸.۵ نحوه تغییرات حالت های سیستم حلقه بسته (۶۲.۵) با $v = 9/9$ . . . . .
۸۸	۹.۵ نحوه تغییرات حالت های کنترل کننده سیستم (۶۲.۵) با $v = 9/9$ . . . . .
۸۹	۱۰.۵ تغییرات سیگنال کنترلی با $v = 9/9$ . . . . .
۸۹	۱۱.۵ تغییرات سطح لغزش با $v = 9/9$ . . . . .

# فهرست جداول

۴۸	.....	۱.۳ مرور تحقیقات قبل از انجام رساله.
۴۹	.....	۲.۳ مرور تحقیقات هم راستای رساله.



# فصل ۱

## معرفی و ضرورت انجام رساله

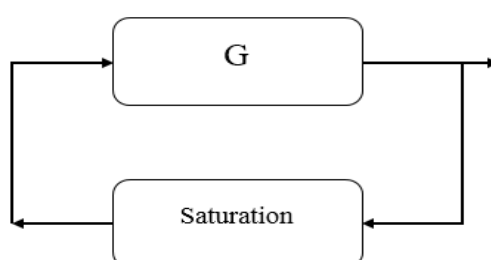
### ۱.۱ مقدمه

محاسبات کسری یک ابزار ریاضی برای گسترش مرتبه مشتق به اعداد غیر صحیح است و چون ریاضیات زبان رسمی نظریه کنترل است، در مقالات و کتب پیشگامان این عرصه با پیوند زدن این مفهوم ریاضی به این نظریه، مزایای استفاده از گسترش مرتبه مشتق را در مدلسازی و روش های کنترلی نشان داده اند [۱]. این ابزار مسائل بسیاری را برای مهندسی از جمله شناسایی مدل های مرتبه کسری، تحلیل پایداری و تحلیل مقاوم سیستم های مرتبه کسری و ... را به وجود آورده است.

این رساله نیز با در نظر گرفتن توجهات چند دهه اخیر به سیستم های مرتبه کسری، سعی در پاسخ دادن به برخی از کاستی های موجود در زمینه پایداری و پایدارسازی سیستم های خطی مرتبه کسری همسان رویت پذیر و کنترل پذیر با در نظر گرفتن محدودیت بر روی ورودی و یا حالت های سیستم دارد. در این رساله از تعریف مشتق کپوتو مرتبه کسری برای توصیف سیستم با تحقق فضای حالت استفاده می شود که دلیل انتخاب تعریف مشتق کپوتو، وجود مفهوم فیزیکی برای شرایط اولیه در این تعریف است.

## ۲.۱ معرفی

اکثر سیستم های کنترل شامل دیگ های بخار، شیرهای کنترل، ترموستات هواپیما یا ماهواره GPS و ... را می توان با استفاده از مدل سازی ریاضی تجزیه و تحلیل کرد. یک قانون کنترل برای تضمین عملکرد مطلوب دینامیک های سیستم حلقه بسته ایجاد می شود. در عمل، بررسی محدودیت ها بر روی محرک های ورودی مورد نظر که توسط کنترل کننده قابل دسترس نیستند، ضروری به نظر می رسد. یکی از این محدودیت ها پدیده اشباع است. شکل ۱-۱ این پدیده را در مسیر پسخورد نمایش می دهد. با وجود ماهیت غیر خطی اشباع



شکل ۱.۱: ساختار ساده یک سیستم کنترل با وجود اشباع در پسخورد

در معادلات توصیف کننده سیستم، تحلیل و طراحی سیستم آسان نیست. زیرا در صورت رخ دادن پدیده اشباع در کنترل کننده کاهش عملکرد سیستم حلقه بسته یا حتی ناپایداری دور از انتظار نیست. بنابراین در نظر گرفتن محدودیت ها بر روی کنترل کننده و یا حالت ها در عمل بسیار ضروری به نظر می رسد. تلاش برای غلبه بر تاثیرهای ناسازگار و نامطلوب عملگر اشباع بر روی سیستم ها مسئله جدیدی نیست و در طول چند دهه اخیر مطالعات زیادی صورت گرفته است [۵]. با در نظر گرفتن پدیده غیر خطی اشباع، می توان روش های موجود در تجزیه و تحلیل سیستم دارای اشباع را به صورت زیر دسته بندی کرد

- **در نظر نگرفتن اشباع** : در این روش با صرف نظر از تاثیر مخرب غیر خطی اشباع، تحلیل سیستم ها بسیار ساده می شود، هر چند عملکرد سیستم به هنگام رخ دادن اشباع به سرعت تخریب می شود بنابراین تضمین کارایی و حتی پایداری در این روش وجود ندارد.
- **شبیه سازی جامع** : در این روش تعداد بسیار زیادی از شبیه سازی با شرایط مختلف و شرایط اولیه متفاوت و با اختلالات مختلف انجام می شود، سپس با انجام آزمایش های متفاوت عملکرد سیستم تحت اشباع بررسی می گردد. هر چند، تحلیل پایداری در این روش انجام نمی شود.

- در نظر گرفتن تابع اشباع در تحلیل سیستم: این روش کامل ترین روش در تحلیل ها و طراحی ها می باشد و نتایج حاصل از در نظر گرفتن تابع اشباع، کاملا تضمین کننده پایداری و کارایی است. با این حال مشکل اصلی آن پیچیدگی تحلیل ها می باشد.

## ۳.۱ انگیزه

یکی از تحقق های موجود برای توصیف سیستم های مرتبه کسری، مدل فضای حالت است که توصیف کلی در سیستم های گسسته و پیوسته در زمان را در اختیار طراح می گذارد. در این راستا، مطالعات ارزشمندی بر روی سیستم های خطی مرتبه کسری با توصیف حالت گزارش شده است [۲]، و لی در بسیاری از آنها تاثیر عملگر اشباع در نظر گرفته نشده است. با وجود مراجع بسیار ارزشمند در زمینه سیستم مرتبه کسری با محدودیت اشباع، اما هنوز کاستی هایی در این زمینه وجود دارد که هدف این رساله پر کردن این کاستی ها می باشد.

## ۴.۱ اهداف

اولین هدف این رساله تکمیل و گسترش مفهوم ناحیه جذب با استفاده از پسخورد کمکی برای سیستم خطی مرتبه کسری معین است. پسخورد کمکی در بسیاری از مقاله ها و کتابها برای افزایش ناحیه جذب برای سیستم های مرتبه صحیح با محدودیت اشباع استفاده شده است [۶] و گسترش ناحیه جذب با استفاده از پسخورد کمکی یکی از اهداف این رساله است. همچنین به دلیل وجود عدم تطابق بین مدل واقعی و مدل نامی، در نظر گرفتن ترم غیر خطی و نامعینی در پارامترهای سیستم و تحلیل پایداری با وجود محدودیت اشباع، ضروری به نظر می رسد. اگر چه سیستم های خطی مرتبه کسری با وجود نامعینی در پارامترها در توصیف فضای حالت قبلا مورد بررسی قرار گرفته است [۷]، اما از اثر غیر خطی اشباع صرف نظر شده است که تحلیل پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری با وجود نامعینی یا ترم غیر خطی با محدودیت اشباع از دیگر اهداف این رساله می باشد.

## ۵.۱ روش های مورد استفاده

برای بررسی پایداری و پایداری مقاوم در سیستم های خطی و غیر خطی، عموما از دو روش حل معادلات توصیف کننده سیستم و روش لیاپانوف استفاده می شود. در این رساله از هر دو روش فوق برای تحلیل پایداری سیستم معین و نامعین استفاده شده است. همچنین این رساله برای پایداری سازی سیستم های رویت پذیر و کنترل پذیر با وجود محدودیت اشباع، از کنترل کننده پسخورد و مد لغزشی نیز بهره برده است.

## ۶.۱ ساختار رساله

فصل اول این رساله ضرورت مطالعه سیستم خطی را با وجود محدودیت اشباع بررسی می کند. سپس انگیزه انجام رساله، اهداف و روش های تحلیل پایداری و پایداری مقاوم سیستم مورد مطالعه و ساختار رساله بیان می شوند.

در فصل دوم، ابتدا تاریخچه حسابان کسری به اختصار ارائه می شود. سپس تعاریف و قضایای مورد استفاده در این رساله توضیح داده می شوند. همچنین به دلیل اینکه مطالعه سیستم ها نیاز به توصیف نمایش سیستم به زبان ریاضی دارد در انتهای فصل و به صورت مختصر نمایش فضای حالت و نمایش تابع تبدیل سیستم های مرتبه کسری بیان می گردد. از آنجا که اهداف این رساله بر پایه تحلیل پایداری، وجود نامعینی در سیستم و مطالعه محدودیت اشباع است، فصل سوم به مرور مباحث پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری و پایداری سیستم های غیر خطی مرتبه کسری می پردازد و برخی قضایای بسیار مهم مرتبط مرور می شوند. همچنین با وجود نامعینی در پارامترهای سیستم توصیف شده در فضای حالت، بحث پایداری مقاوم و پایدارسازی مقاوم به کمک کنترل پسخورد و پایدارسازی مقاوم با کنترل کننده مد لغزشی مطرح می شود. در انتها به مرور مراجعی که در آن ها محدودیت اشباع در توصیف سیستم وجود دارد می پردازیم.

فصل های چهار و پنج، شامل دستاوردهای حاصل از این رساله می باشد که در فصل چهارم با روش لیپانوف از پسخورد کمکی برای افزایش ناحیه جذب در سیستم های خطی مرتبه کسری استفاده می شود و بعد از آن مفاهیم پایداری و پایدارسازی سیستم خطی مرتبه کسری با وجود محدودیت اشباع، با اضافه کردن ترم غیر خطی، بیان می شوند. قابل ذکر است که تحلیل پایداری سیستم دارای اغتشاش با روش تخمین حل معادله دیفرانسیل انجام می شود.

در فصل پنجم با در نظر گرفتن نامعینی در سیستم خطی مرتبه کسری، کنترل کننده مناسب با فرض محدودیت اشباع بر روی سیگنال ورودی و یا بر روی حالت های سیستم طراحی می شود و تحلیل پایداری با روش دو روش تحلیل پایداری لیپانوف و تخمین حل معادله دیفرانسیل انجام می شود.

در فصل ششم این رساله، جمع بندی و پیشنهادات مطرح می شوند.



## فصل ۲

# مروری بر حسابان کسری

### پیشگفتار

در این فصل، بخش‌های مورد نیاز این رساله از حسابان کسری<sup>۱</sup> به اختصار معرفی می‌شوند. لذا در ابتدا مروری بر تاریخچه و نحوه پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری داشته و سپس به معرفی برخی تعاریف و توابع مهم و قانون ضرب توابع در مشتق مرتبه کسری پرداخته، سپس به دلیل ضرورت توصیف سیستم با ابزار ریاضی به تحقق فضای حالت و تحقق تابع تبدیل در حسابان کسری می‌پردازیم.

## ۱.۲ مقدمه و تاریخچه ی حسابان کسری

سابقه طرح موضوع حسابان کسری به نامه نگاری دو دانشمند برجسته قرن ۱۷ باز می‌گردد، که در آن هوییتال<sup>۲</sup> در نامه ای به لایبنیز<sup>۳</sup> در سال ۱۶۹۵ میلادی چنین سوالی را مطرح کرد: وقتی مشتق از مرتبه صحیح است مفهوم آن برای ما شناخته شده است، اگر مرتبه مشتق  $\frac{1}{5}$  باشد معنای شکل نوشتاری آن چیست؟ لایبنیز در پاسخ، آن را تضادی آشکار بیان می‌کند و به صورت پیشگویانه اعلام می‌کند که در آینده نتایج خوبی از آن استخراج خواهد شد [۳].

<sup>۱</sup>Fractional calculus

<sup>۲</sup>L' Hopital

<sup>۳</sup>Leibniz

از آن زمان تا کنون مطالعات گسترده ای به صورت محض و کاربردی بر روی حسابان کسری انجام گرفته و نتایج مطلوبی حاصل شده است. البته بحث حسابان کسری از دیدگاه ریاضی دور از ذهن نیست چرا که اعداد صحیح<sup>۴</sup> زیر مجموعه ی اعداد حقیقی<sup>۵</sup> هستند و طبعاً می توان با استفاده از تعاریف مناسب ضمن حفظ خواص مرتبه مشتق، آن را به اعداد حقیقی نیز تعمیم داد.

مطالعات انجام شده نشان می دهد که گروهی از سیستم ها، ماهیتا دارای دینامیک مرتبه کسری هستند از جمله برخی پدیده های الکترومغناطیسی [۸]، سیستم های الکترومکانیک [۹]، مهندسی پزشکی و بیولوژیکی [۱۰]، مواد و ویسکوالاستیک [۱۱]، انتشار حرارت [۱۲] و زمین شناسی [۱۳] اشاره نمود. برخی پژوهش ها نیز در زمینه مطالعه سیستم های مرتبه کسری در کنترل از جمله سیستم های نامعین [۱۴]، پردازش تصویر [۱۶]، سیستم های قدرت [۱۷] و پردازش سیگنال [۱۰] پرداخته اند و تعداد زیادی نیز به مبانی زیرشاخه ها و ارتباط این موضوع با سایر زمینه های علمی از جمله شناسایی [۱۸]، پایداری [۱۹]، کاهش مرتبه [۲۴]، بهینه سازی با روش های تکاملی و غیر تکاملی [۲۵] و آشوب [۲۶] نیز می توان اشاره کرد.

مبحث پایداری اولین و مهمترین چالشی است که در کنار ویژگی های متعدد سیستم کنترلی مطرح می شود، چرا که سیستم های ناپایدار عموماً نه تنها عملکرد مفیدی ندارد بلکه بالقوه خطرناک نیز هستند. از لحاظ کیفی سیستمی را پایدار گویند که شروع به فعالیت سیستم از موقعیت نزدیک به نقطه کار مطلوب، باعث باقی ماندن دائمی در اطراف نقطه کار شود. همچنین درجه پیچیدگی تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی به سرعت با تغییر مدل سیستم از خطی تغییر ناپذیر با زمان به خطی تغییر پذیر با زمان و غیرخطی افزایش می یابد. روش های گوناگونی برای تحلیل و تعیین پایداری و پایدارسازی سیستم های مرتبه کسری وجود دارد [۲۷]. برای تحلیل سیستم های مرتبه کسری، آشنایی با توابع و ویژگی های سیستم مرتبه کسری ضروری به نظر می رسد.

## ۲.۲ تعریف تابع گاما

یکی از توابع معروف و پر کاربرد در حسابان کسری تابع گاما<sup>۶</sup> می باشد. این تابع عموماً با نماد  $\Gamma(\cdot)$  نشان داده می شود و در واقع تعمیمی برای تابع فاکتوریل، به منظور بسط آن به حوزه اعداد حقیقی است.

$$\Gamma(z) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.2)$$

انتگرال موجود در تعریف فوق، به ازای مقادیر متغیر  $z = x + jy, (x, y) \in R$  که در آن قسمت حقیقی متغیر مثبت باشد،  $Re(z) > 0$ ، همگرا می گردد. در ادامه به چند مورد از خواص این

<sup>4</sup>integer

<sup>5</sup>real number

<sup>6</sup>Gamma

تابع پر کاربرد اشاره می شود [۱].

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (2.2)$$

$$\Gamma(z) \approx z^{-1} \quad \forall z \in (0, 1), \quad (3.2)$$

$$\Gamma(z) = z! \quad \forall z \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

## ۳.۲ تابع میتاگ- لفلر

تابع میتاگ- لفلر<sup>۷</sup> تابعی پر کاربرد در حوزه حسابان کسری است که در واقع تعمیم تابع نمایی بوده و با توجه به جایگاه والای تابع نمایی در تئوری معادلات دیفرانسیل خطی نامتغیر با زمان در سیستم های مرتبه صحیح، اهمیت جایگاه تابع میتاگ- لفلر کاملا مشهود می گردد. این تابع به صورت زیر در حسابان کسری معرفی شده است.

$$E_{v,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(vk + \beta)}, \quad v > 0, \beta > 0. \quad (5.2)$$

این تابع به ازای مقادیر خاصی از پارامترهای  $v$  و  $\beta$  به توابع شناخته شده ای تبدیل می شود که به برخی از آنها مختصرا اشاره می شود [۱، ۲۸].

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (6.2)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z} (e^z - 1). \quad (7.2)$$

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8.2)$$

توابع  $\cosh(z)$  و  $\sinh(z)$  را نیز می توان بر حسب تابع میتاگ- لفلر بیان کرد.

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \quad (9.2)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \quad (10.2)$$

<sup>7</sup>Mittag-Leffler

توابع  $\cos(z)$  و  $\sin(z)$  نیز از جمله توابعی هستند که می توان بر حسب این تابع پر کاربرد نمایش داد.

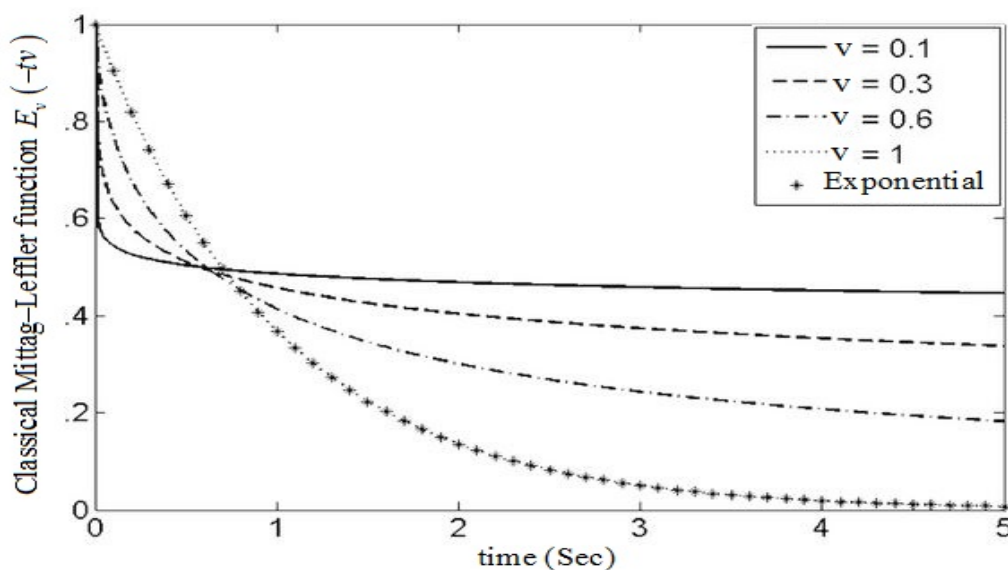
$$E_{\nu,1}(-z^\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu k}}{(\nu k)!} = \cos(z), \quad (11.2)$$

$$E_{\nu,2}(-z^\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu k+1}}{(\nu k + 1)!} = \frac{\sin(z)}{z}. \quad (12.2)$$

در حالت خاص، وقتی  $\beta = 1$  باشد تابع میتاگ- لفلر تک پارامتری بدست می آید.

$$E_{\nu,1}(z) = E_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\nu k + 1)}, \quad \nu > 0. \quad (13.2)$$

تابع میتاگ- لفلر تک پارامتری  $E_\nu$  را می توان تعمیمی برای تابع نمایی  $e^z$  در نظر گرفت. شکل ۱-۲، تغییرات تابع میتاگ- لفلر  $E_\nu(-vt)$  را به ازای تغییر مرتبه مشتق،  $\nu$ ، نشان می دهد.



شکل ۱.۲: تابع میتاگ- لفلر  $E_\nu(-vt)$  به ازای تغییرات مرتبه مشتق

### ۱.۳.۲ تبدیل لاپلاس تابع میتاگ- لفلر

چنانچه به تابع میتاگ- لفلر، تبدیل لاپلاس اعمال گردد فرمول بسته زیر بدست می آید [۳].

$$L \left\{ t^{\nu k + \beta - 1} E_{\nu,\beta}^{(k)}(\pm z t^\nu) \right\} = \frac{k! s^{\nu - \beta}}{(s^\nu \mp z)^{k+1}}, \quad \text{Re}(s) > |z|^{\frac{1}{\nu}} \quad (14.2)$$

که در آن  $E_{\nu,\beta}^{(k)} = \frac{d^k(E_{\nu,\beta})}{dt^k}$  است که به ازای  $k > 0$  از تابع میتاگ- لفلر مشتق، و به ازای  $k < 0$  از تابع انتگرال گرفته می شود.

قضیه ۱.۳.۲. [۶۹]: تعریف میتاگ- لفلر برای  $z = At^v$  به صورت (۱۵.۲) است.

$$\begin{aligned} E_{v,\beta}(At^v) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{vk}}{\Gamma(vk+\beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A \left(\frac{(v-1)k}{v}\right) t^{(v-1)k} k!}{\Gamma(vk+\beta)} \cdot \frac{A^{\frac{1}{v}k} t^k}{k!}. \end{aligned} \quad (15.2)$$

می توان با استفاده از نامعادلات کوشی- شوارتز<sup>۸</sup> نرم دو تابع فوق را به صورت (۱۶.۲) بیان کرد.

$$\begin{aligned} \|E_{v,\beta}(At^v)\| &\leq \text{Sup}_{\tau \in (1,\infty) \cap R} \left( \text{Sup}_{k \in Z^+} \left( \frac{\|A \left(\frac{(v-1)k}{v}\right)\| k!}{\tau^{(1-v)k} \Gamma(vk+\beta)} \right)^{1/2} \right) \|e^{A^{\frac{1}{v}t}\|} \\ &= Q \|e^{A^{\frac{1}{v}t}\|, t \in (1,\infty) \cap R_+, \end{aligned} \quad (16.2)$$

که در آن  $A$  نمایانگر یک ماتریس و  $\|\cdot\|$  نمایانگر هر یک از نرم های موجود برای بردار یا ماتریس می باشد. لازم به ذکر است همواره نرم دو در کل رساله مورد نظر می باشد مگر آنکه صراحتاً اشاره به نرم خاص دیگری شده باشد.

قضیه ۲.۳.۲. [۲۳]: برای ماتریس  $A \in C^{n \times n}$ ، عدد  $\beta > 0$  و  $0 < v < 2$ ، چنانچه زاویه  $\eta$  که در  $v\frac{\pi}{4} < \eta < \min(\pi, v\pi)$  باشد، آنگاه عدد مثبت  $M > 0$  وجود دارد که در نامساوی زیر صدق کند.

$$\|E_{v,\beta}(A)\| \leq \frac{M}{1 + \|A\|}, \quad \eta \leq |\arg(\text{eig}_i(A))| \leq \pi, \quad i=1,2,\dots,n \quad (17.2)$$

که در آن  $\arg(\cdot)$  نمایانگر زاویه و  $\text{eig}_i(A)$  نماینده  $i$  امین مقدار ویژه ماتریس  $A$  است.

## ۴.۲ انتگرال مرتبه کسری

برای تعمیم مفهوم انتگرال به مرتبه های غیر صحیح می توان از فرمول کوشی استفاده کرد چرا که فرم معادلی را برای انتگرال تکراری از مرتبه  $n$  پیشنهاد می دهد [۱].

$${}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in N \quad (18.2)$$

که  $a$  حد پایین انتگرال،  $t$  حد بالای انتگرال و  $n$  مرتبه انتگرال را مشخص می کند. بنابراین تعریف انتگرال مرتبه کسری برای تابع پیوسته  $f(t)$  به صورت زیر است.

$${}_a I_t^v f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^t (t-\tau)^{v-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, v \in R^+. \quad (19.2)$$

همچنین به عنوان قرارداد، عملگر  ${}_a I_t^v$  وقتی که  $v = 0$  است، به عنوان یک عملگر همانی  ${}_a I_t^0 f(t) = f(t)$  پذیرفته می شود. لازم به ذکر است که انتگرال مرتبه کسری، یک عملگر خطی است و خواص جمع پذیری و جابجایی پذیری را دارا می باشد.

<sup>8</sup>Cauchy-Schwarz inequality

## ۵.۲ مشتقات مرتبه کسری

تعاریف متعددی برای مشتقات مرتبه کسری از جمله معروف ترین آنها ریمان- لیوویل<sup>۹</sup>، کپوتو<sup>۱۰</sup> و گرانوالد- لتنیکوف<sup>۱۱</sup> ارائه شده است [۱، ۲، ۳].

### ۱.۵.۲ تعریف ریمان- لیوویل

مشتق ریمان- لیوویل برای مشتق مرتبه کسری  $v$  و  $n \in N$  و  $n - 1 \leq v < n$  به صورت زیر تعریف می شود.

$${}^R D_t^v f(t) = D_a^n I_t^{n-v} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-v)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{v-n+1}} d\tau, \right] \quad (20.2)$$

طبق این تعریف، برای محاسبه مشتق مرتبه  $v \in R^+$  یک تابع، ابتدا انتگرال گیری کسری از مرتبه  $n - v$  انجام می گیرد و پس از آن،  $n$  مرتبه مشتق گیری مرتبه صحیح انجام می شود. چنانچه  $v \in N$  باشد، تعریف مشتق کلاسیک (مشتق مرتبه  $v$  ام صحیح)، حاصل می گردد. همچنین پیش زبر نویس  $R$ ، نمایانگر تعریف مشتق ریمان- لیوویل است. تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه کسری با تعریف ریمان- لیوویل به صورت زیر است.

$$L \{ {}^R D_t^v f(t) \} = s^v F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}^R D_t^{v-k-1} f(t) \right] \Big|_{t=0}. \quad (21.2)$$

### ۲.۵.۲ تعریف کپوتو

مشتق مرتبه کسری با تعریف کپوتو، از جمله تعاریف پرکاربرد در حوزه مهندسی است. اساس این تعریف نیز مانند تعریف ریمان- لیوویل، با به کارگیری مفهوم انتگرال مرتبه کسری شکل گرفته است. تفاوت این دو تعریف، در واقع در تقدم و تأخر در عملگرهای مشتق مرتبه صحیح و انتگرال مرتبه کسری است.

$${}^C D_t^v f(t) = {}_a I_t^{n-v} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-v)} \int_a^t \frac{\left[ \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) \right]}{(t-\tau)^{v-n+1}} d\tau, \quad (22.2)$$

که در آن پیش زبر نویس  $C$ ، نمایانگر تعریف مشتق کپوتو است. تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه کسری کپوتو به صورت زیر است.

$$L \{ {}^C D_t^v f(t) \} = s^v F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{v-k-1} \left[ \frac{d^k}{dt^k} f(0) \right]. \quad (23.2)$$

<sup>9</sup>Riemann-Leiouville

<sup>10</sup>Caputo

<sup>11</sup>Grunwald-Letnikov

در کاربردهای مهندسی، تعریف مشتق مرتبه کسری کیپوتو به خاطر وجود تعبیر فیزیکی در شرایط اولیه ی آن، بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. در این رساله نیز، توجه خود را به این تعریف معطوف کرده و تمامی تحلیل ها و طراحی ها بر اساس این تعریف انجام می گیرد.

## ۶.۲ تعریف گرانوالد- لتنیکوف

مشتق کسری گرانوالد- لتنیکوف در واقع تعمیمی بر تعریف حدی مشتق است.

$${}^GL D_t^v f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^r \binom{v}{r} f(t - rh)}{h^v} \quad (24.2)$$

که در آن،  $\binom{v}{r}$  تابع ترکیب تعمیم یافته است. همچنین، پیش زبر نویس  $GL$ ، نمایانگر تعریف مشتق گرانوالد- لتنیکوف است.

با توجه به ماهیت این تعریف، از مشتق مرتبه کسری گرانوالد- لتنیکوف در روش های عددی محاسبه مشتق و همچنین گسسته سازی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده می شود. تبدیل لاپلاس مشتق کسری گرانوالد- لتنیکوف به صورت زیر است.

$$L \{ {}^GL D_t^v f(t) \} = s^v F(s). \quad (25.2)$$

## ۷.۲ قوانین ضرب دو تابع در حسابان کسری

قضیه ۱.۷.۲. [۱]: قانون لایبنیز در حوزه حسابان کسری برای تمامی تعاریف ارائه شده به صورت زیر بیان می گردد.

$${}_a D_t^v (f(t) \times g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} f^{(k)}(t) \times {}_a D_t^{v-k} g(t), \quad \forall v > 0. \quad (26.2)$$

قضیه ۲.۷.۲. [۲۹]: برای تابع پیوسته و مشتق پذیر  $V = \frac{1}{\Gamma} x^T x$  و  $x \in R^n$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$${}_a D_t^v V = ({}_a D_t^v x)^T x + x^T ({}_a D_t^v x) + 2\Upsilon, \quad (27.2)$$

که در آن کران بالای  $\Upsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+v) ({}_a D_t^k x)^T ({}_a D_t^{v-k} x)}{\Gamma(1+k) \Gamma(1-k+v)}$  به صورت زیر برآورد شده است.

$$\|\Upsilon\| \leq B_1 \|x\| \quad (28.2)$$

که در آن  $B_1 > 0$ .

**قضیه ۳.۷.۲. [۷۰]:** برای تابع پیوسته و مشتق پذیر  $V = \frac{1}{\gamma} x^T P x$  و  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، تساوی زیر برقرار است.

$${}_a D_t^\gamma V = ({}_a D_t^\gamma x)^T x + x^T P ({}_a D_t^\gamma x) + \Upsilon_\gamma, \quad (29.2)$$

که در آن کران بالای  $\Upsilon_\gamma$ ، به صورت زیر برآورد شده است.

$$\|\Upsilon_\gamma\| \leq B_\gamma \|x\| \quad (30.2)$$

که در آن  $B_\gamma > 0$ .

**قضیه ۴.۷.۲. [۲۲]:** اگر  $x(t)$  یک تابع مشتق پذیر و پیوسته در زمان باشد، آنگاه برای تمام  $t > t_0$  و  $v \in (0, 1)$  همواره تساوی زیر برقرار است.

$$\frac{1}{\gamma} {}_t_0^C D_t^\gamma x^2(t) \leq x(t) {}_t_0^C D_t^\gamma x(t), \quad (31.2)$$

**قضیه ۵.۷.۲. [۲۲]:** اگر  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ، آنگاه قضیه ۴.۷.۲ به ازای  $v \in (0, 1)$  و  $t > t_0$  برقرار است و فرمول (۳۱.۲) به صورت زیر تغییر می کند.

$$\frac{1}{\gamma} {}_t_0^C D_t^\gamma (x^T(t)x(t)) \leq x^T(t) {}_t_0^C D_t^\gamma x(t). \quad (32.2)$$

**قضیه ۶.۷.۲. [۲۲]:** اگر  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  و  $P$  ماتریس مثبت معین باشد، به ازای  $v \in (0, 1)$  و  $t > t_0$  همواره نامساوی (۳۳.۲) برقرار است.

$$\frac{1}{\gamma} {}_t_0^C D_t^\gamma (x^T(t)P x(t)) \leq x^T(t)P {}_t_0^C D_t^\gamma x(t). \quad (33.2)$$

## ۸.۲ مدل و نمایش سیستم های مرتبه کسری

معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه کسری پیوسته در زمان با ورودی  $u_i$ ،  $i \in [1, k]$  و خروجی سیستم  $y_i$ ،  $i \in [1, l]$  به صورت زیر می باشد.

$$H({}_a^C D_t^{v_0, v_1, \dots, v_m}) (y_1, y_2, \dots, y_l) = G({}_a^C D_t^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n}) (u_1, u_2, \dots, u_k). \quad (34.2)$$

که در آن  $H(\cdot)$  و  $G(\cdot)$  ترکیب قوانین عملگر مشتق مرتبه غیر صحیح را مشخص می کند. برای سیستم یک ورودی و یک خروجی معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم به صورت زیر است.

$$H({}_a^C D_t^{v_0, v_1, \dots, v_m}) (y) = G({}_a^C D_t^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n}) (u). \quad (35.2)$$

می توان رابطه زیر را برای ترکیب قوانین عملگر مشتق مرتبه کسری به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} H({}_a^C D_t^{v_0, v_1, \dots, v_m}) y &= \sum_{k=0}^m a_k D^{v_k} y \\ G({}_a^C D_t^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n}) u &= \sum_{k=0}^n b_k D^{\beta_k} u \end{aligned} \quad (36.2)$$

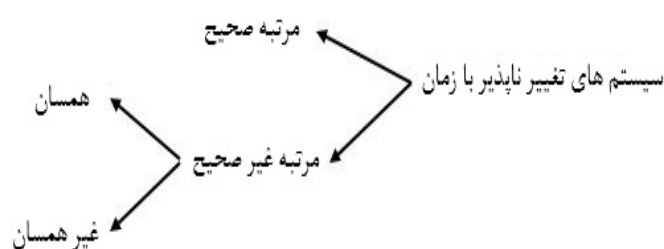


یکی از فرمهای معمول در معادلات دیفرانسیل کسری که توصیف کننده دسته ای از سیستم های کاربردی است، به صورت (۳۷.۲) می باشد.

$$a_m {}^C D_t^{v_m} y + a_{m-1} {}^C D_t^{v_{m-1}} y + \dots + a_1 {}^C D_t^{v_1} y + a_0 {}^C D_t^{v_{m-1}} y = u. \quad (37.2)$$

چنانچه تمامی مرتبه های مشتق گیر در معادلات دیفرانسیل، مضارب صحیحی از مرتبه  $v$  باشند سیستم از نوع نسبی یا همسان<sup>۱۲</sup> گویند و در غیر این صورت سیستم از نوع مرتبه غیر نسبی یا غیر همسان<sup>۱۳</sup> می باشد. شایان ذکر است چون تمرکز این رساله، بر روی سیستم هایی از نوع مرتبه همسان است به جز موارد ذکر شده، منظور از سیستم مرتبه کسری، سیستم با نوع مرتبه ی همسان است.

به این ترتیب سیستم های مرتبه کسری خطی تغییر ناپذیر با زمان<sup>۱۴</sup> یا  $LTI$  را می توان به صورت شکل ۲-۲ دسته بندی کرد. یکی از تحقق های معروف برای توصیف سیستم مرتبه



شکل ۲.۲: دسته بندی سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان

کسری، توصیف فضای حالت است [۱]. به طور کلی سیستم غیر خطی مرتبه کسری به صورت زیر نمایش داده می شود.

$${}^C D_t^v x(t) = f(x(t), t), \quad (38.2)$$

که در آن  $f(x(t), t)$  تابع غیر خطی وابسته به شبه حالت های  $x(t)$  است که برای سادگی آن را بردار حالت نامیده و با  $x$  نمایش می دهیم. فرم کلی مدل سیستم های خطی مرتبه کسری همسان به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} {}^C D_t^v x &= Ax + Bu(t) \\ y(t) &= Cx + Du \end{aligned} \quad (39.2)$$

<sup>12</sup>Commensurate-Order

<sup>13</sup>Non-Commensurate-Order

<sup>14</sup>Linear Time Invariant

که در آن  $A \in R^{n \times n}$ ،  $B \in R^{n \times m}$ ،  $C \in R^{p \times n}$  و  $D \in R^{p \times m}$  ماتریس هایی با ابعاد مناسب هستند. با فرض صفر بودن شرایط اولیه، با اعمال اپراتور لاپلاس بر روی (۳۹.۲)، داریم.

$$s^v X(s) = AX(s) + BU(s) \quad (۴۰.۲)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

که در آن  $X(s) = L(x)$ ،  $U(s) = L(u(t))$  و  $Y(s) = L(y(t))$ . با حذف  $X(s)$  از معادله (۴۰.۲) تابع تبدیل توصیف کننده  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  سیستم فوق به صورت (۴۱.۲) است.

$$G(s) = C(s^v I - A)^{-1} B + D \quad (۴۱.۲)$$

تابع تبدیل معادله توصیف کننده معادله (۳۵.۲) به صورت زیر است.

$$G(s) = \frac{s^{\beta_n} + s^{\beta_{n-1}} + \dots + s^{\beta_1} + s^{\beta_0}}{s^{v_m} + s^{v_{m-1}} + \dots + s^{v_1} + s^{v_0}} \quad (۴۲.۲)$$

با فرض اینکه سیستم با مرتبه همسان  $v$  باشد، همواره رابطه زیر برقرار است.

$$G(s) = \frac{Q(s^v)}{P(s^v)} \quad (۴۳.۲)$$

## جمع بندی

در این فصل بعد از بیان تاریخچه مختصر حسابان کسری، تعاریف، توابع و فرمول های مورد نیاز این رساله به همراه دو تحقق تابع تبدیل و فضای حالت مرور شد. از فرمول های ارائه شده در این فصل در اثبات قضایای فصل های آتی استفاده خواهد شد.

