

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی برق و رباتیک  
پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی کنترل

**تنظیم کنترل کننده‌ی مرتبه‌ی کسری تناسبی-انتگرالی- مشتق‌گیر برای یک  
سیستم مکانیکی مرتبه کسری به روش خاریتانوف**

نگارنده:

محسن ابراهیمی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا الفی

دی ۱۳۹۵



تقدیم بہ

ساحت مقدس امام زمان (عج) اللہ تعالیٰ

پروماد عزیزتر از جانم

## شکر و قدردانی:

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است، و به شکر اندرش فرید نعمت،

حمد و سپاس بی کران خدای را که مسیر علم و دانش را بر من هموار داشت تا بتوانم در این راه قدم بردارم

بر خود لازم میدانم تا از تمامی بزرگوارانی که در این راه به بنده کمک نموده اند شکر و قدردانی نمایم. و بدین وسیله از زحمات معلمین و اساتید محترمی که

با صبر و بردباری مسئولیت آموزش و تعلیم بنده را به عهده داشتند کمال شکر را می نمایم

بهچنین استاد بزرگوارم جناب استاد دکتر علیرضا الفی کمال شکر را دارم که در این مدت همچون دوستی مهربان مرا از راهبانی های خود بهره مند ساختند و

بهچنین از خانم مهندس عصمت علویان نیز که کمک شایانی در این امر به بنده کردند شکر ویژه می نمایم.

امید است با یاری خداوند منان بتوانم بایستادن راه علم، قسمتی از زحمات این بزرگواران بهچنین خانواده ام را جبران کنم.

## تعهد نامه

اینجانب **محسن ابراهیمی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی برق/کنترل دانشکده مهندسی برق و رباتیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تنظیم کنترل کننده مرتبه کسری تناسبی-انتگرالی- مشتق گیر برای سیستم مرتبه کسری به روش خاریتائوف** تحت راهنمایی دکتر علیرضا الفی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

### تاریخ

#### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

مفهوم پایداری به منظور عملکرد مناسب سیستم‌های کنترلی ضروری و اساسی است. روش خاریتانوف روشی بسیار جالب برای تعیین پایداری سیستم‌های نامعین می‌باشد، تحقیقات نشان داده برای سیستم‌هایی با مرتبه صحیح با به دست آوردن حداکثر چهار چندجمله‌ای به روش خاریتانوف می‌توان پایداری سیستم را بررسی کرد، اما در سیستم‌هایی با مرتبه‌ی غیر صحیح یا کسری مقدار این چندجمله‌ای‌ها ثابت نیست. در این پایان‌نامه علاوه بر شرح چگونگی به دست آوردن جملات خاریتانوف برای سیستم‌های مرتبه کسری مکانیکی، و همچنین نحوه‌ی بررسی پایداری آن به دو روش تابع آزمون پایداری مقاوم و رسم چندضلعی‌های محدب، پارامترهای کنترل‌کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقگیر کسری را نیز در آن دخالت می‌دهیم. سپس با استفاده از دو روش پارامترهای کنترل‌کننده را به دست می‌آوریم. روش اول، روش گرافیکی مبتنی بر رسم جملات خاریتانوف برای سیستم مورد کنترل، و به دست آوردن محدوده‌ی اشتراک بین پارامترهای نامعلوم، و روش دوم استفاده از الگوریتم بهینه‌ی گروه ذرات (PSO)<sup>۱</sup> می‌باشد که به وسیله‌ی آن پارامترهای کنترل‌کننده به صورت بهینه به دست می‌آیند. در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که با استفاده از روش‌های گرافیکی که محاسبات پیچیده‌ی ریاضی مرتبه‌ی کسری را مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد، می‌توانیم با تنظیم کنترل‌کننده‌ی تناسبی-انتگرالی-مشتقگیر مرتبه کسری، سیستم‌های مرتبه کسری را کنترل کنیم و شرایط لازم برای پایداری را نیز برای آن، با توجه به انتظاراتی که از سیستم داریم برآورده سازیم.

**کلیدواژه:** سیستم مرتبه‌ی کسری، کنترل‌کننده PID<sup>۲</sup>، چندجمله‌ای خاریتانوف، الگوریتم PSO

---

<sup>۱</sup> Particle swarm optimization

<sup>۲</sup> Proportional-integral-differential

صفحه	عنوان
۱	فصل ۱- کلیات.....
۲	۱-۱- مقدمه .....
۲	۲-۱- اصول اولیه ریاضیات کسری.....
۳	۱-۲-۱- تعریف مدل های سیستم.....
۳	۱-۱-۲-۱- مدل پیوسته .....
۴	۲-۱-۲-۱- مدل گسسته .....
۴	۳-۱-۲-۱- مدل ورودی خروجی.....
۵	۴-۱-۲-۱- مدل فضای حالت .....
۶	۲-۲-۱- توابع مورد استفاده در محاسبات کسری.....
۶	۱-۲-۲-۱- تابع گاما .....
۸	۲-۲-۲-۱- تابع گامای ناقص .....
۸	۳-۲-۲-۱- تابع بتا .....
۹	۴-۲-۲-۱- تابع خطا .....
۹	۵-۲-۲-۱- تابع میتاگ لفلر .....
۱۱	۶-۲-۲-۱- تابع آگراوال .....
۱۱	۷-۲-۲-۱- تابع روبونتوف هارتلی.....
۱۱	۸-۲-۲-۱- تابع میلر-راس .....
۱۲	۳-۲-۱- انتگرال و مشتق از مرتبه کسری.....
۱۲	۱-۳-۲-۱- انتگرال و مشتق مرتبه ی کسری ریمان-لیوول .....
۱۳	۲-۳-۲-۱- انتگرال و مشتق مرتبه ی کسری گرانوالد-لتنیکف.....
۱۴	۴-۲-۱- تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال از مرتبه کسری.....
۱۵	۵-۲-۱- کنترل پذیری و مشاهده پذیری.....
۱۶	۱-۵-۲-۱- تعریف کنترل پذیری.....
۱۶	۲-۵-۲-۱- تعریف مشاهده پذیری.....
۱۶	۳-۱- تعریف کنترل کننده.....
۱۷	۱-۳-۱- کنترل کننده ی تناسبی-انتگرالی-مشتقگیر.....



- ۱-۱-۳-۱ - کنترل کننده ی تناسبی- انتگرالی - مشتقگیر مرتبه ی صحیح:..... ۱۷
- ۱-۱-۳-۲ - کنترل کننده ی تناسبی- انتگرالی - مشتقگیر مرتبه ی غیر صحیح (کسری):..... ۱۸
- ۴-۱ - تعریف روش خاریتانوف..... ۱۹
- ۵-۱ - مروری بر کارهای انجام شده..... ۲۱
- ۶-۱ - مراحل انجام تحقیق..... ۲۲
- فصل ۲ - تحلیل پایداری به روش خاریتانوف..... ۲۳**
- ۱-۲ - مقدمه ..... ۲۴
- ۲-۲ - نکاتی در رابطه با خاریتانوف..... ۲۴
- ۳-۲ - بررسی روش تحلیل پایداری سیستم ها به روش خاریتانوف..... ۲۷
- ۱-۳-۲ - بررسی پایداری به روش خاریتانوف در سیستم های مرتبه ی صحیح..... ۲۷
- ۲-۳-۲ - بررسی پایداری به روش خاریتانوف در سیستم های مرتبه ی کسری..... ۲۸
- ۱-۲-۳-۲ - به دست آوردن تعداد جملات ..... ۲۹
- ۲-۲-۳-۲ - تشکیل جملات خاریتانوف..... ۳۲
- ۳-۲-۳-۲ - تشکیل چند ضلعی های محدب با استفاده از جملات خاریتانوف..... ۳۳
- ۳-۳-۲ - بررسی پایداری جملات خاریتانوف..... ۳۴
- ۱-۳-۳-۲ - بررسی پایداری با استفاده از تابع آزمون پایداری مقاوم..... ۳۴
- ۲-۳-۳-۲ - بررسی پایداری با استفاده از رسم چند ضلعی های محدب در فرکانس های مختلف..... ۳۵
- ۳-۳-۳-۲ - به دست آوردن فرکانس مورد نیاز..... ۳۷
- فصل ۳ - طراحی کنترل کننده PID به روش خاریتانوف..... ۴۳**
- ۱-۳ - طراحی کنترل کننده PID..... ۴۴
- ۱-۱-۳ - طراحی کنترل کننده PID به روش خاریتانوف برای سیستم های مرتبه ی صحیح..... ۴۴
- ۱-۱-۳ - رسم جملات خاریتانوف بر حسب  $K_p, K_I$ ..... ۴۴
- ۲-۱-۳ - طراحی کنترل کننده PID به روش خاریتانوف برای سیستم های مرتبه ی کسری..... ۴۸
- ۱-۲-۳ - روشی مبتنی بر سعی و خطا..... ۴۹
- ۲-۲-۳ - روش بهینه گروه ذرات..... ۵۱
- فصل ۴ - به دست آوردن پارامترهای کنترل با استفاده از روش بهینه ی گروه ذرات..... ۵۳**
- ۱-۴ - تعریف بهینه سازی..... ۵۴
- ۲-۴ - روش بهینه سازی گروه ذرات..... ۵۴
- ۱-۲-۴ - تاریخچه بهینه سازی گروه ذرات..... ۵۴

۵۷	.....الگوریتم بهینه سازی گروه ذرات.....	۲-۲-۴
۵۸	.....مدل Global Best PSO.....	۱-۲-۲-۴
۵۹	.....مدل Local Best PSO.....	۲-۲-۲-۴
۶۱	.....بررسی مشکلات PSO.....	۳-۲-۴
۶۱	.....به روز کردن همگام و ناهمگام.....	۴-۲-۴
۶۲	.....مهار کردن سرعت.....	۵-۲-۴
۶۲	.....پارامترهای PSO استاندارد.....	۶-۲-۴
۶۲	.....به دست آوردن بهینه پارامترهای کنترل.....	۳-۴
<b>۶۵</b>	<b>.....شبيه سازی مثال عددي.....</b>	<b>فصل ۵</b>
۶۶	.....مثال عددي.....	۱-۵
۶۹	.....شروط پایداری و بهبود پاسخ در PSO.....	۲-۵
<b>۷۷</b>	<b>.....نتیجه گیری و پیشنهادها.....</b>	<b>فصل ۶</b>
۷۸	.....نتیجه گیری و جمع بندی.....	۱-۶
۷۸	.....پیشنهاد هایی برای ادامه کار.....	۲-۶
<b>۷۹</b>	<b>.....منابع:</b>	

## فهرست جدول‌ها

صفحه

عنوان

---

جدول ۵-۱: پارامترهای بهینه در هر بار اجرای برنامه..... ۷۰

صفحه	عنوان
۷	شکل ۱-۱: تغییرات تابع $\Gamma(x)$ به ازای مقادیر مختلف $x$ .....
۱۰	شکل ۲-۱: تغییرات تابع میتاگ لفلر به ازای مقادیر مختلف $x$ .....
۱۸	شکل ۳-۱: ساختار یک کنترل کننده PID مرتبه کسری.....
۲۹	شکل ۱-۲: محدوده‌ی پایداری در صفحه‌ی $S$ برای سیستم‌های مرتبه‌ی کسری.....
۴۰	شکل ۲-۲: تابع آزمون پایداری مقاوم.....
۴۰	شکل ۳-۲: تغییرات چند ضلعیهای محدب در صفحه‌ی مختلط.....
۴۵	شکل ۱-۳: بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته.....
۴۷	شکل ۲-۳: محدوده‌ی مشترک بین چند جمله‌ای‌های خاریتانوف بر حسب تغییرات $\omega$ .....
۴۷	شکل ۳-۳: پاسخ پله سیستم کنترل شده به وسیله‌ی کنترل کننده‌ی PID.....
۴۸	شکل ۴-۳: دیاگرام بود سیستم کنترل شده به وسیله‌ی کنترل کننده‌ی PID.....
۵۰	شکل ۵-۳: محدوده‌ی مجاز برای انتخاب $K_p, K_I$ .....
۵۰	شکل ۶-۳: پاسخ پله‌ی سیستم کنترل شده توسط کنترل کننده‌ی مرتبه کسری.....
۶۰	شکل ۱-۴: فلوچارت الگوریتم PSO.....
۶۶	شکل ۱-۵: پاسخ پله‌ی حلقه باز قبل از کنترل $G(s)$ .....
۶۷	شکل ۲-۵: بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته.....
۷۱	شکل ۳-۵: محدوده‌ی مجاز برای $K_p$ و $K_i$ .....
۷۲	شکل ۴-۵: تابع آزمون پایداری مقاوم برای سیستم مثال ۱ بعد از کنترل.....
۷۳	شکل ۵-۵: چندضلعی‌های محدب حاصل از جملات خاریتانوف مثال ۱ و شامل نشدن مبدأ مختصات.....
۷۳	شکل ۶-۵: پاسخ پله‌ی سیستم حلقه بسته بعد از کنترل مثال ۱.....
۷۵	شکل ۷-۵: تابع آزمون پایداری مقاوم برای سیستم مثال ۲ بعد از کنترل.....
۷۶	شکل ۸-۵: چندضلعی‌های محدب حاصل از جملات خاریتانوف مثال ۲ و شامل نشدن مبدأ مختصات.....
۷۶	شکل ۹-۵: پاسخ پله‌ی سیستم حلقه بسته بعد از کنترل مثال ۲.....

## فهرست علائم و نشانه‌ها

علامت اختصاری

عنوان

---

$\omega$  ..... فرکانس طبیعی

$\#$  ..... تعداد اعضای مختلف مجموعه

$\{x \in \mathbb{N} : x < n\}$  .....  $N^{<n}$

Floor(x) ..... بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی  $x$



# فصل اول

## کلیات

# فصل ۱ - کلیات

## ۱-۱ - مقدمه

در این فصل به تعریف کلی از مباحث سیستم‌های مرتبه‌ی کسری، مدل‌هایی که سیستم در حالت مرتبه‌ی کسری می‌توانند داشته باشد، توابع مورد استفاده در سیستم‌های مرتبه کسری، شرح جزئی‌ای درباره‌ی کنترل‌کننده‌ها که مهم‌ترین آن‌ها کنترل‌کننده‌ی تناسبی - انتگرالی - مشتق‌گیر است، برای سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح و مرتبه کسری، و همچنین توضیح روش خاریتانوف که یک روش جالب برای تعیین پایداری سیستم‌های نامعین به حساب می‌آید و چگونگی استفاده از این روش، پرداخته می‌شود.

## ۱-۲ - اصول اولیه ریاضیات کسری

در چند دهه‌ی اخیر استفاده از ریاضیات مرتبه غیر صحیح پیشرفت چشمگیری داشته است. ریاضیات مرتبه‌ی کسری برای اولین بار در قرن ۱۹ توسط ریمن و لیپول ایجاد شد. ایده‌ی اصلی آن‌ها گسترش دیفرانسیل‌گیری از حالت مرتبه‌ی صحیح به غیر صحیح بود. درزمینه‌ی مطالعات انجام‌شده برای شناسایی سیستم‌های حقیقی مثل سیستم‌های الکترومکانیکی، گرمایشی و ... رفتار دیفرانسیلی از مرتبه‌ی کسری ذاتی رؤیت شده است. یکی از روش‌هایی که برای دستیابی به لیست گسترده‌ای از زمینه‌های کاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری موجود است، مرجع [۳-۱] و همچنین منابع آن است [۴].

بنابراین مدل‌های کلاسیک که بر اساس مرتبه‌های دیفرانسیلی صحیح هستند، برای بیان سیستم‌های کسری مناسب نمی‌باشند. در نتیجه مدل دیگری به نام مدل‌های کسری از سال ۱۹۴۵ در حال رشد است [۵][۶] که بر اساس اهداف دیفرانسیلی کار می‌کند.



## ۱-۲-۱- تعریف مدل‌های سیستم

حال سیستم‌هایی که با معادلات مرتبه‌ی کسری توصیف می‌شوند را بررسی می‌کنیم. این آنالیز مانند سیستم‌های مرتبه طبیعی، در حوزه‌های مختلفی (زمان و فرکانس) انجام می‌شود.

### ۱-۱-۲-۱ مدل پیوسته

معادله‌ی یک سیستم دینامیکی را به صورت مرتبه‌ی کسری، می‌توان به صورت زیر نوشت [۷]:

$$H(D^{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n})(y_1, y_2, \dots, y_l) = G(D^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m})(u_1, u_2, \dots, u_l) \quad (1-1)$$

که در این رابطه  $y_i, u_i$  توابعی از زمان بوده و  $H$  و  $G$  یک قانون ترکیبی از عملگر مشتق کسری می‌باشد. برای سیستم‌های تک متغیره و غیر متغیر با زمان، معادله‌ی بالا به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$H(D^{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n})y(t) = G(D^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m})u(t) \quad (2-1)$$

اگر در رابطه  $G(D^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m}) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k}$  و  $H(D^{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \sum_{k=0}^n \alpha_k D^{\alpha_k}$  تعریف شوند، آنگاه شکل گسترده

رابطه‌ی بالا به صورت زیر حاصل می‌شود که سیستم حاصل سیستمی خطی و متغیر با زمان است.

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = \\ b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

این سیستم‌ها به دودسته تقسیم می‌شوند:

(۱) سیستم‌های با مرتبه‌ی مضروب (۲) سیستم‌های با مرتبه‌ی گویا که به شرح زیرند:

یک سیستم را از مرتبه‌ی مضروب گویند، هرگاه رتبه‌ی تمامی معادلات دیفرانسیل سیستم ضریبی از یک رتبه‌ی خاص  $\alpha$  باشد [۷].

در نتیجه، سیستم رابطه بالا با شرط  $\alpha_k = \beta = k\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+, K \in \mathbb{Z}^+$  سیستمی مضروب بوده و معادلات آن به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^n a_n D^{\alpha_k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_m D^{\alpha_k} u(t) \quad (4-1)$$

و نیز سیستمی از مرتبه‌ی گویا می‌نامند که این سیستم یک سیستم مرتبه‌ی مضروب باشد و علاوه بر آن

$$\text{شرایط } q \in \mathbb{Z}^+, \alpha = \frac{1}{q} \text{ را ارضا کند [۷].}$$

### ۲-۱-۲-۱ مدل گسسته

با استفاده از تعریف گرانولد\_لتنیکوف برای مشتقات مرتبه کسری، می‌توان سیستم‌های کسری گسسته را

با معادلات تفاضلی بیان کرد [۷].

$$\begin{aligned} a_n \Delta_h^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \Delta_h^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \Delta_h^{\alpha_0} y(t) = \\ b_m \Delta_h^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \Delta_h^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \Delta_h^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (۵-۱)$$

$\Delta_h^{\alpha_n}$  یک اپراتور تفاضلی از رتبه‌ی  $n$  با گام  $h$  می‌باشند که به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\Delta_h^{\alpha_n} y(ih) = h^{-\alpha_n} (y(ih) - y(ih-h))^{\alpha_n} = \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{\alpha_n}{k} y(ih-h) \quad (۶-۱)$$

### ۳-۱-۲-۱ مدل ورودی خروجی

با لاپلاس گرفتن از رابطه‌ی (۶-۱) و با فرض قرار دادن شرایط اولیه صفر و همچنین با گرفتن تبدیل  $Z$  از

رابطه (۶-۱) تابع مرتبه کسری سیستم برای حالت پیوسته و گسسته در زمان حاصل می‌شود [۷].

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (۷-۱)$$

$$G(z) = \frac{b_m (w(z^{-1}))^{\beta_m} + \dots + b_0 (w(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n (w(z^{-1}))^{\alpha_n} + \dots + a_0 (w(z^{-1}))^{\alpha_0}} \quad (۸-۱)$$

که تبدیل  $Z$  المان  $\Delta_h^1$  برابر  $w(z^{-1})$  می‌باشد.

در سیستم‌های پیوسته با مرتبه مضروب، تابع تبدیل سیستم، به صورت رابطه‌ی زیر خواهد بود.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m a_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n b_k (s^\alpha)^k} \quad (۹-۱)$$

با تغییر متغیر  $\lambda = s^\alpha$  به صورت تابعی گویا مانند رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n b_k \lambda^k} \quad (10-1)$$

### ۱-۲-۱-۴- مدل فضای حالت

برای سیستم‌های مرتبه‌ی کسری چند متغیره نیز مثل سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح، تحقق فضای حالت تعریف می‌شود [۷].

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (11-1)$$

که  $\alpha = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]$  بردار ورودی،  $x \in \mathbb{R}^p$  بردار حالت،  $y \in \mathbb{R}^r$  بردار خروجی،  $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$  ماتریس حالت،  $B \in \mathbb{R}^{r \times p}$  ماتریس ورودی و  $C \in \mathbb{R}^{r \times p}$  ماتریس انتقال حالت مستقیم می‌باشد.

ارتباط بین فضای حالت و شکل تابع تبدیل در سیستم‌های مرتبه‌ی مضروب نیز به صورت زیر است:

برای سیستم تک متغیره با مرتبه‌ی مضروب که تحقق فضای حالت آن به شکل رابطه‌ی (۱۱-۱) است، با اعمال تبدیل لاپلاس و نیز استفاده از تعریف کاپوتو برای مشتقات کسری می‌توان تابع تبدیل سیستم را به دست آورد.

$$Y(s) = G(s)U(s) = C(s^{\bar{\alpha}}I - A)^{-1} B + D \quad (12-1)$$

در این وضعیت حالت‌های سیستم به صورت رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند.

$$X(t) = L^{-1} \{x(s)\} = L^{-1} \left\{ (s^{\bar{\alpha}}I - A)^{-1} BU(s) + (s^{\bar{\alpha}}I - A)^{-1} x(0) \right\} \quad (13-1)$$

با تعریف  $\Phi(t) = L^{-1} \left\{ (s^{\bar{\alpha}}I - A)^{-1} \right\}, t \geq 0$  می‌توان نتیجه گرفت که:

$$x(t) = \Phi x(0) + \Phi(t) \times [Bu(I)] = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t+\tau) Bu(I) d\tau \quad (14-1)$$

که  $\Phi(t)$  همان ماتریس گذار است و برابر است با:

$$\Phi(t) = E_{\alpha}(At^{\alpha}) \quad (15-1)$$

## ۱-۲-۲-۱ توابع مورد استفاده در محاسبات کسری

### ۱-۲-۲-۱-۱ تابع گاما

یکی از توابع ابتدایی مورد استفاده در محاسبات کسری، تابع گامای اویلر می باشد. این تابع توسعه یافته فاکتوریل بوده  $(n!)$  که  $n$  می تواند مقادیر غیر صحیح را نیز اختیار کند. می توان تابع گاما را برای  $\text{Re}(x) > 0$  به صورت زیر تعریف کرد [۸]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (16-1)$$

این تابع به صورت حدی نیز قابل تعریف است:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (17-1)$$

با مشتق گیری از عبارت  $t^x e^{-t}$ ، رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\frac{d}{dt}(t^x e^{-t}) = x t^{x-1} e^{-t} - t^x e^{-t} \quad (18-1)$$

با انتگرال گیری از طرفین  $(17-1)$  می توان چنین نتیجه گرفت که [۹]:

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(t^x e^{-t}) dt = \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \quad (19-1)$$

$$[t^x e^{-t}]_0^{\infty} = x \Gamma(x) - \Gamma(x+1)$$

رابطه  $(19-1)$  یکی از خواص مهم تابع گاما را بیان می کند یعنی [۴][۵]:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (20-1)$$

تابع گاما را می توان با رابطه زیر برای  $\text{Re}(x) > 0$  تعریف کرد [۸-۱۲]:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x \Gamma(x) \\ \Gamma(1) &= 1 \end{aligned} \quad (21-1)$$

تعریف (۲۱-۱) معادل تعریف فاکتوریل برای اعداد طبیعی می‌باشد. بنابراین برای هر عدد حقیقی مثبت می‌توان گفت [۸-۱۰]:

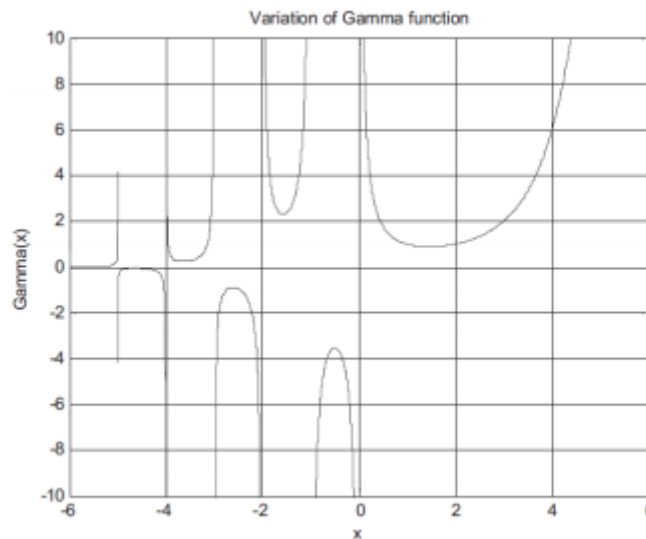
$$x! = \Gamma(x+1) \quad (22-1)$$

خاصیت مهم دیگر تابع گاما وجود قطب‌های ساده در  $Z=0, 1, 2, \dots$  می‌باشد.

$$\Gamma(x) = \varphi(x) + \frac{-1^0}{0!} \frac{1}{0+x} + \frac{-1^1}{1!} \frac{1}{2+x} + \frac{-1^2}{2!} \frac{1}{2+x} + \dots \quad (23-1)$$

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

که نشان‌دهنده قطب‌های ساده در ۰ و ۱- و ۲- بوده و این بدین معنی است که تابع گاما در نقاط صحیح منفی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، بنابراین در این نقاط ناپیوسته است [۸]. در شکل زیر تغییرات تابع  $\Gamma(x)$  بر حسب مقادیر مختلف  $x$  نشان داده شده است.



