بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده: مهندسی برق و رباتیک

گروه: کنترل

رساله دکتری

کنترل سیستم‌های غیرخطی غیرافاین در حضور عدم قطعیت بر اساس جداسازی مقیاس زمانی

مهرنوش اسدی

استاد راهنما:

دکتر حیدر طوسیان شاندیز

بهمن ۹۴

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و بزرگوار و همسر مهربانم

که قلم را یارای توصیف زحمات آنها نیست

تقدیروتشکر

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره-ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه‌سار بنده نوازی‌هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی رسید.

سپاس فراوان از زحمات بی‌دریغ استاد محترم جناب آقای دکتر طوسیان شاندیز که همواره راهگشای کارم بودند و در تمام مراحل این پایان نامه مرا یاری نمودند.

از جناب آقای دکتر خیاطیان استاد محترم دانشگاه شیراز که با تمامی مشغله کاری ما را در انجام این رساله یاری رساندند بینهایت سپاسگزارم.

از اساتید داور جناب آقای دکتر فاتح، جناب آقای دکتر اکبرزاده، جناب آقای دکتر رنجبر و نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر حداد که ارزیابی این تحقیق را برعهده داشتند، صمیمانه سپاسگزارم.

از تمامی اساتیدگروه کنترل دانشگاه صنعتی شاهرود که درطول دوران تحصیل، بنده را یاری نموده اند، تشکر و برای ایشان آرزوی موفقیت و بهروزی دارم.

همچنین از خانواده عزیزم مخصوصاً پدر و مادر گرانقدرم و همسر صبورم که همواره مایه دلگرمی اینجانب بوده‌اند، کمال قدردانی را دارم.

از دوستان عزیز خانمها نرگس گودرزی، عاطفه سکاکی و اکرم غلامی که اینجانب را یاری کردند نیز کمال تشکر را دارم.

مهرنوش اسدی

بهمن ۹۴

تعهدنامه

اینجانب **مهرنوش اسدی** دانشجوی دوره دکتری رشته **برق کنترل** دانشکده **برق و رباتیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایاننامه **کنترل سیستم‌های غیرخطی غیرافاین در حضور عدم قطعیت بر اساس جداسازی مقیاس زمانی** تحت راهنمائی **دکترحیدر طوسیان شاندیز** متعهد میشوم

- تحقیقات در این پایاننامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایاننامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود میباشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایاننامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایاننامه رعایت میگردد.
- درکلیه مراحل انجام این پایاننامه، درمواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- درکلیه مراحل انجام این پایاننامه، درمواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

.

تاریخ ۹۴/۱۱ /۲۷

امضای دانشجو

مالکیت نتایج وحق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای نرم افزارها وتجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود میباشد. این مطلب باید به نحو مقتضی درتولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایاننامه بدون ذکر مرجع مجاز نمیباشد.

چکیده

در این رساله، کنترل سیستم‌های فیدبک محض کاملا غیرافاین در حضور عدم قطعیت مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا به ارائه کنترل تطبیقی سیستم‌های فیدبک محض در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری می‌پردازیم. این عدم قطعیت‌ها هم بصورت خطی و هم غیرخطی وارد می‌شوند که سبب می‌شود کلاس سیستم‌های مورد مطالعه در این رساله بسیار گسترده‌تر از تحقیقات پیشین در این زمینه باشد. با بکارگیری روش جداسازی پارامتر و ایده استفاده از تابع مثبت تخمین پارامترها در ترکیب طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی به عنوان جواب‌های یک سری معادلات دینامیکی در نظر گرفته می شوند. در این رویکرد، قانون تطبیق پارامترها می‌تواند مستقیماً با استفاده از تئوری لیاپانوف در طراحی پسگام بدست آید و نیازی به طراحی پیشبین حالت جهت استخراج قانون تطبیق نمی‌باشد. در قسمت بعد، کنترل مقاوم سیستم‌های فیدبک محض را در حضور عدم قطعیت‌های منطبق و نامنطبق مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از تئوری آشفتگی منفرد، فیلترهای با بهره بالا جهت تخمین این نوع عدم قطعیت‌ها طراحی می‌شود. با ترکیب روش پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی بدست می‌آیند که در آن‌ها متغیرهای سریع نتیجه شده از فیلترهای مذکور برای حذف عدم قطعیت‌ها بکار گرفته می‌شوند. در قسمت آخر این رساله کنترل فیدبک خروجی سیستم‌های فیدبک محض کاملاً غیرافاین با متغیرهای حالت غیر قابل اندازه-گیری مورد بررسی قرار می‌گیرد. به همین منظور ابتدا یک رویتگر حالت جهت تخمین این متغیرها طراحی شده و سپس با تلفیق طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی‌های کنترل مجازی و کنترل حقیقی بدست می‌آیند. در هر بخش، برای بررسی بهتر رفتار کنترل کننده‌های پیشنهاد شده، شبیه‌سازی بر روی سیستم‌های فیدبک محض مختلف انجام شده است. نتایج شبیه‌سازی تاییدی بر کارایی کنترل کننده‌ها می باشد.

کلمات کلیدی: سیستم‌های فیدبک محض غیرافاین، جداسازی مقیاس زمانی، پارامتریزه شدن خطی و غیرخطی، تابع مثبت پارامترهای خطی، جداسازی پارامتر.

فهرست مقالات مستخرج از رساله

مقالات ژورنالی

- Mehrnoosh Asadi and Heydar Toossian Shandiz, (2016), “Adaptive Control oF Pure-Feedback Systems with Nonlinear Parameterization via Time-Scale Separation,” *International Journal of Control, Automation, and Systems.* (Springer, IF=0.95)

- Mehrnoosh Asadi and Heydar Toossian Shandiz, (2016), “Adaptive Control oF Pure-Feedback Systems in the Presence of Parametric Uncertainties,” *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*.(IF=0.41)

- Mehrnoosh Asadi and Heydar Toossian Shandiz, (2016), “Singular perturbation Theory in Output Feedback Control of Pure- Feedback Systems,” *Iranian journal of Electrical & Electronic Engineering (IJEEE).*

مقالات کنفرانسی

- Mehrnoosh Asadi and Heydar Toossian Shandiz, (2016), “Observer-Based Backstepping Control for a Class of Non-affine Syatems,” *The 4th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA 2016)*

- Mehrnoosh Asadi and Heydar Toossian Shandiz, (2016), “Backstepping time- scale Separation in control of a Class of nonlinear syatems with Uncertainty,” *The 4th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA 2016).*

- Mehrnoosh Asadi and Heydar Toossian Shandiz, (2015), “Adaptive Backstepping Control of nonlinear Systems Based on singular Perturbation Theory*,” 46thAnnual Iranian Mathematics Conference.*

فهرست مطالب

فهرست اشکال

.

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مروری بر کارهای گذشته

۱-۱-۱- کنترل سیستم‌های فیدبک محض

در طول چند دهه گذشته، کنترل سیستم‌های غیرخطی به جهت اهمیت آن درکاربردهای متعدد، توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است و روش‌های کنترلی کارآمدی مانند کنترل تطبیقی [۱] ،کنترل مد لغزشی [۲] ، خطی‌سازی فیدبک [۳] و طراحی پسگام [۴] برای سیستم‌های دینامیکی غیرخطی ارائه شده‌اند. در میان تمام این روش‌ها، طراحی پسگام که یک رویکرد ساختار یافته و بر اساس کنترل تئوری لیاپانوف می‌باشد یکی از مهمترین و مشهورترین تکنیک‌های کنترل است که برای کلاس بزرگی از سیستم‌های غیرخطی حتی در حضور عدم قطعیت قابل استفاده می‌باشد. [۶،۵] .

سیستم‌های غیرخطی که از طراحی پسگام استفاده می‌کنند دارای یک ساختار پایین مثلثی بوده و به دو کلاس فیدبک اکید[1] و فیدبک محض[2] تقسیم می‌شوند. در زمینه کنترل سیستم‌های فیدبک اکید، پیشرفت-های زیادی در رابطه با طراحی پسگام حاصل شده است. این طراحی ابتدا برای سیستم‌های فیدبک اکید که به صورت خطی پارامتریزه شده بودند مطرح شد [۷،۱] و بعد از آن به کنترل نوع پارامتریزه شده غیرخطی این سیستم‌ها تعمیم یافت [۱۰،۹،۸]. طراحی پسگام در کابردهای مختلفی از روبات‌ها [۱۱] گرفته تا هواپیماها [۱۲] و فضاپیماها [۱۳] مورد مطالعه قرارگرفته است .

در مقایسه با پیشرفت کنترل برای سیستم‌های فیدبک اکید، نتایج نسبتاً کمی برای سیستم های فیدبک محض در اختیار است. سیستم های فیدبک محض در متغیرهای حالت غیرافاین می باشند و سیستم‌های عملی و واقعی بیشتری را نظیر فرآیندهای بیوشیمیایی [۱] ، سیستم کنترل پرواز [۱۴] ، سیستم‌های

[1] Strict-Feedback
[2] Pure-Feedback

مکانیکی [۱۵] و غیره شامل می‌شوند. اگرچه طراحی پسگام در خصوص کنترل سیستمهای فیدبک محض یک ساختار سیستماتیک را ارائه می‌دهد [۱۶] اما دارای دو مشکل عمده می‌باشد:

۱- تکرار مشتقات ورودی‌های کنترل مجازی منجر به مسئله « انفجار پیچیدگی[1]» می شود.

۲- ساختار زنجیروار و غیرافاین این سیستم‌ها باعث می‌شود که یافتن ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی صریح[2] بسیار سخت باشد.

بیشتر مطالعات به طور عمده به کنترل سیستم‌های افاین محدود می‌شوند و در رابطه با سیستم‌های غیرافاین تحقیقات بسیار کمی وجود دارد. در بعضی از این تحقیقات، شبکه‌های عصبی [۱۷-۱۸] یا سیستم‌های منطق فازی [۱۹-۲۰] برای تقریب ورودی کنترل بکار گرفته می‌شوند و در بعضی دیگر، سیستم اولیه که به فرم غیرافاین می‌باشد به فرم افاین تبدیل شده و سپس ورودی کنترل بدست آمده برای این سیستم افاین می‌تواند بطور مستقیم به سیستم اولیه غیرافاین اعمال شود [۲۱-۲۲]. در [۲۳-۲۴] روش وارونی دینامیکی[3] برای کنترل سیستم‌های غیرافاین معرفی شد. به این ترتیب که بر اساس جداسازی مقیاس زمانی در تئوری آشفتگی منفرد[4]، ورودی کنترل با استفاده از حل معادلات دینامیکی سریع تقریب زده می‌شود.

در [۲۵-۲۶] کنترل سیستم‌های فیدبک محض افاین در ورودی کنترل با استفاده از کنترل کننده‌های عصبی- تطبیقی مورد بررسی قرار گرفت. به منظور کنترل سیستم‌های فیدبک محض کاملاً غیرافاین، در[۲۷-۳۱] سیستم فازی و در [۳۲-۳۵] شبکه عصبی به عنوان یک تقریبگر تابع برای جبران ترم‌های غیرخطی نامعلوم، در طراحی سیستم کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

[1] . Explosion of Complexity
[2] . Explicit
[3] Dynamic Inversion
[4] Singular Perturbation Theory

در[۲۷-۳۶] مشتقات زمانی ورودی‌های کنترل مجازی یا بوسیله سیستم فازی و شبکه عصبی تقریب زده می‌شود که منجر به پیچیدگی طراحی شده و یا به طور کامل نادیده گرفته می‌شود که باعث عملکرد ضعیف کنترل می‌گردد. از طرفی این روش‌ها هنگامیکه مدل سیستم کاملاً نامعلوم است مناسب می‌باشند و زمانیکه مدل سیستم به طور کامل مشخص باشد نمی توان از اطلاعات قبلی راجع به مدل استفاده کرد.

به منظور غلبه بر انفجار پیچیدگی ، روش کنترل سطح دینامیکی[1]برای کنترل سیستم های غیرافاین پیشنهاد شد که در هر گام طراحی پسگام، یک فیلتر مرتبه اول از ورودی بکار گرفته می‌شود [۳۶]. در [۳۷] این روش برای کلاسی از سیستم‌های پارامتریزه شده بصورت خطی گسترش یافت. روش طراحی عصبی-تطبیقی مبتنی بر کنترل سطح دینامیکی برای سیستم‌های فیدبک اکید و فیدبک محض به ترتیب در [۳۸] و[۳۹] ارائه شد. اما از آنجایی که کنترلر در یک الگوریتم تقریبی بکار گرفته می‌شود که خروجی آن همزمان در خود کنترل استفاده می شود، روش پیشنهادی منجر به ایجاد یک حلقه جبری[2] می‌شود. مشکل این حلقه جبری در[۴۰-۴۱] با ترکیب کنترل سطح دینامیکی و روش طراحی پایداری ورودی به حالت که در [۳۵] آورده شده است، برطرف شد. اما در [۴۰-۴۱] شبکه عصبی و فیلتر متناظر آن در هرگام نیاز به طراحی داشتند که خود باعث می‌شود این طرح هنوز پیچیده باشد.

در [۴۲-۴۳] دو ایراد طراحی پسگام برای سیستم های فیدبک محض با پیشنهاد ترکیب طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی مرتفع گردید. در این روش، ابتدا با بکارگیری روش جداسازی مقیاس زمانی[3] مشتقات ورودی‌های کنترل مجازی/حقیقی به عنوان جواب‌های یک سری معادلات دینامیکی سریع تعریف می شوند و سپس انتگرال آن‌ها به عنوان ورودی‌های کنترل مجازی/حقیقی در نظر گرفته می‌شود.

---

[1] Dynamic Surface Control
[2] Algebraic Loop
[3] Time Scale Separation

۱-۱-۲- عدم قطعیت

در واقعیت اگرچه از قوانین فیزیک برای مدل کردن سیستم و یافتن شکل توابع غیرخطی استفاده می‌شود اما پارامترهای سیستم ممکن است به شرایط عملکرد بستگی داشته باشد و بطور دقیق از قبل مشخص و معلوم نباشد. این نوع عدم قطعیت را به عنوان عدم قطعیت پارامتری تعریف می‌کنیم و کنترل سیستمی با این نوع عدم قطعیت را کنترل تطبیقی می نامیم.

در سال‌های گذشته شاهد رشد سریع تحقیقات در زمینه طراحی کنترل تطبیقی سیستم‌های غیرخطی در حضور عدم قطعیت پارامتری بوده‌ایم[۴۴-۵۶]. بیشتر این تحقیقات به مطالعه سیستم‌های فیدبک اکید پارامتری که در آنها پارامترهای نامعلوم بصورت خطی وارد شده‌اند پرداخته است و در مورد کنترل سیستم-های پارامتریزه شده بصورت غیرخطی[1] نتایج کمتری در دست است.

پارامتریزه شدن غیرخطی می‌تواند در بسیاری از سیستم‌های عملی از جمله پروسه‌های شیمیایی [۵۷] و ماشین‌های دارای اصطکاک [۵۸] وجود داشته باشد. در سال‌های گذشته محققان زیادی کار روی این سیستم‌ها را شروع کرده و به نتایج جالبی دست پیدا کرده‌اند [۵۹-۶۲] و لازم به ذکر است که اکثر نتایج بدست آمده در این خصوص، تحت اعمال شرایطی روی پارامترهای نامعلوم می‌باشد. یکی از این شرایط را می‌توان شرط محدب/ مقعر[2] نام برد. تابع $f(\theta)$ روی Θ محدب است اگر نامساوی زیر را برآورده کند:

$$f(\lambda\,\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2) \le \lambda f(\,\theta_1) + (1-\lambda) f(\theta_2) \qquad \forall\ \ \theta_1, \theta_2 \in \Theta \quad 0 \le \lambda \le 1 \qquad (۱\text{-}۱)$$

و مقعر می باشد اگر:

$$f(\lambda\,\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2) \ge \lambda f(\,\theta_1) + (1-\lambda) f(\theta_2) \qquad \forall\ \ \theta_1, \theta_2 \in \Theta \qquad 0 \le \lambda \le 1 \qquad (۲\text{-}۱)$$

[1] .Nonlinearly Parameterized Systems
[2] Convex/Concave

تحت این فرض، کنترل ردگیری تطبیقی برای سیستم‌های دینامیکی پارامتریزه شده غیرخطی در [۵۹-۶۱] ارائه شده است.

شرط دیگر، مشخص بودن کران این پارامترهاست [۶۲-۶۵]. در [۶۳-۶۴] کنترل تطبیقی این سیستم‌ها به فرم فیدبک اکید برای اولین بار مورد توجه قرار گرفت. اما کنترلر پیشنهادی فقط پایداری محلی را تضمین می‌کرد و همچنین مشخص بودن کران پارامترهای نامعلوم مورد نیاز بود. پس از آن یک روش بر اساس مدل خطا [۶۵] معرفی شد که می‌توانست پایداری سراسری سیستم‌های به فرم فیدبک اکید را در حضور عدم قطعیت پارامتری غیرخطی تضمین کند اما لازمه آن مشخص بودن کران پارامتر بود. از آنجایی که از یک طرف مهم‌ترین مزیت کنترل تطبیقی بر کنترل مقاوم عدم نیاز به دانستن کران پارامتر می‌باشد و از طرف دیگر به منظور طراحی کنترل تطبیقی سراسری برای سیستم‌های فیدبک اکید پارامتریزه شده به صورت خطی نیازی به دانستن کران پارامتر نیست، تحقیقاتی در زمینه توسعه کنترل تطبیقی این سیستم‌ها برای کران نامعلوم پارامترها صورت گرفت.

در [۶۶-۶۸] کنترل تطبیقی سراسری از نوع کنترلرهای سوئیچینگ برای سیستم‌های غیرخطی در پارامتر به فرم فیدبک اکید ارائه شد که نیازی به معین بودن کران پارامتر نبود و پارامترهای کنترلر از طریق منطق سوئیچینگ تنظیم می‌شدند.

کنترل سیستم‌های فیدبک محض پارامتریزه شده بصورت غیرخطی در [۴۳] پیشنهاد شد که از یک پیشبین حالت[1] جهت بدست آوردن قانون تطبیق پارامترهای نامعین با کران نامعلوم استفاده کرده است.

کنترل مقاوم در رابطه با پایداری و عملکرد سیستم تحت عدم قطعیت‌هایی نظیر توابع نامعلوم، تغییر در پارامتر، دینامیک های مدل نشده، اغتشاشات و غیره می باشد. جهت کنترل سیستم در حضور این عدم

[1] State Predictor

قطعیت‌ها می‌توان به کنترل تطبیقی-مقاوم [۶۹-۷۱]، کنترل مد لغزشی [۷۲]، کنترل حذف اغتشاش فعال[1] [۷۳-۷۴] و کنترل پیشبین مقاوم [۷۵-۷۶] اشاره کرد.

در[۷۷-۸۳] کنترل مقاوم‌های متعددی پیشنهاد شده است. در روشهای کنترل مقاوم، دانستن حدود عدم قطعیت لازم است. حدود عدم قطعیت یکی از چالشهای بسیار مهم در این روشها می‌باشد. چون اگر حدود عدم قطعیت بزرگتر از مقدار واقعی باشد، ممکن است اندازه سیگنال کنترل بیشتر از مقدار مجاز آن شود که در این صورت پدیده اشباع رخ خواهد داد و کنترل کننده قادر به کنترل سیستم نخواهد بود. علاوه بر این، اگر دامنه سیگنال کنترل بیش از حد مجاز باشد، ممکن است به سیستم آسیب برساند. از طرف دیگر، اگر حدود عدم قطعیت کمتر از مقدار واقعی باشد، خطای ردگیری زیاد می‌شود و ممکن است منجر به ناپایداری سیستم کنترل شود.

اخیراً در [۸۴] روشی مبتنی بر جداسازی مقیاس زمانی در طراحی کنترل مقاوم سیستم های غیرخطی پیشنهاد شده است که در آن نیازی به مشخص بودن کران عدم قطعیت نمی‌باشد. در این رویکرد ابتدا یک فیلتر با بهره بالا جهت تخمین عدم قطعیت طراحی می‌شود، سپس متغیر سریع[2] بدست آمده از این فیلتر جهت حذف اثر عدم قطعیت در قانون کنترل فیدبک نامی مورد استفاده قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است عدم قطعیت در [۸۴] از نوع عدم قطعیت منطبق[3] می‌باشد. به عبارتی عدم قطعیت فقط در معادله‌ای که کنترل u وارد می شود به چشم می خورد. اما این فرض محدود کننده بوده و در اکثر سیستم‌های عملی برآورده نمی‌شود. در [۸۵-۸۶]، روش پیشنهادی [۸۴] در طراحی کنترل مقاوم سیستم‌های فیدبک اکید در حضور عدم قطعیت‌های منطبق و نامنطبق[4] تعمیم یافت. عدم قطعیت نامنطبق عدم قطعیتی است که در معادله‌ای وارد می‌شود که کنترل وجود ندارد.

---

[1] . Active Disturbance Rejection Control
[2] . Fast variable
[3] . Matched Uncertainty
[4] . Unmatched Uncertainty

اگر چه کنترل مقاوم سیستم های فیدبک محض در [۸۷-۹۳] مورد مطالعه قرار گرفته است اما در تمام آن ها فرض مشخص بودن کران عدم قطعیت وجود دارد.

۱-۱-۳- کنترل فیدبک خروجی

یکی از مهمترین مسائل در زمینه کنترل غیرخطی، پایدارسازی بوسیله فیدبک خروجی است. بنابر اصل جداسازی[1] در سیستم‌های خطی، پایدارپذیری بوسیله فیدبک حالت به علاوه رویت‌پذیری، پایدارپذیری بوسیله فیدبک خروجی را تضمین می‌کند. در سیستم‌های خطی بر خلاف سیستم‌های غیرخطی این اصل صادق نمی‌باشد و شاید به همین جهت است که مسئله کنترل فیدبک خروجی بسیار چالشی و سخت‌تر از پایدارسازی به وسیله فیدبک حالت می‌باشد[۹۴].

در سال‌های گذشته مطالعات بسیاری روی کنترل سیستم‌های غیرخطی بوسیله فیدبک خروجی انجام شده است[۹۵-۱۰۰]. در [۱۰۱] مثال‌های زیادی ارائه شد تا نشان دهند پایدارسازی سیستم‌های غیرخطی مینیمم فاز بوسیله فیدبک خروجی بدون در نظرگرفتن شرط نمو[2] روی متغیرهای حالت غیرقابل اندازه-گیری، میسر نیست. بعد از آن تحقیقات زیادی روی کنترل فیدبک خروجی سیستم‌های غیرخطی، تحت شرایط مختلف نمو یا ساختار یافته[3] متمرکز شد. یکی از فرضیات مشترک و معمول این بود که سیستم‌های غیرخطی بایستی به فرم فیدبک خروجی [۱۰۲] یا فرم مثلثی با شرایط نمو خاص باشند [۱۰۳-۱۰۷]. شرط دیگر این است که سیستم بتواند بصورت غیرخطی وابسته به خروجی باشد اما نسبت به متغیرهای

---

1. Separation Principle
2. Growth Condition
3. Structural

حالت غیرقابل اندازه‌گیری بصورت خطی باشد [۱۰۳] که این شرط در [۱۰۶] بوسیله اعمال شرط لیپشیتز روی متغیرهای حالت غیرقابل اندازه‌گیری تقلیل داده شد.

همچنین در [۹۴] کنترل فیدبک خروجی برای کلاسی از سیستم‌ها به فرم زیر

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \phi_i(t, x, u\ ), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= u + \phi_n(t, x, u\ ) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{۳-۱}$$

که در آن $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ و شرط نمو خطی برای آن‌ها صدق می‌کند ارائه شد. شرط نمو به این صورت تعریف می‌شود که برای $i = 1, \dots, n$ وجود داشته باشد c طوریکه

$$|\phi_i(t, x, u\ )| \leq c(|x_1| + \cdots + |x_i|) \tag{۴-۱}$$

در [۱۰۸] مسئله پایداری مجانبی بوسیله فیدبک خروجی برای کلاسی از سیستم‌های همگن به فرم زیر مورد بررسی قرار گرفته است.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}^p \qquad\qquad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned} \tag{۵-۱}$$

که در آن $p \geq 1$ ثابتی فرد می‌باشد. هنگامیکه $p = 1$ سیستم (۱-۵) هم کنترل‌پذیر و هم رویت‌پذیر می‌باشد و بوسیله اصل جداسازی، پایدارسازی بوسیله فیدبک خروجی قابل دستیابی است. اما برای حالتی که $p > 1$ ، این سیستم در حد بسیار زیاد غیرخطی شده (به عنوان مثال سیستم‌های همگن در [۱۰۹-۱۱۵]) که ژاکوبین خطی‌سازی آن نه کنترل‌پذیر است و نه رویت‌پذیر. در [۱۰۸] ابتدا فرض کرده که متغیرهای حالت در دسترس می‌باشند و کنترل‌های مجازی و نهایتاً قانون کنترل فیدبک حالت را با استفاده از طرح پیشنهادی در [۱۱۵] و [۱۱۶] برای سیستم (۱-۵) بدست می‌آورد. اما از آنجا که متغیرهای حالت در دسترس نیستند، در مرحله بعد یک رویتگر طراحی می‌کند. این رویتگر دارای فرمی مانند خود سیستم (۱-

۵) بوده که در دینامیک آن از ترم‌های خطای بین خروجی سیستم و سیگنال خروجی رویتگر به همراه بهره‌های مثبت استفاده می‌شود. سرانجام با استفاده از اصل معادل‌سازی[1]، متغیرهای حالت موجود در u بدست آمده در مرحله اول را با تخمین متغیرهای حالت رویتگر جایگزین می‌کند. در نهایت با بکارگیری این u در تابع لیاپانوف مرحله اول، بهره‌های موجود در رویتگر را بدست می‌آورد.

در [۱۱۷] کنترل فیدبک خروجی برای کلاسی از سیستم های غیرخطی به فرم

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2^{p_1} + f_1(x_1) \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n^{p_{n-1}} + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\
\dot{x}_n &= u + f_n(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{۱-۶}$$

که در [۱۱۸-۱۲۱] نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند بررسی شد که در مقایسه با نتایج پایداری فیدبک خروجی در [۱۲۲-۱۲۵] ، بیشتر شرایط محدود کننده نظیر $p_1 = \cdots = p_{n-1} = p_n$ ، شرط لیپشیتز در [۱۰۸] و یا شرط نمو که برای سیستم (۱-۶) در [۱۲۲-۱۲۳] در نظر گرفته می‌شد برداشته شد.

کنترل فیدبک خروجی سیستم‌های فیدبک محض در [۱۲۵-۱۲۷] با استفاده از کنترل کننده‌های فازی-تطبیقی ارائه شد که در آن سیستم منطق فازی برای تقریب توابع غیرخطی نامعلوم بکار گرفته شده است. ابتدا از یک رویتگر فازی-تطبیقی برای تخمین متغیرهای حالت غیر قابل اندازه‌گیری استفاده می‌شود و در طراحی کنترل به منظور غلبه بر مشکل حلقه جبری ناشی از طراحی پسگام برای سیستم‌های فیدبک محض، در قسمت توابع غیرافاین سیستم به جای سیگنال اصلی تخمین متغیر حالت، از سیگنال فیلتر شده آن استفاده میکند که منجر به کاهش دقت طراحی می‌شود.