## فصل ۳

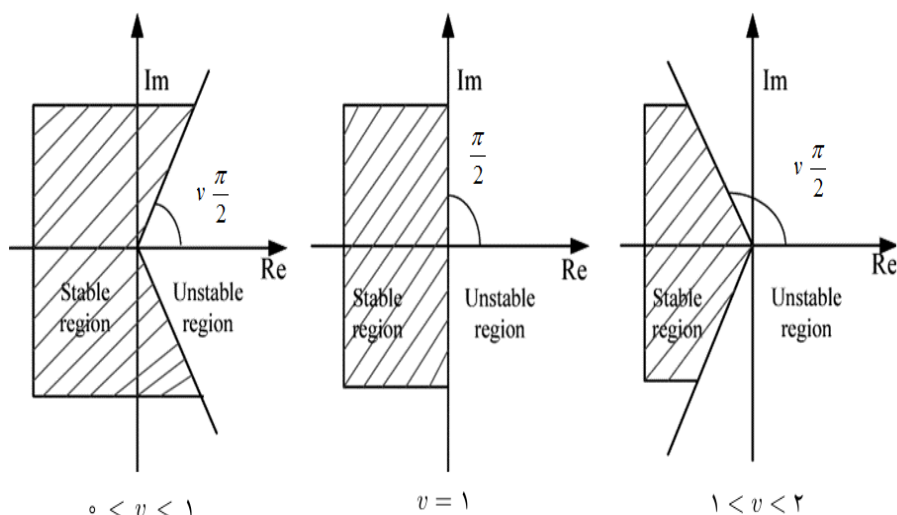
# مروری بر تحقیقات گذشته: مباحث پایداری، نامعینی و اشباع

### پیشگفتار

بحث مطالعه و آنالیز سیستم های مرتبه کسری با سیستم های مرتبه صحیح تفاوت های اساسی دارد؛ به صورتی که سیستم های مرتبه صحیح، تنها حالت خاصی از سیستم های مرتبه کسری هستند. به عنوان مثال در مبحث تحلیل پایداری سیستم های مرتبه کسری، صفحه پایداری با تغییر مرتبه مشتق تغییر می کند در حالی که، این دیدگاه در سیستم های مرتبه صحیح، مطرح نیست. در این فصل در راستای اهداف رساله، ابتدا برخی مقالات موجود که بر روی مبحث پایداری از جمله مقالاتی که بر روی سیستمهای خطی و غیر خطی مرتبه کسری تمرکز دارند را، به صورت خلاصه مرور کرده سپس با فرض وجود نامعینی در مدل، پایداری مقاوم اینگونه سیستم ها مورد بررسی گرفته به صورتی که تمرکز عمده بر روی مقالاتی است که کنترل کننده پسخورد حالت و یا مد لغزشی می باشد. مطالعه ی مروری نهایی حول محور محدودیت اشباع، با بررسی مقالاتی با این محوریت در سیستم های مرتبه کسری است.

## ۱.۳ پایداری

در مبحث پایداری تحلیل پایداری سیستم های مرتبه کسری تفاوتی با تحلیل پایداری سیستم های مرتبه صحیح وجود دارد. برای سیستم های مرتبه همسان کسری بدون هیچ گونه تاخیری، اگر قدر مطلق اندازه زوایای تمامی قطبهای  $s^v$  بزرگتر از  $v\frac{\pi}{2}$  باشد، سیستم پایدار است. ناحیه پایداری و ناحیه ناپایدار در شکل ۱.۳ نمایش داده شده است [۴].



شکل ۱.۳: ناحیه پایداری و ناحیه ناپایداری سیستم های مرتبه کسری

همانطور که در شکل ۱.۳ مشاهده می شود، ناحیه پایداری وقتی مرتبه مشتق  $0 < v < 1$  باشد بزرگتر از ناحیه پایداری سیستم های مرتبه صحیح است، به طوری که ممکن است سیستم مرتبه کسری دارای قطبی با قسمت حقیقی مثبت باشد در حالی که سیستم پایدار است.

در سال ۱۹۹۶ ماتیگنون<sup>۱</sup> و پس از آن پتراس<sup>۲</sup> شرط پایداری ورودی محدود-خروجی محدود برای سیستم توصیف شده مرتبه همسان (۴۳.۲) را به صورت زیر به دست آورد.

قضیه ۱.۱.۳ [۳۰]. سیستم توصیف شده با تابع تبدیل (۴۳.۲) پایدار است اگر و تنها اگر (۱.۳) برقرار باشد.

$$|\arg(\text{eig}_i(P(s^v)))| > \frac{v\pi}{2}, \quad i \in [1, \dots, m], \quad 0 < v < 2 \quad (1.3)$$

که در آن  $\arg(\cdot)$  و  $\text{eig}_i(\cdot)$  به ترتیب نمایانگر زاویه و  $i$  امین مقدار ویژه  $P(s^v)$  است و  $P(s^v)$  چند جمله ای مخرج تابع تبدیل توصیف شده در (۴۳.۲) می باشد.

<sup>1</sup>Matignon

<sup>2</sup>Petrás

### ۱.۱.۳ پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری

پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری نامتغیر با زمان<sup>۳</sup> همانند پایداری سیستم های مرتبه صحیح نامتغیر با زمان به قرارگیری قطبهای سیستم در صفحه مختلط بستگی دارد. چنانچه قضیه پایداری برای سیستم های توصیف شده با معادلات (۳۹.۲) مورد مطالعه قرار گیرد، نتایج زیر حاصل می شود.

**قضیه ۲.۱.۳.** [۳۱] سیستم با مرتبه همسان  $v$  که توسط معادلات (۳۹.۲) و  $D = \circ$  توصیف شده، پایدار است اگر و تنها اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس  $A$  در ناحیه پایداری قرار داشته باشد.

$$|\arg(\text{eig}(A))| > \frac{v\pi}{3}, \quad 0 < v < 2 \quad (2.3)$$

به دلیل کاربرد راحت و استقبال فراوان در استفاده از نامعادلات ماتریسی خطی<sup>۴</sup> یا  $LMI$ ، تلاش بسیاری از محققان برای تبدیل مسائل پیچیده به  $LMI$  قابل ستودنی است. از جمله مقالاتی که شرط پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری نامتغیر با زمان را به  $LMI$  تبدیل کرده است، مرجع [۲۰] می باشد. در این مرجع، شروط پایداری زمانی که مرتبه مشتق در بازه های  $v \in (0, 1)$  و  $v \in (1, 2)$  قرار دارد، به صورت جداگانه بررسی شده است. به این منظور سیستم خودگردان خطی مرتبه کسری نامتغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید.

$${}_a^C D_t^v x = Ax \quad (3.3)$$

**تعریف ۱.۲ [۲۰]:** مسیر  $x = \circ$  از سیستم  ${}_a^C D_t^v x = f(x)$  پایدار مجانبی  $t^{-\alpha}$  است اگر سیستم فوق مجانباً پایدار بوده و اعداد حقیقی مثبت  $\alpha, N$  و  $t_0$  وجود داشته باشند که برای تمام  $t > t_0$  همواره رابطه زیر برقرار باشد.

$$\|x\| < N(t - t_0)^{-\alpha} \quad (4.3)$$

پایداری  $t^{-\alpha}$  به پایداری مجانبی برای سیستم های مرتبه کسری دلالت دارد و برای سیستم های خطی  $\alpha$  به مرتبه مشتق کسری  $v$  مربوط می باشد.

**قضیه ۳.۱.۳.** [۲۰]: سیستم (۳.۳) و  $0 < v < 1$  پایدار مجانبی است اگر ماتریس مثبت معین  $P > \circ$ ،  $P \in R^{n \times n}$  وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند.

$$\left(A^{\frac{1}{v}}\right)^T P + P \left(A^{\frac{1}{v}}\right) < \circ \quad (5.3)$$

که در آن  $\left(A^{\frac{1}{v}}\right)^T$  ترانهاده ماتریس  $A^{\frac{1}{v}}$  است. پایداری  $t^{-\alpha}$  برای سیستم (۳.۳) در قضیه زیر مورد بحث قرار گرفته است.

<sup>3</sup>Fractional order linear time invariant system

<sup>4</sup>Linear Matrix Inequality

قضیه ۴.۱.۳. [۲۰]: سیستم (۳.۳) و  $0 < v < 1$  پایدار مجانبی  $t^{-\alpha}$  است اگر ماتریس مثبت معین  $P > 0$ ،  $P \in R^{n \times n}$  وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند.

$$\left( -(-A)^{\frac{1}{1-v}} \right)^T P + P \left( -(-A)^{\frac{1}{1-v}} \right) < 0 \quad (۶.۳)$$

به طوری که  $(-A)^{\frac{1}{1-v}}$  به صورت  $e^{\left( \left( \frac{1}{1-v} \right) \log(-A) \right)}$  تعریف می شود.

قضیه ۵.۱.۳. [۲۰]: سیستم (۳.۳) و  $0 < v < 1$  پایدار مجانبی  $t^{-\alpha}$  است اگر و تنها اگر هیچ ماتریس نامنفی  $Q \in C^{n \times n}$ ، وجود نداشته باشد که در رابطه زیر صدق کند.

$$rAQ + QA^T \bar{r} > 0 \quad (۷.۳)$$

به طوری که  $r = \sin(v\frac{\pi}{2}) + j\cos(v\frac{\pi}{2})$  تعریف شده و  $\bar{r}$  مزدوج  $r$  است.

همچنین در [۳۲] با استفاده از لم گرانوال-بلمن<sup>۵</sup> و حل تقریبی معادله دیفرانسیل برای سیستم (۳.۳) با تعریف ریمان لیوویل شرط پایداری سیستم خطی بدست آمده است. نتیجه به دست آمده از این اثبات، نتایج حاصله قضیه ۲.۱.۳ را با کمک قضیه ۶.۱.۳ تایید می کند.

قضیه ۶.۱.۳. [۳۲، ۳۳] (گرانوال-بلمن) فرض کنید  $u_1(t)$  و  $f(t)$  توابعی تکه ای پیوسته و حقیقی، تعریف شده بر روی بازه  $[a, b]$  باشند. همچنین  $H(t)$  تابعی حقیقی و نامنفی بر روی بازه مورد نظر باشد. چنانچه برای تمام  $t \in [a, b]$  نامعادله زیر برقرار باشد

$$u_1(t) \leq f(t) + \int_a^t H(\tau)u_1(\tau)d\tau, \quad (۸.۳)$$

آنگاه نامعادله (۹.۳) در بازه  $t \in [a, b]$  همواره برقرار است.

$$u_1(t) \leq f(t) + \int_a^t f(\tau)H(\tau)\exp\left\{ \int_{\tau}^t H(r)dr \right\} d\tau. \quad (۹.۳)$$

قضیه ۷.۱.۳. [۳۳]: اگر  $H: R^+ \rightarrow R$  بر روی دامنه  $R^+$  انتگرال پذیر و تابع  $u_1: R^+ \rightarrow R$  در رابطه زیر صدق کند

$$u_1(t) \leq C_{11} + \int_0^t H(\tau)u_1(\tau) d\tau \quad \forall t \geq 0, \quad (۱۰.۳)$$

آنگاه همواره نامعادله (۱۱.۳) برقرار است.

$$u_1(t) \leq C_{11} \exp\left( \int_0^t H(\tau) d\tau \right). \quad (۱۱.۳)$$

که در آن  $f(t) = C_{11}$  عددی ثابت می باشد.

<sup>5</sup>Gronwall-Bellman inequality

در [۳۴] شرط پایداری سیستم (۳.۳) زمانی که مرتبه مشتق در  $v \in (0, 1)$  قرار داشته باشد، به صورت زیر به دست آمده است.

قضیه ۸.۱.۳. [۳۴]: سیستم خودگردان با معادلات حالت (۳.۳) پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس هرمیشین<sup>۶</sup> مثبت معین  $X = X^*$ ،  $X \in C^{m \times n}$  وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند.

$$(r_1 X + \bar{r}_1 \bar{X})^T A^T + A (r_1 X + \bar{r}_1 \bar{X}) < 0 \quad (12.3)$$

که در آن  $r_1 = e^{j(1-v)\frac{\pi}{2}}$ ،  $\bar{r}_1$  و  $\bar{X}$  به ترتیب مزدوج  $r_1$  و  $X$  است.

سیستم (۳.۳) را با ورودی  $u(t)$  به صورت زیر در نظر بگیرید.

$${}_a^C D_t^v x = Ax + Bu(t) \quad 0 < v < 1 \quad (13.3)$$

آنگاه با کنترل کننده پسخورد  $u(t) = Kx$ ، می توان شرط پایداری را برای سیستم فوق به دست آورد.

قضیه ۹.۱.۳. [۳۴]: سیستم مرتبه کسری (۱۳.۳) با قانون پسخورد  $u(t) = Kx$  پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس مثبت معین هرمیشین  $X = X^*$ ،  $X \in C^{m \times n}$  و ماتریس  $Y \in R^{m \times n}$  وجود داشته باشند که در رابطه (۱۴.۳) صدق کند.

$$(r_1 X + \bar{r}_1 \bar{X})^T A^T + A (r_1 X + \bar{r}_1 \bar{X}) + Y^T B^T + BY < 0 \quad (14.3)$$

که در آن  $Y = (r_1 X + \bar{r}_1 \bar{X}) K$ .

### ۲.۱.۳ پایداری سیستم های غیر خطی مرتبه کسری

در چند سال گذشته عموماً از روش های حل یا تخمین حل معادلات دیفرانسیل و پایداری لیپانوف برای تحلیل پایداری سیستم های مرتبه کسری استفاده شده است. عموماً روش حل معادله دیفرانسیل و یافتن تخمینی از حل معادله دیفرانسیل بسیار دقیق و قابل اتکا است. اما به دلیل مشکلات یافتن حل بسته، محققین به استفاده از روش لیپانوف تمایل دارند. این نکته بسیار قابل تامل است که وجود تابع لیپانوف یک شرط کافی می باشد چرا که در برخی سیستم ها عدم یافتن تابع لیپانوف، به منزله ناپایداری نیست.

اولین مقاله ای که در مورد پایداری لیپانوف در این رساله بررسی می شود، مرجع [۳۵] است. در این مقاله پایداری میتاگ- لفلر را با در نظر گرفتن سیستم غیر خطی زیر تعریف کرده است.

$${}^R/C D_t^v x = f(t, x), \quad 0 < v < 1 \quad (15.3)$$

که در آن  ${}^R/C D^v$  نمایانگر تعریف مشتق ریمان- لیوویل یا کپوتو می باشد.

<sup>6</sup>Hermitian matrix

قضیه ۱۰.۱.۳. [۳۵، ۳۶]: حل معادله غیر خطی (۱۵.۳) را پایدار میتاگ- لفلر نامیده می شود اگر رابطه زیر برقرار باشد.

$$\|x\| \leq \left\{ m[x(t_0)] E_v \left( -\lambda' (t - t_0)^v \right) \right\}^b \quad (16.3)$$

که در آن  $t_0$  زمان اولیه،  $\lambda' \geq 0, b > 0, m(0) = 0$  و  $m(x) \geq 0$  یک تابع لیپشیتز<sup>۷</sup> محلی بر روی  $x \in \mathbb{R} \in R^n$  با ثابت لیپشیتز  $m_0$  است.

لازم به ذکر است که پایداری میتاگ- لفلر بر پایداری مجانبی دلالت دارد. پس از این تعریف، نویسندگان به بسط روش مستقیم لیاپانوف برای سیستم های مرتبه کسری پرداخته اند که نهایتاً پایداری میتاگ- لفلر از آن نتیجه می شود.

قضیه ۱۱.۱.۳. [۳۵]: اگر  $x = 0$  نقطه تعادل سیستم غیرخطی خودگردان با معادلات حالت (۱۵.۳) با تعریف کپوتو و  $D \in R^n$  ناحیه ای شامل مبدا مختصات باشد، چنانچه  $V(t, x) : [0, \infty) \times D \rightarrow R$  یک تابع مشتق پذیر پیوسته و لیپشیتز نسبت به حالت های  $x$  باشد که در رابطه (۱۷.۳) صدق کند، آنگاه  $x = 0$  پایدار میتاگ- لفلر است.

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab}, \quad (17.3)$$

$${}^C D_t^v V(t, x) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab},$$

که در آن  $\alpha_2, \alpha_1, a, b$  و مقادیر مثبت دلخواه،  $\alpha_3$  و  $t \geq 0$  و  $x \in D$ . اگر فرضیات بر روی کل فضای حالت یعنی  $R^n$  باشد، آنگاه  $x = 0$  پایدار میتاگ- لفلر کلی است.

تعریف ۲-۲ [۳۷، ۳۸]: (تابع کلاس  $K$ ) یک تابع پیوسته  $\alpha : [0, t) \rightarrow [0, \infty)$  متعلق به دسته یا کلاس  $K$  است، اگر اکیدا صعودی بوده و  $\alpha(0) = 0$  باشد.

قضیه ۱۲.۱.۳. [۳۷، ۳۸]: اگر  $x = 0$  نقطه تعادل سیستم ناخودگردان<sup>۸</sup> (۱۵.۳) باشد، فرض کنید که  $V(t, x)$  یک تابع لیاپانوف و توابع دسته  $K$ ،  $\alpha_{i, (i=1,2,3)}$  وجود داشته باشند به طوری که نامعادلات زیر برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل سیستم پایدار مجانبی است.

$$\alpha_1 (\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2 (\|x\|), \quad (18.3)$$

$${}^C D_t^v V(t, x) \leq -\alpha_3 (\|x\|),$$

در مقاله [۱۹]، روش پایداری تعمیم یافته میتاگ- لفلر و روش پایداری تعمیم یافته لیاپانوف مرتبه کسری مطالعه گردیده است. در ابتدای این مقاله، نویسندگان برای درک هر چه بیشتر گستره حسابان کسری نسبت به حسابان مرتبه صحیح، مثالی را مطرح کرده

<sup>7</sup>Locally Lipschitz

<sup>8</sup>Autonomous



اند که در آن خواننده به طور شهودی درک می کند که حسابان معمولی تنها حالت خاصی از حسابان کسری است. همچنین در این مقاله درباره انرژی سیستم از دیدگاه لیپانوف بحث مفصلی ارائه شده است. به این منظور، اثبات های ارائه شده که کاهش انرژی فقط به حالت نمایی محدود نمی شود، بلکه حالت نمایی می تواند تنها یک حالت خاص از کاهش انرژی باشد.

تعریف ۲-۳ [۱۹]:  $x_0$  را یک نقطه تعادل سیستم (۱۵.۳) با تعریف کپوتو است اگر و تنها اگر  $f(t, x_0) = 0$  باشد.

توجه شود که تعریف نقطه تعادل با تعریف کپوتو، همان نقطه تعادل سیستم  $\dot{x} = f(t, x)$  است.

پایداری تعمیم یافته میتاگ- لفلر به صورت زیر تعریف شده است.

قضیه ۱۳.۱.۳ [۱۹، ۳۹]: حل معادله (۱۵.۳) پایدار تعمیم یافته میتاگ- لفلر نامیده می شود اگر

$$\|x\| \leq \left\{ m[x(t_0)] (t - t_0)^{-\gamma} E_{v, 1-\gamma} \left( -\lambda' (t - t_0)^v \right) \right\}^b \quad (19.3)$$

که در آن  $t_0$  زمان اولیه،  $\lambda' \geq 0, \gamma \in [0, 1 - v], b > 0, m(0) = 0$  و  $m(x) \geq 0$  یک تابع لپشیتز بر روی  $x \in \mathbb{R}^n$  با ثابت لپشیتز  $m_0$  است.

توجه شود که پایداری میتاگ- لفلر و پایداری تعمیم یافته میتاگ- لفلر به پایداری مجانبی دلالت دارند. همچنین برای  $\lambda = 0$ ، حالت خاصی از پایداری میتاگ- لفلر به دست می آید.

$$\|x\| \leq \left\{ \frac{m[x(t_0)]}{\Gamma(1-\gamma)} \right\}^b (t - t_0)^{-\gamma b} \quad (20.3)$$

در [۴۰]، چگونگی حل معادلات دیفرانسیل و پایداری معادلات دیفرانسیل مورد بحث و بررسی قرار گرفته است و برای برخی حالت های خاص، حل بسته ارائه گردیده است. در مرجع [۴۱] با استفاده از لم گرانووال- بلمن توسعه ای برای قضیه پایداری لیپانوف برای سیستم های غیر خطی با تعریف کپوتو به صورت زیر ارائه شده است.

قضیه ۱۴.۱.۳ [۴۱]: اگر  $x = 0$  نقطه تعادل سیستم (۱۵.۳) با تعریف کپوتو و  $D \in R^n$  یک ناحیه شامل مبدا مختصات  $x = 0$  باشد، چنانچه  $V(t, x) : [0, \infty) \times D \rightarrow R$  یک تابع مشتق پذیر پیوسته و لپشیتز نسبت به حالت های  $x$ ، که در رابطه زیر صدق کند، آنگاه  $x = 0$  پایدار مجانبی است.

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x), \\ {}^C D_t^\gamma V(t, x) &\leq -W_3(x), \end{aligned} \quad (21.3)$$

که در آن  $W_1, W_2, W_3$  توابعی مثبت معین پیوسته بر روی  $D$  است. اگر فرضیات بر روی کل فضای حالت یعنی  $R^n$  باشد، آنگاه  $x = \circ$  پایدار مجانبی کلی است. واضح است که قضیه ۱۴.۱.۳ حالت کلی قضایای ۱۱.۱.۳ و ۱۲.۱.۳ است چرا که توابع کلاس  $K$  و  $\alpha_i \|x\|^{ab}$  همگی جز توابع مثبت معین می باشند.

در [۲۲] ابتدا قوانین حاصل ضرب دو تابع در مشتقات کسری مورد بحث قرار گرفته شده که در قضایای ۴.۷.۲ و ۶.۷.۲ آنچه را مورد نیاز این رساله است بیان شده است. در ادامه تابع لیاپانوف  $V = \frac{1}{p} x^T x$  برای معادله (۱۵.۳) در نظر گرفته شده است.

قضیه ۱۵.۱.۳. [۲۲]: تابع (۱۵.۳) با تعریف کپوتو و  $0 < v < 1$  را در نظر بگیرید. چنانچه  $x = \circ$  نقطه تعادل و  $x \in R$  باشد، آنگاه با وجود شرط زیر نقطه تعادل پایدار مجانبی است.

$$xf(t, x) < \circ \quad \forall, x \neq \circ. \quad (22.3)$$

قابل ذکر است برای  $x \in R^n$  نیز همواره قضیه فوق برقرار است. چنانچه به علت عدم چشم پوشی از ترم های غیر خطی موثر بر معادلات توصیف کننده سیستم (۳.۳)، یک ترم غیر خطی  $h(t, x)$  به آن افزوده شود، سیستم به صورت (۲۳.۳) توصیف می گردد.

$${}^C D_t^v x = Ax + h(t, x) \quad (23.3)$$

که در آن  $x \in R^n$  حالت های سیستم،  $A \in R^{n \times n}$  ماتریس ثابت و  $h(t, x) \in R^n$  بردار غیر خطی و  $v$  مرتبه مشتق، که در هر یک از بازه های  $0 < v < 1$  یا  $1 < v < 2$  قرار دارد، می باشد. معادله (۲۳.۳) توجه محققین زیادی را به خود جلب کرده است [۲۳، ۴۲].

چنانچه غیر خطی  $h(t, x)$  در شرط لپیشیتز صدق کند آنگاه همواره نامعادله زیر برقرار است.

$$|h(x_2, t) - h(x_1, t)| \leq \lambda_1 |x_2 - x_1| \quad (24.3)$$

که در آن  $\lambda_1$  ثابت لپیشیتز  $h(x, t)$  است. مرجع [۲۳، ۴۲] با در نظر گرفتن فرضیات زیر برای غیر خطی  $h(x, t)$  شروط پایداری را برای سیستم (۲۳.۳) به دست آورده اند.

$$\begin{aligned} 1) \quad & h(\circ) = \circ, \\ 2) \quad & \lim_{\|x\| \rightarrow \circ} \frac{\|h(x)\|}{\|x\|} = \circ \end{aligned} \quad (25.3)$$

تابع غیر خطی  $h(x, t)$  در [۱۹] به عنوان اختلال<sup>۹</sup> که ناشی از خطای مدلسازی، نامعینی یا اغتشاش<sup>۱۰</sup> است، بیان شده است. هر دو فرم غیر خطی (۲۴.۳) و (۲۵.۳) در توصیف (۲۳.۳) در [۳۸] به عنوان اغتشاش محو شونده<sup>۱۱</sup> در نظر گرفته شده است.

<sup>9</sup>Perturbed

<sup>10</sup>Disturbance

<sup>11</sup>Vanishing Perturbation

قضیه ۱۶.۱.۳. [۲۳، ۴۲]: سیستم (۲۳.۳) و  $v \in (0, 1)$  را در نظر بگیرید که (۲۵.۳) برای غیر خطی  $h(x, t)$  صادق باشد، چنانچه  ${}_a^C D_t^v x = Ax$  یک سیستم پایدار مجانبی باشد و  $\rho(A) > 1$ ، آنگاه  $x = 0$  یک حل پایدار برای سیستم خواهد بود. که در آن  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |eig(A)|$  می باشد که در آن  $eig(\cdot)$  مقدار ویژه  $A$  است.

اثبات فوق به کمک قضیه زیر و لم گرانوال- بلمن که در قضیه (۶.۱.۳) بیان شد، صورت پذیرفته است.

قضیه ۱۷.۱.۳. [۲۳]: اگر  $A \in C^{m \times n}$  یک ماتریس مربعی و  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |eig_i|$  شعاع طیفی  $A$  باشد، آنگاه همواره نامساوی زیر برقرار است.

$$\|A\| \geq \rho(A). \quad (26.3)$$

در [۴۲]، تحلیلی مشابه [۲۳] ارائه شده است و برای سیستم (۲۳.۳) با رابطه (۲۵.۳) روی غیر خطی  $h(t, x)$ ، کنترل کننده ی پسخورد حالت  $u = Kx, K \in R^{1 \times n}$  با ماتریس ورودی  $B \in R^{n \times 1}$  نظر گرفته شده است.

$${}_a^C D_t^v x = Ax + h(t, x) + Bu(t), \quad (27.3)$$

که در آن ماتریس های  $A, B$  و  $K$  ثابت و معین هستند.

قضیه ۱۸.۱.۳. [۲۳، ۴۲]: سیستم (۲۷.۳) و  $v \in (0, 1)$  را در نظر بگیرید که (۲۵.۳) برای غیر خطی  $h(x, t)$  صادق باشد، چنانچه  $|\arg(eig(A + BK))| > \frac{v\pi}{4}$  و  $\rho(A + BK) > 1$  باشد آنگاه سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود.

مباحثی مانند پایدارسازی با طراحی فیدبک خروجی برای سیستم های مرتبه کسری [۴۴]، پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری سوئیچینگ [۴۵]، پایداری سیستم های مرتبه کسری با تاخیر [۴۷]، پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری غیر همسان [۴۸]، پایدارسازی با کنترل کننده مرتبه کسری [۴۹] و پایداری سیستم های مرتبه کسری چند وجهی [۵۰] از مباحث پرترفدار در آنالیز پایداری و پایدارسازی سیستم های مرتبه کسری می باشد اما به دلیل عدم ارتباط مستقیم با موضوع و اهداف رساله از این مباحث چشم پوشی می شود.

## ۲.۳ نامعینی

پایداری سیستم های معین<sup>۱۲</sup> مرتبه کسری در دو دسته خطی و غیر خطی در قسمت قبل مورد بررسی قرار گرفت. می دانیم که در دنیای واقعی به دلیل عدم دقت کافی یا مشکلات

<sup>12</sup>Certain

اندازگیری و یا حتی خطی سازی در تحلیل و طراحی ها، بین مدل واقعی و مدل نامی عدم تطابق هایی وجود دارد. این امر ضرورت مطالعه سیستم های مرتبه کسری با وجود نامعینی را سبب می شود، که در این بخش پایداری مقاوم و پایداری سازی با کمک پسخورد کمکی و مد لغزشی مورد مطالعه قرار می گیرند.

### ۱.۲.۳ پایداری مقاوم و پایداری سازی با کنترل پسخورد

در سال ۲۰۰۲ پیتراس<sup>۱۳</sup> و همکارانش یک تست پایداری برای سیستم های خطی نامتغیر با زمان مرتبه کسری ارائه دادند [۵۱]. این مرجع و مرجع [۵۲] بر روی سیستم زیر تمرکز کرده اند.

$${}^C D_t^v x = \tilde{A}x + \tilde{B}u. \quad (28.3)$$

که در آن  $\tilde{A} \in A^I = [\underline{A}, \bar{A}]$  و  $\tilde{B} \in B^I = [\underline{B}, \bar{B}]$  که  $\bar{B}$  و  $\bar{A}$  به ترتیب حد بالا و  $\underline{B}$  و  $\underline{A}$  حد پایین ماتریس های معین  $A$  و  $B$  می باشند.

در [۵۲] با تعریف مجموعه ای به صورت  $\ell^I = \{\lambda \in C : Ax = \lambda x, x \neq 0, A \in A^I\}$  به عنوان محدوده مقادیر ویژه مربوط به ماتریس  $A$  و مرتبه مشتق در بازه  $0 < v < 1$ ، بحث پایداری سیستم به گونه ای مطرح شده که با وجود نامتناهی بودن تعداد المانهای مجموعه  $\ell^I$ ، کران مجموعه فوق مشخص باشد. تلاش نویسندگان [۵۲]، در [۵۳] ادامه یافته و تحلیل های مشابهی را برای بازه  $1 < v < 2$  ارائه کرده اند.

در [۵۴] سیستم (۲۸.۳) با ورودی صفر و  $1 < v < 2$  مورد مطالعه قرار می گیرد با تعریف ماتریس راسی  $A^v = \left\{ A : A = [a_{ij}^v], a_{ij}^v \in \left\{ \underline{a}_{i,j}, \bar{a}_{i,j} \right\} \right\}$ ، اثبات می شود که بزرگترین مقدار ویژه ماتریس نامعین  $\tilde{A}$ ، جز مقادیر ویژه ماتریس راسی آن است. چنانچه بزرگترین مقدار ویژه ماتریس راسی در ناحیه پایداری قرار داشته باشد آنگاه سیستم پایدار مقاوم است. در سال ۲۰۰۹، برای سیستم (۲۸.۳) وقتی که مشتق مرتبه کسری بین  $1 < v < 2$  و  $u = 0$  است شرط کافی پایداری مقاوم به صورت  $LMI$  در [۵۵] ارائه شده است. مقالاتی چون [۲۱، ۱۴، ۱۵] نیز پایداری مقاوم را برای بازه قرارگیری مرتبه مشتق در  $1 < v < 2$  بررسی کرده اند که در آنها تفاوت هایی همچون وابستگی مرتبه مشتق به بازه نامعینی ماتریس  $A$  و وجود نامعینی در مرتبه مشتق می باشد.

سیستم (۲۸.۳) که در آن مرتبه مشتق  $v$  نیز دارای نامعینی  $v \in v^I = [\underline{v}, \bar{v}]$ ،  $0 < v < 1$  است را در نظر بگیرید. همچنین، رابطه (۲۹.۳) بین مرتبه مشتق و ماتریس های

نامعین  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  وجود دارد.

$$\begin{aligned} A \in A^I &= \left[ \underline{A}(v), \bar{A}(v) \right] = \left\{ [a_{ij}(v)] : \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \right\} \\ B \in B^I &= \left[ \underline{B}(v), \bar{B}(v) \right] = \left\{ [b_{ij}(v)] : \underline{b}_{ij} \leq b_{ij} \leq \bar{b}_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\} \end{aligned} \quad (29.3)$$

بنابراین، سیستم (۲۸.۳) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$${}^C D_t^\nu x = [A_0 + kv\Delta A]x + [B_0 + kv\Delta B]u(t) \quad (30.3)$$

که در آن  $\Delta B = B_M [\eta_{ij}]_{n \times n} = [\beta_{ij}]_{n \times n} [\eta_{ij}]_{n \times n}$ ،  $\Delta A = A_M [\delta_{ij}]_{n \times n} = [\gamma_{ij}]_{n \times n} [\delta_{ij}]_{n \times n}$ ،  $\gamma_{ij}, \beta_{ij} \in R$ ،  $|\delta_{ij}| \leq 1, |\eta_{ij}| \leq 1$  و  $A_0, A_M, B_0, B_M$  ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب هستند و  $k$  عدد ثابتی می باشد. در مورد نامعینی های  $\Delta B, \Delta A$  و  $v$  نیز می توان روابط زیر را نوشت.

$$(31.3)$$

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{(v + \bar{v})}{\gamma}, v_M = \frac{(v - \bar{v})}{\gamma} \\ D_A &= \left[ \begin{array}{cccc} \sqrt{\gamma_{11}}e_1^n & \dots & \sqrt{\gamma_{1n}}e_1^n & \dots & \sqrt{\gamma_{n1}}e_n^n & \dots & \sqrt{\gamma_{nn}}e_n^n \end{array} \right]_{n \times n^2} \\ E_A &= \left[ \begin{array}{cccc} \sqrt{\gamma_{11}}e_1^n & \dots & \sqrt{\gamma_{1n}}e_n^n & \dots & \sqrt{\gamma_{n1}}e_1^n & \dots & \sqrt{\gamma_{nn}}e_n^n \end{array} \right]_{n^2 \times n} \\ D_B &= \left[ \begin{array}{cccc} \sqrt{\beta_{11}}e_1^n & \dots & \sqrt{\beta_{1m}}e_1^n & \dots & \sqrt{\beta_{n1}}e_n^n & \dots & \sqrt{\beta_{nm}}e_n^n \end{array} \right]_{n \times nm} \\ E_B &= \left[ \begin{array}{cccc} \sqrt{\beta_{11}}e_1^m & \dots & \sqrt{\beta_{1m}}e_m^m & \dots & \sqrt{\beta_{n1}}e_1^m & \dots & \sqrt{\beta_{nm}}e_m^m \end{array} \right]_{nm \times n} \\ F_A &= \text{diag}(\delta_{11} \dots \delta_{1n} \dots \delta_{n1} \dots \delta_{nn}) \in R^{n^2 \times n^2}, |\delta_{ij}| \leq 1, i, j = 1, \dots, n \\ F_B &= \text{diag}(\eta_{11} \dots \eta_{1n} \dots \eta_{n1} \dots \eta_{nn}) \in R^{nm \times nm}, |\eta_{ij}| \leq 1, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

در رابطه اخیر  $e_i^n \in R^n$  نمایانگر  $i$  امین بردار ستونی از ماتریس همانی  $I_n$  و  $\Delta A = D_A F_A E_A$  و  $\Delta B = D_B F_B E_B$  است.