شکل ۱-۱: تغییرات تابع  $\Gamma(x)$  به ازای مقادیر مختلف  $x$

در این شکل مشاهده می‌شود تابع  $\Gamma(x)$  در  $x$ های مثبت مجانب‌های کمتری نسبت به بازه منفی دارد، که نشان‌دهنده به دست آمدن راحت‌تر این مقادیر در  $x$ های مثبت است.

### ۱-۲-۲-۲- تابع گامای ناقص

یکی از توابع مورد استفاده در حساب کسری تابع گامای ناقص که به دو صورت قابل تعریف است. یکی تابع گامای ناقص با حد بالا که به صورت زیر تعریف می شود [۸]:

$$\Gamma(z, x) = \int_x^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (۲۴-۱)$$

و دومی تابع گامای ناقص با حد پایین:

$$\gamma(z, x) = \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt \quad (۲۵-۱)$$

در هر دو مورد فوق  $x$  مقداری حقیقی و  $x > 0$  و  $Z$  مقداری مختلط و  $\text{Re}(Z) > 0$  می باشد [۸].

تابع گامای ناقص، تابعی کامل نسبت به  $x$  و هم نسبت به  $Z$  است [۱۳].

در زیر به بعضی از خواص تابع گاما اشاره شده است [۸]:

$$\Gamma(z) = \Gamma(z, x) + \gamma(z, x)$$

$$\Gamma(z+1, x) = z\Gamma(z, x) + x^z e^{-x} \quad (۲۶-۱)$$

$$\gamma(z, x) = z\Gamma(z, x) - x^z e^{-x}$$

از این تابع به منظور محاسبه مشتقات و انتگرال های کسری مربوط به توابع متناوب مثل مطالعه پاسخ سینوسی عملگرهای کسری استفاده می شود [۸].

### ۱-۲-۲-۳- تابع بتا

این تابع به عنوان انتگرال اولر<sup>۱</sup> شکل اول نیز شناخته می شود. تابع بتا وابستگی زیادی به تابع گاما داشته و به صورت زیر تعریف می شود [۸-۱۰]:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q \in \mathbb{R}^+ \quad (۲۷-۱)$$

<sup>۱</sup> Euler's integral

### ۱-۲-۲-۴- تابع خطا

تابع خطا یکی از توابع پرکاربرد در حساب کسری بوده و به صورت زیر تعریف می شود [۸-۱۰]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (28-1)$$

همچنین این تابع به صورت سری نیز قابل توصیف است [۸].

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right) \quad (29-1)$$

متمم تابع خطا به صورت زیر قابل تعریف هست [۸].

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (30-1)$$

### ۱-۲-۲-۵- تابع میتاگ لفلر<sup>۱</sup>

می دانیم تابع نمایی  $e$  در نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی (مرتبه صحیح) نقش مهمی را ایفا می کند.

به طور مشابه، تابع میتاگ لفلر چنین نقشی را در حساب کسری به عهده دارد [۱۲][۸].

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (31-1)$$

برای تابع  $E_{\alpha}(ax)$ ،  $a > 0$  می توان در میتاگ لفلر،  $a$  را به صورت عددی مختلط  $(\alpha = |\alpha| \exp(j\phi))$  در نظر

گرفت [۷].

به ازای مقادیر صحیح  $a$ ، تابع میتاگ لفلر یک پارامتری، به توابعی آشنا تبدیل می شود [۱۴].

$$E_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$E_1(x) = e^x \quad (32-1)$$

$$E_2(x) = \cosh(\sqrt{x})$$

تابع میتاگ لفلر را می توان به صورت دو پارامتری نیز، به صورت زیر تعریف کرد [۸][۱۴]:

<sup>۱</sup> Mittag-leffler function

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (33-1)$$

در آن  $E_{\alpha,1}(x)$  همان تابع میتاگ لفلر یک پارامتری می باشد [۸].

تابع دو پارامتری میتاگ لفلر نیز در حالتی که  $\alpha, \beta$  اعداد صحیح را اختیار کنند، تبدیل به توابعی مشخص و آشنا می شود [۸] [۱۴].

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{1,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$E_{1,3}(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad (34-1)$$

$$E_{2,1}(x^2) = \cosh(x)$$

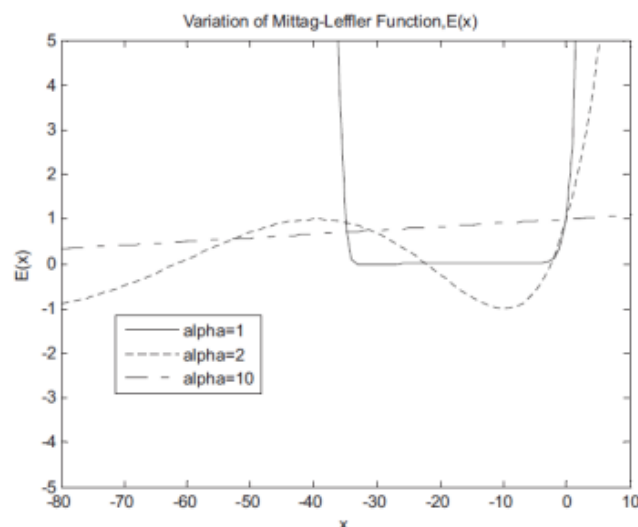
$$E_{2,2}(x^2) = \frac{\sinh(x)}{x}$$

لاپلاس تابع میتاگ لفلر نیز به صورت رابطه زیر قابل بیان می باشد [۸].

$$t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha) \leftrightarrow \frac{s^{\alpha - \beta} k!}{(s^\alpha - a)^k} \quad (35-1)$$

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} E_{\alpha,\beta}$$

در شکل زیر می توان تغییرات تابع میتاگ لفلر را به ازای مقادیر مختلف  $x$  مشاهده کرد.



شکل ۱-۲: تغییرات تابع میتاگ لفلر به ازای مقادیر مختلف  $x$  [۱۲]



مشاهده می‌شود که با افزایش  $\alpha$  دامنه تغییرات تابع میتاگ لفلر کاهش و دامنه تغییرات  $X$  افزایش می‌یابد.

### ۱-۲-۲-۶- تابع آگراوال<sup>۱</sup>

این تابع حالت عمومی ای از تابع میتاگ لفلر بوده و به خاطر وجود تبدیل لاپلاس آن، مورد اهمیت می‌باشد [۸].

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (36-1)$$

$$L\{E_{\alpha,\beta}(x^\alpha)\} = \frac{s^{-\alpha-\beta}}{s^{\alpha-1}} \quad (37-1)$$

### ۱-۲-۲-۷- تابع روبونتوف هارتلی<sup>۲</sup>

این تابع، پاسخ ضربه، در معادلات دیفرانسیلی کسری بوده و در تحلیل سیستم‌های کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد [۸].

$$F_q(-a, x) = x^{q-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k x^{kq}}{\Gamma(kq+q)}, q > 0 \quad (38-1)$$

### ۱-۲-۲-۸- تابع میلر-راس<sup>۳</sup>

این تابع به‌عنوان انتگرال  $v$  توابع نمایی شناخته می‌شود [۸].

$$E_x(v, a) = \frac{d^{-v}}{dx^{-v}} e^{ax} = x^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{\Gamma(v+k+1)} \quad (39-1)$$

<sup>۱</sup> Agarwal function

<sup>۲</sup> Robotnov-Hartley Function

<sup>۳</sup> Miller-Ross Function

## ۱-۲-۳ - انتگرال و مشتق از مرتبه کسری

### ۱-۲-۳-۱ - انتگرال و مشتق مرتبه‌ی کسری ریمان-لیوول<sup>۱</sup> [۹]

مفهوم انتگرال و مشتق کسری، از انتگرال و مشتق صحیح نتیجه می‌شود. با فرض قابل تعریف بودن  $f(x)$  در بازه  $x > 0$  انتگرال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(I f)(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (40-1)$$

با تکرار عمل انتگرال‌گیری از رابطه (۴۰-۱) رابطه زیر حاصل خواهد شد.

$$(I^2 f)(x) = \int_0^x (I f)(t) dx = \int_0^x \left( \int_0^t f(s) ds \right) dt \quad (41-1)$$

با تکرار این روند انتگرال‌های از درجات بالاتر نیز قابل محاسبه است.

$$(I^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, n \in \mathbb{N}, x > 0 \quad (42-1)$$

معادله (۴۲-۱) به معادله کوشی معروف است. در این رابطه،  $n$  به اعداد صحیح مثبت محدود بوده و اولین عامل محدودکننده در این رابطه وجود تابع فاکتوریل می‌باشد که برای اعداد غیر صحیح بی‌معنی است. البته با توجه به تعریف تابع فاکتوریل اعداد غیر صحیح با تابع گاما، این محدودیت برطرف می‌شود و با استفاده از تابع گاما به جای تابع فاکتوریلی می‌توان قید  $n \in \mathbb{N}$  را به  $n \in \mathbb{R}^+$  تغییر داد.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_D^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (43-1)$$

ریمان و لیوویل برای یافتن مشتق مرتبه کسری یک تابع، رابطه زیر با استفاده از رابطه انتگرال مرتبه کسری (۴۳-۱) و در حالت  $\alpha > 0$  منتج است.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = D^m I^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} dt \right] \quad (44-1)$$

$m$  = یک عدد طبیعی که در شرط  $m-1 < \alpha < m$  صدق می‌کند.

<sup>۱</sup> Riemann-Liouville

### ۱-۲-۳-۲- انتگرال و مشتق مرتبه‌ی کسری گرانوالد-لتنیف<sup>۱</sup> [۹]

از آنجاکه معادله مرتبه کسری ریمان لیوویل با ایده انتگرال گیری مکرر یک تابع به دست آمده بود، ایده دنبال کردن دیدگاهی مشابه برای محاسبه‌ی معادله مشتق نیز به ذهن برخی از ریاضی دان‌ها خطور کرد. گرانوالد و لتنیف از پیش‌تازان این ایده بودند. این دو ریاضی دان برای یافتن تعریف مناسب مشتق مرتبه کسری، از تعریف مشتق مرتبه اول استفاده کردند:

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (45-1)$$

با اعمال مجدد تعریف مشتق به رابطه (۴۵-۱) رابطه زیر نتیجه خواهد شد.

$$\begin{aligned} f'' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1} \end{aligned} \quad (46-1)$$

با انتخاب  $h = h_1 = h_2$  می‌توان چنین نتیجه گرفت که:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \quad (47-1)$$

و با ادامه این روند، می‌توان رابطه زیر را برای محاسبه مشتقات مکرر یک تابع به دست آورد.

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh), n \in \mathbb{N} \quad (48-1)$$

این معادله را می‌توان برای مقادیر غیر صحیح  $n$  نیز به کاربرد، به شرط آن که ضرایب  $\binom{n}{m}$  به جای تعریف

شدن از طریق تابع فاکتوریل، با استفاده از تابع گاما تعریف شود. بنابراین مشتق مرتبه کسری را می‌توان به صورت رابطه زیر تعریف کرد.

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-\alpha}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x - mh) \quad (49-1)$$

<sup>۱</sup> Grunwald-Letnikov

حد بالایی حاصل جمع در رابطه فوق باید به سمت بی‌نهایت میل کند و عبارت  $\frac{t-\alpha}{h}$  این خصوصیت را دارد (t و a به ترتیب حد بالا و پایین مشتق‌گیری هستند). همان‌طور که معادله انتگرال مرتبه کسری ریمان\_لیوویل، در تعریف مرتبه کسری نیز مورد استفاده قرار گرفت، می‌توان از معادله مشتق گرانوالد\_لتینکف برای انتگرال‌گیری مرتبه کسری استفاده کرد. ساده‌ترین تعبیر برای استفاده از این معادله در انتگرال‌گیری، استفاده از آن برای  $\alpha < 0$  می‌باشد. در این حالت باید  $\binom{-\alpha}{m}$  را در رابطه (۱-۴۹) جایگذاری نمود. این عبارت با استفاده از تابع گاما قابل تعریف است.

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} \quad (۱-۵۰)$$

با توجه به رابطه (۱-۵۰) معادله انتگرال‌گیری مرتبه کسری گرانوالد\_لتینکف به صورت زیر حل خواهد شد.

$$D^{-n}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{t-\alpha}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} f(x-mh) \quad (۱-۵۱)$$

### ۱-۲-۴ - تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال از مرتبه کسری

برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری نیاز به روش‌هایی مشابه روش حل معادلات دیفرانسیل عادی داریم. پس از این روش‌ها استفاده از تبدیل‌های متداول مانند تبدیل لاپلاس است [۱۲].

همان‌طور که می‌دانیم در اینجا به دنبال تبدیل لاپلاس  $\frac{d^q f}{dx^q}$  برای تمام مقادیر q و کلیه توابع مشتق‌پذیر و انتگرال‌پذیر f می‌باشیم. پس طبق تعریف تبدیل لاپلاس داریم [۱۵]:

$$L\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} = \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{d^q f}{dx^q} dx \quad (۱-۵۲)$$

همچنین برای لاپلاس مشتق داریم [۱۵]:

$$L\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} = s^q L\{f\} - \sum_{k=0}^{q-1} s^{q-1-k} \frac{d^k f}{dx^k}(0), \quad q=1,2,3,\dots \quad (۱-۵۳)$$

و نیز تبدیل لاپلاس انتگرال به صورت زیر بیان می‌شود [۱۵]:

$$L\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} = s^q L\{f\} \quad (54-1)$$

بنابراین می توان لاپلاس مشتق و انتگرال را به صورت رابطه زیر بیان کرد [۱۵].

$$L\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} = s^q L\{f\} - \sum_{k=0}^{q-1} s^k \frac{d^{q-1-k} f}{dx^{q-1-k}}(0), q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (55-1)$$

حال اثبات می شود که رابطه (۵۵-۱) قابل گسترش برای مرتبه های کسری به صورت رابطه زیر می باشد که از بیان این اثبات صرف نظر می شود [۱۵].

$$L\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} = s^q L\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{q-1-k} f}{dx^{q-1-k}}(0), \text{all } q \quad (56-1)$$

$N$  عددی صحیح است به گونه ای که  $n-1 \leq q \leq n$

در اینجا به تبدیل لاپلاس برخی توابع مورد استفاده، اشاره می شود.

تبدیل لاپلاس انتگرال کسری [۱۳]:

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(S) \quad (57-1)$$

تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان\_لیوویل

$$L\{.D_t^\alpha\} = s^\alpha F(S) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [.D_t^{\alpha-k-1} f(t)], m-1 \leq \alpha < m, m \in N \quad (58-1)$$

تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(S) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), m-1 \leq \alpha < m, m \in N \quad (59-1)$$

تبدیل لاپلاس مشتق کسری گرانولد\_لتنیف [۱۳]:

$$L\{.D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(S) \quad (60-1)$$

## ۵-۲-۱ - کنترل پذیری و مشاهده پذیری

حال به تعریف کنترل پذیری و مشاهده پذیری می پردازیم.

### ۱-۲-۵-۱- تعریف کنترل پذیری

سیستمی را کنترل پذیر می‌نامیم اگر اعمال یک بردار کنترل، باعث بردن سیستم از حالت اولیه  $x(t_0)$  به حالت نهایی  $x(t_f)$  در زمان محدود شود [۱۶][۱۷].

شرایط کنترل پذیری برای سیستم‌های از مرتبه‌ی کسری و مرتبه‌ی صحیح یکسان است. در سیستم‌های مرتبه‌ی کسری غیر متغیر با زمان خطی ماتریس کنترل پذیری به صورت  $C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$  تعریف می‌شود و این سیستم‌ها در صورتی کنترل پذیر است که  $C$  از رتبه‌ی کامل باشد [۷].

### ۱-۲-۵-۲- تعریف مشاهده پذیری

سیستمی را مشاهده پذیر گویند که هر حالت  $x(t_0)$  را بتوان با مشاهده‌ی  $y(t)$  در یک بازه‌ی محدود تعیین کرد [۱۶][۱۷].

شرایط مشاهده پذیری برای سیستم‌های از مرتبه‌ی کسری و مرتبه‌ی صحیح یکسان است. در سیستم‌های مرتبه‌ی کسری غیر متغیر با زمان خطی ماتریس مشاهده پذیری به صورت  $O = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$  تعریف می‌شود و این سیستم‌ها در صورتی کنترل پذیر است که  $O$  از رتبه‌ی کامل باشد [۷].

### ۱-۳-۱- تعریف کنترل کننده

کنترل کننده‌ها المانی هستند که برای رسیدن به پاسخی مناسب‌تر به ما کمک می‌کنند. اما در این تعریف باید به تفاوت میان جبران ساز و کنترل کننده دقت شود. چراکه کنترل کننده‌ها بیشتر برای هدف دنبال کردن ورودی<sup>۱</sup> استفاده می‌شوند، یا به‌طور کامل‌تر حالت ماندگار سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد، اما جبران‌سازها به رسیدن به یک پاسخ ایده آل به ما کمک می‌کنند و حالت گذرای سیستم را تحت تأثیر

---

<sup>۱</sup> tracking

قرار می‌دهند. با توجه به اینکه در علم کنترل پایداری سیستم مهم‌ترین دغدغه می‌باشد استفاده از کنترل‌کننده‌ها کمک شایانی به این موضوع کرده است. چون اکثر سیستم‌هایی که در واقعیت وجود دارند.

### ۱-۳-۱- کنترل‌کننده‌ی تناسبی-انتگرالی-مشتق‌گیر

تجربه نشان می‌دهد تاکنون از بین کنترل‌کننده‌های موجود هنوز کنترل‌کننده‌ی تناسبی-انتگرالی-مشتق‌گیر یا همان PID از اهمیت و کارایی بیشتری برخوردار است، البته این کنترل‌کننده تضمین پایداری ندارد و عملکرد آن لزوماً بهینه نیست.

### ۱-۱-۳-۱ کنترل‌کننده‌ی تناسبی-انتگرالی-مشتق‌گیر مرتبه‌ی صحیح:

کنترل‌کننده‌ی PID مرتبه‌ی صحیح دارای سه قسمت تناسبی، انتگرال‌گیر و مشتق‌گیر است که آن را با رابطه‌ی زیر نشان می‌دهند.

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (۶۱-۱)$$

در بسیاری از فرآیندهای صنعتی از کنترل‌کننده تناسبی P یا تناسبی مشتق‌گیر PD، تناسبی-انتگرال‌گیر PI و یا کنترل‌کننده تناسبی-مشتق‌گیر-انتگرال‌گیر PID، به‌عنوان ساختار اصلی کنترل‌کننده استفاده می‌شود. جالب است که تقریباً در کلیه فرآیندهای صنعتی ساختار ساده کنترل‌کننده PID تمام نیازهای فوق را برآورده می‌سازد. حتی در برخی از موارد کنترل‌کننده PI نیز کافی است. در حالت کلی می‌توان بیان کرد که کنترل‌کننده PI برای فرآیندهایی که برای سیستم‌هایی که با مدل درجه‌یک تقریب زده می‌شوند، کافی است.

در زیر تأثیری که هر کدام از پارامترهای این کنترل‌کننده روی سیستم تابع تبدیل می‌گذارند آمده است.

- بخش تناسبی: نقش این بخش تولید ورودی (u) متناسب با خطا (e) است. این بخش خطای حالت ماندگار را کاهش داده و سرعت پاسخ را افزایش می‌دهد.

- بخش انتگرالی: نقش این بخش تولید ورودی (u) متناسب با انباشت خطا (e) است. این بخش دارای حافظه‌ای از گذشته خطا است. که برای حذف خطای حالت ماندگار استفاده می‌شود.

- بخش مشتقی: نقش این بخش تولید ورودی (u) متناسب با تغییرات خطا (e) است. این بخش سرعت پاسخ را افزایش می‌دهد.

با توجه به این ویژگی‌ها می‌توان با توجه به نیاز سیستم، هر کدام از این پارامترها را برای بهبود پاسخ سیستم تغییر داد.

مشکلات کنترل کننده PID:

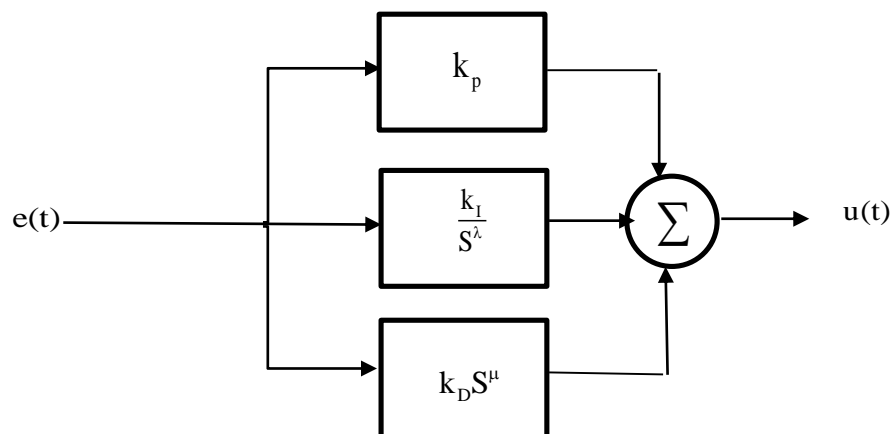
- محدودیت به فرایندهای SISO
- حساسیت بخش مشتقی به نویز
- عدم آگاهی از دینامیک فرایند
- تضمین پایداری ندارد.

### ۱-۳-۱-۲ - کنترل کننده‌ی تناسبی-انتگرالی-مشتق گیر مرتبه‌ی غیر صحیح (کسری):

کنترل کننده‌ی PID مرتبه‌ی کسری یا FOPID از معادله زیر به دست می‌آید [۱۸]:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu, \quad \lambda, \mu \in (0, 2) \quad (۶۲-۱)$$

در طراحی کنترل کننده مرتبه‌ی کسری ما به جای پیدا کردن سه پارامتر  $K_p, K_D, K_I$  نیاز به طراحی پنج پارامتر  $K_p, K_D, K_I, \lambda, \mu$  داریم که به ترتیب توان‌های مشتق گیر و انتگرال گیر ما هستند. بنابراین این کنترل کننده در مقایسه با کنترل کننده‌ی مرتبه‌ی صحیح از توانایی‌های بیشتری برخوردار است.



شکل ۱-۳: ساختار یک کنترل کننده PID مرتبه کسری



در این کنترل کننده ارتباط بین ورودی  $\{e(t)\}$  و خروجی  $\{u(t)\}$  به صورت زیر خواهد بود.

$$u(t) = k_p e(t) + k_{I0} I_1^\lambda e(t) + k_{D0} {}^C D_1^\mu e(t) \quad (63-1)$$

درواقع همان گونه که عملگرهای مشتق یا انتگرال کلاسیک حالت خاصی از عملگرهای مشتق یا انتگرال مرتبه کسری هستند، کنترل کننده PID کلاسیک نیز می تواند به عنوان حالت خاصی از  $(\lambda = \mu = 1)$  از کنترل کننده PID مرتبه کسری در نظر گرفت.

در صورتی که کنترل کننده فاقد ترم انتگرال گیر مرتبه ی کسری بوده ، یعنی تابع تبدیل آن به صورت زیر باشد:

$$C(s) = k_p + k_D s^\mu \quad (64-1)$$

با یک کنترل کننده PD مرتبه ی کسری مواجه هستیم. این کنترل کننده که در واقع یک شکل تعمیم یافته از یک کنترل کننده ی PD کلاسیک است، را FOPD یا  $PD^\mu$  نیز می نامند.

به همین صورت اگر در کنترل کننده ترم مشتق گیر مرتبه کسری وجود نداشته باشد، این کنترل کننده یک کنترل کننده PI مرتبه کسری خواهد شد. که تابع تبدیلی به شکل زیر دارد:

$$C(s) = k_p + \frac{k_I}{s^\lambda} \quad (65-1)$$

که آن را FOPI یا  $PI^\lambda$  نیز می نامند.

## ۴-۱- تعریف روش خاریتانوف

همان طور که از نام این روش پیداست، روش پایداری به مطالعه پایداری مقاوم یک سیستم با پارامترهای نامعین می پردازد. به عبارت دیگر، بررسی می کنیم که آیا سیستم زمانی که پارامترهای آن نامعین بوده و در یک بازه تغییر می کنند، پایدار است. در این زمینه دو پرسش از اهمیت برخوردار است: (۱) برای مجموعه ای از بازه ها که پارامترها تغییر می کند، آیا می توان پایداری را برای تمام پارامترهای ممکن بررسی کنیم؟

(۲) اگر چنین است، به چه تعدادی از پارامترهای برای بررسی نیاز داریم [۱۹]؟

برای مثال سیستمی با چندجمله‌ای مشخصه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$\varphi(s, p) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + p_3s^3 \quad (66-1)$$

که در آن  $p_i \in [p_i^-, p_i^+], i=0,1,2,3$  ضرایبی هستند که مقادیرشان نامعین است، اما کران‌های بالا و پایین آن‌ها را میدانیم. به منظور بررسی پایداری سیستم برای تمام پارامترهای ممکن، به روش ساده بررسی مجموعه چندجمله‌ای‌های زیر است:

$$p_0 + p_1s + p_2s^2 + p_3s^3 : p_i \in [p_i^-, p_i^+], i=0,1,2,3 \quad (67-1)$$

از آنجاکه این مجموعه نامحدود است، بررسی تک تک عناصر آن ممکن نیست. در واقع نیازی به انجام این کار نداریم. طبق معیار راث-هورویتز میدانیم که سیستم درجه سوم پایدار است اگر و فقط اگر ضرایب چندجمله‌ای مشخصه در شرط زیر صدق کنند:

$$p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_1p_2 > p_0p_3 \quad (68-1)$$

بنابراین مجموعه کلی چندجمله‌ای‌های  $\varphi$  پایدار است اگر و فقط اگر:

$$p_0^- > 0, p_1^- > 0, p_2^- > 0, p_3^- > 0, p_1^- p_2^- > p_0^+ p_3^+ \quad (69-1)$$

به عبارت دیگر، برای بررسی پایداری تمام چند جمله‌های  $\varphi$  فقط نیاز به بررسی پایداری چندجمله‌ای‌های زیر داریم:

$$\varphi_1 = p_0^- + p_1^-s + p_2^-s^2 + p_3^-s^3 \quad (70-1)$$

$$\varphi_2 = p_0^+ + p_1^+s + p_2^+s^2 + p_3^+s^3$$

از این مثال متوجه می‌شویم که برای تعیین پایداری مجموعه نامحدود  $\varphi$ ، فقط تعداد محدودی از چندجمله‌ای‌ها باید بررسی شوند. در این مثال، فقط دو چندجمله‌ای را بررسی می‌کنیم، ولی این مثال یک حالت ساده است. به طور کلی، می‌خواهیم بدانیم بایستی چه تعداد چندجمله‌ای بررسی شوند.