[1] .Equivalence Principle

۱-۲- اهداف مورد نظر

به رغم مطالعات صورت گرفته در زمینه‌های مختلف سیستم‌های فیدبک محض از جمله وجود ناحیه مرده نامعلوم[1] [۲۹]، زمان تاخیر نامعلوم [۱۲۸،] ورودی هیترزیس [۱۲۹] و قیود خروجی [۱۳۰]، مسئله کنترل سیستم‌های فیدبک محض کاملاً غیرافاین که به صورت غیرخطی پارامتریزه شده‌اند هنوز جای کار بسیار زیادی دارد. این سیستم‌ها تنها در [۴۳] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در طرح پیشنهادی [۴۳] ، ابتدا با استفاده از مدل سری- موازی، یک پیشبین حالت جهت استخراج قانون تطبیق برای تخمین پارامترهای نامعین طراحی می‌شود. سپس با ترکیب طراحی پسگام با تئوری آشفتگی منفرد، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی برای این پیشبین بدست می‌آید و برای آنالیز پایداری از قضیه Tikhonov در تئوری آشفتگی منفرد استفاده می‌شود. اما همانطور که می‌دانیم طراحی پیشبین حالت سرراست[2] نبوده و باعث پیچیدگی هر چه بیشتر پروسه طراحی کنترل می‌شود. از طرفی به علت وجود خطای پیش بینی، کنترلی که برای پیشبین حالت طراحی می‌شود نسبت به زمانیکه برای خود سیستم اولیه طراحی می‌شود، نمی‌تواند از دقت لازم برخوردار باشد. در این رساله، برای ترم‌هایی که در آن پارامترهای نامعین به صورت غیرخطی وارد شده‌اند، با استفاده از روش جداسازی پارامتر[3]، تابع کران آنها بدست می‌آید که با بکارگیری آن در ترکیب طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی به عنوان جواب‌های یک سری معادلات دینامیکی در نظر گرفته می‌شوند. بر خلاف [۴۳] طراحی پیشبین حالت جهت استخراج قانون تطبیق حذف شده واین قانون می‌تواند مستقیماً با استفاده از تئوری لیاپانوف در طراحی پسگام بدست آید. همچنین برای

---

[1] . Unknown Dead Zone
[2] . Straight forward
[3] . Parameter Separation

آنالیز پایداری سیستم حلقه بسته از آنجایی که به علت عدم وجود پیشبین حالت، بعضی از شرایط قضیه Tikhonov برآورده نمی‌شود در نتیجه یک قضیه جدید در تئوری آشفتگی منفرد ارائه می‌گردد.

در قسمت بعد با اعمال عدم قطعیت پارامتری بصورت خطی، طیف سیستم‌های فیدبک محض مورد بررسی را گسترش می‌دهیم. با تعمیم روش پیشنهادی قسمت قبل و نیز ایده استفاده از تابع مثبت[1] تخمین پارامترهایی که بصورت خطی وارد می‌شوند، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی و نیز قانون بروزرسانی پارامترها در طراحی پسگام بدست می‌آید.

در تمام تحقیقات صورت گرفته در زمینه کنترل مقاوم سیستم‌های فیدبک محض، شرط مشخص بودن حدود عدم قطعیت لازم است. به منظور حذف این شرط، طرح پیشنهادی در [۸۴-۸۶] را جهت طراحی کنترل مقاوم سیستم‌های فیدبک محض تعمیم می‌دهیم. با استفاده از تئوری آشفتگی منفرد، فیلترهای با بهره بالا جهت تخمین عدم قطعیت‌های منطبق/ نامنطبق طراحی می‌شود. با ترکیب روش پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی بدست می‌آیند که در آن‌ها متغیرهای سریع نتیجه شده از این فیلترها برای حذف عدم قطعیت‌ها بکار گرفته می‌شوند. کنترل پیشنهادی می‌تواند بر مسئله انفجار پیچیدگی ناشی از روش پسگام معمولی در کنترل سیستم‌های فیدبک محض غلبه کند.

در زمینه کنترل فیدبک خروجی سیستم‌های فیدبک محض با متغیرهای حالت غیر قابل اندازه‌گیری مطالعات زیادی در دست نیست. در همین راستا کنترلی مبتنی بر طراحی فازی-تطبیقی در [۱۲۵-۱۲۷] ارائه شده است. این در حالی است که هم تعداد پارامترهای طراحی به جهت استفاده از سیستم فازی زیاد می‌باشد و هم طراحی به جهت محاسبه مشتقات کنترل‌های مجازی از پیچیدگی بالایی برخوردار است. به همین منظور در این رساله ابتدا یک رویتگر حالت جهت تخمین این متغیرها طراحی شده و سپس با تلفیق طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی‌های کنترل مجازی و کنترل حقیقی بدست می‌آیند. کنترل

[1] Positive Function of Linear Parameters

پیشنهادی علیرغم سادگی می‌تواند بر مسئله انفجار پیچیدگی ناشی از روش پسگام معمولی در کنترل سیستم‌های فیدبک محض غلبه کند و همچنین خطاهای رویتگر و ردگیری به همسایگی کوچکی از مبدأ همگرا می‌شود.

برای بررسی بهتر رفتار کنترل کننده‌های پیشنهاد شده، شبیه‌سازی بر روی سیستم‌های فیدبک محض مختلف انجام شده است و نتایج قابل قبول شبیه‌سازی‌ها کارایی روش‌های کنترل پیشنهادی را تایید می کند.

۱-۳- ساختار کلی رساله

در ادامه، در فصل دوم ابتدا به معرفی سیستم‌های فیدبک محض خواهیم پرداخت و پس از آن تئوری آشفتگی منفرد، قضیه‌های اساسی آن و نیز روش جداسازی پارامتر مورد بررسی قرار می گیرد. فصل سوم به طراحی کنترل تطبیقی برای سیستم‌های فیدبک محض کاملاً غیر افاین که به صورت غیرخطی پارامتریزه شده‌اند می‌پردازد. در فصل چهارم، با اعمال عدم قطعیت پارامتری خطی، طیف سیستم‌های مورد بحث در فصل سوم را گسترش داده و با تعمیم روش کنترل مطرح شده در فصل سوم به طراحی کنترل کننده تطبیقی برای این دسته از سیستم‌ها می‌پردازیم. کنترل مقاوم و کنترل فیدبک خروجی سیستم‌های فیدبک محض به ترتیب در فصل‌های پنجم و ششم ارائه می‌شود. طراحی تمام روش‌ها مبتنی بر تلفیق روش پسگام و تئوری آشفتگی منفرد می‌باشد. جهت نشان دادن عملکرد کنترل کننده‌های پیشنهادی، در هر قسمت روش کنترل ارائه شده بر روی یک یا چند سیستم شبیه سازی شده است. نتایج تمام شبیه‌سازی‌ها کارایی روش‌های پیشنهادی را تایید می‌کند. نتیجه‌گیری از رساله و پیشنهادات برای ادامه کار در فصل هفتم آورده شده است.

فصل دوم

سیستم‌های فیدبک محض، تئوری آشفتگی منفرد و روش جداسازی پارامتر

۲-۱- مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی سیستم‌های فیدبک اکید و محض می‌پردازیم. سپس مختصری از تئوری آشفتگی منفرد و قضایایی از آن را که مورد استفاده قرار می‌دهیم توضیح داده و در آخر روش جداسازی پارامتر را بیان می‌کنیم.

۲-۲- سیستم‌های فیدبک محض

در میان تمام روش‌های طراحی کنترل برای سیستم‌های غیرخطی، طراحی پسگام که یک رویکرد ساختار یافته و بر اساس تئوری لیاپانوف می‌باشد یکی از مهمترین و مشهورترین تکنیک‌های کنترل است که برای کلاس بزرگی از سیستم‌های غیرخطی حتی در حضور عدم قطعیت قابل استفاده است.

سیستم های غیرخطی که از طراحی پسگام استفاده می‌کنند دارای یک ساختار پایین مثلثی بوده و به دو کلاس فیدبک اکید و فیدبک محض تقسیم می‌شوند.

سیستم‌های فیدبک اکید به فرم زیر می‌باشند[۱] :

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = f(x) + g(x)\xi_1 \\
&\dot{\xi}_1 = f_1(x,\xi_1) + g_1(x,\xi_1)\xi_2 \\
&\dot{\xi}_2 = f_2(x,\xi_1,\xi_2) + g_2(x,\xi_1,\xi_2)\xi_3 \\
&\vdots \\
&\dot{\xi}_{k-1} = f_{k-1}(x,\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) + g_{k-1}(x,\xi_1,\dots,\xi_{k-1})\xi_k \\
&\dot{\xi}_k = f_k(x,\xi_1,\dots,\xi_k) + g_k(x,\xi_1,\dots,\xi_k)u
\end{aligned}
\tag{۱-۲}
$$

که $x \in R^n$ بوده و $\xi_i \in R$ اسکالرها می‌باشند. توابع غیرخطی f_i و g_i در دینامیک‌های $\xi_i(i = 1, \dots, k)$ فقط به $x, \xi_1, \dots, \xi_i$ یا به عبارتی به متغیرهای حالتی که فیدبک می‌شوند وابسته است، از این رو زیرسیستم ξ را فیدبک اکید می‌نامیم.

سیستم‌های فیدبک محض کلاس گسترده‌تری از سیستم‌های مثلثی را شامل می‌شوند که به فرم زیر می-باشند[۱] :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)\xi_1 \\
\dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1, \xi_2) \\
\dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{k-1} &= f_{k-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_k) \\
\dot{\xi}_k &= f_k(x, \xi_1, \dots, \xi_k, u)
\end{aligned} \tag{۲-۲}$$

همانطور که مشاهده می‌شود در دینامیک‌های $\xi_i(i = 1, \dots, k-1)$، توابع غیرخطی f_i نسبت به ξ_{i+1} غیرافاین می‌باشند. همچنین معادله آخر نسبت به u افاین نمی‌باشد. این فرم از سیستم‌های مثلثی فیدبک محض نامیده می‌شود.

یکی از مشکلات در خصوص طراحی پسگام برای این سیستم ها اینست که به علت ساختار زنجیروار و غیرافاین این سیستم‌ها یافتن ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی صریح بسیار سخت می‌باشد. برای رفع این مشکل در این رساله تلفیق طراحی پسگام با تئوری آشفتگی منفرد مطرح می‌شود که در ادامه به بررسی این تئوری می‌پردازیم.

۲-۳- تئوری آشفتگی منفرد

۲-۳-۱- تئوری آشفتگی[1]:

حل تحلیلی دقیق در معادلات دیفرانسیل غیرخطی فقط برای کلاس خاص و محدودی از معادلات امکان‌پذیر می‌باشد. در نتیجه ناگزیر هستیم از روش‌های تقریبی برای رسیدن به جواب استفاده کنیم. روش‌های تقریبی به دو دسته مجزا تقسیم می‌شوند:

- روش های حل عددی
- روش های مجانبی[2]

همه با روش‌های حل عددی در درس معادلات دیفرانسیل آشنا هستیم و در این جا به توضیح روش‌های مجانبی می‌پردازیم:

فرض کنید معادله حالت زیر داده شده است

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon) \qquad (۳-۲)$$

که ε یک پارامتر اسکالر کوچک می‌باشد و تحت شرایط خاص، معادله دارای جواب دقیق $x(t,\varepsilon)$ می‌باشد. در بسیاری از کاربردها با معادلاتی از این دسته مواجه می‌شویم . هدف روش مجانبی بدست آوردن جواب تقریبی $\tilde{x}(t,\varepsilon)$ می‌باشد بطوریکه خطای تقریب $x(t,\varepsilon) - \tilde{x}(t,\varepsilon)$ در بسیاری از نرم‌ها برای $|\varepsilon|$، کوچک شود و جواب تقریبی $\tilde{x}(t,\varepsilon)$ در ترم‌هایی از معادلات ساده‌تر از معادله اولیه، نمایش داده شود. اهمیت عملی روش‌های مجانبی در نشان دادن مشخصات ساختاری و اصولی معادله حالت اولیه برای $|\varepsilon|$کوچک می‌باشد. همچنین روش‌های مجانبی ساختارهای مقیاس زمانی چندگانه[3] که ذاتاً در خیلی از مسائل عملی وجود دارد را مشخص می‌کنند. اغلب، جواب معادله حالت نشان می‌دهد که خیلی از متغیرها در زمان سریع‌تر از

[1]- Perturbation
[2]- Asymptotic
[3] - Multi-Time Scale

بقیه متغیرها حرکت می‌کنند که این منجر به دسته‌بندی متغیرها به عنوان کند[1] و سریع می‌شود. روش‌های میانگین‌گیری[2] و آشفتگی منفرد از روش‌های مجانبی هستند که از اثر متقابل این متغیرهای کند و سریع در آن‌ها استفاده می‌شود.

۲-۳-۲- مدل استاندارد آشفتگی منفرد

در حالیکه روش آشفتگی در بخش قبل به معادلات حالتی که به پارامتر کوچک ε وابسته هستند اعمال می‌شود، در این قسمت با مسائل آشفتگی سخت‌تری روبرو هستیم که با وابستگی گسسته مشخصات سیستم به پارامتر ε توصیف می‌شوند.

مدل استاندارد آشفتگی منفرد به صورت زیر می باشد[۱۳۱] :

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon) \qquad x(t_0) = \zeta(\varepsilon) \tag{۴-۲}$$

$$\varepsilon\dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon) \qquad z(t_0) = \eta(\varepsilon) \tag{۵-۲}$$

که در آن توابع f و g نسبت به آرگومان‌های خود برای $(t, x, z, \varepsilon) \in [0, t_1] \times D_x \times D_z \times [0, \varepsilon_0]$ بطور پیوسته مشتق‌پذیر می‌باشند. $D_x \subset R^n$ و نیز $D_z \subset R^m$ تعریف می‌شود. $\varepsilon = 0$ یک تغییر بنیادی و ناگهانی را در مشخصات دینامیکی سیستم باعث می‌شود و هنگامیکه در رابطه (۲-۵)، $\varepsilon = 0$ را قرار می-دهیم بُعد معادلات حالت از $n+m$ به n کاهش می‌یابد و این معادله به معادله جبری زیر تبدیل می‌شود.

$$0 = g(t, x, z, 0) \tag{۶-۲}$$

[1] Slow
[2]-Averaging

معادلات (۲-۴)-(۲-۵) به فرم استاندارد است اگر و تنها اگر معادله (۲-۶) به تعداد $k \geq 1$ ریشه حقیقی مجزا

$$z = h_i(t, x) \qquad i = 1,2, \dots, k \tag{۲-۷}$$

بازای هر $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$ داشته باشد. این فرض تضمین می کند که یک مدل کاهش یافته[1] n بعدی با هر ریشه معادله (۲-۶) متناظر خواهد بود. برای بدست آوردن i امین مدل کاهش یافته، (۲-۷) را در (۲-۴) جایگذاری کرده (در $\varepsilon = 0$) تا معادله زیر بدست آید.

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)\,, \quad x(t_0) = \zeta_0 = \zeta(0) \tag{۲-۸}$$

با توجه به معادله (۲-۵) بدلیل اینکه مشتق متغیر z برای ε کوچک دارای مقداری بزرگ می‌باشد، این متغیر را متغیر سریع می‌نامیم و همچنین از آنجایی که معادله (۲-۸) تابعی از متغیرهای کند x می‌باشد، به عنوان مدل کند[2] شناخته می‌شود.

۲-۳-۳ - خاصیت مقیاس زمانی مدل استاندارد

آشفتگی‌های منفرد باعث رفتار چند مقیاس زمانی سیستم‌های دینامیکی شده که با وجود گذرهای سریع و کند در پاسخ سیستم به محرک خارجی مشخص می‌شود. پاسخ کند به وسیله مدل کاهش یافته (۲-۸) تقریب زده می‌شود در حالیکه تفاوت بین پاسخ مدل (۲-۴)-(۲-۵) و مدل (۲-۸) یک گذر سریع می‌باشد.

فرض کنید $x(t, \varepsilon)$ و $z(t, \varepsilon)$ جواب‌های مسئله (۲-۴)-(۲-۵) باشند و برای مدل کاهش یافته (۲-۸) جواب معادله را با $\bar{x}(t)$ مشخص کنیم. از آنجایی که متغیر z از مدل کاهش یافته بدست آمده است و به وسیله

[1] Reduced Model
[2]-Slow Model

$h(t,x)$ جایگذاری می‌شود تنها موردی که درباره z از حل معادله (۲-۸) می‌توانیم بدست آوریم محاسبه $\bar{z}(t) = h\big(t, \bar{x}(t)\big)$ می‌باشد. برخلاف متغیر اصلی z که در زمان t_0 مقدارش $\eta(\varepsilon)$ می باشد، $\bar{z}$ برای شروع از یک مقدار اولیه مشخص آزاد نمی‌باشد و ممکن است اختلاف زیادی بین مقادیر اولیه $\bar{z}(t_0) = h(t_0, \zeta_0)$ و $\eta(\varepsilon)$ باشد. بنابراین $\bar{z}(t)$ نمی‌تواند یک تقریب یکنواخت[1] از $z(t,\varepsilon)$ باشد. می‌توان این انتظار را داشت که در فاصله $t \in [t_b, t_1]$ به ازای $t_b > t_0$ ، $z(t,\varepsilon) - \bar{z}(t) = O(\varepsilon)$ برقرار باشد. از طرف دیگر از آنجایی که

$$x(t_0,\varepsilon) - \bar{x}(t_0) = \zeta(\varepsilon) - \zeta(0) = O(\varepsilon) \qquad (۲-۹)$$

می‌توان نتیجه گرفت که $\bar{x}(t)$ یک تقریب یکنواخت برای$x(t,\varepsilon)$ به ازای $t \in [t_b, t_1]$ می‌باشد. با تغییر متغیر $y = z - h(t,x)$ معادله زیر از سیستم آشفته منفرد (۲-۴)- (۲-۵) حاصل می شود:

$$\dot{x} = f(t,x,y+h(t,x),0)\,, \qquad x(t_0) = \zeta\,(\varepsilon) \qquad (۲-۱۰)$$

$$\varepsilon\dot{y} = g(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} f(t,x,y+h(t,x),\varepsilon)$$
$$y(t_0) = \eta(\varepsilon) - h\big(t_0, \zeta(\varepsilon)\big) \qquad (۲-۱۱)$$

با تعریف متغیر جدید زمان $\tau = \frac{t-t_0}{\varepsilon}$، (۲-۱۱) در مقیاس زمان τ با معادله زیر بیان می شود:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} f(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) \qquad (۲-۱۲)$$

$$y(0) = \eta(\varepsilon) - h\big(0, \zeta(\varepsilon)\big)$$

برای $\varepsilon = 0$ معادله (۲-۱۲) به معادله زیر تبدیل می شود.

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t,x,y+h(t,x),0) \qquad (۲-۱۳)$$

[1] .Uniform Approximation

که این معادله را مدل لایه مرزی[1]می‌نامند.

با توجه به مطالب گفته شده می‌توان گفت که مسئله آشفتگی منفرد از دو زیر سیستم تشکیل شده: مدل کاهش یافته و مدل لایه مرزی. مدل کاهش یافته مربوط به متغیرهای حالت کند می‌باشد در حالیکه مدل لایه مرزی رفتار گذر سریع را تخمین می‌زند.

۲-۳-۴- قضایای تئوری آشفتگی منفرد

در تئوری آشفتگی منفرد قضایای متعددی مربوط به پایداری وجود دارد که در این قسمت دو قضیه‌ای که در این رساله برای اثبات پایداری استفاده شده است را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۱: سیستم آشفته منفرد (۲-۴)- (۲-۵) را در نظر بگیرید و اجازه دهید $z = h(t,x)$ یک ریشه مجزا برای $g(t,x,z,0) = 0$ باشد. فرض کنید که شرایط زیر بازای تمام $(t,x,z-h(t,x),\varepsilon) \in [0,\infty) \times D_x \times D_y \times [0,\varepsilon_0]$ برای دامنه‌های $D_x \subset R^n$ و $D_y \subset R^m$ که شامل مبدأ نیز می‌باشد، برآورده شود[۴۳] :

الف) در هر مجموعه فشرده $D_x \times D_y$، توابع f، g و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها نسبت به (x,z,ε) و نیز مشتق جزئی مرتبه اول g نسبت به t پیوسته و کراندار باشد. $h(t,x)$ و $[\partial g(t,x,z,0)/\partial z]$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول کراندار نسبت به آرگومان‌های خود باشند. بعلاوه $[\partial f\ (t,x,h(t,x),0)/\partial x]$ بطور یکنواخت در t برای x لیپشیتز باشد و مقادیر اولیه $\xi(\varepsilon)$ و $\eta(\varepsilon)$ توابعی هموار از ε باشند.

ب) مبدا برای سیستم کاهش یافته (۲-۸) پایدار نمایی باشد. به عبارتی تابع لیاپانوف $V(t,x)$ برای سیستم کاهش یافته به ازای تمام $(t,x) \in [0,\infty) \times D_x$ وجود داشته باشد طوریکه

[1]. Boundary Layer

$$W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x), \qquad (۱۴-۲)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x,h(t,x),0) \le -W_3(x), \qquad (۱۵-۲)$$

که $W1$، $W2$، $W3$ توابع مثبت معین پیوسته روی D_x می‌باشند و همچنین c یک ثابت غیر منفی می‌باشد طوریکه $\{x \in D_x | W_1(x) \le c\}$ یک مجموعه فشرده از D_x باشد.

ج) مبدا برای سیستم لایه مرزی $\frac{dy}{d\tau} = g(t,x,y+h(t,x),0)$ بطور یکنواخت در (t,x) پایدار نمایی باشد.

اجازه دهید $R_y \subset D_y$ یک ناحیه جذب[1] برای $(\partial y/\partial \tau) = g(0,\xi_0,y + h(0,\xi_0),0)$ بوده و نیز Ω_y یک زیرمجموعه فشرده‌ای از R_y باشد. آنگاه برای هر مجموعه فشرده $\Omega_x \subset \{x \in D_x | W_2(x) \le \rho c, 0 < \rho < 1\}$، وجود دارد ثابت مثبت ε^* بطوریکه برای تمام $t \ge 0$، $\xi_0 \in \Omega_x$، $\eta_0 - h(0,\xi_0) \in \Omega_y$ و $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$، سیستم (۲-۴)- (۲-۵) دارای یک جواب منحصر به فرد$x(t,\varepsilon)$ و $z(t,\varepsilon)$ روی$[0,\infty)$ می‌باشد و روابط

$$x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon) \qquad (۱۶-۲)$$

$$z(t,\varepsilon) - h\big(t,\bar{x}(t)\big) - \hat{y}(t/\varepsilon) = O(\varepsilon) \qquad (۱۷-۲)$$

بطور یکنواخت برای $t \in [0,\infty)$ برقرار می‌باشد، که $\bar{x}(t)$ و $\hat{y}(\tau)$ جواب سیستم کاهش یافته و مدل لایه مرزی در (۲-۸) و (۲-۱۳) می‌باشد. همچنین برای هر $t_b > t_0$ وجود دارد $\varepsilon^{**} \le \varepsilon^*$ که

$$z(t,\varepsilon) - h\big(t,\bar{x}(t)\big) = O(\varepsilon) \qquad (۱۸-۲)$$

بطور یکنواخت به ازای $t \in [t_b,\infty)$ و $\varepsilon < \varepsilon^{**}$ برقرار می‌باشد. □

[1]Region of Attraction

قضیه فوق به قضیه Tikhonov معروف است.

قضیه ۲-۲: سیستم آشفته منفرد (۲-۴)- (۲-۵) را در نظر بگیرید و فرض کنید که شرایط زیر برای تمام $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times B_r \times [0, \varepsilon_0]$ برآورده شود[۱۳۱] :

الف) $f(t, 0,0, \varepsilon) = 0$ و $g(t, 0,0, \varepsilon) = 0$ می‌باشد.

ب) معادله $g(t, x, z, 0) = 0$ دارای ریشه مجزای $z = h(t, x)$ بوده طوریکه $h(t, 0) = 0$.

ج) توابع f، g ، h و مشتقات جزئی آنها تا مرتبه دوم برای $z - h(t, x) \in B_\rho$ کراندار باشند.

د) مبدا برای سیستم لایه مرزی $\frac{dv}{d\tau} = g(t, x, v + h(t, x), 0)$ بطور یکنواخت در (t, x) پایدار نمایی باشد.

و) مبدا برای سیستم کاهش یافته $\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$ پایدار نمایی باشد. به عبارتی تابع لیاپانوف $V(t, x)$ برای سیستم کاهش یافته وجود داشته باشد طوریکه:

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2 \qquad (۱۹-۲)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, h(t, x), 0) \leq -c_3\|x\|^2 \qquad (۲۰-۲)$$

$c_i, i = 1, 2, 3$ ثوابت مثبت می باشند. آنگاه وجود دارد ثابت مثبت ε^* طوریکه برای تمام $\varepsilon < \varepsilon^*$، مبدأ سیستم (۲-۴)- (۲-۵) پایدار نمایی می‌باشد. □

۲-۴- جداسازی پارامتر

لم ۲-۱: برای هر تابع پیوسته $f(x,y)$ با مقدار حقیقی که در آن $x \in R^m$ و $y \in R^n$ می‌باشد، توابع اسکالر هموار $a(x) \geq 0$، $b(y) \geq 0$، $c(x) \geq 1$ و $d(y) \geq 1$ وجود دارند طوریکه[۹] :

$$|f(x,y)| \leq a(x) + b(y) \qquad (۲۱-۲)$$

$$|f(x,y)| \leq c(x)d(y) \qquad (۲۲-۲)$$

اثبات: برای هر $(x,y) \in R^m \times R^n$ تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_x = \{(x,s) |\, s \in R^n, \|s\| \leq \|x\|\} \qquad (۲۳-۲)$$

$$\Omega_y = \{(t,y) |\, t \in R^m, \|t\| \leq \|y\|\} \qquad (۲۴-۲)$$

که Ω_x و Ω_y مجموعه‌های فشرده برای هر (x,y) ثابت می‌باشند. هنگامیکه $\|y\| \leq \|x\|$، نقطه (x,y) درون مجموعه Ω_x قرار می‌گیرد یا به عبارتی

$$|f(x,y)| \leq A(x), \qquad A(x) = \max_{(t,s)\in\Omega_x} |f(t,s)| \qquad (۲۵-۲)$$

و بطور مشابه هنگامیکه $\|x\| \leq \|y\|$ داریم:

$$|f(x,y)| \leq B(y), \qquad B(y) = \max_{(t,s)\in\Omega_y} |f(t,s)| \qquad (۲۶-۲)$$

با توجه به روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$|f(x,y)| \leq A(x) + B(y) \qquad (۲۷-۲)$$

با توجه به اینکه توابع $A(x)$ و $B(y)$ از لحاظ ساختاری پیوسته می‌باشند، می‌توان نتیجه گرفت که همیشه دو تابع هموار $a(x)$ و $b(y)$ وجود دارند که از آنها بزرگتر باشد. بنابراین رابطه (۲-۲۱) برقرار می‌شود.

همچنین با در نظر گرفتن $c(x) = 1 + a(x)$ و $d(y) = 1 + b(y)$ بدست می‌آید:

$$|f(x,y)| \leq a(x) + b(y) \leq c(x)d(y) \qquad (۲۸-۲)$$

که در نتیجه (۲-۲۲) اثبات می‌شود.

۲-۵- نتیجه گیری

در این فصل ابتدا ساختار کلی سیستم‌های فیدبک اکید و فیدبک محض و تفاوت آنها را مورد بررسی قرار دادیم. بعد از آن به توضیح تئوری آشفتگی منفرد که یکی از روش‌های مجانبی در حل مسائل آشفته منفرد می‌باشد پرداختیم. رفتار چند مقیاس زمانی مشخصه اصلی و بنیادی روش‌های آشفتگی منفرد است که سبب می‌شود مسئله آشفتگی منفرد از دو زیر سیستم مدل کاهش یافته و مدل لایه مرزی تشکیل شود. مدل کاهش یافته مربوط به متغیرهای حالت کند می‌باشد در حالیکه مدل لایه مرزی رفتار گذر سریع را تخمین می‌زند. در ادامه به بیان قضایای مربوط به تئوری آشفتگی منفرد که بر اساس همین دو مدل کاهش یافته و مدل لایه مرزی می‌باشد، پرداختیم و در آخر روش جداسازی پارامتر که مبنای طراحی کنترل کننده تطبیقی در این رساله می‌باشد را بررسی کردیم.

فصل سوم

کنترل سیستم‌های فیدبک محض در حضور

عدم قطعیت پارامتری غیرخطی

۳-۱- مقدمه

در این فصل به ارائه کنترل تطبیقی برای سیستم‌های فیدبک محض پارامتریزه شده بصورت غیرخطی پرداخته می‌شود. همانطور که در فصل اول اشاره شد این سیستم‌ها تنها در [۴۳] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

با استفاده از روش جداسازی پارامتر، تابع کران[1] ترم‌هایی که در آن پارامترهای نامعلوم به صورت غیرخطی وارد شده‌اند بدست می‌آید. این تابع کران شامل پارامترهای نامعلوم جدیدی است که به صورت خطی در آن وارد می‌شود. با بکارگیری این تابع در ترکیب طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی به عنوان جواب‌های یک سری معادلات دینامیکی در نظر گرفته می‌شوند و قانون بروزرسانی پارامترها می‌تواند مستقیماً با استفاده از تئوری لیاپانوف در طراحی پسگام بدون نیاز به طراحی پیشبین حالت بدست آید.