قضیه ۱.۲.۳. [۵۶]: سیستم مرتبه کسری (۳۰.۳) با ورودی صفر، پایدار مجانبی است اگر دو ماتریس مثبت معین  $P_i \in R^{n \times n}, i = 1, 2$ ، دو ماتریس پاد متقارن  $P_{i2} \in R^{n \times n}, i = 1, 2$  و چهار ثابت عددی  $\epsilon_{ij} > 0, i, j = 1, 2$  وجود داشته باشند که در شرایط زیر صدق کنند.

$$\begin{aligned} X(A_0, v_0) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym} \{ \Theta_{ij}(v_0) \otimes (A_0 P_{ij}) \} < 0 \\ X(A_0, 1) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym} \{ \Theta_{ij}(1) \otimes (A_0 P_{ij}) \} < 0 \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ -P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} &> 0, \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{22} & P_{21} \end{bmatrix} > 0 \\ \Omega &= \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (32.3)$$

که در آن  $Sym(A) = A + A^T$  و ضرب کرونگر<sup>۱۴</sup> است و  
(۳۳.۳)

$$\Theta_{11}(v) = \begin{bmatrix} \sin(v\frac{\pi}{\varphi}) & -\cos(v\frac{\pi}{\varphi}) \\ \cos(v\frac{\pi}{\varphi}) & \sin(v\frac{\pi}{\varphi}) \end{bmatrix}, \Theta_{12}(v) = \begin{bmatrix} \cos(v\frac{\pi}{\varphi}) & \sin(v\frac{\pi}{\varphi}) \\ -\sin(v\frac{\pi}{\varphi}) & \cos(v\frac{\pi}{\varphi}) \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{21}(v) = \begin{bmatrix} \sin(v\frac{\pi}{\varphi}) & \cos(v\frac{\pi}{\varphi}) \\ -\cos(v\frac{\pi}{\varphi}) & \sin(v\frac{\pi}{\varphi}) \end{bmatrix}, \Theta_{22}(v) = \begin{bmatrix} -\cos(v\frac{\pi}{\varphi}) & \sin(v\frac{\pi}{\varphi}) \\ -\sin(v\frac{\pi}{\varphi}) & -\cos(v\frac{\pi}{\varphi}) \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{11} = X(A_0, v_0) \frac{\cos((v_0+v_M)\frac{\pi}{\varphi})}{\cos(v_0\frac{\pi}{\varphi})} - X(A_0, 1) \frac{\sin(v_M\frac{\pi}{\varphi})}{\cos(v_0\frac{\pi}{\varphi})} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ [\varepsilon_{ij} k^{\nu} \bar{v}^{\nu} I_{\nu} \otimes (D_A D_A^T)] \right\}$$

$$\Omega_{12} = \begin{bmatrix} I_{\nu} \otimes (E_A P_{11})^T & I_{\nu} \otimes (E_A P_{12})^T & I_{\nu} \otimes (E_A P_{21})^T & I_{\nu} \otimes (E_A P_{22})^T \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{22} = -diag(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}) \otimes I_{\nu n^2}$$

قضیه ۲.۲.۳. [۵۶]: سیستم مرتبه کسری (۳.۳) با ورودی  $u = Kx$  پایدار مجانبی است اگر یک ماتریس مثبت معین  $Q \in R^{n \times n}$ ، یک ماتریس  $X \in R^{n \times n}$  و چهار ثابت عددی  $\nu_i > 0$ ،  $i = 1, 2$  و  $\mu_i > 0$  وجود داشته باشند که در رابطه (۳۴.۳) صدق کنند.

$$Sym\{A_0 Q + B_0 X\} < 0$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (34.3)$$

که در آن

$$\Phi_{11} = Y(A_0, B_0, v_0) \frac{\cos((v_0+v_M)\frac{\pi}{\varphi})}{\cos(v_0\frac{\pi}{\varphi})} - Y(A_0, B_0, v_0) \frac{\sin(v_M\frac{\pi}{\varphi})}{\cos(v_0\frac{\pi}{\varphi})}$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \left\{ [\mu_j k^{\nu} \bar{v}^{\nu} I_{\nu} \otimes (D_A D_A^T) + \nu_j k^{\nu} \bar{v}^{\nu} I_{\nu} \otimes (D_B D_B^T)] \right\}$$

$$\Phi_{12} = \begin{bmatrix} I_{\nu} \otimes (E_A Q)^T & I_{\nu} \otimes (E_A Q)^T & I_{\nu} \otimes (E_A Q)^T & I_{\nu} \otimes (E_A Q)^T \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{22} = -diag(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2) \otimes I_{\nu n + 2nm}$$

$$Y(A_0, B_0, v_0) = \sum_{i=1}^2 Sym\{\Theta_{i1}(v_0) \otimes (A_0 Q + B_0 X)\} < 0$$

$$Y(A_0, B_0, 1) = \sum_{i=1}^2 Sym\{\Theta_{i1}(1) \otimes (A_0 Q + B_0 X)\} < 0$$

توجه شود  $\Theta_{i,j}$ ،  $i, j = 1, 2$  در رابطه (۳۳.۳) تعریف شده و ماتریس پسخورد حالت پایدارساز از رابطه  $K = XQ^{-1}$  بدست می آید.

چنانچه در مرتبه مشتق نامعینی نباشد قضایای ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ با در نظر گرفتن مرتبه مشتق معین، برقرار است که این نتایج در [۵۷] مورد بحث قرار گرفته است. در [۵۹]، سیستم (۲۸.۳) با فرض  $\Delta A = \bar{A} - \underline{A}$  و  $\Delta B = \bar{B} - \underline{B}$  که رابطه (۳۵.۳) برای

<sup>14</sup>Kronecker product

نامعینی ها بر قرار است، در نظر گرفته شده است.

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} = M \Delta(\varsigma) \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \quad (35.3)$$

$$\Delta(\varsigma) = F(\varsigma) [I + JF(\varsigma)]^{-1}$$

که در آن  $J \in R^{m_0 \times m_0}$  ماتریس های معین و  $M \in R^{n \times m_0}$ ,  $N_1 \in R^{m_0 \times n}$ ,  $N_2 \in R^{m_0 \times m}$  ماتریس نامعین  $F(\varsigma)$  در  $Sym F(\varsigma) \geq 0$  صدق می کند که  $\varsigma \in \omega'$  و  $\omega'$  یک مجموعه بسته است.

در این مقاله ابتدا ورودی را صفر در نظر گرفته و شرط پایداری مقاوم را برای  $0 < v < 1$  بدست می آورد.

قضیه ۳.۲.۳. [۵۹]: اگر  $\theta = \frac{(1-v)\pi}{4}$  و  $r = e^{\theta i}$  باشد، چنانچه یک ماتریس هرمیشین مثبت معین  $X = X^* > 0$ ,  $X \in C^{n \times n}$  و یک عدد حقیقی  $\mu > 0$  وجود داشته باشند به صورتی که در رابطه زیر صدق کند، آنگاه سیستم (۲۸.۳) با فرضیات (۳۵.۳) و  $0 < v < 1$  پایدار مجانبی است.

$$\begin{bmatrix} Sym \{A(rX + \bar{r}\bar{X})\} & M & (rX + \bar{r}\bar{X})^T N_1^T \\ M & -\mu I & \mu I \\ (rX + \bar{r}\bar{X}) N_1 & \mu I & -Sym \{J\} - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (36.3)$$

که در آن  $\bar{M}$  مزدوج  $M$  است.

چنانچه ورودی کنترل به صورت  $u(t) = Kx$  به سیستم (۲۸.۳) با فرضیات (۳۵.۳) اعمال شود، سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\nu x &= (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u, \quad u = Kx. \\ {}^C D_t^\nu x &= (A + BK + \Delta A + \Delta BK)x. \end{aligned} \quad (37.3)$$

قضیه زیر شرط پایداری مجانبی را برای سیستم (۳۷.۳) ارائه می دهد.

قضیه ۴.۲.۳. [۵۹] چنانچه  $\theta = \frac{(1-v)\pi}{4}$  و  $r = e^{\theta i}$  باشد، اگر ماتریس های  $X = X^* > 0$ ,  $X \in C^{n \times n}$  و یک عدد حقیقی  $\mu > 0$  وجود داشته باشند به صورتی که در رابطه (۳۸.۳) صدق کند، آنگاه سیستم (۳۷.۳) با فرضیات (۳۵.۳) و  $0 < v < 1$  پایدار مجانبی است.

$$\begin{bmatrix} Sym \{A(rX + \bar{r}\bar{X})\} + B\hat{K} & M & (rX + \bar{r}\bar{X})^T N_1^T + \hat{K}^T N_2^T \\ M & -\mu I & \mu I \\ (rX + \bar{r}\bar{X}) N_1 + N_2 \hat{K} & \mu I & -Sym \{J\} - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (38.3)$$

توجه شود که ماتریس پسخورد از رابطه  $K = \hat{K} (rX + \bar{r}\bar{X})^{-1}$  برای پایدار سازی سیستم (۳۷.۳) بدست می آید.

تحقیقات زیادی بر روی چند جمله ای های مرتبه کسری با وجود نامعینی نیز صورت پذیرفته است [۵۱، ۶۱] که از توضیح مبسوط آن صرف نظر می شود.

### ۲.۲.۳ پایداری مقاوم با کنترل کننده مد لغزشی

کنترل مد لغزشی به علت قانون مند بودن برای حفظ پایداری و عملکرد یکنواخت در رویارویی با بی دقتی های مدل سازی، یک کنترل کننده توانمند به شمار می رود. در دستورات عمل طراحی کنترل کننده مد لغزشی، یک قانون کنترل چنان انتخاب می گردد که شرط لغزش برقرار باشد اما برای اینکه عدم دقت موجود در سیستم کنترل شود، بایستی کنترل کننده بر روی سطح لغزش ناپیوسته باشد که این امر باعث لرزش می گردد. واضح است که لرزش در عمل مطلوب نیست چرا که باعث تلفات گرمایی فراوان در مدارات تریکی و ساییده شدن اجزای تحریک مکانیکی به دلیل افزایش فعالیت کنترلی می شود [۳۷]، [۳۸]. به بیان دیگر، کنترل مد لغزشی یک استراتژی کنترل غیر خطی است که شامل تلاش کنترلی می باشد که سیستم را به سمت عملکردی با یک دینامیک از قبل تعریف شده محدود می کند. این دینامیک مطلوب سطح لغزش نامیده می شود. هنگامی که سیستم به سمت لغزش میل می کند به آن مد لغزشی گویند. کنترل مد لغزشی مرتبه کسری با سطح لغزش مرتبه صحیح یا کسری برای سیستم مرتبه کسری یا صحیح استفاده شده است.

معرفی و آموزش مد لغزشی مرتبه کسری در [۶۲] به طور مبسوط شرح داده شده است که خلاصه آن به شرح ذیل می باشد.  
سیستم کلی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{v_i} x_i &= x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ {}^C D_t^{v_n} x_n &= f(\cdot) + g(\cdot)u(t) \end{aligned} \quad (39.3)$$

که در آن مشتق مرتبه  $v_i$  در بازه  $0 < v < 1$  قرار دارد و  $f(\cdot)$  و  $g(\cdot)$  توابعی از متغیرهای حالت هستند. چنانچه مسیر حالت مطلوب  $d$  به صورت زیر تعریف شود.

$$d_i = {}^C D_t^{Q_i} r, \quad Q_i = \sum_{k=1}^{i-1} v_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (40.3)$$

ک در آن  $r$  تابعی پیوسته است. با تعریف خطا به صورت  $e_i = x_i - d_i$  می توان مسئله رد یابی را با در نظر گرفتن سطح لغزش به صورت زیر حل نمود.

$$\begin{aligned} s^{v_n} &= e_n^{v_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i^{v_i} = f(\cdot) + g(\cdot)u - d_n^{v_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i^{v_i} \\ &= -\zeta \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (41.3)$$

که در آن  $\zeta > 0$ .

آنگاه کنترل مد لغزشی به صورت زیر خواهد بود.

$$u = \frac{d_n - f(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i^{v_i} - \zeta \sin g(s)}{g(\cdot)} \quad (42.3)$$



روش ذکر شده، یک روش کلی است و می توان مسائل رد یابی یا همزمان سازی را با همین دیدگاه حل نمود [۶۳].

سیستم (۴۳.۳) که در آن پارامتر  $A$  دارای نامعینی  $\mu, \mu > 0$  است، مورد نظر مقالاتی چون [۲۹، ۶۴] است.

$${}^C D_t^v x = (A + \Delta A)x + g(t, x) + Bu(t) \quad 0 < v < 1. \quad (43.3)$$

در [۶۴]، پایداری سیستم نامعین (۴۳.۳) با استفاده از کنترل مد لغزشی با وجود سطح لغزش  $s = Cx$  مورد مطالعه قرار گرفته است، که در آن  $C \in R^{1 \times n}$ . برای ترم غیر خطی  $g(t, x)$  رابطه (۴۴.۳) برقرار است.

$$\|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad (44.3)$$

که در آن  $L > 0$  ثابت لیشیتز تابع  $g(t, x)$  است.

قضیه ۵.۲.۳. [۶۴]: چنانچه به سیستم شامل نامعینی (۴۳.۳) قانون کنترل  $u = Mx + K \text{sign}(s)$  اعمال گردد، حالت‌های سیستم حلقه بسته به سطح لغزش  $s = 0$  می رسند و سیستم حلقه بسته در ناحیه  $\|x\| < r$  و  $r > 0$  پایدار مجانبی خواهد بود که ماتریس پس‌خورد  $K$  در نامساوی زیر صدق می کند.

$$PA + A^T P + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) P^T P + \varepsilon_3 PBMM^T B^T P + \varepsilon_4 PBKK^T B^T P + \left(\frac{\mu^2}{\varepsilon_1} + \frac{L^2}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon_4 r^2}\right) I + 2B_1 P < 0 \quad (45.3)$$

که در آن  $B_1$  در رابطه (۲۸.۲) صدق می کند،  $I$  ماتریس همانی با ابعاد مناسب،  $\varepsilon_i > 0$  برای  $i = 1, 2, 3, 4$   $\text{sign}^T(s) \times \text{sign}(s) \leq \alpha^2$

همچنین قضیه زیر برای استفاده آسان از نتایج بالا برای تعیین جواب، ضروری به نظر می رسد. با تغییر متغیر  $P^{-1} = Z, R = M^T M$  و  $Q = K^T K$  مسئله را می توان به صورت LMI تبدیل کرد.

قضیه ۶.۲.۳. [۶۴]: اگر ثابت های  $\varepsilon_i > 0$  برای  $i = 1, 2, 3, 4$  و ماتریس های  $W_1$  و  $W_2$  با ابعاد مناسب وجود داشته باشند که در رابطه LMI زیر صدق کند، آنگاه سیستم (۴۳.۳) با سیگنال کنترل ورودی  $u = Mx + K \text{sign}(s)$  در ناحیه  $\|x\| < r, r > 0$  پایدار مجانبی خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} \Psi & \mu Z & LZ & Z & \frac{\alpha}{r} Z \\ \mu Z & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ LZ & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 \\ \frac{\alpha}{r} Z & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} < 0 \quad (46.3)$$

که در آن  $W_2 = \varepsilon_4 Q$  و  $W_1 = \varepsilon_3 R, \Psi = AZ + ZA^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) I + BW_1 B^T + BW_2 B^T + 2B_1 Z$

چنانچه فرض روی  $\Delta A$  در سیستم (۴۳.۳) به صورت زیر باشد.

$$\Delta A = DF(t)N \quad (۴۷.۳)$$

که در آن  $N$  و  $D$  ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب و کران بالای تابع نامشخص  $F(t)$  به صورت (۴۸.۳) است.

$$\|F(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0 \quad (۴۸.۳)$$

قضیه پایداری با در نظر گرفتن (۴۷.۳) در ادامه آورده شده است.

قضیه ۷.۲.۳. [۲۹]: سیستم (۴۳.۳) با سطح لغزشی به صورت  $s = C_1 x + C_2 z$  که در آن  ${}^C D_t^\nu z = Kx - z$  دینامیک حالت های کمکی،  $C_1, C_2$  و  $K$  ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب را سیستم تحت سیگنال کنترل ورودی  $u(t) = -(C_1 B)^{-1} [(C_1 A + C_2 K + C_1) x + C_1 g(t, x) + \bar{u}]$  به سمت صفر میل خواهد کرد که در آن  $\bar{u} = (\|C_1 D\| \|Nx\| + B_1 + 1) \text{sign}(s) - s$ .

قضیه ۸.۲.۳. [۲۹]: دینامیک مد لغزشی روی سطح لغزش پایدار مجانبی است اگر دو ماتریس متقارن مثبت  $P_{i1}, i = 1, 2$  و دو ماتریس پاد متقارن  $P_{i2}, i = 1, 2$  وجود داشته باشند به طوری که (۴۹.۳) برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ -P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{22} & P_{21} \end{bmatrix} > 0 \quad (۴۹.۳)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0,$$

که در آن  
(۵۰.۳)

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym} \left\{ \Theta_{ij} \otimes \left( (-C_1^{-1} C_2 K - I) P_{ij} \right) \right\} \\ \Omega_{12} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} I_2 \otimes D & \varepsilon_{12} I_2 \otimes D & \varepsilon_{21} I_2 \otimes D & \varepsilon_{22} I_2 \otimes D & I_2 \otimes W_{11}^T & I_2 \otimes W_{12}^T & I_2 \otimes W \\ \varepsilon_{21} I_2 \otimes D & \varepsilon_{22} I_2 \otimes D & I_2 \otimes W_{11} & I_2 \otimes W_{12} & I_2 \otimes W & I_2 \otimes W_{21} & I_2 \otimes W_{22} \end{bmatrix} \\ \Omega_{22} &= -\text{diag}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}) \otimes I_{2n} \\ W_{ij} &= N P_{ij}, i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

همچنین،  $\Theta_{ij}$  در رابطه (۳۳.۳) تعریف شده است.

چنانچه برای ماتریس ورودی  $B$ ، نامعینی  $\Delta B$  در نظر بگیریم سیستم (۴۳.۳) به صورت زیرتبدیل می شود.

$${}^C D_t^\nu x = (A + \Delta A) x + g(t, x) + (B + \Delta B) u(t) \quad 0 < \nu < 1. \quad y(t) = Cx \quad (۵۱.۳)$$

که در آن  $C \in R^{1 \times n}$  یک ماتریس ثابت است و  $y(t)$  خروجی سیستم است. برای این سیستم با وجود فرضیات زیر، کنترل مد لغزشی پایدارساز در [۶۵] طراحی شده است.

فرض ۱. ترم غیر خطی نامعلوم  $g(t, x)$  و دینامیک های مدل نشده  $\Delta A$  در رابطه زیر صدق می کنند.

$$\Delta Ax + g(t, x) = Bf(t, x), \quad \|f(t, x)\| \leq \rho(t, y) \quad (52.3)$$

که در آن  $\rho(t, y)$  یک تابع عددی شناخته شده است. فرض ۲. برای نامعینی  $\Delta B$  رابطه زیر برقرار است.

$$\Delta B = B\Delta_1 F, \quad \|\Delta_1\| < \mu, \quad \|\Delta_1 F\| < \gamma, \quad 0 \leq \mu < 1. \quad (53.3)$$

که در آن  $F$  یک ماتریس حقیقی ثابت با ابعاد مناسب،  $\Delta_1$  قسمت نامعین ولی محدود،  $\mu$  و  $\gamma$  اعداد نامنفی هستند.

برای سیستم (۵۱.۳) کنترل کننده به صورت (۵۴.۳) در نظر گرفته شده است [۶۵].

$$\begin{cases} {}^C D_t^\nu z = A_c z + B_c y \\ u = C_c z + D_c y + u_n \end{cases} \quad (54.3)$$

در آن  $z$  حالت های کنترل کننده،  $A_c \in R^{r \times r}$ ،  $B_c \in R^{r \times m}$ ،  $C_c \in R^{1 \times r}$  و  $D_c \in R^{1 \times m}$  ماتریس های ثابت مربوط به دینامیک های کنترل کننده هستند. همچنین  $u_n$  قسمت غیر خطی سیگنال کنترل ورودی که مربوط به کلیدزنی است و به صورت (۵۵.۳) تعریف می شود.

$$u_n = -\frac{f_n(t)}{1-\gamma} \cdot \frac{s}{\|s\|}, \quad (55.3)$$

که در آن  $s$  متغیر سطح لغزش که تابع  $(y, z)$  بوده و  $f_n$  یک تابع عددی مثبت است که با (۵۶.۳) تعریف می شود.

$$f_n(t) = \nu + \varepsilon + \|g(t, x)\| + \gamma \|C_c z + D_c y\|, \quad (56.3)$$

که در آن  $\nu > 0$  و  $\varepsilon > 0$ .

برای تسهیل در روند اثبات، نویسندگان سیستم مورد بررسی (۵۱.۳) و کنترل کننده (۵۴.۳) را به صورت یک دینامیک در نظر گرفته اند. بنابراین سیستم حلقه بسته به صورت

(۵۷.۳) تبدیل می شود.

$$\Delta B = B\Delta_1 F, \Delta B u = Bp, q = Fu$$

$$\begin{bmatrix} {}^C D_t^v x \\ {}^C D_t^v z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \circ \end{bmatrix} (p + f + u_n), \quad (57.3)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} FD_c C & FC_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + Fu_n.$$

که در آن  $p = \Delta_1 q$ .

با تغییر متغیر به صورت  $X = \begin{bmatrix} x^T & z^T \end{bmatrix}^T$  و  $Y = \begin{bmatrix} y^T & z^T \end{bmatrix}^T$  سیستم حلقه بسته به صورت (58.3) قابل باز نویسی است.

$$\begin{aligned} {}^C D_t^v X &= A_{cl} X + B_{cl}(p + u_n + f), \\ Y &= C_{cl} X, \\ q &= \begin{bmatrix} FD_c C & FC_c \end{bmatrix} X + Fu_n \end{aligned} \quad (58.3)$$

که در آن

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} B \\ \circ \end{bmatrix}, \quad C_{cl} = \begin{bmatrix} C & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix},$$

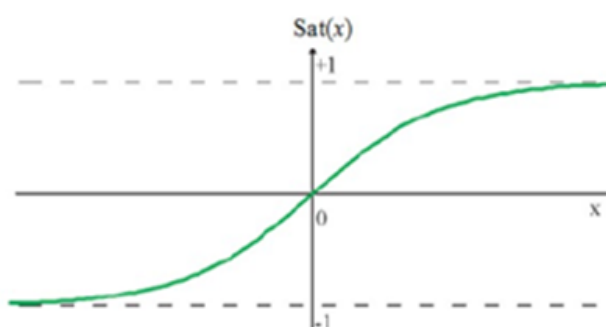
قضیه ۹.۲.۳. [۶۵]: چنانچه کران بالای  $\Upsilon$  در قضیه ۲.۷.۲ به صورت (۲۸.۲) باشد و سیستم حلقه بسته (58.3) را با وجود فرضیات (52.3) و (53.3) در نظر بگیریم، با اعمال کنترل کننده (54.3) - (56.3) مسیر حالت سیستم به سمت سطح لغزش  $s = Ky$  در زمان معلوم خواهد رفت و پایداری مجانبی مبدا  $X = \circ$  برای سیستم مورد بررسی قابل اثبات است.

از روش کنترل مد لغزشی می توان برای طراحی رویتگر پایدار نیز استفاده کرد [۶۶، ۶۷].

## ۳.۳ اشباع

بر اساس دانش و تحقیقات نگارنده، مقالات موجود در زمینه اشباع، محدود می باشد که در اکثر آنها از کنترل پس خورد حالت استفاده شده است [۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸] و تنها در [۸۰، ۸۱] از کنترل کننده گام به عقب تطبیقی استفاده شده است. شکل تابع اشباع را در شکل ۲-۳ مشاهده می کنید. اولین مقالات [۶۸، ۶۹]، در سال ۲۰۱۳ بر روی سیستم های خطی مرتبه کسری با المان اشباع انجام شده است که در آن نویسندگان با استفاده از شرط قطعی و لم گرانوال - بلمن<sup>۱۵</sup> تحلیل پایداری را بر روی

<sup>15</sup>Grönwall-Bellman



شکل ۲.۳: نمودار تابع اشباع

سیستم مرتبه کسری با مدل

$${}^C D_t^\nu x(t) = Ax(t) + B \text{sat}(u) \quad (۵۹.۳)$$

انجام داده اند که مرتبه مشتق در بازه  $0 < \nu < 1$  قرار دارد.  $x \in R^n$  و  $u \in R^m$  به ترتیب بردار حالتها و بردار ورودی هستند، ماتریس های  $A$  و  $B$  ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب و تابع اشباع به صورت زیر تعریف شده است.

$$\text{sat}(u_i) = \text{sign}(u_i) \min(u_{oi}, |u_i|) \quad (۶۰.۳)$$

$u_{oi} \in R_+$  نمایانگر سطح اشباع مربوط به  $i$  امین ورودی کنترل کننده است. با در نظر گرفتن  $K \in R^{m \times n}$ ،  $u = Kx$  سیستم حلقه بسته به صورت زیر می باشد.

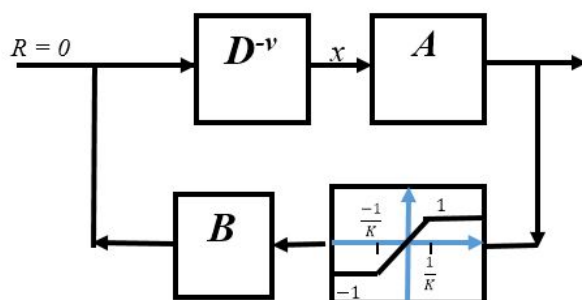
$${}^C D_t^\nu x(t) = Ax(t) + B \text{sat}(Kx), x(0) = x_0 \quad (۶۱.۳)$$

در این مرجع، ناحیه  $S(\gamma K, u_0) = \{x(t) \in R^n \mid -u_0 \leq \gamma K(t) \leq u_0\}$  به طوری که ماتریس  $\gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$  و  $0 \leq \gamma_i \leq 1$  برای  $i = 1, \dots, m$  تعریف شده است. با تکیه بر شرایط و خصوصیات قطاعی محدود<sup>۱۶</sup> چنانچه  $x$  متعلق به  $S(\gamma K, u_0)$  باشد آنگاه نامعادلات زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} (\text{sat}(Kx) - \gamma Kx)^T (\text{sat}(Kx) - \gamma Kx) &\leq 0 \\ \varphi(t, x)^T (\varphi(t, x) - (K - \gamma K)x) &\leq 0 \\ \|\varphi(t, x)\| &\leq \|K - \gamma K\| \|x\| \end{aligned} \quad (۶۲.۳)$$

که در آن  $\varphi(t, x) = \text{sat}(Kx) - \gamma Kx$  و  $\dot{x} = x(t)$ . شکل ۳-۳ نمایانگر سیستم حلقه بسته (۶۱.۳) است.

<sup>16</sup>sector bounded condition



شکل ۳.۳: سیستم حلقه بسته (۶۱.۳)

**قضیه ۱.۳.۳. [۶۸]:** در سیستم (۶۱.۳)، اگر ماتریس قطری  $\gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$  به  $0 < \gamma_i < \infty$  برای  $i = 1, \dots, m$  و ماتریس  $K$  وجود داشته باشند که شرط  $|\arg(\text{spec}(A + B\gamma K))| >$  برقرار باشد، آنگاه سیستم حلقه بسته فوق برای  $x_0 \in S(\gamma K, u_0)$  پایدار است، که در آن  $\text{spec}(A)$  نمایانگر طیف ماتریس  $A$  است.

در ادامه به کمک قضیه ۱.۳.۳، نویسندگان با تعریف ناحیه جذب به صورت (۶۳.۳) تخمینی از ناحیه پایداری ارائه کرده اند.

$$L \triangleq \left\{ x \in R^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = 0 \right\} \quad (۶۳.۳)$$

که در آن  $\varphi(t, x_0)$  نمایانگر مسیر حالت‌های سیستم با فرض شرایط اولیه  $x_0$  در زمان شروع حرکت است.

**قضیه ۲.۳.۳. [۶۸]:** در سیستم حلقه بسته (۶۱.۳) اگر دو ماتریس مثبت متقارن  $P_{k1} \in R^{n \times n}$ ،  $k = 1, 2$  و دو ماتریس پاد متقارن  $P_{k2} \in R^{n \times n}$ ،  $k = 1, 2$  یک ماتریس قطری  $\gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$  و یک ثابت  $\epsilon$  وجود داشته باشند که در نامعادلات زیر صدق کنند، آنگاه سیستم حلقه بسته برای هر  $x_0 \in S(\gamma K, u_0)$  پایدار است و ناحیه پایداری

<sup>17</sup> Skew-symmetric matrix

توسط  $B_\varepsilon \triangleq \{x \in R^n : x^T x < \varepsilon\}$  تخمین زده می شود.

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym} \{ \theta_{i,j} \otimes ((A + B\gamma K) P_{i,j}) \} < \circ$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon I & \gamma_l K_l^T \\ \gamma_l K_l & u_\circ^2 \end{bmatrix} \geq \circ$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ -P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} > \circ \quad (۶۴.۳)$$

$$\begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{22} & P_{21} \end{bmatrix} > \circ$$

که در آن  $\text{Sym} \{X\} = X^T + X$ .

همچنین، نمایانگر ضرب کرونگر<sup>۱۸</sup> و ماتریس های  $\theta_{i,j}, i, j = 1, 2$  به صورت (۶۵.۳) تعریف می شوند.

$$\theta_{11} = \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi v}{\sqrt{v}}) & -\cos(\frac{\pi v}{\sqrt{v}}) \\ \cos(\frac{\pi v}{\sqrt{v}}) & \sin(\frac{\pi v}{\sqrt{v}}) \end{bmatrix} = \theta_{21}^T, \theta_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi v}{\sqrt{v}}) & \sin(\frac{\pi v}{\sqrt{v}}) \\ -\sin(\frac{\pi v}{\sqrt{v}}) & \cos(\frac{\pi v}{\sqrt{v}}) \end{bmatrix} = -\theta_{21}^T \quad (۶۵.۳)$$

برای بیشینه سازی ناحیه پایداری، مسئله بهینه سازی کمینه سازی  $\varepsilon$  مطرح شده است.

$$\text{Min } \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym} \{ \theta_{i,j} \otimes ((A + B\gamma K) P_{i,j}) \} < \circ$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon I & \gamma_l K_l^T \\ \gamma_l K_l & u_\circ^2 \end{bmatrix} \geq \circ$$

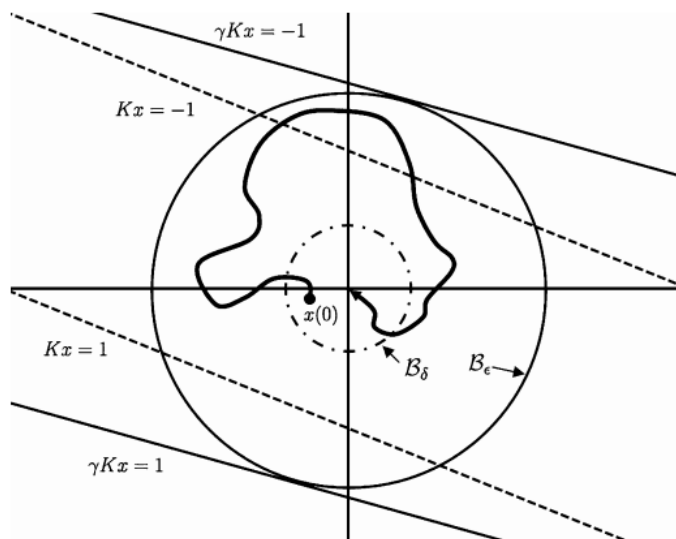
$$\text{St : } \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ -P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} > \circ \quad (۶۶.۳)$$

$$\begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{22} & P_{21} \end{bmatrix} > \circ$$

همچنین نویسندگان با در نظر گرفتن مشخصات  $v = 0.7$ ،  $A = \begin{bmatrix} 0.7 & -1/4 \\ -0.2 & 1/5 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $\varepsilon = 0.4326$  مقدار (۶۶.۳) را بدست آورده و حل مسئله بهینه سازی مطرح شده در (۶۶.۳) مقدار  $\varepsilon = 0.4326$  را بدست آورده و

<sup>18</sup>Kronecker

ناحیه جذب برای مدل سیستم (۶۱.۳) را تخمین زده اند که شکل ۴-۳ این ناحیه را نشان می دهد.



شکل ۴.۳: تخمینی از ناحیه پایداری در [۶۸]



در [۷۰] با استفاده از تابع لیاپانوف

$$V = \frac{1}{\gamma} x^T P x \quad (۶۷.۳)$$

شرط لازم و کافی را برای پایداری سیستم (۶۱.۳)، با استفاده از قانون لایبیز در سیستمهای مرتبه کسری به دست آمده است. در روند اثبات از رابطه لپشیتز به صورت (۶۸.۳) استفاده شده است.

$$|Sat(Kx_1) - Sat(Kx_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2| \quad (۶۸.۳)$$

که در آن  $\lambda > 0$  ثابت لپشیتز است.

قضیه ۳.۳.۳. [۷۰]: سیستم (۶۱.۳) پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس مثبت معین  $P > 0$  و دو عدد  $\sigma > 0$  و  $\lambda > 0$  وجود داشته باشند که رابطه زیر صدق کند.

$$PA - \sigma PBB^T P - (\sigma^{-1}(\lambda)^2 + \lambda)I < 0 \quad (۶۹.۳)$$

که در آن  $I$  ماتریس همانی با ابعاد مناسب است.

با کمک این قضیه ناحیه جذب به صورت  $E(P, \mu) = \{x \in R^n : x^T P x \leq \mu\}$  در نظر گرفته شده و با استفاده از الگوریتم زیر تخمینی از ناحیه جذب بدست می آید.

### الگوریتم ۱

(۱) کنترل کننده  $K$  به نحوی تعیین شود که  $\arg(\text{spec}(A + BK)) > \frac{v\pi}{\gamma}$

(۲) ثابت لپشیتز تعیین شود.

(۳) عبارت  $\mu = \text{Min} \frac{w_{oi}^*}{K^T P^{-1} K}$  محاسبه شود.