همچنین در این مثال دو چندجمله‌ای تحت بررسی مربوط به دو گوشه از چندضلعی می‌باشد که نشان‌دهنده‌ی ناحیه مقادیر پارامتری ممکن در فضای پارامتری است [۱۹].

## ۵-۱- مروری بر کارهای انجام شده

بررسی پایداری به روش خاریتانوف برای سیستم‌های مرتبه‌ی کسری برای اولین بار توسط نویسندگان [۲۰] [۲۱] که روش بصری‌ای بدون هیچ‌گونه اثباتی برای گسترش تئوری خاریتانوف برای این سیستم‌ها پیشنهاد کردند، بیان شد. در [۲۲] شرایط لازم و کافی پایداری هورویتز برای خانواده توابع مرتبه کسری به شکل متناسب با مرتبه  $\alpha$  در بازه‌ی  $(1, 2)$  با استفاده از نامساوی لیپانوف به‌عنوان یک نسخه اصلاح‌شده از [۲۳] ارائه شده‌است. باین‌حال روش ارائه‌شده به دلیل تعداد زیادی از رئوس که باید برای پایداری هورویتز چک شود، روش مناسبی نیست [۴].

پس‌از آن Tan در مرجع [۲۴] با کاهش این جملات روشی دیگر ارائه کرد. به این صورت که برای سیستم نامعین زیر:

$$p \triangleq \{p(s, q) : q \in Q\}, \quad Q \triangleq \{[q_0 \quad q_1 \dots q_n]^T : q_h \in [q_h^-, q_h^+], h = 0, 1, \dots, n\} \quad (71-1)$$

اگر # را تعداد اعضای غیرتکراری مجموعه در نظر بگیریم، می‌توان تعداد جملات خاریتانوف را برابر  $2^{\#H_0}$  به‌دست آورد که:

$$H_0 \triangleq \{h \in Z_{\geq 0}^{\leq n} : q_h^- < q_h^+\} \quad (72-1)$$

که به‌نوبه‌ی روش بهتر و راحت‌تری نسبت به روش‌های قبلی بود.

پس‌از آن در سال ۲۰۱۰، K. Akbari در [۴] تعداد جملات موردنیاز برای بررسی پایداری را بازمه کاهش داد و ثابت کرد درواقع تعداد جملات موردنیاز برای بررسی پایداری سیستم‌های مرتبه کسری برابر است با:

$$B_0 = \{\text{frac}(0.5\alpha_h) : h \in H\} \quad (\text{frac}(x) \triangleq x - \text{floor}(x)) \quad (73-1)$$

درنتیجه برای پایداری نیاز به چندجمله‌ای‌های کمتری برای تعیین پایداری سیستم‌های مرتبه کسری پیدا کردیم. همچنین برای بررسی پایداری به شیوه‌ی خاریتانوف مرجع [۴] دو روش، که یکی از روش‌ها از ایده «تابع آزمون پایداری مقاوم» که در مرجع [۲۵] برای چندجمله‌ای مرتبه صحیح و گسترش آن به سیستم‌های مرتبه کسری به‌عنوان روش ۱ پیشنهادشده است، استفاده شده است. پس‌از آن روش ۲ شرایط

لازم و کافی پایداری هورویتز مقاوم را از طریق روش گرافیکی ساده ارائه می‌کند. در [۲۴] یکی دیگر از روش‌های گرافیکی که مبنی بر به تصویر کشیدن تمام چند جمله‌های به‌دست‌آمده خاریتانوف در صفحه‌ی مختلط، آمده است [۴].

برای طراحی کنترل‌کننده‌ی PID برای سیستم‌های مرتبه کسری نیز روش‌های مختلفی وجود دارد  
روش طراحی زمان مرده، اف میگو و .. روش‌هایی هستند که برای این منظور به کار می‌روند.

برای طراحی کنترل‌کننده PID برای سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح در [۲۶] یک روش طراحی با استفاده از روش خاریتانوف بیان شده است، که در این پایان‌نامه ما از تعمیم این روش برای سیستم‌های مرتبه کسری استفاده می‌کنیم.

## ۱-۶- مراحل انجام تحقیق

در فصل دوم روش‌های تحلیل پایداری با استفاده از روش خاریتانوف در دو حالت سیستم مرتبه‌ی صحیح و سیستم مرتبه‌ی کسری به‌طور کامل بررسی می‌شود.

در فصل سوم به توضیح کنترل‌کننده‌های تناسبی-انتگرالی-مشتقگیر و نحوه‌ی طراحی آن با استفاده از روش خاریتانوف پرداخته می‌شود. در فصل چهارم به توضیح درباره‌ی روش بهینه‌ی گروه ذرات و به‌دست آوردن بهینه‌ی پارامترهای کنترل‌کننده می‌پردازیم. در فصل پنجم یک مثال عددی از یک سیستم مکانیکی نامعین ناپایدار آورده می‌شود که روش‌های گفته‌شده روی آن پیاده می‌شود و سیستم به‌وسیله‌ی کنترل‌کننده FOPID به بهینه‌ترین حالت پایدار می‌شود. در نهایت در فصل ششم به نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیشنهادها می‌پردازیم.

# فصل دوم

## تخلیص پایداری به روش خاریتانوف

## فصل ۲ - تحلیل پایداری به روش خاریتانوف

### ۲-۱ - مقدمه

مفهوم پایداری به منظور عملکرد مناسب سیستم‌های کنترلی ضروری و اساسی است. چندین مفهوم برای پایداری در کنترل بیان شده است که از میان آن‌ها، در این پایان‌نامه با مفهوم پایداری BIBO کار می‌کنیم. پایداری BIBO سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان (LTI) با مرتبه کسری در مرجع [۲۷-۲۹] بررسی شده است.

بسیاری از مشکلات کنترلی مدرن مربوط به عدم قطعیت به مرجع [۳۰] آدرس‌دهی می‌شوند. در واقع سیستم کنترلی نیاز به طراحی دارد به طوری که برخی خواص (مثل پایداری) تحت عدم قطعیت‌های موجود بدون تغییر (مقاوم) باقی بماند [۳۱] قضیه اساسی خاریتانوف [۳۲] یکی از نتایج خوب شناخته شده در این شاخه است.

این قضیه از این حیث که می‌تواند با بررسی پایداری هورویتز تنها چهار جمله‌ای خوش‌تعریف پایداری-هورویتز را تأیید می‌کند کار بسیار جالبی است.

### ۲-۲ - نکاتی در رابطه با خاریتانوف

در این بخش به شرح قسمت‌هایی از دو قضیه عبور مرزی و قضیه تقاطع از خاریتانوف که با جریان این پایان‌نامه در ارتباط است، می‌پردازیم. ابتدا قضیه عبور مرزی را معرفی می‌کنیم.

داریم [۱۹]:

$$\varphi(s, p) = a_0(p) + a_1(p)s + a_2(p)s^2 + \dots + a_{n-1}(p)s^{n-1} + s^n \quad (۱-۲)$$

را خانواده‌ای از چند جمله‌ای‌ها در نظر بگیرید که ضرایب  $a_i(p), i=0,1,\dots,n-1$  توابع پیوسته‌ای از پارامتر نامعین  $p$  در بازه ثابت  $p \in p = [p^-, p^+]$  هستند. فرض کنید صفحه مختلط  $C$  به سه بخش مجزا تقسیم شده است [۱۹]:

$$C = SU \partial S U U$$

(۲-۲)

که در آن  $S$  مجموعه‌ای باز است که به‌عنوان ناحیه پایدار تفسیر می‌شود.  $\partial S$  مرز  $S$ ، و  $U$  مکمل  $SU \partial S$  نیز مجموعه‌ای باز بوده و به‌عنوان ناحیه ناپایدار تفسیر می‌شود. برای سیستم‌های پیوسته خطی مستقل از زمان،  $S$  نیم‌صفحه باز سمت چپ صفحه  $S$ ،  $\partial S$  محور موهومی و  $U$  نیم‌صفحه باز سمت راست صفحه است. اکنون قضیه عبور مرزی را بیان می‌کنیم [۱۹].

اگر تمام ریشه‌های  $\varphi(s, p^-)$  در  $S$  بوده و  $\varphi(s, p^+)$  حداقل یک ریشه در  $U$  داشته باشد، حداقل یک  $p \in P = [p^-, p^+]$  وجود دارد به قسمی که تمام ریشه‌های  $\varphi(s, p)$  در  $SU \partial S$  بوده و حداقل یک ریشه در  $\partial S$  دارد. به‌طور مشابه، اگر تمام ریشه‌های  $\varphi(s, p^+)$  در  $S$  بوده و  $\varphi(s, p^-)$  حداقل یک ریشه در  $U$  داشته باشد، حداقل یک  $p \in P = [p^-, p^+]$  وجود دارد به قسمی که تمام ریشه‌های  $\varphi(s, p)$  در  $SU \partial S$  بوده و حداقل یک ریشه در  $\partial S$  دارد [۱۹].

این نتیجه از فرض  $a_i(p), i=0, 1, \dots, n-1$  توابع پیوسته‌ای از  $p$  هستند و این حقیقت که ریشه‌های چندجمله‌ای توابع پیوسته‌ای از ضرایبش می‌باشند، استنباط می‌شود. همچنین طبق قضیه‌ی تطابق آمده در مرجع [۱۹] برای چندجمله‌ای

$$\varphi(s, p) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n \quad (۳-۲)$$

مسیر  $\varphi(j\omega)$  را زمانی که  $\omega$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر می‌کند، بررسی می‌کنیم. این مسیر نسبت به محور حقیقی متقارن است، زیرا  $\varphi(-j\omega)$  و  $\varphi(j\omega)$  مزدوج مختلط هستند. بنابراین، فقط نیاز داریم مسیر  $\varphi(j\omega)$  را زمانی که  $\omega$  از  $0$  تا  $+\infty$  تغییر می‌کند، در نظر بگیریم. چون  $\varphi(j\omega) = a$ ، مسیر از محور حقیقی مثبت آغاز می‌شود. از آنجا که  $\angle \varphi(j\omega)$  تابعی اکیداً صعودی از  $\omega$  است، مسیر  $\varphi(j\omega)$  حول مبدأ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور می‌زند و به‌طور متناوب محور موهومی و محور حقیقی را قطع می‌کند. فرکانس‌های محل تلاقی مسیر  $\varphi(j\omega)$  با محور موهومی و حقیقی را  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  با  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$  در نظر بگیرید. بدیهی است،  $\omega_1, \omega_3, \dots$  فرکانس‌هایی هستند که مسیر با محور موهومی برخورد می‌کند. اگر

$$\varphi^\circ(j\omega_1), \varphi^\circ(j\omega_3), \dots \text{ را به ترتیب بخش فرد و زوج معادله‌ی (۳-۲) در نظر بگیریم، داریم [۱۹]:}$$

$$\operatorname{Re}(\varphi(j\omega_i)) = \varphi^\circ(j\omega_i) = 0, \quad i = 1, 3, \dots \quad (۴-۲)$$

به طور مشابه،  $\omega_1, \omega_4, \dots$  فرکانس‌هایی هستند که مسیر محور حقیقی را قطع می‌کند.

$$\operatorname{Im}(\varphi(j\omega_i)) = \omega_i \varphi^\circ(j\omega_i) = 0, \quad i = 2, 4, \dots \quad (۵-۲)$$

اگر  $n = 2m$  زوج باشد، مقدار تغییر فاز  $\angle\varphi(j\omega)$  از 0 تا  $+\infty$  برابر:

$$\angle\varphi(+j\omega) - \angle\varphi(j0) = \frac{n\pi}{2} = m\pi \quad (۶-۲)$$

می‌باشد. بنابراین مسیر  $\varphi(j\omega)$  مطابق با  $m$  ریشه مثبت  $\omega_1^e < \omega_2^e < \dots < \omega_m^e$ ،  $\varphi^e(j\omega)$ ،  $m$  بار محور

موهومی را قطع می‌کند. طبق تعریف  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  بدیهی است که  $\omega_1 = \omega_1^e, \omega_3 = \omega_2^e, \omega_{2m-1} = \omega_m^e$

می‌باشد. به طور مشابه، مسیر  $\varphi(j\omega)$  مطابق با  $m-1$  ریشه مثبت  $\omega_1^o < \omega_2^o < \dots < \omega_{m-1}^o$ ،  $\varphi^o(j\omega)$ ،  $m-1$

بار محور حقیقی را قطع می‌کند. به عبارت دیگر  $\omega_2 = \omega_1^o, \omega_4 = \omega_2^o, \omega_{2m-2} = \omega_{m-1}^o$  [۱۹].

اگر  $n = 2m+1$  فرد باشد، مقدار تغییر فاز  $\angle\varphi(j\omega)$  از 0 تا  $+\infty$  برابر

$$\angle\varphi(+j\omega) - \angle\varphi(j0) = \frac{n\pi}{2} = m\pi + \frac{\pi}{2}$$

ریشه مثبت  $m$ ،  $\varphi^e(j\omega)$ ،  $m$  بار محور موهومی را قطع می‌کند. رابط

را داریم. همچنین، مسیر  $\varphi(j\omega)$  مطابق با  $m$  ریشه مثبت  $\omega_1 = \omega_1^e, \omega_3 = \omega_2^e, \omega_{2m-1} = \omega_m^e$

و  $\varphi^o(j\omega)$ ،  $\omega_2 = \omega_1^o, \omega_4 = \omega_2^o, \omega_{2m} = \omega_m^o$ ،  $m$  بار محور حقیقی را قطع می‌کند.

برای چند جمله‌ای  $\varphi(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n$  که تمام ریشه‌هایش در نیم صفحه باز

سمت چپ صفحه مختلط قرار دارند، ریشه‌های  $\varphi^e(j\omega)$  و  $\varphi^o(j\omega)$  دارای ویژگی‌های زیر می‌باشند.

اگر  $n = 2m$  زوج باشد، آنگاه  $0 < \omega_1^e < \omega_1^o < \omega_2^e < \dots < \omega_{m-1}^o < \omega_m^e$  و اگر  $n = 2m+1$  فرد باشد، آنگاه

$$0 < \omega_1^e < \omega_1^o < \omega_2^e < \dots < \omega_{m-1}^o < \omega_m^e < \omega_m^o \quad [۱۹].$$

بر اساس توضیحات فوق، اگر  $n = 2m$  زوج باشد، آنگاه

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{2m-1} \Rightarrow 0 < \omega_1^e < \omega_1^o < \omega_2^e < \dots < \omega_{m-1}^o < \omega_m^e \quad (۷-۲)$$



اگر  $n = 2m + 1$  فرد باشد، آنگاه:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{2m} \Rightarrow 0 < \omega_1^c < \omega_1^o < \omega_2^c < \dots < \omega_{m-1}^o < \omega_m^c < \omega_m^o \quad (۸-۲)$$

## ۲-۳- بررسی روش تحلیل پایداری سیستم‌ها به روش خارتانوف

در اینجا به شرح تحلیل پایداری سیستم‌ها به روش خارتانوف می‌پردازیم.

### ۲-۳-۱- بررسی پایداری به روش خارتانوف در سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح

پایداری نقش بسیار مهمی در طراحی سیستم‌های کنترلی دارد، یا به‌طور کلی تر کنترل سیستم بدون پایداری، مفهومی ندارد.

نتیجه‌ی خارتانوف نشان می‌دهد که برای مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های بازه‌ای، مسئله‌ی پایداری مقاوم با بررسی فقط چهار چندجمله‌ای قابل حل است. اکنون خواهیم دید چگونه این کار انجام می‌شود. برای مجموعه چند جمله‌های زیر

$$\varphi(s, p) = p_0 + p_1 s + \dots + p_{n-1} s^{n-1} + p_n s^n \quad (۹-۲)$$

که در آن  $p_i = [p_i^-, p_i^+], i = 1, 2, \dots, n$  ضرایبی با مقادیر نامعین هستند، می‌خواهیم بدانیم آیا تمام چندجمله‌ای‌های این مجموعه پایداری دارند، یعنی آیا این مجموعه پایدار مقاوم است [۱۹].  
به عبارت دیگر فرض کنید:

$$p = [p_1^-, p_1^+] \times \dots \times [p_n^-, p_n^+] \quad (۱۰-۲)$$

مجموعه‌ای از مقادیر ممکن  $p$  باشد. مجموعه چندجمله‌ای‌های مجاز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۹].

$$\psi(s, p) = \{\varphi(s, p) : p \in P\} \quad (۱۱-۲)$$

بدیهی است، این مجموعه نامحدود است. برای بررسی پایداری تمام  $\varphi(s, p)$  که  $\varphi(s, p) \in \psi(s, p)$  چهار چندجمله‌ای‌های خارتانوف زیر را بررسی می‌کنیم:

$$K_1(s) = p_0^- + p_1^- s + p_2^+ s^2 + p_3^+ s^3 + p_4^- s^4 + \dots \quad (۱۲-۲)$$

$$K_2(s) = p_0^- + p_1^+ s + p_2^+ s^2 + p_3^- s^3 + p_4^- s^4 + \dots$$

$$K_3(s) = p_0^+ + p_1^+ s + p_2^- s^2 + p_3^- s^3 + p_4^+ s^4 + \dots$$

$$K_4(s) = p_0^+ + p_1^- s + p_2^- s^2 + p_3^+ s^3 + p_4^+ s^4 + \dots$$

طبق قضیه‌ی خاریتانوف، پایداری چهار چندجمله‌ای‌های فوق برای پایداری تمام چندجمله‌ای‌ها در مجموعه نامحدود  $\Psi(s, p)$  لازم و ضروری است. اگر این چهار جمله را در صفحه‌ی مختلط رسم کنیم، به ازای یک  $\omega$  معلوم مشاهده می‌شود، که چهار جمله تشکیل یک مستطیل را می‌دهند. که طبق قضیه‌ی خاریتانوف این مستطیل همه‌ی جملات موجود در  $\Psi(s, p)$  را شامل می‌شود [۱۹].

اما در مرجع [۲۴] اثبات می‌شود که در سیستم‌هایی با مرتبه‌ی غیر صحیح تمام جملات خاریتانوف در یک مستطیل جای نمی‌گیرند. در نتیجه چندضلعی محدب باید شکلی به جز مستطیل باشد که تشخیص آن را در قسمت بعد توضیح خواهیم داد.

برای بررسی پایداری بعد از به دست آوردن چندجمله‌ای‌های خاریتانوف در سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح، از قانون راث استفاده می‌کنیم.

## ۲-۳-۲ - بررسی پایداری به روش خاریتانوف در سیستم‌های مرتبه‌ی کسری

در سیستم مرتبه‌ی صحیح پایداری در صفحه  $S$  به این صورت تعریف می‌شود که تمام قطب‌های موجود در سیستم یا صفرهای معادله‌ی مشخصه باید در سمت چپ محور  $j\omega$  قرار بگیرند. که این ویژگی با تغییرات جزئی برای سیستم‌های مرتبه غیر صحیح نیز قابل بست است.

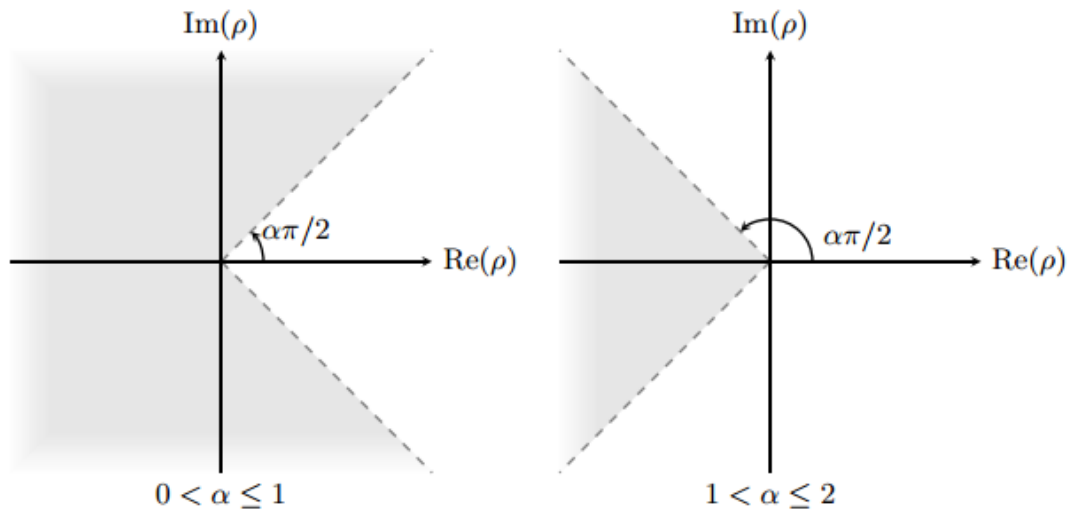
در سیستم‌های مرتبه کسری اگر تابع تبدیل به صورت زیر باشد:

$$G = \frac{a}{bs^\alpha + 1}, (0 < \alpha < 2) \quad (۱۳-۲)$$

سیستم به ازای رابطه‌ی زیر پایدار است:

$$|\arg(bs^\alpha + 1)| < \alpha \frac{\pi}{2} \quad (۱۴-۲)$$

ناحیه‌ی پایداری برای  $\alpha$  های مختلف در شکل ۱-۲ آمده است.



شکل ۱-۲: محدوده‌ی پایداری در صفحه‌ی  $S$  برای سیستم‌های مرتبه‌ی کسری [۳۳]

در این شکل محدوده‌ی پایداری به ازای  $\alpha < 1$  و  $\alpha > 1$  نشان می‌دهد، به این صورت زمانی که  $\alpha$  به سمت صفر میل می‌کند ناحیه‌ی پایداری به کل صفحه‌ی  $S$  میل می‌کند. زمانی که  $S$  برابر یک است ناحیه‌ی پایداری از قانون راث-هورویتز پیروی می‌کند و زمانی که  $S$  به سمت  $2$  میل می‌کند ناحیه‌ی پایداری به صفر میل می‌کند.

## ۲-۳-۱- به دست آوردن تعداد جملات

ساختار به دست آوردن چند جمله‌ای‌های خاریتانوف در سیستم‌های با معادلات مرتبه غیر صحیح به شرح زیر است. برای فهمیدن تعداد جملات خاریتانوف از روش شبه خاریتانوف ارائه شده در مقاله‌ی [۴] استفاده می‌کنیم.

اگر سیستم کسری مقابل را در نظر بگیرید:

$$P(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 \quad (15-2)$$

$$(n \in \mathbb{N} \text{ و } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ و } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^{>0})$$

•  $P(s)$  یک تابع مرتبه کسری با مرتبه  $\alpha$  به شکل متناسب گفته می‌شود، اگر و فقط اگر  $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\text{و } \alpha_n / \alpha \in \mathbb{N} \text{ برای } \{h \in \mathbb{N}^{\leq n} : a_h \neq 0\}.$$

•  $P(s)$  یک تابع مرتبه کسری به شکل غیرمتناسب است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد

$$[۴] a_h \neq 0, a_{h'} \neq 0, \alpha_h / \alpha_{h'} \notin \mathbb{Q} \quad h, h' \in \mathbb{N}^{\leq n}$$

در این مقاله با سیستم مرتبه کسری LTI با تابع تبدیل زیر سروکار داریم:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{p(s)} = \frac{b_n s^{\alpha'_n} + b_{n-1} s^{\alpha'_{n-1}} + \dots + b_1 s^{\alpha'_1} + b_0}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0} \quad (۱۶-۲)$$

که  $n \in \mathbb{N}$  و  $n' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  (به خوبی تعریف می شود  $\alpha'_0 \triangleq 0$ ).

$$\alpha_1 < \dots < \alpha_n \quad \text{و} \quad \alpha'_1 \leq \alpha'_n, \text{ و} \quad 0 = \alpha'_0 < \dots < \alpha'_n, \text{ و} \quad a_n \neq 0 \quad \text{و} \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad b_1, \dots, b_{n'} \in \mathbb{R}$$

فرض بر این است که  $\omega(s)$  و  $p(s)$  هیچ صفر مشترکی در CRHP ندارند. بر اساس [۲۸] نتیجه می شود

که سیستم  $G$  که در (۳) آورده شده پایدار BIBO است، اگر و تنها اگر  $p(s)$  صفری در

$$\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) \geq 0\} \text{ نداشته باشد [۴].}$$

زمانی که  $p(s)$  یک سیستم مرتبه کسری متناسب با مرتبه  $\alpha$  است، این نتیجه را می گیریم که

$p(s)$  در  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) \geq 0\}$  صفری ندارد. (به این معنی که  $G$  پایدار BIBO است)، اگر و فقط اگر

$$\text{چند جمله ای مرتبه صحیح} \quad p(s) \triangleq a_n s^{\alpha_n/\alpha} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}/\alpha} + \dots + a_0$$

$$\{s \in \mathbb{C}, s \neq \{0\}, \text{Arg}(s) \in [-0.5\pi\alpha, 0.5\pi\alpha]\} \cup \{0\} \text{ نداشته باشد.}$$

مانند [۳۰] نماد  $q$  به عنوان بردار پارامترهای نامعینی واقعی استفاده شده است.