۳-۲- بیان مسئله و فرضیات

سیستم فیدبک محض زیر را که نسبت به پارامتر غیرخطی است را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}_i(t) = f_{i1}\big(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t)\big) + f_{i2}(\bar{x}_i(t), \theta), \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$\dot{x}_n(t) = f_{n1}(\bar{x}_n(t), u(t)) + f_{n2}(\bar{x}_n(t), \theta), \qquad (۳-۱)$$

که $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i$ و $u \in R$ به ترتیب متغیرهای حالت سیستم و ورودی کنترل می‌باشند. $\theta \in R^s$ برداری از ثابت‌های نامعلوم می‌باشد. $(\bar{x}_i, \theta) \in D_{\bar{x}_i} \times D_\theta$ ، $(\bar{x}_i, x_{i+1}) \in D_{\bar{x}_{i+1}}$ ، $(\bar{x}_n, u) \in D_{\bar{x}_n} \times D_u$ ، $D_{\bar{x}_i} \subset R^i$ ، $D_{\bar{x}_{i+1}} \subset R^{i+1}$ ، $D_{\bar{x}_n} \subset R^n$ ، $D_\theta \subset R^s$ و $D_u \subset R$ دامنه‌هایی هستند که شامل

[1] Bounding Function

مبدأ می‌باشند. $f_{i1}: D_{\bar{x}_{i+1}} \to R$ ، $f_{i2}: D_{\bar{x}_i} \times D_\theta \to R$ ، $f_{n1}: D_{\bar{x}_n} \times D_u \to R$ و $f_{n2}: D_{\bar{x}_n} \times D_\theta \to R$توابع غیرخطی هستند که نسبت به آرگومان‌های خود مشتق پذیر می‌باشند.

هدف کنترل، طراحی قانون کنترل $u(t)$ برای سیستم (۳-۱) می‌باشد طوریکه مبدأ سیستم پایدار مجانبی شود.

فرض ۳-۱: $(\partial f_i/\partial x_{i+1})$ و $(\partial f_n/\partial u)$ برای $\bar{x}_{i+1} \in \Omega_{\bar{x}_{i+1}} \subset D_{\bar{x}_{i+1}}$ و $(\bar{x}_n, u) \in \Omega_{\bar{x}_n,u} \subset D_{\bar{x}_n} \times D_u$ غیر صفر می‌باشد. به عبارتی دیگر، $(\partial f_i/\partial x_{i+1})$ و $(\partial f_n/\partial u)$ یا مثبت است و یا منفی. بدون از دست دادن کلیت مساله، فرض می‌کنیم که $(\partial f_i/\partial x_{i+1}) > 0$ و $(\partial f_n/\partial u) > 0$. این فرض، فرض قابل قبولی برای کنترل‌پذیری سیستم‌های فیدبک محض می‌باشد و همچنین در [۴۳] نیز در نظر گرفته شده است.

با توجه به لم ۲-۱ در فصل قبل، وجود دارد دو تابع یکنواخت $\gamma_i(\bar{x}_i) \geq 1$ و $\Lambda_i(\theta) \geq 1$ طوریکه:

$$|f_{i2}(\bar{x}_i, \theta)| \leq \gamma_i(\bar{x}_i)\Lambda_i(\theta) \qquad i = 1, \dots, n \tag{۲-۳}$$

فرض کنید $\Theta = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(\theta)$ یک ثابت نامعلوم جدید باشد. در نتیجه

$$|f_{i2}(\bar{x}_i, \theta)| \leq \gamma_i(\bar{x}_i)\Theta \qquad i = 1, \dots, n \tag{۳-۳}$$

برای غلبه بر مسئله پارامتریزه شدن غیرخطی، با استفاده از روش جداسازی پارامتر، به جای تخمین پارامتر نامعلوم $\theta \in R^s$ ، ثابت نامعلوم Θ که بصورت خطی وارد می‌شود، تخمین زده شده و به منظور طراحی کنترل تطبیقی، به جای $f_{i2}(.)$ و $f_{n2}(.)$ ، توابع کران $\gamma_i(.)$ و $\gamma_n(.)$ مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳-۳- طراحی کنترل کننده تطبیقی

در این قسمت قبل از پیشنهاد قانون کنترل ابتدا قضیه خود را مطرح کرده و سپس به اثبات آن می‌پردازیم. این قضیه در اثبات پایداری سیستم حلقه بسته مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه۳- ۱: سیستم غیرافاین در ورودی کنترل زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_i = f_i(x, u_i) + \phi_i^T(x)\theta \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{۴-۳}$$

که $x = [x_1, \ldots, x_n]^T \in B_r$[1]، $u_i \in R$ و $\theta \in R^s$ به ترتیب متغیرهای حالت، ورودی کنترل و بردار پارامترهای نامعلوم می‌باشند. $f_i: D_x \times D_{u_i} \to R$ و $\phi_i: D_x \to R^s$ توابع غیرخطی معینی هستند که بصورت پیوسته مشتق پذیر می‌باشند.

اگر کنترل تطبیقی و قوانین بروزرسانی پارامتر بصورت زیر طراحی شوند:

$$\varepsilon \dot{u}_i = g_i(x, u_i, \hat{\theta}) = -x_i - f_i(x, u_i) - \phi_i^T(x)\hat{\theta} \tag{۵-۳}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \phi(x) x \tag{۶-۳}$$

که در آن $\varepsilon \ll 1$ ، $\hat{\theta} \in R^s$ تخمین θ ، $\Gamma_{s\times s}$ ماتریس مثبت معین و $\phi_{s\times n} = [\phi_1, \ldots, \phi_n]$ می‌باشند، بعلاوه اگر شروط زیر نیز برآورده شود:

الف) $f(0,0) = 0$ ، $\phi(0) = 0$ و $g(0,0,\hat{\theta}) = 0$. که در آن f و g بصورت $f = [f_1, \ldots, f_n]^T$ و $g = [g_1, \ldots, g_n]^T$ تعریف می‌شود.

ب) معادله $g(x, u, \hat{\theta}) = 0$ دارای یک ریشه مجزای $u = h(x, \hat{\theta})$ باشد طوریکه $h(0, \hat{\theta}) = 0$. که در آن u و h بصورت $u = [u_1, \ldots, u_n]^T$ و $h = [h_1, \ldots, h_n]^T$ تعریف می‌شود.

ج) توابع f، ϕ، g، h و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها برای $y = u - h(x, \hat{\theta}) \in B_\rho$[2] کراندار باشند.

---

[1] $B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \le r\}$

[2] $B_\rho = \{y \in R^m \mid \|y\| \le \rho\}$

د) مبدا سیستم لایه مرزی

$$\frac{dy}{d\tau} = g\big(x, y + h(x,\hat{\theta}), \hat{\theta}\big) \qquad (۷-۳)$$

پایدار نمایی باشد.

ه) برای سیستم کاهش یافته

$$\dot{x} = f(x, h(x,\hat{\theta})) + \phi^T(x)\theta \qquad (۸-۳)$$

وجود داشته باشد تابع لیاپانوف $V\big(x,\tilde{\theta}\big)$ طوریکه $\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leq c_1\|x\|$. همچنین با انتخاب قانون بروزرسانی (۳-۶)، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\big[f(x, h(x,\hat{\theta})) + \phi^T(x)\theta\big] + \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}}\dot{\tilde{\theta}} \leq -c_1\|x\|^2, \qquad (۹-۳)$$

که $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ خطای تخمین بوده و نیز c_1 ثابتی مثبت در نظر گرفته می‌شود.

آنگاه وجود دارد ثابت مثبت ε^* بطوریکه برای تمام $\varepsilon < \varepsilon^*$، مبدا سیستم (۳-۵)-(۳-۶) پایدار مجانبی می‌باشد.

اثبات: با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف مثبت $V\big(x,\tilde{\theta}\big)$ برای سیستم کاهش یافته که $\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leq c_1\|x\|$ باشد و با انتخاب قانون بروزرسانی (۳-۶) نتیجه بدهد:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\big[f(x, h(x,\hat{\theta})) + \phi^T(x)\theta\big] + \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}}\dot{\tilde{\theta}} \leq -c_1\|x\|^2 \qquad (۱۰-۳)$$

مبدا سسیتم کاهش یافته برای $x \in B_{r_0}$ به ازای $r_0 \leq r$ پایدار مجانبی می‌شود.

همچنین وجود دارد تابع لیاپانوف $W(x,y)$ برای سیستم لایه مرزی که روابط زیر برای $y \in B_{\rho_0}$ به ازای $\rho_0 \leq \rho$ برقرار است.

$$c_2\|y\|^2 \leq W(x,y) \leq c_3\|y\|^2 \qquad (۱۱-۳)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} g\left(x, y + h\left(x, \hat{\theta}\right), \hat{\theta}\right) \leq -c_4 \|y\|^2 \tag{۱۲-۳}$$

$$\left\|\frac{\partial W}{\partial y}\right\| \leq c_5 \|y\|, \qquad \left\|\frac{\partial W}{\partial x}\right\| \leq c_6 \|y\|^2 \tag{۱۳-۳}$$

با تغییر متغیر

$$y = u - h\left(x, \hat{\theta}\right) \tag{۱۴-۳}$$

معادلات (۳-۵)-(۳-۶) به فرم زیر تبدیل می‌شوند.

$$\dot{x} = f(x, y + h(x, \hat{\theta})) + \phi^T(x)\theta \tag{۱۵-۳}$$

$$\varepsilon \dot{y} = g\left(x, y + h\left(x, \hat{\theta}\right), \hat{\theta}\right) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}[f(x, y + h(x, \hat{\theta})) + \phi^T(x)\theta] - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \tag{۱۶-۳}$$

با انتخاب تابع لیاپانوف ترکیبی $v\left(x, y, \hat{\theta}\right) = V\left(x, \tilde{\theta}\right) + W(x, y)$ برای سیستم (۳-۱۵)-(۳-۱۶) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\dot{v} = {} & \frac{\partial V}{\partial x}\left[f\left(x, y + h\left(x, \hat{\theta}\right)\right) + \phi^T(x)\theta\right] + \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial y} g\left(x, y + h\left(x, \hat{\theta}\right), \hat{\theta}\right) \\
& - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x}\left[f(x, y + h(x, \hat{\theta})) + \phi^T(x)\theta\right] \\
& - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial W}{\partial x}\left[f\left(x, y + h\left(x, \hat{\theta}\right)\right) + \phi^T(x)\theta\right] \\
= {} & \frac{\partial V}{\partial x}\left[f(x, h(x, \hat{\theta})) + \phi^T(x)\theta\right] + \frac{\partial V}{\partial x}\left[f(x, y + h(x, \hat{\theta})) - f(x, h(x, \hat{\theta}))\right] + \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} + \\
& \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial y} g\left(x, y + h(x, \hat{\theta}), \hat{\theta}\right) - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x}\left[f(x, h(x, \hat{\theta})) + \phi^T(x)\theta\right] \\
& - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x}\left[f\left(x, y + h\left(x, \hat{\theta}\right)\right) - f\left(x, h\left(x, \hat{\theta}\right)\right)\right] - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial W}{\partial x}\left[f\left(x, h\left(x, \hat{\theta}\right)\right) + \right. \\
& \left. \phi^T(x)\theta\right] + \frac{\partial W}{\partial x}\left[f(x, y + h(x, \hat{\theta})) - f(x, h(x, \hat{\theta}))\right]
\end{aligned} \tag{۱۷-۳}$$

اجازه دهید که تقریب‌های زیر را در نزدیکی مبدأ در نظر بگیریم.

$$\left\|f(x,y+h(x,\hat{\theta}))-f(x,h(x,\hat{\theta}))\right\| \le c_7\|y\| \qquad (۱۸-۳)$$

$$\left\|f(x,h(x,\hat{\theta}))+\phi^T(x)\theta\right\| \le c_8\|x\| \qquad (۱۹-۳)$$

$$\left\|\frac{\partial h}{\partial \hat{\theta}}\right\| \le c_9\|x\|, \qquad \left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\| \le c_{10} \qquad (۲۰-۳)$$

در تقریب فوق از این واقعیت که $f(x,h(x,\hat{\theta}))$ و $h(x,\hat{\theta})$ به ازای هر $\hat{\theta}$، در $x=0$ صفر می‌شود استفاده شده است. با توجه به قانون تطبیق در (۳-۶)، از آنجایی که ϕ تابعی مشتق‌پذیر می‌باشد بنابراین $\left\|\dot{\hat{\theta}}\right\| \le c_{11}\|x\|^2$.

با استفاده از این تقریب‌ها و همچنین روابط مربوط به توابع V و W، مشتق v بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\dot{v} \le & -c_1\|x\|^2-\frac{c_4}{\varepsilon}\|y\|^2+c_5c_7c_{10}\|y\|^2 + (c_7+c_5c_8c_{10})\|x\|\|y\| \\ & +c_6c_8\|x\|\|y\|^2+c_5c_9c_{11}\|x\|^3\|y\|+c_6c_7\|y\|^3 \qquad (۲۱-۳)\end{aligned}$$

c_1 و c_4 ثوابت مثبت و c_2،c_3، c_5 تا c_{11} ثوابت غیرمنفی می‌باشند. برای تمام $|x| \le r_0$ و $|y| \le \rho_0$، نامساوی فوق به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{v} \le & -c_1\|x\|^2-\frac{c_4}{\varepsilon}\|y\|^2+c_5c_7c_{10}\|y\|^2 + (c_7+c_5c_8c_{10})\|x\|\|y\| \\ & +c_6c_8\rho_0\|x\|\|y\|+c_5c_9c_{11}{r_0}^2\|x\|\|y\|+c_6c_7\rho_0\|y\|^2 \\ \le & -c_1\|x\|^2-\frac{c_4}{\varepsilon}\|y\|^2+c_{12}\|y\|^2+2c_{13}\|x\|\|y\| \\ = & -\begin{bmatrix}\|x\| \\ \|y\|\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}c_1 & -c_{13} \\ -c_{13} & (c_4/\varepsilon)-c_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|x\| \\ \|y\|\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۳)\end{aligned}$$

در رابطه فوق $c_{12}=c_5c_7c_{10}+c_6c_7\rho_0$ و $c_{13}=c_7+c_5c_8c_{10}+c_6c_8\rho_0+c_5c_9c_{11}{r_0}^2$ تعریف می‌شود. فرم مربعی در رابطه (۳-۲۲) هنگامی منفی معین است که

$$c_1(c_4/\varepsilon-c_{12}) > {c_{13}}^2 \qquad (۲۳-۳)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\varepsilon < c_1 c_4/(c_1 c_{12} + {c_{13}}^2) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^*, \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

از رابطه (۳-۲۴) این استنباط می‌شود که وجود دارد $\varepsilon^* > 0$ بطوریکه برای تمام $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$، مبدأ سیستم (۳-۱۵)-(۳-۱۶) پایدار مجانبی می‌باشد. از آنجایی که $y = u - h(x, \hat{\theta})$ و از طرفی در شرط (ب)، $h(0, \hat{\theta}) = 0$ را فرض کرده‌ایم بنابراین پایداری مجانبی مبدأ سیستم (۳-۱۵)-(۳-۱۶)، پایداری مجانبی را برای مبدأ (۳-۵)-(۳-۶) نتیجه می‌دهد که در این جا اثبات قضیه کامل می‌شود.□

تذکر۳- ۱: شرط (د) در قضیه ۳-۱ می‌تواند با استفاده از خطی‌سازی بطور محلی اثبات شود [۱۳۱]. نشان داده می‌شود که اگر وجود داشته باشد $\varphi_0 > 0$، طوریکه ماتریس ژاکوبین $(\partial g/\partial v)$ شرط مقدار ویژه $\mathrm{Re}\,[\lambda\{\partial g(t, x, v + h(t, x), 0)/\partial v\}] \leq -\varphi_0 < 0$ را به ازای $x \in D_x$ برآورده کند، آنگاه شرط (د) ارضا میشود.

در این قسمت کنترل تطبیقی با استفاده از ترکیب روش پسگام، تئوری آشفتگی منفرد و روش جداسازی پارامتر طراحی می‌شود. پروسه طراحی کنترل مشابه طراحی پسگام شامل n مرحله می‌باشد. در هر مرحله از طراحی با بکارگیری جداسازی مقیاس زمانی، قوانین کنترل مجازی $\alpha_i, i = 1, \ldots, n-1$ بدست می‌آید. همچنین بوسیله روش جداسازی پارامتر، به جای استفاده از ترمی که در آن پارامترها بصورت غیرخطی وارد می‌شوند، تابع کران آن ترم مورد استفاده قرار می‌گیرد. سرانجام در مرحله آخر طراحی، کنترل حقیقی u بعلاوه قانون بروزرسانی پارامترها بدست می‌آید. در ادامه به توضیح روند طراحی می پردازیم. متغیرهای جدید z_1 و z_i را بصورت $z_1 = x_1$ و $z_i = x_i - \alpha_{i-1},\ i = 2, \ldots, n$ تعریف می‌کنیم.

گام اول: نخست با مشتق گیری از z_1 و با در نظر گرفتن x_2 به عنوان متغیر کنترل، بدست می‌آید:

$$\dot{z}_1(t) = f_{11}(x_1, z_2 + \alpha_1) + f_{12}(x_1, \theta), \qquad (۲۵-۳)$$

اکنون α_1 به عنوان اولین کنترل مجازی میتواند از حل معادله زیر بدست آید:

$$f_{11}(x_1, z_2 + \alpha_1) + f_{12}(x_1, \theta) = -k_1 z_1 \qquad (۲۶-۳)$$

که منجر به پایداری مجانبی دینامیک حلقه بسته $\dot{z}_1 = -k_1 z_1$ برای زیر سیستم اول میشود. $k_1 > 0$ اولین بهره کنترل می‌باشد. اما در (۳-۲۶) بدلیل خاصیت غیرافاین بودن توابع غیرخطی، α_1 بطور صریح نمی‌تواند محاسبه شود. با توجه به دینامیک سریع بر اساس جداسازی مقیاس زمانی در تئوری آشفتگی منفرد، یک کنترل مجازی تقریبی به صورت زیر طراحی می‌شود:

$$\varepsilon_1 \dot{\alpha}_1 = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1\left(\bar{z}_2, \alpha_1, \hat{\theta}\right), \qquad \alpha_1(0) = \alpha_{1,0} \qquad (۲۷-۳)$$

که در آن، $\varepsilon_1 \ll 1$، $\bar{z}_2 = [z_1, z_2]^T$ و $Q_1(t, \bar{z}_2, \alpha_1)$ به فرم

$$Q_1\left(\bar{z}_2, \alpha_1, \hat{\theta}\right) = k_1 z_1 + f_{11}(x_1, z_2 + \alpha_1) + \mathrm{sat}(z_1/\mu)\gamma_1(x_1)\hat{\theta} \qquad (۲۸-۳)$$

بیان می‌شود که $\gamma_1(z_1)$ تابعی اسکالر می‌باشد. همچنین $\hat{\theta}$ تخمین پارامتر θ و $\mu \ll 1$ یک ثابت مثبت می‌باشد.

اجازه دهید $\alpha_1 = h_1(\bar{z}_2, \hat{\theta})$ ریشه مجزایی برای $Q_1(\bar{z}_2, \alpha_1, \hat{\theta}) = 0$ باشد. به این ترتیب سیستم کاهش یافته بصورت

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + f_{12}(x_1, \theta) - \mathrm{sat}(z_1/\mu)\gamma_1(x_1)\hat{\theta}, \qquad z_1(0) = z_{1,0} \qquad (۲۹-۳)$$

تعریف می‌شود و سیستم لایه مرزی با معادله (۳-۳۰) نشان داده میشود:

$$\frac{dy_1}{d\tau_1} = -sign\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1\left(\bar{z}_2, y_1 + h_1\left(\bar{z}_2, \hat{\theta}\right), \hat{\theta}\right) \qquad (۳۰-۳)$$

که در آن $y_1 = \alpha_1 - h_1(\bar{z}_2, \hat{\Theta})$ و $\tau_1 = t/\varepsilon_1$ می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۳-۲۹)، نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_1 \leq -k_1 z_1^2 + |z_1||f_{12}(x_1,\theta)| - z_1 \mathrm{sat}(z_1/\mu)\gamma_1(x_1)\hat{\Theta} \leq -k_1 z_1^2 + |z_1|\gamma_1(x_1)\tilde{\Theta} \quad (۳۱\text{-}۳)$$

که در رابطه فوق $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ تعریف شده و همچنین برای $\mu \ll 1$، $\mathrm{sat}(z_1/\mu)$ به $\mathrm{sign}(z_1)$ تقریب زده می‌شود.

گام $(i = 2, \ldots, n-1)$: با مشتق گیری از z_i بدست می‌آید:

$$\dot{z}_i = f_{i1}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t)) + f_{i2}(\bar{x}_i(t), \theta) - \dot{\alpha}_{i-1} \quad (۳۲\text{-}۳)$$

مشابه گام اول، بایستی α_i را طوری تعیین کنیم تا در رابطه

$$f_{i1}(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) + f_{i2}(\bar{x}_i, \theta) - \dot{\alpha}_{i-1} = -k_i z_i \quad (۳۳\text{-}۳)$$

صدق کند. $k_i > 0$ بهره کنترلی مثبت می‌باشد. در این مرحله، مشتق زمانی کنترل مجازی $\dot{\alpha}_{i-1}$ به چشم می‌خورد که در مرحله قبل با استفاده از رابطه $\dot{\alpha}_{i-1} = -sign\left(\frac{\partial Q_{i-1}}{\partial \alpha_{i-1}}\right) Q_{i-1}(\bar{z}_i, \alpha_{i-1}, \hat{\Theta})/\varepsilon_{i-1}$ محاسبه شده است که در نتیجه از "انفجار پیچیدگی" ناشی از محاسبه این ترم جلوگیری می‌شود.

جهت غلبه بر خاصیت غیرافاین، i امین کنترل مجازی تقریبی نیز می‌تواند با استفاده از دینامیک سریع در رابطه زیر بدست آید:

$$\varepsilon_i \dot{\alpha}_i = -sign\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, \hat{\Theta}\right), \qquad \alpha_i(0) = \alpha_{i,0} \quad (۳۴\text{-}۳)$$

که $\varepsilon_i \ll 1$، $\bar{z}_i = [z_1, \ldots, z_{i+1}]^T$ و $Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, \hat{\Theta}\right)$ به فرم

$$Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, \hat{\Theta}\right) = k_i z_i + f_{i1}(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) + sat(z_i/\mu)\gamma_i(\bar{x}_i)\hat{\Theta} - \dot{\alpha}_{i-1} \quad (۳۵\text{-}۳)$$

بیان می‌شود. با فرض اینکه $\alpha_i = h_i(\bar{z}_{i+1}, \hat{\Theta})$ یک ریشه مجزا برای $Q_i(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, \hat{\Theta}) = 0$ باشد، سیستم کاهش یافته بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_i = -k_i z_i + f_{i2}(\bar{x}_i, \theta) - sat(z_i/\mu)\gamma_i(\bar{x}_i)\hat{\Theta}, z_i(0) = z_{i,0} \qquad (۳۶-۳)$$

و سیستم لایه مرزی با معادله

$$\frac{dy_i}{d\tau_i} = -sign\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, y_i + h_i(\bar{z}_{i+1}, \hat{\Theta}), \hat{\Theta}\right) \qquad (۳۷-۳)$$

نشان داده می‌شود که $y_i = \alpha_i - h_i(\bar{z}_{i+1}, \hat{\Theta})$ و $\tau_i = t/\varepsilon_i$ می‌باشد. در این مرحله با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف بصورت $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۳-۳۶)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\le -\sum_{j=1}^{i-1}(-k_j z_j^2 + |z_j|\gamma_j(\bar{x}_j)\tilde{\Theta}) - k_i z_i^2 + |z_i||f_{i2}(\bar{x}_i, \theta)| - z_i sat(z_i/\mu)\gamma_i(\bar{x}_i)\hat{\Theta} \\ &\le -\sum_{j=1}^{i}(-k_j z_j^2 + |z_j|\gamma_j(\bar{x}_j)\tilde{\Theta}) \end{aligned} \qquad (۳۸-۳)$$

گام n: در آخرین مرحله، ورودی کنترل حقیقی u ظاهر می‌شود که هدف اصلی بدست آوردن این کنترل می‌باشد. با مشتق گیری از z_n، بدست می‌آید:

$$\dot{z}_n = f_{n1}(\bar{x}_n, u) + f_{n2}(\bar{x}_n, \theta) - \dot{\alpha}_{n-1} \qquad (۳۹-۳)$$

اکنون یک کنترل حقیقی تقریبی با استفاده از جداسازی مقیاس زمانی جهت برآورده کردن رابطه

$$f_{n1}(\bar{x}_n, u) + f_{n2}(\bar{x}_n, \theta) - \dot{\alpha}_{n-1} = -k_n z_n \qquad (۴۰-۳)$$

مطابق معادله زیر ارائه می‌شود:

$$\varepsilon_n \dot{u} = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial \alpha_n}\right) Q_n(\bar{z}_n, u, \hat{\Theta}), \qquad u(0) = u_0 \qquad (۴۱-۳)$$

که $\varepsilon_n \ll 1$ ، $\bar{z}_n = [z_1, \dots, z_n]^T$ و $Q_n(\bar{z}_n, u, \hat{\Theta})$ به فرم زیر بیان می‌شود:

$$Q_n(\bar{z}_n, u, \hat{\Theta}) = k_n z_n + f_{n1}(\bar{x}_n, u) + \mathrm{sat}(z_n/\mu)\gamma_n(\bar{x}_n)\hat{\Theta} + \dot{\alpha}_{n-1} \qquad (۴۲-۳)$$

که در آن $k_n > 0$ بهره کنترل مثبت می‌باشد.

با فرض اینکه $u = h_n(\bar{z}_n, \hat{\Theta})$ ریشه مجزایی برای $Q_n(\bar{z}_n, u, \hat{\Theta}) = 0$ باشد، سیستم کاهش یافته بصورت

$$\dot{z}_n = -k_n z_n + f_{n2}(\bar{x}_n, \theta) - sat(z_n/\mu)\gamma_n(\bar{x}_n)\hat{\Theta}, \qquad z_n(0) = z_{n,0} \qquad (۴۳-۳)$$

تعریف می‌شود و سیستم لایه مرزی نیز به فرم معادله زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{dy_n}{d\tau_n} = -sign\left(\frac{\partial Q_n}{\partial \alpha_n}\right) Q_n\left(\bar{z}_n, y_n + h_n(\bar{z}_n, \hat{\Theta}), \hat{\Theta}\right) \qquad (۴۴-۳)$$

که در آن $y_n = u - h_n(\bar{z}_n, \hat{\Theta})$ و $\tau_n = t/\varepsilon_n$ تعریف می‌شود. با انتخاب تابع لیاپانوف $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^2$ ، داریم:

$$\dot{V}_n \le \left(\sum_{j=1}^{n-1} -k_j z_j^2 + |z_j|\gamma_j(\bar{x}_j)\tilde{\Theta}\right) - k_n z_n^2 + |z_n||f_{n2}(\bar{x}_n, \theta)| - z_n \mathrm{sat}(z_n/\mu)\gamma_n(\bar{x}_n)\hat{\Theta} - \tilde{\Theta}\dot{\hat{\Theta}}$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} -k_j z_j^2 + \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|\,\gamma_j(\bar{x}_j) - \dot{\hat{\Theta}}\right)\tilde{\Theta} \qquad (۴۵-۳)$$

سرانجام می‌توان با طراحی قانون بروزرسانی به صورت

$$\dot{\hat{\Theta}} = \sum_{j=1}^{n}|z_j|\,\gamma_j(\bar{x}_j) \qquad (۴۶-۳)$$

ترم $\tilde{\Theta}$ را حذف کرد. بنابراین مشتق V_n بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{V}_n \le \sum_{j=1}^{n} -k_j z_j^2 \qquad (۴۷-۳)$$

این تابع لیاپانوف پایداری مجانبی مبدأ را برای سیستم کاهش یافته (۳-۲۹)، (۳-۳۶) و (۳-۴۳) تضمین می‌کند.