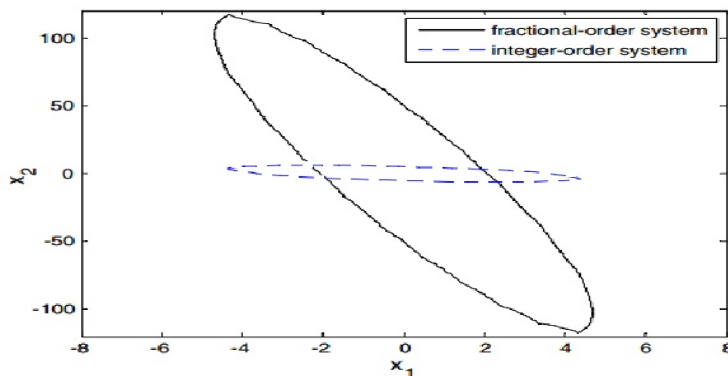
همچنین نویسندگان، با در نظر گرفتن مشخصات  $v = 0.6$ ،  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، ناحیه جذب را با استفاده از الگوریتم ذکر شده در شکل ۵-۳ تخمین زده اند و با ناحیه جذب سیستم مرتبه صحیح مقایسه کرده اند. همان طور که مشاهده می شود ناحیه جذب برای سیستمهای مرتبه کسری  $0 < v < 1$ ، بزرگتر از سیستمهای مرتبه صحیح می باشد.

در [۷۱]، نویسندگان با کمک تابع لیاپانوف (۶۷.۳) شرط لازم و کافی پایداری را برای سیستم (۷۰.۳) با وجود غیر خطی  $w(x, t)$  به دست آورده اند.

$${}^C D_t^v x(t) = Ax(t) + B \text{sat}(u) + Dw(x, t), x(0) = x_0, \quad 0 < v < 1 \quad (۷۰.۳)$$

که در آن،  $D$  ماتریس ثابت با ابعاد مناسب و غیر خطی  $w(x, t)$  در شرط (۲۴.۳) با ثابت لپشیتز  $\lambda_w > 0$  صدق می کند.

$$|w(x_2, t) - w(x_1, t)| \leq \lambda_w |x_2 - x_1| \quad (۷۱.۳)$$



شکل ۵.۳: تخمینی از ناحیه پایداری در [۷۰]

چنانچه کنترل کننده پسخورد حالت  $u = Kx$  را به سیستم (۷۰.۳) اعمال کنیم سیستم حلقه بسته به صورت (۷۲.۳) می باشد.

$${}^C D_t^\nu x(t) = Ax(t) + B \text{sat}(Kx) + Dw(x, t), x(0) = x_0 \quad (72.3)$$

قضیه ۴.۳.۳. [۷۱]: سیستم (۷۲.۳) پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس مثبت معین  $P$  و پنج عدد مثبت  $\delta, l_w, r, s_1, \lambda$  وجود داشته باشند که رابطه زیر برقرار باشد.

$$PA + rPBB^T P + s_1 PDD^T P + (r^{-1}\lambda^2 + s_1^{-1}l_w^2 + \delta)I < 0 \quad (73.3)$$

با تغییر متغیرهای  $\sigma = r^{-1}\lambda^2 + s_1^{-1}l_w^2 + \delta$  و  $Q = P^{-1}$ ، مسئله بهینه سازی محدب زیر برای یافتن پارامتر بهینه سازی  $t$ ، که در آن  $|w| \leq \frac{1}{t}$  پیشنهاد شده است. مسئله بهینه سازی مطرح شده در [۷۱] عبارتست از:

$$\begin{aligned} & \text{Min } t \\ & \text{st : } \begin{cases} Q > 0, r > 0, s_1 > 0, \sigma > 0, t > 0 \\ KQK^T < t \\ AQ + rBB^T + s_1 DD^T + \sigma Q^T Q < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (74.3)$$

در مقاله [۷۱]، نویسندگان با در نظر گرفتن سیستم (۷۲.۳) و پارامترهای

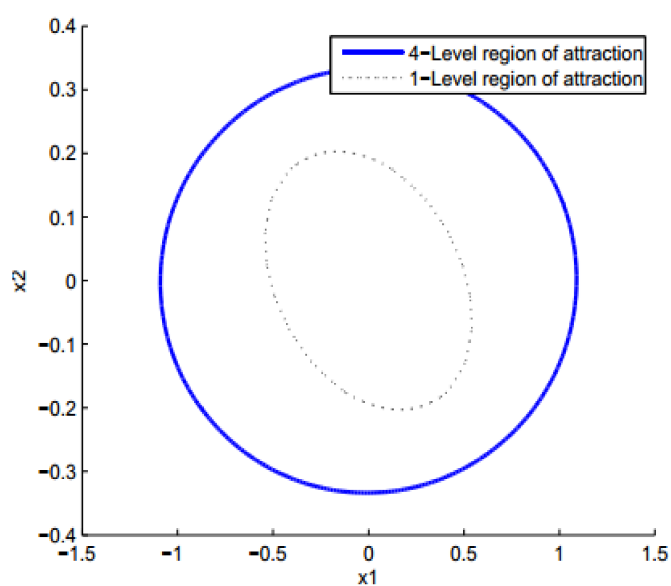
$$A = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} e^{-2x_1} \\ e^{-x_1} \end{bmatrix}$$

ناحیه جذب و ناحیه حذف اغتشاش تخمین را زده اند. شکل ۶-۳ تخمین ناحیه جذب و شکل ۷-۳ تخمین ناحیه حذف اغتشاش را نشان می دهد.

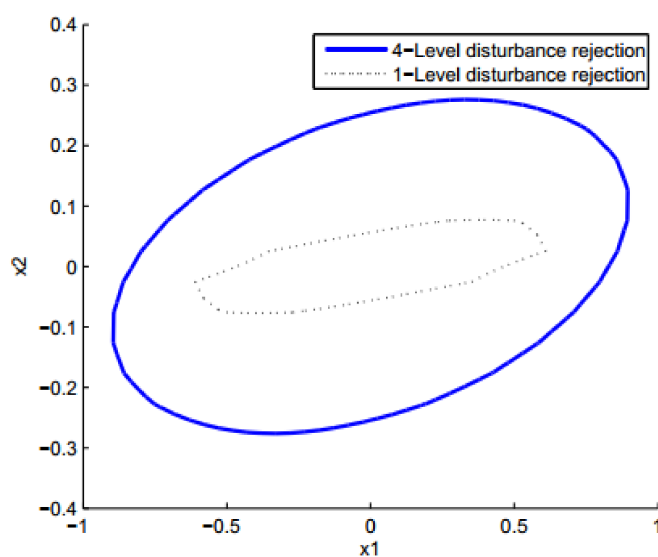
که در آن ها،  $r = \|Kx\|$  نشان دهنده سطح  $r$  است.

در ادامه افزایش ناحیه حذف اغتشاش، در [۷۲] از ماتریس پسخورد کمکی  $H$  با ابعاد

مناسب استفاده شده است که کنترل پسخورد کمکی همواره در ناحیه  $L(H) : \{x | x \in \text{naheh}\}$



شکل ۶.۳: تخمین ناحیه جذب در [۷۱]



شکل ۷.۳: تخمین ناحیه حذف اغتشاش [۷۱]

$\{1\} \leq |Hx| \leq R^n$  قرار دارد. همچنین، کنترل کننده پسخورد حالت، به صورت محدب با کنترل کننده اصلی قرار دارد که رابطه ترکیب محدب آن به صورت زیر است.

$$Co(s, K, H) = \begin{bmatrix} s_1 k_1 + (1 - s_1) h_1 \\ \vdots \\ s_m k_m + (1 - s_m) h_m \end{bmatrix} \quad (75.3)$$

که در آن  $k_i$  و  $h_i$  به ترتیب سطر  $i$  ام ماتریس های  $K$  و  $H$  هستند. همچنین  $s \in \mathbb{R}^m$  یک بردار با درایه های صفر و یک است. بنابراین نهایتاً تحلیلی مقاوم حذف اغتشاش، با وجود پسخورد کمکی با مسائل بهینه سازی محدب ارائه شده است.

در این مقاله با تعریف ناحیه حذف اغتشاش به صورت  $E(P, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq 1\}$  به سه پرسش زیر پاسخ داده است.

۱. در حضور اغتشاش، ناحیه حذف اغتشاش چگونه تخمین زده می شود؟
  ۲. بزرگترین ناحیه ناوردای<sup>۱۹</sup> موجود با وجود اغتشاش به کمک مسئله بهینه سازی محدب کدام است؟
  ۳. کوچکترین ناحیه ناوردای موجود با وجود اغتشاش به کمک مسئله بهینه سازی محدب کدام است؟
- برای پاسخ دادن به سوالات مطرح شده قضیه ۵.۳.۳ مطرح شده است.

قضیه ۵.۳.۳. [۷۲]: سیستم (۷۲.۳) دارای ناحیه ناوردا به صورت  $E(P, 1)$  است اگر ماتریس مثبت معین  $P$  و ماتریس پسخورد کمکی  $H$  و سه عدد  $\varepsilon > 0, l_w > 0, \lambda' > 0$  وجود داشته باشد که رابطه زیر برقرار باشد.

$$PA + PBCo(s, K, H) + \varepsilon PDD^T P + (\varepsilon^{-1} l_w^2 + \lambda') I \leq 0. \quad (76.3)$$

همچنین برای پاسخ دادن به سوال دوم، حاصل ضرب عدد  $\kappa_1 > 0$  در ناحیه ناوردای موجود پیشنهاد شده است که عدد  $\kappa_1$  از مسئله بهینه سازی زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} & \text{Sup } \kappa_1 \\ & P > 0, \kappa_1 > 0, \varepsilon > 0, \lambda' > 0, l_w > 0, K, H \\ & \text{st: } \begin{cases} \kappa_1 x_1 \subset E(P, 1) \\ PA + PBCo(s, K, H) + \varepsilon PD^T DP + (\varepsilon^{-1} l_w^2 + \lambda') I < 0 \\ (-(- (A + BK))^{1-\nu})^T P + P(-(- (A + BK))^{1-\nu}) < 0 \\ E(P, 1) \subset L(H) \end{cases} \end{aligned} \quad (77.3)$$

که در آن  $x_1$  یک ناحیه ناوردا محدب از پیش تعیین شده است. قید های دوم و سوم مطرح شده در مسئله بهینه سازی، مربوط به شروط پایداری در حالت خطی و در حالت وجود ترم

<sup>19</sup> Invariant set

غیرخطی اشباع است و قید چهارم محدودیت روی ماتریس کنترل پسخورد کمکی است. همچنین برای پاسخ به سوال سوم، مسئله بهینه سازی زیر در [۷۲] پیشنهاد شده است.

$$\begin{aligned} & \text{Inf } \kappa_{\gamma} \\ & P > \circ, \kappa_{\gamma} > \circ, \varepsilon > \circ, \lambda' > \circ, l_w > \circ, K, H \\ & \text{st: } \begin{cases} \kappa_{\gamma} x_1 \subset E(P, 1) \\ PA + PBCo(s, K, H) + \varepsilon PD^T DP + (\varepsilon^{-1} l_w^2 + \lambda') I < \circ \\ (-(-(A + BK))^{\frac{1}{\gamma-v}})^T P + P(-(-(A + BK))^{\frac{1}{\gamma-v}}) < \circ \\ E(P, 1) \subset L(H) \end{cases} \end{aligned} \quad (78.3)$$

بنابراین،  $\kappa_{\gamma} x_1$  که  $\kappa_{\gamma} > \circ$ ، کوچکترین ناحیه ناوردای حذف اغتشاش را نتیجه می دهد و چنانچه حالت ها در مبدا قرار داشته باشند، در حضور اغتشاش تمامی مسیر های حالت در نزدیکی مبدا باقی خواهند ماند.

نویسندگان با در نظر گرفتن سیستم (۷۲.۳) با مرتبه مشتق  $v = \circ/6$ ، پارامترهای

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \circ & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\circ/5 \\ -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix}$$

و با انتخاب  $x_1$  به صورت یک دایره واحد، تخمینی از کوچکترین و بزرگترین ناحیه ناوردا در حضور اغتشاش که در شکل ۸-۳ نشان داده شده به دست آورده اند. در [۷۳] محدودیت اشباع در کنترل کننده در نظر گرفته نشده است بلکه این محدودیت بر روی غیر خطی  $w(t, x)$  در نظر گرفته شده است. بنابراین سیستم مورد مطالعه به صورت (۷۹.۳) می باشد.

$${}^C D_t^v x(t) = Ax(t) + Bu + Dsat(w) \quad (79.3)$$

که رابطه (۷۱.۳) برای غیر خطی  $w(t, x)$  برقرار است.

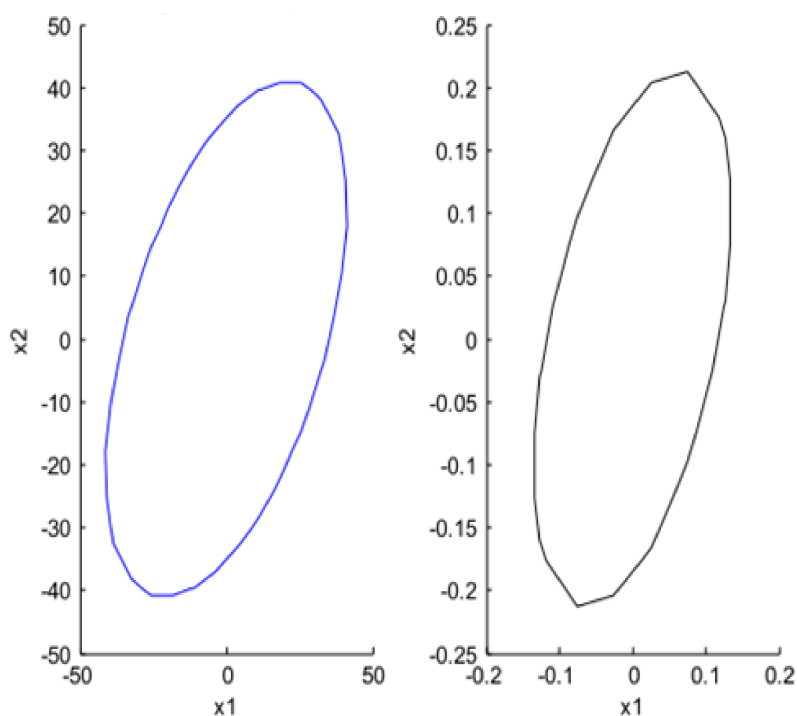
قضیه ۶.۳.۳. [۷۳]: سیستم (۷۹.۳) پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس مثبت معین  $P > \circ$  و دو عدد  $\lambda > \circ$  و  $\theta > \circ$  وجود داشته باشند به صورتی که نامساوی زیر برقرار باشد

$$PA_{cl} + \gamma PDD^T P + \theta I < \circ \quad (80.3)$$

که در آن  $A_{cl} = A + BK$ .

همچنین با استفاده از کمینه سازی درایه های قطر اصلی ماتریس  $P$ ، تخمینی از ناحیه حذف اغتشاش ارائه گردیده است. بنابراین مسئله بهینه سازی در [۷۳]، به صورت زیر پیشنهاد شده است.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \text{Trac}(P) \\ & P > \circ \\ & PA_{cl} + \gamma PDD^T P + \theta I < \circ \end{aligned} \quad (81.3)$$



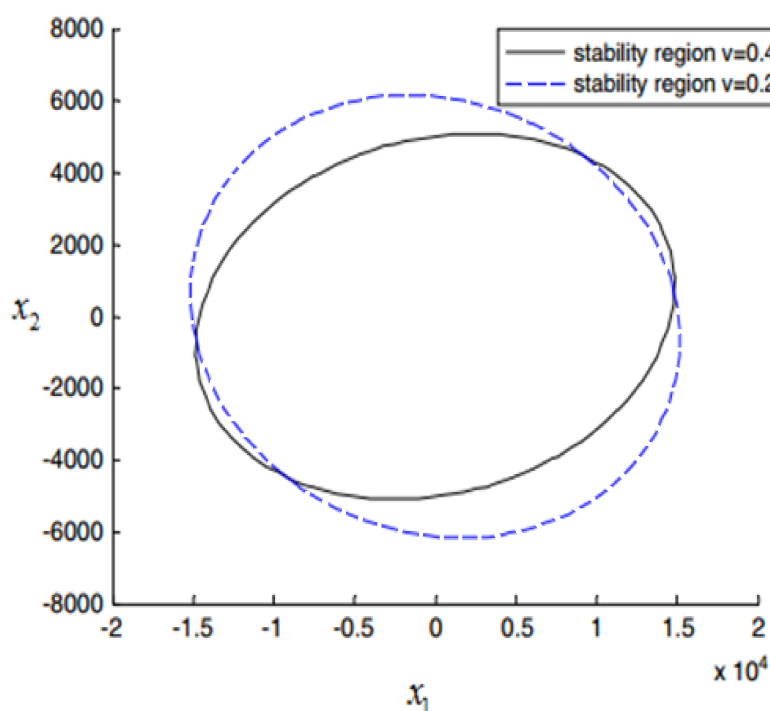
شکل ۸.۳: تخمین کوچکترین و بزرگترین ناحیه ناوردا در حضور اغتشاش [۷۲]

نویسندگان با در نظر گرفتن سیستم (۷۹.۳)، با پارامترهای زیر تخمینی از ناحیه ناوردا سیستم مورد بررسی بدست آورده اند که می توان این تخمین را در شکل ۹-۳ برای دو مرتبه مشتق  $v = 0.2$  و  $v = 0.4$  مشاهده کرد.

$$A = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.0006 & -13/2 & 0 \\ 0 & -0.014 & -16/64 & -32/2 \\ 1 & -0.0001 & -1/65 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -19 & -2/5 \\ -0.66 & -0.5 \\ 0.16 & -0.6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0.5e^{-x_1} \\ 0.25e^{-2x_1} \\ 0.5e^{-x_1} \\ 0.5e^{-x_1} \end{bmatrix}$$

در [۷۴] مشابه مقاله اول این رساله، سیستم (۶۱.۳) در نظر گرفته شده است و شرط پایداری برای این سیستم بدست آمده است. همچنین، با بکارگیری مسئله بهینه سازی مشابه مقاله [۷۲] برای ناحیه جذب، بزرگترین ناحیه ناوردا، به صورت زیر تخمین زده شده است.

$$\begin{aligned} & \text{Sup } \kappa_1 \\ & P > 0, \kappa_1 > 0, K, H \\ & \text{st: } \begin{cases} \kappa_1 x_1 \subset E(P, 1) \\ A^T P + PA + (BCo(s, K, H))^T P + PBCo(s, K, H) < 0 \\ E(P, 1) \subset L(H) \end{cases} \end{aligned} \quad (82.3)$$



شکل ۹.۳: تخمینی از ناحیه ناوردا در حضور اغتشاش [۷۳]

چنانچه مسئله بهینه سازی (۸۲.۳)، به  $LMI$  تبدیل شود، بایستی تغییر متغیر های  $\varepsilon = \frac{1}{\kappa_1}, Q = P^{-1}$  و صورت پذیرد. آنگاه مسئله بهینه سازی (۸۳.۳) حاصل می شود.

$$\begin{aligned}
 & \text{Inf } \varepsilon \\
 & Q > \circ, G \\
 & \text{st : } \begin{cases} \begin{bmatrix} \varepsilon R & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq \circ \\ Q A^T + A Q + Q (B C o(s, K, H))^T + B C o(s, K, H) Q < \circ \\ \begin{bmatrix} 1 & g_i \\ g_i^T & Q \end{bmatrix} \geq \circ \quad \text{for } i \in [1, m] \end{cases} \quad (83.3)
 \end{aligned}$$

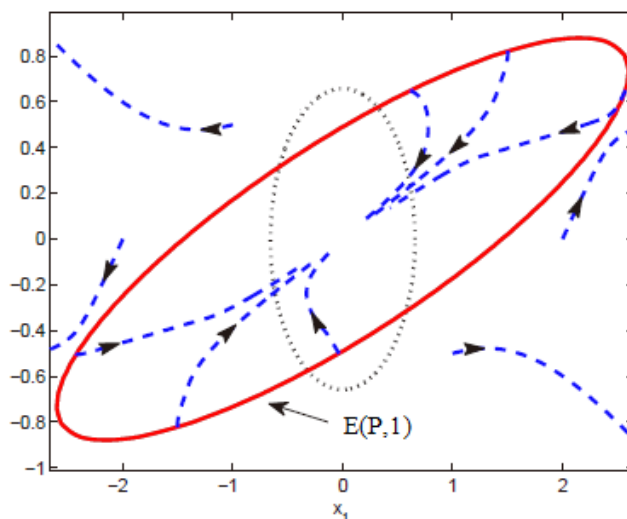
که در آن  $Q \in R^{n \times n}, G \in R^{m \times m}$  و  $x_1 = E(R, 1), R > \circ$ . همچنین  $g_i, i$  امین سطر از ماتریس  $G$  می باشد.

نویسندگان با انتخاب سیستم پیشنهادی در [۶۸] و حل مسئله بهینه سازی (۸۳.۳) تخمینی برای ناحیه جذب یافته اند.

در شکل ۹-۳ تخمین ناحیه جذب با پارامترهای  $\varepsilon = 6/4234$ ،

$$G = \begin{bmatrix} -2/5016 & -0/5664 \\ -1/3203 & -7/934 \end{bmatrix}$$

که بیضی خط چین، نتایج [۶۸] را نشان می دهد.  $P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4746 & -1/1655 \\ -1/1655 & 4/1530 \end{bmatrix}$



شکل ۱۰.۳: تخمین ناحیه ناورد در [۷۴]

و بیضی توپر، نتیجه حل (۸۳.۳) در [۷۴] است. در [۷۶]، برای سیستم (۶۱.۳) برای ماتریس های  $A$  و  $B$  نامعینی های  $\Delta A$  و  $\Delta B$  در نظر گرفته شده است

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} = MF_1(t) \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \quad (۸۴.۳)$$

که در آن ماتریس های  $M$ ،  $N_1$  و  $N_2$  ماتریس های ثابت هستند و  $F_1(t)$  ماتریسی متغیر و قابل اندازگیری است که در شرط زیر صدق می کند.

$$\|F_1(t)^T \times F_1(t)\| \leq 1 \quad (۸۵.۳)$$

در [۷۵] با کمک شکل تابع لیاپانوف محدب به صورت (۸۶.۳)، ناحیه جذبی به دست می آورد که متشکل از ترکیب محدب ماتریس های ثابت  $P_j, j = 1, \dots, N$  می باشد.

$$V = x^T (\sum_{j=1}^N \gamma_j P_j) x, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1 \quad (۸۶.۳)$$

که در آن  $P_j, j = 1, \dots, N$ .

قضیه ۷.۳.۳. [۷۵]: مجموعه ای از بیضی های  $E(P_j), j \in [1, N]$  و ماتریس کنترل پسخورد  $K$  موجود است اگر ماتریس پسخورد کمکی  $H_j \in R^{m \times n}$  که در ناحیه خطی تابع اشباع قرار دارد، وجود داشته باشد که در رابطه (۸۷.۳) صدق کند

$$A^T P_j + P_j A + (BCo(s, K, H))^T P_j + P_j BCo(s, K, H) < 0, j = 1, \dots, N \quad (۸۷.۳)$$



آنگاه ترکیب محدب مجموعه بیضی‌ها به صورت  $\sum_{j=1}^N \gamma_j = 1$ ،  $x^T (\sum_{j=1}^N \gamma_j P_j) x$  یک ناحیه ناوردای برای سیستم حلقه بسته (۶۱.۳) است.

همانند مرجع [۷۴]، بزرگترین ناحیه جذب توسط مسئله بهینه‌سازی برای  $j = 1, 2$  به دست آمده است. مسئله بهینه‌سازی برای بزرگترین ناحیه جذب به صورت (۸۸.۳) است.

$$\text{Sup } \kappa \quad (88.3)$$

$$\text{st : } \begin{cases} \kappa x_1 \subset E(P, \lambda) \\ (A + BCo(s, K, H))^T P_j + P_j (A + BCo(s, K, H)) < \circ \\ E(P, \lambda) \subset L(H) \end{cases}$$

با تغییر متغیرهای  $Q_j = (P_j)^{-1}$ ،  $\varepsilon = \frac{1}{\kappa}$  و  $G_j = H_j (P_j)^{-1}$ ، مسئله بهینه‌سازی (۸۸.۳) را به مسئله بهینه‌سازی محدب تبدیل می‌شود.

$$\text{Inf } \varepsilon \quad (89.3)$$

$$\text{st : } \begin{cases} Q_j > \circ, G_j \\ \begin{bmatrix} \varepsilon R & I \\ I & Q_j \end{bmatrix} \geq \circ \\ Q_j A^T + A Q_j + Q_j (BCo(s, K, H_j))^T + BCo(s, K, H_j) Q_j < \circ \\ \begin{bmatrix} \lambda & g_{i,j} \\ g_{i,j}^T & Q_j \end{bmatrix} \geq \circ \text{ for } i \in [1, m] \end{cases}$$

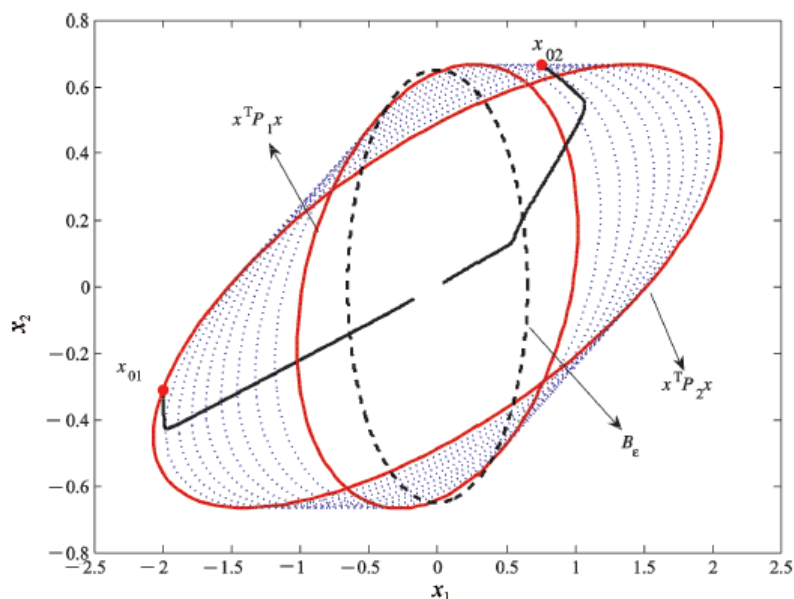
که در آن  $g_{i,j}$ ،  $i$  امین سطر از ماتریس  $G_j$  است و  $R$  در  $E(R, \lambda)$  صدق می‌کند که بیانگر ناحیه ناوردای مشخص است. نویسندگان با پذیرفتن سیستم توصیف شده در [۶۸] نتایج حاصل از روش پیشنهادی خود را در شکل ۱۱-۳ مقایسه کرده‌اند. در ۱۱-۳ بیضی خط چین  $B_\varepsilon$ ، نتیجه تخمین ناحیه ناوردای [۶۸]، و بیضی‌های توپر نتیجه تخمین ناحیه جذب توسط (۸۹.۳) است.

در [۷۸]، بحث وجود اغتشاشات خارجی مشابه مقاله [۷۷] است که تحلیل پایداری با وجود اغتشاش، در بکار بردن علامت کوچکتر مساوی اشتباه بزرگی رخ داده است که این نتایج با نتایج مقاله [۷۷] در تناقض آشکار است.

روند تحلیل پایداری [۷۹] مشابه مرجع [۷۵] می‌باشد. در حقیقت [۷۹] با اضافه کردن اغتشاش به سیستم مورد مطالعه [۷۵] و با در نظر گرفتن تابع لیپانوف (۸۶.۳)، تخمین کمینه برای ناحیه حذف اغتشاش به دست آورده است. معادله سیستم مورد مطالعه در این مقاله، با (۷۰.۳) توصیف می‌شود.

$$\|w(t, x)^T w(t, x)\| \leq 1 \quad (90.3)$$

محدودیت (۹۰.۳) بر روی غیر خطی  $w(t, x)$  وجود دارد.



شکل ۱۱.۳: تخمین ناحیه ناوردا در [۷۵]

**قضیه ۸.۳.۳. [۷۹]:** مجموعه ای از بیضی های  $E(P_j), j \in [1, N]$  و ماتریس کنترل پسخورد  $K$  موجود است اگر ماتریس پسخورد کمکی  $H_j \in R^{m \times n}$  که در ناحیه خطی تابع اشباع قرار دارد و یک عدد مثبت  $l_j$  وجود داشته باشند که در رابطه زیر صدق کند.

$$\text{Sym}\{A + \text{Co}(s, K, H_j)^T P_j\} + \frac{1}{l_j} P_j D D^T P_j + \frac{l_j}{\rho_j} P_j < \circ, \text{ for } i \in [1, 2^m], j \in [1, N]. \quad (91.3)$$

آنگاه، سیستم (۷۲.۳) دارای ناحیه ناورداي حذف اغتشاشی به صورت ترکیب محدب  $E(P_j, \rho_j)$  است. همچنین ترکیب محدب  $E(P_j, \rho_j)$  در (۸۶.۳) توصیف شده است. مشابه مرجع [۷۴] کوچکترین ناحیه ناوردا حذف اغتشاش، به منظور به دست آوردن ناحیه ایی که مسیر حالت ها در نزدیکی مبدأ باقی بماند، تخمین زده شده است.

چنانچه دو ناحیه ناوردا از پیش تعیین شده  $x_1$  و  $x_2$  موجود باشند، مسئله بهینه سازی به صورت زیر پیشنهاد می شود.

$$(92.3)$$

$$\begin{aligned} & \text{Inf } \kappa \\ & P_j > \circ, l_j > \circ, H_j, \rho_j > \circ \\ \text{st : } & \begin{cases} \kappa x_1 \subset E(P_j, 1) \\ \kappa x_2 \subset E(P_j, 1) \\ \text{Sym}\{A + \text{Co}(s, K, H_j)^T P_j\} + \frac{1}{l_j} P_j D D^T P_j + \frac{l_j}{\rho_j} P_j < \circ, \text{ for } i \in [1, 2^m], j \in [1, N]. \\ E(P_j, 1) \subset L(H_j) \end{cases} \end{aligned}$$

در این مقاله، برای سیستم غیرخطی و در حضور اغتشاش (۷۲.۳) پارامترهای زیر را در

نظر گرفته و با حل مسئله بهینه سازی (۹۲.۳) تخمینی از ناحیه حذف اغتشاش به دست می آورد

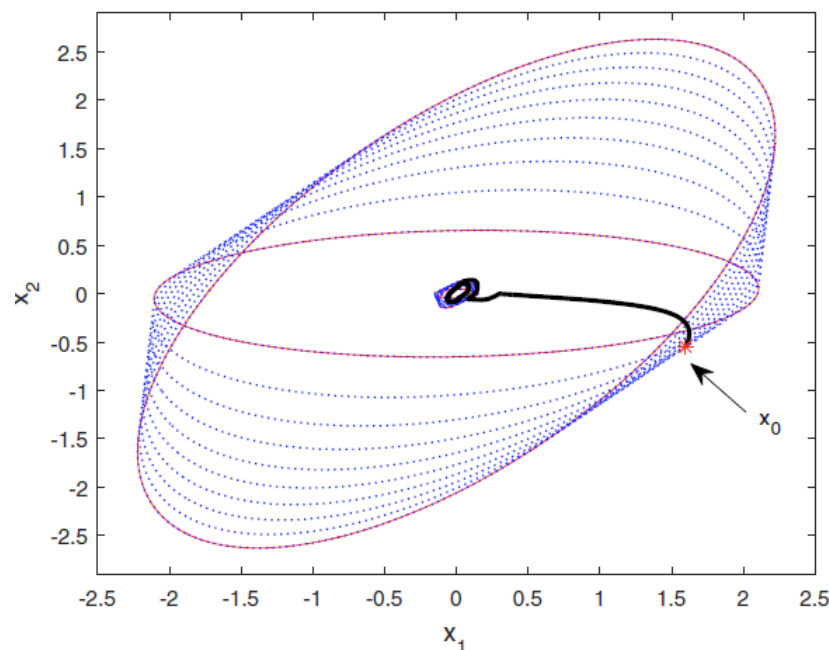
$$A = \begin{bmatrix} 0/1 & -0/8 \\ 1/1 & 0/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0/1 \\ 0/1 \end{bmatrix}.$$

$$v = 0/85, R_1 = \begin{bmatrix} 0/1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0/1 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = E(R_1, 4), x_2 = E(R_2, 4)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0/1191 & -0/4347 \end{bmatrix}, H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -0/3489 & -0/9501 \end{bmatrix}$$

شکل ۱۲-۳ ناحیه حذف اغتشاش را با نقطه شروع  $x_0 = \begin{bmatrix} 1/6 & -0/5475 \end{bmatrix}$  نشان می دهد.



شکل ۱۲.۳: تخمین ناحیه حذف اغتشاش در [۷۹]

در [۸۰] و [۸۱] با تاکید بر اینکه تنها تمرکز مقالات موجود در زمینه سیستم های مرتبه کسری با حضور اشباع، بر کنترل کننده پسخورد است و به غیر از کنترل کننده پسخورد کنترل کننده های دیگری نیز مورد توجه هستند، برای سیستم های مرتبه کسری غیرنسبی، کنترل کننده گام به عقب تطبیقی با ورودی اشباع، طراحی شده است. چون تمرکز این رساله بر روی سیستم های مرتبه کسری نسبی است به جزئیات این مقالات پرداخته نمی شود.

جدول ۱.۳: مرور تحقیقات قبل از انجام رساله

مشخصه	ناحیه جذب	ناحیه حذف اغتشاش	کنترل پسخورد کمکی	اغتشاش $\ w\  \leq \alpha \ x\ $	اغتشاش محدود $sat(w)$
[۶۸]	✓	-	-	-	-
[۷۰]	✓	-	-	-	-
[۷۱]	✓	✓	-	✓	-
[۷۲]	-	✓	✓	✓	-
[۷۳]	-	✓	-	-	✓

## جمع بندی

در این فصل به مرور مراجعی که شالوده و اساس تحقیقات این رساله را در بر دارد؛ پرداخته شده است. در ابتدا پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری همسان بررسی شد و بعد از آن تحلیل پایداری سیستم های غیر خطی به عنوان توصیف جامع تر سیستم های خطی مرتبه کسری همسان به صورت خلاصه مطالعه گردید. همچنین با در نظر گرفتن عدم تطابق بین توصیف سیستم نامی و سیستم فیزیکی، سیستم های خطی و غیر خطی با وجود نامعینی در پارامترها بررسی شدند و نهایتاً با معرفی محدودیت اشباع، سیستم خطی مرتبه کسری را در حالتی که محدودیت اشباع بر روی حالت ها و یا بر روی کنترل ورودی قرار داشته باشد مطالعه گردید.

در این فصل، بعد از بررسی پایداری سیستم، بزرگترین و کوچکترین ناحیه ناوردا برای سیستم های خطی مرتبه کسری همسان به کمک مسائل بهینه سازی تخمین زده شده است، اما افزایش تخمین ناحیه جذب به کمک پسخورد کمکی یک موضوع مهم و قابل توجه است. همچنین به دلیل وجود خطا در سیستم که عموماً ناشی از خطای مدلسازی و یا خطی سازی سیستم می باشد، وجود ترم غیر خطی و نامعینی در حضور محدودیت اشباع بر روی کنترل ورودی و یا بر روی حالت ها دور از ذهن نیست. در فصل های آینده به بررسی این موضوعات با فرض کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم های مورد مطالعه پرداخته می شود.