معرفی نامعینی سیستم:

$$G(s, q) = \frac{\omega(s, q)}{p(s, q)} = \frac{q_{n+n'+1} s^{\alpha'_n} + q_{n+n} s^{\alpha'_{n-1}} + \dots + q_{n+2} s^{\alpha'_2} + q_{n+1}}{q_n s^{\alpha_n} + q_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + q_1 s^{\alpha_1} + q_0} \quad (۱۷-۲)$$

مجموعه ای از سیستم های  $G \triangleq \{G(s, q) : q \in Q\}$  را در نظر بگیرید، که  $Q$  مجموعه مرزهای

عدم قطعیت هاست. مجموعه سیستم های  $G$  پایدار مقاوم است، اگر و تنها اگر برای هر  $q \in Q$  سیستم

$$G(s, q) \text{ پایدار BIBO باشد [۴].}$$

در راستای همین تعریف، به یک خانواده از مرتبه کسری  $p \triangleq \{p(s, q) : q \in Q\}$  پایدار هورویتز مقاوم گفته

می شود، اگر و تنها اگر برای هر  $q \in Q$  تابع مرتبه کسری  $p(s, q)$  پایدار هورویتز باشد.

حال اگر معادله مشخصه به شکل روبرو باشد:

$$p(s, q) = \sum_{h=1}^n q_h s^{\alpha_h} + q_0 \quad (18-2)$$

که  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^{>0}$  و  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  و  $0 \notin [q_h^-, q_h^+]$  و  $q_h^- \leq q_h^+$  به طوری که:

$$p \triangleq \{p(s, q) : q \in Q\} \quad Q = [q_0 \dots q_h] \quad (19-2)$$

که مجموعه  $Q$  مجموعه‌ی عدم قطعیت‌هاست.  $H_0$  را به صورت زیر تعریف کنیم [۴]:

$$H_0 \triangleq \{h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\leq n} : q_h^- < q_h^+\} \quad (20-2)$$

مجموعه  $H_0$  نشان‌دهنده‌ی آدرس پارامترهایی است که دارای نامعینی هستند. حال آنکه در این حالت برای به دست آوردن هر جمله‌ی خاریتانوف برای هر آدرس از مجموعه  $H_0$  دو حالت داریم که آن دو حالت  $q_h^+$  یا  $q_h^-$  می‌باشد.

به عنوان مثال اگر مجموعه  $H_0$  دارای عضو ۲ باشد یعنی می‌توانیم دو حالت  $q_2^+, q_2^-$  را داشته باشیم.

اگر برای تمام اعضای  $H_0$  این موضوع را در نظر بگیریم و با دانستن اینکه با رسم جملات خاریتانوف در یک فرکانس معلوم و همچنین اتصال نقاط (رأس‌ها) ی به دست آمده، می‌توانیم ساختاری محدب از تصاویر تمام رئوس  $Q$  را رسم کنیم (اگر علامت # را نماد اعضای مختلف یک مجموعه در نظر بگیریم، تعداد رئوس برابر  $2^{\#H_0}$  می‌باشد).

با توجه به روش ۱ ارائه شده در مرجع [۴]، می‌توان فهمید لبه‌های مجموعه مقادیر به طور مشخص و واضح می‌تواند جذاب‌تر از نقاط محاسبه شده از تصاویر تمام رئوس باشد (به طور خاص زمانی که  $\#H_0$  بزرگ باشد). در واقع تعداد رئوس از مجموعه مقادیر  $Q$  برابر است با:

$$B_0 = \{\text{frac}(0.5\alpha_h) : h \in H\} \quad (\text{frac}(\alpha) = \alpha - \text{floor}(\alpha)) \quad (21-2)$$

به این معنی که تعداد رئوس مجموعه مقادیر زمانی که  $\#B_0 > 1$  است برابر است با  $2 \times \#B_0$  و فقط یک لبه زمانی که  $\#B_0 = 1$  (دقت کنید که همیشه  $\#B_0 \leq \#H_0$ )

مثال: مجموعه  $p$  را در نظر بگیرید:

$$P = \{p(s, q) : q \in Q\}, Q \triangleq \{[q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T, q_h \in [1, 2], h = 0, 1, 2, 3, 4\}, \quad (22-2)$$

$$p(s, q) = q_4 s^{2.2} + q_3 s^{\sqrt{2}} + q_2 s^{0.9} + q_1 s^{0.5} + q_0 \quad (23-2)$$

سپس  $\#H_0 = 5$  و  $\#B_0 = 5$ ، مجموعه  $Q$  دارای ۳۲ رأس است.

اما با استفاده از روش ذکرشده، تنها نیاز به در نظر گرفتن تنها ۱۰ رأس را داریم [۴].

### ۲-۳-۲-۲ تشکیل جملات خاریتانوف

حال با دانستن تعداد جملات خاریتانوف به شرح چگونگی تشکیل جملات آن می‌پردازیم.

اگر  $\omega > 0$  داریم:

$$B_0 = \{\text{frac}(0.5\alpha_h) : h \in H\} \quad \#\beta_0 = m \quad (24-2)$$

و  $0 < \beta_1 < \dots < \beta_m < 1$  که در نظر می‌گیریم  $B_0$  را اعضای متمایز از مجموعه‌ی  $B_0$  و

$H_1, H'_1, H_2, H'_2, \dots, H_m, H'_m$  به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴]:

$$H_i \triangleq \{h \in H_0 : \text{floor}(0.5\alpha_h) = \text{even}, \text{frac}(0.5\alpha_h) = \beta_i\} \quad (25-2)$$

$$H'_i \triangleq \{h \in H_0 : \text{floor}(0.5\alpha_h) = \text{odd}, \text{frac}(0.5\alpha_h) = \beta_i\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

داریم:

$$q^+ \triangleq [q^+_0 \quad q^+_1 \quad \dots \quad q^+_n]^T \quad q^- \triangleq [q^-_0 \quad q^-_1 \quad \dots \quad q^-_n]^T \quad (26-2)$$

که بردارهای  $q^1, q^2, \dots, q^{2m}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q^k \triangleq [q^k_0 \quad q^k_1 \quad \dots \quad q^k_n]^T \quad (27-2)$$

$$q^{m+k} \triangleq [q^{m+k}_0 \quad q^{m+k}_1 \quad \dots \quad q^{m+k}_n]^T = q^+ + q^- - q^k \quad k = 0, 1, \dots, m$$

در ادامه می‌توان نوشت:

$$q_h^k \triangleq \begin{cases} q_h^+ \text{ if } \rightarrow h \in \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} H_i \right) \cup \left( \bigcup_{i=k}^m H'_i \right) \\ q_h^- \rightarrow O.W \end{cases} \quad h = 0, 1, \dots, n \quad (28-2)$$

$$q_n^{m+k} \triangleq q_h^k + q_h^k - q_h^k = \begin{cases} q_h^+ \text{ if } \rightarrow h \in \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} H_i \right) \cup \left( \bigcup_{i=k}^m H'_i \right) \\ q_h^- \rightarrow O.W \end{cases}$$

در حالتی که  $H_0 = \emptyset$  باشد هیچ عدم قطعیتی وجود ندارد. در واقع ضرایب تابع مرتبه‌ی کسری  $p(s, q)$  مشخص و شناخته شده‌اند و به‌طور واضح آنالیز پایداری هورویتز مقاوم، تبدیل به یک تحلیل پایداری هورویتز مقاوم مرتبه کسری منحصر به فرد می‌شود [۴].

در شرایطی که  $H_0 \neq \emptyset$  توابع مرتبه کسری به رئوس متوالی از مجموعه مقادیر  $p(s, q^1), \dots, p(s, q^{2m})$  مربوط می‌شود که به صورت  $q^1, q^2, q^3, \dots, q^{2m}$  تعریف می‌شود.

به این صورت حد بالا یا حد پایین بودن پارامترها مشخص می‌شود و جملات خاریتانوف شکل می‌گیرند.

### ۲-۳-۲-۳- تشکیل چندضلعی‌های محدب با استفاده از جملات خاریتانوف

با توجه به مرجع [۲۴] متوجه می‌شویم که هر چند جمله‌ای خاریتانوف نشان‌دهنده‌ی یک رأس یک چندضلعی محدب در صفحه‌ی مختلط می‌شود. در نتیجه می‌توان چندضلعی محدب با  $2m$  رأس متوالی  $A_1(\omega), A_2(\omega), \dots, A_{2m}(\omega)$  را به صورت زیر تشکیل داد.

$$A_n(\omega) \triangleq p_{pb}(j\omega, q^h),$$

$$A_{m+k}(\omega) \triangleq p_{pb}(j\omega, q^{m+k}) = D_0(\omega) - A_k(\omega), \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (29-2)$$

$$p_{pb}(j\omega, q) \triangleq \sum_{h=0}^n q_h \omega^{\alpha_h} e^{j0.5\pi\alpha_h}, \quad q \in Q, \quad D_0(\omega) \triangleq p_{pb}(j\omega, q^+ + q^-) \quad (30-2)$$

به علاوه تعریف می‌کنیم:  $A_{2m+1}(\omega) \triangleq A_1(\omega)$

به دست می‌آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} |A_{k+1}(\omega) - A_k(\omega)| = |A_{m+k+1}(\omega) - A_{m+k}(\omega)| > 0 \\ \text{Angle}(A_k(\omega), A_{k+1}(\omega)) = \pi\beta_k \\ \text{Angle}(A_{m+k}(\omega), A_{m+k+1}(\omega)) = \pi + \pi\beta_k \end{array} \right\} k = 1, 2, \dots, m \quad (31-2)$$

در واقع مجموعه مقادیر  $p_{pb}(j\omega, q)$  یک شکل محدب از حداقل مجموعه تولیدشده‌ی  $\{A_1(\omega), A_2(\omega), \dots, A_{2m}(\omega)\}$  است [۴].

با داشتن  $2m$  رأس متوالی، با توجه به روابط گفته شده باید دانست که از رأس  $m+1$  تا رأس  $2m$ ، دقیقاً مزدوج رئوس رأس  $1$  تا  $m$  هستند. به سبب همین موضوع مقدار  $D_0$  برای تشکیل مزدوج رأس‌ها در نظر می‌گیریم به این صورت که اگر این مقدار را از هر کدام از رئوس کم کنیم مزدوج آن رأس به دست آید. چون  $D_0$  برابر مجموع حد بالا و پایین پارامتر نامعین است با کم کردن حد بالا از آن حد پایین، و با کم کردن حد پایین از آن حد بالا تشکیل می‌شود.

به این صورت جملات خاریتانوف و چندضلعی‌های محدب برای معادله‌ی مشخصه‌ی حلقه بسته به دست می‌آید.

### ۲-۳-۳ - بررسی پایداری جملات خاریتانوف

حال که با چگونگی تشکیل چندجمله‌ای‌های خاریتانوف آشنا شدیم، راه کاره‌های تحلیل پایداری جملات خاریتانوف منتج از سیستم‌های مرتبه‌ی کسری را شرح می‌دهیم:

### ۲-۳-۳-۱ - بررسی پایداری با استفاده از تابع آزمون پایداری مقاوم

تابع آزمون پایداری مقاوم  $H(\omega)$  می‌تواند برای هر  $\omega \geq 0$  به صورت زیر تعریف شود:  $(\# \beta_0 = m)$  [۴]  
در حالتی که  $m=1$ :

$$H(\omega) \triangleq \max\{|A_1'(\omega)|, h_1(\omega), h_2(\omega)\} \quad (۳۲-۲)$$

به طوری که:

$$A_1'(\omega) \triangleq \text{Im}[A_1(\omega)e^{-j\pi\beta_1}], h_1(\omega) \triangleq \text{Re}[A_1(\omega)e^{-j\pi\beta_1}], \quad (۳۳-۲)$$

$$h_2(\omega) \triangleq \text{Re}[A_2(\omega)e^{-j\pi\beta_1}] = h_1(\omega) - \text{Re}[D_0(\omega)e^{-j\pi\beta_1}]$$

در حالتی که  $m \in \mathbb{N}, m \neq 1$ :

$$H(\omega) \triangleq \max\{A_1'(\omega), B_1'(\omega), A_2'(\omega), \dots, A_m'(\omega), B_m'(\omega)\} \quad (۳۴-۲)$$

$$A_k'(\omega) \triangleq \text{Im}[A_k(\omega)e^{-j\pi\beta_k}], k = 1, 2, \dots, m \quad (۳۵-۲)$$

$$B_k'(\omega) \triangleq \text{Re}[A_k(\omega)e^{-j\pi\beta_k}] = A_k'(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega)e^{-j\pi\beta_k}]$$



با توجه به  $\omega \geq 0$  داریم:  $0 \notin p(j\omega, Q)$  اگر و فقط اگر  $H(\omega) > 0$  [۴].

سرانجام با رسم نمودار  $H(\omega)$  می‌توان پایداری سیستم را بررسی کرد.

ایده‌ی "تابع آزمون پایداری مقاوم" در مرجع [۲۵] برای چندجمله‌ای‌های مرتبه صحیح آمده است.

که برای دانستن جزئیات بیشتر درباره‌ی این ایده می‌توان به مرجع نام‌برده رجوع کرد

## ۲-۳-۳-۲- بررسی پایداری با استفاده از رسم چندضلعی‌های محدب در فرکانس‌های مختلف

در تعریف خاریتانوف قسمت قبل بیان شد که هر جمله‌ی خاریتانوف بیان‌گر یک رأس چندضلعی محدب در صفحه‌ی مختلط می‌باشد. حال می‌خواهیم بررسی کنیم که این چندضلعی‌ها در سیستم‌های مرتبه‌ی کسری چگونه در تعیین پایداری سیستم به کار می‌آیند.

اگر  $0 \notin p_{vs}(j\omega, Q) = [q_0^-, q_0^+]$  با توجه به این حقیقت که حرکت مداوم رئوس  $A_1(\omega), A_2(\omega), \dots, A_{2m}(\omega)$  از مجموعه مقادیر  $p(j\omega, Q)$  (زمانی که  $\omega \in [0, \infty)$  به‌طور پیوسته تغییر می‌کند) و با توجه به این نکته که  $p_{vs}(j\omega, Q)$  در حقیقت شکل محدبی از رئوس است (در نتیجه‌ی آن تغییر مداوم شکل محدب) به این نتیجه می‌رسیم که:  $\exists \omega > 0: 0 \in p(j\omega, Q)$  اگر و فقط اگر  $\exists \omega_0 > 0: 0 \in p(j\omega_0, Q)$  باشد که  $\partial p(j\omega_0, Q)$  نشان‌دهنده‌ی مرز  $p(j\omega, Q)$  است.

حال فرض کنید  $B_1(\omega_0), B_2(\omega_0)$  در رأس متوالی از مجموعه مقادیر  $p(j\omega, Q)$  باشند. اگر صفر روی لبه‌ی متصل به رئوس  $B_1(\omega_0), B_2(\omega_0)$  قرار گیرد، یعنی:

$$0 \in \text{edge}(B_1(\omega_0), B_2(\omega_0)) = \{\lambda B_1(\omega_0) + (1-\lambda)B_2(\omega_0) : \lambda \in [0, 1]\} \quad (۳۶-۲)$$

سپس:

$$|B_2(\omega_0)| \text{Im} \overline{B_1(\omega_0)} \frac{dB_1}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + |B_1(\omega_0)| \text{Im} \overline{B_2(\omega_0)} \frac{dB_2}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (۳۷-۲)$$

که  $\overline{B_1(\omega_0)}, \overline{B_2(\omega_0)}$  مزدوج مختلط از  $B_1(\omega_0), B_2(\omega_0)$  هستند. همین‌طور زمانی که  $B_1(\omega_0) \neq 0, B_2(\omega_0) \neq 0$  باشد می‌توان نوشت:

$$|B_1(\omega_0)| \left| \frac{d \arg(B_1(\omega_0))}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0} + |B_2(\omega_0)| \left| \frac{d \arg(B_2(\omega_0))}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0} = 0 \quad (38-2)$$

پس با توجه به  $B_1(\omega_0), B_2(\omega_0)$  به‌عنوان دو رأس متوالی از مجموعه مقادیر  $p(j\omega, Q)$  و با فرض  $\omega_0 > 0$  به این می‌رسیم که  $0 \notin \text{edge}(B_1(\omega_0), B_2(\omega_0))$  اگر  $B_1(\omega_0) \neq 0, B_2(\omega_0) \neq 0$  در نتیجه:

$$\left. \frac{d \arg(B_1(\omega_0))}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0} > 0, \left. \frac{d \arg(B_2(\omega_0))}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0} > 0 \quad (39-2)$$

پس با توجه به نکات گفته‌شده با رسم چندوجهی‌های حاصل از جملات خاریتانوف در  $\omega > 0$  نیز می‌توان پایداری سیستم را بررسی کرد.

پس اگر  $P(s) = a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_0$  را در نظر بگیریم. ( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  و  $n \in \mathbb{N}$  و  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$  و  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  و  $a_n \neq 0$ ) به‌عنوان یک سیستم مرتبه‌ی کسری به شکل متناسب با مرتبه‌ی  $\alpha$

$$(1) \text{ اگر } \alpha \in [1, 2) \text{ و } P(s) \text{ پایدار هورویتز باشد، سپس: } \left. \frac{d \arg(p(j\omega))}{d\omega} \right|_{\omega > 0} > 0$$

(2) اگر  $\alpha \in (0, 1)$  و  $p_{p.o.}(s) = \sum_{h=1}^n a_h s^{\alpha_h/\alpha} + a_0$  صفری در  $\text{ORHP} \cup \{0\}$  نداشته باشد داریم:

$$\left. \frac{d \arg(p(j\omega))}{d\omega} \right|_{\omega > 0} > 0 \quad [4]$$

در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت:

(1) زمانی که  $\alpha \in [1, 2)$  این نتیجه می‌شود که  $p$  پایدار هورویتز مقاوم است اگر و تنها اگر  $2m$  تابع  $p(s, q^1), p(s, q^2), \dots, p(s, q^{2m})$  پایدار هورویتز باشند.

(2) اگر  $\alpha \in (0, 1)$  و  $2m$  تابع چندجمله‌ای  $p_{\text{poly}}(s, q^k) \triangleq \sum_{h=1}^n q_h^k s^{\alpha_h/\alpha} + q_0, k=1, 2, \dots, 2m$  صفری در

$\text{ORHP} \cup \{0\}$  نداشته باشد، آنگاه  $P$  پایدار هورویتز مقاوم است.

که  $\text{ORHP} \cup \{0\}$  برابر است با:  $\text{ORHP} = \{s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) > 0\}$

(3) اگر  $\alpha \in [2, \infty)$  آنگاه هیچ‌کدام از اعضای  $P$  پایدار هورویتز مقاوم نیست.

توجه شود که شرایط گفته شده شرط لازم و کافی را برای حالتی که  $\alpha \in [1, 2)$  است ارائه می دهد ولی تنها شرایط لازم را برای حالتی که  $\alpha \in (0, 1)$  است محیا می کند.

محافظه کاری در این روش در حالتی که  $\alpha \in (0, 1)$  است و  $\alpha$  کاهش میابد بدتر می شود [۴].

### ۲-۳-۳- به دست آوردن فرکانس مورد نیاز

نکته ای که در روش اول و دوم باید در نظر داشته باشیم. این است که ما نمی توانیم برای همگی  $\omega \in [0, +\infty)$  تابع آزمون پایداری مقاوم و چندوجهی های محدب را رسم کنیم و محاسبات آن ها را انجام دهیم چون در آن صورت مجبور هستیم بی نهایت مقدار را به دست بیاوریم.

برای رفع این مشکل در این قسمت  $\omega$  را به مقدار مورد نیاز محدود می کنیم تا روش های اول و دوم قابل استفاده شوند.

با توجه به لم ۵ مرجع [۴] برای هر  $q \in Q$  می توانیم این را بگوییم که همگی صفرهای تابع  $p(s, q)$  در مجموعه  $\{s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \widetilde{R_{\min}} \leq |s| \leq \widetilde{R_{\max}}\}$  وجود دارند به طوری که [۴]:

$$R_{\min} \triangleq \max\{R_{1\min}, R_{2\min}\}, R_{\max} \triangleq \max\{R_{1\max}, R_{2\max}\}$$

$$R_{1\min} \triangleq \min\{1, (E / \sum_{h=1}^n \max\{|q_h^-|, |q_h^+|\})^{1/(\alpha_1)}\} \quad (۴۰-۲)$$

$$R_{1\max} \triangleq \max\{1, (\sum_{h=0}^{n-1} \max\{|q_h^-|, |q_h^+|\} / \min\{|q_h^-|, |q_h^+|\})^{1/(\alpha_n - \alpha_{n-1})}\}$$

$$R_{2\min} \triangleq [E/E + \max\{|q_1^-|, |q_1^+|, |q_2^-|, |q_2^+|, \dots, |q_n^-|, |q_n^+|\}]^{F_1}$$

$$R_{2\max} \triangleq (1 + \max\{|q_0^-|, |q_0^+|, |q_1^-|, |q_1^+|, \dots, |q_{n-1}^-|, |q_{n-1}^+|\} / \min\{|q_h^-|, |q_h^+|\})^{F_2}$$

$$E = \begin{cases} \min\{|q_0^-|, |q_0^+|\}, & \text{if } 0 \notin [q_0^+, q_0^-] \\ 0, & \text{if } 0 \in [q_0^+, q_0^-] \end{cases}, \quad (۴۱-۲)$$

$$F_1 = \max\{1/\alpha_1, 1/\alpha_2, \dots, n/\alpha_n\}$$

$$F_2 = \max\{1/(\alpha_n - \alpha_{n-1}), 1/(\alpha_n - \alpha_{n-2}), \dots, n/(\alpha_n - \alpha_0)\}$$

بنابراین کافی ست روش اول و دوم را تنها برای  $\omega \in [\tilde{R}_{\min}, \tilde{R}_{\max}]$  رسم کنیم. برحسب آنچه گفته شد  $H(\omega) > 0$  برای هر  $\omega > 0$  اگر در  $\omega \in [\tilde{R}_{\min}, \tilde{R}_{\max}]$  داشته باشیم  $H(\omega) > 0$  (برای هر دو حالت متناسب و غیرمتناسب)

مثال : در [۳۴] سیستم مرتبه کسری  $G_0(s) = 1 / (0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1)$  با یک  $pD^u$  مرتبه کسری کنترل می شود. کنترل  $pD^u$  پیشنهاد شده برابر  $C(s) = kp + kds^u = 20.5 + 3.73s^{1.15}$  می باشد، در [۲۴] فرض بر این است که در سیستم چند نامعینی وجود دارد که می تواند به صورت زیر مدل شود.

$$G(s, q') = 1 / (q_2 s^{2.2} + q_1 s^{0.9} + q_0), q' \triangleq [q_0 \quad q_1 \quad q_2]^T \in Q'$$

$$Q' \triangleq \{[q_0 \quad q_1 \quad q_2]^T : q_0 \in [0.8, 1.2], q_1 \in [0.3, 0.7], q_2 \in [0.6, 1]\} \quad (42-2)$$

بنابراین تابع تبدیل سیستم حلقه بسته می شود:

$$Gc(s, q') = (3.73s^{1.15} + 20.5) / [q_2 s^{2.2} + 3.73s^{1.15} + q_0 s^{0.9} + (q_0 + 20.5)] \quad (43-2)$$

تعریف می کنیم خانواده توابع مرتبه کسری

$$p(s, q) = q_3 s^{2.2} + q_2 s^{1.15} + q_1 s^{0.9} + q_0 \quad (44-2)$$

$$P = \{p(s, q) : q \in Q\}$$

$$Q \triangleq \{[q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T, q_0 \in [21.3, 21.7], q_1 \in [0.3, 0.7], q_2 = 3.73, q_3 \in [0.6, 1]\}$$

ما نشان می دهیم که P پایدار هورویتز مقاوم است (و به دنبال آن  $Gc(s, q^-)$  پایدار BIBO است برای هر  $q' \in Q'$ ).

در نتیجه داریم:

$$H_0 = \{0, 1, 3\}, B_0 = \{0, 0.1, 0.45\}$$

$$m = 3, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0.1, \beta_3 = 0.45$$

$$H_1 = \{0\}, H_2 = \{3\}, H_3 = \{1\}, H'_1 = H_2 = H'_3 = \emptyset$$

$$q^1 \triangleq [q_0^- \quad q_1^- \quad q_2^- \quad q_3^+]^T = [21.3 \quad 0.3 \quad 3.73 \quad 1]^T \quad (45-2)$$

$$q^2 \triangleq [q_0^+ \quad q_1^- \quad q_2^- \quad q_3^+]^T = [21.7 \quad 0.3 \quad 3.73 \quad 1]^T$$

$$q^3 \triangleq [q_0^+ \quad q_1^- \quad q_2^- \quad q_3^-]^T = [21.7 \quad 0.3 \quad 3.73 \quad 0.6]^T$$

$$q^4 \triangleq [q_0^+ \quad q_1^+ \quad q_2^+ \quad q_3^-]^T = [21.7 \quad 0.7 \quad 3.73 \quad 0.6]^T$$

$$q^5 \triangleq [q_0^- \quad q_1^+ \quad q_2^+ \quad q_3^-]^T = [21.3 \quad 0.7 \quad 3.73 \quad 0.6]^T$$

$$q^6 \triangleq [q_0^- \quad q_1^+ \quad q_2^+ \quad q_3^+]^T = [21.3 \quad 0.7 \quad 3.73 \quad 1]^T$$

ما نیازی به محاسبه  $q^4$  و  $q^5$  و  $q^6$  برای پایداری هورویتز مقاوم نداریم. با این حال اگر بخواهیم مجموعه مقادیر  $p_{vs}(j\omega, Q)$  را به تصویر بکشیم برای هر  $\omega > 0$  مشخص، باید برای این هدف،  $q^4, q^5, q^6$  محاسبه کنیم.