تذکر ۳-۲: در [۴۳] ابتدا یک پیشبین حالت جهت استخراج قانون تطبیق پارامترهای نامعلوم طراحی شده و سپس ترکیب روش پسگام و جداسازی مقیاس زمانی جهت استنتاج کنترل‌های مجازی/حقیقی به این پیشبین حالت اعمال می‌شود. این امر منجر به پایداری نمایی مبدأ سیستم کاهش یافته می‌شود که خود یکی از شرایط قضیه Tikhonov می‌باشد. بنابراین این قضیه می‌تواند مستقیما برای اثبات پایداری استفاده شود. در این رساله بر خلاف [۴۳]، از آنجایی که طراحی پیشبین حالت حذف شده است، ترکیب روش پسگام و جداسازی مقیاس زمانی جهت بدست آوردن کنترل‌های مجازی/حقیقی به خود سیستم اولیه اعمال می‌شود. به این ترتیب همانطور که در قسمت قبل نشان داده شد، پایداری مجانبی مبدأ سیستم کاهش یافته نتیجه می‌شود و پایداری نمایی آن را نتیجه نمی‌دهد. بنابراین قضیه Tikhonovرا نمی‌توان برای اثبات پایداری بکار برد.

۳-۴- تحلیل پایداری

برای اثبات پایداری سیستم حلقه بسته، قضیه۳-۲ با استفاده از قضیه ۳-۱ بصورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۳-۲: سیستم فیدبک محض (۳-۱) و کنترل‌های (۳-۲۷)، (۳-۳۴) و (۳-۴۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط زیر برای تمام $(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i - h_i(\bar{z}_{i+1}, \hat{\theta})) \in D_{\bar{z}_{i+1}} \times D_{y_i}$ برای دامنه‌های $D_{\bar{z}_{i+1}} \subset R^{i+1}$ و $D_{y_i} \subset R$ که شامل مبدا می‌باشد و در آن $i = 1, \dots, n$، $\bar{z}_{n+1} = \bar{z}_n$، $D_{\bar{z}_{n+1}} = D_{\bar{z}_n}$ و $\alpha_n = u$ تعریف می‌شود، برآورده شود:

۱) $f_{i1}(0,0) = 0$، $f_{i2}(0,\theta) = 0$، $Q_i(0,0,\hat{\Theta}) = 0$.

۲) روی هر مجموعه فشرده‌ای از $D_{\bar{z}_{i+1}} \times D_{y_i}$، معادله $Q_i(\bar{z}_{i+1},\alpha_i,\hat{\Theta}) = 0$ دارای ریشه مجزای $\alpha_i = h_i(\bar{z}_{i+1},\hat{\Theta})$ باشد طوریکه $h_i(0,\hat{\Theta}) = 0$.

۳) توابع Q_i، h_i و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها نسبت به آرگومان‌هایشان کراندار باشد.

۴) $(\bar{z}_{i+1}, y_i, , \hat{\Theta}) \mapsto (\partial Q_i/\partial\alpha_i)(\bar{z}_{i+1}, y_i + h_i(\bar{z}_{i+1},\hat{\Theta}))$ برای تمام $\bar{z}_{i+1} \in D_{\bar{z}_{i+1}}$ دارای کران پایین مثبت باشد.

آنگاه مبدا سیستم‌های (۳-۳۰)، (۳-۳۷) و (۳-۴۴) پایدار نمایی بوده و همچنین وجود دارد ثابت مثبت ε^* بطوریکه برای تمام $\varepsilon < \varepsilon^*$، مبدا سیستم (۳-۱) پایدار مجانبی می باشد.

اثبات: بایستی شرایط قضیه ۳-۲ شرایط (الف)-(ه) قضیه ۳-۱ را ارضا کنند. اولا شرایط (۱)-(۳) مستقیما شرایط (الف)-(ج) را برآورده می‌کنند. ثانیا با استفاده از فرض ۳-۱، برآورده شدن شرط (د) را نشان می‌دهیم. پایداری نمایی سیستم‌های (۳-۳۰)، (۳-۳۷) و (۳-۴۴)، بوسیله خطی سازی حول y_i بطور محلی اثبات می‌شود. با در نظر گرفتن فرض ۳-۱ و شرط ۴، نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f_{i1}}{\partial \alpha_i}\right) > 0 \qquad (۴۸-۳)$$

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial \mathrm{Q_n}}{\partial \mathrm{u}}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial \mathrm{f_{n1}}}{\partial \mathrm{u}}\right) > 0 \qquad (۴۹-۳)$$

که این دلالت بر پایداری نمایی محلی مبدأ برای سیستم لایه مرزی دارد. در نهایت بدلیل اینکه در قسمت قبل پایداری مجانبی مبدا سیستم کاهش یافته بدست آمد، بنابراین شرط (ه) از قضیه ۳-۱ نیز ارضا می‌شود و در نتیجه قضیه ۳-۱ را می‌توان بکار برد. بنابراین وجود دارد ثابت مثبت ε^* بطوریکه برای تمام $\varepsilon < \varepsilon^*$، مبدأ سیستم‌های (۳-۲۵)، (۳-۲۷)، (۳-۳۲)، (۳-۳۴)، (۳-۳۹) و (۳-۴۱) پایدار مجانبی می‌شود یعنی z_i

و α_i به صفر همگرا می‌شوند و از آنجایی که $x_1 = z_1$ و $x_i = z_i + \alpha_{i-1}$ در نتیجه مبدا سیستم فیدبک محض (۳-۱) پایدار مجانبی می‌شود. □

۳-۵- نوآوری طرح کنترل پیشنهادی

۱) در این فصل، طراحی کنترل کننده تطبیقی برای سیستم های فیدبک محض کاملاً غیرافاین در حضور عدم قطعیت پارامتری مورد مطالعه قرار گرفت. این پارامترهای نامعلوم به صورت غیرخطی وارد شده و متعلق به مجموعه فشرده نامعینی می‌باشند. به عبارتی دیگر، هیچ اطلاعات قبلی راجع به کران این پارامترها مورد نیاز نیست.

۲) کنترل تطبیقی ارائه شده دارای مرتبه مینیمم[1] می‌باشد یعنی صرف نظر از تعداد پارامترهای نامعلوم، مرتبه آن یک می‌باشد.

۳) پارامترهای نامعلومی که در هر زیرسیستم (۳-۱) وارد می‌شوند به صورت برداری از ثوابت در نظر گرفته شده‌اند یعنی $\theta \in R^s$ در حالیکه در [۴۳] یک اسکالر می‌باشند.

۴) قضیه‌ای جدید در تئوری آشفتگی منفرد برای پایداری حلقه بسته این سیستم‌ها ارائه گردید.

۵) قابل توجه‌ترین قسمت در طرح پیشنهادی این است که قانون تطبیق پارامترهای نامعین بدون نیاز به طراحی پیشبین حالت استخراج می‌شود که این خود منجر به کاهش چشمگیری در حجم محاسبات کنترل کننده و نیز پیچیدگی که در [۴۳] وجود دارد، می‌شود.

۳-۶- نتایج شبیه سازی

[1]. Minimum Order

مثال ۳-۱: سیستم فیدبک محض پارامتریزه بصورت غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = 0.4\, x_2 + \frac{{x_2}^3}{2} + \ln(1 + (\theta_1 x_1)^2)$$

$$\dot{x}_2 = {x_2}^2 \mathrm{u} + \tanh(u) + \frac{\theta_2 {x_1}^2}{(1+\theta_1 x_2)^2 + {x_2}^2} \qquad (۵۰\text{-}۳)$$

θ_1 و θ_2 پارامترهایی هستند که بصورت غیرخطی وارد شده‌اند و در این شبیه سازی برابر $\theta_1 = 2.5$ و $\theta_2 = 1.6$ فرض شده‌اند. هدف کنترل، طراحی قانون کنترل $u(t)$ می‌باشد طوریکه مبدا سیستم فوق پایدار مجانبی شود.

برای بدست آوردن تابع کران ترمی که نسبت به پارامتر غیرخطی است، یک محاسبه مستقیم نتیجه می‌دهد که $\left|\frac{\theta_2 {x_1}^2}{(1+\theta_1 x_2)^2 + {x_2}^2}\right| \le |\theta_2|(1 + {\theta_1}^2){x_1}^2$. از طرفی با استفاده از قضیه مقدار میانگین $|\ln(1 + (\theta_1 x_1)^2)| \le |x_1||\theta_1|$ بدست می‌آید. در نتیجه این توابع را بصورت $\gamma_1(x_1) = |x_1|$ ، $\gamma_2(x_1, x_2) =$ ${x_1}^2$ و پارامتر ثابت را در جداسازی پارامتر بصورت $\Theta = |\theta_1| + |\theta_2|(1 + {\theta_1}^2)$ تعریف می‌کنیم. مقادیر اولیه بصورت $x_1(0) = 1$ ، $x_2(0) = -2$ ، $u(0) = 0$ ، $\hat{\Theta}(0) = 1$ و همچنین پارامترهای طراحی بصورت $k_1 = k_1 = 2$، $\mu = 0.00001$ و $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$ در نظر گرفته شده‌اند.

سیگنال کنترل بوسیله دینامیک‌های سریع زیر محاسبه می‌شود.

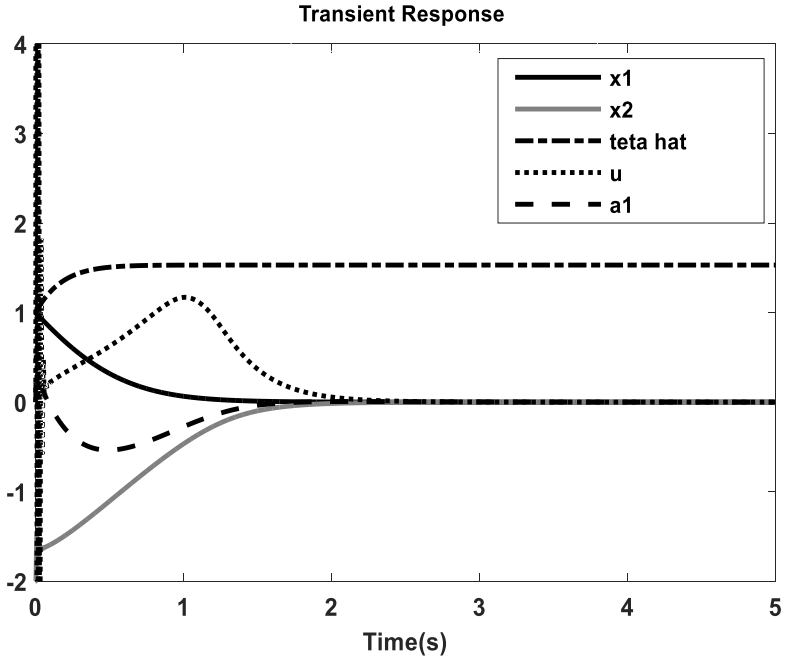
$$0.01\dot{\alpha}_1 = -sign\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1\left(z_1, z_2, \alpha_1, \hat{\Theta}\right), \qquad (۵۱\text{-}۳)$$

$$0.01\dot{u} = -sign\left(\frac{\partial Q_2}{\partial u}\right) Q_2(z_1, z_2, u, \hat{\Theta}), \qquad (۵۲\text{-}۳)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = |z_1|\, \gamma_1(x_1) + |z_2|\, \gamma_2(x_1, x_2), \qquad (۵۳\text{-}۳)$$

که Q_1 و Q_2 به ترتیب در روابط (۳-۲۸) و (۳-۴۲) آورده شده‌اند.

نتایج شبیه‌سازی در شکل (۳-۱) عملکرد دینامیکی، کنترل حقیقی $u(t)$ و همچنین تخمین پارامتر سیستم حلقه بسته را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود علیرغم وجود پارامتریزه شدن غیرخطی و خاصیت غیرافاین بودن سیستم، پایداری سیستم همراه با عملکرد و کنترل مناسب و رضایتبخش حاصل شده است.



شکل (۳-۱) پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته

مثال ۳-۲: جهت مقایسه کنترل پیشنهادی در این فصل با طرح پیشنهادی در [۴۳] ، سیستم شبیه-سازی شده در [۴۳] را مطابق زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = \sin(x_1)\,|x_1|^{2\theta_1} + x_2 + \frac{{x_2}^3}{2},$$

$$\dot{x}_2 = x_1(1+{x_2}^2)^{1/3}{\theta_2}^{x_1} + {x_2}^2 u + \frac{u^3}{7} + 0.01u$$

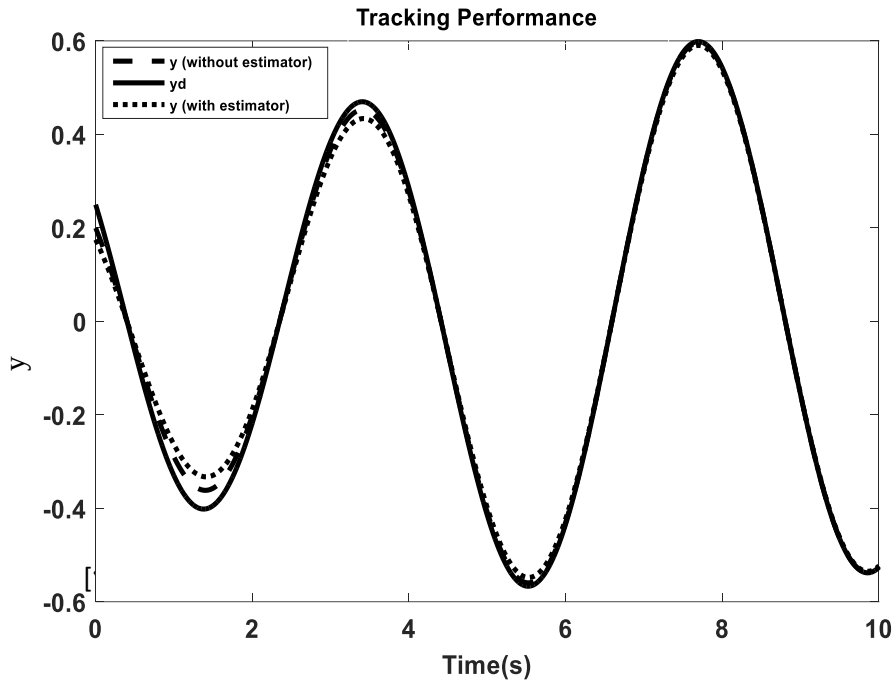
$$y = x_1 \qquad (۵۴-۳)$$

هدف، پیشنهاد سیگنال کنترل u است به گونه‌ای که خروجی سیستم، سیگنال مرجع $y_d = \cos(1.5t + \pi/3) + 0.1\sin(t)$ را ردگیری کند. مقادیر θ_1، θ_2 و شرایط اولیه مانند [۴۳]، همچنین

$\hat{\theta}(0) = 1$ ، $k_1 = k_2 = 2$ ، $\mu = 0.00001$ ، $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$ ، $\gamma_1(x_1) = {x_1}^2 e^{(1/4)ln^2(1+{x_1}^2)}$

در نظر گرفته شده است.

با توجه به اینکه $x_1(1+{x_2}^2)^{1/3}{\theta_2}^{x_1} \leq (1/2)(1+(1/3){x_1}^2)^2 e^{{x_1}^2/2}\Theta + (2/3){x_2}^2 + (1/2){x_1}^2$ در نتیجه $\gamma_2(x_1, x_2) = (1/2)(1+(1/3){x_1}^2)^2 e^{{x_1}^2/2}$ و بایستی ترم $(2/3){x_2}^2 + (1/2){x_1}^2$ را در $Q_2(\bar{z}_n, u, \hat{\theta})$ لحاظ کرد.



شکل (۳-۲) مقایسه عملکرد ردگیری کنترل پیشنهادی با کنترل طراحی شده در [۴۳]

نتایج شبیه‌سازی در شکل (۳-۲) نشان می‌دهد که در مقایسه با [۴۳]، دقت ردگیری در کنترل پیشنهادی مانند [۴۳] می‌باشد با این تفاوت که به جهت حذف پیشبین حالت، تعداد متغیرهای حالت و در نتیجه پیچیدگی طراحی کمتر است.

۳-۷- نتیجه‌گیری

در این فصل طراحی یک کنترل کننده تطبیقی برای سیستم‌های فیدبک محض کاملاً غیرافاین در حضور عدم قطعیت پارامتری غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت. با بکارگیری روش جداسازی پارامتر در ترکیب طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی و همچنین قانون بروزرسانی پارامترهای نامعلوم را بدست آوردیم. بوسیله این کنترل پیشنهادی پایداری مجانبی مبدا برای این سیستم‌ها بدست آمد و اثبات پایداری را با ارائه یک قضیه جدید در تئوری آشفتگی منفرد انجام دادیم. نتایج شبیه‌سازی بیانگرکارایی مناسب قانون کنترل پیشنهادی علیرغم سادگی آن است.

فصل چهارم

کنترل سیستم‌های فیدبک محض در حضور عدم قطعیت پارامتری خطی و غیرخطی

۴-۱- مقدمه

کلاس محدودی از سیستم‌های فیدبک محض پارامتریزه شده بصورت خطی به فرم

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + \phi_i{}^T\big(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t)\big)\theta \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$\dot{x}_n(t) = \phi_0(\bar{x}_n(t)) + \phi_n{}^T\big(\bar{x}_n(t)\big)\theta + \beta_0(\bar{x}_n(t))u \qquad (۱-۴)$$

در [۱] و [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته‌اند و همانطور که مشاهده می‌شود u در معادله آخر بصورت خطی وارد می‌شود. همچنین استفاده از طراحی پسگام معمولی و تکرار مشتقات کنترل‌های مجازی منجر به پیچیدگی بسیار بالای محاسبات می‌شود.

در این فصل، طیف سیستم‌های بررسی شده در فصل قبل را با اعمال عدم قطعیت پارامتری خطی گسترش می‌دهیم. به منظور طراحی کنترل تطبیقی، کنترل پیشنهاد شده در فصل سوم را تعمیم می‌دهیم با این تفاوت که در خصوص پارامترهایی که بصورت خطی وارد می‌شوند ایده استفاده از تابع مثبت تخمین پارامترها مطرح می‌گردد. کنترل پیشنهادی می‌تواند بر مشکل " انفجار پیچیدگی" موجود در طراحی پسگام معمولی برای این سیستم‌ها غلبه کند.

۴-۲- بیان مسئله و فرضیات

سیستم فیدبک محض زیر را که بصورت خطی/ غیرخطی پارامتریزه شده است را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}_i(t) = f_{i1}\big(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t)\big) + f_{i2}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t), \theta) + f_{i3}{}^T\big(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t)\big)\theta,$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$\dot{x}_n(t) = f_{n1}(\bar{x}_n(t), u(t)) + f_{n2}(\bar{x}_n(t), u(t), \theta) + f_{n3}{}^T\big(\bar{x}_n(t), u(t)\big)\theta, \qquad (۲-۴)$$

که $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i$ و $u \in R$ به ترتیب متغیرهای حالت سیستم و ورودی کنترل می‌باشند. $\theta \in R^s$ برداری از ثابت‌های نامعلوم می‌باشد. $(\bar{x}_{i+1}, \theta) \in D_{\bar{x}_{i+1}} \times D_\theta$، $(\bar{x}_i, x_{i+1}) \in D_{\bar{x}_{i+1}}$، $(\bar{x}_n, u) \in D_{\bar{x}_n} \times D_u$، $D_{\bar{x}_i} \in R^i$، $D_{\bar{x}_{i+1}} \in R^{i+1}$، $D_{\bar{x}_n} \in R^n$، $D_\theta \in R^s$ و $D_u \in R$ دامنه هایی هستند که شامل مبدا می‌باشند. $f_{i1}: D_{\bar{x}_{i+1}} \to R$ ، $f_{i2}: D_{\bar{x}_{i+1}} \times D_\theta \to R$ ، $f_{i3}: D_{\bar{x}_{i+1}} \to R^s$ ، $f_{n1}: D_{\bar{x}_n} \times D_u \to R$ ، $f_{n2}: D_{\bar{x}_n} \times D_u \times D_\theta \to R$ و $f_{n3}: D_{\bar{x}_n} \times D_u \to R^s$ توابع غیرخطی هستند که نسبت به آرگومان‌های خود مشتق‌پذیر می‌باشند.

تذکر ۴-۱: همانطور که در سیستم (۴-۲) مشاهده می‌شود، f_{i3} و f_{n3} نه تنها توابعی از $\bar{x}_i$ و $\bar{x}_n$ هستند بلکه می‌توانند به ترتیب توابعی از x_{i+1} و u نیز باشند. همچنین f_{i2} و f_{n2} نه تنها توابعی از $\bar{x}_i$ و $\bar{x}_n$ هستند بلکه می‌توانند به ترتیب توابعی از x_{i+1} و u نیز باشند که این خود منجر به گسترش کلاس سیستم‌های فیدبک محض پارامتریزه شده بصورت خطی/ غیرخطی شده است.

هدف کنترل، طراحی قانون کنترل $u(t)$ برای سیستم (۴-۲) می‌باشد طوریکه مبدأ سیستم پایدار مجانبی شود.

فرض ۴-۱: $(\partial f_{i1}/\partial x_{i+1})$، $(\partial f_{i3}/\partial x_{i+1})$، $(\partial f_{n1}/\partial u)$ و $(\partial f_{n3}/\partial u)$ برای $\bar{x}_{i+1} \in \Omega_{\bar{x}_{i+1}} \subset D_{\bar{x}_{i+1}}$ و $(\bar{x}_n, u) \in \Omega_{\bar{x}_n, u} \subset D_{\bar{x}_n} \times D_u$ غیر صفر می‌باشد که $\Omega_{\bar{x}_{i+1}}$ و $\Omega_{\bar{x}_n, u}$ مجموعه‌های فشرده می‌باشند. به عبارتی دیگر، $(\partial f_{i1}/\partial x_{i+1})$، $(\partial f_{i3}/\partial x_{i+1})$، $(\partial f_{n1}/\partial u)$ و $(\partial f_{n3}/\partial u)$ یا مثبت هستند و یا منفی. بدون از دست دادن کلیت مساله، فرض می‌کنیم که $\left(\frac{\partial f_{i1}}{\partial x_{i+1}}\right) > 0$ ، $\left(\frac{\partial f_{i3}}{\partial x_{i+1}}\right) > 0$ ، $\left(\frac{\partial f_{n1}}{\partial u}\right) > 0$ و $\left(\frac{\partial f_{n3}}{\partial u}\right) > 0$.

فرض ۴-۲: با استفاده از روش جداسازی پارامتر، وجود داشته باشد توابع هموار $\gamma_i(\bar{x}_i) \geq 1$، $\Lambda_i(\theta) \geq 1$ ، $\gamma_n(\bar{x}_n) \geq 1$ و $\Lambda_n(\theta) \geq 1$ طوریکه

$$|f_{i2}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t), \theta)| \leq \gamma_i(\bar{x}_i)\Lambda_i(\theta) \qquad i = 1, \dots, n \tag{۳-۴}$$

$$|f_{n2}(\bar{x}_n(t), u(t), \theta)| \leq \gamma_n(\bar{x}_n)\Lambda_n(\theta) \tag{۴-۴}$$

که با در نظر گرفتن $\Theta = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(\theta)$ به عنوان یک ثابت نامعلوم جدید روابط زیر نتیجه شود:

$$|f_{i2}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t), \theta)| \leq \gamma_i(\bar{x}_i)\Theta \qquad i = 1, \dots, n \tag{۵-۴}$$

$$|f_{n2}(\bar{x}_n(t), u(t), \theta)| \leq \gamma_n(\bar{x}_n)\Theta \tag{۶-۴}$$

۴-۳- طراحی کنترل کننده تطبیقی

در این قسمت کنترل کننده تطبیقی با استفاده از ترکیب تکنیک پسگام، تئوری آشفتگی منفرد، روش جداسازی پارامتر و ایده استفاده از تابع مثبت تخمین پارامترهایی که بصورت خطی وارد می‌شوند طراحی می‌شود. به این ترتیب که در هر مرحله از طراحی با بکارگیری جداسازی مقیاس زمانی، قوانین کنترل مجازی $\alpha_i,\ i = 1, \dots, n-1$ بدست می‌آید. برای این منظور، در دینامیک‌های سریع به جای استفاده از ترمی که در آن پارامترها بصورت غیرخطی وارد می‌شوند، تابع کران آن ترم مورد استفاده قرار می‌گیرد و نیز به جای پارامترهایی که بصورت خطی وارد شده‌اند تابع مثبت تخمین آنها بکار می‌رود. سرانجام در مرحله آخر طراحی، کنترل حقیقی u بعلاوه قانون بروزرسانی پارامترها بدست می‌آید. متغیرهای جدید z_1 و z_i را بصورت $z_1 = x_1$ و $z_i = x_i - \alpha_{i-1},\ i = 2, \dots, n$ تعریف می‌کنیم.

گام اول: نخست با مشتق گیری از z_1 و با در نظر گرفتن x_2 به عنوان متغیر کنترل، بدست می‌آید:

$$\dot{z}_1(t) = f_{11}(x_1, z_2 + \alpha_1) + f_{12}(x_1, z_2 + \alpha_1, \theta) + {f_{13}}^T(x_1, z_2 + \alpha_1)\theta \tag{۷-۴}$$

حال α_1 به عنوان اولین کنترل مجازی میتواند از حل معادله زیر حاصل شود

$$f_{11}(x_1, z_2 + \alpha_1) + f_{12}(x_1, z_2 + \alpha_1, \theta) + {f_{13}}^T(x_1, z_2 + \alpha_1)\theta = -k_1 z_1 \qquad (۸-۴)$$

که منجر به پایداری مجانبی دینامیک حلقه بسته $\dot{z}_1 = -k_1 z_1$ برای زیر سیستم اول میشود. $k_1 > 0$ اولین بهره کنترل می‌باشد. اما در (۴-۸) بدلیل خاصیت غیرافاین بودن توابع غیرخطی، α_1 بطور صریح نمی‌تواند محاسبه شود. با توجه به دینامیک سریع بر اساس جداسازی مقیاس زمانی در تئوری آشفتگی منفرد، یک کنترل مجازی تقریبی به صورت

$$\varepsilon_1 \dot{\alpha}_1 = -sign\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1\left(\bar{z}_2, \alpha_1, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right), \qquad \alpha_1(0) = \alpha_{1,0} \qquad (۹-۴)$$

طراحی می‌شود که در آن، $\varepsilon_1 \ll 1$، $\bar{z}_2 = [z_1, z_2]^T$ و $Q_1\left(\bar{z}_2, \alpha_1, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right)$ به فرم زیر بیان می‌شود:

$$Q_1\left(\bar{z}_2, \alpha_1, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right) = k_1 z_1 + f_{11}(x_1, z_2 + \alpha_1) + sat(z_1/\mu)\gamma_1(x_1)\hat{\Theta}$$
$$+ {f_{13}}^T(x_1, z_2 + \alpha_1)\Xi(\hat{\theta}) \qquad (۱۰-۴)$$

که با توجه به فرض۴-۲، $\gamma_1(z_1)$ تابعی اسکالر، $\hat{\Theta}$ تخمین پارامتر Θ ، $\hat{\theta}$ تخمین پارامتر θ و $\mu \ll 1$ یک ثابت مثبت می‌باشد. $\Xi(\hat{\theta}) \in R^s$ برداری است که اولا بایستی المان‌های آن به جای $\hat{\theta}_i$ ، تابعی مثبت از $\hat{\theta}_i$ باشد و ثانیا دترمینان ژاکوبین آن مخالف صفر باشد. $\Xi\left(\hat{\theta}\right) = [\exp\left(-\hat{\theta}_1\right), 1 + \tanh\left(\hat{\theta}_2\right), \exp(\hat{\theta}_3)]^T$ می‌تواند مثالی برای اینگونه بردارها باشد هنگامیکه $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3]^T$.