جدول های ۱-۳ و ۲-۳ تحقیقات مربوط به سیستم های مرتبه کسری با وجود محدودیت اشباع را نشان می دهند.

جدول ۲.۳: مرور تحقیقات هم راستای رساله

مشخصه	ناحیه جذب	ناحیه حذف اغتشاش برای $\ w\  \leq 1$	کنترل پسخورد کمکی	نامعینی	استفاده از ترکیب محدب	مشتق مرتبه کسری غیر نسبی
[۷۴]	✓	-	✓	-	-	-
[۷۵]	✓	-	✓	-	✓	-
[۷۶]	✓	✓	-	✓	-	-
[۷۸]	-	✓	✓	-	✓	-
[۷۹]	-	✓	✓	-	✓	-
[۸۰]	-	-	-	-	-	✓
[۸۱]	-	-	-	-	-	✓



## فصل ۴

# تحلیل پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری با محدودیت اشباع

### پیشگفتار

نوآوری مورد بررسی در این فصل به قرار زیر است.

- پایداری و پایدارسازی سیستم خطی مرتبه کسری معین با محدودیت اشباع در ورودی با پسخورد کمکی
- پایداری و پایدارسازی سیستم خطی مرتبه کسری معین در حضور اغتشاش با محدودیت اشباع در ورودی

## ۱.۴ پایداری سیستم خطی مرتبه کسری معین با محدودیت اشباع

سیستم خطی مرتبه کسری معین با وجود محدودیت اشباع در ورودی کنترل کننده  $u$  به صورت

$${}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + B \text{sat}(u), \quad (1.4)$$

مفروض است که در آن  $A$  و  $B$  ماتریس های معین هستند. با اعمال کنترل کننده پسخورد  $u = Kx$  که  $K \in R^{m \times n}$ ، سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود.

$${}^C D_t^\nu x(t) = Ax(t) + B \text{sat}(Kx), x(0) = x_0, \quad (2.4)$$

چنانچه  $\text{Sat}(Kx) = Kx$  سیستم مرتبه کسری (۲.۴) به صورت زیر توصیف می شود.

$${}^C D_t^\nu x(t) = (A + BK)x(t), x(0) = x_0 \quad (3.4)$$

قضیه ۱.۱.۴. سیستم (۳.۴) پایدار است اگر و تنها اگر یک ماتریس مثبت معین  $P > 0$  وجود داشته باشد در صورتی که

$$\left( -(- (A + BK))^{\frac{1}{1-\nu}} \right)^T P + P \left( -(- (A + BK))^{\frac{1}{1-\nu}} \right) < 0 \quad (4.4)$$

برهان. بر اساس قضیه ۴.۱.۳، با جایگزینی  $A + BK$  به جای  $A$  اثبات، قابل وصول است. □

چنانچه فرم کلی سیستم (۲.۴) در نظر گرفته شود.

$${}^C D_t^\nu x(t) = A_{cl}x(t) + B\varphi(x), \quad (5.4)$$

که در آن  $A_{cl} = A + BK$  و  $\varphi(x) = \text{sat}(Kx) - Kx$

قضیه ۲.۱.۴. [۸۲، ۸۳] برای ماتریس های  $T$  و  $Y$  با ابعاد مناسب داریم

$$T^T Y \leq \varepsilon T^T T + \varepsilon^{-1} Y^T Y, \quad \varepsilon > 0 \quad (6.4)$$

توجه ۱-۴ [۸۲]: نامساوی زیر همواره برای  $\varphi(x)$  صادق است.

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq \|K(x_1 - x_2)\|. \quad (7.4)$$

که در آن  $x_1 \in R^n$  و  $x_2 \in R^n$ .

قضیه ۳.۱.۴. فرض کنید  $x_0 = 0$  نقطه تعادل سیستم (۵.۴) باشد.  $x_0 = 0$  پایدار مجانبی است اگر ماتریس مثبت معین و متقارن  $P$  و اعداد  $\phi_1 > 0$  و  $\phi_2 > 0$  وجود داشته باشند به طوری که

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} + P B B^T P \phi_1 + \phi_2 (eK)^2 I < 0, \quad (8.4)$$

که در آن  $\phi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ ،  $\phi_2 = \varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} > 0$ ،  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  و  $eK$  بزرگترین قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس  $K^T K$  و  $I$  ماتریس همانی با ابعاد مناسب است.



از قضیه ۱۴.۱.۳ و در نظر گرفتن تابع لیاپانوف (۶۷.۳)، چنانچه شرط پایداری  ${}^C D_t^\alpha V(t, x) \leq -W_3(x)$  برقرار باشد، اثبات کامل می شود. بنابراین چنانچه از تابع لیاپانوف مورد نظر، بر اساس قضیه ۲.۷.۲ مشتق مرتبه کسری گرفته شود و سیستم (۵.۴) جایگذاری شود، داریم

$${}^C D_t^\alpha V = (A_{cl}x + B\varphi(x))^T Px + x^T P(A_{cl}x + B\varphi(x)) + 2\Upsilon_2, \quad (9.4)$$

که کران بالای  $\Upsilon_2$  در نامساوی (۳۰.۲) صدق می کند. می توان رابطه (۹.۴) را برای ساده سازی به فرم زیر مرتب کرد.

$${}^C D_t^\alpha V = x^T (A_{cl}^T P + P A_{cl}) x + \varphi(x)^T B^T P x + x^T P B \varphi(x) + 2\Upsilon_2. \quad (10.4)$$

با اعمال قضیه (۲.۱.۴) داریم

$$(11.4)$$

$${}^C D_t^\alpha V \leq x^T (A_{cl}^T P + P A_{cl}) x + \varepsilon_1 x^T P B B^T P x + \varepsilon_1^{-1} \varphi^T(x) \varphi(x) + \varepsilon_2 x^T P B B^T P x + \varepsilon_2^{-1} \varphi^T(x) \varphi(x)$$

با مرتب کردن نامعادله (۱۱.۴) داریم

$$(12.4)$$

$${}^C D_t^\alpha V \leq x^T (A_{cl}^T P + P A_{cl}) x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) x^T P B B^T P x + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) \varphi^T(x) \varphi(x) + 2\Upsilon_2.$$

و با در نظر گرفتن کران بر روی  $\Upsilon_2$  و همچنین توجه ۱-۴، نامساوی (۱۲.۴) می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$${}^C D_t^\alpha V \leq x^T (A_{cl}^T P + P A_{cl}) x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) x^T P B B^T P x + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) x^T K^T K x + \beta \|x\| \quad (13.4)$$

که در آن  $\beta = 2B_2 > 0$ .

همانطور که در ابتدای اثبات بیان شد، چنانچه شرط  ${}^C D_t^\alpha V(t, x) \leq -W_3(x)$  برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل  $x = 0$  پایدار مجانبی است. پس با انتخاب  $\varepsilon_3 > 0$ ،  $W_3(x) = \varepsilon_3 \|x\|^2$  داریم

$$(14.4)$$

$${}^C D_t^\alpha V \leq x^T (A_{cl}^T P + P A_{cl}) x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) x^T P B B^T P x + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) x^T K^T K x + \beta \|x\| \leq -\varepsilon_3 \|x\|^2$$

با انتقال  $\beta \|x\|$  به سمت راست نامساوی (۱۴.۴)، (۱۵.۴) حاصل می شود.

$$(15.4)$$

$$x^T (A_{cl}^T P + P A_{cl}) x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) x^T P B B^T P x + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) x^T K^T K x \leq -\varepsilon_3 \|x\|^2 - \beta \|x\| \leq -\varepsilon_3$$

بنابراین چنانچه نامعادله (۸.۴) برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل سیستم فوق پایدار مجانبی است و اثبات تمام می شود. □

## ۲.۴ پایداری سیستم خطی مرتبه کسری معین با محدودیت اشباع با پسخورد کمکی

در این بخش با استفاده از پسخورد کمکی، شرط پایداری را بدست آورده و پس از آن تخمین ناحیه جذب را با استفاده از بروز رسانی الگوریتم پیشنهاد شده در [۷۰] بیان می کنیم. استفاده از پسخورد کمکی برای افزایش ناحیه جذب و افزایش ناحیه دفع اغتشاش در بسیاری از مراجع مرسوم است [۷۲، ۷۴، ۷۷، ۸۲]. پسخورد کمکی  $Cx, C \in R^{m \times n}$  همواره در ناحیه خطی تابع اشباع قرار دارد. به بیان دیگر ناحیه  $\{x | x \in \mathfrak{R}(P, \rho), |Cx| \leq 1\}$  که در آن  $\mathfrak{R}(P, \rho) = \{x \in R^n, x^T P x \leq \rho\}$  ناحیه جذب سیستم است. بردار  $s \in R^m$  که  $s \in \vartheta$  و  $\vartheta = \{s \in R^m : s = 0 \text{ or } s = 1\}$  در نظر گرفته می شود که ماتریس  $Co$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$Co(s, K, C) = \begin{bmatrix} (1 - s_1)k_1 + s_1c_1 \\ \vdots \\ (1 - s_m)k_m + s_m c_m \end{bmatrix} \quad (16.4)$$

که در آن  $k_i$  و  $c_i$  به ترتیب  $i$  امین سطر از ماتریس های  $K$  و  $C$  است.

قضیه ۱.۲.۴. بیضی  $\mathfrak{R}(P, 1)$  مفروض است. اگر یک کنترل پسخورد کمکی  $C \in R^{m \times n}$  و ماتریس مثبت معین متقارن  $P$  وجود داشته باشند که شرط (۱۷.۴) برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل  $x = 0$  پایدار جانبی محلی است و  $\mathfrak{R}(P, 1)$  مجموعه ناوردا برای سیستم (۲.۴) است.

$$A^T P + PA + PBCo(s, K, C) + Co(s, K, C)^T B^T P < 0, s \in \vartheta, i = [1, m], \quad (17.4)$$

برهان. تابع لیاپانوف (۶۷.۳) را در نظر بگیرید. با گرفتن مشتق کسری از آن و جایگذاری (۲.۴) در آن داریم

$${}^C D_t^\alpha V = (Ax + Bsat(Kx))^T P x + x^T P (Ax + Bsat(Kx)) + 2\Upsilon_2. \quad (18.4)$$

با ساده سازی (۱۸.۴)، رابطه (۱۹.۴) بدست می آید.

$${}^C D_t^\alpha V \leq (A^T P + PA)x + [sat(Kx)]^T B^T P x + x^T P B [sat(Kx)] + 2\Upsilon_2. \quad (19.4)$$

بر اساس [۷۷، ۸۲]، همواره  $x^T P b_i sat(k_i x) \leq x^T P b_i \max(k_i x, c_i x)$  برای  $\forall x \in \mathfrak{R}(P, \rho)$  و  $i = [1, m]$  برقرار است. بنابراین (۱۹.۴) را به صورت (۲۰.۴) قابل بازنویسی است.

$${}^C D_t^\alpha V \leq x^T (A^T P + PA)x + \sum_{i=1}^m x^T P b_i ((1 - s_i)k_i + s_i c_i)x + x^T ((1 - s_i)k_i + s_i c_i)^T b_i^T P x + 2\Upsilon_2. \quad (20.4)$$

همچنین با در نظر گرفتن کران بر روی  $\Upsilon_2$  و تعریف ماتریس  $Co$  داریم

$${}^C D_t^\alpha V \leq x^T (A^T P + PA + PBCo(s, K, C) + [Co(s, K, C)]^T B^T P)x + \beta \|x\|. \quad (21.4)$$

در آن  $\beta = 2B_2$ .

با انتخاب  $W_3$  مشابه قبل، رابطه (22.4) بدست می آید.

$$(22.4)$$

$${}^C D_t^\alpha V \leq x^T (A^T P + PA + PBCo(s, K, C) + [Co(s, K, C)]^T B^T P)x + \beta \|x\| \leq -\varepsilon_3 \|x\|^2,$$

با انتقال  $\beta \|x\|$  به سمت راست نامساوی، داریم

$$(23.4)$$

$$x^T (A^T P + PA + PBCo(s, K, C) + [Co(s, K, C)]^T B^T P)x \leq -\varepsilon_3 \|x\|^2 - \beta \|x\| \leq -\varepsilon_3 \|x\|^2.$$

بنابراین اگر (17.4) برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل  $x = 0$  مجانباً پایدار محلی است و  $\mathfrak{R}(P, 1)$

یک مجموعه ناوردا برای سیستم مورد مطالعه می باشد و اثبات به پایان می رسد.  $\square$

### ۳.۴ تخمین ناحیه جذب

فرض کنید که  $X_r \subset R^n$  توصیف یک مجموعه محدب محدود باشد. برای هر مجموعه

$G \subset R^n$  می توان  $\nu(G) := \sup(\nu > 0, \nu X_r \subset G)$  را تعریف کرد [82, 77]. طبق نتایج قضیه

(1.2.4) و  $X_r$  از قبل معلوم، می توان مسئله بهینه سازی زیر را پیشنهاد داد به صورتی که

$\nu X_r$  بیشینه گردد.

$$\sup(\nu)$$

$$P > 0, C$$

$$st \begin{cases} a) \nu X_r \subset \mathfrak{R}(P, \rho) \\ b) A^T P + PA + PBCo(sK, C) + Co(s, K, C)^T B^T P < 0. \\ c) \mathfrak{R}(P, \rho) \subset L \end{cases} \quad (24.4)$$

قید اول بیانگر قرار گیری  $\nu X_r$  در ناحیه پایداری، قید دوم بیانگر شرط پایداری و قید سوم

نشان دهنده عملکرد پسخورده کمی در ناحیه  $L$  است. چنانچه  $1 \leq x^T R x$ ،  $X_r$  باشد

آنگاه قید اول را می توان بر اساس [77] به صورت  $\begin{bmatrix} \varpi R & I \\ I & P_1 \end{bmatrix} \geq 0$  توصیف کرد که در آن

$P_1 = P^{-1}$  و  $\varpi = \frac{1}{\nu}$  است. قید سوم در مسئله بهینه سازی را می توان بر اساس LMI به

صورت  $\begin{bmatrix} 1 & n_i \\ n_i^T & P_1 \end{bmatrix} \geq 0$  نوشت که در آن  $N = CP_1$  و  $n_i$  امین سطر از ماتریس  $N$  است.

در نتیجه (۲۴.۴) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\begin{aligned} & \text{Inf}(\varpi) \\ & P_1 > \circ, N \\ & \left\{ \begin{array}{l} a) \begin{bmatrix} \varpi R & I \\ I & P_1 \end{bmatrix} \geq \circ \\ b) P_1 A^T + A P_1 + B \text{Co}(s, K, C) P_1 + P_1 \text{Co}(s, K, C)^T B^T < \circ. \\ c) \begin{bmatrix} 1 & n_i \\ n_i^T & P_1 \end{bmatrix} \geq \circ \end{array} \right. \end{aligned} \quad (25.4)$$

توجه ۲-۴: تعداد  $2^m$  نامعادله ماتریسی در قید دوم برای  $s_i \in \vartheta, i = [1, m]$  وجود دارد.  
 توجه ۳-۴: برای بدست آوردن تخمین اولیه  $X_r$ ، می توان از الگوریتم پیشنهادی در [۷۰] با در نظر گرفتن شرط پایداری بدست آمده نیز استفاده کرد، که روند این الگوریتم در ادامه آمده است.

#### الگوریتم ۱-۴

- گام اول: محاسبه ماتریس پسخورد  $K$  از قضیه ۱.۱.۴ به طوری که  $A_{cl}$  در ناحیه پایداری قرار گیرد.
- گام دوم: محاسبه  $P$  به طوری که (۸.۴) برقرار باشد.
- گام سوم: محاسبه  $\rho = \min \frac{1}{k_i P k_i^T}$

مثال ۱-۴: به منظور نشان دادن عملکرد روش پیشنهاد شده، از مثال مرجع [۶۸]

استفاده کرده و نتایج حاصله را مقایسه می کنیم. سیستم (۵.۴) را با  $B = \begin{bmatrix} \circ/1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ،  $A = \begin{bmatrix} \circ/1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ،

در نظر بگیرید. برای مقایسه منصفانه با کنترل کننده پیشنهادی در  $\begin{bmatrix} 5 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$ ،  $v = \circ/8$ ،

[۶۸]،  $K = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  را در نظر گرفته و به سیستم اعمال می کنیم که گام اول الگوریتم

خود به خود برقرار می شود. برای محاسبه  $P$  در گام دوم که از قضیه ۳.۱.۴ استفاده می

شود. مقادیر  $\varphi_1 = 5/5056 \times 10^{-4}$ ،  $\varphi_2 = \circ/194$  و  $P = \begin{bmatrix} 1/6979 & 2/4594 \\ 2/4594 & 11/0999 \end{bmatrix}$ ،

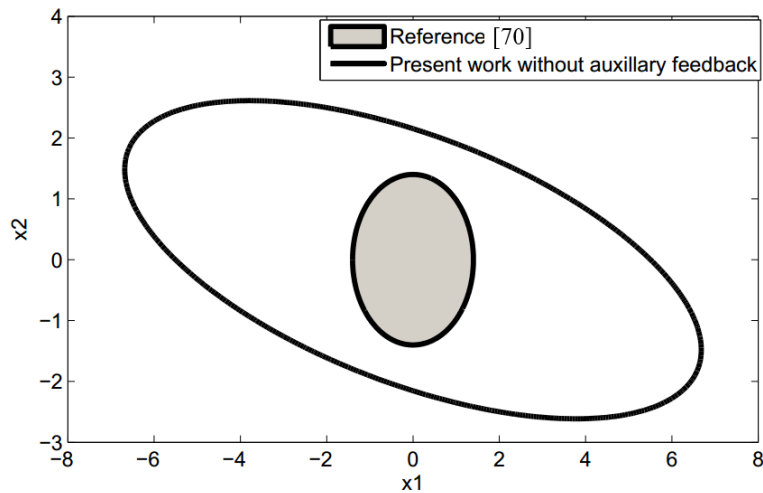
می آیند. همچنین با محاسبه گام سوم،  $\rho = \circ/2287$  حاصل شده، در نتیجه تخمین اولیه

برای  $X_r$  بدست می آید. با حل مسئله بهینه سازی (۲۵.۴) داریم

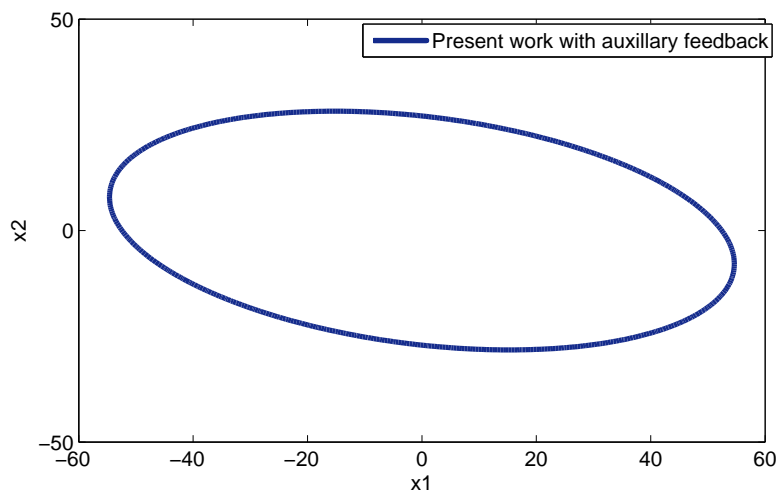
$$P = \begin{bmatrix} \circ/0004 & \circ/0004 \\ \circ/0004 & \circ/0015 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -\circ/3125 & \circ/0079 \\ -\circ/3125 & \circ/0079 \end{bmatrix} \times 10^{-14}, C = \begin{bmatrix} -\circ/8876 & \circ/0224 \\ \circ/0144 & -\circ/0004 \end{bmatrix} \times 10^{-11}$$

$$\varpi = 2/3305 \times 10^{-4}$$

شکل ۱-۴ و شکل ۲-۴ به ترتیب ناحیه جذب با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و با بکار بردن مسئله بهینه سازی (۲۵.۴) را نشان می دهند.

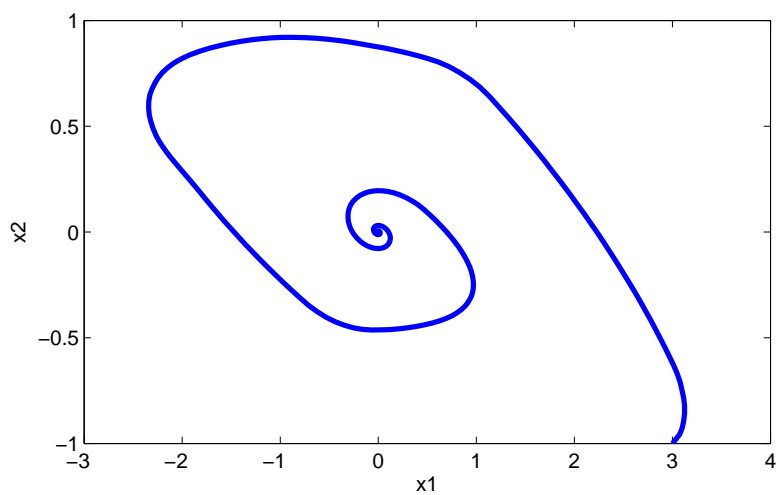


شکل ۱.۴: مقایسه ناحیه های جذب

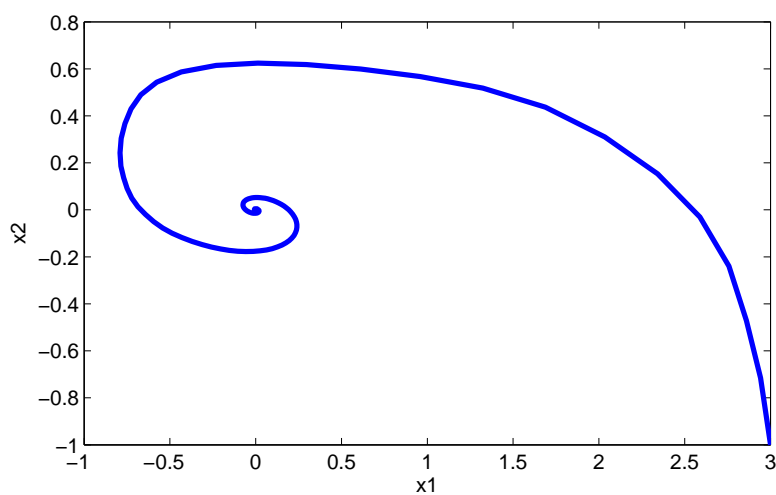


شکل ۲.۴: تخمین ناحیه جذب با استفاده از پسخورد کمکی

واضح است که تخمین ناحیه جذب با استفاده از پسخورد کمکی به مراتب گسترده تر از ناحیه جذب بدون پسخورد کمکی است. شکل های ۳-۴ و ۴-۴ به ترتیب، صفحه فاز سیستم مورد مطالعه با وجود پسخورد کمکی و بدون پسخورد کمکی را نشان می دهند. مشاهده می گردد با وجود پسخورد کمکی، سرعت همگرایی در سیستم بیشتر است که هزینه افزایش سرعت همگرایی، افزایش پیچیدگی ساخت سیستم است.



شکل ۳.۴: صفحه فاز سیستم بدون استفاده از پسخورد کمکی



شکل ۴.۴: صفحه فاز سیستم با استفاده از پسخورد کمکی

## ۴.۴ پایداری سیستم خطی مرتبه کسری معین در حضور اغتشاش با محدودیت اشباع

بسیاری از محققین، برای بالا بردن دقت تحلیل‌ها، به تحلیل سیستم خطی اکتفا نکرده و با در نظر گرفتن انواع ترم‌های غیر خطی که ناشی از وجود عدم قطعیت‌ها، اغتشاشات خارجی و یا اغتشاشات داخلی بوده به تحلیل پایداری پرداخته‌اند [۳۸، ۴۲، ۷۱، ۷۲]. در [۱۹] این سیستم‌ها به دو دسته سیستم‌هایی با اغتشاشات محو شده<sup>۱</sup> و اغتشاشات محو نشده<sup>۲</sup> تقسیم کرده است. دو ترم غیر خطی مهم که با اضافه کردن آنها به سیستم، سیستم جزء دسته اغتشاش محو شده قرار می‌گیرد در معادلات (۲۴.۳) و (۲۵.۳) معرفی شده‌اند. پایداری سیستم معین (۱.۴) چنانچه غیر خطی (۲۴.۳) را دارا باشد در [۷۱، ۷۲] به طور کامل بررسی شده‌اند. در این بخش پایداری سیستم توصیف شده با معادله (۱.۴) وقتی ترم غیر خطی (۲۵.۳) به آن اضافه شود، بررسی می‌گردد. سیستم مورد نظر به صورت زیر است

$${}^C D_t^\nu x(t) = Ax(t) + h(x, t) + B \text{sat}(u), \quad (26.4)$$

که در ترم غیر خطی  $h(x, t)$  در (۲۵.۳) صدق می‌کند. توجه ۴-۴ [۲۳]: برای  $\delta_0 > 0$  و ترم غیر خطی  $h(x, t)$ ، اگر  $\|x(t)\| \leq \delta_0$ ، آنگاه  $C_1 > 0$  وجود دارد که در آن

$$\|h(x, t)\| \leq \frac{\|x(t)\|}{C_1}, \quad t \geq 0. \quad (27.4)$$

توجه ۴-۵ [۲۳]: در حالتی که  $u \equiv 0$ ، معادله (۲۶.۴) با معادلات کلی توصیف‌کننده دینامیک سیستم‌های آشوب‌مانند چن<sup>۳</sup>، لورنز<sup>۴</sup>، چوا<sup>۵</sup> و روسلر<sup>۶</sup> مشابه است. بنابراین روش پایداری و کنترلی در این رساله می‌تواند برای سیستم‌های مرتبه کسری با رفتار آشوبی و ورودی اشباع نیز بکار رود. سیستم حلقه بسته با اعمال پس‌خورد  $u = Kx$  به سیستم (۲۶.۴) بدست می‌آید.

$${}^C D_t^\nu x(t) = Ax(t) + h(x, t) + B \text{sat}(Kx), \quad x(t_0) = x(0). \quad (28.4)$$

شکل ۴-۵ نمایش بلوکی سیستم مورد بررسی را نشان می‌دهد.

<sup>1</sup> Vanishing Perturbation

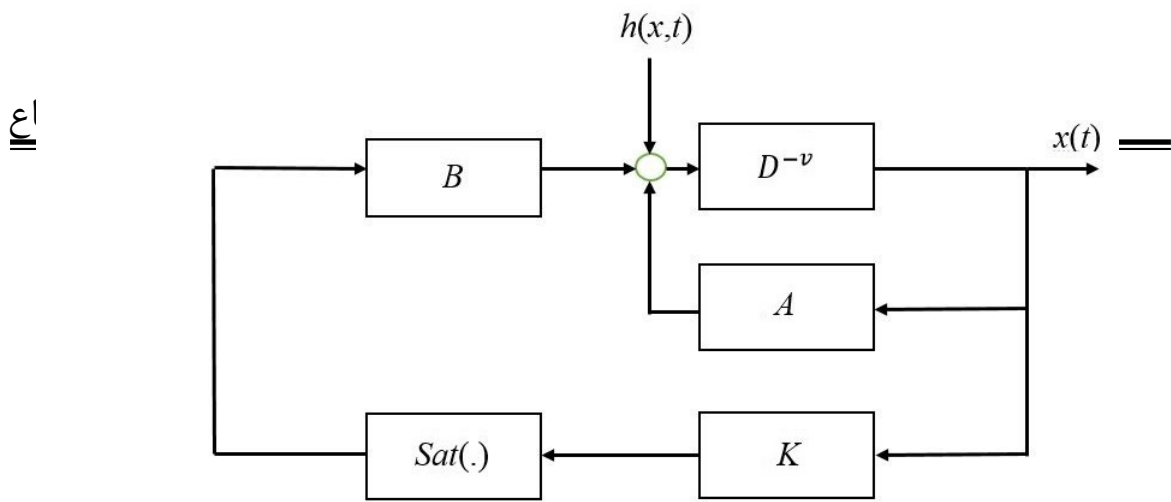
<sup>2</sup> Nonvanishing Perturbation

<sup>3</sup> Chen

<sup>4</sup> Lorenz

<sup>5</sup> Chua

<sup>6</sup> Rössler



شکل ۵.۴: نمایش بلوکی معادله (۲۸.۴)

قضیه ۱.۴.۴. در سیستم (۲۶.۴)، نقطه تعادل در  $x = 0$  در  $\delta_0 \cap S(\gamma K, 1)$  پایدار محلی است اگر ماتریس پسخورده حالت  $K$  وجود داشته باشد که در شرایط (۲۹.۴) صدق کند.

$$\begin{aligned} |\arg(\text{spec}(A + B\gamma K))| &> \frac{v\pi}{4} \\ v\rho(A + B\gamma K) &> l \end{aligned} \quad (29.4)$$

که در آن  $l > 0$ ،  $\text{spec}(\cdot)$  ماتریس طیف<sup>۷</sup> و  $\rho(A) = \max |eig(A)|$  است. همچنین ماتریس  $\gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$  برای  $0 \leq \gamma_i \leq 1, i = 1, \dots, m$  در شرط قطاعی اشباع (۶۲.۳) صدق می کند.

برهان. سیستم حلقه بسته (۲۸.۴) را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد.

$${}^C D_t^v x(t) = A_c x(t) + h(x, t) + B\phi(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (30.4)$$

که در آن  $A_c = A + B\gamma K$  و  $\phi(x, t) = \text{sat}(Kx) - \gamma Kx$  با اعمال تبدیل لاپلاس به معادله (۳۰.۴)، داریم

$$X(s) = (Is^v - A_c)^{-1} [s^{v-1} x(0) + L[h(x, t) + B\phi(x, t)]], \quad (31.4)$$

که در آن  $I_{n \times n}$  ماتریس همانی و  $L$  نمایانگر اپراتور لاپلاس است. با اعمال معکوس تبدیل لاپلاس از معادله (۳۱.۴) و با استفاده از تابع میتاگ-لفلر دو پارامتری  $E_{v,v}$  و انتگرال کانولوشن داریم

$$x(t) = E_{v,1}(A_c t^v) x(0) + \int_0^t (t-\tau)^{v-1} E_{v,v}(A_c(t-\tau)^v) [h(x, t) + B\phi(x, t)] d\tau. \quad (32.4)$$

با اعمال نرم به دو طرف تساوی (۳۲.۴)، (۳۳.۴) حاصل می شود.

$$\|x(t)\| \leq \|E_{v,1}(A_c t^v) x(0)\| + \int_0^t (t-\tau)^{v-1} \|E_{v,v}(A_c(t-\tau)^v)\| [\|h(x, t)\| + \|B\phi(x, t)\|] d\tau. \quad (33.4)$$

<sup>7</sup>spectrum of a matrix



با استناد به توجه ۴-۴ و نامعادله سوم فرمول (۶۲.۳) ، داریم  
(۳۴.۴)

$$\|x(t)\| \leq \|E_{v,\lambda}(A_c t^v)x(\circ)\| + \int_0^t (t-\tau)^{v-1} \|E_{v,v}(A_c(t-\tau)^v)\| \left[ \left\| \frac{x(\tau)}{C_\lambda} \right\| + \lambda_1 \|Bx(\tau)\| \right] d\tau,$$

که در آن  $\lambda_1 = \|K - \gamma K\| > 0$  .

با استفاده از (۱۷.۲) و جایگذاری در (۳۴.۴) ، (۳۵.۴) بدست می آید.  
(۳۵.۴)

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{M}{\sqrt{1+\|A_c\|t^v}} \|x(\circ)\| + \int_0^t (t-\tau)^{v-1} \cdot \frac{M}{\sqrt{1+\|A_c\|(t-\tau)^v}} \times \left[ \frac{1}{C_\lambda} + \lambda_1 \|B\| \right] \|x(\tau)\| d\tau \\ &= \frac{M}{\sqrt{1+\|A_c\|t^v}} \|x(\circ)\| + \left( \frac{M}{C_\lambda} + M\lambda_1 \|B\| \right) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{v-1}}{\sqrt{1+\|A_c\|(t-\tau)^v}} \|x(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

از قضیه گرانونال- بلمن ۶.۱.۳ ، با تعریف  $l = \left( \frac{M}{C_\lambda} + M\lambda_1 \|B\| \right)$  ، چنانچه  $u_\lambda(t) = x(t)$  ،  $f(t) = \frac{M\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|t^v}}$  و  $H(\tau) = \frac{l(t-\tau)^{v-1}}{\sqrt{1+\|A_c\|(t-\tau)^v}}$  می توان رابطه زیر را بدست آورد.  
(۳۶.۴)

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{M}{\sqrt{1+\|A_c\|t^v}} \|x(\circ)\| \\ &+ \left( \frac{M}{C_\lambda} + M\lambda_1 \|B\| \right) \int_0^t \frac{\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|\tau^v}} \cdot \frac{(t-\tau)^{v-1}}{\sqrt{1+\|A_c\|(t-\tau)^v}} \left\{ \exp \int_\tau^t \frac{l(t-r)^{v-1}}{\sqrt{1+\|A_c\|(t-r)^v}} dr \right\} d\tau. \end{aligned}$$

با حل انتگرال داخل تابع نمایی، داریم  
(۳۷.۴)

$$\|x(t)\| \leq \frac{M \|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|t^v}} + \left( \frac{M}{C_\lambda} + M\lambda_1 \|B\| \right) \int_0^t \frac{\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|\tau^v}} \cdot \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^v)^{1-\frac{l}{v\|A_c\|}}} d\tau.$$

انتگرال نامعادله (۳۷.۴) را می توان به صورت رابطه (۳۸.۴) بیان کرد.  
(۳۸.۴)

$$\int_0^{\frac{t}{\sqrt{v}}} \frac{\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|\tau^v}} \cdot \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^v)^{1-\frac{l}{v\|A_c\|}}} d\tau + \int_{\frac{t}{\sqrt{v}}}^t \frac{\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|\tau^v}} \cdot \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^v)^{1-\frac{l}{v\|A_c\|}}} d\tau.$$

اگر  $\tau \in \left[ 0, \frac{t}{\sqrt{v}} \right]$  ، آنگاه  $(t-\tau) > \tau$  و با فرض  $v < 1$  ، داریم  
(۳۹.۴)

$$\int_0^{\frac{t}{\sqrt{v}}} \frac{\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|\tau^v}} \cdot \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^v)^{1-\frac{l}{v\|A_c\|}}} d\tau \leq \int_0^{\frac{t}{\sqrt{v}}} \frac{\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|\tau^v}} \cdot \frac{(\tau)^{v-1}}{(1+\|A_c\|(\tau)^v)^{1-\frac{l}{v\|A_c\|}}} d\tau.$$

به همین ترتیب، اگر  $\tau \in \left[ \frac{t}{\sqrt{v}}, t \right]$  ، رابطه (۴۰.۴) به دست می آید.  
(۴۰.۴)

$$\int_{\frac{t}{\sqrt{v}}}^t \frac{\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|\tau^v}} \cdot \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^v)^{1-\frac{l}{v\|A_c\|}}} d\tau \leq \int_{\frac{t}{\sqrt{v}}}^t \frac{\|x(\circ)\|}{\sqrt{1+\|A_c\|(t-\tau)^v}} \cdot \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^v)^{1-\frac{l}{v\|A_c\|}}} d\tau.$$

## ۶۲ تحلیل پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری با محدودیت اشباع

با تغییر متغیر  $\tau_1 = t - \tau$  در (۴۰.۴)، حل رابطه (۳۷.۴) به شکل زیر نوشته می شود.

$$\|x(t)\| \leq \frac{M}{1 + \|A_c\| t^v} \|x(\circ)\| + \Upsilon \left( \frac{M^2}{C_1} + M^2 \lambda_1 \|B\| \right) \int_0^t \frac{\|x(\circ)\| (\tau)^{v-1}}{(1 + \|A_c\| (\tau)^v)^{\Upsilon - \frac{l}{v\|A_c\|}}} d\tau \quad (۴۱.۴)$$

$$= \frac{\Upsilon M l \|x(\circ)\|}{v \|A_c\| - l} + \frac{M \|x(\circ)\|}{1 + \|A_c\| t^v} + \frac{\Upsilon \left( \frac{M^2}{C_1} + M^2 \lambda_1 \|B\| \right) \|x(\circ)\|}{(l - v \|A_c\|) (1 + \|A_c\| \left(\frac{t}{\Upsilon}\right)^v)^{1 - \frac{l}{v\|A_c\|}}},$$

چنانچه شرایط قضیه برقرار باشد پایداری سیستم مورد مطالعه بر اساس تعریف پایداری برقرار است و اثبات به پایان می رسد.  $\square$

از قضیه ۱.۴.۴ پایداری محلی  $x = \circ$  در  $S(\gamma K, 1) \cap \delta_0$  استنباط می شود. در ادامه، اثبات پایداری مجانبی برای نقطه تعادل مطرح می گردد.