می‌توانیم بنویسیم:

$$p_{pb}(j\omega, q) = q_3 \omega^{2.2} e^{j1.1\pi} + q_2 \omega^{1.15} e^{j0.575\pi} + q_1 \omega^{0.9} e^{j0.45\pi} + q_0 \quad (۴۶-۲)$$

برای هر  $q \in Q$  و  $\omega \geq 0$  تعریف می‌کنیم  $D_0(\omega) \triangleq p_{pb}(j\omega, q^+ + q^-)$  که  $q^+ + q^- \triangleq [43 \quad 1 \quad 7.64 \quad 1.6]^T$  سپس به دست می‌آید.

$$A'_1(\omega) \triangleq \text{Im}[p_{pb}(j\omega, q^1)]$$

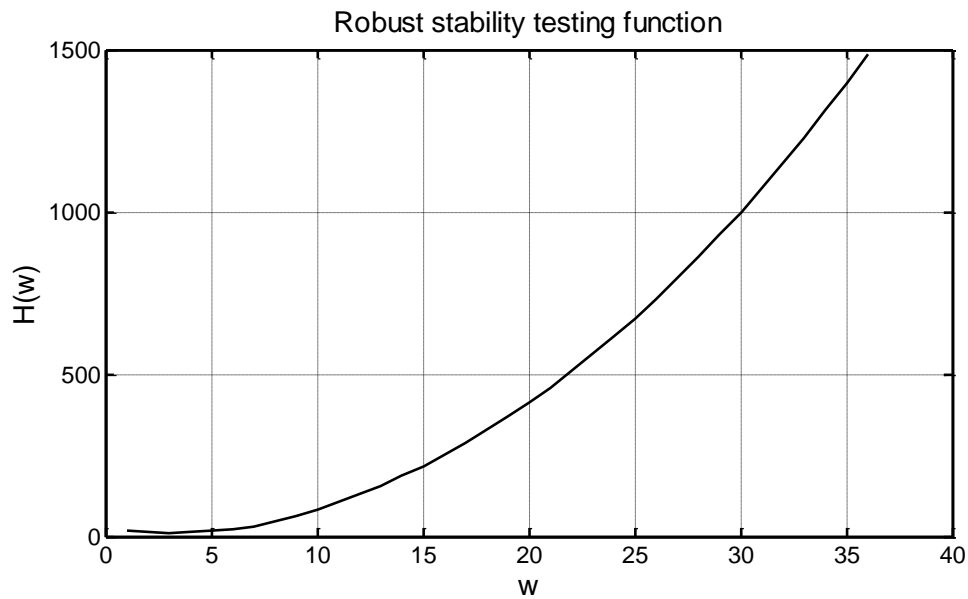
$$A'_2(\omega) \triangleq \text{Im}[p_{pb}(j\omega, q^2) e^{-j0.1\pi}]$$

$$A'_3(\omega) \triangleq \text{Im}[p_{pb}(j\omega, q^3) e^{-j0.45\pi}] \quad (۴۷-۲)$$

$$B'_1(\omega) \triangleq A'_1(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega)]$$

$$B'_2(\omega) \triangleq A'_2(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega) e^{-j0.1\pi}]$$

$$B'_3(\omega) \triangleq A'_3(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega) e^{-j0.45\pi}]$$



شکل ۲-۲: تابع آزمون پایداری مقاوم

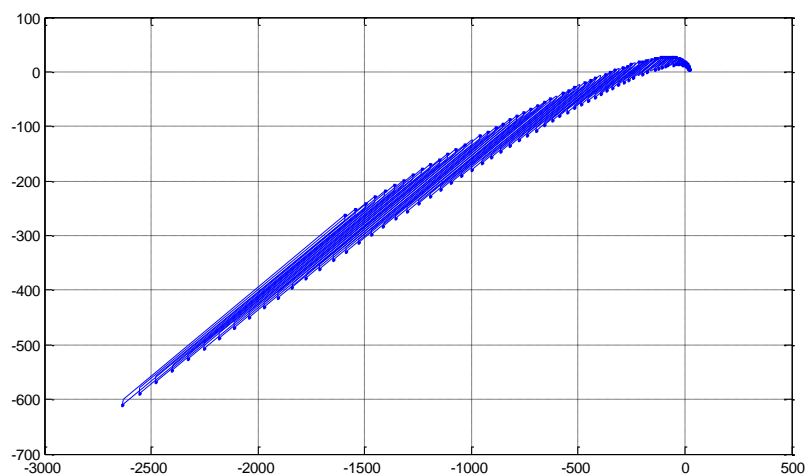
بر مبنای آنچه گفته به دست می آید:  $R_{\max} = 36.3866, R_{\min} = 1$  را در نظر می گیریم.

بر مبنای آنچه گفته به دست می آید:  $R_{\max} = 36.3866, R_{\min} = 1$

در شکل ۲-۲ برای  $\omega \in [R_{\min}, R_{\max}] = [1, 36.3866]$  رسم شده است.

همان طور که مشاهده می شود  $H(\omega) > 0$  برای همه  $\omega \in [R_{\min}, R_{\max}]$  در این حالت،  $H(\omega) > 0$  برای

همه  $\omega \geq 0$ .



شکل ۳-۲: تغییرات چندضلعی های محدب در صفحه ی مختلط

در شکل ۲-۳ مشاهده می‌شود که چندضلعی‌های حاصل از چندجمله‌ای‌های خاریتانوف مبدأ مختصات را شامل نشده است و از قضیه‌ی تقاطع [۱۹] نیز پیروی می‌کند.





# فصل سوم

## طراحی کنترل کننده PID به روش

خارستانوف

## فصل ۳ - طراحی کنترل کننده PID به روش خاریتانوف

### ۳-۱- طراحی کنترل کننده PID

روش‌های مختلفی برای طراحی کنترل کننده PID وجود دارد، که ما در اینجا می‌خواهیم از روش جالب خاریتانوف برای این امر استفاده کنیم.

### ۳-۱-۱- طراحی کنترل کننده PID به روش خاریتانوف برای سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح

همان‌طور که می‌دانیم برای طراحی کنترل کننده PID ما نیاز به به‌دست آوردن  $k_p$ ،  $k_I$  و  $k_D$  هستیم. از آنجاکه روش خاریتانوف روش تعیین پایداری مقاوم برای سیستم‌های اینتروال است و سیستم‌های اینتروال سیستم‌های نامعینی هستند که محدوده‌ی تغییرات پارامترهای نامعین آن در یک بازه‌ی محدود قرار می‌گیرند و با توجه به این نکته که قطعاً ما نمی‌توانیم پارامترهای کنترل کننده را برای رسیدن به پایداری یک سیستم و همچنین در نظر گرفتن شرایط دنبال کردن هدف با آزادی صد درصد انتخاب کنیم، می‌توانیم پارامترهای کنترل کننده را نیز جزئی از نامعینی‌های سیستم اینتروال قرار دهیم. روش زیر می‌تواند نحوه‌ی رسیدن به محدوده‌ی مجاز را برای پارامترهای کنترل کننده برای رسیدن به پایداری مشخص کند.

### ۳-۱-۱-۱- رسم جملات خاریتانوف برحسب $K_p, K_I$

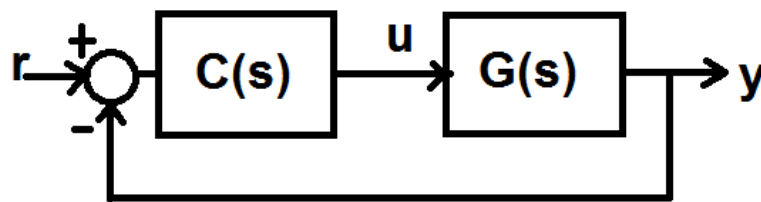
می‌خواهیم برای سیستم نامعین  $G(s)$  کنترل کننده مرتبه‌ی کسری با معادله‌ی  $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$  را طراحی کنیم با توجه به دارای بودن نامعینی اگر این سیستم را در بلوک حلقه بسته با فیدبک واحد قرار دهیم، معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم به صورت  $p_i(s) = 1 + C(s) \times G_i(s)$  حاصل می‌شود. که  $i$  با توجه به تعداد جملات خاریتانوف در حالت مرتبه‌ی کسری مقدار می‌گیرد. از آنجاکه در فصل قبل نحوه‌ی به‌دست آوردن جملات خاریتانوف بیان شد، با داشتن پارامترهای کنترل کننده وارد مرحله‌ی بعد می‌شویم. با جایگذاری هرکدام از جملات خاریتانوف یک معادله‌ی مشخصه متفاوت حاصل می‌شود.

تمام سیستم پایدار هورویتز است ، اگر خانواده چندجمله‌ای‌های خاریتانوف به دست آمده پایدار هورویتز باشد [۴].

در جملات به دست آمده‌ی خاریتانوف هر جمله ، اگر داشته باشیم  $s = j\omega$  ، و قسمت حقیقی و موهومی آن را برابر صفر قرار دهیم، در نهایت می‌توانیم دو معادله‌ی حاصل را بر حسب  $K_p$  و  $K_I$  به دست می‌آوریم. اگر برای هر جمله نمودار  $K_p$  را بر حسب  $K_I$  و بر حسب تغییرات  $\omega$  رسم می‌کنیم و سپس نمودار سه بعدی حاصل را بر روی دو بعد  $K_p, K_I$  تصویر می‌کنیم.

با اشتراک از محدوده‌ی محصور بین نمودارهای حاصل و محورهای  $K_p, K_I$  محدوده‌ی تغییرات برای پارامترهای  $K_p, K_I$  به دست می‌آید [۲۶].

مثال : بر مبنای مرجع [۲۶] می‌خواهیم برای سیستمی با تابع تبدیل زیر کنترل کننده‌ی PID طراحی کنیم. داریم:



شکل ۱-۳: بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته

$$G(s) = \frac{5.2(s+2)}{s(s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0)} \quad (۱-۳)$$

به طوری که  $9.5 \leq b_0 \leq 11.5, 12 \leq b_1 \leq 15, 3.5 \leq b_2 \leq 4.8$  ، و بلوک دیاگرام فرآیند به صورت شکل ۱-۳ است. در شکل ۲-۳ مشاهده می‌شود که سیستم  $G(s)$  ناپایدار است.

تابع تبدیل کنترل کننده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad (۲-۳)$$

با توجه به اینکه سیستم مرتبه‌ی صحیح است، پس به دست آوردن تنها چهار چندجمله‌ای خاریتانوف برای این سیستم کافی است. در نتیجه با توجه به شکل ۱-۳ برای به دست آوردن معادله‌ی مشخصه داریم:

$$p_i(s) = 1 + C(s) \times G_i(s), i = 1, 2, 3, 4 \quad (3-3)$$

پس از ضرب کنترل کننده در تابع تبدیل معادله‌ی مشخصه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p(s) = s^5 + b_2s^4 + b_1s^3 + b_0s^2 + [5.2K_Ds^3 + (5.2K_P + 10.4K_D)s^2 + (5.2K_I + 10.4K_P)s + 10.4K_I] \quad (4-3)$$

پس از به دست آوردن چهار چندجمله‌ای خاریتانوف برای این معادله مشخصه داریم:

$$p_1(s) = s^5 + 4.8s^4 + 12s^3 + 9.5s^2 + [5.2K_Ds^3 + (5.2K_P + 10.4K_D)s^2 + (5.2K_I + 10.4K_P)s + 10.4K_I] \quad (5-3)$$

$$p_2(s) = s^5 + 3.5s^4 + 12s^3 + 11.5s^2 + [5.2K_Ds^3 + (5.2K_P + 10.4K_D)s^2 + (5.2K_I + 10.4K_P)s + 10.4K_I]$$

$$p_3(s) = s^5 + 3.5s^4 + 15s^3 + 11.5s^2 + [5.2K_Ds^3 + (5.2K_P + 10.4K_D)s^2 + (5.2K_I + 10.4K_P)s + 10.4K_I]$$

$$p_4(s) = s^5 + 4.8s^4 + 15s^3 + 9.5s^2 + [5.2K_Ds^3 + (5.2K_P + 10.4K_D)s^2 + (5.2K_I + 10.4K_P)s + 10.4K_I]$$

پس از آن با قرار دادن  $s = j\omega$  و برابر صفر قرار دادن قسمت حقیقی و موهومی سعی بر به دست آوردن  $K_P, K_D$  به صورت دو معادله دو مجهول، معادلات زیر به دست می‌آید:

$$k_I = \frac{D_1B_2 - D_2B_1}{B_1C_2 - B_2C_1}, \quad k_P = \frac{C_1D_2 - C_2D_1}{B_1C_2 - B_2C_1} \quad (6-3)$$

در اینجا به عنوان نمونه، برای معادله مشخصه‌ی اول روابط را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$q_1(\omega, K_D) = 4.8\omega^4 - (9.5 + 10.4K_D)\omega^2 + j[\omega^5 - (12 + 5.2K_D)\omega^3] \quad (7-3)$$

$$q_2(\omega) = -5.2\omega^2 + j10.4\omega, \quad q_3(\omega) = 10.4 + j5.2\omega$$

$$B_1 = \text{Re}(q_2(\omega)), \quad B_2 = \text{Im}(q_2(\omega)),$$

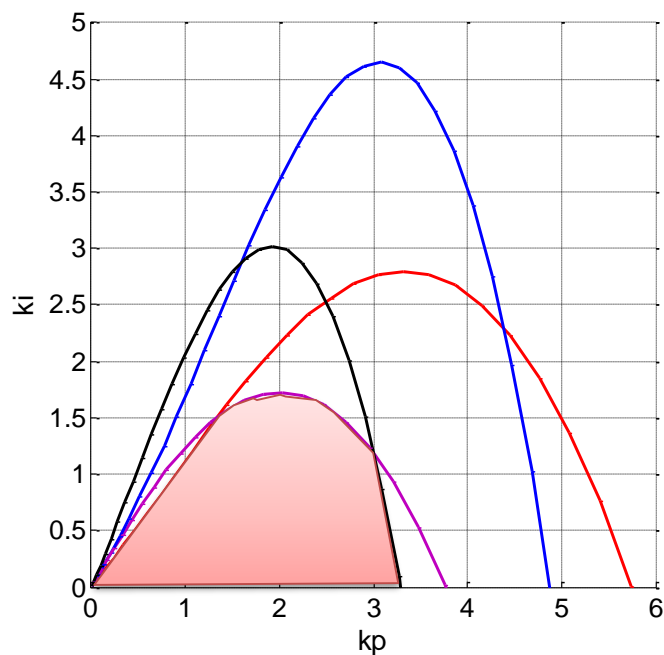
$$C_1 = \text{Re}(q_3(\omega)), \quad C_2 = \text{Im}(q_3(\omega)),$$

$$D_1 = \text{Re}(q_1(\omega, K_D)), \quad D_2 = \text{Im}(q_1(\omega, K_D))$$

برای جملات دوم تا چهارم به همین ترتیب عمل می‌کنیم.  $K_D = 0.01$  قرار می‌دهیم.

سپس با استفاده از معادلات به دست آمده می‌توانیم نمودار تغییرات  $K_P, K_I$  را بر حسب تغییرات  $\omega$  رسم

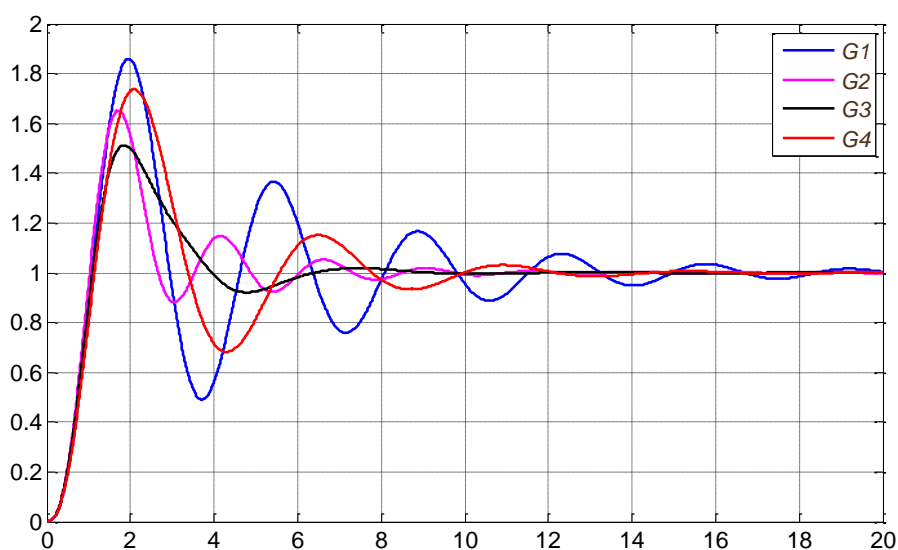
می‌کنیم. و نمودار سه بعدی حاصل را روی سطح  $K_P, K_I$  تصویر می‌کنیم.



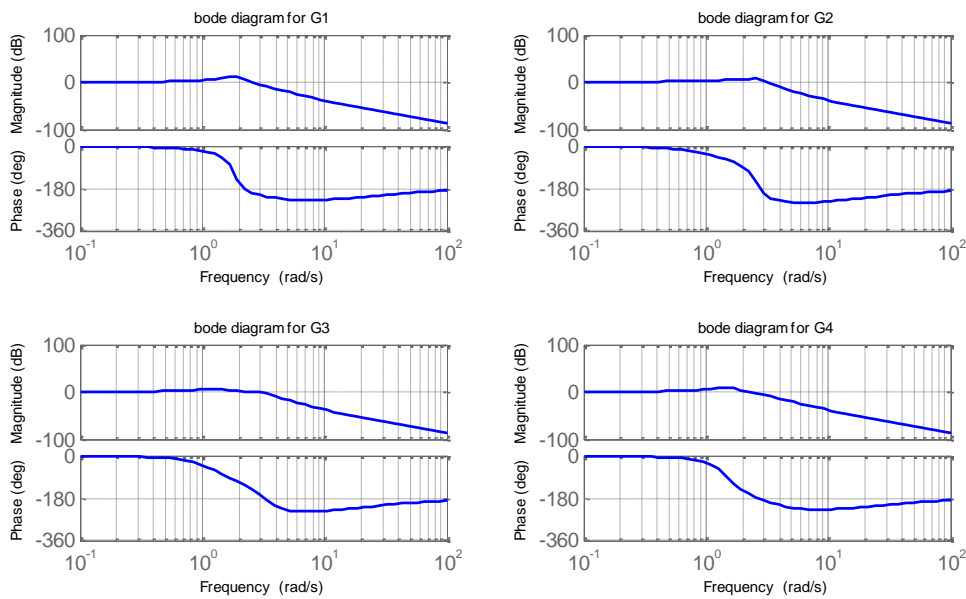
شکل ۳-۲: محدوده‌ی مشترک بین چند جمله‌ای‌های خاریتانونف بر حسب تغییرات  $K_p$

مرجع [۲۶] نشان می‌دهد که با انتخاب  $K_p, K_I$  در محدوده‌ی مشخص شده در شکل ۳-۳، سیستم موردنظر پایدار می‌شود.

در اینجا با قرار دادن  $K_p = 2, K_I = 1$ ، که در بازه‌ی مشخص شده قرار دارند، پاسخ پله‌ی سیستم کنترل شده و دیاگرام بوودی چند جمله‌ای‌ها به ترتیب در شکل ۳-۴ و ۳-۵ آمده است.



شکل ۳-۳: پاسخ پله سیستم کنترل شده به وسیله‌ی کنترل کننده‌ی PID



شکل ۳-۴: دیاگرام بود سیستم کنترل شده به وسیله‌ی کنترل کننده‌ی PID

مشاهده می‌شود که پس از طراحی کنترل کننده سیستم مورد نظر به پایداری رسیده است.

### ۳-۱-۲- طراحی کنترل کننده PID به روش خاریتانوف برای سیستم‌های مرتبه‌ی کسری

تا اینجا پایداری سیستم‌های مرتبه‌ی کسری را قبل از دخالت کنترل کننده با استفاده از جملات خاریتانوف بررسی کردیم. حال می‌خواهیم پس از دخالت کنترل کننده علاوه بر روش رسم پاسخ پله، پایداری را به واسطه‌ی جملات خاریتانوف به روش دیگر بررسی کنیم.

هدف ما در اینجا توسعه‌ی کاری است که در مقاله‌ی [۲۶] برای سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح انجام شده به حالت مرتبه‌ی کسری است. که در این حالت توان‌های مشتق گیر و انتگرال گیر را غیر صحیح در نظر می‌گیریم.

پس از ضرب کنترل کننده در سیستم، مشاهده می‌شود که علاوه بر پارامترهای نامعلوم  $K_p, K_I, K_D$ ، پارامترهای  $\lambda, \mu$  نیز، نیاز به تعیین دارند. بنابراین دیگر روشی که برای طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح در پیش گرفتیم در این حالت پاسخ‌گو نیست.

برای رفع این مشکل به دو روش زیر عمل می‌کنیم.

### ۱-۲-۱-۳ روشی مبتنی بر سعی و خطا

روشی که در این قسمت مطرح می‌شود به این صورت است که فرض می‌کنیم می‌خواهیم برای سیستمی با تابع تبدیل (۱-۳)، کنترل‌کننده‌ی PID مرتبه‌ی کسری یا FOPID را طبق بلوک دیاگرام شکل ۱-۳ طراحی کنیم. کنترل‌کننده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C(s) = \frac{K_D s^{\lambda+\mu} + K_P s^\lambda + K_I}{s^\lambda} \quad (۸-۳)$$

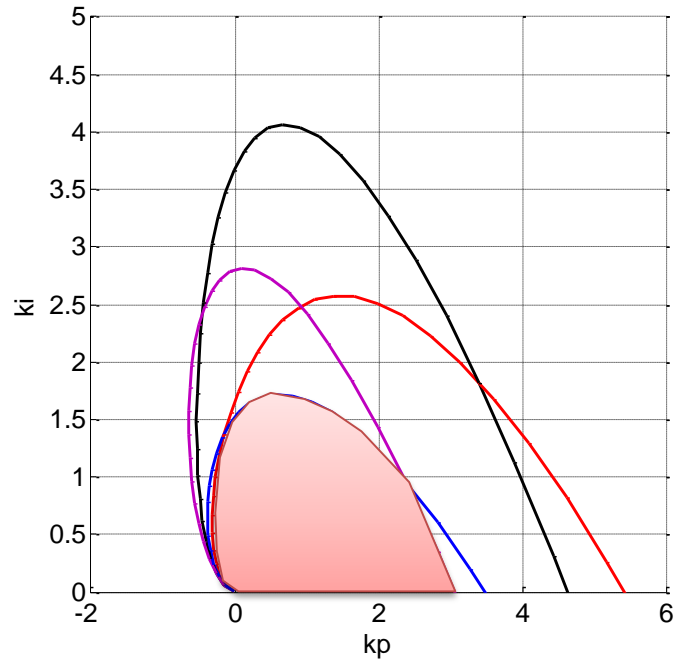
پس از به دست آوردن تابع تبدیل حلقه بسته، معادله‌ی مشخصه به صورت زیر به دست می‌آید

$$p(s) = s^{4+\lambda} + b_2 s^{3+\lambda} + b_1 s^{2+\lambda} + b_0 s^{1+\lambda} + [5.2 K_D s^{\lambda+\mu+1} + (5.2 K_P + 10.4 K_D) s^{\lambda+\mu} + (5.2 K_I + 10.4 K_P) s^{\lambda+\mu-1} + 10.4 K_I] \quad (۹-۳)$$

در این معادله‌ی مشخصه مشاهده می‌شود که برای رسم چند جمله‌های خاریتانوف آن نیاز به پنج پارامتر  $K_P, K_I, K_D, \lambda, \mu$  هستیم. که با استفاده از روش سعی و خطا، با ثابت قرار دادن  $K_D, \lambda, \mu$  می‌توانیم از روش گفته برای سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح استفاده کرد.

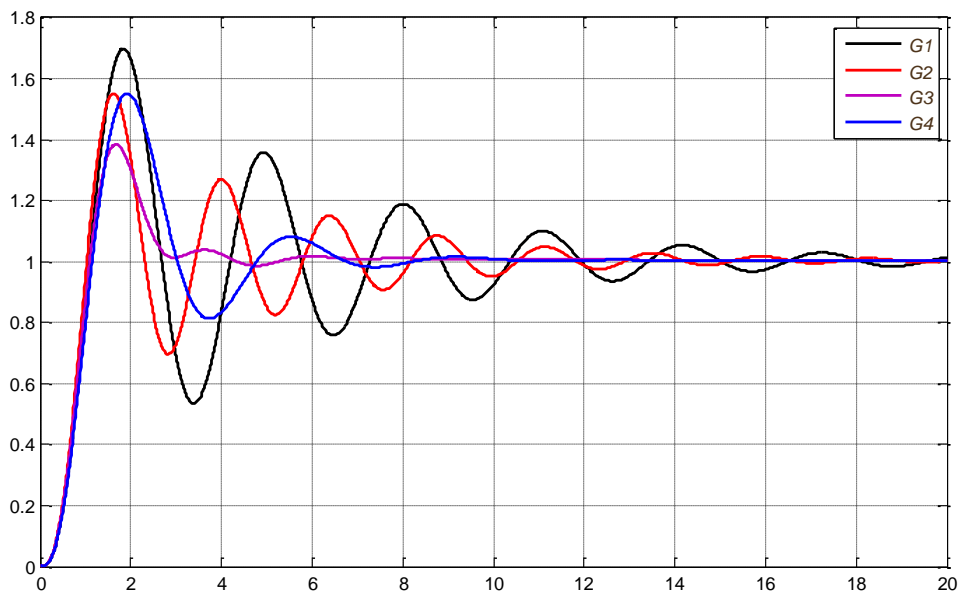
در این مثال با نسبت دادن اعدادی ثابت برای  $K_D, \lambda, \mu$ ، پس از آن با به دست آوردن چند جمله‌ای‌های خاریتانوف و برابر صفر قرار دادن قسمت حقیقی و موهومی و سپس رسم  $K_P, K_I$  بر مبنای تغییرات  $\omega$  می‌توان محدوده‌ی مجاز برای انتخاب  $K_P, K_I$  به دست آورد.