با فرض اینکه $\alpha_1 = h_1(\bar{z}_2, \hat{\Theta}, \hat{\theta})$ ریشه مجزایی برای $Q_1\left(\bar{z}_2, \alpha_1, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right)$ باشد، سیستم کاهش یافته بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + f_{12}(x_1, x_2, \theta) - sat(z_1/\mu)\gamma_1(x_1)\hat{\Theta} + {f_{13}}^T(x_1, x_2)\left(\theta - \Xi\left(\hat{\theta}\right)\right)$$
$$z_1(0) = z_{1,0} \qquad (۱۱-۴)$$

و سیستم لایه مرزی با معادله (۴-۱۲) نشان داده می‌شود:

$$\frac{dy_1}{d\tau_1} = -sign\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1\left(\bar{z}_2, y_1 + h_1\left(\bar{z}_2, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right), \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right) \qquad (۱۲\text{-}۴)$$

که در آن $y_1 = \alpha_1 - h_1(\bar{z}_2, \hat{\Theta}, \hat{\theta})$ و $\tau_1 = t/\varepsilon_1$ می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۴-۱۱)، نتیجه میشود:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -k_1 z_1^2 + |z_1||f_{12}(x_1, x_2, \theta)| - z_1 \mathrm{sat}(z_1/\mu)\gamma_1(x_1)\hat{\Theta} + z_1 {f_{13}}^T(x_1, x_2)\left(\theta - \Xi\left(\hat{\theta}\right)\right) \\ &\leq -k_1 z_1^2 + |z_1|\gamma_1(x_1)\tilde{\Theta} + z_1 {f_{13}}^T(x_1, x_2)\tilde{\theta} \qquad (۱۳\text{-}۴)\end{aligned}$$

که در رابطه فوق $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ و $\tilde{\theta} = \theta - \Xi\left(\hat{\theta}\right)$ تعریف شده و همچنین برای $\mu \ll 1$، $\mathrm{sat}(z_1/\mu)$ به $\mathrm{sign}(z_1)$ تقریب زده می‌شود.

گام $(i = 2, \ldots, n-1)$: با مشتق گیری از z_i بدست می‌آید:

$$\dot{z}_i = f_{i1}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t)) + f_{i2}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t), \theta) + {f_{i3}}^T(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t))\theta - \dot{\alpha}_{i-1} \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

مشابه گام اول، بایستی α_i را طوری تعیین می کنیم تا در رابطه

$$f_{i1}(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) + f_{i2}(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i, \theta) + {f_{i3}}^T(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i)\theta - \dot{\alpha}_{i-1} = -k_i z_i \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

صدق کند. $k_i > 0$ بهره کنترلی مثبت می‌باشد. در این مرحله، مشتق زمانی کنترل مجازی $\dot{\alpha}_{i-1}$ به چشم می‌خورد که در مرحله قبل با استفاده از رابطه $\dot{\alpha}_{i-1} = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_{i-1}}{\partial \alpha_{i-1}}\right) Q_{i-1}(\bar{z}_i, \alpha_{i-1}, \hat{\Theta}, \hat{\theta})/\varepsilon_{i-1}$ محاسبه شده است که در نتیجه از "انفجار پیچیدگی" ناشی از محاسبه این ترم جلوگیری می‌شود.

جهت غلبه بر خاصیت غیر افاین، iامین کنترل مجازی تقریبی نیز میتواند با استفاده از دینامیک سریع زیر بدست آید:

$$\varepsilon_i \dot{\alpha}_i = -sign\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right), \qquad \alpha_i(0) = \alpha_{i,0} \tag{۱۶-۴}$$

که $\varepsilon_i \ll 1$، $\bar{z}_i = [z_1, \dots, z_{i+1}]^T$ و $Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right)$ به فرم زیر بیان می‌شود:

$$Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right) = k_i z_i \ + f_{i1}(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) + \mathrm{sat}(z_i/\mu)\gamma_i(\bar{x}_i)\hat{\Theta}$$
$$+ {f_{i3}}^T(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i)\Xi(\hat{\theta}) - \dot{\alpha}_{i-1} \tag{۱۷-۴}$$

اجازه دهید $\alpha_i = h_i(\bar{z}_{i+1}, \hat{\Theta}, \hat{\theta})$ یک ریشه مجزا برای $Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right) = 0$ باشد. سیستم کاهش یافته بصورت

$$\dot{z}_i = -k_i z_i \ + f_{i2}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t), \theta) - \mathrm{sat}(z_i/\mu)\gamma_i(\bar{x}_i)\hat{\Theta}$$
$$+ {f_{i3}}^T(\bar{x}_i, x_{i+1})\left(\theta - \Xi\left(\hat{\theta}\right)\right), \qquad z_i(0) = z_{i,0} \tag{۱۸-۴}$$

تعریف می‌شود و سیستم لایه مرزی با معادله زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{dy_i}{d\tau_i} = -sign\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) Q_i\left(\bar{z}_{i+1}, y_i + h_i\left(\bar{z}_{i+1}, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right), \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right) \tag{۱۹-۴}$$

که $y_i = \alpha_i - h_i(\bar{z}_{i+1}, \hat{\Theta}, \hat{\theta})$ و $\tau_i = t/\varepsilon_i$ می‌باشد. در این مرحله با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف بصورت $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۴-۱۸)، نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_i \le \left(\sum_{j=1}^{i-1} -k_j z_j^2 + \left|z_j\right|\gamma_j\left(\bar{x}_j\right)\tilde{\Theta} + z_j {f_{j3}}^T\left(\bar{x}_j, x_{j+1}\right)\tilde{\theta}\right) - k_i z_i^2 + |z_i||f_{i2}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t), \theta)|$$
$$-z_i sat(z_i/\mu)\gamma_i(\bar{x}_i)\hat{\Theta} + z_i {f_{i3}}^T(\bar{x}_i, x_{i+1})\left(\theta - \Xi\left(\hat{\theta}\right)\right)$$
$$\le \sum_{j=1}^{i} -k_j z_j^2 + \left|z_j\right|\gamma_j\left(\bar{x}_j\right)\tilde{\Theta} + z_j {f_{j3}}^T\left(\bar{x}_j, x_{j+1}\right)\tilde{\theta} \tag{۲۰-۴}$$

گام n : در آخرین مرحله، ورودی کنترل حقیقی u ظاهر می‌شود که هدف اصلی بدست آوردن این کنترل می‌باشد. با مشتق گیری از z_n، بدست می‌آید:

$$\dot{z}_n = f_{n1}(\bar{x}_n, u) + f_{n2}(\bar{x}_n, u, \theta) + {f_{n3}}^T(\bar{x}_n, u)\theta - \dot{\alpha}_{n-1} \qquad (۲۱-۴)$$

اکنون یک کنترل حقیقی تقریبی با استفاده از جداسازی مقیاس زمانی جهت برآورده کردن

$$f_{n1}(\bar{x}_n, u) + f_{n2}(\bar{x}_n, u, \theta) + {f_{n3}}^T(\bar{x}_n, u)\theta - \dot{\alpha}_{n-1} = -k_n z_n \qquad (۲۲-۴)$$

بصورت

$$\varepsilon_n \dot{u} = -sign\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) Q_n\left(\bar{z}_n, u, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right), u(0) = u_0 \qquad (۲۳-۴)$$

ارائه می‌شود که $\varepsilon_n \ll 1$ ، $\bar{z}_n = [z_1, \dots, z_n]^T$ و $Q_n\left(\bar{z}_n, u, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right)$ به فرم زیر بیان می‌شود:

$$Q_n\left(\bar{z}_n, u, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right) = k_n z_n + f_{n1}(\bar{x}_n, u) + \mathrm{sat}(z_n/\mu)\gamma_n(\bar{x}_n)\hat{\Theta} + {f_{n3}}^T(\bar{x}_n, u)\Xi(\hat{\theta}) - \dot{\alpha}_{n-1}$$
(۲۴-۴)

$k_n > 0$ بهره کنترل مثبت می‌باشد.

با فرض اینکه $u = h_n(\bar{z}_n, \hat{\Theta}, \hat{\theta})$ریشه مجزایی برای $Q_n\left(\bar{z}_n, u, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right) = 0$ باشد، سیستم کاهش یافته بصورت

$$\dot{z}_n = -k_n z_n + f_{n2}(\bar{x}_n, u, \theta) - \mathrm{sat}(z_n/\mu)\gamma_n(\bar{x}_n)\hat{\Theta}$$
$$+{f_{n3}}^T(\bar{x}_n, u)(\theta - \Xi(\hat{\theta})), \qquad z_n(0) = z_{n,0} \qquad (۲۵-۴)$$

تعریف می‌شود و سیستم لایه مرزی نیز به فرم معادله زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{dy_n}{d\tau_n} = -sign\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) Q_n\left(\bar{z}_n, y_n + h_n\left(\bar{z}_n, \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right), \hat{\Theta}, \hat{\theta}\right) \qquad (۲۶-۴)$$

که در آن $y_n = u - h_n(\bar{z}_n, \hat{\Theta}, \hat{\theta})$ و $\tau_n = t/\varepsilon_n$ تعریف می‌شود. با انتخاب تابع لیاپانوف $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta}$ ، مشتق V_n بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\dot{V}_n \leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} -k_j z_j^2 + |z_j|\gamma_j(\bar{x}_j)\tilde{\Theta} + z_j f_{j3}{}^T(\bar{x}_j, x_{j+1})\tilde{\theta}\right) - k_n z_n^2 + |z_n||f_{n2}(\bar{x}_n, u, \theta)|$$

$$-z_n sat(z_n/\mu)\gamma_n(\bar{x}_n)\hat{\Theta} + z_n f_{n3}{}^T(\bar{x}_n, u)\tilde{\theta} - \tilde{\Theta}\dot{\hat{\Theta}} - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \frac{\partial \Xi(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} -k_j z_j^2\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|\gamma_j(\bar{x}_j) - \dot{\hat{\Theta}}\right)\tilde{\Theta} -$$

$$\tilde{\theta}^T [\Gamma^{-1} \frac{\partial \Xi(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \sum_{j=1}^{n-1} f_{j3}(\bar{x}_j, x_{j+1}) z_j - f_{n3}(\bar{x}_n, u) z_n] \qquad (۲۷-۴)$$

سرانجام می‌توان با طراحی قانون بروزرسانی به فرم

$$\dot{\hat{\Theta}} = \sum_{j=1}^{n} |z_j|\gamma_j(\bar{x}_j) \qquad (۲۸-۴)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial \Xi(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\right)^{-1} \Gamma \left[\sum_{j=1}^{n-1} f_{j3}(\bar{x}_j, x_{j+1}) z_j + f_{n3}(\bar{x}_n, u) z_n\right] \qquad (۲۹-۴)$$

ترم $\tilde{\Theta}$ و $\tilde{\theta}^T$ را حذف کرد. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_n \leq \sum_{j=1}^{n} -k_j z_j^2 \qquad (۳۰-۴)$$

این تابع لیاپانوف پایداری مجانبی مبدأ را برای سیستم کاهش یافته (۴-۱۱)، (۴-۱۸) و (۴-۲۵) تضمین می‌کند.

۴-۴- تحلیل پایداری

قضیه ۴-۱: مسئله آشفتگی منفرد سیستم فیدبک محض (۴-۲) و کنترلرهای (۴-۹)، (۴-۱۶) و (۴-۲۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط زیر برای تمام $(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i - h_i(\bar{z}_{i+1}, \hat{\Theta}, \hat{\theta})) \in D_{\bar{z}_{i+1}} \times D_{y_i}$ برای دامنه‌های $D_{\bar{z}_{i+1}} \subset R^{i+1}$ و $D_{y_i} \subset R$ که شامل مبدأ می‌باشد و در آن $i = 1, \dots, n$ ، $\bar{z}_{n+1} = \bar{z}_n$ ، $D_{\bar{z}_{n+1}} = D_{\bar{z}_n}$ و $\alpha_n = u$ تعریف می‌شود، برآورده شود:

۱) $f_{i1}(0,0)=0$، $f_{i2}(0,\theta)=0$، $f_{i3}(0,0)=0$ ، $Q_i(0,0,\hat{\Theta},\hat{\theta})=0$.

۲) روی هر مجموعه فشرده‌ای از $D_{\bar{z}_{i+1}} \times D_{y_i}$، معادله $0=Q_i(\bar{z}_{i+1},\alpha_i,\hat{\Theta},\hat{\theta})=0$ دارای ریشه مجزای $\alpha_i=h_i(\bar{z}_{i+1},\hat{\Theta},\hat{\theta})$ باشد طوریکه $h_i(\bar{z}_{i+1},\hat{\Theta},\hat{\theta})=0$.

۳) توابع Q_i، h_i و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها نسبت به آرگومان‌هایشان کراندار باشند.

۴) $(\bar{z}_{i+1},y_i)\mapsto(\partial Q_i/\partial\alpha_i)(\bar{z}_{i+1},y_i+h_i(\bar{z}_{i+1},\hat{\Theta},\hat{\theta}),\hat{\Theta},\hat{\theta})$ برای تمام $\bar{z}_{i+1}\in D_{\bar{z}_{i+1}}$ دارای کران پایین مثبت باشد.

آنگاه مبدا سیستم‌های (۴-۱۲)، (۴-۱۹) و (۴-۲۶) پایدار نمایی بوده و همچنین وجود دارد ثابت مثبت ε^* بطوریکه برای تمام $\varepsilon<\varepsilon^*$، مبدا سیستم (۴-۲) پایدار مجانبی می‌باشد.

اثبات: بایستی شرایط قضیه ۴-۱ شرایط (الف)-(ه) قضیه ۳-۱ در فصل سوم را ارضا کنند. شرایط (۱)-(۳) مستقیما شرایط (الف)-(ج) قضیه ۳-۱ را برآورده می‌کنند. پایداری نمایی سیستم‌های (۴-۱۲)، (۴-۱۹) و (۴-۲۶)، بوسیله خطی سازی حول y_i بطور محلی اثبات می‌شود که با در نظر گرفتن فرض ۴-۱ و شرط ۴، نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial\alpha_i}\right)=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial f_{i1}}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial({f_{i3}}^T)}{\partial\alpha_i}\Xi(\hat{\theta})\right)>0$$
$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right)=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial f_{n1}}{\partial \mathrm{u}}+\frac{\partial({f_{n3}}^T)}{\partial u}\Xi(\hat{\theta})\right)>0 \qquad (۳۱\text{-}۴)$$

که این دلالت بر پایداری نمایی محلی مبدأ برای سیستم لایه مرزی دارد. در نهایت از آنجایی که در قسمت قبل پایداری مجانبی مبدأ سیستم کاهش یافته بدست آمد، بنابراین شرط (ه) از قضیه ۳-۱ نیز ارضا می‌شود و در نتیجه قضیه ۳-۱ را می‌توان بکار برد. بنابراین وجود دارد ثابت مثبت ε^* بطوریکه برای تمام $\varepsilon<\varepsilon^*$، مبدأ سیستمهای (۴-۷)، (۴-۹)، (۴-۱۴)، (۴-۱۶)، (۴-۲۱) و (۴-۲۳) پایدار مجانبی می‌شود یعنی z_i و α_i به صفر همگرا می‌شوند و از آنجایی که $x_1=z_1$ و $x_i=z_i+\alpha_{i-1}$ در نتیجه مبدا سیستم فیدبک محض (۴-۲) پایدار مجانبی می‌شود. □

تذکر۴-۲: ایده استفاده از تابع مثبت تخمین پارامترهایی که بصورت خطی وارد می‌شوند یعنی استفاده از $\Xi(\hat{\theta})$ به جای $\hat{\theta}$، فقط برای برآورده‌شدن رابطه (۴-۳۱) می‌باشد که بتواند پایداری نمایی محلی مبدأ را برای سیستم لایه مرزی نتیجه دهد.

تدکر ۴-۳: کنترل سیستم های فیدبک محض با توابع غیرخطی نامعلوم با استفاده از کنترل فازی- تطبیقی برای سه حالت مختلف در [۴۲] انجام شده است. در حالت سوم فرض شده که بخشی از سیستم دارای توابع نامعلوم می‌باشد و از سیستم فازی برای جبران این غیرخطی‌های نامعلوم استفاده میکند. جهت اعمال روش [۴۲] روی سیستم (۴-۲)، می‌توان تمام جمله‌های شامل عدم قطعیت پارامتری را بصورت یک تابع نامعلوم در نظر گرفت و از سیستم فازی $\theta_i^{*T}W(\bar{x}_i)$ برای جبران آنها استفاده کرد. با مقایسه این روش با کنترل پیشنهادی در این فصل می‌توان گفت:

۱- با توجه به روند طراحی در[۴۲]، تعداد پارامترهایی که در هر گام بایستی بروزرسانی شوند برابر با تعداد ورودی‌هایی است که از تبدیل $\bar{x}_i$ بدست آمده‌اند که در مقایسه با کنترل پیشنهادی در این فصل تعداد بسیار زیادی می‌باشد.

۲- اگر چه سیستم (۴-۲) دارای پارامترهای نامعین است اما مدل کلی سیستم کاملا مشخص است و کنترل فازی- تطبیقی [۴۲] با در نظر گرفتن کل سیستم به عنوان تابع نامعلوم از اطلاعات مربوط به مدل سیستم نمی‌تواند بهره ببرد.

۴-۵- نتایج شبیه سازی‌ها

۴-۵-۱- شبیه‌سازی سیستم تئوری

سیستم فیدبک محض پارامتریزه بصورت خطی/ غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \frac{{x_2}^3}{5} + ln(1 + (\theta_1 x_1)^2) + \theta_1 e^{x_2} + \theta_2 {x_1}^2 \qquad (۴-۳۲)$$

$$\dot{x}_2 = 0.01u + \frac{u^3}{7} + {x_2}^2 u + \frac{\theta_2 {x_1}^2}{(1+\theta_1 x_2)^2 + {x_2}^2} + \theta_1 x_1 x_2 + \theta_2 u^3 \qquad (۳۳-۴)$$

θ_1 و θ_2 پارامترهایی هستند که بصورت خطی/ غیرخطی وارد شده‌اند و در این شبیه‌سازی برابر $\theta_1 = 2.5$ و $\theta_2 = 1.6$ فرض شده‌اند. هدف کنترل، طراحی قانون کنترل $u(t)$ می‌باشد طوریکه مبدأ سیستم فوق پایدار مجانبی شود. با استفاده از روش جداسازی پارامتر، توابع γ_1 و γ_2 را بصورت $\gamma_1(x_1) = |x_1|$ ، $\gamma_2(x_1, x_2) = {x_1}^2$ و پارامتر ثابت را در جداسازی پارامتر بصورت $\Theta = |\theta_1| + |\theta_2|(1 + {\theta_1}^2)$ تعریف می‌کنیم.جهت نشان دادن کارآمدی کنترل طراحی شده، نتایج شبیه سازی را برای پارامترهای مختلف در دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت ۱:

مقدار پارامترهای نامعلوم $\theta_1 = 1.6$ و $\theta_2 = 2.5$ می‌باشد. مقادیر اولیه بصورت $x_1(0) = 0.5$ ، $x_2(0) = -1$ ، $u(0) = 0$، $\hat{\Theta}(0) = 1$ ، $\hat{\theta}_1(0) = 2$، $\hat{\theta}_2(0) = 3$ و همچنین پارامترهای طراحی بصورت $k_1 = 2$، $\mu = 0.00001$ و $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $\Xi(\hat{\theta}_1) = 1 + tanh(\hat{\theta}_1)$ و $\Xi(\hat{\theta}_2) = 1 + tanh(\hat{\theta}_2)$ انتخاب شده‌اند.

سیگنال کنترل و قوانین تطبیق بوسیله دینامیک های سریع زیر محاسبه می‌شود.

$$0.01\dot{\alpha}_1 = -sign\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1(z_1, z_2, \alpha_1, \hat{\Theta}, \hat{\theta}) \qquad (۳۴-۴)$$

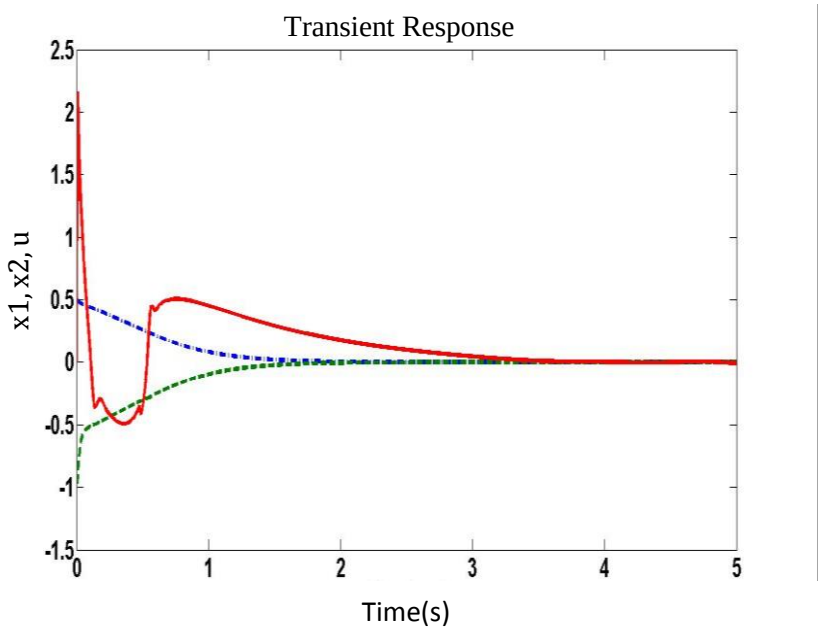
$$0.01\dot{u} = -sign\left(\frac{\partial Q_2}{\partial u}\right) Q_2(z_1, z_2, u, \hat{\Theta}, \hat{\theta}) \qquad (۳۵-۴)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = |z_1|\, \gamma_1(x_1) + |z_2|\, \gamma_2(x_1, x_2) \qquad (۳۶-۴)$$

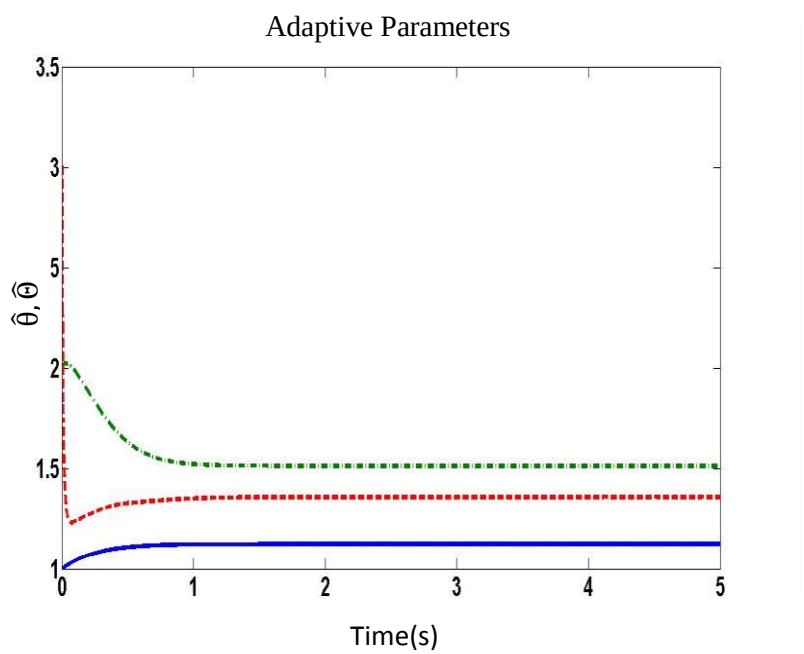
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = (z_1 e^{x_2} + z_2 x_1 x_2)/(1 - tanh^2(\hat{\theta}_1)) \qquad (۳۷-۴)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = (z_1 {x_1}^2 + z_2 u^3)/(1 - tanh^2(\hat{\theta}_2)) \qquad (۳۸-۴)$$

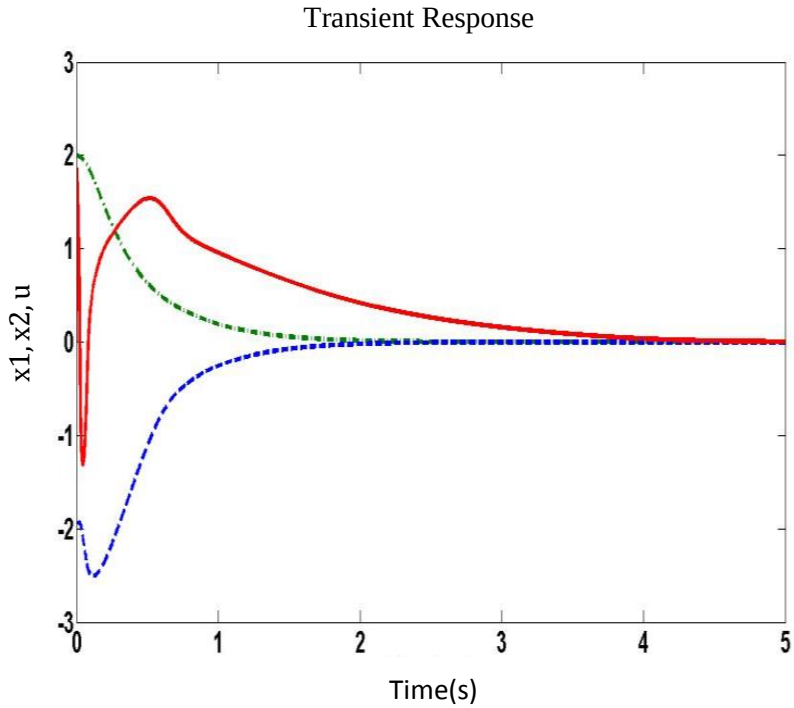
که Q_1 و Q_2 به ترتیب در روابط (۴-۱۰) و (۴-۲۴) آورده شده‌اند.



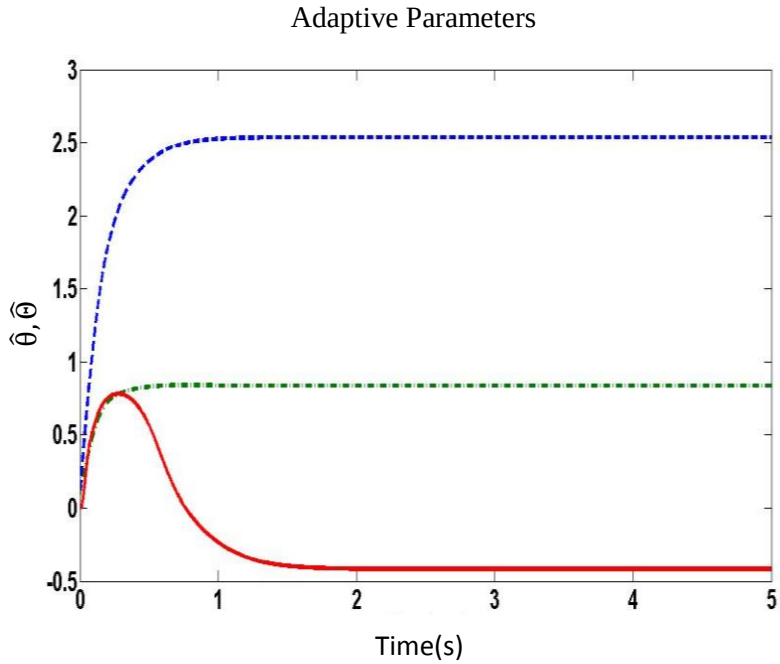
شکل (۴-۱) پاسخ گذرای متغیرهای حالت x_1(-·-·-·)، x_2(- - - -) و ورودی کنترل u (——)



شکل (۴-۲) پارامترهای تطبیق $\hat{\theta}_1$ (-·-·-·)، $\hat{\theta}_2$(- - - -) و $\hat{\Theta}$ (——)



شکل (۴-۳) پاسخ گذرای متغیرهای حالت x_1(-·-·-·-)، x_2(- - - -) و ورودی کنترل u(——)



شکل (۴-۴) پارامترهای تطبیق $\hat{\theta}_1$ (-·-·-·-)، $\hat{\theta}_2$(——) و $\hat{\Theta}$ (- - - -)

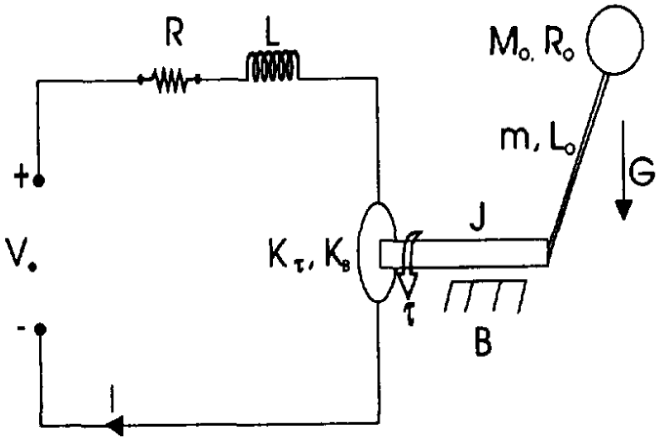
حالت ۲:

در این حالت، پارامترهای نامعلوم، مقادیر اولیه و توابع مثبت بصورت $\theta_1 = 1$، $\theta_2 = 0.5$، $x_1(0) = 2$ ، $x_2(0) = -2$ ، $u(0) = 0$ ، $\hat{\Theta}(0) = 0.1$ ، $\hat{\theta}_1(0) = 0.1$ ، $\hat{\theta}_2(0) = 0$ ، $\Xi(\hat{\theta}_1) = \exp(\hat{\theta}_1)$ و $\Xi(\hat{\theta}_2) = \exp(\hat{\theta}_2)$ و سایر پارامترهای طراحی مانند حالت ۱ انتخاب شده‌اند.