قضیه ۲.۴.۴: نقطه تعادل  $x = \circ$  پایدار مجانبی محلی است، اگر شرایط قضیه ۱.۴.۴ برقرار باشد.

برهان. مشابه روند اثبات قضیه ۱.۴.۴، با استفاده از عملگرهای لاپلاس، معکوس لاپلاس و نرم دو داریم

$$\|x(t)\| \leq \|E_{v,1}(A_c t^v)x(\circ)\| + \int_0^t \|(t - \tau)^{v-1}\| \|E_{v,v}(A_c(t - \tau)^v)\| [\|h(x, \tau)\| + \|B\phi(x, \tau)\|] d\tau. \quad (۴۲.۴)$$

با در نظر گرفتن توجه ۴-۴ و نامعادله سوم فرمول (۶۲.۳)، داریم

$$\|x(t)\| \leq \|E_{v,1}(A_c t^v)x(\circ)\| + \int_0^t \|(t - \tau)^{v-1}\| \|E_{v,v}(A_c(t - \tau)^v)\| \left[ \left\| \frac{x(\tau)}{C_1} \right\| + \|B\lambda_1 x(\tau)\| \right] d\tau.$$

به دلیل سادگی در نوشتار با تعریف  $G = \left( \left\| \frac{1}{C} \right\| + \|B\lambda_1\| \right)$ ، سپس نامعادله (۴۳.۴) را بازنویسی می کنیم.

$$\|x(t)\| \leq \|E_{v,1}(A_c t^v)x(\circ)\| + G \int_0^t \|(t - \tau)^{v-1}\| \|E_{v,v}(A_c(t - \tau)^v)\| \|x(\tau)\| d\tau. \quad (۴۴.۴)$$

چنانچه  $A_c$  در شرط پایداری صدق کند، یعنی  $|\arg(\text{spec}(A_c))| \geq \frac{v\pi}{\Upsilon}$ ، با توجه به  $t > 1$ ،  $k! = \Gamma(k + 1)$  و (۱۵.۲)، نامعادله (۴۴.۴) به صورت (۴۵.۴) در می آید.

$$\|x(t)\| \leq \|E_v(A_c t^v)x_\circ\| + G \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{\left(\frac{(v-1)k}{v}\right)}\| \Gamma(k + 1)}{\Gamma(vk + v)} (t - \tau)^{(v-1)(k+1)} e^{A_c^{\frac{1}{v}}(t-\tau)} \|x(\tau)\| d\tau. \quad (۴۵.۴)$$

با استفاده از (۱۶.۲)، داریم

(۴۶.۴)

$$\|x(t)\| \leq Q \|x_0\| e^{-ct} + G \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{(\frac{v-1}{v}k)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} (t-\tau)^{(v-1)(k+1)} e^{-c(t-\tau)} \|x(\tau)\| d\tau,$$

که در آن  $Q > 0$  و  $c = \sum_{k=1}^n |eig_k(A_c)| > 0$

با ضرب طرفین (۴۶.۴) در  $e^{ct}$ ، داریم

(۴۷.۴)

$$\|x(t)\| e^{ct} \leq Q \|x_0\| + G \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{(\frac{v-1}{v}k)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} (t-\tau)^{(v-1)(k+1)} \|x(\tau)\| e^{c\tau} d\tau.$$

از قضیه ۷.۱.۳ و در نظر گرفتن  $u_1(t) = \|x(t)\| e^{ct}$  از  $H(\tau) = G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{(\frac{v-1}{v}k)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} (t-\tau)^{(v-1)(k+1)}$  بدست می آید.  $C_{11} = Q \|x_0\|$  و (۴۸.۴)

$$\|x(t)\| e^{ct} \leq Q \|x_0\| \exp \left\{ G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{(\frac{v-1}{v}k)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \int_0^t (t-\tau)^{(v-1)(k+1)} d\tau \right\}. \quad (۴۸.۴)$$

با حل انتگرال داخل تابع نمایی، رابطه (۴۹.۴) حاصل می شود.

$$\|x(t)\| e^{ct} \leq Q \|x_0\| \exp \left\{ G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{(\frac{v-1}{v}k)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \cdot \frac{t^{(v-1)(k+1)+1}}{(v-1)(k+1)+1} \right\}. \quad (۴۹.۴)$$

با ضرب طرفین (۴۹.۴) در  $e^{-ct}$ ، نتایج زیر قابل حصول است.

(۵۰.۴)

$$\|x(t)\| \leq Q \|x_0\| \exp \left\{ -ct + G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{(\frac{v-1}{v}k)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \cdot \frac{t^{(v-1)(k+1)+1}}{(v-1)(k+1)+1} \right\}.$$

بر اساس نتایج گزارش شده در [۶۸، ۶۹]،  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ ، که نمایانگر پایداری مجانبی سیستم

□

حلقه بسته است و اثبات تمام می شود.

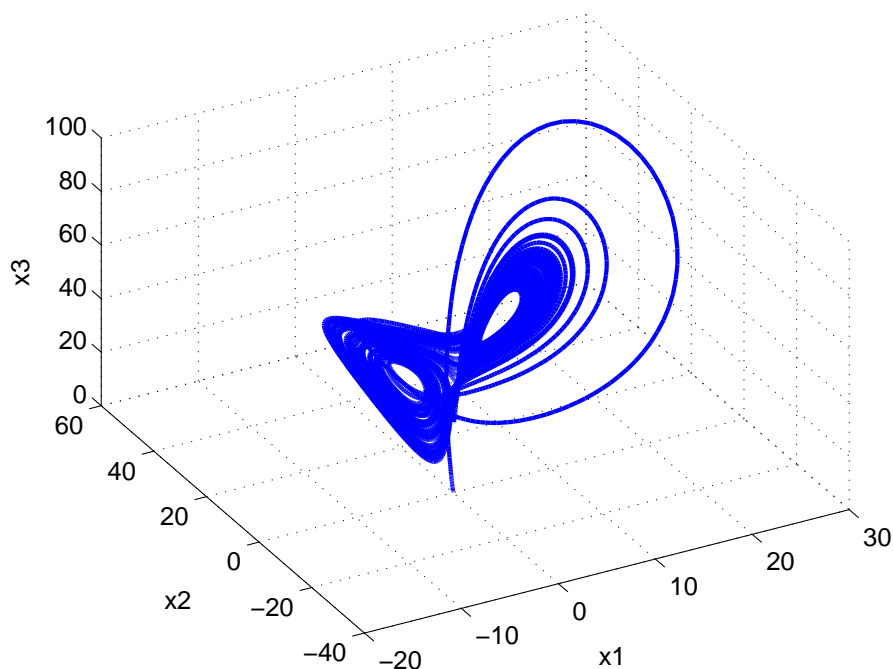
مثال ۲-۴. معادلات توصیف کننده موتور بدون جاروبک DC<sup>۸</sup> مرتبه کسری با  $0.96 <$

<sup>۸</sup>Brushless DC motor

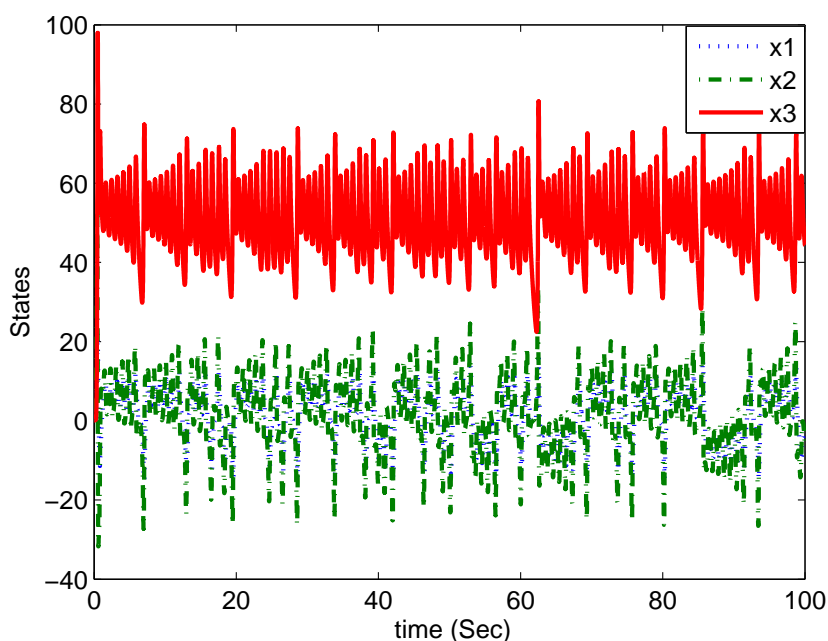
$v \leq 1$  رفتار آشوبی دارد [۲۶]، به قرار زیر است

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\nu x_1(t) &= -0.875x_1 + x_2x_3 \\ {}^C D_t^\nu x_2(t) &= -x_2 - x_1x_3 + 55x_3, \\ {}^C D_t^\nu x_3(t) &= 4(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (51.4)$$

که در آن  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  به ترتیب جریان محور مستقیم موتور، جریان محور قائم و سرعت زاویه ای موتور را نشان می دهند. شکل ۶-۴ نمایش رفتار آشوبی با  $v = 0.97$  و شرایط اولیه  $x(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$  را نشان می دهد. همچنین در شکل ۷-۴، حالت های کنترل نشده سیستم قابل مشاهده است.



شکل ۶.۴: صفحه فاز سیستم با  $v = 0.97$



شکل ۷.۴: نحوه تغییرات متغیرهای حالت سیستم حلقه باز موتور بدون جاروبک DC با  $v = 0.97$

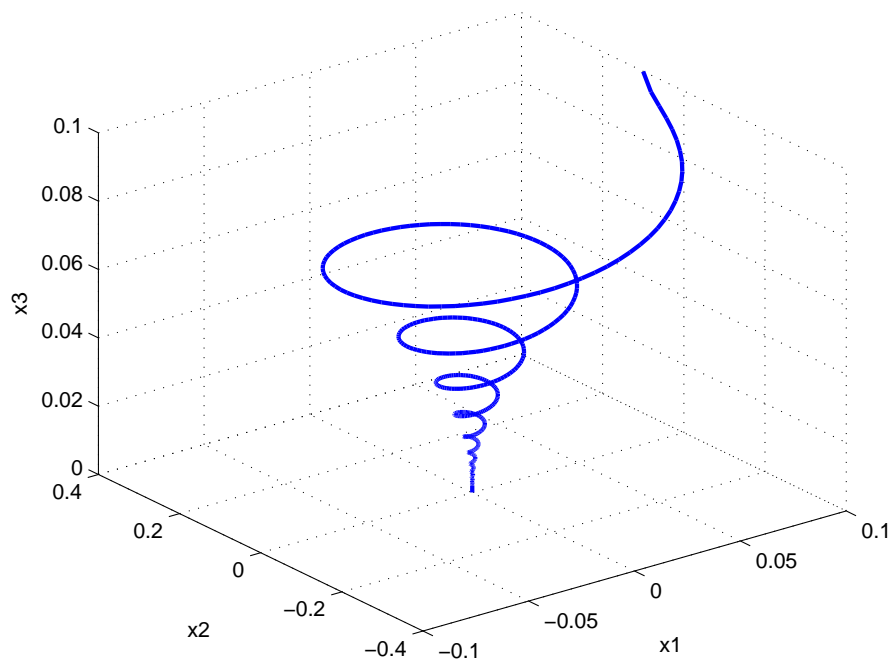
با مقایسه معادله (۲۶.۴)، ماتریس  $A$  و ترم غیر خطی  $h(x, t)$  استخراج می‌گردد.

$$A = \begin{bmatrix} -0.875 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 55 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad h(x, t) = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (52.4)$$

با فرض  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  و کنترل کننده با محدودیت اشباع، توصیف حالت (۵۱.۴) به صورت (۵۳.۴) است.

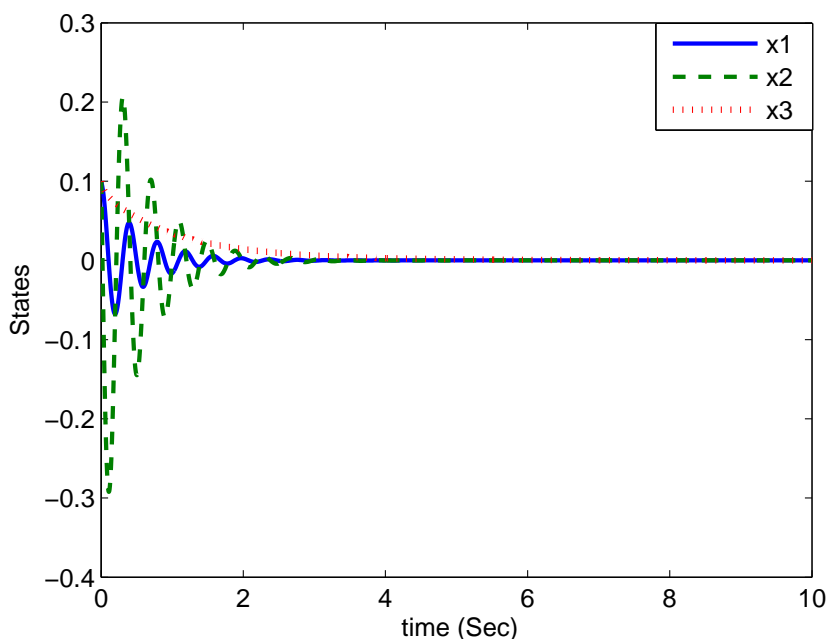
$$\begin{aligned} {}^C D_t^\nu x_1(t) &= -0.875 x_1 + x_2 x_3 \\ {}^C D_t^\nu x_2(t) &= -x_2 - x_1 x_3 + 55 x_3. \\ {}^C D_t^\nu x_3(t) &= 4(x_2 - x_3) + Sat(u) \end{aligned} \quad (53.4)$$

با در نظر گرفتن  $K = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$  و  $v = 0.97$ ، صفحه فاز سیستم حلقه بسته در شکل ۸-۴ نمایش داده شده است. شکل ۹-۴ نیز مسیر حالت سیستم حلقه بسته را نشان می‌دهد. با رجوع به این شکل‌ها، عملکرد مناسب کنترل کننده پیشنهادی در حضور اشباع نتیجه می‌گردد.



شکل ۸.۴: صفحه فاز سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک  $DC$  با مرتبه مشتق  $v = 0.97$

برای مقایسه تاثیر مرتبه مشتق بر روی مسیر حالت سیستم، صفحه فاز برای دو متغیر  $(x_1, x_2)$  با مرتبه  $v = 0.97$  و  $v = 0.99$  در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده است. در شکل های ۱۱-۴ و ۱۲-۴، مسیرهای حالت با مرتبه های مشتق  $v = 0.97$  و  $v = 0.99$  نشان داده شده اند.



شکل ۹.۴: مسیر حالت برای سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک DC با  $v = 0.97$

مثال ۳-۴: معادلات سیستم آشوب مرتبه کسری چن به شرح ذیل است [۱۰].

$$\begin{cases} \frac{d^v x}{dt^v} = a(y - x) \\ \frac{d^v y}{dt^v} = (c - a)x - xz + cy \\ \frac{d^v z}{dt^v} = xy - bz \end{cases} \quad (54.4)$$

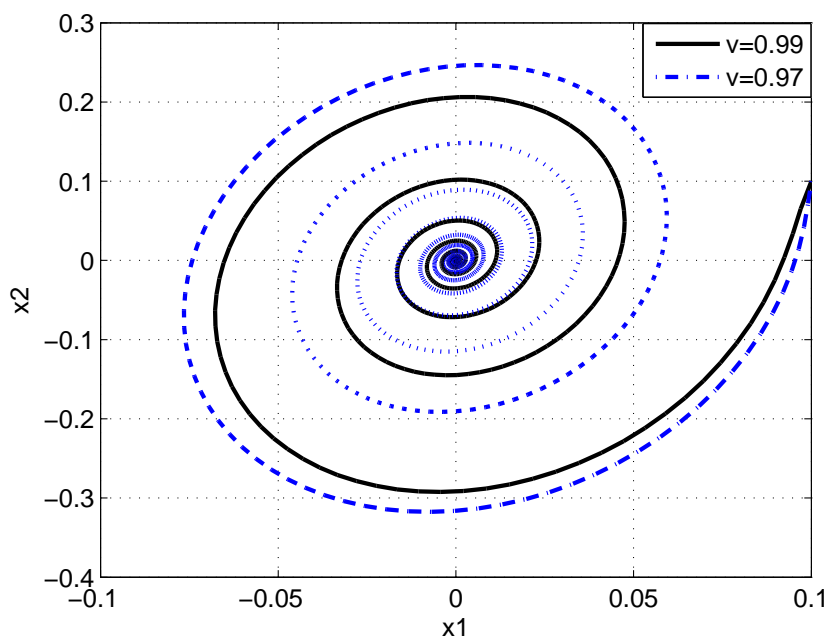
که در آن،  $a = 35, b = 3, c = 27, d = c - a, v = 0.95$ .

شکل ۱۳-۴ رفتار سیستم (۵۴.۴) وقتی کنترل کننده ای به آن اعمال نمی شود را با شرایط اولیه  $x(0) = [20 \ 11 \ 30]^T$  نشان می دهد. با در نظر گرفتن کنترل کننده به صورت

$$K = \begin{bmatrix} 0.5 & 18 & -0.1 \\ 0.5 & 18 & -0.1 \end{bmatrix}$$

شرایط پایداری  $|\arg(\text{spec}(A_c))| > \frac{v\pi}{4}$  و  $\rho(A + B\gamma K) > 1$  برقرار است.

شکل ۱۴-۴ نمایانگر صفحه فاز و شکل ۱۵-۴ مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته را نشان می دهد. برای مقایسه رفتار سیستم در مرتبه های مشتق متفاوت، در شکل ۱۶-۴ نحوه تغییرات متغیر  $x_1$  با در نظر گرفتن  $v = 0.95$  و  $v = 0.7$  نشان داده شده است.

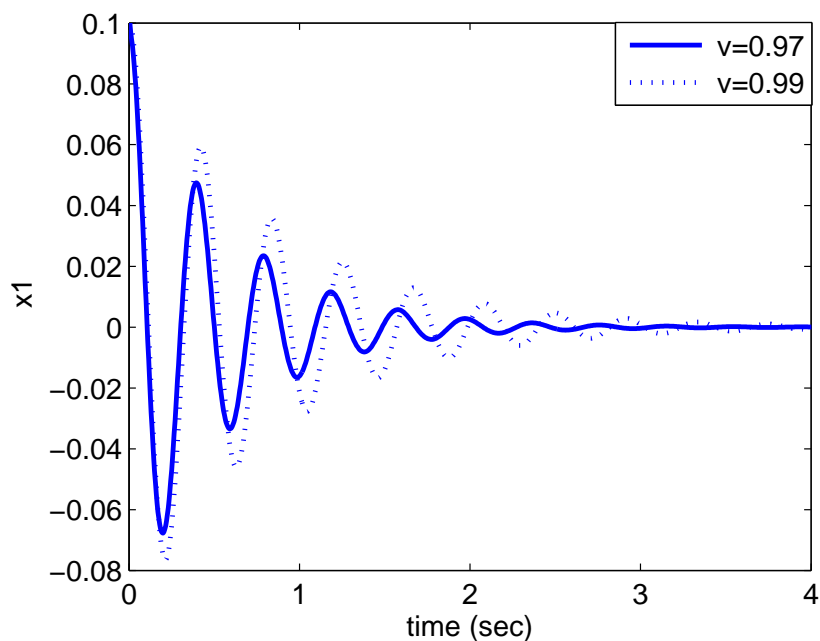


شکل ۱۰.۴: صفحه فاز سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک DC با  $v = 0.99$  و  $v = 0.97$

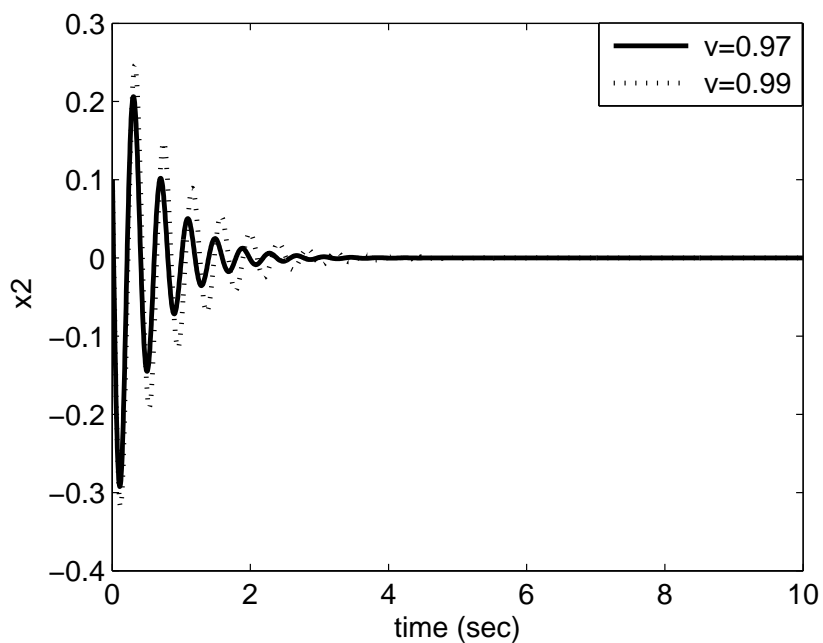
## جمع بندی

در این فصل، ابتدا شرایط پایداری سیستم خطی مرتبه کسری با محدودیت اشباع در کنترل ورودی با تاثیر پسخورد کمکی بررسی گردید. سپس با کمک این شرایط، تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم تحت مطالعه با کمک به روز رسانی یک الگوریتم و پیشنهاد یک مسئله بهینه سازی جدید حاصل شد. همچنین بحث پایداری سیستم خطی مرتبه کسری با اضافه شدن ترم غیر خطی به بحث پایداری کلاس خاصی از سیستم های غیر خطی با محدودیت اشباع گسترش پیدا کرد. اهمیت روش پیشنهادی در این است که برخی سیستم های غیر خطی مرتبه کسری آشوبی با فرض صفر بودن ورودی، می توان جز این کلاس غیر خطی در نظر گرفت.

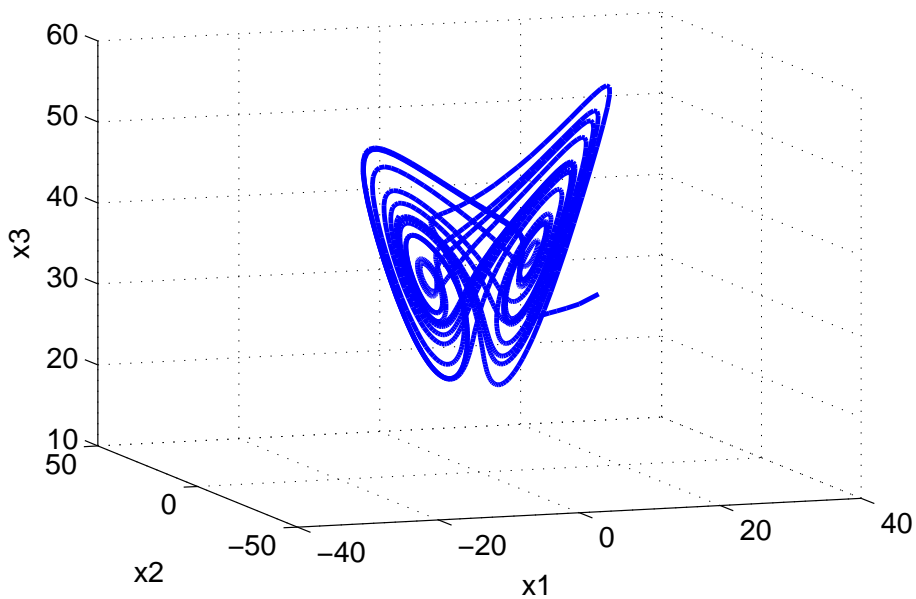




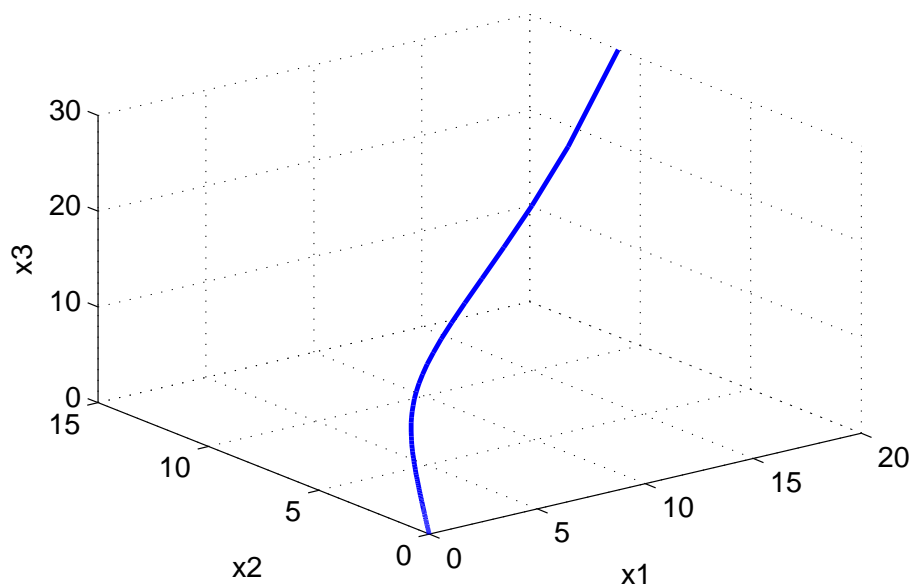
شکل ۱۱.۴: نحوه تغییرات  $x_1$  سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک DC با  $v = 0.97$  و  $v = 0.99$



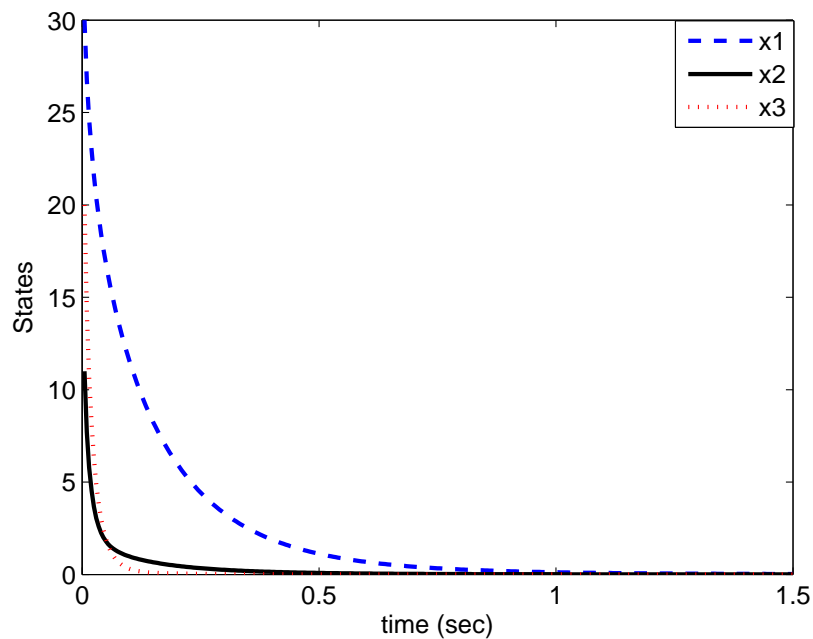
شکل ۱۲.۴: نحوه تغییرات  $x_2$  سیستم حلقه بسته موتور بدون جاروبک DC با  $v = 0.97$  و  $v = 0.99$



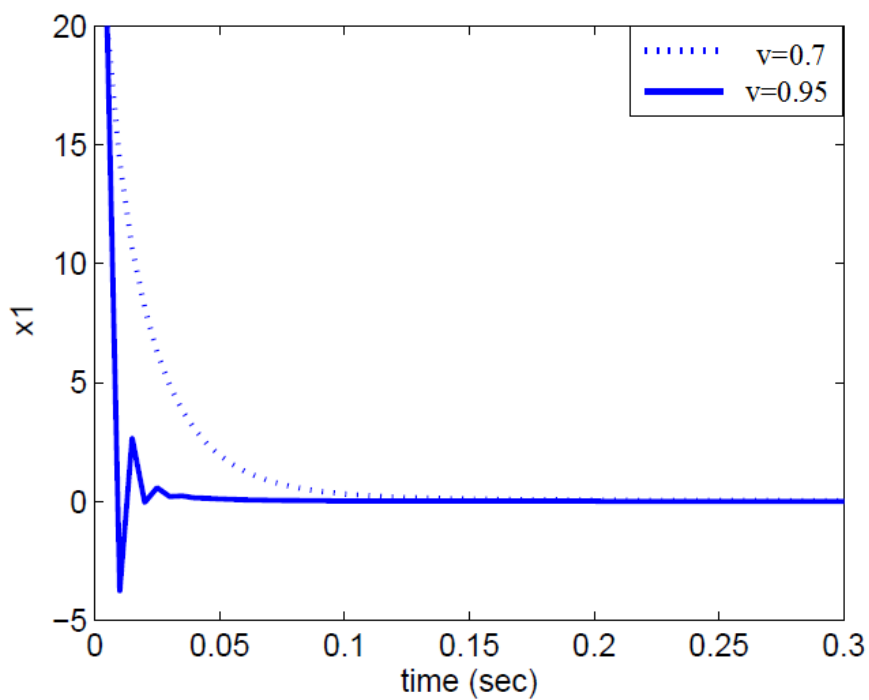
شکل ۱۳.۴: نمودار فاز سیستم حلقه باز چن با  $v = ۰/۹۵$



شکل ۱۴.۴: صفحه فاز حالت های سیستم حلقه بسته چن با  $v = ۰/۹۵$



شکل ۱۵.۴: مسیر حالت های سیستم حلقه بسته چن با  $v = ۰/۹۵$



شکل ۱۶.۴: نحوه تغییرات حالت  $x_1$  برای سیستم حلقه بسته چن با  $v = ۰/۹۵$  و  $v = ۰/۷$



## فصل ۵

# تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع در ورودی و حالت ها

### پیشگفتار

نوآوری ارائه شده در این فصل از رساله، تحلیل پایداری و پایداری سازی سیستم های خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع است. بدین منظور برای سیستم نامعین خطی در دو حالت وجود محدودیت اشباع در کنترل کننده ورودی یا بر روی حالت ها، به ترتیب کنترل کننده پسخورد و کنترل کننده مد لغزشی طراحی می شود.

### ۱.۵ محدودیت اشباع در کنترل کننده

معادلات سیستم (۱.۴) با وجود نامعینی در ماتریس های سیستم، به قرار زیر است.

$${}^C D_t^\alpha x(t) = (A + \delta A)x(t) + (B + \delta B) \text{sat}(u), \quad (1.5)$$

۷۴ تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع در ورودی و حالت هاع

که در آن  $A$  و  $B$  ماتریس های حقیقی، ثابت و معین و ماتریس های  $\delta A$  و  $\delta B$ ، نمایانگر نامعینی که در شرایط  $\|\delta A\| \leq 1$  و  $\|\delta B\| \leq 1$  صدق می کنند. با در نظر گرفتن کنترل کننده پسخورد حالت  $u = Kx$ ,  $K \in R^{m \times n}$ ، سیستم حلقه بسته به صورت زیر در می آید.

$${}^C D_t^\nu x(t) = (A + \delta A)x(t) + (B + \delta B) \text{sat}(Kx), \quad x(0) = x_0. \quad (2.5)$$

قضیه ۱.۱.۵. سیستم حلقه بسته (۲.۵) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس کنترل کننده پسخورد  $K$  وجود داشته باشد که  $|\arg(\text{spec}(A + BK))| \geq \frac{\nu\pi}{4}$ ، آنگاه سیستم حلقه بسته پایدار مقاوم مجانبی است.

برهان. با تبدیل لاپلاس گرفتن از (۲.۵) داریم

$$X(s) = (I_n s^\nu - A_c)^{-1} (s^{\nu-1} x_0 + L((\delta A - BK)x(t) + (B + \delta B) \text{sat}(Kx))), \quad (3.5)$$

که در آن  $A_c = A + BK$ .

با گرفتن معکوس لاپلاس از رابطه (۳.۵)، داریم

$$x(t) = E_{\nu,1}(A_c t^\nu) x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(A_c(t-\tau)^\nu) ((\delta A - BK)x(t) + (B + \delta B) \text{sat}(Kx)) d\tau.$$

با اعمال نرم در طرفین (۴.۵) خواهیم داشت

$$(4.5)$$

$$\|x(t)\| \leq \|E_\nu(A_c t^\nu) x_0\| + \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \|E_{\nu,\nu}(A_c(t-\tau)^\nu)\| (\|(\delta A - BK)\| \|x(\tau)\| + \|(B + \delta B)\| \|\text{Sat}(Kx)\|) d\tau.$$

در ادامه، بررسی محدود بودن روی مقادیر  $\|x(t)\|$  ضروری است. با استفاده از نامساوی مثلث و خصوصیات  $\delta A$  و  $\delta B$ ، یعنی  $\|\delta A\| \leq 1$  و  $\|\delta B\| \leq 1$ ، داریم

$$\|x(t)\| \leq \|E_\nu(A_c t^\nu) x_0\| + \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \|E_{\nu,\nu}(A_c(t-\tau)^\nu)\| (1 + \|BK\| + (\|B\| + 1)\lambda_1) \|x(\tau)\| d\tau, \quad (6.5)$$

که  $\lambda_1 > 0$  ثابت لیپشیتز تابع اشباع است.