برای مثال  $K_D = 0.01, \lambda = 0.5, \mu = 0.5$  در نظر می‌گیریم با رسم چند جمله‌ای‌های خاریتانوف با این مقادیر، شکل زیر به دست می‌آید:



شکل ۳-۵: محدوده‌ی مجاز برای انتخاب  $K_p, K_I$

حال از محدوده‌ی مشخص شده می‌توانیم  $K_p, K_I$  مناسب را بیابیم. در اینجا مقادیر  $K_p = 2, K_I = 0.5$  را انتخاب می‌کنیم. پاسخ پله‌ی سیستم به صورت زیر قابل مشاهده است.



شکل ۳-۶: پاسخ پله‌ی سیستم کنترل شده توسط کنترل کننده‌ی مرتبه کسری



اما روشی که در ادامه به شرح آن می‌پردازیم ما را در به‌دست آوردن بهینه‌ی پارامترها کمک می‌کند. که به‌مراتب روش بهتری نیز می‌باشد.

### ۳-۱-۲-۲- روش بهینه‌گروه ذرات

با توجه به روش بیان‌شده در قسمت قبل مشاهده شد که ما نیاز به یک روش مطمئن‌تر برای پیدا کردن صحیح و بهینه‌ی پارامترهای کنترل‌کننده هستیم که استفاده از روش بهینه‌ی گروه ذرات می‌تواند گزینه‌ی بسیار خوبی برای این هدف باشد. در این روش پارامترها با توجه به شرایطی که برای پارامترها در نظر گرفته می‌شوند، داخل الگوی خاص این روش قرار می‌گیرند، و هدف که به‌صورت شرط در برنامه قرار می‌گیرد، موجب بهینه شدن جواب می‌گردد.

در فصل بعد پس از شرح مقدمه‌ای از این روش به توضیح کامل آن می‌پردازیم.



## فصل چهارم

به دست آوردن پارامترهای کنترل کننده

با استفاده از روش همینه گروه ذات

## فصل ۴ - به دست آوردن پارامترهای کنترل با استفاده از روش بهینه‌ی

### گروه ذرات

#### ۴-۱- تعریف بهینه‌سازی

بهینه‌سازی بدین مفهوم است که در بین پارامترهای یک تابع به دنبال مقادیری باشیم که تابع را کمینه یا بیشینه می‌نمایند.

#### ۴-۲- روش بهینه‌سازی گروه ذرات

در این بخش به شرح مختصری درباره‌ی این روش می‌پردازیم:

#### ۴-۲-۱- تاریخچه بهینه‌سازی گروه ذرات

در بیشتر گونه‌های جانوران رفتارهای گروهی دیده شده است. چه بسا که بعضی از این گونه‌ها نیز توسط یک عضو برتر گروه راهنمایی می‌شوند. به عنوان مثال در شیرها ریا، میمون‌ها و گوزن‌ها این امر کاملاً مشاهده می‌شود. در اوایل سال ۱۹۰۰ با تحقیقاتی که بر روی رفتار اجتماعی میمون‌ها صورت گرفت مشخص شد که در این گونه از میمون‌ها عملکرد و رفتار هر عضو از گروه به صورت سلسله مراتبی از طرف جامعه‌ی بالا، شکلان داده می‌شود. مطلب جالب‌تری که وجود دارد این است که گونه‌هایی از جانوران وجود دارند که به صورت گروهی زندگی می‌نمایند اما راهنمایی ندارند. هر عضو یک رفتار خود سازمانده دارد که بدون استفاده از یک راهنما می‌تواند در محیط حرکت کند و نیازهای طبیعی خود را برطرف نماید. این گونه جانوران دانشی نسبت به رفتار عمومی کل گروه ندارند و یا حتی هیچ دانشی نسبت به محیطی که در آن قرار دارند نیز، ندارند. مانند گروه پرندگان، ماهی‌ها و همچنین گله‌ی گوسفندان. در عوض قادرند با رد و بدل نمودن اطلاعات با اعضای هم‌جوار خود در محیط حرکت کنند. این تعامل ساده بین ذرات باعث ایجاد

رفتار پیچیده‌تر گروه می‌شود. مانند جستجوی یک محیط توسط ذرات. این رفتار در گونه‌های زیر یافت می‌شود:

رفتار پرندگان، شکار کردن وال‌های کوژ پشت، جستجوی غذا در میمون‌های وحشی، ماهی‌ها و جستجوی غذا در کوسه‌ها

جهت فهم بهتر رفتار پویای گروه ذرات، در [۳۵] بعضی از رفتارها شبیه‌سازی شده است و رفتار اعضای گروه به دسته‌های زیر تقسیم‌بندی شدند.

اجتناب از برخورد<sup>۱</sup>: اعضای یک گروه با یکدیگر برخوردی ندارند.

تنظیم سرعت<sup>۲</sup>: هر عضو سرعت خود را متناسب با اعضای همسایه‌ی خود تنظیم می‌نمایند.

جمع شدن مرکزی<sup>۳</sup>: هر عضو تلاش می‌کند که در همسایگان خود حرکت کند.

در بسیاری از کاربردهای بهینه‌سازی از این شبیه‌سازی‌ها الهام گرفته شده است. در ادامه به مدل خاصی از بهینه‌سازی‌ها که از زندگی جانوران انبوه الهام گرفته است پرداخته می‌شود که بهینه‌سازی گروه ذرات نام دارند.

اولین بار کندی و ابرهات پس از شبیه‌سازی رفتار اجتماعی پرندگان روش بهینه‌سازی گروه ذرات را ارائه دادند [۳۶] اجزای یک گروه از یک رفتار ساده تبعیت می‌نمایند. هدف از این الگوریتم‌ها این است که اعضای گروه در فضای جستجو حرکت نموده و در یک نقطه بهینه جمع شوند. بدین نحو که هر عضو از گروه از موقعیت سایر همسایگان‌شان تقلید می‌نماید. این رفتار شبیه فرضیه‌ای است که در [۳۷] ارائه شده است. روش PSO ریشه در کارهای Reynolds دارد که یک شبیه‌سازی ابتدایی از رفتار پرندگان است. در این مدل پرندگان به صورت تصادفی در یک فضای جستجوی جدول پیکسلی قرار داده می‌شوند و در هر تکرار نزدیک‌ترین همسایه‌ی ذره انتخاب شده و سرعت ذره با سرعت نزدیک‌ترین همسایه‌اش جایگزین

---

<sup>۱</sup> Collision avoidance

<sup>۲</sup> Flock Centering

<sup>۳</sup> particle

می‌شود. این عمل باعث می‌گردد که گروه خیلی سریع به یک‌جهت حرکت نامعین و بدون تغییر همگرا شود. جهت رفع این مشکل یک مؤلفه دیوانگی به‌صورت تغییر تصادفی در گروه‌ها استفاده شده است.

به‌منظور توسعه‌ی بیشتر این مدل مفهوم سردسته پرنندگان به مدل اضافه گردید که به شکل یک حافظه از بهترین موقعیت‌های هر عضو و همسایگان آن عضو بهترین موقعیتی است که آن عضو از ابتدای حیات خود تا به حال کسب نموده است. بهترین موقعیت همسایگی بهترین موقعیتی است که توسط همسایگان یک عضو ملاقات شده است. با استفاده از یک مجموعه قوانین ساده می‌توان موقعیت‌های اعضای گروه را به‌روز نمود. به‌مرورزمان با تکرار الگوریتم اعضا حول یک هدف جمع می‌شوند. این رفتار حتی بدون هماهنگی سرعت‌ها و فاکتور دیوانگی نتیجه‌بخش بود. مدل نهایی بهینه‌سازی گروه ذرات نامیده شد.

اصول پایه‌ای هوش گروهی به‌صورت زیر تعریف شده است.

اصل هم‌جواری<sup>۱</sup>: گروه عناصر باید قادر باشند که محاسبات را در فضا و زمان اندکی انجام دهند.

اصل تطابق: گروه ذرات باید قادر باشد. رفتار خود را به نفع کاهش هزینه محاسباتی تغییر دهد.

اصل تنوع پاسخ: ذرات نباید فعالیتش را بر روی کانال‌های خیلی باریک محدود نماید.

اصل پایداری: گروه ذرات نباید حالت رفتار خود را هر بار با تغییرات محیط تغییر دهند.

اصل کیفیت: گروه ذرات باید قادر باشند که به فاکتورهای کیفی پاسخ دهند.

بهینه‌سازی گروه ذرات به‌صورت زیر این موضوعات را برآورده می‌نماید که محاسبات فضای چندبعدی به‌صورت یک سری از گام‌های زمانی انجام می‌شوند. گروه ذرات به فاکتورهای کیفی به‌صورت بهترین موقعیت‌های فردی و همسایگی جواب می‌دهد. تخصیص پاسخ‌ها بین بهترین موقعیت ملاقات شده ذره و بهترین موقعیت ملاقات شده گروه پاسخ‌ها را تضمین می‌نماید.

گروه حالت خود را فقط هنگامی که بهترین موقعیت ملاقات شده توسط ذره و بهترین موقعیت توسط گروه تغییر می‌کنند، تغییر می‌دهد. که اصل پایداری را پوشش می‌دهد. درنهایت گروه رفتار تطبیقی از خود

---

<sup>۱</sup> Proximity Principle

نشان می‌دهد به طوری که حالت خود را هنگامی که بهترین موقعیت ملاقات شده توسط ذره و بهترین موقعیت ملاقات شده توسط گروه تغییر می‌کند، تغییر می‌دهد.

#### ۴-۲-۲- الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات

روش PSO یک روش سراسری بهینه‌سازی است که با استفاده از آن می‌توان با مسائلی که جواب آن‌ها یک نقطه یا سطح در فضای  $\Omega$  بعدی می‌باشد، برخورد نمود. در این چنین فضایی، فرضیاتی مطرح می‌شود و یک سرعت ابتدایی به ذرات اختصاص داده می‌شود، همچنین کانال‌های ارتباطی بین ذرات در نظر گرفته می‌شود. سپس این ذرات در فضای پاسخ حرکت می‌کنند، و نتایج حاصله بر مبنای یک ملاک شایستگی پس از هر بازه‌ی زمانی محاسبه می‌شود. باگذشت زمان ذرات به سمت ذراتی که دارای ملاک شایستگی بیشتری هستند و در گروه ارتباطی یکسان قرار دارند، شتاب می‌گیرند. مزیت اصلی این روش بر روش‌های بهینه‌سازی دیگر این است که، تعداد فراوان ذرات ازدحام کننده، باعث انعطاف روش در برابر مشکل پاسخ بهینه‌ی محلی می‌شود.

هر ذره دارای یک موقعیت است که مشخص می‌کند مختصات ذره در فضای جستجوی چندبعدی چه می‌باشد با حرکت ذره در طول زمان موقعیت ذره تغییر می‌نماید.  $x_i(t)$  موقعیت ذره  $i$ ام در زمان  $t$  ام را مشخص می‌نماید.

همچنین هر ذره برای حرکت نمودن در فضا نیاز به یک سرعت دارد،  $v_i(t)$  سرعت ذره  $i$ ام در زمان  $t$  ام را مشخص می‌کند. با افزودن سرعت به موقعیت هر ذره، می‌توان موقعیت جدیدی برای ذره در نظر گرفت. معادله به‌روز نمودن موقعیت ذره در زیر آورده شده است:

$$\begin{aligned}x_i(t+1) &= x_i(t) + v_i(t+1) \\x_i(t) &\sim U(x_{\min}, x_{\max})\end{aligned}\quad (1-4)$$

اینکه موقعیت یک ذره در فضای جستجو موقعیت مناسبی است یا خیر توسط یک تابع شایستگی ارزیابی می‌گردد. ذرات توانایی این را دارند که بهترین موقعیتی را که در طول حیات خود در آن قرار داشته‌اند به

خاطر بسپارند. به بهترین تجربه فردی یک ذره یا بهترین موقعیت ملاقات شده توسط ذره  $y_i$  گفته می‌شود (در بعضی از الگوریتم‌ها  $y_i$  به عنوان pbest نیز نام‌گذاری شده است) و ذرات می‌توانند از بهترین موقعیت ملاقات شده توسط کل گروه نیز آگاهی داشته باشند. که این موقعیت  $y_i$  نامیده می‌شود. (در بعضی از الگوریتم‌ها  $y_i$  به عنوان gbest نیز نام‌گذاری شده است) بردار سرعت ذره در فرآیند بهینه‌سازی منعکس شده دانش تجربی ذره و اطلاعات جامعه ذرات است. هر ذره برای حرکت در فضای جستجو دو مؤلفه را مدنظر دارد:

مؤلفه‌ی شناختی:  $y_i(t) - x_i(t)$  بهترین راه‌حلی است که یک ذره به تنهایی به دست می‌آورد.

مؤلفه‌ی اجتماعی:  $y_i(t) - x_i(t)$  بهترین راه‌حلی است که توسط کل گروه تشخیص داده می‌شود.

دو مدل اصلی برای الگوریتم PSO استاندارد وجود دارد که محاسبه‌ی بردار سرعتشان بر اساس دو مؤلفه‌ی شناختی و اجتماعی هست. این دو مدل به نام‌های lbest PSO و gbest PSO می‌باشد که تفاوت آن‌ها در سایز همسایگی است که برای هر ذره در نظر گرفته می‌شود.

#### ۴-۲-۱-۲-۱ مدل Global Best PSO

در این الگوریتم همسایه یک ذره کل ذرات گروه می‌باشد. موقعیت هر ذره توسط معادله زیر ارزیابی می‌گردد. (f شامل ملاک شایستگی مربوط به ذره می‌باشد)

$$y_i(t+1) = \begin{cases} y_i(t) & \text{if } f(x_i(t+1)) \leq f(y_i(t)) \\ x_i(t+1) & \text{if } f(x_i(t+1)) \geq f(y_i(t)) \end{cases} \quad (2-4)$$

S سایز گروه (تعداد ذرات) را مشخص می‌کند. ذرات در ابتدا در فضای جستجو پراکنده‌اند و سپس هر ذره با سرعت خاصی به سمت یک نقطه همگرا می‌شود. سرعت یک بردار n بعدی است که  $v_{ij}$  سرعت j امین عنصر از بردار سرعت ذره i ام را نمایش می‌دهد. بنابراین سرعت ذره i بر اساس معادله زیر حاصل می‌شود:

$$v_{ij}(t+1) = wv_{i,j}(t) + c_1r_{1,j}(t)(y_{i,j}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2r_{2,j}(t)(y_j(t) - x_{i,j}(t)) \quad (3-4)$$

W وزن اینرسی را مشخص می‌کند و  $c_1, c_2$  ثابت‌ها می‌باشند.



عبارت وزن اینرسی برای اولین بار توسط شای و ابرهارت در سال ۱۹۹۸ معرفی گردید [۳۸] این وزن در واقع درصدی از سرعت قبلی ذره را در محاسبه سرعت جدید تأثیر می‌دهد. هر چه این مقدار بیشتر باشد جستجوی عمومی افزایش می‌یابد و هر چه این وزن کمتر باشد میزان جستجوی محلی افزایش می‌یابد. باید یک ارتباط بین مقادیر ثابت و وزن موجود باشد، تا رسیدن به جواب را تضمین کند. چون در غیر این صورت باعث می‌شود که ذرات بر اساس بعضی رفتارها واگرا شوند.

$$\frac{(c_1 + c_2)}{2} - 1 < w_c \quad (4-4)$$

موقعیت ذره توسط معادله‌ی (۴-۴) به هنگام می‌گردد.

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (5-4)$$

سرعت و موقعیت هر ذره توسط معادلات ذکر شده آپدیت می‌شود و آن قدر این عمل تکرار می‌شود تا یا به حداکثر برسد و یا سرعت به‌روز شده به صفر نزدیک شود و عملکرد هر ذره توسط ملاک شایستگی برآورده شود.

#### ۴-۲-۲-۲ مدل Local Best PSO

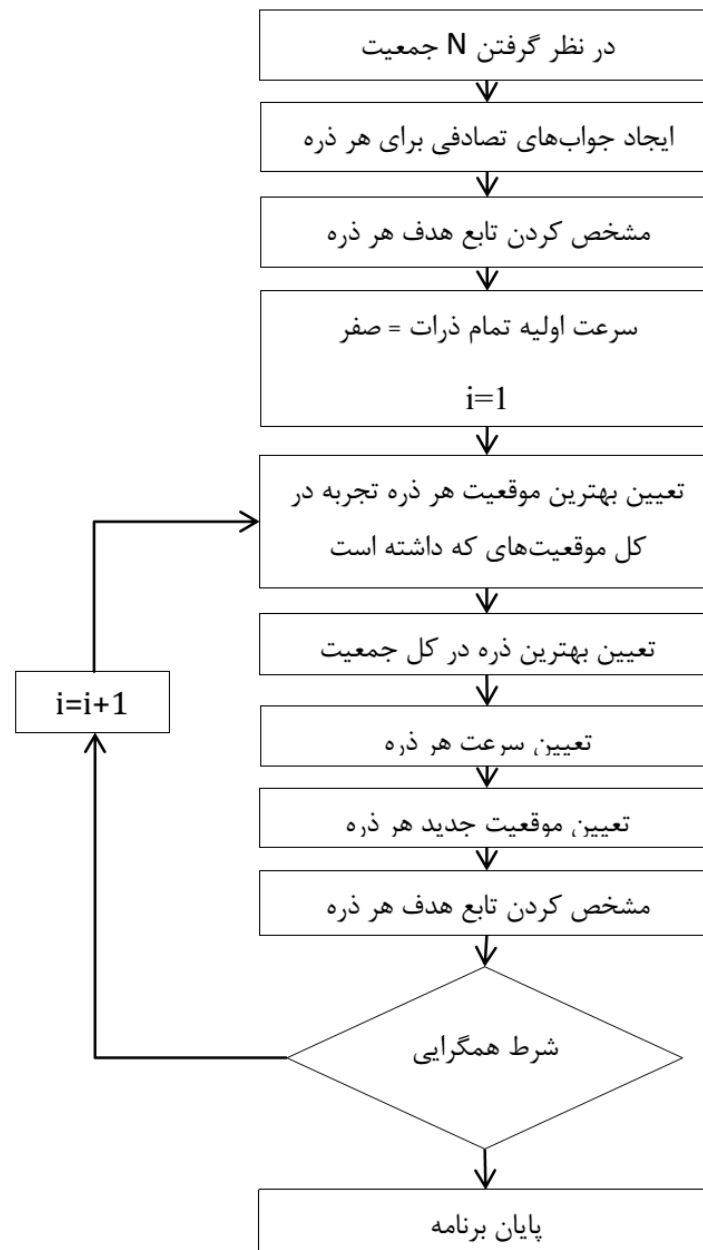
در این مدل یک‌ذره جهت به‌روز نمودن سرعت خود فقط توانایی برقراری ارتباط با تعدادی ذره که در همسایگی آن‌ها قرار دارند را دارد.  $N_i$  مجموعه ذرات همسایه یک‌ذره می‌باشند. توپولوژی‌ای که برای ارتباط بین ذرات بکار برده می‌شود توپولوژی حلقه است. بهترین موقعیت ملاقات شده توسط همسایگان ذره  $y_i$  نامیده می‌شود. سائز همسایگان با انمایش داده می‌شود.

$$N_i = \{y_{i-1}(t), \dots, y_{i-1}(t), y_i(t), y_{i+1}(t), \dots, y_{i+1}(t)\}$$

$$y_i(t+1) \in \{N_i \mid f(y_i(t+1)) = \min \{f(y_i(t))\}, \forall y_i \in N_i\} \quad (6-4)$$

$$v_{i,j}(t+1) = wv_{i,j}(t) + c_1 r_{1,j}(t)(y_{i,j}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2 r_{2,j}(t)(y_j(t) - x_{i,j}(t))$$

معادله بهنگام سازی موقعیت ذره‌ها مانند روش قبل است و تغییری نمی‌نماید. همسایه‌های یک‌ذره عملاً مشخص‌کننده رفتارهای اجتماعی یک‌ذره هستند. لذا توپولوژی همسایه‌ها موضوع مهم و مفیدی هست. اگر  $s=1$  باشد  $lbest$  مانند  $gbest$  عمل می‌نماید. که در این صورت همسایه‌های یک‌ذره کل ذرات گروه هست



شکل ۴-۱: فلوجارت الگوریتم PSO

#### ۴-۲-۳ - بررسی مشکلات PSO

الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات دارای چندین نقطه‌ضعف هست. در این الگوریتم احتمال قرار گرفتن ذرات در بهینه‌های محلی وجود دارد. با توجه به این که PSO نسبت به کلیه الگوریتم‌های تکاملی دارای سرعت بالاتری است اما معمولاً نمی‌تواند کیفیت رسیدن به راه‌حل را با افزایش تکرارها جبران کند. یکی از دلایل این است که در این الگوریتم ذرات به یک نقطه خاص که بین بهترین موقعیت عمومی و بهترین موقعیت شخصی قرار دارد همگرا می‌شوند. به علت این نقطه‌ضعف تغییرات زیادی در PSO داده شده است. یکی از این تغییرات وزن اینرسی یا  $w$  هست. نقطه‌ضعف دیگر وابستگی این روش به مسئله هست. این وابستگی معمولاً نتیجه تغییرات در تنظیم پارامترهای الگوریتم است. در کل نمی‌توان یک پارامتر را برای کلیه مسائل به کاربرد.

#### ۴-۲-۴ - به‌روز کردن همگام<sup>۱</sup> و ناهمگام<sup>۲</sup>

در الگوریتم‌های PSO gbest و PSO lbest می‌توان معادله سرعت ذرات را به‌طور هم‌زمان و یا ناهم‌زمان به‌روز نمود. اگر در ابتدا هر ذره موقعیتش و بهترین موقعیت ملاقات شده‌اش، به‌روز گردد و در پی آن بهترین موقعیت ملاقات شده توسط کل گروه به‌روز گردد، به این حالت به‌روز نمودن غیر همگام گفته می‌شود و اگر تمام ذرات به‌طور هم‌زمان موقعیت و بهترین موقعیت ملاقات شده خود را به‌روز نمایند و سپس بهترین موقعیت ملاقات شده کل گروه به‌روز شود به این حالت، به‌روز کردن هم‌زمان یا همگام گفته می‌شود. به‌روز نمودن غیر همگام این حسن را دارد که ذرات خیلی سریع از ناحیه‌های خوب در زمان اجرا آگاه می‌شوند، برعکس در روش همگام ذرات در هر تکرار از ناحیه‌های خوب آگاه شده و از محیط بازخورد می‌گیرند. به‌روز نمودن همگام برای الگوریتم PSO gbest مناسب است و به‌روز نمودن غیر همگام برای الگوریتم PSO lbest مناسب است.

---

<sup>۱</sup> Synchronous

<sup>۲</sup> Asynchronous

#### ۴-۲-۵- مهار کردن سرعت

نحوه جستجوی عمومی و جستجوی محلی یک الگوریتم عوامل مهمی جهت ارزیابی یک الگوریتم می‌باشند. جستجوی عمومی یعنی اینکه الگوریتم به چه میزان قادر است ناحیه‌های متفاوتی از فضای جستجو را اکتشاف کند. در مقابل جستجوی محلی بدین مفهوم است که الگوریتم فقط ناحیه‌هایی را که احتمال وجود جواب در آن‌ها وجود دارد، جستجو نماید. الگوریتم بهینه‌سازی خوب است که تعادلی را بین این دو گونه جستجو برقرار نماید. در بیشتر الگوریتم‌ها برای ایجاد تعادل بین جستجوی عمومی و محلی معادله سرعت ذره را تغییر می‌دهند و سرعت ذره گاهی بسیار زیاد می‌شود. برای مهار نمودن سرعت ذره در [۳۹] یک حد آستانه‌ای به نام  $V_{max}$  برای سرعت ذره در نظر گرفته شده است که سرعت ذره نباید از این حد فراتر برود.

$$v_{i,j}(t+1) = \begin{cases} v'_{i,j}(t+1) & \text{if } v_{i,j}(t+1) < V_{max} \\ V_{max} & \text{if } v_{i,j}(t+1) \geq V_{max} \end{cases} \quad (۷-۴)$$

#### ۴-۲-۶- پارامترهای PSO استاندارد

پارامترهای زیادی هستند که بر روی الگوریتم PSO تأثیر می‌گذراند. به‌عنوان مثال تعداد ذرات، ابعاد مسئله، وزن اینرسی، اندازه همسایه‌ها، تعداد تکرارهای الگوریتم، ضرایب ثابت مؤلفه‌های اجتماعی و مؤلفه‌های شناختی و ماکزیمم سرعت یک ذره.

#### ۴-۳- به دست آوردن بهینه پارامترهای کنترل

ما برای به دست آوردن پاسخ بهینه مسئله‌ی بهینه‌سازی PSO را در چهار بعد تعریف می‌کنیم، که چهار بعد ما عبارت است از  $\lambda, \mu, K_p, K_I$  و به جای  $K_D$  نیز عددگذاری می‌کنیم، دلیل این کار این است که ما بتوانیم پارامترهای  $K_p, K_I$  را بر حسب تغییرات  $\omega$ ، در یک نمودار سه‌بعدی رسم کنیم. پارامترهای ما دارای محدودیت و قیودی هستند که باید آن‌ها را در الگوریتم PSO قید کنیم. طریقه‌ی استفاده‌ی ما از این الگو به این صورت است که در ابتدا برنامه‌ی اصلی را که توسط آن جملات خاریتانوف و تابع آزمون

پایداری مقاوم و معادلات چندوجهی‌ها برای حالت‌های مختلف به دست می‌آید را به صورت تابع  $Cost(x)$  ذخیره می‌کنیم.