پاسخ گذر حالت‌های سیستم، کنترل ورودی $u(t)$ و پارامترهای تطبیق در شکل‌های (۴-۱)-(۴-۴) نشان داده شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود علیرغم پارامتریزه شدن خطی/ غیرخطی و خاصیت غیرافاین بودن سیستم، پایداری سیستم حلقه بسته همراه با عملکرد و کنترل رضایتبخش حاصل شده است.

۴-۵-۲- شبیه‌سازی سیستم الکترومکانیکی

به منظور نشان دادن کارآمدی کنترل ارائه شده در این فصل، سیستم الکترومکانیک نشان داده شده در شکل(۴-۵) را در نظر بگیرید:



شکل (۴-۵) شماتیک سیستم الکترومکانیکی [۱۲۶]

دینامیک این سیستم الکترومکانیک بوسیله معادلات زیر بیان می‌شود[۱۲۶]:

$$D\ddot{q} + B\dot{q} + Nsin(q) = \tau$$

$$M\dot{\tau} + H\tau = V - K_m\dot{q} \qquad (۳۹-۴)$$

در معادله فوق پارامترهای D ، N و B بصورت $D = \frac{J}{K_\tau} + \frac{mL_0^2}{3K_\tau} + \frac{M_0L_0^2}{K_\tau} + \frac{2M_0L_0^2}{5K_\tau}$، $N = \frac{mL_0G}{2K_\tau} + \frac{M_0L_0G}{K_\tau}$، $B = \frac{B_0}{K_r}$ تعریف می‌شوند. J اینرسی روتور، m جرم لینک، M_0 جرم بار، L_0 طول لینک، R_0 شعاع بار، G ضریب گرانش، B_0 ضریب اصطکاک گرانروی[1] در نقطه اتصال، $q(t)$ موقعیت زاویه‌ای موتور، τ جریان آرمیچر موتور، K_τ ضریبی است که تبدیل الکترومکانیکی جریان آرمیچر به گشتاور را تعریف می‌کند، M اندوکتانس آرمیچر، H مقاومت آرمیچر، K_m ضریب ضد محرکه الکتریکی[2] و V ولتاژ کنترل ورودی می‌باشد.

مقدار پارامترها بصورت $J = 1.625 \times 10^{-3} Kg.m^2$، $m = 0.506\ Kg$، $M_0 = 0.434\ Kg$، $R_0 = 0.023\ m$، $B_0 = 16.25 \times 10^{-3} N.m.s/rad$، $L_0 = 0.305\ m$، $M = 25.0 \times 10^{-3} H$، $H = 5.0\Omega$ و $K\tau = Km = 0.90\ N.m/A$ در نظر گرفته شده‌اند.

متغیرهای جدید را بصورت $x_1 = q$ و $x_2 = \dot{q}$ ، $x_3 = \tau$ و $u = V$ تعریف می‌کنیم. معادله دینامیکی (۴-۳۹) را می‌توان به فرم فضای حالت زیر نوشت:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

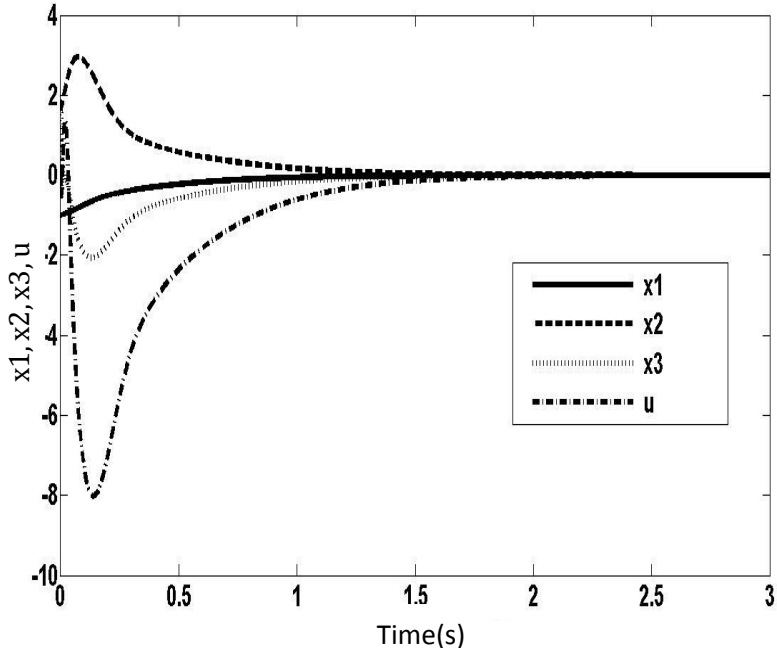
$$\dot{x}_2 = \theta_1 \sin(x_1) + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3$$

$$\dot{x}_3 = \theta_4 x_2 + \theta_5 x_3 + \theta_6 u \qquad (۴۰-۴)$$

که $\theta = [-\frac{N}{D} \quad -\frac{B}{D} \quad \frac{1}{D} \quad -\frac{K_m}{M} \quad -\frac{H}{M} \quad \frac{1}{M}]^T$ بردار پارامترهای نامعلوم می‌باشد. هدف کنترل، طراحی قانون کنترل $u(t)$ برای سیستم (۴-۴۰) می‌باشد طوریکه مبدأ سیستم پایدار مجانبی شود. شرایط اولیه

[1] Coefficient of Viscous Friction
[2] Back-emf

بصورت $x_1(0) = -1$ ، $x_2(0) = 1.5$ ، $x_3(0) = 2$ ، $u(0) = 0$ ، $\hat{\theta}(0) = [1\ 1\ 2\ 3\ 0\ 2]^T$ و پارامترهای طراحی بصورت $k_1 = k_2 = 3$ ، $k_3 = 5$ ، $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$ ، $\varepsilon_3 = 0.2$ تنظیم می‌شوند. همچنین $\Xi(\hat{\theta}) = \exp(\hat{\theta})$ و Γ یک ماتریس قطری واحد 6×6 انتخاب شده است.



شکل (۴-۶) پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته

سیگنال کنترل بوسیله دینامیک های سریع زیر محاسبه می‌شود.

$$0.1\dot{\alpha}_1 = -sign\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1\left(z_1, z_2, \alpha_1, \hat{\theta}\right) \qquad (۴۱-۴)$$

$$0.1\dot{\alpha}_2 = -sign\left(\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2}\right) Q_1\left(z_1, z_2, z_3, , \alpha_1, \alpha_2, \hat{\theta}\right) \qquad (۴۲-۴)$$

$$0.2\dot{u} = -sign\left(\frac{\partial Q_3}{\partial u}\right) Q_3(z_1, z_2, z_3, \alpha_1, \alpha_2, u, \hat{\theta}) \qquad (۴۳-۴)$$

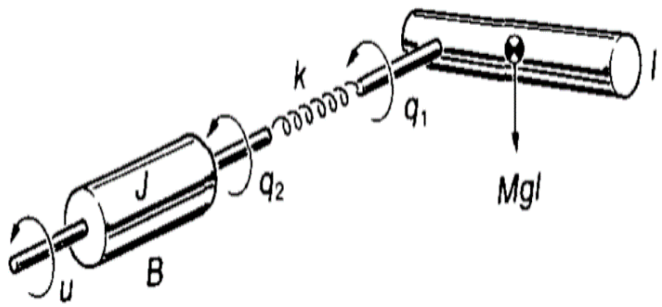
$$\dot{\hat{\theta}} = [\ z_2 \sin(x_1) \quad z_2 x_2 \quad \frac{z_2 x_3}{exp(\hat{\theta}_3)} \quad z_3 x_2 \quad z_3 x_3 \quad \frac{z_3 u}{exp(\hat{\theta}_6)}]^T \qquad (۴۴-۴)$$

که Q_1 ، Q_2 و Q_3 به ترتیب در روابط (۴-۱۰)، (۴-۱۷) و (۴-۲۴) آورده شده‌اند.

نتایج شبیه سازی در شکل (۴-۶) عملکرد مناسب کنترل را در پایداری سیستم حلقه بسته علیرغم وجود عدم قطعیت‌های پارامتری نشان می‌دهد.

۴-۵-۳- شبیه سازی روبات تک لینکی با مفصل انعطاف پذیر[1]

در این قسمت از شبیه سازی، یک روبات تک لینکی با مفصل انعطاف پذیر را به عنوان یک سیستم عملی جهت اعمال طرح کنترل پیشنهادی در نظر می‌گیریم.



شکل (۴-۷) مدل بازوی تک لینکی با مفصل انعطاف پذیر[۱۳۲]

شکل (۴-۷) مدل این ربات را نشان می دهد. معادلات حرکت برای چنین سیستمی به صورت زیر بیان می‌شود[۱۳۲]:

$$I\ddot{q}_1 + Mgl\sin(q_1) + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$J\ddot{q}_2 + B\dot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \qquad (۴۵-۴)$$

[1] Single link Flexible Joint Robot

q_1 و q_2 به ترتیب موقعیت‌های زاویه‌ای لینک وشافت موتور و u نیز گشتاور ورودی اعمالی به شافت موتور است. لازم بذکر است که اینرسی‌های بار و موتور I، J، ثابت میرایی[1] موتور B ، سختی مفصل[2] k ، جرم لینک M ، موقعیت مرکز گرانش[3] لینک l، می‌توانند نامعلوم فرض شوند.

در ابتدا با انتخاب متغیرهای حالت $\zeta_1 = q_1$، $\zeta_2 = \dot{q}_1$، $\zeta_3 = q_2$ ، $\zeta_4 = \dot{q}_2$مدل دینامیکی (۴-۴۵) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2$$

$$\dot{\zeta}_2 = -\frac{Mgl}{I}\sin(\zeta_1) + \frac{k}{I}(\zeta_3 - \zeta_1)$$

$$\dot{\zeta}_3 = \zeta_4$$

$$\dot{\zeta}_4 = -\frac{B}{J}\zeta_4 + \frac{k}{J}(\zeta_1 - \zeta_3) + \frac{1}{J}u \qquad (۴۶-۴)$$

هدف کنترل طراحی قانون کنترل $u(t)$ برای سیستم (۴-۴۶) می‌باشد طوریکه خروجی $y = \theta_m\zeta_1$ سیگنال مرجع y_r را دنبال کند. دقت شود کهθ_m پارامتری نامعلوم می‌باشد.

با تغییر مختصات $x = \theta_m\zeta$، داریم:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\theta_m\frac{Mgl}{I}\sin\left(\frac{x_1}{\theta_m}\right) + \frac{k}{I}(x_3 - x_1)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{B}{J}x_4 + \frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{\theta_m}{J}u$$

$$y = x_1 \qquad (۴۷-۴)$$

[1]Damping Constant
[2]Joint Stiffness
[3]Center of Gravity

مدل(۴-۴۷) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1, \theta_1) + \theta_2(x_3 - x_1)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \theta_3 x_4 + \theta_4(x_1 - x_3) + \theta_5 u$$

$$y = x_1 \qquad (۴۸-۴)$$

که در آن $f(x_1, \theta_1) = -\theta_m \frac{Mgl}{l} \sin\left(\frac{x_1}{\theta_m}\right)$، $\theta_2 = \frac{k}{I}$، $\theta_3 = -\frac{B}{J}$ ، $\theta_4 = \frac{k}{J}$ و $\theta_5 = \frac{\theta_m}{J}$ می‌باشند.

سیگنال مرجع y_r و مشتق آن $\dot{y}_r$ قابل دسترس و کراندار فرض می‌شود.

سیستم ربات (۴-۴۷) به همراه کنترل پیشنهادی برای مقادیر $Mgl = 10\ \mathrm{Nm}$ ، $I = 1\ \mathrm{kg}$ ،$J = 1\ \mathrm{kg.m^2}$، $k = 100\ \mathrm{Nm/rad}$، $B = 0.9\ \mathrm{Nm.s/rad}$ مطابق [۱۳۳] و $\theta_m = 1$ شبیه‌سازی می‌گردد. برای بدست آوردن تابع کران ترمی که نسبت به پارامتر غیرخطی است، یک محاسبه مستقیم نتیجه می‌دهد که $\left|-\theta_m \frac{Mgl}{l} \sin\left(\frac{x_1}{\theta_m}\right)\right| \leq \left|\theta_m \frac{Mgl}{l}\right| \times 1$. بنابراین $\gamma(x_1) = 1$ و $\Theta = \left|\theta_m \frac{Mgl}{l}\right|$.

پارامترهای طراحی در ساختار کنترل ارائه شده بصورت $k_1 = 8$، $k_2 = 5$ ، $k_3 = 3$، $k_4 = 7$، $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0.01$ انتخاب می‌شوند. همچنین $\Xi(\hat{\theta}_2) = \exp(\hat{\theta}_2)$ ، $\Xi(\hat{\theta}_5) = 1 + \tanh(\hat{\theta}_5)$ و Γ یک ماتریس قطری واحد در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که شرایط اولیه بصورت $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$ ، $a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = u(0) = 0$ ، $\hat{\theta}(0) = [2\ \ 3\ \ 0\ \ 2.5]^T$ و $\hat{\Theta}(0) = 1$ می‌باشند.

پارامترهای تطبیق با استفاده از قوانین زیر بروزرسانی می‌شوند:

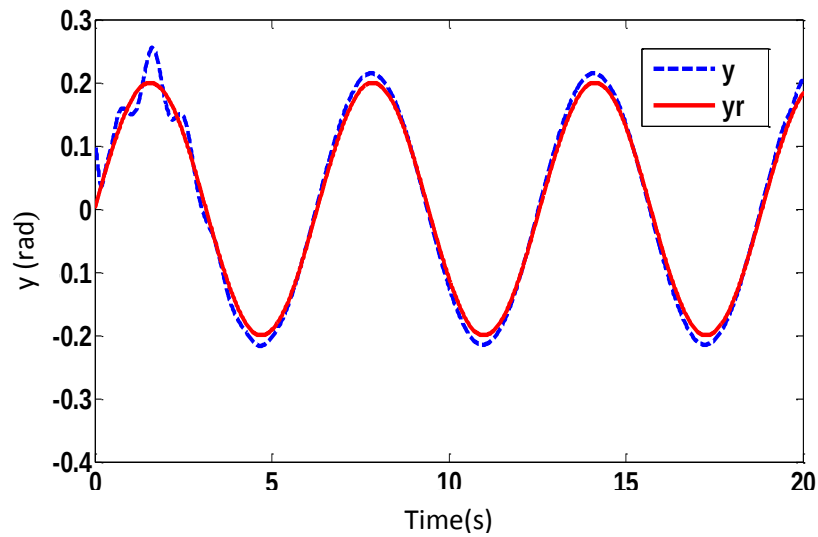
$$\dot{\hat{\Theta}} = |z_2|\gamma(x_1) \qquad (۴۹-۴)$$

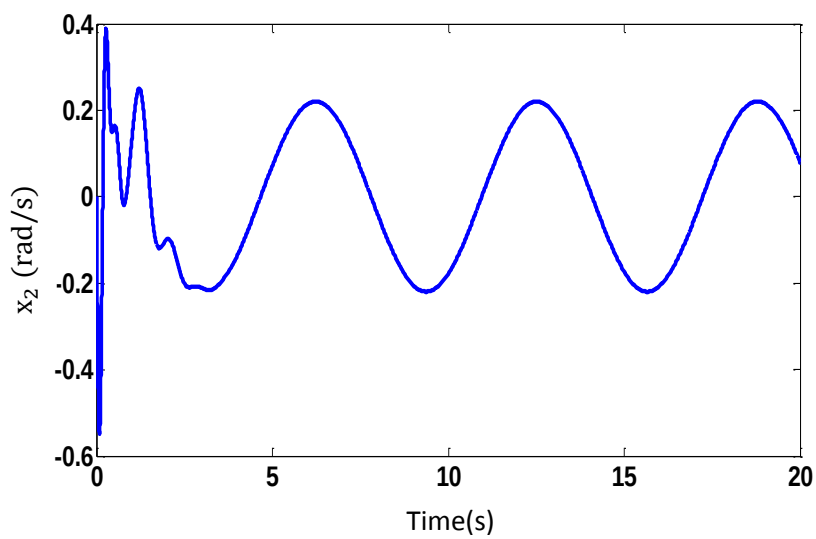
$$\dot{\hat{\theta}}_2 = z_2(x_3 - x_1)/\exp(\hat{\theta}_2) \qquad (۵۰-۴)$$

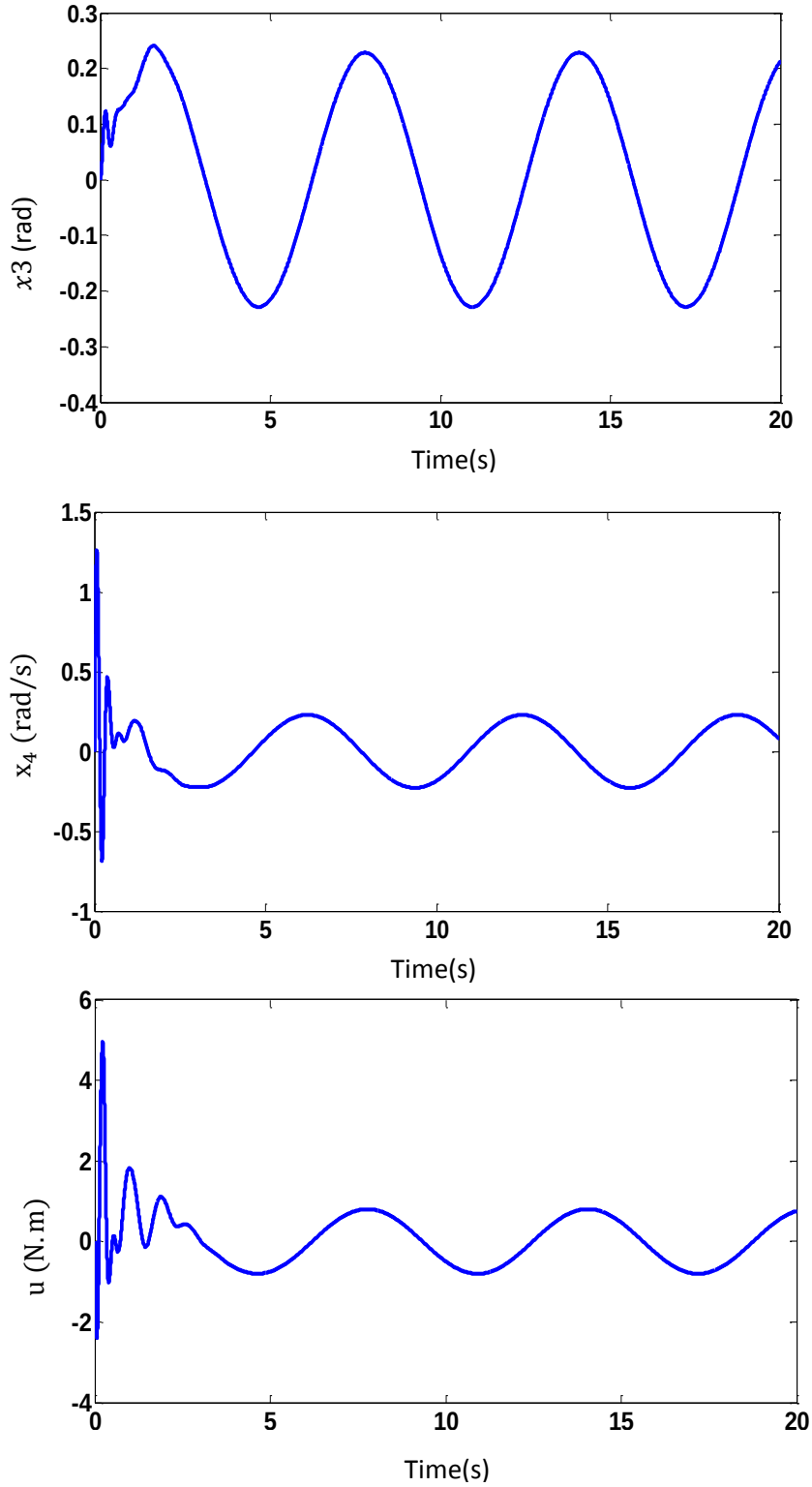
$$\dot{\hat{\theta}}_3 = z_4 x_4 \tag{۵۱-۴}$$

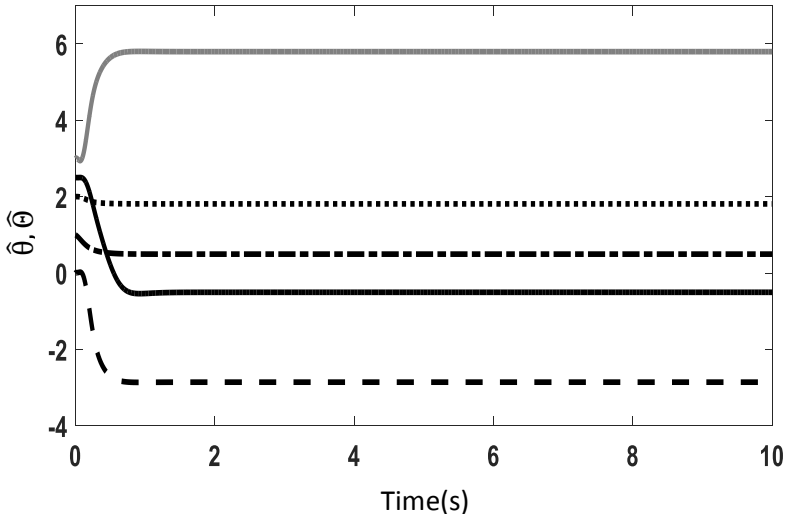
$$\dot{\hat{\theta}}_4 = z_4 (x_1 - x_3) \tag{۵۲-۴}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_5 = z_4 u / (1 - \tanh^2(\hat{\theta}_5)) \tag{۵۳-۴}$$






0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
x3 (rad)
0
5
10
15
20
Time(s)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
x4 (rad/s)
0
5
10
15
20
Time(s)
6
4
2
0
-2
-4
u (N.m)
0
5
10
15
20
Time(s)



شکل (۴-۸) مسیر خروجی، متغیرهای حالت، کنترل u و پارامترهای بروزرسانی شده

نتایج شبیه سازی در شکل(۴-۸) بیانگر توانایی کنترل در ردگیری خروجی از مسیر مطلوب علیرغم وجود عدم قطعیت‌های پارامتری خطی/غیرخطی بوده و همانطور که مشاهده می‌شود تمام متغیرهای حالت و نیز کنترل u کراندار می‌باشند و پارامترهای تطبیق به مقدار ثابتی همگرا می‌شوند.

۴-۶- نتیجه‌گیری

در این فصل سیستم‌های فیدبک محض در حضور عدم قطعیت پارامتری خطی/ غیرخطی که کلاس گسترده-ای از سیستم‌ها را شامل می‌شوند مورد بررسی قرار دادیم و کنترل کننده تطبیقی را برای این سیستم‌ها طراحی کردیم. با تلفیق طراحی پسگام، جداسازی مقیاس زمانی، روش جداسازی پارامتر و ایده استفاده از تابع مثبت تخمین پارامترها، ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی و همچنین قانون بروزرسانی پارامترهای نامعلوم را بدست آوردیم. بوسیله این کنترل پیشنهادی پایداری مجانبی مبدأ برای این سیستم‌ها بدست آمد و اثبات پایداری را بوسیله قضیه جدیدی که در فصل قبل ارائه شد انجام دادیم. نتایج شبیه‌سازی عملکرد مناسب قانون کنترل پیشنهادی را نشان می‌دهد.

فصل پنجم

کنترل مقاوم سیستم‌های فیدبک محض

۵-۱- مقدمه

در دو فصل قبل کنترل سیستم‌های فیدبک محض را در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری مورد بررسی قرار دادیم. اما غیر از عدم قطعیت‌های پارامتری، عدم قطعیت‌های دیگری که می‌تواند ناشی از نویز اندازه‌گیری، خطاهای مدل‌کردن، اغتشاش‌های خارجی، ساده‌سازی مدل یا تغییرات ناشی از گذر زمان و غیره باشد نیز سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد. پایداری و عملکرد سیستم تحت این نوع عدم قطعیت‌ها در حوزه کنترل مقاوم می‌باشد. در روش‌های کنترل مقاوم، مشخص بودن حدود عدم قطعیت شرطی است لازم که بسیار محدودکننده می‌باشد.

در این فصل با تلفیق کنترل پسگام و جداسازی مقیاس زمانی به طراحی کنترل مقاوم برای سیستم‌های فیدبک محض می‌پردازیم با این تفاوت که نیازی به دانستن حدود عدم قطعیت نمی‌باشد. همچنین این کنترل پیشنهادی می‌تواند بر پدیده "انفجار پیچیدگی" غلبه کند.

۵-۲-بیان مسئله و فرضیات

سیستم فیدبک محض زیر را در حضور عدم قطعیت های منطبق و نامنطبق بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_i(t) = f_i\big(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t)\big) + \delta_i(\bar{x}_n(t), t) \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(\bar{x}_n(t), u(t)) + \delta_n(\bar{x}_n(t), t)$$

$$y = x_1(t) \qquad (۱-۵)$$

که $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i$ و $u \in R$ به ترتیب متغیرهای حالت سیستم و ورودی کنترل می‌باشند. δ_i و δ_n به ترتیب عدم قطعیت های نامنطبق و منطبق می‌باشند. $(\bar{x}_i, x_{i+1}) \in D_{\bar{x}_{i+1}}$، $(\bar{x}_n, u) \in D_{\bar{x}_n} \times$

D_u، $(\bar{x}_n, t) \in D_{\bar{x}_n} \times R^+$، $D_{\bar{x}_i} \in R^i$، $D_{\bar{x}_{i+1}} \in R^{i+1}$، $D_{\bar{x}_n} \in R^n$، و $D_u \in R$ ، $f_i: D_{\bar{x}_{i+1}} \to R$ ، ، $f_n: D_{\bar{x}_n} \times D_u \to R$ توابع غیرخطی هستند که نسبت به آرگومان‌های خود مشتق‌پذیر می‌باشند.

هدف کنترل، طراحی قانون کنترل $u(t)$ برای سیستم (۵-۱) می‌باشد طوریکه خروجی سیستم سیگنال مرجع y_r را ردگیری کند. سیگنال مرجع y_r و مشتق آن $\dot{y}_r$ در دسترس و کراندار فرض می‌شوند.

فرض ۵-۱: $(\partial f_i/\partial x_{i+1})$ و $(\partial f_n/\partial u)$ برای $\bar{x}_{i+1} \in \Omega_{\bar{x}_{i+1}} \subset D_{\bar{x}_{i+1}}$ و $(\bar{x}_n, u) \in \Omega_{\bar{x}_n,u} \subset D_{\bar{x}_n} \times D_u$ غیر صفر می‌باشد که $\Omega_{\bar{x}_{i+1}}$ و $\Omega_{\bar{x}_n,u}$ مجموعه‌های فشرده می‌باشند. بدون از دست دادن کلیت مساله، فرض می‌کنیم که $(\partial f_i/\partial x_{i+1}) > 0$ و $(\partial f_n/\partial u) > 0$.

۵-۳- طراحی کنترل کننده مقاوم

در این قسمت به طراحی کنترل مقاوم با استفاده از ترکیب تکنیک پسگام وجداسازی مقیاس زمانی می‌پردازیم. پروسه طراحی کنترل مشابه تکنیک پسگام شامل n مرحله می‌باشد. در هر مرحله از طراحی با بکارگیری جداسازی مقیاس زمانی، نخست عدم قطعیت‌ها بوسیله یک فیلتر بهره بالا تخمین زده شده و سپس قوانین کنترل مجازی $\alpha_i, i = 1, \ldots, n-1$ استخراج می‌شود. سرانجام در مرحله آخر طراحی، کنترل حقیقی u بدست می‌آید. متغیرهای z_1 وz_i را بصورت $z_1 = x_1 - y_r$ و $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$ $(i = 2, \ldots, n)$ تعریف می‌کنیم.