برای سادگی در نوشتار  $G = (1 + \|BK\| + (\|B\| + 1)\lambda_1)$  را تعریف می کنیم. بنابراین نامعادله (۶.۵) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\|x(t)\| \leq \|E_\nu(A_c t^\nu) x_0\| + G \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \|E_{\nu,\nu}(A_c(t-\tau)^\nu)\| \|x(\tau)\| d\tau. \quad (7.5)$$

به منظور تضمین پایداری فرض کنید  $A_c$  در شرط پایداری  $|\arg(\text{spec}(A - BK))| \geq \frac{\nu\pi}{4}$  صدق کند. هدف اثبات  $x(t) \rightarrow 0$  هنگامی که  $t \rightarrow \infty$  است. چنانچه  $t > 1$ ، با در نظر گرفتن (۱۵.۲)

و  $k! = \Gamma(k+1)$ ، نامعادله (۷.۵) به صورت زیر بازنویسی می شود

$$\|x(t)\| \leq \|E_v(A_c t^v) x_0\| + G \int_0^t (e^{A_c \frac{1}{v}(t-\tau)}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{\left(\frac{(v-1)k}{v}\right)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \cdot (t-\tau)^{(v-1)(k+1)} \|x(\tau)\| d\tau. \quad (۸.۵)$$

با توجه به (۱۶.۲) داریم

$$\|x(t)\| \leq Q \|x_0\| e^{-ct} + G \int_0^t (e^{-c(t-\tau)}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{\left(\frac{(v-1)k}{v}\right)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \cdot (t-\tau)^{(v-1)(k+1)} \|x(\tau)\| d\tau, \quad (۹.۵)$$

که در آن  $Q > 0$  و  $c = \sum_{k=1}^n |\text{eig}_k(A_c)| > 0$  با ضرب در طرفین (۹.۵) داریم

$$\|x(t)\| e^{ct} \leq Q \|x_0\| + G \int_0^t \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{\left(\frac{(v-1)k}{v}\right)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \cdot (t-\tau)^{(v-1)(k+1)} \|x(\tau)\| e^{c\tau} \right) d\tau. \quad (۱۰.۵)$$

از قضیه ۷.۱.۳ و با انتخاب  $C = Q \|x_0\|$ ،  $H(\tau) = G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{\left(\frac{(v-1)k}{v}\right)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} (t-\tau)^{(v-1)(k+1)}$ ، رابطه زیر بدست می آید.

$$\|x(t)\| e^{ct} \leq Q \|x_0\| \cdot \exp \left\{ G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{\left(\frac{(v-1)k}{v}\right)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \int_0^t (t-\tau)^{(v-1)(k+1)} d\tau \right\}, \quad (۱۱.۵)$$

با حل انتگرال سمت راست نامعادله (۱۱.۵)، حاصل زیر به دست می آید.

$$\|x(t)\| e^{ct} \leq Q \|x_0\| \cdot \exp \left\{ G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{\left(\frac{(v-1)k}{v}\right)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \cdot \frac{t^{(v-1)(k+1)+1}}{(v-1)(k+1)+1} \right\}, \quad (۱۲.۵)$$

با ضرب هر دو طرف (۱۲.۵) در  $e^{-ct}$ ، داریم

$$\|x(t)\| \leq Q \|x_0\| \cdot \exp \left\{ -ct + G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_c^{\left(\frac{(v-1)k}{v}\right)}\| \Gamma(k+1)}{\Gamma(vk+v)} \cdot \frac{t^{(v-1)(k+1)+1}}{(v-1)(k+1)+1} \right\}, \quad (۱۳.۵)$$

از اثبات ارائه شده در [۶۸، ۶۹] با گذشت زمان،  $\|x\|$  به سمت صفر همگرا می گردد، در نتیجه  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$  که پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته مورد نظر را نتیجه می دهد و اثبات به پایان می رسد. □

## ۷۶ تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع در ورودی و حالت هاع

**قضیه ۲.۱.۵:** فرض کنید در سیستم حلقه بسته توصیف شده با معادله (۲.۵)  $\|\delta A\| \equiv \circ$  باشد، آنگاه سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی است اگر ماتریس کنترل کننده پسخورد  $K$  وجود داشته باشد به طوری که  $|\arg(\text{spec}(A - BK))| \geq \frac{v\pi}{4}$  برقرار باشد.

برهان. بدین منظور کافی است در روند اثبات قضیه ۱.۱.۵،  $\|\delta A\| = \circ$  در نظر گرفته شود.  $\square$

**قضیه ۳.۱.۵:** فرض کنید در سیستم حلقه بسته توصیف شده با معادله (۲.۵)  $\|\delta B\| \equiv \circ$  باشد، آنگاه سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی است اگر ماتریس کنترل کننده پسخورد  $K$  وجود داشته باشد به طوری که  $|\arg(\text{spec}(A - BK))| \geq \frac{v\pi}{4}$  برقرار باشد.

برهان. بدین منظور کافی است در روند اثبات قضیه ۱.۱.۵،  $\|\delta B\| = \circ$  در نظر گرفته شود.  $\square$

همانطور که قبلاً ذکر شد بسیاری از سیستم های دنیای واقعی، شامل ترم غیر خطی در ساختار مدل هستند. به عبارتی با بکار بردن قضیه خطی کنترل برای آنها نیازمند خطی سازی معادله دیفرانسیل حول نقطه تعادل است. بنابراین بین مدل حقیقی و مدل نامی تفاوت وجود دارد. در ادامه، روش تحلیل ارائه شده در قضیه ۱.۱.۵ را برای کلاس خاصی از سیستم غیر خطی نامعین بسط داده که در آن ترم غیر خطی در معادله (۲۴.۳) صدق می کند و مدل سیستم می تواند توسط مجموع دو ترم، یک ترم خطی و یک غیر خطی، توصیف شود. سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$${}^C D_t^v x(t) = (A + \delta A)x(t) + (B + \delta B)\text{sat}(u) + g(x, t), \quad (14.5)$$

که در آن غیر خطی  $g(x, t)$  در (۲۴.۳) صدق می کند

$$|g(x_1, t) - g(x_2, t)| \leq \lambda_2 |x_1 - x_2|. \quad (15.5)$$

که  $\lambda_2 > \circ$  ثابت لپیشیتز ترم غیر خطی  $g(x, t)$  است.

قضیه؟؟ می تواند برای بررسی پایداری مقاوم سیستم (۱۴.۵) بکار رود.

مثال ۱-۵: یک سیستم مکانیکی [۸۴، ۸۵] متشکل از یک نوسانگر با دو میرایی<sup>۱</sup> از

مرتبه یک و  $v = \circ/5$  که با معادله زیر توصیف می شود

$$\ddot{z} + \alpha\dot{z} + \beta(D_t^v z) + \gamma z = \text{sat}(u) \quad (16.5)$$

خروجی های قابل اندازه گیری برابر با مکان  $z$  و سرعت  $\dot{z}$  هستند که در آن  $\gamma = 1, \beta =$

$1/4$  و  $\alpha = \circ/8$ . با  $v = \circ/5$ ، بعد سیستم  $n = 4$  است و ماتریس های توصیف فضای حالت

آن به صورت (۱۷.۵) است.

$$A = \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ -\gamma & -\beta & -\alpha & \circ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (17.5)$$

<sup>1</sup>damping

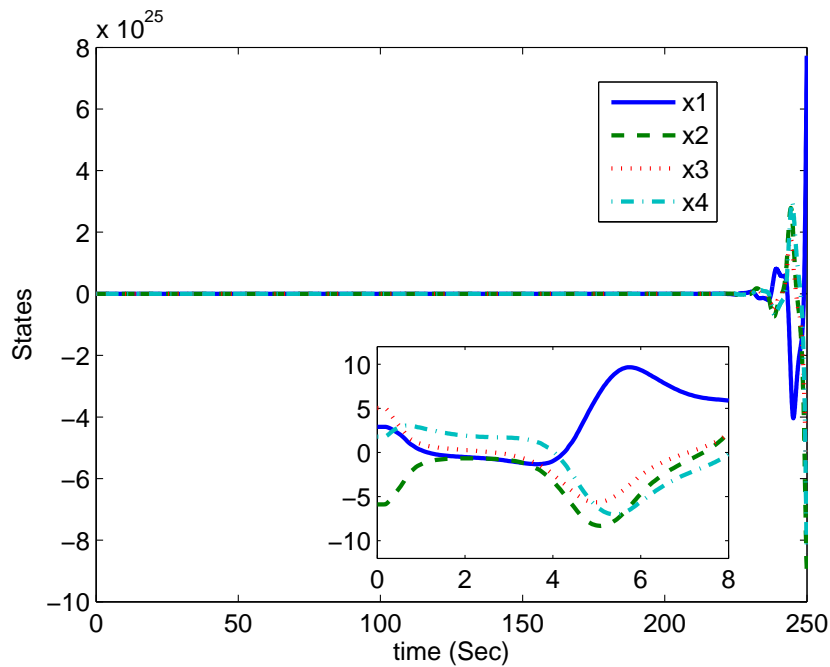


ماتریس های نامعین مربوط به ماتریس های سیستم نیز به قرار زیر است.

$$\delta A = 0.35 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sin(\Delta t), \quad (18.5)$$

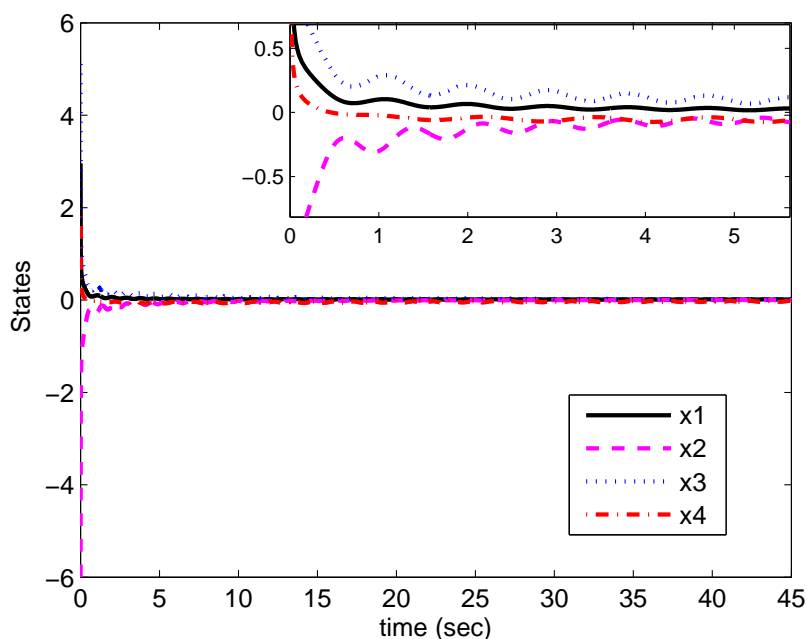
$$\delta B = 0.20 \times [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \cos(t).$$

از شکل ۱-۵ مشاهده می شود سیستم حلقه باز ناپایدار است. برای پایدارسازی این سیستم از ماتریس پسخورد  $K = [5 \ 10 \ 12 \ 1]$  که در شرط  $|\arg(\text{spec}(A - BK))| \geq \frac{v\pi}{4}$  صدق می کند استفاده می کنیم. شکل ۲-۵ پاسخ سیستم حلقه بسته با اعمال کنترل



شکل ۱.۵: نحوه تغییرات متغیرهای حالت حلقه باز (۱۶.۵) با  $v = 0.5$

کننده پیشنهادی را نشان می دهد. با اعمال کنترل کننده پیشنهادی، حالت ها بعد از زمان محدود همگرا می شوند.



شکل ۲.۵: نحوه تغییرات متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته (۱۶.۵) با  $v = 0.5$

مثال ۲-۵: پارامترهای سیستم معین و ناپایدار (۱.۴) معرفی شده در [۶۹] را با  $v = 0.45$  در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19.5)$$

با فرض

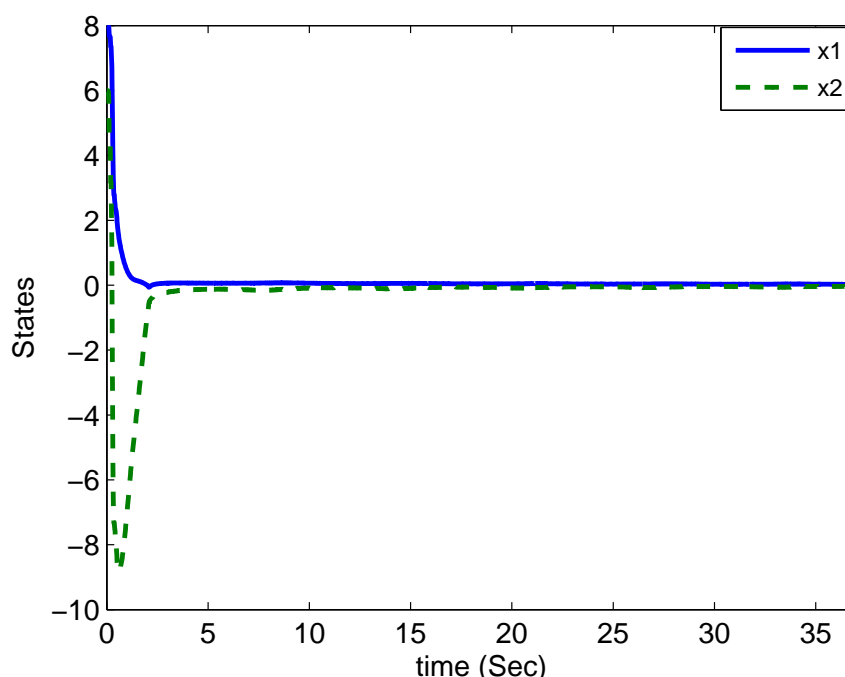
$$\delta A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sin(\Delta t), \quad \delta B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos(t). \quad (20.5)$$

و  $g(x, t) = 3 \sin(Cx)$  که  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، فرم کلی سیستم (۱۴.۵) بدست می آید. با اعمال  $u = -Kx$  که  $K = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، شرط  $|\arg(\text{spec}(A - BK))| \geq \frac{v\pi}{4}$  برقرار می شود. شکل ۳-۵ تغییرات متغیرهای حالت سیستم (۱۴.۵) با پارامترهای (۱۹.۵) را نشان می دهد.

## ۲.۵ محدودیت اشباع بر حالت های سیستم

معادلات دینامیکی سیستم خطی نامعین مرتبه کسری صورت زیر در نظر بگیرید.

$${}^C D_t^\nu x(t) = (A + \delta A)x(t) + (B + \delta B)u(t) \quad (21.5)$$



شکل ۳.۵: نحوه تغییرات حالت های سیستم حلقه بسته (۱۴.۵) با  $v = 0.45$

با فرض وجود محدودیت اشباع بر روی حالت های قابل مشاهده در خروجی  $y(t) \in R^r$  در توصیف سیستم (۲۱.۵)، ترم غیر خطی  $g(y, t)$  اضافه می گردد.

$$\begin{cases} {}^C D_t^\nu x(t) = (A + \delta A)x(t) + Bg(y, t) + (B + \delta B)u(t) \\ y = Cx(t) \end{cases}, \quad (22.5)$$

که در آن  $A, B$  و  $C \in R^{r \times n}$  ماتریس های ثابت و معین هستند،  $g(y, t) = \text{sat}(Hy) = \text{sign}(Hy) \min(\|Hy\|, 1)$  ترم غیر خطی است که تابع حالت های خروجی بوده و  $H$  ماتریس ثابت با ابعاد مناسب می باشد، همچنین  $\delta A$  و  $\delta B$  ماتریس های نامعینی هستند که در فرضیات زیر صدق می کنند.

فرض ۱.

$$\delta A = D_A F_A(t) N, \quad (23.5)$$

که در آن  $D_A$  و  $N$  ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب و  $F_A(t)$  ماتریس تابع زمان پیوسته که در شرط (۲۴.۵) صدق می کند.

$$\|F_A(t)\| < 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (24.5)$$

فرض ۲. بر روی نامعینی ماتریس ورودی، محدودیت زیر وجود دارد.

$$\delta B = B \Delta F_B, \quad \|\Delta\| < 1, \quad \|\Delta F_B\| \leq \mu, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad (25.5)$$

۸۰ تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع در ورودی و حالت هاع

که در آن  $\mu$  یک عدد حقیقی مثبت و  $F_B$  یک ماتریس حقیقی ثابت با ابعاد مناسب و  $\Delta$  یک ماتریس محدود نامعین است.

فرض ۳. نامعادله زیر همواره برقرار است.

$$A + BD_cC + E \leq \circ, \quad (26.5)$$

که در آن  $A, B, C$  در توصیف سیستم (۲۲.۵) معرفی شده اند و  $E = D_A I_N$  که  $I$  ماتریس همانی با ابعاد مناسب است. همچنین،  $D_c \in R^r$  ماتریس ثابتی است که در دینامیک کنترل کننده به صورت زیر ظاهر می شود.

$$\begin{cases} {}^C D_t^v z = A_c z + B_c y \\ u = C_c z + D_c y + u_n \end{cases} \quad (27.5)$$

در رابطه اخیر،  $A_c \in R^{k \times k}$ ،  $B_c \in R^{k \times r}$  و  $C_c \in R^k$  ماتریس های ثابت،  $z(t) \in R^k$  حالت کنترل کننده و  $u_n$  ترم غیر خطی کنترل کننده مربوط به کلیدزنی است.

$$u_n = -\frac{f_n(t)}{1 - \mu} \cdot \frac{s}{\|s\|}, \quad (28.5)$$

که در آن  $s$  سطح لغزش تابع  $(y, z)$  و  $f_n(t)$  یک تابع عددی مثبت است که با رابطه (۲۹.۵) توصیف می شود.

$$f_n(t) = \alpha + \|g\| + \mu \|C_c z + D_c y\| \quad \alpha > \circ, \quad (29.5)$$

از فرض ۲، داریم

$$\delta B = B \Delta F_B \rightarrow \delta B u = B q, \quad p = F_B u, \quad (30.5)$$

که در آن  $q = \Delta p$ .

با وجود فرض های ۱-۳، می توان کنترل مرتبه کسری مد لغزشی پسخورد خروجی پویا<sup>۲</sup> را برای (۲۲.۵) طراحی کرد. به این منظور سیستم حلقه بسته، به شکل زیر باز نویسی می گردد.

$$(31.5)$$

$$\begin{bmatrix} {}^C D_t^v x \\ {}^C D_t^v z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_A F_A N & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \circ \end{bmatrix} (g + q + u_n),$$

$$y = \begin{bmatrix} C & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}.$$

$$p = \begin{bmatrix} F_B D_c C & F_B C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + F_B u_n.$$

<sup>2</sup>Fractional order dynamic output feedback sliding mode control (FDOF-SMC)

با تعریف بردارهای  $Y = [y^T \ z^T]^T$  و  $X = [x^T \ z^T]^T$  داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\nu X &= (A_{cl} + \Delta A_{cl})X + B_{cl}(g + q + u_n), \\ Y' &= C'_{cl}X, \\ p &= LX + F_B u_n, \end{aligned} \quad (32.5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad \Delta A_{cl} = \begin{bmatrix} D_A F_A N & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \\ B_{cl} &= \begin{bmatrix} B \\ \circ \end{bmatrix}, \quad C'_{cl} = [C \ \circ], \quad L = [F_B D_c C \ F_B C_c]. \end{aligned} \quad (33.5)$$

## ۱.۲.۵ تحلیل پایداری

ابتدا سطح لغزش به صورت زیر تعریف می شود.

$$s = KY, \quad (34.5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} KC_{cl} &= B_{cl}^T \lambda, \quad K = [k_1 \ k_2], \\ C_{cl} &= \begin{bmatrix} C & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix}, \quad Y = C_{cl}X \end{aligned} \quad (35.5)$$

$$\lambda = C_{cl}^T K^T K C_{cl}. \quad (36.5)$$

قضیه ۱.۲.۵. سیستم (۲۲.۵) که در فرضیات ۱-۳ صدق می کند را در نظر بگیرید. با اعمال دینامیک کنترل کننده توصیف شده در (۲۷.۵)، حالت های سیستم به سمت سطح لغزش در زمان محدود میل کرده و سیستم حلقه بسته (۳۱.۵) پایدار مجانبی است.

برهان. تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید

$$V = \frac{1}{\gamma} s^T s \quad (37.5)$$

با گرفتن مشتق مرتبه کسری از (۳۷.۵) بر اساس (۳۲.۲) داریم

$${}^C D_t^\nu V \leq s^T {}^C D_t^\nu s. \quad (38.5)$$

با جایگذاری (۳۴.۵) در (۳۸.۵)، داریم

$${}^C D_t^\nu V \leq (K C_{cl} X)^T {}^C D_t^\nu (K C_{cl} X) = X^T C_{cl}^T K^T K C_{cl} {}^C D_t^\nu X. \quad (39.5)$$

با توجه به تعریف  $\lambda$  در (۳۶.۵)، رابطه (۴۰.۵) حاصل می شود.

$${}^C D_t^\nu V \leq X^T \lambda {}^C D_t^\nu X. \quad (40.5)$$

با جایگذاری (۳۲.۵) در (۴۰.۵)، رابطه (۴۱.۵) بدست می آید.

$${}^C D_t^\nu V \leq X^T \lambda [(A_{cl} + \Delta A_{cl})X + B_{cl}(g + q + u_n)]. \quad (41.5)$$

با تعریف  $E_{cl} = \begin{bmatrix} E & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$  حاصل زیر، بدیهی است

$$\Delta A_{cl} \leq E_{cl}, \quad (42.5)$$

$${}^C D_t^\nu V \leq X^T \lambda (A_{cl} + E_{cl})X + X^T \lambda B_{cl}(g + q + u_n). \quad (43.5)$$

چنانچه ماتریس مثبت معین  $P$  وجود داشته باشد که

$$\lambda(A_{cl} + E_{cl}) \leq -P, \quad P \geq \circ. \quad (44.5)$$

بر اساس روابط (۳۴.۵)–(۳۵.۵) و جایگذاری (۴۴.۵) در (۴۳.۵) داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\nu V &\leq -X^T P X + s^T (g + q) - \frac{\|s\| f_n(t)}{\sqrt{1-\mu}} \\ &\leq -X^T P X + \|s\| (\|q\| + \|g\|) - \frac{\|s\| f_n(t)}{\sqrt{1-\mu}}. \end{aligned} \quad (45.5)$$

با استفاده از (۳۰.۵)،  $q = \Delta F_B u$ ، و (۲۵.۵)،  $\|\Delta F_B\| \leq \mu$  داریم

$${}^C D_t^\nu V \leq -X^T P X + \|s\| (\mu \|u\| + \|g\| - \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-\mu}}). \quad (46.5)$$

با جایگذاری (۲۸.۵) در (۴۶.۵)، رابطه (۴۷.۵) بدست می آید.

$${}^C D_t^\nu V \leq -X^T P X + \|s\| (\mu \|C_c z + D_c y\| + \mu \|u_n\| + \|g\| - \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-\mu}}). \quad (47.5)$$

از (۲۸.۵) نتیجه  $\mu \|s\| \|u_n\| = \frac{\mu \|s\|}{\sqrt{1-\mu}} f_n(t)$  قابل حصول است. بر این اساس

$$\frac{\mu \|s\|}{\sqrt{1-\mu}} f_n(t) - \frac{\|s\|}{\sqrt{1-\mu}} f_n(t) = -\|s\| f_n(t). \quad (48.5)$$

با جایگذاری (۴۸.۵) در (۴۷.۵)، بدست می آوریم

$${}^C D_t^\nu V \leq -X^T P X + \|s\| (\mu \|C_c z + D_c y\| + \|g\| - f_n(t)). \quad (49.5)$$

در نهایت با اعمال (۲۹.۵) به (۴۹.۵)، خواهیم داشت

$$(50.5)$$

$${}^C D_t^\nu V \leq -X^T P X + \|s\| (\mu \|C_c z + D_c y\| + \|g\| - (\alpha + \|g\| + \mu \|C_c z + D_c y\|)).$$

در این بخش،  ${}^C D_t^\nu V \leq -X^T P X - \alpha \|s\| \leq -\alpha \|s\|$  بدست آمد که بر اساس قضیه ۱۲.۱.۳ □ پایداری سیستم را نتیجه می دهد.

با توجه به قضیه ۱.۲.۵ با اعمال دینامیک کنترل کننده توصیف شده در (۲۷.۵)، حالت های سیستم به سمت سطح لغزش در زمان محدود میل کرده و سیستم حلقه بسته (۳۱.۵) پایدار مجانبی است. با این حال این سوال مطرح می شود که آیا شرایط حصول به این نتیجه فراگیر است یا شرایط خاصی را طلب می کند؟ قضیه ۲.۲.۵ به این سوال پاسخ می دهد.

قضیه ۲.۲.۵. فرض کنید  $D_s = \{X \in R^{n+k} \mid \|X\| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\|\bar{h}\|}}\}$  ناحیه ای محدود باشد. اگر حالت های سیستم حلقه بسته در این ناحیه قرار داشته باشد،  $X \in D_s$ ، آنگاه حالت های سیستم حلقه بسته به سطح لغزش همگرا می شوند.

$$\text{که در آن } \bar{h} = \sigma K C_{cl} (A_{cl} + E_{cl}) \text{ و } \sigma = (B_{cl}^T \lambda B_{cl})^{-1}.$$

برهان. تابع لیپانوف زیر را در نظر بگیرید

$$V_1 = \frac{1}{\sigma} s^T \sigma s \quad (۵۱.۵)$$

$$\text{که در آن } \sigma = (B_{cl}^T \lambda B_{cl})^{-1}.$$

با اعمال مشتق مرتبه کسری از تابع لیپانوف فوق، بر اساس (۳۲.۲) داریم

$${}^C D_t^v V_1 \leq s^T \sigma {}^C D_t^v s. \quad (۵۲.۵)$$

با جایگذاری (۳۴.۵) و حالت های سیستم (۳۲.۵) در (۵۲.۵)، حاصل زیر بدست می آید.

$${}^C D_t^v V_1 \leq s^T \sigma K C_{cl} {}^C D_t^v X = s^T \sigma K C_{cl} ((A_{cl} + \Delta A_{cl})X + B_{cl}(q + u_n + g)). \quad (۵۳.۵)$$

از (۴۲.۵) داریم

$${}^C D_t^v V_1 \leq s^T \sigma K C_{cl} ((A_{cl} + E_{cl})X + B_{cl}(g + q + u_n)). \quad (۵۴.۵)$$

با تعریف  $\bar{h} = \sigma K C_{cl} (A_{cl} + E_{cl})$  و معادله (۳۵.۵)، داریم

$${}^C D_t^v V_1 \leq s^T \bar{h} X + s^T \sigma B_{cl}^T \lambda B_{cl} (g + q + u_n). \quad (۵۵.۵)$$

با اعمال  $\sigma = (B_{cl}^T \lambda B_{cl})^{-1}$  رابطه (۵۶.۵) منتج می شود.

$${}^C D_t^v V_1 \leq \|s\| \|\bar{h} X\| + \|s\| (\|q\| + \|g\|) + s^T u_n. \quad (۵۶.۵)$$

با استفاده از (۲۷.۵)، (۲۹.۵)، (۳۰.۵) و  $q = \Delta p$ ، داریم

$${}^C D_t^v V_1 \leq \|s\| \|\bar{h} X\| + \mu \|s\| \|u_n\| + \mu \|s\| \|C_c z + D_c y\| + \|s\| \|g\| + s^T u_n. \quad (۵۷.۵)$$

با جایگذاری (۲۸.۵) در (۵۷.۵)، رابطه زیر بدست می آید.

$$(۵۸.۵)$$

$${}^C D_t^v V_1 \leq \|s\| \|\bar{h} X\| + \mu \|s\| \left\| -\frac{f_n(t)}{\sqrt{1-\mu}} \right\| + \mu \|s\| \|C_c z + D_c y\| + \|s\| \|g\| - \|s\| \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-\mu}}.$$

$${}^C D_t^\nu V_1 \leq \|s\| \|\bar{h}\| \|X\| - \|s\| \alpha. \quad (59.5)$$

اگر  $\|\bar{h}\| = 0$ ، آنگاه  ${}^C D_t^\nu V_1 \leq -\|s\| \alpha$  است. در غیر این صورت، شرایط رسیدن حالت ها به سطح لغزش به قرار زیر است.

$$X \in D_s, D_s = \left\{ X \in R^{n+k} \mid \|X\| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\|\bar{h}\|}} \right\}. \quad (60.5)$$

بنابراین مشتق زمانی تابع لیپانوف همواره منفی ( ${}^C D_t^\nu V_1 < 0$ ) بوده و اثبات به پایان می رسد.  $\square$

### روند طراحی

در این بخش، طراحی کنترل مرتبه کسری مد لغزشی پسخورد خروجی پویا به صورت گام به گام ارائه می شود. بر اساس (۴۴.۵)، ماتریس های  $\lambda$  و  $P \geq 0$  وجود دارند که در رابطه زیر صدق می کنند.

$$\lambda(A_{cl} + E_{cl}) = -P. \quad (61.5)$$

از (۳۶.۵)،  $\lambda = C_{cl}^T K^T K C_{cl} \geq 0$ ، روند زیر بر اساس LMI برای طراحی کنترل مرتبه کسری مد لغزشی پسخورد خروجی پویا ارائه می شود.

$$\text{گام اول: } I = \begin{bmatrix} k_1^T \\ k_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} = B_{cl}^T C_{cl}^T K^T \text{ قرار می دهیم.}$$

گام دوم:  $k_1$  را از گام اول محاسبه کرده و سپس  $k_2$  را طوری انتخاب کرده که ماتریس  $K$  دارای رتبه کامل باشد.

گام سوم:  $\lambda = C_{cl}^T K^T K C_{cl}$  را محاسبه کرده و  $P = \varepsilon I, \varepsilon \geq 0$  قرار می دهیم، سپس  $A_c, B_c, C_c$  و  $D_c$  را از (۴۴.۵) بدست می آوریم.