سیستم نامعین زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{p(s)} = \frac{b_m s^{\alpha'_m} + b_{m-1} s^{\alpha'_{m-1}} + \dots + b_1 s^{\alpha'_1} + b_0}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0} \quad (۸-۴)$$

که در آن  $\alpha'_0 < \dots < \alpha'_m$  و  $\alpha_0 < \dots < \alpha_n$  و  $b_1, \dots, b_m \in R$  و  $a_1, \dots, a_n \in R$  و  $b_i \in [b_i^-, b_i^+]$  و

$a_j \in [a_j^-, a_j^+]$  و  $i = 1, 2, \dots, n$  و  $j = 1, 2, \dots, m$  ، کنترل کننده  $C(s)$  را طراحی کنیم ، کنترل کننده  $c(s)$

را نیز به صورت کنترل کننده PID مرتبه کسری یا همان FOPID به صورت مقابل در نظر می‌گیریم :

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu \quad (۹-۴)$$

چنانچه برای سیستم (۱) کنترل کننده FOPID به صورت (۲) در نظر بگیریم آنگاه چندجمله‌ای معادله‌ی

مشخصه حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$p_i(s) = 1 + C(s) \times G_i(s) \quad (۱۰-۴)$$

که  $\lambda$  با توجه به تعداد جملات خاریتانوف حاصل از سیستم مقدار می‌گیرد.

چهار پارامتری را که می‌خواهیم آن‌ها را طراحی کنیم به صورت زیر در ماتریس  $X$  قرار می‌دهیم :

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [\lambda, \mu, k_p, k_i] \quad (۱۱-۴)$$

تابع هدف یا fitness را برای این مسئله‌ی بهینه‌سازی ،مینیمم کردن توان مای مشتق گیر و انتگرال گیر

یعنی:  $\lambda + \mu$  در نظر می‌گیریم و دلیل آن این است که می‌خواهیم از کمترین المان انتگرال و مشتق استفاده

کنیم که محاسن زیادی را، چون کاهش هزینه و راحت تر شدن پیاده‌سازی را می‌تواند به همراه داشته باشد

شرط پایداری را به صورت تابع هزینه در داخل تابع PSO و همچنین تابع هدف را در تابع Cost قرار

می‌دهیم .

سپس با قرار دادن حد بالا و پایین برای ابعاد مسئله در برنامه‌ی PSO به به دست آوردن بهینه‌ی  $[X]$  ها

می‌پردازیم .توجه شود که اگر مقدار اولیه به صورت rand باشد به احتمال زیاد ممکن است پاسخ‌های انتهایی

کمی باهم متفاوت باشد و مقدار تکرار و وارد کردن شروط به این برنامه را با توجه به تابع fitness و دقتی که مدنظر است وارد می‌کنیم.

هدف ما از این روش این است که علاوه بر طراحی پارامترهای کنترل‌کننده به‌نحوی که سیستم پایدار باشد این است که کمترین مرتبه‌ی کنترل‌کننده را برای سیستم به‌دست آوریم ، تا با اجرای PSO علاوه‌بر قیودی که برای پایداری در نظر می‌گیریم مقدار تابع هدف مینیمم شود.

# فصل پنجم

## تشیه سازی مثال عددی

## فصل ۵ - شبیه‌سازی مثال عددی

### ۵-۱ - مثال عددی

مثال ۱: با استفاده از مثال ۱ در مرجع [۴] فرض کنید، برای سیستم مرتبه‌ی کسری نامعین

$$G(s, q) = 1 / (q_2 s^{2.2} + q_1 s^{0.9} + q_0) \quad \text{که سیستم مرتبه‌ی کسری متناسب با مرتبه‌ی متناسب } \alpha = 0.05$$

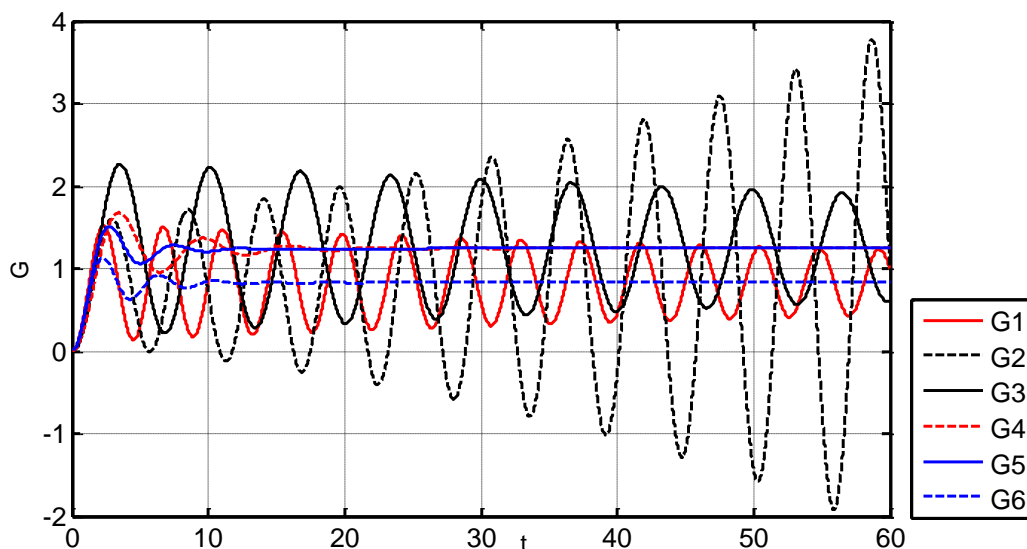
می‌باشد داریم:

$$G(s, q) = 1 / (q_2 s^{2.2} + q_1 s^{0.9} + q_0), q \triangleq [q_0 \quad q_1 \quad q_2]^T \in Q \quad (1-5)$$

$$Q \triangleq \{ [q_0 \quad q_1 \quad q_2]^T : q_0 \in [0.8, 1.2], q_1 \in [0.3, 0.7], q_2 \in [0.6, 1] \}$$

که اگر پاسخ پله‌ی حلقه باز و حلقه بسته‌ی این سیستم را رسم کنید مشاهده می‌شود که در هر دو حالت سیستم ناپایدار است، پاسخ پله‌ی حلقه باز این سیستم را با استفاده از جملات خاریتانوف آن، می‌توانید به ترتیب در شکل ۵-۱ مشاهده کنید. ما قصد داریم با طراحی کنترل‌کننده FOPID با تابع تبدیل

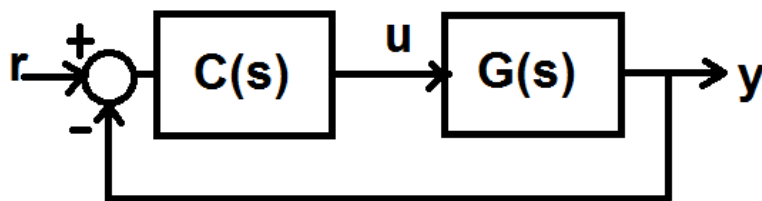
$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu \quad \text{و وضعیت پایداری سیستم را بهبود بخشیم.}$$



شکل ۵-۱: پاسخ پله‌ی حلقه باز قبل از کنترل  $G(s)$



بلوک دیاگرام سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



شکل ۲-۵: بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته

با به دست آوردن تابع تبدیل حلقه بسته سیستم:

$$C.l = \frac{(k_p s^\lambda + k_d s^{\mu+\lambda} + k_i)}{(q_2 s^{\lambda+2.2} + q_1 s^{\lambda+0.9} + k_d s^{\lambda+\mu} + (q_0 + k_p) s^\lambda + k_i)} \quad (۲-۵)$$

در نتیجه معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید به طوری که:

$$p(s) = q_2 s^{\lambda+2.2} + q_1 s^{\lambda+0.9} + k_d s^{\lambda+\mu} + (q_0 + k_p) s^\lambda + k_i \quad (۳-۵)$$

$$q = [q'_0 \quad q'_1 \quad q'_2 \quad q'_3 \quad q'_4]$$

$$Q \triangleq \{[q'_0 \quad q'_1 \quad q'_2 \quad q'_3 \quad q'_4]^T, q'_0 = k_i, q'_1 \in [0.8 + k_p, 1.2 + k_p],$$

$$q'_2 = k_d, q'_3 \in [0.3, 0.7], q'_4 \in [0.6, 1]\}$$

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \lambda, \alpha_2 = \lambda + \mu, \alpha_3 = 0.9 + \lambda, \alpha_4 = 2.2 + \lambda$$

چون در نهایت بعد از استفاده از PSO عدد ثابتی به  $K_p, K_D, K_I$  نسبت داده می‌شود، آن پارامترها را جزو

نامعینی‌ها در نظر نمی‌گیریم و همچنین برای  $\lambda, \mu$  محدودیت‌هایی را قائل می‌شویم تا ترتیب معادله

مشخصه بر هم نخورد. در این مثال پارامتر  $\mu$  باید کمتر از ۰٫۹ باشد تا  $\lambda + \mu$  کمتر از  $\lambda + 0.9$  بماند و

جای  $q'_2, q'_3$  در معادله‌ی مشخصه عوض نشود ولی پارامتر  $\lambda$  می‌تواند آزاد باشد. چون مقدار آن در جابجایی

معادله‌ی مشخصه با توجه به محدودیت  $\mu$  تأثیری ندارد.

در اینجا چون تنها پارامترهای  $q'_1, q'_3, q'_4$  دارای نامعینی هستند، مجموعه‌ی  $H_0$  را به صورت زیر تشکیل

می‌دهیم:

$$H_0 = \{1, 3, 4\} \quad (۴-۵)$$

در اینجا به  $K_D$  عدد ۱ را نسبت می‌دهیم ( $K_D = 1$ ) و با توجه به معادله گفته‌شده ماتریس  $B_0$  را تشکیل می‌دهیم:

$$B_0 = \left\{ \frac{0.5\lambda}{0.9+\lambda}, \frac{0.5(0.9+\lambda)}{2.2+\lambda}, \frac{0.5(2.2+\lambda)}{0.9+\lambda} \right\} \quad (5-5)$$

تابع  $Cost(x)$  را تشکیل می‌دهیم و به المان‌های ماتریس  $X$  مقدار اولیه‌ی  $rand$  را نسبت می‌دهیم.

با توجه به معادله‌های بیان‌شده برای  $H_i, H'_i$  مجموعه‌های آن را شکل می‌دهیم، سپس با تشکیل ماتریس‌های  $q^-, q^+$  که روابط آن‌ها را توضیح دادیم به تشکیل جملات خاریتانوف حاصل از آن می‌پردازیم. با اجرای برنامه با شرایط اولیه  $rand$  برای هر چهار مقدار  $K_p, K_I, \lambda, \mu$  مقادیر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$H_0 = \{1, 3, 4\}, B_0 = \{0.13, 0.238, 0.588\} \quad (6-5)$$

$$m = 3, \beta_1 = 0.13, \beta_2 = 0.238, \beta_3 = 0.588$$

$$H_1 = \{1\}, H'_2 = \{4\}, H_3 = \{3\}, H'_1 = H_2 = H'_3 = H_4 = H'_4 = \emptyset$$

$$q'^1 = [q'_0 \quad q'^1_- \quad q'_2 \quad q'^1_- \quad q'^1_+]^T = [0.1626 \quad 1.455 \quad 1 \quad 0.3 \quad 1]^T$$

$$q'^2 = [q'_0 \quad q'^2_+ \quad q'_2 \quad q'^2_- \quad q'^2_+]^T = [0.1626 \quad 1.855 \quad 1 \quad 0.3 \quad 1]^T$$

$$q'^3 = [q'_0 \quad q'^3_+ \quad q'_2 \quad q'^3_- \quad q'^3_-]^T = [0.1626 \quad 1.855 \quad 1 \quad 0.3 \quad 0.6]^T$$

$$q'^4 = [q'_0 \quad q'^4_+ \quad q'_2 \quad q'^4_+ \quad q'^4_-]^T = [0.1626 \quad 1.855 \quad 1 \quad 0.7 \quad 0.6]^T$$

$$q'^5 = [q'_0 \quad q'^5_- \quad q'_2 \quad q'^5_+ \quad q'^5_-]^T = [0.1626 \quad 1.455 \quad 1 \quad 0.7 \quad 0.6]^T$$

$$q'^6 = [q'_0 \quad q'^6_- \quad q'_2 \quad q'^6_+ \quad q'^6_+]^T = [0.1626 \quad 1.455 \quad 1 \quad 0.7 \quad 1]^T$$

$$p(j\omega, q) = q'_0 \omega^{2.2+\lambda} e^{j\left(\frac{2.2+\lambda}{2}\right)\pi} + q'_3 \omega^{0.9+\lambda} e^{j\left(\frac{0.9+\lambda}{2}\right)\pi} + q'_2 \omega^{\lambda+\mu} e^{j\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\pi} + q'_1 \omega^\lambda e^{j(\lambda/2)\pi} + q'_0 \quad (8-5)$$

$$D_0(\omega) \triangleq p_{pb}(j\omega, q^+ + q^-), \quad q^+ + q^- \triangleq [0.3252 \quad 3.31 \quad 2 \quad 1 \quad 1.6]^T$$

سپس داریم:

$$A'_1(\omega) \triangleq \text{Im}[p(j\omega, q'^1) e^{-j(0.13/2)\pi}], \quad B'_1(\omega) \triangleq A'_1(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega) e^{-j(0.13/2)\pi}] \quad (9-5)$$

$$A'_2(\omega) \triangleq \text{Im}[p(j\omega, q'^2) e^{-j(0.238/2)\pi}], \quad B'_2(\omega) \triangleq A'_2(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega) e^{-j(0.238/2)\pi}]$$

$$A'_3(\omega) \triangleq \text{Im}[p(j\omega, q'^3) e^{-j(0.588/2)\pi}], \quad B'_3(\omega) \triangleq A'_3(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega) e^{-j(0.588/2)\pi}]$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$H(\omega) = \max\{A'_1(\omega), B'_1(\omega), A'_2(\omega), B'_2(\omega), A'_3(\omega), B'_3(\omega)\} \quad (10-5)$$

و طبق روابط گفته شده برای فرکانس بالایی و پایینی:

$$R_{\max} = 4.675, R_{\min} = 1.4 \times 10^{-5} \quad (11-5)$$

هدف این است که در بازه‌ی  $\omega \in [R_{\min}, R_{\max}] = [1.4 \times 10^{-5}, 4.675]$  و در نتیجه‌ی آن در  $\omega \geq 0$  داشته باشیم:  $H(\omega) > 0$ . حال با داشتن این مقادیر که با استفاده از شرط اولیه rand به دست آمده، وارد قسمت PSO می‌شویم تا پارامترهای کنترل کننده را به نحوی که می‌خواهیم طراحی کنیم.

در PSO مقدار تکرار و تعداد ذرات و وزن‌های مورد نیاز را با توجه به دقت مورد نظر، مقداردهی می‌کنیم. معمولاً در PSO تعداد ذرات را بین ۲۰ تا ۳۰ در نظر می‌گیرند، که ما در اینجا این مقدار را ۲۳ در نظر گرفتیم. و همچنین تعداد تکرار را در چند مرحله بالا می‌بریم تا دقت مورد نظر مسئله به دست آید، که ما در اینجا برای تعداد تکرار به عدد ۴۰ رسیدیم که دقت مورد نظر ما را تأمین می‌کند.

برای پارامترهای کنترل کننده محدودیت‌های  $0 < k_i < 2$ ,  $-2 < k_p < 5$ ,  $0.1 < \mu < 0.8$ ,  $0.1 < \lambda < 2$  را در نظر می‌گیریم (قیود  $K_p, K_i, \lambda$  قابل تغییرند).

سپس شروط پایداری را به صورت تابع هزینه در انتهای تابع  $Cost(x)$  قرار می‌دهیم. تابع هزینه یکی از روش‌هایی است که با استفاده از آن می‌توان از خروج از مسیر اصلی مسئله توسط قرار دادن جریمه جلوگیری کرد. که شروط پایداری ما به قرار زیر است:

## ۵-۲- شروط پایداری و بهبود پاسخ در PSO

ما نیاز داریم تا برای برقراری پایداری هورویتز،  $H(\omega) > 0$  قرار دهیم. بنابراین می‌توانیم یکی از شروط پایداری را به صورت  $\min(H(\omega)) > 0$  قرار دهیم و جریمه‌ی ۱۰۰ برای عدم رعایت این شرط در نظر بگیریم. در این مورد توجه به این نکته اهمیت دارد که زمانی که  $\alpha \in (0,1)$  (که  $\alpha$  مرتبه‌ی متناسب هست)، شرط  $H(\omega) > 0$  تنها شرط کافی است و این نگرانی زمانی که  $\alpha$  کاهش پیدا می‌کند، بیشتر می‌شود. برای همین نیاز داریم تا شرط‌های دیگری نیز برای اطمینان از پایداری سیستم در نظر بگیریم.

شروط دیگر این است که توان‌های انتگرال گیر و مشت گیر مثبت باشند. چون ما در حال طراحی FOPID هستیم و اگر یکی از توان‌های مشت گیر یا انتگرال گیر منفی شود کنترل کننده ما به PI یا PD تبدیل می‌شود. که برای این شرط هم جریمه‌ای برابر ۱۰۰ در نظر می‌گیریم تا از منفی شدن  $\lambda, \mu$  جلوگیری شود. برای بهبود پاسخ با توجه به جملات خاریتانوف تابع تبدیل حلقه بسته را برای هر یک از جملات خاریتانوف به دست می‌آوریم و حد فاز هر کدام را بزرگ‌تر از ۶۰ قرار می‌دهیم و اگر خلاف این بود جریمه‌ی ۱۰۰ را برای هر کدام در نظر می‌گیریم. تا حد فاز سیستم بزرگ‌تر شود و پاسخ پله‌ی آن بهبود یابد.

برای اینکه سیستم در مرتبه‌ی متناسب باقی بماند و با مقدار گرفتن  $\lambda, \mu$  سیستم غیرمتناسب نشود، این شرط را در نظر گرفتیم که باقی‌مانده‌ی  $\lambda / \alpha, \mu / \alpha$  (که در اینجا  $\alpha = 0.05$ ) برابر صفر شود. و اگر غیر از این حالت پیش آمد جریمه‌ی ۱۰۰ را برای آن در نظر می‌گیریم. چون قصد ما مینیمم کردن مسئله است در تابع هدف مقادیر جریمه‌ها را به هدف اضافه می‌کنیم و تابع  $fitness$  را به صورت، جریمه  $+ \mu + \lambda = fitness$  در نظر می‌گیریم.

سپس با اجرای برنامه چهار مقدار نهایی برای چهار پارامتر  $K_p, K_I, \lambda, \mu$  به دست می‌آید که اگر مقدار تکرار کافی باشد شروطی که ما در نظر داشتیم همگی برقرار خواهند بود.

چون مقدار اولیه  $rand$  می‌باشد، پس از اجرای مجدد برنامه، ممکن است پاسخ‌های مختلفی از برنامه دریافت کنیم، که در نهایت اگر در پاسخ‌ها تمام شرایط انتخاب شده برقرار شود می‌توانیم از بین آن‌ها پاسخی که  $\lambda + \mu$  کمتری دارد انتخاب کنیم.

برای مثال پاسخ‌هایی که ما پس از سه بار اجرای برنامه به دست آوردیم برابر است با:

جدول ۵-۱: پارامترهای بهینه در هر بار اجرای برنامه

$X_1 = [1.2 \quad 0.55 \quad 0 \quad 0.27]$	پارامترهای بهینه در بار اول اجرای برنامه
$X_2 = [0.4 \quad 0.8 \quad 0.97 \quad 0.17]$	پارامترهای بهینه در بار دوم اجرای برنامه
$X_3 = [1 \quad 0.55 \quad 0.04 \quad 0.034]$	پارامترهای بهینه در بار سوم اجرای برنامه

در پایان برای اثبات پایداری سیستم از سه شرط پایداری استفاده می‌کنیم.

در این روش پس از قرار دادن مقادیر  $X$  به جای پارامترها، با استفاده از تبدیل  $s = j\omega$  و برابر صفر قرار دادن قسمت حقیقی و موهومی و نوشتن هرکدام از جملات خاریتانوف برحسب  $K_p, K_i$ ، نشان می‌دهیم که پاسخ به‌دست‌آمده برای مقدار هر پارامتر موردنظر در محدوده‌ی به‌دست‌آمده قرار دارد.

در اینجا معادلات موردنیاز را برای جمله‌ی اول خاریتانوف به‌دست آوردیم که به شرح زیر است:

$$k_i = \frac{D_1 B_2 - D_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1}, \quad k_p = \frac{C_1 D_2 - C_2 D_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1} \quad (12-5)$$

$$q_1(\omega, k_d) = (j\omega)^{\lambda+2.2} + 0.3(j\omega)^{\lambda+0.9} + k_d(j\omega)^{\lambda+\mu} + 0.8(j\omega)^\lambda$$

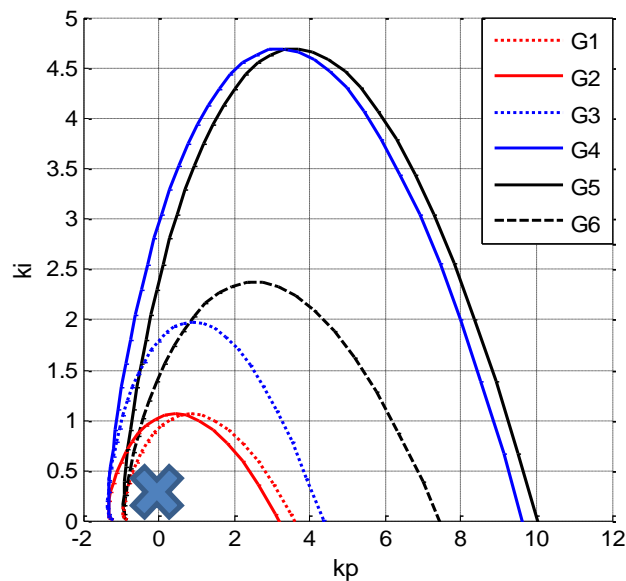
$$q_2(\omega) = j\omega^2, \quad q_3(\omega) = 1$$

$$B_1 = \text{Re}(q_2(\omega)), \quad B_2 = \text{Im}(q_2(\omega)), \quad C_1 = \text{Re}(q_3(\omega)), \quad C_2 = \text{Im}(q_3(\omega)), \quad D_1 = \text{Re}(q_1(\omega, k_d))$$

$$, \quad D_2 = \text{Im}(q_1(\omega, k_d))$$

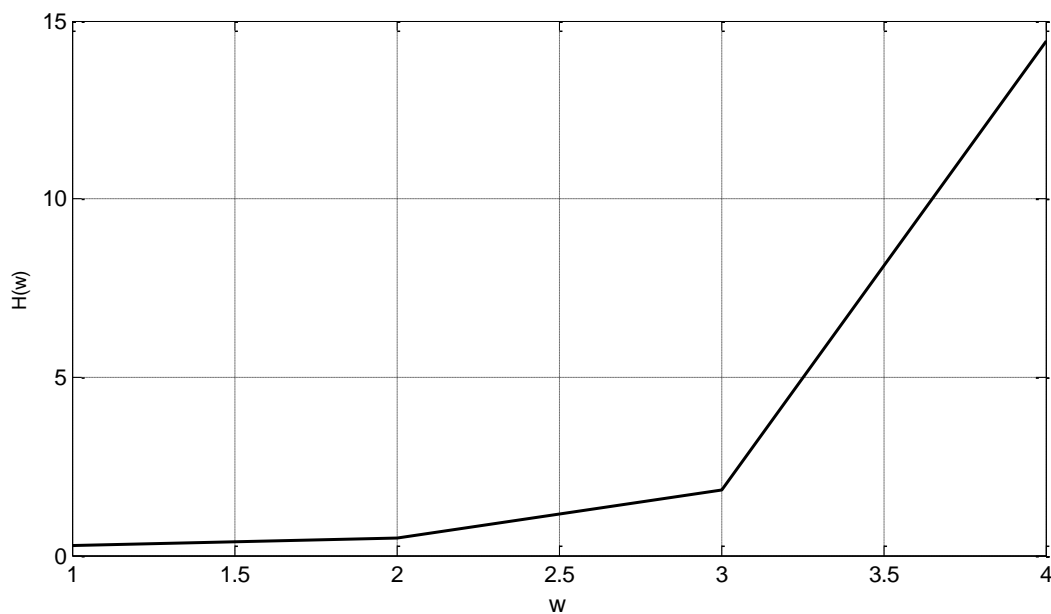
در انتها هر جمله برحسب تغییرات  $\omega, k_p, k_i$  رسم می‌شود تا درنهایت از اشتراک گرفتن محدوده‌ی مشترک از آن‌ها، محدوده‌ی مجاز را برای تغییر پارامترها به‌دست بیاوریم.

که در شکل ۵-۱ به‌خوبی نشان داده‌شده است.