گام اول: نخست جهت تخمین $\delta_1(\bar{x}_n)$ یک فیلتر بصورت زیر طراحی می‌کنیم.

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = f_1(x_1, x_2) - \frac{1}{\varepsilon_{11}}(\hat{x}_1 - x_1)\,, \qquad \hat{x}_1(0) = x_1(0) \qquad (۵-۲)$$

که $\varepsilon_{11} > 0$. اگر متغیر l_1 را بصورت

$$l_1 = \frac{\hat{x}_1 - x_1}{\varepsilon_{11}} \qquad (۳-۵)$$

تعریف کنیم آنگاه رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\varepsilon_{11}\dot{l}_1 = -l_1 - \delta_1(\bar{x}_n, t) \qquad (۴-۵)$$

هنگامیکه ε_{11} دارای مقدار بسیار کوچک باشد، متغیر l_1 نسبت به x_1 سریعتر بوده و به یک همسایگی کوچک از منیفولد زیر می‌رسد.

$$l_1 = -\delta_1(\bar{x}_n, t) \qquad (۵-۵)$$

با مشتق گیری از z_1 و با در نظر گرفتن x_2 به عنوان متغیر کنترل، رابطه (۵-۶) بدست می‌آید:

$$\dot{z}_1(t) = f_{11}(x_1, z_2 + \alpha_1) + \delta_1(\bar{x}_n, t) - \dot{y}_r \qquad (۶-۵)$$

حال α_1 به عنوان اولین کنترل مجازی می‌تواند از حل معادله زیر بدست آید:

$$f_1(x_1, z_2 + \alpha_1) + \delta_1(\bar{x}_n, t) - \dot{y}_r = -k_1 z_1 \qquad (۷-۵)$$

که منجر به پایداری مجانبی دینامیک حلقه بسته $\dot{z}_1 = -k_1 z_1$ برای زیر سیستم اول میشود. $k_1 > 0$ اولین بهره کنترل می‌باشد. اما در (۵-۷) بدلیل خاصیت غیرافاین بودن توابع غیرخطی، α_1 بطور صریح نمی‌تواند محاسبه شود. با توجه به دینامیک سریع بر اساس جداسازی مقیاس زمانی در تئوری آشفتگی منفرد، یک کنترل مجازی تقریبی به صورت زیر طراحی می‌شود:

$$\varepsilon_{12}\dot{\alpha}_1 = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1(t, \bar{z}_2, \alpha_1, l_1) \qquad (۸-۵)$$

که در آن، $\varepsilon_{12} \ll 1$، $\bar{z}_2 = [z_1, z_2]^T$ و $Q_1(t, \bar{z}_2, \alpha_1, l_1)$ به فرم

$$Q_1(t, \bar{z}_2, \alpha_1, l_1) = k_1 z_1 + f_1(x_1, z_2 + \alpha_1) - l_1 - \dot{y}_r \qquad (۹-۵)$$

بیان می‌شود. در معادله فوق، با استفاده از رابطه (۵-۵)، $\delta_1(\bar{x}_n, t)$ با $-l_1$ جایگزین شده است.

با فرض اینکه $\alpha_1 = h_1(t, \bar{z}_2, l_1)$ ریشه مجزایی برای $Q_1(t, \bar{z}_2, \alpha_1, l_1) = 0$ باشد، سیستم کاهش یافته بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 \qquad z_1(0) = z_{1,0} \tag{۱۰-۵}$$

و مدل لایه مرزی با معادلات

$$\frac{dy_{11}}{d\tau_{11}} = -y_{11} \tag{۱۱-۵}$$

$$\frac{dy_{12}}{d\tau_{12}} = -\text{sign}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1(t, \bar{z}_2, y_{12} + h_1(t, \bar{z}_2, l_1), l_1) \tag{۱۲-۵}$$

نشان داده می‌شود که در آن $y_{11} = l_1 + \delta_1(\bar{x}_n, t)$ ، $y_{12} = \alpha_1 - h_1(t, \bar{z}_2, l_1)$ ، $\tau_{11} = t/\varepsilon_{11}$ و $\tau_{12} = t/\varepsilon_{12}$ تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف $V_1 = \frac{1}{2} z_1^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۵-۱۰) نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 \tag{۱۳-۵}$$

گام $(i = 2, \ldots, n-1)$: مشابه گام اول ابتدا جهت تخمین $\delta_i(\bar{x}_n, t)$ یک فیلتر بصورت زیر طراحی می‌کنیم.

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - \frac{1}{\varepsilon_{i1}}(\hat{x}_i - x_i), \qquad \hat{x}_i(0) = x_i(0) \tag{۱۴-۵}$$

که $\varepsilon_{i1} > 0$. اگر متغیر l_i را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$l_i = \frac{\hat{x}_i - x_i}{\varepsilon_{i1}} \tag{۱۵-۵}$$

آنگاه نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_{i1}\dot{l}_i = -l_i - \delta_i(\bar{x}_n, t) \qquad (۱۶-۵)$$

هنگامیکه ε_{i1} دارای مقدار بسیار کوچک باشد، متغیر l_i نسبت به x_i سریعتر بوده و به یک همسایگی کوچک از منیفولد زیر می‌رسد.

$$l_i = -\delta_i(\bar{x}_n, t) \qquad (۱۷-۵)$$

با مشتق گیری از z_i بدست می‌آید:

$$\dot{z}_i = f_{i1}(\bar{x}_i(t), x_{i+1}(t)) + \delta_i(\bar{x}_n, t) - \dot{\alpha}_{i-1} \qquad (۱۸-۵)$$

مشابه گام اول، بایستی α_i را طوری تعیین می‌کنیم تا در رابطه

$$f_{i1}(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) + \delta_i(\bar{x}_n, t) - \dot{\alpha}_{i-1} = -k_i z_i \qquad (۱۹-۵)$$

صدق کند. $k_i > 0$ بهره کنترلی مثبت می‌باشد. در این مرحله، مشتق زمانی کنترل مجازی $\dot{\alpha}_{i-1}$ به چشم می خورد که در مرحله قبل با استفاده از رابطه $\dot{\alpha}_{i-1} = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_{i-1}}{\partial \alpha_{i-1}}\right) Q_{i-1}(t, \bar{z}_i, \alpha_{i-1}, l_i)/\varepsilon_{i-1,2}$ محاسبه شده است که در نتیجه از "انفجار پیچیدگی" ناشی از محاسبه این ترم جلوگیری می‌شود.

i امین کنترل مجازی تقریبی می‌تواند با استفاده از دینامیک سریع در رابطه زیر بدست آید:

$$\varepsilon_{i2}\dot{\alpha}_i = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i, l_i), \qquad \alpha_i(0) = \alpha_{i,0} \qquad (۲۰-۵)$$

که $\varepsilon_{i2} \ll 1$، $\bar{z}_{i+1} = [z_1, \dots, z_{i+1}]^T$ و $Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i, l_i)$ به فرم رابطه

$$Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i, l_i) = k_i z_i + f_i(\bar{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) - l_i - \dot{\alpha}_{i-1} \qquad (۲۱-۵)$$

بیان می‌شودکه در رابطه فوق، $\delta_i(\bar{x}_n, t)$ با $-l_i$ جایگزین شده است.

اجازه دهید $\alpha_i = h_i(t, \bar{z}_{i+1}, l_i)$ یک ریشه مجزا برای $Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i, l_i) = 0$ باشد. برای سیستم کاهش یافته داریم:

$$\dot{z}_i = -k_i z_i \qquad z_i(0) = z_{i,0} \tag{۲۲-۵}$$

و برای مدل لایه مرزی نتیجه می‌شود:

$$\frac{dy_{i1}}{d\tau_{i1}} = -y_{i1} \tag{۲۳-۵}$$

$$\frac{dy_{i2}}{d\tau_{i2}} = -\text{sign}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, y_{i2} + h_i(t, \bar{z}_{i+1}, l_i), l_i) \tag{۲۴-۵}$$

که در آن $y_{i1} = l_i + \delta_i(\bar{x}_n, t)$ ، $y_{i2} = \alpha_i - h_i(t, \bar{z}_{i+1}, l_i)$، $\tau_{i1} = \frac{t}{\varepsilon_{i1}}$ و $\tau_{i2} = \frac{t}{\varepsilon_{i2}}$ تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۵-۲۲)، نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_i = -\sum_{j=1}^{i} k_j z_j^2 \tag{۲۵-۵}$$

گام n: در آخرین مرحله، ورودی کنترل حقیقی u ظاهر می‌شود که هدف اصلی بدست آوردن این کنترل می‌باشد. مشابه گام‌های قبل ابتدا جهت تخمین $\delta_n(\bar{x}_n, t)$ یک فیلتر بصورت زیر طراحی می‌کنیم.

$$\dot{\hat{x}}_n(t) = f_n(\bar{x}_n, u) - \frac{1}{\varepsilon_{n1}}(\hat{x}_n - x_n)\,, \qquad \hat{x}_n(0) = x_n(0) \tag{۲۶-۵}$$

که $\varepsilon_{n1} > 0$. با تعریف متغیر l_n بصورت

$$l_n = \frac{\hat{x}_n - x_n}{\varepsilon_{n1}} \tag{۲۷-۵}$$

نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_{n1} \dot{l}_n = -l_n - \delta_n(\bar{x}_n, t) \tag{۲۸-۵}$$

برای $\varepsilon_{n1} \ll 1$ متغیر l_n نسبت به x_n سریعتر بوده و به یک همسایگی کوچک از منیفولد زیر می‌رسد.

$$l_n = -\delta_n(\bar{x}_n, t) \qquad (۲۹-۵)$$

با مشتق گیری از z_n بدست می‌آید:

$$\dot{z}_n = f_{n1}(\bar{x}_{in}, u) + \delta_n(\bar{x}_n, t) - \dot{\alpha}_{n-1} \qquad (۳۰-۵)$$

اکنون یک کنترل حقیقی تقریبی با استفاده از جداسازی مقیاس زمانی جهت برآورده کردن رابطه

$$f_{n1}(\bar{x}_{in}, u) + \delta_n(\bar{x}_n, t) - \dot{\alpha}_{n-1} = -k_n z_n \qquad (۳۱-۵)$$

مطابق معادله (۵-۳۲) ارائه می‌شود:

$$\varepsilon_{n2}\dot{u} = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial \alpha_n}\right) Q_n(t, \bar{z}_n, u, l_n) \qquad u(0) = u_0 \qquad (۳۲-۵)$$

که $\varepsilon_{n2} \ll 1$، $\bar{z}_n = [z_1, \dots, z_n]^T$ و $Q_n(t, \bar{z}_n, u, l_n)$ به فرم زیر بیان می‌شود:

$$Q_n(t, \bar{z}_n, u, l_n) = k_n z_n + f_n(\bar{x}_n, u) - l_n - \dot{\alpha}_{n-1} \qquad (۳۳-۵)$$

که در رابطه فوق، $\delta_n(\bar{x}_n, t)$ با $-l_n$ جایگزین شده است.

با فرض اینکه $u = h_n(t, \bar{z}_n, l_n)$ یک ریشه مجزا برای $Q_n(t, \bar{z}_n, u, l_n) = 0$ باشد، سیستم کاهش یافته بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_n = -k_n z_n \qquad z_n(0) = z_{n,0} \qquad (۳۴-۵)$$

و مدل لایه مرزی با معادلات

$$\frac{dy_{n1}}{d\tau_{n1}} = -y_{n1} \qquad (۳۵-۵)$$

$$\frac{dy_{n2}}{d\tau_{n2}} = -\text{sign}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) Q_n(t, \bar{z}_n, y_{n2} + h_n(t, \bar{z}_n, l_n), l_n) \qquad (۳۶-۵)$$

نشان داده می‌شود که در آن $y_{n1} = l_n + \delta_n(\bar{x}_n, t)$، $y_{n2} = u - h_i(t, \bar{z}_n, l_n)$، $\tau_{n1} = \frac{t}{\varepsilon_{n1}}$ و $\tau_{n2} = \frac{t}{\varepsilon_{n2}}$ می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۵-۳۴)، نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_n = -\sum_{j=1}^{n} k_j z_j^2 \qquad (۳۷-۵)$$

۵-۴- تحلیل پایداری

به منظور تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته، قضیه زیر را با استفاده از قضیه Tikhonov ارائه می‌کنیم.

قضیه ۵-۱: مسئله آشفته منفرد سیستم (۵-۱) و کنترلرهای (۵-۸)، (۵-۲۰) و (۵-۳۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط زیر برای تمام $[t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i - h_i(t, \bar{z}_{i+1}, l_i), \varepsilon_i] \in [0, \infty) \times D_{\bar{z}_{i+1}} \times D_{y_{i2}} \times [0, \varepsilon_0)$ برای دامنه‌های $D_{\bar{z}_{i+1}} \subset R^{i+1}$ و $D_{y_{i2}} \subset R$ که شامل مبدأ می‌باشد و در آن $i = 1, \ldots, n$، $\bar{z}_{n+1} = \bar{z}_n$، $D_{\bar{z}_{n+1}} = D_{\bar{z}_n}$ و $\alpha_n = u$ تعریف می‌شود، برقرار باشد.

۱) در هر مجموعه فشرده $D_{\bar{z}_{i+1}} \times D_{y_{i2}}$، توابع Q_i و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها نسبت به $(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i)$ پیوسته و کراندار باشد. همچنین $h_i(t, \bar{z}_{i+1}, l_i)$ و $(\partial Q_i / \partial \alpha_i)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول کراندار نسبت به آرگومان‌های خود باشند و $(\partial Q_i / \partial \bar{z}_{i+1})$ بطور یکنواخت در t، برای $\bar{z}_{i+1}$ لیپ شیتز باشد.

۲) $(t,\bar{z}_{i+1},y_{i2},l_i) \mapsto (\partial Q_i/\partial\alpha_i)(t,\bar{z}_{i+1},y_{i2}+h_i(t,\bar{z}_{i+1},l_i),l_i)$ برای تمام $(t,\bar{z}_{i+1}) \in [0,\infty)\times D_{\bar{z}_{i+1}}$ دارای کران پایین مثبت باشد.

آنگاه مبدا سیستم‌های (۵-۱۱)، (۵-۱۲)، (۵-۲۳)، (۵-۲۴)، (۵-۳۵) و (۵-۳۶) پایدار نمایی می‌باشد. همچنین اجازه دهید $\Gamma_{y_{i1}} \subset D_{y_{i1}}$ یک ناحیه جذب[1] برای $(dy_{i1}/d\tau_{i1}) = g_i(\bar{x}_i)(-y_{i1})$ بوده و نیز $\Omega_{y_{i1}}$ یک زیرمجموعه فشرده‌ای از $\Gamma_{y_{i1}}$ باشد. بعلاوه اجازه دهید $\Omega_{y_{i2}}$ یک زیرمجموعه فشرده‌ای از $\Gamma_{y_{i2}}$ باشد که $\Gamma_{y_{i2}} \subset D_{y_{i2}}$ یک ناحیه جذب برای سیستم $(dy_{i2}/d\tau_{i2}) = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial\alpha_i}\right) Q_i(0,\bar{z}_{i+1},y_{i2}+h_i(0,\bar{z}_{i+1},l_i),l_i)$ با $\bar{z}_{i+1,0} = [z_{1,0},\dots,z_{i+1,0}]^T$ می‌باشد. آنگاه برای هر زیرمجموعه فشرده $\Omega_{\bar{z}_n} \subset D_{\bar{z}_n}$، وجود دارد ثابت‌های مثبت ${\varepsilon_{i,2}}^*$، ${\varepsilon_{i,2}}^*$ و $T > 0$ بطوریکه بازای تمام $t \geq 0$، $\bar{z}_{i+1,0} \in \Omega_{\bar{z}_{i+1}}$، $\alpha_{i,0} - h_i(0,\bar{z}_{i+1,0},l_i) \in \Omega_{y_{i2}}$ ، $0 < \varepsilon_{i,1} < {\varepsilon_{i,1}}^*$ و $0 < \varepsilon_{i,2} < {\varepsilon_{i,2}}^*$، سیستم (۵-۱)، (۵-۸)، (۵-۲۰) و (۵-۳۲) دارای یک جواب منحصر به فرد $x_{i,\varepsilon_i}(t)\,, i = 1,\dots,n$ روی $[0,\infty)$ می‌باشد و همچنین $x_{1,\varepsilon_1}(t) = y_d(t) + O(\varepsilon_1)$ بطور یکنواخت برای $t \in [T,\infty)$ برقرار می‌باشد.

اثبات: بایستی شرایط قضیه ۵-۱ شرایط (الف)-(ج) قضیه Tikhonovرا ارضا کنند. اولا شرط (۱) مستقیما شرط (الف) را برآورده می‌کند. ثانیا شرط (ب) نیز بدلیل اینکه مبدا سیستم‌های کاهش یافته (۵-۱۰)، (۵-۲۲) و (۵-۳۴) پایدار نمایی می‌باشد، برقرار است. به عبارتی $\|\bar{z}_n(t)\| \leq \|\bar{z}_{n,0}\| e^{-w_0 t}$ برای $t \geq 0$ برقرار می‌باشد که در آن $w_0 > 0$ و $\bar{z}_{n,0} = [z_{1,0},\dots,z_{n,0}]^T$. با استفاده از قضیه لیاپانوف معکوس[2] وجود دارد تابع لیاپانوف V_c طوریکه

$$w_1\|\bar{z}_n\|^2 \leq V_c(t,\bar{z}_n) \leq w_2\|\bar{z}_n\|^2 \qquad (۳۸-۵)$$

$$\frac{\partial V_c}{\partial t}(t,\bar{z}_n) + \frac{\partial V_c}{\partial \bar{z}_n}(t,\bar{z}_n)K\bar{z}_n \leq -w_3\|\bar{z}_n\|^2 \qquad (۳۹-۵)$$

[1]Region of Attraction
[2]Converse Lyapunov Theorem

که w_1، w_2 ، w_3 ثوابت مثبت و $K = \mathrm{Diag}[-k_1, \ldots, -k_n]$ یک ماتریس قطری می‌باشد. لازم به ذکر است که هر ثابت مثبت c در شرط (ب) میتواند انتخاب شود و بنابراین $\Omega_{\bar{z}_n} \subset \{\bar{z}_n \in D_{\bar{z}_n} | w_1(\bar{z}_n) \leq \rho c, 0 < \rho < 1\}$ میتواند هر زیرمجموعه فشرده‌ای از $D_{\bar{z}_n}$ باشد.

پایداری نمایی سیستم‌های (۵-۱۱)، (۵-۱۲)، (۵-۲۳)، (۵-۲۴)، (۵-۳۵) و (۵-۳۶) بوسیله خطی سازی حول y_i بطور محلی اثبات می‌شود. با در نظر گرفتن فرض ۵-۱ و شرط ۲، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) = \mathrm{sign}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i}\right) > 0$$
$$\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) = \mathrm{sign}\left(\frac{\partial f_n}{\partial u}\right) > 0 \qquad (۴۰\text{-}۵)$$

که این پایداری نمایی محلی مبدا را برای مدل لایه مرزی نشان می‌دهد. در نهایت از آنجایی که هر سه شرط قضیه Tikhonov ارضا شده است، می‌توان این قضیه را بکار برد.

نتیجتا برای هر زیرمجموعه فشرده $\Omega_{\bar{z}_n} \subset D_{\bar{z}_n}$، وجود دارد ثابت‌های مثبت ${\varepsilon_{i,2}}^*$، ${\varepsilon_{i,2}}^*$ و $T > 0$ بطوریکه برای تمام $t \geq 0$، $\bar{z}_{i+1,0} \in \Omega_{\bar{z}_{i+1}}$، $\alpha_{i,0} - h_i(0, \bar{z}_{i+1,0}, l_i) \in \Omega_{y_{i2}}$ ، $0 < \varepsilon_{i,1} < {\varepsilon_{i,1}}^*$ و $0 < \varepsilon_{i,2} < {\varepsilon_{i,2}}^*$، سیستم (۵-۱)، (۵-۸)، (۵-۲۰) و (۵-۳۲) دارای یک جواب منحصر به فرد $x_{i,\varepsilon_i}(t), i = 1, \ldots, n$ روی $[0, \infty)$ می‌باشد و همچنین $x_{1,\varepsilon_1}(t) = y_d(t) + O(\varepsilon_1)$ بطور یکنواخت برای $t \in [T, \infty)$برقرار می‌باشد.

تذکر۵-۱: در [۴۱] سیستم‌های به فرم (۵-۱) که f_i و f_n توابع نامعلوم هستند، تحت فرض‌های زیر مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

فرض ۱: اگر $g_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = \partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})/\partial x_{i+1}$ و $g_n(\bar{x}_n, u) = \partial f_n(\bar{x}_n, u)/\partial u$ باشد، اولا علامت g_i و g_n مشخص باشد و ثانیا وجود داشته باشد ثوابت مثبت $\bar{g}_i$ ، $\underline{g}_i$، $\bar{g}_n$ و $\underline{g}_n$ طوریکه

$$0 < \underline{g}_i \leq |g_i(\bar{x}_i, x_{i+1})| \leq \bar{g}_i < \infty \qquad \forall \quad \bar{x}_{i+1} \in R^{i+1} \qquad (۴۱\text{-}۵)$$

$$0 < \underline{g}_n \leq |g_n(\bar{x}_n, u)| \leq \bar{g}_n < \infty \qquad \forall \quad \bar{x}_n \in R^n \qquad (۴۲\text{-}۵)$$

فرض ۲: وجود داشته باشد توابع مثبت $\varphi_i(\bar{x}_i)$ طوریکه

$$|\delta_i(\bar{x}_n, t)| \leq \varphi_i(\bar{x}_i) \qquad \forall(\bar{x}_n, t) \in R^n \times R_+ \qquad i = 1, \dots, n \qquad (۴۳-۵)$$

سپس با استفاده از شبکه عصبی به تقریب توابع نامعلوم در سیستم پرداخته و کنترل را طراحی می‌کند. این در حالی است که در طرح پیشنهادی این فصل فقط فرض مشخص بودن علامت g_i و g_n (فرض ۵-۱) لازم است.

۵-۵- نتایج شبیه سازی‌ها

۵-۵-۱- شبیه‌سازی سیستم مرتبه دوم

در این قسمت برای بررسی بهتر عملکرد کنترل طراحی شده و مقایسه آن با طرح پیشنهادی در [۴۱] ، سیستم مرتبه دوم زیر را که در [۴۱] نیز شبیه‌سازی شده در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = {x_2}^3 + x_2 e^{-1-{x_1}^2} + \frac{1-e^{-x_1}}{1+e^{-x_1}} + 0.2\sin(\pi t)$$

$$\dot{x}_2 = 0.15u^3 + 0.1(1 + {x_2}^2)u + \sin(0.1u) + {x_1}^2 + 0.2\cos(5t)$$

$$y = x_1 \qquad (۴۴-۵)$$

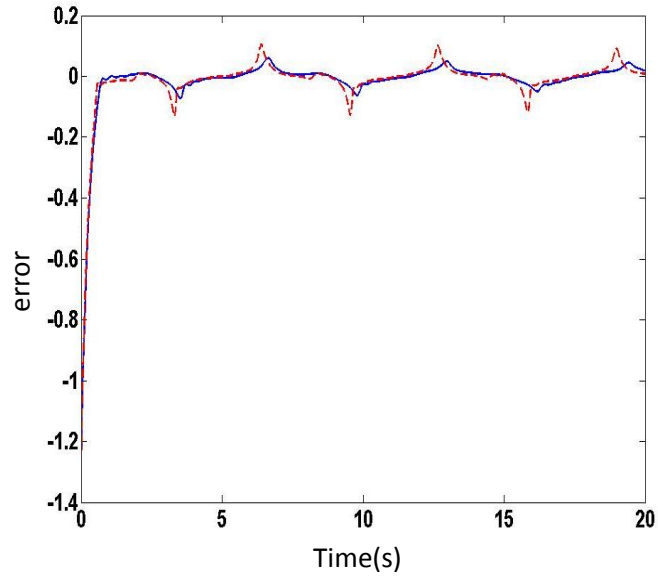
در سیستم فوق $\frac{1-e^{-x_1}}{1+e^{-x_1}} + 0.2\sin(\pi t)$ و $\sin(0.1u) + {x_1}^2 + 0.2\cos(5t)$ به عنوان عدم قطعیت در نظر گرفته می‌شوند. هدف، پیشنهاد سیگنال کنترل u است به گونه‌ای که خروجی سیستم، مسیر مرجع y_r را که بوسیله سیستم نوسانگر واندرپل زیر تولید می‌شود، ردگیری کند.

$$\dot{x}_{d1} = x_{d2}$$

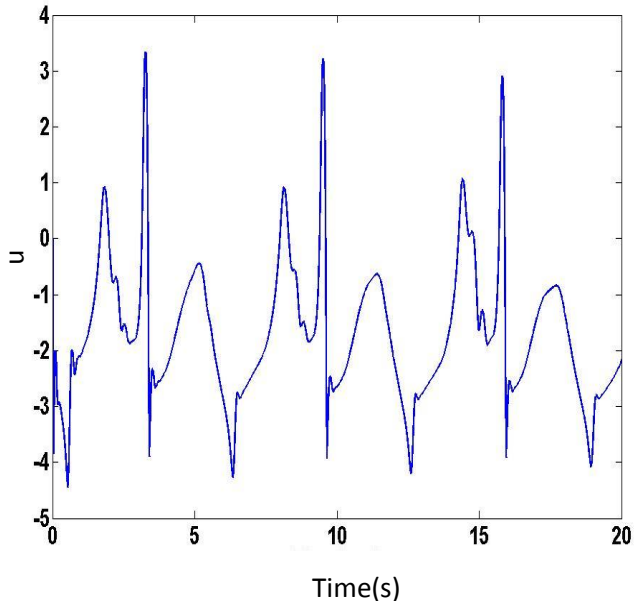
$$\dot{x}_{d2} = -x_{d1} + \beta(1 - {x_{d1}}^2)x_{d2}$$

$$y_r = x_{d1} \qquad (۴۵-۵)$$

برای این سیستم $\beta = 0.2$، $x_{d1}(0) = 1.8$ و $x_{d2}(0) = 0.5$ در نظر گرفته شده است. مقادیر اولیه بصورت $x_1(0) = \hat{x}_1(0) = 0.5$، $x_2(0) = \hat{x}_2(0) = 1.8$ بعلاوه پارامترهای طراحی بصورت $k_1 = 4$، $k_2 = 2$ $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{21} = 0.01$ و $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0.1$ فرض شده‌اند.



شکل (۵-۱) مقایسه خطای ردگیری کنترل پیشنهادی (——) و طرح [۴۱] (----)



شکل (۵-۲) ورودی کنترل

شکل‌های(۵-۱)- (۵-۲) نشان می‌دهد که در مقایسه با [۴۱]، دقت ردگیری در کنترل پیشنهادی بهتر از [۴۱] بوده و نیز تعداد پارامترهای طراحی، پیچیدگی طراحی و فرضیات مساله کمتر است.