مثال ۵-۵: برای ارزیابی طراحی کنترل کننده مرتبه کسری مد لغزشی پسخورد خروجی

پویا، سیستم با پارامترهای زیر را در نظر بگیرید [۶۵]

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(62.5)

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0.5 \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta B = 0.5 B \sin(t).$$



از (۲۳.۵) و (۲۵.۵)، داریم

$$D_A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (63.5)$$

$$F_A(t) = \sin(t), \quad \mu = F_B = 0.5, \quad \Delta = \sin(t).$$

علاوه بر این  $g = \text{sat}(Hy)$  با  $H = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$  قرار می دهیم. با  $\alpha = 2$ ، که عدد مثبت دلخواه است و بکار بردن روند پیشنهادی شده برای طراحی کنترل کننده مرتبه کسری مد لغزشی پسخورد خروجی پویا و در نظر گرفتن (۲۷.۵)، پارامترهای کنترل کننده به قرار زیر است.

$$A_c = \begin{bmatrix} -4/3261 & 0 & 0 \\ -1 & -4/3261 & 0 \\ -1 & -1 & -4/3261 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0.0333 & -0.0667 \\ -0.0333 & -0.0667 \\ -0.0333 & -0.0667 \end{bmatrix}, \quad (64.5)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -0.0667 & -0.0667 & -0.0667 \end{bmatrix},$$

$$D_c = \begin{bmatrix} -5/3603 & 1/2601 \end{bmatrix}.$$

ترم غیر خطی کنترل کننده مرتبه کسری مد لغزشی پسخورد خروجی پویا عبارت است از

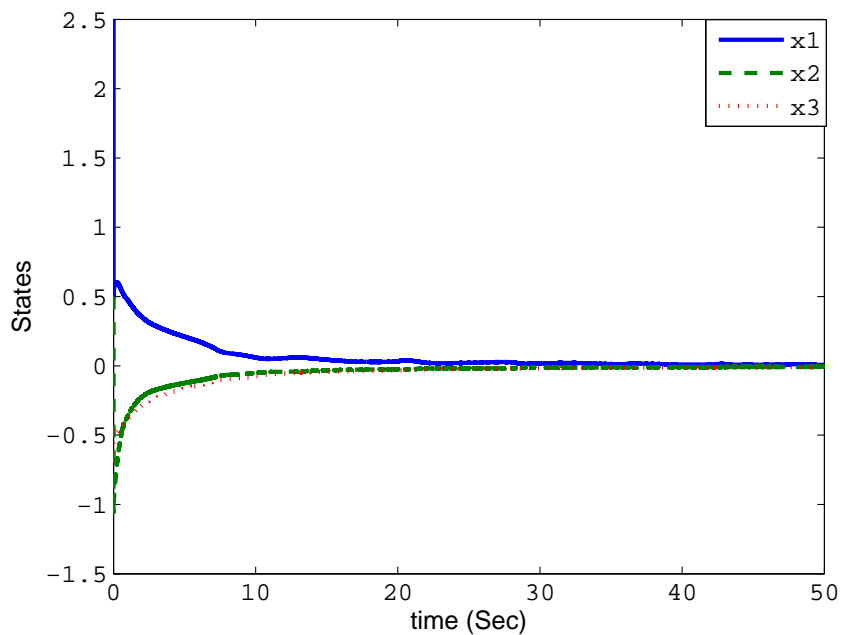
$$u_n = -\frac{f_n(t)}{1-\mu} \cdot \frac{s}{\|s\|}, \quad (65.5)$$

$$\text{که در آن } f_n(t) = 2 + \|\text{sat}(Hy)\| + 0.5 \|C_c z + D_c y\|$$

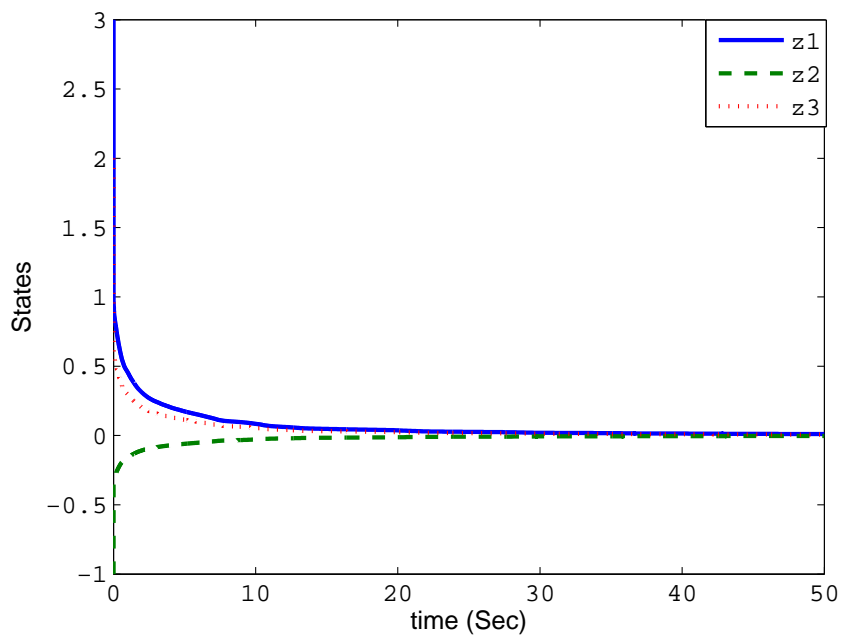
نتایج بدست آمده، شامل مسیرهای حالت مربوط به سیستم و کنترل کننده، سطح لغزش و ورودی کنترل با  $v = 0.7$  و  $v = 0.9$  در شکل های ۸-۵ تا ۱۵-۵ نشان داده شده است. از شکل های ۸-۵ و ۹-۵ مشاهده می شود که حالت های سیستم و حالت های کنترل کننده به سطح لغزش در زمان محدود می رسند که پایداری سیستم حلقه بسته با وجود نامعینی و محدودیت اشباع بر روی حالت ها را نتیجه می دهد. با مقایسه شکل های ۸-۵ و ۱۲-۵ می توان اثر تغییر مرتبه مشتق را مشاهده کرد که با افزایش مرتبه مشتق،

۸۶ تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع در ورودی و حالت هاع

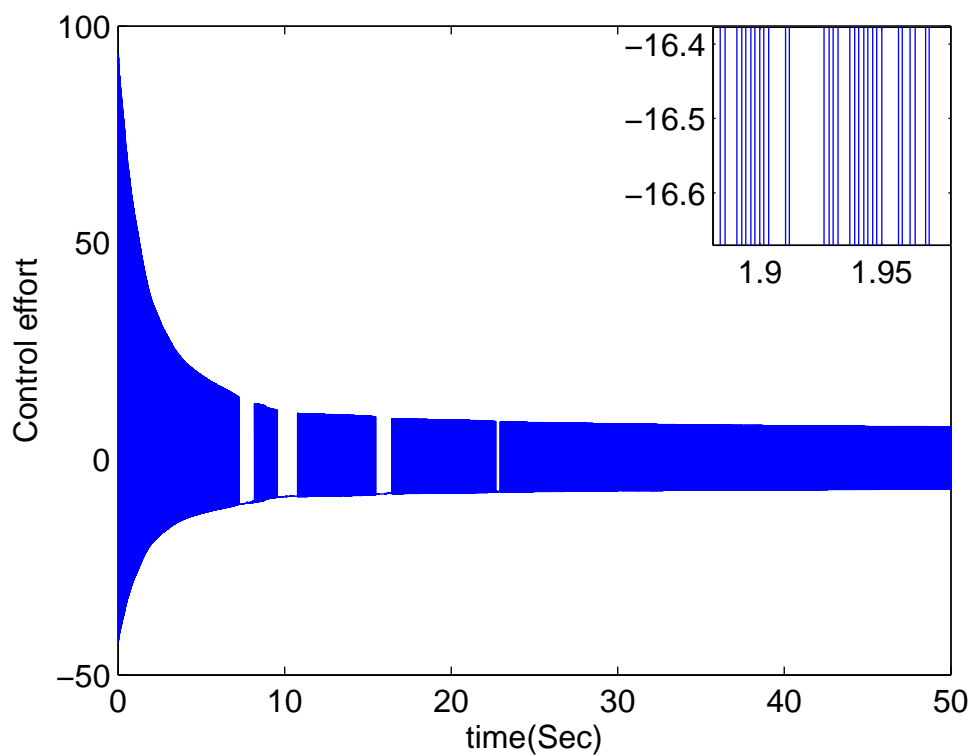
---



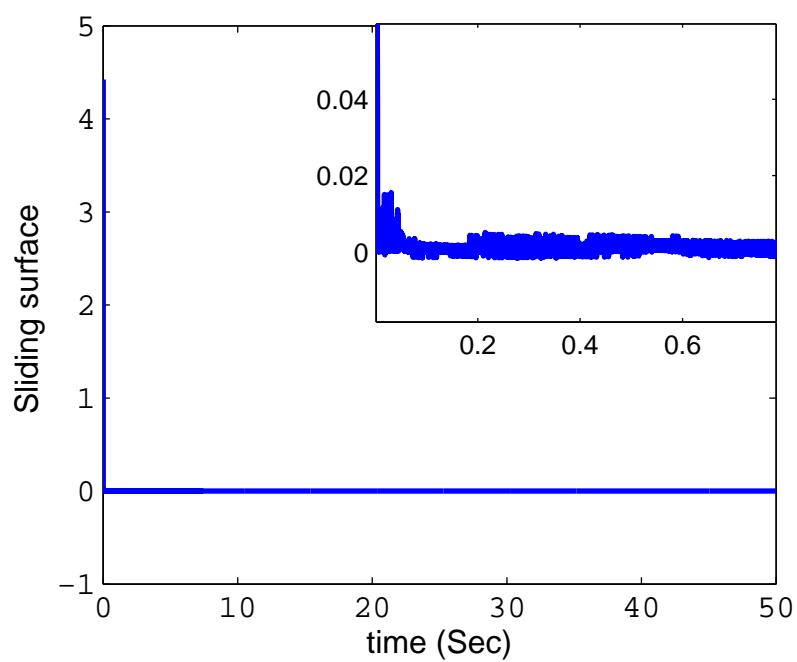
شکل ۴.۵: نحوه تغییرات حالت های سیستم حلقه بسته (۶۲.۵) با  $v = 0.7$



شکل ۵.۵: نحوه تغییرات حالت های کنترل کننده سیستم (۶۲.۵) با  $v = 0.7$

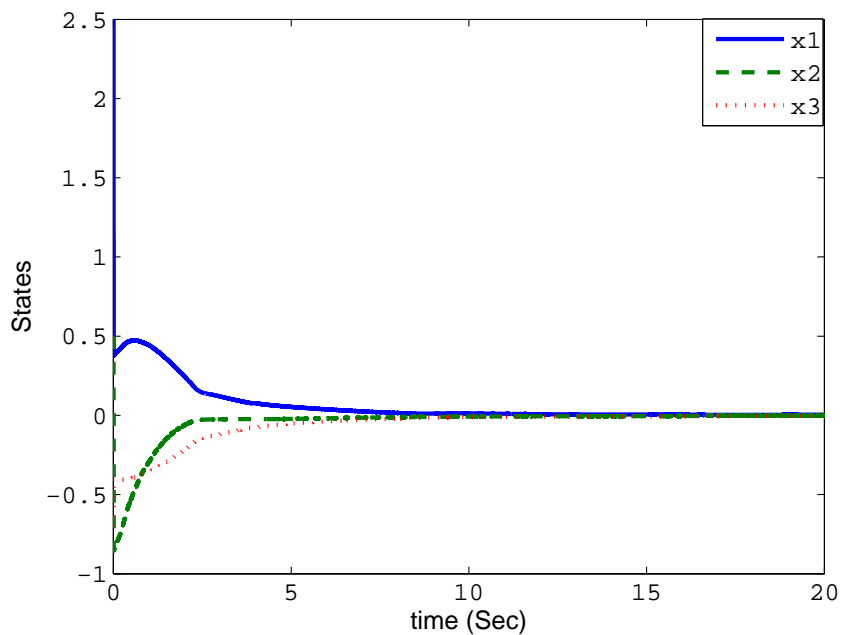


شکل ۶.۵: تغییرات سیگنال کنترلی با  $v = 0.7$

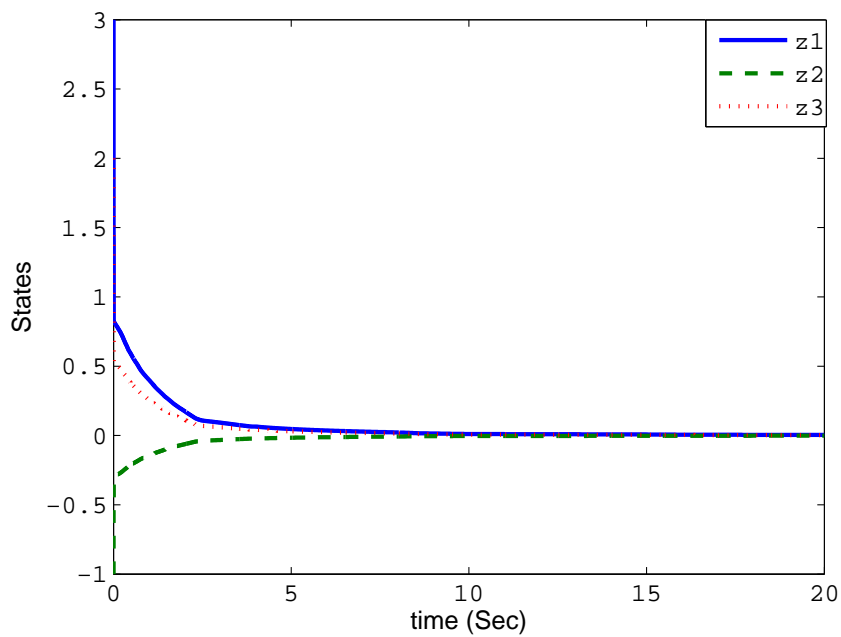


شکل ۷.۵: تغییرات سطح لغزش با  $v = 0.7$

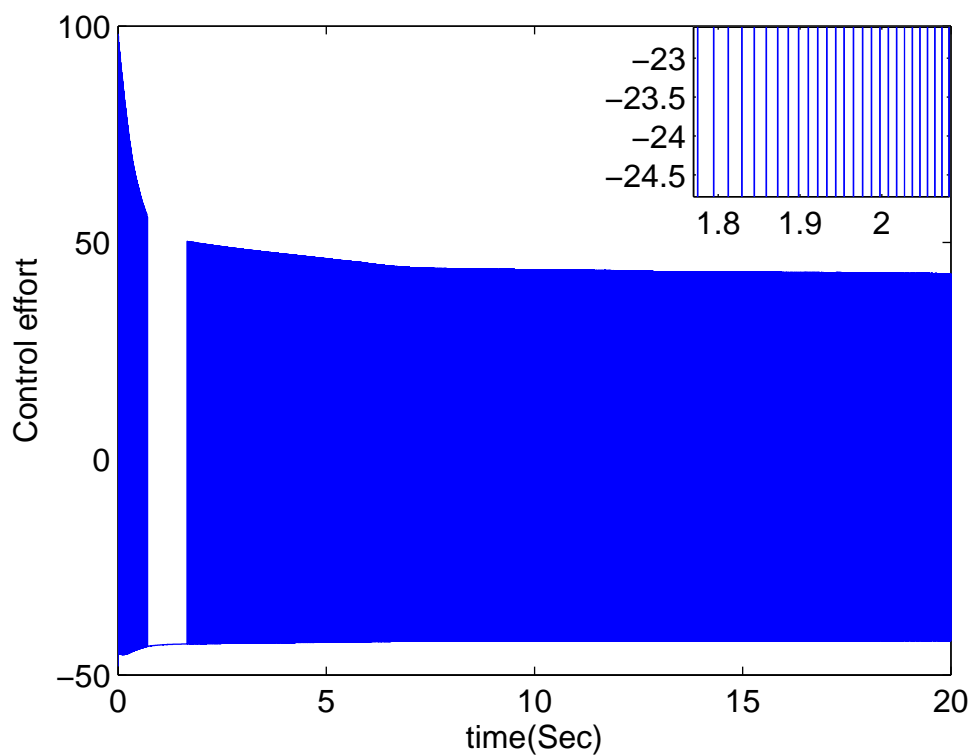
## ۸۸ تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع در ورودی و حالت هاع



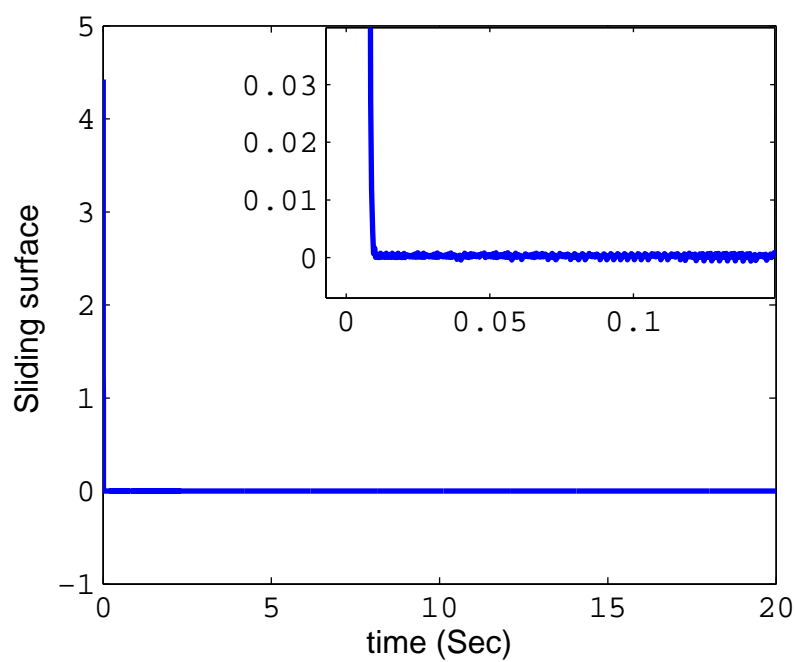
شکل ۸.۵: نحوه تغییرات حالت های سیستم حلقه بسته (۶۲.۵) با  $v = 0.9$



شکل ۹.۵: نحوه تغییرات حالت های کنترل کننده سیستم (۶۲.۵) با  $v = 0.9$



شکل ۱۰.۵: تغییرات سیگنال کنترلی با  $v = 0.9$



شکل ۱۱.۵: تغییرات سطح لغزش با  $v = 0.9$

۹۰ تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری نامعین با محدودیت اشباع در ورودی و حالت هاع

سیستم حلقه بسته سریع تر همگرا شده است. این اثر با مقایسه شکل های ۱۱-۵ و ۱۵-۵، با کاهش دامنه کلید زنی نیز قابل مشاهده است. البته همانطور که در شکل های ۱۰-۵ و ۱۱-۵ مشاهده می شود فرکانس کلید زنی بسیار زیاد است که در عمل باعث خرابی و فرسودگی دستگاه می شود.

باید توجه داشت که فرکانس کلیدزنی نباید به فرکانس تحریک نزدیک باشد چرا که باعث تشدید در سیستم شده که در بسیاری از کاربردها مطلوب نیست و پاسخ مطلوب شکل های ۸-۵، ۹-۵، ۱۲-۵ و ۱۳-۵ به علت بالابودن نرخ کلید زنی است. باید توجه داشت این روش طراحی منحصر به غیر خطی محدودیت اشباع بر روی حالت ها نیست و می توان این روش طراحی کنترل کننده مد لغزشی پویا را برای هر غیر خطی محدودی که تابع حالت های خروجی باشد، بکار برد.

## جمع بندی

در این فصل تحلیل پایداری مقاوم سیستم خطی نامعین مرتبه کسری همسان با وجود محدودیت اشباع مطالعه گردید. این محدودیت می تواند بر روی کنترل کننده ورودی و یا بر روی حالت های سیستم وجود داشته باشد. شروط پایداری مقاوم با دو روش حل معادلات دیفرانسیل توصیف کننده سیستم و روش لیاپانوف مرتبه کسری با طراحی کنترل کننده پسخورد حالت زمانی که محدودیت بر روی ورودی کنترل کننده وجود داشته باشد، بدست آمد. سپس با در نظر گرفتن محدودیت اشباع بر روی حالت ها، کنترل کننده مد لغزشی پسخورد خروجی با دینامیک مرتبه کسری برای سیستم غیر خطی طراحی گردید. نتایج شبیه سازی صحت نتایج حاصله را تایید می کند.

## فصل ۶

# جمع بندی و پیشنهادات

### پیشگفتار

در این فصل خلاصه ای از کارهای انجام شده به علاوه پیشنهادات قابل انجام در آینده ارائه می شود.

### ۱.۶ خلاصه و جمع بندی

در این رساله، مبحث پایداری سیستم های خطی مرتبه کسری همسان با تعریف مشتق مرتبه کسری کپوتو و با در نظر گرفتن محدودیت اشباع مطالعه گردید. انتخاب تعریف مشتق کپوتو برای سیستم، نیاز به شرایط اولیه مرتبه صحیح برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه کسری و مفهوم فیزیکی برای این شرایط اولیه می باشد. سپس به دلیل وجود غیر خطی ها و نامعینی در پارامترها که در مدلسازی ریاضی سیستم های خطی شده وجود دارد، بحث تحلیل پایداری سیستم خطی مرتبه کسری معین به سیستم غیر خطی مرتبه کسری معین و سیستم خطی مرتبه کسری نامعین گسترش داده شد.

برای رسیدن به این اهداف، فصل اول به معرفی محدودیت اشباع و ضرورت مطالعه آن اختصاص داده شد. در فصول دوم و سوم، مفاهیم و قضایای مورد نیاز تحلیل سیستم های مرتبه کسری مورد نیاز این رساله بیان شده اند. در فصل چهارم، پایداری سیستم خطی

مرتبه کسری معین و گسترش تحلیل پایداری به کلاس خاصی از سیستم های غیر خطی مرتبه کسری با وجود محدودیت بر روی کنترل کننده ورودی مطالعه گردید. نهایتاً، در فصل پنجم، پایداری مقاوم سیستم های خطی نامعین وقتی محدودیت در کنترل ورودی و یا بر روی حالت ها وجود دارد، بررسی شده است.

لازم به ذکر است که تحلیل پایداری در سیستم های مرتبه کسری به دو صورت حل معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم و یا با کمک قضایای لیاپانوف مرتبه کسری انجام می شود که در این رساله هر دو روش به کار رفته است. همچنین، محدودیت اشباع به عنوان یکی از محدودیت های فیزیکی موجود در سیستم ها در دو حالت بکار برده شده است، یکی محدودیت بر روی سیگنال کنترلی و دیگری محدودیت بر روی حالت های سیستم می باشد. کنترل کننده پسخورد حالت برای پایداری و پایداری سازی سیستم معین و نامعین با محدودیت در سیگنال کنترلی طراحی شده است در حالی که زمانی که محدودیت بر روی حالت های سیستم وجود داشته باشد، کنترل مد لغزشی پسخورد خروجی پویا طراحی شده است.

## ۲.۶ پیشنهادات

تمرکز این رساله بر روی سیستم های خطی مرتبه کسری همسان با محدودیت اشباع روی کنترل کننده یا روی حالت های سیستم می باشد. می توان پیشنهادات زیر را برای ادامه با در نظر گرفتن محدودیت اشباع بر روی ورودی یا حالت های سیستم مطرح کرد.

- طراحی کنترل کننده بهینه برای دستیابی عملکرد بهینه
- در نظر گرفتن سیستم غیر خطی مرتبه کسری با محدودیت اشباع



# مراجع

- [1] I Podlubny, "Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications," vol. 198. Academic press, 1998.
- [2] J Sabatier, O P Agrawal, J A Tenreiro Machado, "Advances in fractional calculus," Dordrecht: Springer, Netherlands, vol. 4, no. 9, 2007.
- [3] S Das, "Fractional function calculus," Springer Science Business Media, 2011.
- [4] I Petráš, "Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation," Springer Science and Business Media, 2011.
- [5] A R Teel, "A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation," IEEE transactions on Automatic Control, vol. 41, no. 9, pp. 1256-1270, 1996.
- [6] T Hu, Z Lin, "Control systems with actuator saturation: analysis and design," Springer Science Business Media, 2001.
- [7] M Mohadeszadeh, H Delavari, "Synchronization of uncertain fractional-order hyper-chaotic systems via a novel adaptive interval type-2 fuzzy active sliding mode controller," International Journal of Dynamics and Control, vol. 5, no. 1, pp. 135-144, 2017.
- [8] O Heaviside, "Electromagnetic theory," New York: Chelsea, 1971.
- [9] M P Lazarević, P D Mandić, B Cvetković, T B Šekara, B Lutovac, "Some electromechanical systems and analogies of mem-systems integer and fractional order,"  $\Delta^{th}$  Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), pp. 230-233, 2016.
- [10] T J Freeborn, "A survey of fractional-order circuit models for biology and biomedicine," IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, vol. 3, no. 3, pp. 416-424, 2013.

- [11] K Adolfsson, M Enelund, P Olsson, "On the fractional order model of viscoelasticity," *Mechanics of Time-dependent materials*, vol. 9, no.1, pp. 15-34, 2005.
- [12] Y Z Povstenko, "Fractional heat conduction equation and associated thermal stress," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 28, no.1, pp. 83-102, 2004.
- [13] A M Lopes, J A Tenreiro Machado, C M A Pinto, A M S F Galhano, "Fractional dynamics and MDS visualization of earthquake phenomena," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 66, no. 5, pp.,647-658, 2013.
- [14] Z Liao, C Peng, W Li, Y Wang, "Robust stability analysis for a class of fractional order systems with uncertain parameters", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 6, pp. 1101-1113, 2011.
- [15] J G Lu, G Chen, "Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: an LMI approach", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 54, no. 6, pp. 1294-1299, 2009.
- [16] Q Yang, D Chen, T Zhao, Y Q Chen, "Fractional calculus in image processing: a review," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 19, no. 5, pp. 1222-1249, 2016.
- [17] S A Taher, M Hajiakbari Fini, S Falahati Aliabadi, "Fractional order PID controller design for LFC in electric power systems using imperialist competitive algorithm," *Ain Shams Engineering Journal*, vol. 5, no.1, pp. 121-135, 2014.
- [18] M S Krishna, S Das, K Biswas, B Goswami, " Fabrication of a fractional order capacitor with desired specifications: A study on process identification and characterization," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 58, no.11, pp.4067-4073, 2011.
- [19] Y Li, Y Q Chen, I Podlubny, " Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag–Leffler stability," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 5, pp. 1810-1821, 2010.
- [20] J Sabatier, M Moze, C Farges, "LMI stability conditions for fractional order systems," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no.5, pp. 1594-1609, 2010.
- [21] M S Tavazoei, M Haeri, M, " A note on the stability of fractional order systems," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, no.5, pp. 1566-1576, 2009.
- [22] N Aguila-Camacho, M A Duarte Mermoud, J A Gallegos, " Lyapunov functions for fractional order systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 9, pp. 2951-2957, 2014.

- [23] X J Wen, Z M Wu, J G Lu, "Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems," *IEEE Transactions on circuits and systems II: Express Briefs*, vol. 55, no. 11, pp. 1178-1182, 2008.
- [24] M Tavakoli-Kakhki, M Haeri, "Fractional order model reduction approach based on retention of the dominant dynamics: Application in IMC based tuning of FOPI and FOPID controllers," *ISA transactions*, vol. 50, no.3, pp. 432-442, 2011.
- [25] M A Zaky, J A Tenreiro Machado, "On the formulation and numerical simulation of distributed-order fractional optimal control problems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 52, pp. 177-189, 2017.
- [26] H P Ren, G Chen, "Control chaos in Brushless DC motor via piece-wise quadratic state feedback," In *International Conference on Intelligent Computing*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 149-158, 2005.
- [27] M Bettayeb, S Djennoune, "Design of sliding mode controllers for nonlinear fractional-order systems via diffusive representation", *Nonlinear Dynamics*, vol. 84, no. 2, pp. 593-605, 2016.
- [28] A M Mathai, H J Haubold, "Special functions for applied scientists," Springer Science, Business Media, 2008.
- [29] C Yin, Y Q Chen, S M Zhong, "LMI based design of a sliding mode controller for a class of uncertain fractional-order nonlinear systems," *American Control Conference (ACC) IEEE*, pp. 6511-6516, 2013.
- [30] D Matignon, "Generalized fractional differential and difference equations: stability properties and modelling issues," *Mathematical Theory of Networks and Systems symposium*, pp. 503-506, 1998.
- [31] M S Tavazoei, M Haeri, "A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems," *Physics Letters A*, vol. 367, pp. 102-113, 2007.
- [32] D Qian, C Li, R P Agarwal, P J Y Wong, "Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 52, no. 5, pp. 862-874, 2010.
- [33] B G Pachpatte, "A note on Gronwall-Bellman inequality," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 44. no 3, pp. 758-762, 1973.

- [34] C Farges, M Moze, J Sabatier, "Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems," *Automatica*, vol. 46, no.10, pp. 1730-1734, 2010.
- [35] Y Li, Y Q Chen, I Podlubny, "Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems," *Automatica*, vol. 45, no.8, pp. 1965-1969, 2009.
- [36] S J Sadati, D Baleanu, A Ranjbar, A, R Ghaderi, "Mittag-Leffler stability theorem for fractional nonlinear systems with delay," In *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2010, Hindawi Publishing Corporation, 2010.
- [37] E J J Slotine, W Li, "Applied nonlinear control," vol. 199, no. 1, 1991.
- [38] H K Khalil, "Nonlinear Systems," Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [39] J Chen, Z Zeng, P Jiang, "Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks," *Neural Networks*, vol. 51, pp. 1-8, 2014.
- [40] B Zhang, "Stability and Liapunov Functionals for Fractional Differential Equations," *Math and Computer science*, no. 12, pp. 1-10, 2012.
- [41] H Delavari, D Baleanu, J Sadati, "Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear systems revisited," *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 4, pp. 2433-2439, 2012.
- [42] L Chen, Y Chai, R Wu, J Yang, "Stability and stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems with Caputo derivative," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 59, no. 9, pp. 602-606, 2012.
- [43] Y Wei, H R Karimi, S Liang, Q Gao, Y Wang, "General output feedback stabilization for fractional order systems: an LMI approach," *Abstract and Applied Analysis*. vol. 2014. Hindawi Publishing Corporation, 2014.
- [44] C Lin, B Chen, Q G Wang, "Static output feedback stabilization for fractional-order systems in TS fuzzy models," *Neurocomputing*, vol. 218, pp. 354-358, 2016.
- [45] G Chen, Y Yang, "Stability of a class of nonlinear fractional order impulsive switched systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*," vol. 39, no. 5, pp. 781-790, 2017.
- [46] S E Hamamci, M Koksai, "Calculation of all stabilizing fractional-order PD controllers for integrating time delay systems," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no.5, pp. 1621-1629, 2010.

- [47] H Wei, R Li, C Chen, Z Tu, "Stability analysis of fractional order complex-valued memristive neural networks with time delays," *Neural Processing Letters*, vol. 45, no. 2, pp. 379-399, 2017.
- [48] I Petras, "Stability of fractional-order systems with rational orders," arXiv preprint arXiv: 0811.4102, 2008.
- [49] K Titouche, R Mansouri, M Bettayeb, U M Al-Saggaf, "Internal Model Control–Proportional Integral Derivative–Fractional-Order Filter Controllers Design for Unstable Delay Systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, no. 2, pp. 021006, 2016.
- [50] V Badri, M J Yazdanpanah, M S Tavazoei, "On Stability and Trajectory Boundedness of Lotka Volterra Systems with Polytopic Uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, DOI: 10.1109/TAC.2017.2663839, 2017.
- [51] I Petráš, Y Q Chen, B M Vinagre, "A robust stability test procedure for a class of uncertain LTI fractional order systems," In *Proc. of ICC'2002*, May, pp. 27-30, 2002.
- [52] Y Q Chen, H S Ahn, I Podlubny, "Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties," *Signal Processing*, vol. 86, no. 10, pp. 2611-2618, 2006.
- [53] Y Q Chen, S H Ahn, I Podlubny, "Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties," *Proceeding of the IEEE International conference on Mechatronics and Automation*, Niagara Falls, Canada, pp. 210-215, 2005.
- [54] H S Ahn, Y Q Chen, "Necessary and sufficient stability condition of fractional-order interval linear systems," *Automatica*, vol. 44, no. 11, pp. 2985-2988, 2008.
- [55] S Y Xing, J G Lu, "Robust stability and stabilization of fractional-order linear systems with nonlinear uncertain parameters: An LMI approach," *Chaos Solitons and Fractals*, vol. 42, no. 2, pp. 1163-1169, 2009.
- [56] C Li, J Wang, "Robust stability and stabilization of fractional order interval systems with coupling relationships: the  $0 < \alpha < 1$  case," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no.

- [57] J G Lu, Y Q Chen, "Robust stability and stabilization of fractional order interval systems with the fractional order  $\alpha$ : The  $0 < \alpha < 1$  case," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 1, pp. 152-158, 2010.
- [58] I N'Doye, M Zasadzinski, M Darouach, N E Radhy, "Robust stabilization of linear and nonlinear fractional-order systems with nonlinear uncertain parameters," In Decision and Control (CDC) 49<sup>th</sup> IEEE Conference on, pp. 4275-4280, 2010.
- [59] Y Ma, J Lu, W Chen, "Robust stability and stabilization of fractional order linear systems with positive real uncertainty," ISA transactions, vol. 53, no. 2, pp. 199-209, 2014.
- [60] I N'Doye, M Darouach, H Voos, M Zasadzinski, "On the robustness of linear and non-linear fractional-order systems with non-linear uncertain parameters," IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 33, no. 4, pp. 997-1014, 2015.
- [61] S Zheng, "Robust stability of fractional order system with general interval uncertainties," Systems and Control Letters, vol. 99, pp. 1-8, 2017.
- [62] D Valrio, "Introducing fractional sliding mode control," Proceedings of The Encontro de Jovens Investigadores do LAETA FEUP, pp.1-9, 2012.
- [63] V T Pham, S Vaidyanathan, K C Volos, A T Azar, T M Thang, V Van Yem, "A Three-Dimensional No-Equilibrium Chaotic System: Analysis, Synchronization and Its Fractional Order Form," In Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems, pp. 449-470. Springer International Publishing, 2017.
- [64] S Dadras, Y Q Chen, "Sliding Mode Based LMI Criterion for Robust Stabilization of Uncertain Fractional Order Nonlinear Systems," matrix, vol. 11, pp. 12-17, 2013.
- [65] S Dadras, H R Momeni, "Fractional order dynamic output feedback sliding mode control design for robust stabilization of uncertain fractional nonlinear systems", Asian Journal of Control, vol. 16, no. 2, pp. 489-497, 2014.
- [66] Q Zhong, F Zhong, J Cheng, H Li, S Zhong, "State of charge estimation of lithium-ion batteries using fractional order sliding mode observer," ISA transactions, vol. 66, pp. 448-459, 2017.
- [67] Z Belkhatir, T M Laleg-Kirati, "High-order sliding mode observer for fractional commensurate linear systems with unknown input," Automatica, vol. 82, pp. 209-217, 2017.

- [68] Y H Lim, K K Oh, H S Ahn, "Stability and stabilization of fractional-order linear systems subject to input saturation", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 58, no. 4, pp. 1062-1067, 2013.
- [69] Y H Lim, H S Ahn, "Utilization of Gronwall-Bellman lemma in fractional order systems," *Distributed Control and Autonomous Systems Lab., Gwangju Inst. Sci. and Tech., GIST DCASL TR, 1*, vol. 2012, 2012.
- [70] E S Alaviyan Shahri, S Balochian, "Stability region for fractional-order linear system with saturating control," *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 283-290, 2014.
- [71] E S Alaviyan Shahri, S Balochian, "Analysis of fractional-order linear systems with saturation using Lyapunov's second method and convex optimization," *International Journal of Automation and Computing*, vol. 4, no. 12, pp.440-447, 2015.
- [72] E S Alaviyan Shahri, S Balochian, "An analysis and design method for fractional order linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 37, no. 2, pp. 305-322, 2016.
- [73] E S Alaviyan Shahri, S Balochian, "A stability analysis on fractional order linear system with nonlinear saturated disturbance," *National Academy Science Letters*, vol. 38, no. 5, pp. 409-413, 2015.
- [74] L Chuang, L Junguo, "On the ellipsoidal invariant set of fractional order systems subject to actuator saturation," In *Control Conference (CCC), 2015 34th Chinese IEEE*, pp. 800-805, 2015.
- [75] K Chen, J Lu, C Li, "The ellipsoidal invariant set of fractional order systems subject to actuator saturation: the convex combination form," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 3, no. 3, pp.311-319, 2016.
- [76] X Zhang, S Li, B Li, "Robust stabilization of fractional-order linear systems subject to input saturation with the fractional order  $0 < \alpha < 1$ ," In *Control and Decision Conference (CCDC) , 35th Chinese IEEE*, pp. 1618-1622, 2016.
- [77] T Hu, Z Lin, B M Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Automatica*, vol. 38, no. 2, pp. 351-359, 2002.

- [78] R Tang, K Chen, C Li, "Ellipsoidal invariant set of fractional order uncertain systems subject to actuator saturation and disturbance," In Control Conference (CCC), 2016 35th Chinese IEEE, pp. 10412-10417, 2016.
- [79] L I Chuang, K Chen, J Lu, R Tang, " Stability and Stabilization Analysis of Fractional-Order Linear Systems Subject to Actuator Saturation and Disturbance," IFAC-PapersOnLine, vol. 50, no. 1, pp. 9718-9723, 2017.
- [80] D Sheng, Y Wei, S Cheng, Y Wang, "Observer-based adaptive backstepping control for fractional order systems with input saturation," ISA transactions, DOI: 10.1016/j.isatra.2017.06.021, 2017.
- [81] D Sheng, Y Wei, S Cheng, J Shuai, "Adaptive backstepping control for fractional order systems with input saturation," Journal of the Franklin Institute, vol. 354, no. 5, pp.2245-2268, 2017.
- [82] T Hu, Z Lin, Control systems with actuator saturation: analysis and design, Springer Science Business Media, 2001.
- [83] S J Leon, "Linear algebra with applications," New York: Macmillan, 1980.
- [84] D Matignon, B d'Andrea-Novel, "Observer-based controllers for fractional differential systems," In Decision and Control, Proceedings of the 36<sup>th</sup> IEEE Conference on IEEE, vol. 5, pp. 4967-4972, 1997.
- [85] S Balochian, A Khaki Sedigh, A Zare, "Variable structure control of linear time invariant fractional order systems using a finite number of state feedback law," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 16, no.3, pp.1433-1442, 2011.
- [86] W Ahmad, R El-Khazali, A S Elwakil, "Fractional-order Wien-bridge oscillator," Electronics Letters, vol. 37, no. 18, pp. 1110-1112, 2001.
- [87] A G Radwan, A M Soliman, A S Elwakil, "Design equations for fractional order sinusoidal oscillators: Four practical circuit examples," International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 36, no. 4, pp. 473-492, 2008.





## **Abstract**

The main purpose of this thesis is to analyze the stability of commensurate fractional order (FO) linear systems subject to saturation element. To this reason, first, a new stability condition is proposed to estimate the region of attraction using the Lyapunov direct method. Then, the stability of a certain class of FO non-linear systems under control saturation is investigated using the Granular-Bellman theorem and sector boundary condition. The stability analysis of the FO uncertain linear systems is also studied by means of the solution estimation of differential equation. Finally, stability analysis of uncertain class of FO linear systems is discussed in the presence of state saturation. Simulation results illustrate the appropriate performance of the designed controllers.

**Key words:** Fractional order Systems, Saturation, Stability, Uncertainty



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty Of Electrical Robotic Engineering**

**PhD Thesis in:**

**Stability analysis of fractional order linear  
system subject to saturation**

**By: Esmat Sadat Alaviyan Shahri**

**Supervisor**

**Dr Alireza Alfi**

**Advisor**

**Professor J. Tenreiro Machado**

**February 2018**