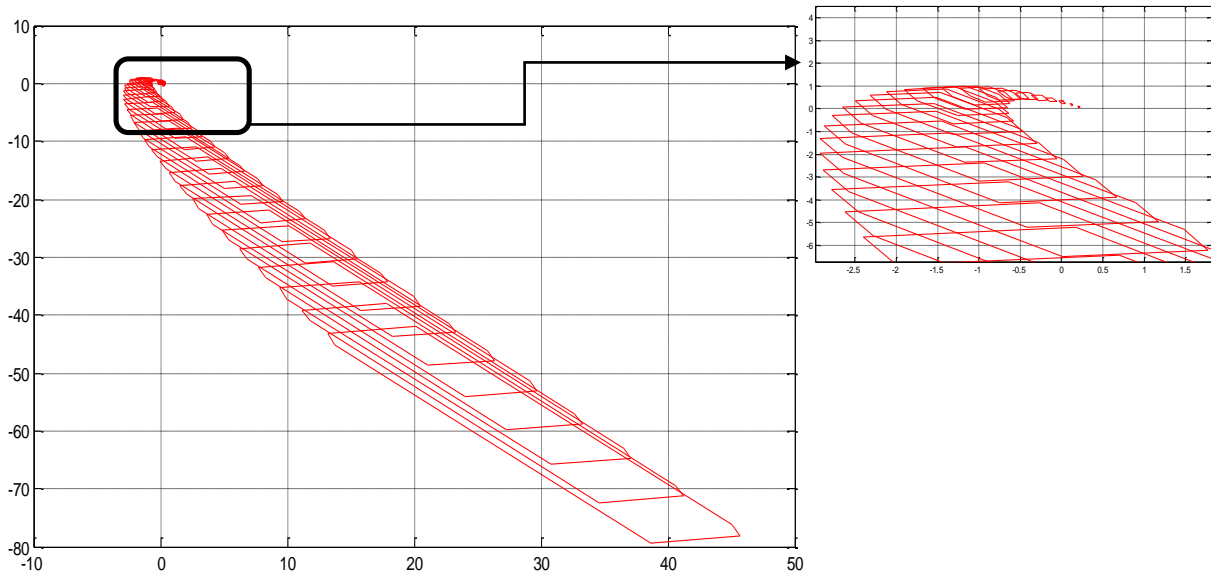
شکل ۵-۳: محدوده‌ی مجاز برای  $K_p$  و  $K_i$

همچنین تابع آزمون پایداری مقاوم در شکل ۲-۵ نشان داده شده است.  $H(\omega) > 0$  در این نمودار مشهود است.

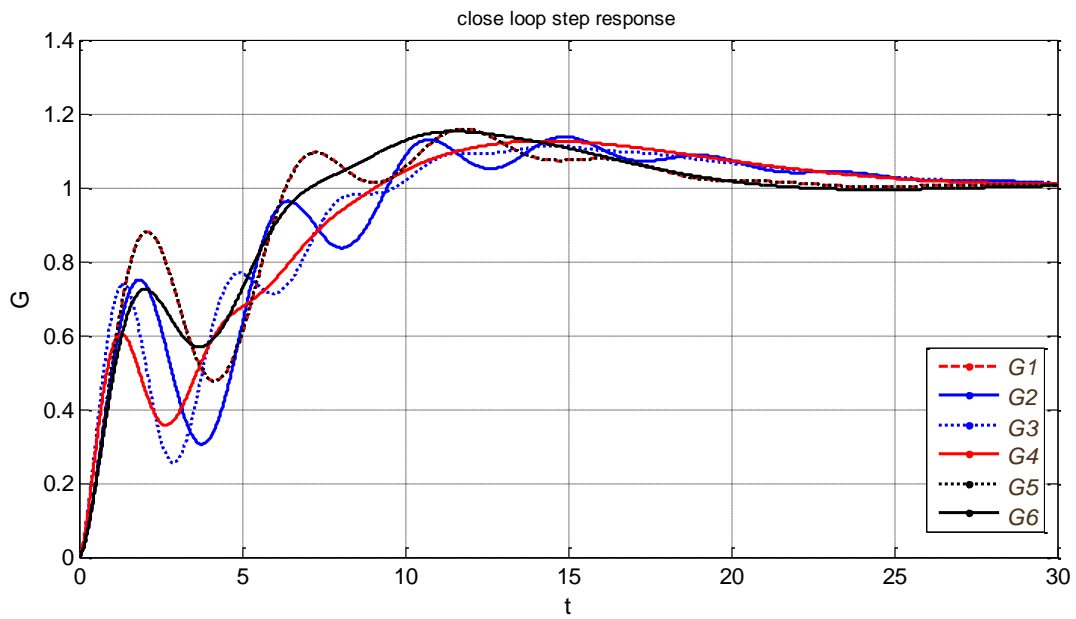


شکل ۴-۵: تابع آزمون پایداری مقاوم برای سیستم مثال ۱ بعد از کنترل

با رسم چندضلعی‌های محدب در فرکانس مذکور مشاهده می‌شود که این چندضلعی‌ها مبدأ مختصات را شامل نشده‌اند. که در نتیجه‌ی آن پایداری سیستم نتیجه می‌شود.



شکل ۵-۵: چندضلعی‌های محدب حاصل از جملات خاریتانوف مثال ۱ و شامل نشدن مبدأ مختصات



شکل ۵-۶: پاسخ پله‌ی سیستم حلقه بسته بعد از کنترل مثال ۱

مثال ۲: سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s, q) = 1 / (q_2 s^{0.8} + q_1 s^{0.1} + q_0) \quad (۱۳-۵)$$

می‌خواهیم برای این سیستم نیز کنترل کننده‌ی FOPID طراحی کنیم، داریم:

$$G(s, q) = 1 / (q_2 s^{0.8} + q_1 s^{0.1} + q_0), q \triangleq [q_0 \quad q_1 \quad q_2]^T \in Q$$

$$Q \triangleq \{[q_0 \quad q_1 \quad q_2]^T : q_0 \in [0.5, 0.8], q_1 \in [0.1, 0.5], q_2 \in [1, 1.6]\} \quad (۱۴-۵)$$

کنترل کننده را نیز مانند رابطه‌ی (۴-۹) در نظر می‌گیریم. اگر سیستم و کنترل کننده را درون بلوک

دیاگرام شکل (۵-۲) قرار دهیم تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آید.

$$C.I = \frac{(k_p s^\lambda + k_d s^{\lambda+\mu} + k_i)}{(q_2 s^{\lambda+4.3} + q_1 s^{\lambda+1.2} + k_d s^{\lambda+\mu} + (q_0 + k_p) s^\lambda + k_i)} \quad (۱۵-۵)$$

در اینجا هم  $K_D$  را برابر یک قرار می‌دهیم. تابع  $Cost(x)$  را تشکیل می‌دهیم و به المان‌های ماتریس  $X$

مقدار اولیه‌ی rand را نسبت می‌دهیم. با توجه به روابط گفته شده در قسمت قبل، با اجرای برنامه با شرایط

اولیه rand برای هر چهار مقدار  $K_p, K_I, \lambda, \mu$  چند جمله‌ای‌های خاریتانوف به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} q^{1'} &= [q_0' \quad q_1'^- \quad q_2' \quad q_3'^- \quad q_4'^+]^T = [0.7 \quad 0.9 \quad 1 \quad 0.1 \quad 1]^T \\ q^{2'} &= [q_0' \quad q_1'^+ \quad q_2' \quad q_3'^- \quad q_4'^+]^T = [0.7 \quad 1.2 \quad 1 \quad 0.1 \quad 1]^T \\ q^{3'} &= [q_0' \quad q_1'^+ \quad q_2' \quad q_3'^- \quad q_4'^-]^T = [0.7 \quad 1.2 \quad 1 \quad 0.5 \quad 1]^T \\ q^{4'} &= [q_0' \quad q_1'^+ \quad q_2' \quad q_3'^+ \quad q_4'^-]^T = [0.7 \quad 1.2 \quad 1 \quad 0.5 \quad 1.6]^T \\ q^{5'} &= [q_0' \quad q_1'^- \quad q_2' \quad q_3'^+ \quad q_4'^-]^T = [0.7 \quad 0.9 \quad 1 \quad 0.5 \quad 1.6]^T \\ q^{6'} &= [q_0' \quad q_1'^- \quad q_2' \quad q_3'^+ \quad q_4'^+]^T = [0.7 \quad 0.9 \quad 1 \quad 0.1 \quad 1.6]^T \end{aligned} \quad (۱۶-۵)$$

و نیز به دست می‌آید:

$$p(j\omega, q) = q_4' \omega^{0.8+\lambda} e^{j(\frac{0.8+\lambda}{2})\pi} + q_3' \omega^{0.1+\lambda} e^{j(\frac{0.1}{2})\pi} + q_2' \omega^{\lambda+\mu} e^{j(\frac{\lambda+\mu}{2})\pi} + q_1' \omega^\lambda e^{j(\lambda/2)\pi} + q_0'$$

$$A_1'(\omega) \triangleq \text{Im}[p(j\omega, q^{1'}) e^{-j(0.13/2)\pi}], B_1'(\omega) \triangleq A_1'(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega) e^{-j(0.13/2)\pi}]$$

$$A_2'(\omega) \triangleq \text{Im}[p(j\omega, q^{2'}) e^{-j(0.238/2)\pi}], B_2'(\omega) \triangleq A_2'(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega) e^{-j(0.238/2)\pi}]$$

$$A_3'(\omega) \triangleq \text{Im}[p(j\omega, q^{3'}) e^{-j(0.588/2)\pi}], B_3'(\omega) \triangleq A_3'(\omega) - \text{Im}[D_0(\omega) e^{-j(0.588/2)\pi}] \quad (۱۷-۵)$$

$$H(\omega) = \max\{A_1'(\omega), B_1'(\omega), A_2'(\omega), B_2'(\omega), A_3'(\omega), B_3'(\omega)\}$$



و نیز طبق روابط گفته شده برای فرکانس بالایی و پایینی:

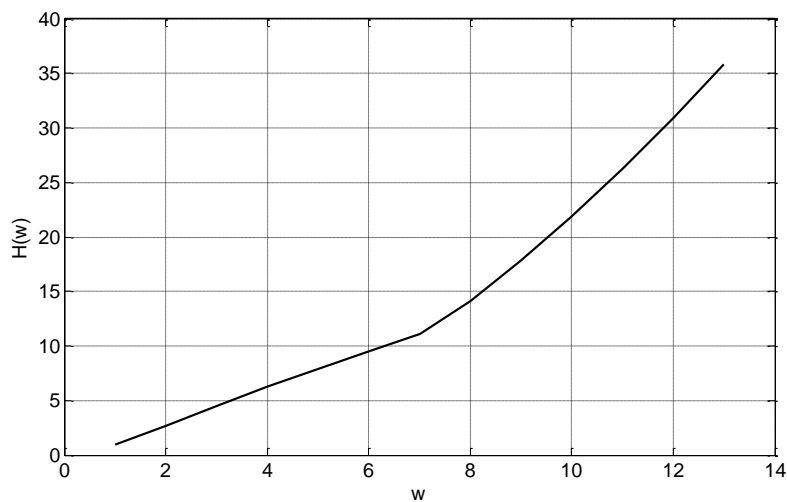
$$R_{\max} = 12.53, R_{\min} = 0.27 \quad (۱۸-۵)$$

در این مثال برای شرط پایداری در الگوی PSO تنها ما نیاز داریم تا برای برقراری پایداری هورویتز،  $H(\omega) > 0$  قرار دهیم. بنابراین می توانیم شرط پایداری را مانند به صورت  $\min(H(\omega)) > 0$  قرار دهیم و جریمه‌ی ۱۰۰ برای عدم رعایت این شرط در نظر بگیریم.

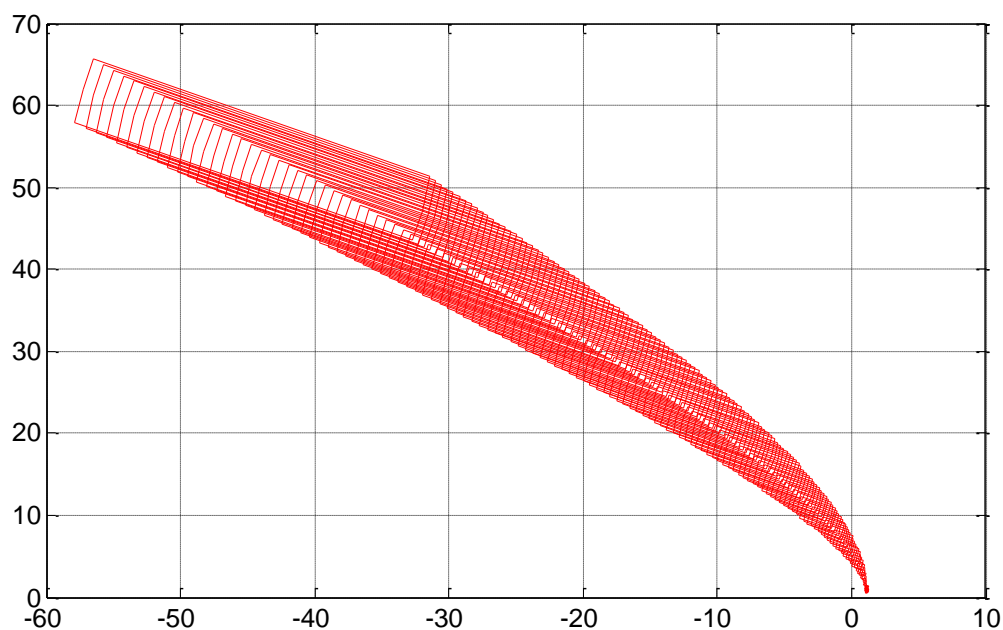
مانند مثال قبل، برای بهبود پاسخ با توجه به جملات خاریتانوف تابع تبدیل حلقه بسته را برای هر یک از جملات خاریتانوف به دست می آوریم و حد فاز هر کدام را بزرگتر از ۶۰ قرار می دهیم و اگر خلاف این بود جریمه‌ی ۱۰۰ را برای هر کدام در نظر می گیریم. تا حد فاز سیستم بزرگتر شود و پاسخ پله‌ی آن بهبود یابد. تابع هدف را مانند مثال قبل در نظر می گیریم، سپس با اجرای برنامه چهار مقدار نهایی برای چهار پارامتر  $K_p, K_I, \lambda, \mu$  به دست می آید. که یکی از جواب‌های به دست آمده برابر است با:

$$X = [0.87 \quad 0.81 \quad 0.5 \quad 0.8]$$

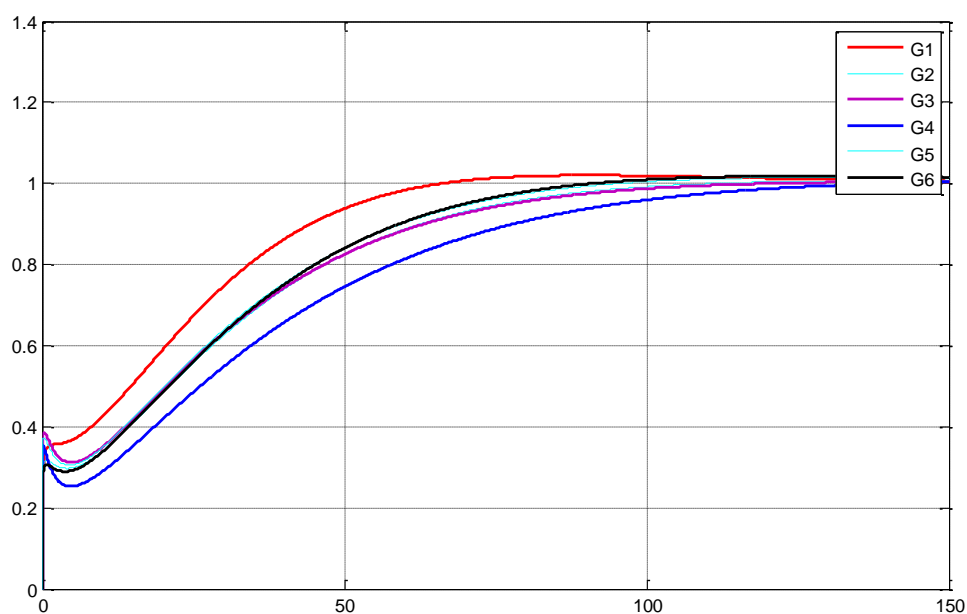
تابع آزمون پایداری مقاوم و چندضلعی‌های محدب در فرکانس مذکور در شکل‌های ۵-۷ و ۸-۵ آمده است.



شکل ۵-۷: تابع آزمون پایداری مقاوم برای سیستم مثال ۲ بعد از کنترل



شکل ۵-۸: چندضلعی‌های محدب حاصل از جملات خاریتانوف مثال ۲ و شامل نشدن مبدأ مختصات



شکل ۵-۹: پاسخ پله‌ی سیستم حلقه بسته بعد از کنترل مثال ۲

در شکل ۵-۷ دیده می‌شود که تابع آزمون پایداری مقاوم، در فرکانس مشخص شده بزرگ‌تر از صفر است. همچنین شکل ۵-۸ نشان می‌دهد چندضلعی‌های محدب مبدأ مختصات را شامل نمی‌شود. شکل ۵-۹ نیز پاسخ پله‌ی سیستم کنترل شده را نشان می‌دهد.

# فصل هشتم

## نتیجہ گیری و پیشہ ادا

## فصل ۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

### ۶-۱- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پایان‌نامه روش به‌دست آوردن پارامترهای کنترل‌کننده مرتبه‌ی کسری یا همان FOPIDها بررسی شد. با توجه به اینکه برای طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌ها در حوزه‌ی کسری سه مدل (۱) سیستم مرتبه‌ی صحیح و کنترل‌کننده مرتبه‌ی غیر صحیح (۲) سیستم مرتبه غیر صحیح و کنترل‌کننده مرتبه‌ی صحیح (۳) سیستم تابع تبدیل غیر صحیح و کنترل‌کننده نیز غیر صحیح، موجود است. در این پایان‌نامه می‌توان این موضوع را بیان کرد که روش شرح داده‌شده برای هر سه حالت قابل اجرا می‌باشد که ما در اینجا مثالی از بدترین حالت یعنی حالت سوم را بررسی کردیم.

بعد از به‌دست آوردن پارامترهای موردنیاز، به سه روش پایداری سیستم را ارزیابی نمودیم که روش اول رسم جملات خاریتانوف برحسب  $K_p, K_i$  و اشتراک از محدوده‌ی مجاز برای تغییرات  $K_p, K_i$  با  $K_D$  ثابت بود و روش دوم به‌دست آوردن و رسم تابع آزمون پایداری مقاوم در محدوده‌ی فرکانسی موردنظر و روش سوم رسم چندضلعی محدب در محدوده‌ی فرکانسی موردنظر بود که به‌طور کامل شرح داده شد.

### ۶-۲- پیشنهادهایی برای ادامه کار

برای فعالیت‌های آینده می‌توان پیشنهاد ای زیر را در نظر داشت:

- کاهش تعداد جملات خاریتانوف برای بررسی پایداری سیستم
- پیدا کردن روشی برای کاهش محاسبات و اثبات ریاضی
- پیدا کردن الگوریتم‌های مختلف دیگر برای تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه کسری
- گسترش روش راث-هورویتز به حالت مرتبه‌ی کسری

- [1] Hilfer, Rudolf, ed. Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, 2000.
- [2] Sabatier, J., Ohm Parkash Agrawal, and JA Tenreiro Machado. Advances in fractional calculus. Vol. 4. No. 9. Dordrecht: Springer, 2007.
- [3] Kilbsa, A. A., Hari M. Srivastava, and J. J. Trujillo. "Theory and Applications of Fractional Differential Equations". 2006.
- [4] Akbari Moornani, K., and M. Haeri. "Robust stability testing function and Kharitonov-like theorem for fractional order interval systems." IET Control Theory & Applications 4.2010.
- [5] Bode, Hendrik Wade. "Network analysis and feedback amplifier design." 1945.
- [6] Tustin, Arnold, et al. "The design of systems for automatic control of the position of massive objects." Proceedings of the IEE-Part C: Monographs 105.1958, 1-57.
- [7] Vinagre, Blas M., C. A. Monje, and A. J. Calderon. "Fractional order systems and fractional order control actions." In IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2550-2554. 2002.
- [۸] خاتمی ز. علیزاده ی. "دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه ی کسری," مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۲۹، ۱۳۸۱.
- [9] Loverro, Adam. "Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer." Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering (2004): 1-28.
- [10] Vinagre, B. M. "Historical introduction of fractional calculus." Fractional Calculus Application in Automatic Control, Las Vegas, USA (2002).
- [11] Debnath, L. "Fractional calculus fundamentals." Dep. Of Mathematics, Univ. of Pan American, Texas, USA (2002).
- [12] Krishna, B. T., K. V. V. S. Reddy, and S. Santha Kumari. "Time domain response calculations of fractance device of order 1/2." J. Act. Pass. Electron. Dev. 3 (2008): 355-367.
- [۱۳] مالک ه، پرویز ن، "بررسی پایداری سیستم های مرتبه کسری," پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۸۶.
- [۱۴] علوی ع، "حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری," پایان نامه کارشناسی ارشد، مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۲۹، ۱۳۸۲.
- [15] Oldham, Keith, and Jerome Spanier. The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Vol. 111. Elsevier, 1974.
- [16] Zadeh, Lotfi A., and Charles A. Deoser. Linear system theory. Huntington: Robert E. Krieger Publishing Company, 1976.

- [17] Ogata, Katsuhiko. System dynamics. Vol. 3. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [18] Xue, Dingyü, Concepción A. Monje, Vicente Feliu, Blas M. Vinagre, and YangQuan Chen. Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications (Advances in Industrial Control). Springer Verlag London Limited, 2010.
- [19] Lin, Feng. Robust control design: an optimal control approach. Vol. 18. John Wiley & Sons, 2007.
- [20] Petráš, Ivo, YangQuan Chen, and Blas M. Vinagre. "A robust stability test procedure for a class of uncertain LTI fractional order systems." In Proc. of ICC2002, May, pp. 27-30. 2002.
- [21] Petras, Ivo, YangQuan Chen, Blas M. Vinagre, and Igor Podlubny. "Stability of linear time invariant systems with interval fractional orders and interval coefficients." In Computational Cybernetics, 2004. ICC2004. Second IEEE International Conference on, pp. 341-346. IEEE, 2004.
- [22] Ahn, Hyo-Sung, and YangQuan Chen. "Necessary and sufficient stability condition of fractional-order interval linear systems." Automatica 44, pp 2985-2988, 2008.
- [23] Ahn, Hyo-Sung, YangQuan Chen, and Igor Podlubny. "Robust stability test of a class of linear time-invariant interval fractional-order system using Lyapunov inequality." Applied Mathematics and Computation 187, no. 1, pp 27-34, 2007.
- [24] Tan, Nusret, Ö. Faruk Özgüven, and M. Mine Özyetkin. "Robust stability analysis of fractional order interval polynomials." ISA transactions 48, pp 166-172, 2009.
- [25] Barmish, B. Ross. "A generalization of Kharitonov's four-polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations." IEEE transactions on automatic control 34, no. 2, pp 157-165, 1989.
- [26] Huang, Ying J., and Yuan-Jay Wang. "Robust PID tuning strategy for uncertain plants based on the Kharitonov theorem." ISA transactions 39, no. 4 (2000): 419-431.
- [27] Matignon, Denis. "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing." In Computational engineering in systems applications, vol. 2, pp. 963-968. Lille, France: IMACS, IEEE-SMC, 1996.
- [28] Bonnet, Catherine, and Jonathan R. Partington. "Coprime factorizations and stability of fractional differential systems." Systems & Control Letters 41, no. 3 (2000): 167-174.
- [29] Bonnet, Catherine, and Jonathan R. Partington. "Analysis of fractional delay systems of retarded and neutral type." Automatica 38, no. 7 (2002): 1133-1138.
- [30] Barmish, B. Ross, and E. I. Jury. "New tools for robustness of linear systems." IEEE Transactions on Automatic Control 39, no. 12 (1994): 2525-2525.
- [31] Bhattacharyya, S. P., H. Chapellat, and L. H. Keel. "Robust control: the parametric approach." Upper Saddle River (1995).
- [32] Kharitonov, V. L. "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations." Differntia Uravnen 14, no. 11 (1978): 1483-1485.

- [33] Valério, Duarte, Juan J. Trujillo, Margarita Rivero, JA Tenreiro Machado, and Dumitru Baleanu. "Fractional calculus: a survey of useful formulas." *The European Physical Journal Special Topics* 222, no. 8 (2013): 1827-1846.
- [34] Podlubny, Igor. "Fractional-order systems and PI/sup/spl lambda//D/sup/spl mu//-controllers." *IEEE Transactions on automatic control* 44, no. 1 (1999): 208-214.
- [35] Flocks, Herds. "Schools: A Distributed Behavioral Model." *Computer Graphics*: 25-34.
- [36] Eberhart, Russell, and James Kennedy. "A new optimizer using particle swarm theory." In *Micro Machine and Human Science, 1995. MHS'95., Proceedings of the Sixth International Symposium on*, pp. 39-43. IEEE, 1995.
- [37] Wilson, Edward O. *Sociology: New Synthesis*. Belknap Press, 1975.
- [38] Eberhart, Russell C., and Yuhui Shi. "Comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization." In *International Conference on Evolutionary Programming*, pp. 611-616. Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [39] Eberhart, Russ, Pat Simpson, and Roy Dobbins. *Computational intelligence PC tools*. Academic Press Professional, Inc., 1996.







## Abstract

The mean stability is necessary for proper function of control systems. Kharitonov theorem is one of the well-known theorems to provide the stability of uncertain systems. Researches shown, the system stability could be investigated by kharitonov for integer system or obtaining at least four polynomials, but in non-integer systems, the number of these polynomials is not constant. In this study we describe the procedure of finding kharitonov polynomials for fractional mechanical system, and we also explain two procedures checking its stability based on robust stability testing function and plotting convex polygons. additionally we participate fractional order proportional-integral-differential controller parameters. Then we obtain controller parameters by these two procedures. First procedure is graphical procedure based on plotting kharitonov polynomials for controlled system and approaching to intersection limits among uncertain parameters. And second procedure is using particle swarm optimization algorithm to obtain the controller parameters in the most optimized condition. Finally we conduct using graphical procedures which decrease noteworthy mathematical complex calculation of fractional order systems, we can control fractional order systems by setting PID controller and make necessary conditions for its stability with attention to our expectancy of systems.

**Keywords:** fractional order system, PID controller, kharitonov polynomial, PSO algorithm





**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Electrical Engineering and Robotic**

**M.Sc. Thesis in Control Engineering**

**Fractional order proportional-integral-differential tuning for  
one mechanical fractional system based on kharitonov  
theorem**

By:

Mohsen Ebrahimi

Supervisor:

Dr. Alireza Alfi

January 2017