۵-۵-۲- شبیه سازی سیستم مرتبه سوم

همچنین در این قسمت یک سیستم فیدبک محض مرتبه سوم در حضور عدم قطعیت که در [۴۱] نیز شبیه سازی شده در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + \frac{{x_2}^3}{5} + 0.1\sin(x_1x_2x_3t)$$

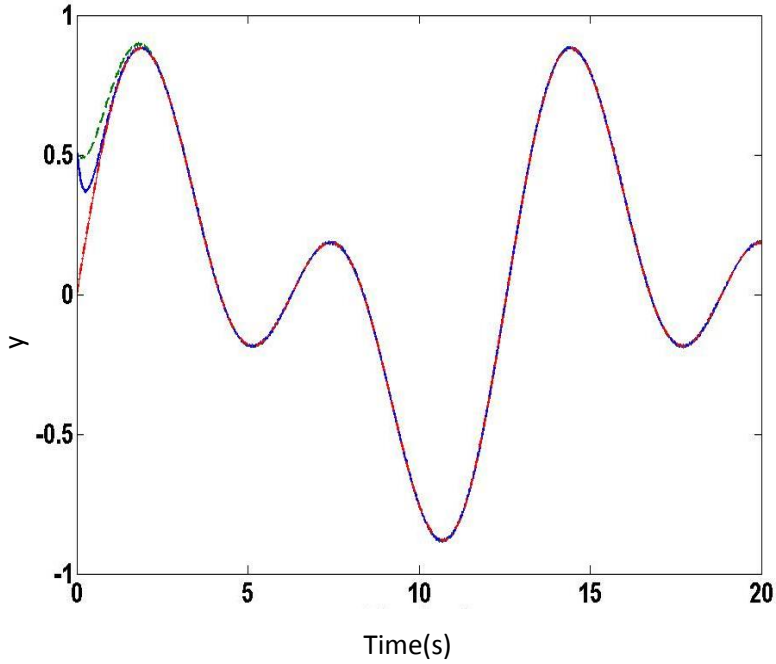
$$\dot{x}_2 = x_3 + \frac{{x_3}^3}{2} + 0.1\cos(x_2x_3t)$$

$$\dot{x}_3 = [1 + 0.1\sin(0.5x_1x_2x_3)]u + u^3/7 + x_1x_2x_3 + 0.2\cos(0.5x_2t)$$

$$y = x_1 \qquad (۴۶\text{-}۵)$$

در سیستم فوق $0.1\sin(x_1x_2x_3t)$ ، $0.1\cos(x_2x_3t)$ و $x_1x_2x_3 + 0.2\cos(0.5x_2t)$ به عنوان عدم قطعیت لحاظ شده‌اند. هدف، پیشنهاد سیگنال کنترل u است به گونه‌ای که خروجی سیستم، مسیر مرجع $y_r = 0.5[\sin(t) + \sin(0.5t)]$ را ردگیری کند.

مقادیر اولیه بصورت $x_1(0) = \hat{x}_1(0) = 0.5$ ، $x_2(0) = \hat{x}_2(0) = 0.3$ ، $x_3(0) = \hat{x}_3(0) = 0.8$ بعلاوه پارامترهای طراحی بصورت $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ و $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = 0.001$ ، $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{32} = 0.01$ فرض شده‌اند.



شکل (۵-۳) مقایسه ردگیری کنترل پیشنهادی (——) و طرح [۴۱] (-----) از سیگنال مرجع (-·-·-)

شکل(۵-۳) عملکرد رضایتبخش کنترل پیشنهادی در ردگیری خروجی سیستم از سیگنال مرجع رانشان می‌دهد.

۵-۵-۳- شبیه‌سازی روبات تک لینکی با مفصل انعطاف پذیر

در این قسمت از شبیه‌سازی، روبات تک لینکی با مفصل انعطاف پذیر که در فصل قبل در مورد آن توضیح داده شد را به عنوان سیستم عملی جهت اعمال طرح کنترل پیشنهادی با معادلات دینامیکی زیر در نظر می‌گیریم [۱۳۳].

$$I\ddot{q}_1 + Mgl\sin(q_1) = K(q_2 - q_1) + d_1$$

$$J\ddot{q}_2 + B\dot{q}_2 - K(q_1 - q_2) = u + d_2 \qquad (۴۷-۵)$$

d_1 و d_2 اغتشاش‌های خارجی می‌باشند. در کنترل عملی یک سیستم، ممکن است پارامترها بطور کامل نامعین نباشند و مقدار نامی آنها مشخص باشد. از آنجایی که المانهای الکتریکی و مکانیکی ممکن است تحت گرما دارای تغییراتی حول مقدار نامی خود باشند از این رو این پارامترها را می‌توان متشکل از دو قسمت دانست: ترم نامی معلوم بعلاوه ترم نامعین.

فرض کنید پارامترهای B، K و Mgl بصورت زیر تعریف شوند[۱۳۳]:

$$B(.) = B_0 + \Delta B(t) \qquad (۴۸-۵)$$

$$K(.) = K_0 + \Delta K(t) \qquad (۴۹-۵)$$

$$Mgl(.) = Mgl_0 + \Delta Mgl(t) \qquad (۵۰-۵)$$

در این روابط $(.)_0$ ترم نامی معلوم و $\Delta(.)$ یک آشفتگی متغیر با زمان با مقدار کوچک را نشان می‌دهند. تحت فرض فوق، سیستم (۵-۴۷) می‌تواند طیف گسترده‌ای از روبات‌های با مفصل انعطاف‌پذیر را در حضور عدم قطعیت‌های متغیر با زمان و اغتشاشات ناشی از محیط شامل شود. مدل (۵-۴۷) را با انتخاب متغیرهای حالت $x_1 = q_1$، $x_2 = \dot{q}_1$، $x_3 = q_2$ و $x_4 = \dot{q}_2$ می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{Mgl_0}{I}\sin(x_1) + \frac{K_0}{I}(x_3 - x_1) + \delta_1(x_1, x_3, t) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -\frac{B_0}{J}x_4 + \frac{K_0}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}u + \delta_2(x_1, x_3, x_4, t)
\end{aligned} \qquad (۵۱-۵)$$

که $\delta_1(x_1, x_3, t)$ و $\delta_2(x_1, x_3, x_4, t)$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_1(x_1, x_3, t) = -\frac{\Delta Mgl(t)}{I}\sin(x_1) + \frac{\Delta K(t)}{I}(x_3 - x_1) + \frac{d_1(t)}{I}$$

$$\delta_2(x_1, x_3, x_4, t) = -\frac{\Delta B(t)}{J} x_4 + \frac{\Delta K(t)}{J}(x_1 - x_3) + \frac{d_2(t)}{J} \qquad (۵۲-۵)$$

مقدار پارامترهای سیستم بصورت زیر انتخاب می‌شود[۱۳۴]:

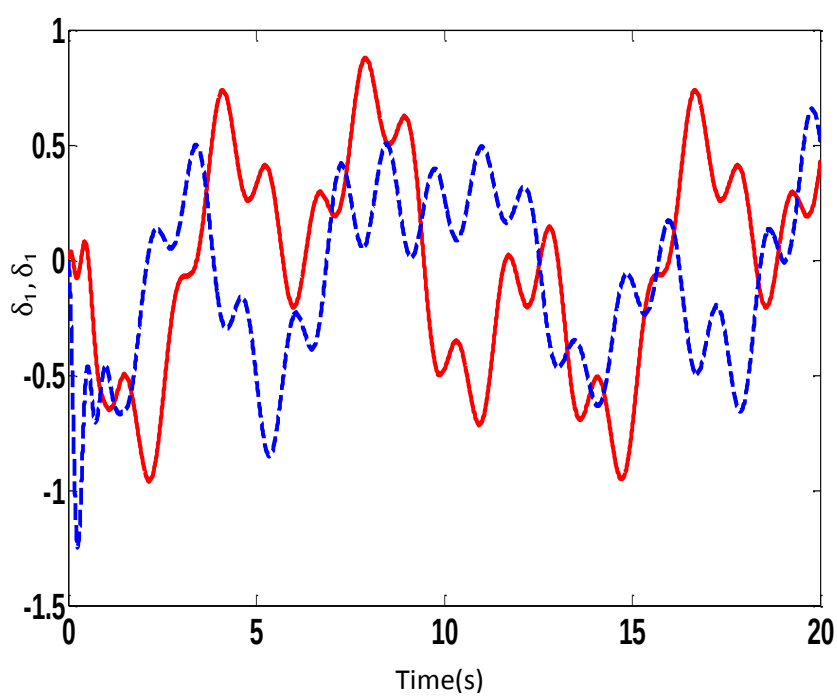
$I = 1\ \text{kg},\qquad J = 1\quad \text{kg.m}^2$

$Mgl_0 = 10\quad \text{Nm}\ ,\qquad \Delta Mgl = \sin(0.5t)\ \text{Nm}$

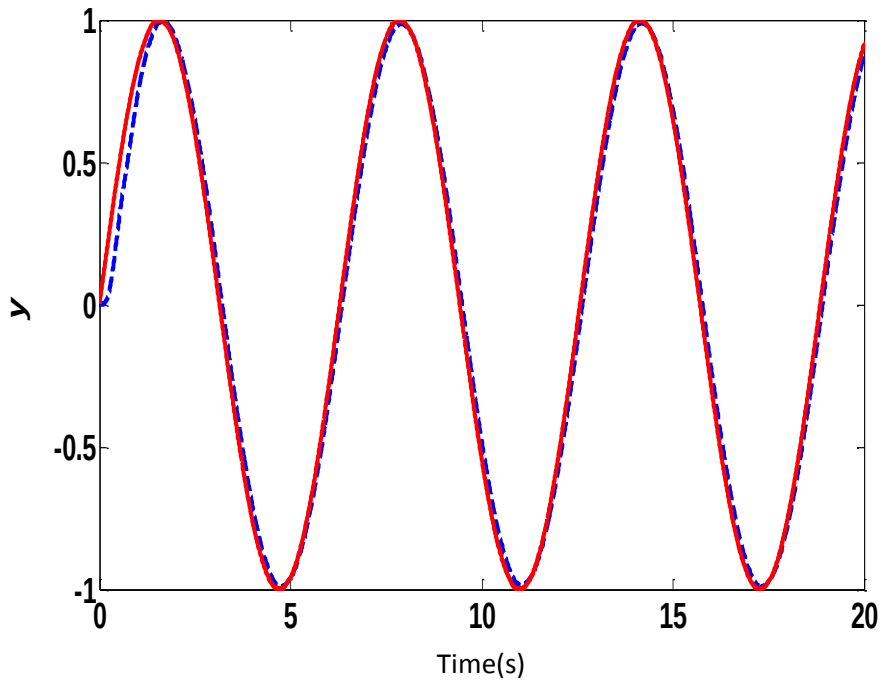
$K_0 = 100\quad \text{Nm/rad},\qquad \Delta K = 5\cos(0.5t)\ \text{Nm/rad}$

$B_0 = 0.9\ \ \text{Nm.s/rad},\quad \Delta B = 0.1\cos(0.1t)\ \text{Nm.s/rad}$

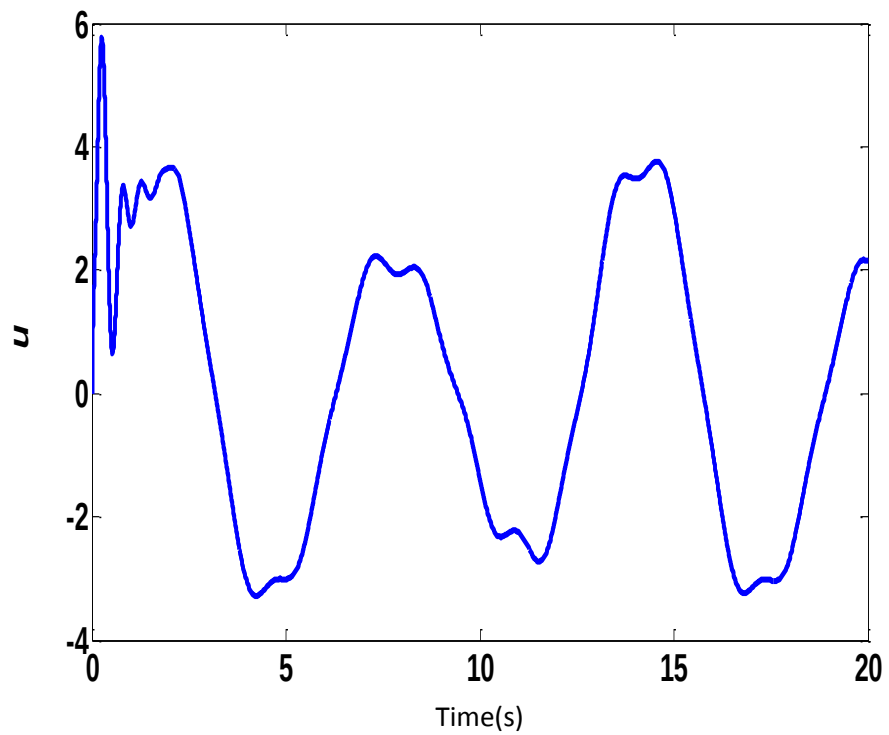
همچنین اغتشاش‌های خارجی بصورت $d_1 = 0.2\sin(t)$ و $d_2 = 0.2\sin(t)$ در نظر گرفته می‌شوند. هدف، پیشنهاد سیگنال کنترل u است به گونه‌ای که خروجی سیستم، مسیر مرجع $y_r = \sin(t)$ را ردگیری کند.



شکل (۵-۴)عدم قطعیت‌های δ_1 (----) و δ_2 (——)



شکل (۵-۵) ردگیری خروجی سیستم (----) از سیگنال مرجع(——)



شکل (۵-۶) کنترل u

با انتخاب مقادیر اولیه بصورت $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0) = u(0) = 0$، $x(0) = [\,0\ 0\ 0\ 0\,]^T$ و $\hat{x}_2(0) = 0$ و $\hat{x}_4(0) = 0$ پارامترهای طراحی بصورت $k_1 = 4, k_2 = k_3 = k_4 = 2$، $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{41} = 0.001$، $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{42} = 0.01$ نتایج زیر حاصل شده‌اند.

شکل (۵-۴) عدم قطعیت‌های منطبق و نامنطبق که ناشی از مدل سیستم و اغتشاشات خارجی می‌باشند را نشان می‌دهد. عملکرد ردگیری خروجی سیستم از سیگنال مرجع در حضور این عدم قطعیت‌ها و نیز ورودی کنترل به ترتیب در شکل‌های (۵-۵) و (۵-۶) نشان دهنده توانایی کنترل پیشنهادی می‌باشد.

۵-۶- نتیجه‌گیری

در این فصل با تلفیق کنترل پسگام و جداسازی مقیاس زمانی به طراحی کنترل مقاوم برای سیستم‌های فیدبک محض پرداختیم. در هر مرحله از طراحی با بکارگیری جداسازی مقیاس زمانی، نخست عدم قطعیت‌ها بوسیله یک فیلتر بهره بالا تخمین زده شده و سپس قوانین کنترل مجازی/حقیقی استخراج شدند. در این طراحی نیازی به دانستن حدود عدم قطعیت نبوده و همچنین می‌تواند باعث کاهش پیچیدگی محاسبات ناشی از تکرار مشتقات کنترل‌های مجازی در طراحی پسگام شود. نتایج شبیه‌سازی بیانگر کارایی مناسب قانون کنترل پیشنهادی علیرغم سادگی آن است.

فصل ششم

کنترل فیدبک خروجی سیستم‌های فیدبک محض

۶-۱- مقدمه

همانطور که در فصل اول اشاره شد با توجه به اینکه در سیستم‌های واقعی و عملی در دسترس بودن تمام متغیرهای حالت سیستم امکانپذیر نیست، یکی از مهم‌ترین مسائل در زمینه کنترل غیرخطی، پایدارسازی بوسیله فیدبک خروجی است و از آنجایی که اصل جداسازی معمولاً برای سیستم‌های غیرخطی صادق نیست مسئله کنترل فیدبک خروجی سخت‌تر از کنترل فیدبک حالت می‌باشد.

در این فصل با تلفیق طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، کنترل فیدبک خروجی سیستم های فیدبک محض غیرافاین با متغیرهای حالت غیر قابل اندازه‌گیری مورد بررسی قرار می‌گیرد. کنترل پیشنهادی علیرغم ساده بودن می‌تواند بر مسئله انفجار پیچیدگی ناشی از روش پسگام در کنترل سیستم‌های فیدبک محض غلبه کند.

۶-۲- بیان مساله و فرضیات

سیستم غیرخطی فیدبک محض زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_i = f_i(\underline{x}_i, x_{i+1}) + x_{i+1} \qquad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\dot{x}_n = f_n(\underline{x}_n, u) + u$$

$$y = x_1 \qquad (۱-۶)$$

که $\underline{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i, i = 1, 2, \dots, n$ بردار متغیرهای حالت سیستم، $u \in R$ و $y \in R$ به ترتیب ورودی و خروجی سیستم و $f_i(.),\ \ i = 1, 2, \dots, n$ توابع غیرخطی می‌باشند. در اینجا فرض شده که خروجی y برای اندازه‌گیری در دسترس می‌باشد.

فرض۶- ۱: وجود دارد ثوابت $m_i,\ i = 1, \dots, n$ بازای هر $X_1,\ X_2 \in R^i$، طوریکه:

$$|f_i(X_1) - f_i(X_2)| \leq m_i \| X_1 - X_2 \| \qquad (۲-۶)$$

فرض ۶-۲: $(\partial f_i/\partial x_{i+1})$ و $(\partial f_n/\partial u)$ برای $\underline{x}_{i+1} \in \Omega_{\underline{x}_{i+1}} \subset D_{\underline{x}_{i+1}}$ و $(\underline{x}_n, u) \in \Omega_{\underline{x}_n,u} \subset D_{\underline{x}_n} \times D_u$ غیر صفر می‌باشد که $\Omega_{\underline{x}_{i+1}}$ و $\Omega_{\underline{x}_n,u}$ مجموعه‌های فشرده می‌باشند. بدون از دست دادن کلیت مساله، فرض می‌کنیم که $(\partial f_i/\partial x_{i+1}) > 0$ و $(\partial f_n/\partial u) > 0$.

تذکر ۶-۱: توجه شود که ثوابت m_i در فرض ۶-۱، در طراحی کنترل استفاده نمی‌شوند و فقط به منظور اثبات پایداری سیستم حلقه بسته در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین فقط لازم است که این ثوابت وجود داشته باشند حتی اگر نامعلوم باشند.

در این فصل از رساله فرض شده که متغیرهای حالت $x_i,\ i = 2, \dots, n$ در دسترس نمی‌باشند و هدف کنترل، طراحی یک کنترل فیدبک خروجی با استفاده از جداسازی مقیاس زمانی است طوریکه خطای ردگیری ورویتگر حالت به اندازه کافی کوچک باشد.

۶-۳- طراحی رویتگر حالت

با توجه به اینکه $x_2, x_3, \dots, x_n$ در سیستم (۶-۱) قابل دسترس نیستند در نتیجه ابتدا به یک رویتگر حالت جهت تخمین این حالت‌ها نیاز است تا بعد از آن کنترل فیدبک خروجی بر اساس این رویتگر حالت طراحی شود. سیستم (۶-۱) را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم[۱۲۷] .

$$\dot{x}_i = f_i(\underline{\hat{x}}_i, \hat{x}_{i+1}) + x_{i+1} + \Delta f_i \qquad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\dot{x}_n = f_n(\underline{\hat{x}}_n, u) + u + \Delta f_n$$

$$y = x_1 \qquad (۳-۶)$$

که در آن، $\Delta f_i = f_i(\underline{x}_i, x_{i+1}) - f_i(\underline{\hat{x}}_i, \hat{x}_{i+1}),\ i = 1, 2, \dots, n-1$، $\Delta f_n = f_n(\underline{x}_n, u) - f_n(\underline{\hat{x}}_n, u)$ و $\underline{\hat{x}}_i$ تخمین بردار حالت $\underline{x}_i$ می‌باشد. با تعریف $u = \hat{x}_{i+1}$ سیستم (۶-۳) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\underline{\dot{x}}_n = A\underline{x}_n + Ky + \sum_{i=1}^{n-1} B_i\,[f_i(\underline{\hat{x}}_i, \hat{x}_{i+1}) + \Delta f_i] + B_n[f_n(\underline{\hat{x}}_n, u) + u + \Delta f_n]$$

$$= A\underline{x}_n + Ky + \textstyle\sum_{i=1}^{n} B_i\,[f_i(\underline{\hat{x}}_i, \hat{x}_{i+1}) + \Delta f_i] + B_n u \qquad (۴-۶)$$

که در آن $A = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ \vdots & & I & \\ -k_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$، $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$، $B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B_i = [0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0]^T$ می‌باشد.

بردار K را طوری انتخاب می‌کنیم که A یک ماتریس هرویتز اکید شود. بدین صورت که با داشتن ماتریس $Q = Q^T > 0$، وجود داشته باشد ماتریس $P = P^T > 0$ طوریکه

$$A^T P + PA = -2Q \qquad (۵-۶)$$

رویتگر حالت را به فرم زیر طراحی می‌کنیم.

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + k_i(y - \hat{x}_1) + f_i(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}) \qquad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\dot{\hat{x}}_n = k_n(y - \hat{x}_1) + f_n(\underline{\hat{x}}_n, u) + u$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1 \qquad (۶-۶)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{\underline{\hat{x}}}_n = A\underline{\hat{x}}_n + Ky + \sum_{i=1}^{n} B_i\, f_i(\underline{\hat{x}}_i, \hat{x}_{i+1}) + B_n u$$

$$\hat{y} = C\underline{\hat{x}}_n \qquad (۶-۷)$$

در رابطه (۶-۷)، $C = [1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0]$ می‌باشد.

با فرض اینکه $e = \underline{x}_n - \underline{\hat{x}}_n$ خطای رویتگر باشد. از روابط (۶-۴) و (۶-۷) نتیجه می‌شود:

$$\dot{e} = Ae + \sum_{i=1}^{n} B_i\, \Delta f_i = Ae + \Delta F \qquad (۶-۸)$$

که ΔF به صورت $\Delta F = [\Delta f_1, \dots, \Delta f_n]^T$ تعریف می‌شود.

با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف به صورت

$$V_0 = \frac{1}{2} e^T P e \qquad (۶-۹)$$

مشتق V_0 به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{V}_0 = \frac{1}{2} \dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} \qquad (۶-۱۰)$$

رابطه (۶-۵) و نیز جایگذاری (۶-۸) در (۶-۱۰)، $\dot{V}_0 = -e^T Q e + e^T P \Delta F$ را نتیجه می‌دهد. با توجه به رابطه $\lambda_{min}(Q)\|e\|^2 \le e^T Q e \le \lambda_{max}(Q)\|e\|^2$ بدست می‌آید:

$$\dot{V}_0 \le -\lambda_{min}(Q)\|e\|^2 + e^T P \Delta F \qquad (۶-۱۱)$$

با استفاده از نامساوی $2ab \le a^2 + b^2$ و همچنین در نظر گرفتن فرض ۶-۱، نامساوی زیر بدست می‌آید.

$$|e^T P \Delta F| \le \frac{1}{2}\|e\|^2 + \frac{1}{2}\|P\|^2\|\Delta F\|^2 \le \frac{1}{2}\|e\|^2 + \frac{1}{2}\|P\|^2(|\Delta f_1|^2 + \dots + |\Delta f_n|^2)$$

$$\le \frac{1}{2}\|e\|^2 + \|P\|^2 \sum_{i=1}^{n} m_i{}^2\, \|e\|^2 \qquad (۶-۱۲)$$

و با جایگذاری (۶-۱۲) در (۶-۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_0 \leq -r_1\|e\|^2 \qquad (۱۳\text{-}۶)$$

که در آن $r_1 = \lambda_{min}(Q) - 1 - \|P\|^2 \sum_{i=1}^{n} {m_i}^2$ می‌باشد.

از آنجایی که رویتگر طراحی شده در (۶-۶) می‌تواند همگرایی خطای رویتگر را با انتخاب $r_1 > 0$ تامین کند، بنابراین این طراحی قابل قبول می‌باشد.

۶-۴- طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی

در این قسمت کنترل کننده فیدبک خروجی با استفاده از رویتگر قسمت قبل و ترکیب روش پسگام و تئوری آشفتگی منفرد طراحی می‌شود. متغیرهای z_1 و z_i را بصورت $z_1 = y - y_r$ و $z_i = \hat{x}_i - \alpha_{i-1},\ i = 2, \dots, n$ تعریف می‌کنیم.

گام اول: ابتدا با تعریف $x_2 = \hat{x}_2 + e_2$ و با مشتق گیری از z_1، بدست می‌آید:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_r = x_2 + f_1(x_1, x_2) - \dot{y}_r = \hat{x}_2 + f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - \dot{y}_r + e_2 + \Delta f_1 \qquad (۱۴\text{-}۶)$$

که با در نظر گرفتن $\hat{x}_2$ به عنوان متغیر کنترل نتیجه می‌شود:

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + f_1(\hat{x}_1, z_2 + \alpha_1) - \dot{y}_r + e_2 + \Delta f_1 \qquad (۱۵\text{-}۶)$$

حال α_1 به عنوان اولین کنترل مجازی می‌تواند از حل معادله زیر بدست آید:

$$\alpha_1 + f_1(\hat{x}_1, z_2 + \alpha_1) - \dot{y}_r = -c_1 z_1 \qquad (۱۶\text{-}۶)$$

$c_1 > 1$ اولین بهره کنترل می‌باشد. بدلیل اینکه α_1 بطور صریح نمی‌تواند محاسبه شود، یک کنترل مجازی تقریبی به صورت

$$\varepsilon_1 \dot{\alpha}_1 = -\text{sign}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1(t, \hat{x}_1, \bar{z}_2, \alpha_1) \qquad \alpha_1(0) = \alpha_{1,0} \qquad (۱۷\text{-}۶)$$

طراحی می‌شود که در آن، $\varepsilon_1 \ll 1$، $\bar{z}_2 = [z_1, z_2]^T$ و $Q_1(t, \hat{x}_1, \bar{z}_2, \alpha_1)$ به فرم زیر بیان می‌شود:

$$Q_1(t, \hat{x}_1, \bar{z}_2, \alpha_1) = c_1 z_1 + \alpha_1 + f_1(\hat{x}_1, z_2 + \alpha_1) - \dot{y}_r \qquad (۱۸\text{-}۶)$$

اجازه دهید$\alpha_1 = h_1(t, \hat{x}_1, \bar{z}_2)$ ریشه مجزایی برای $Q_1(t, \hat{x}_1, \bar{z}_2, \alpha_1) = 0$ باشد. به این ترتیب برای سیستم کاهش یافته داریم:

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + e_2 + \Delta f_1 \qquad z_1(0) = z_{1,0} \qquad (۱۹\text{-}۶)$$

و سیستم لایه مرزی با معادله زیر نشان داده میشود:

$$\frac{dv_1}{d\tau_1} = -\text{sign}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1(t, \hat{x}_1, \bar{z}_2, v_1 + h_1(t, \hat{x}_1, \bar{z}_2)\ ) \qquad (۲۰\text{-}۶)$$

که در آن $v_1 = \alpha_1 - h_1(t, \hat{x}_1, \bar{z}_2)$ و $\tau_1 = t/\varepsilon_1$ می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف $V_1 = V_0 + \frac{1}{2} z_1^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۶-۱۹)، نتیجه میشود:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_0 + z_1[-c_1 z_1 + z_2 + e_2 + \Delta f_1] \leq -r\|e\|^2 - c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 e_2 + |z_1 \Delta f_1| \quad (۲۱\text{-}۶)$$

با استفاده از فرض ۶-۱ بدست می‌آید:

$$z_1 e_2 \leq \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2}|e_2|^2 \leq \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2}\|e\|^2 \qquad (۲۲\text{-}۶)$$

$$|z_1 \Delta f_1| \leq \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2}|\Delta f_1|^2 \leq \frac{1}{2} z_1^2 + {m_1}^2 \|e\|^2 \qquad (۲۳\text{-}۶)$$

با جایگذاری (۶-۲۲) و (۶-۲۳) در (۶-۲۱) نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_1 \leq -r\|e\|^2 - (c_1 - 1)z_1^2 + z_1 z_2 \qquad (۲۴-۶)$$

که در رابطه فوق $r = r_1 - \frac{1}{2} - {m_1}^2$ تعریف می‌شود.

گام $(i = 2, \ldots, n-1)$: با مشتق گیری از z_i بدست می‌آید:

$$\dot{z}_i = \dot{\hat{x}}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = \hat{x}_{i+1} + k_i e_1 + f_i(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}) - \dot{\alpha}_{i-1} = z_{i+1} + \alpha_i + k_i e_1 + f_i(\hat{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) - \dot{\alpha}_{i-1} \qquad (۲۵-۶)$$

مشابه گام اول، بایستی α_i را طوری تعیین می کنیم تا در رابطه زیر صدق کند.

$$\alpha_i + k_i e_1 + f_i(\hat{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) - \dot{\alpha}_{i-1} = -c_i z_i - z_{i-1} \qquad (۲۶-۶)$$

$c_i > 0$ بهره کنترلی مثبت می‌باشد. i امین کنترل مجازی تقریبی نیز میتواند با استفاده از دینامیک سریع زیر بدست آید:

$$\varepsilon_i \dot{\alpha}_i = -sign\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i), \qquad \alpha_i(0) = \alpha_{i,0} \qquad (۲۷-۶)$$

که $\varepsilon_i \ll 1$، $\bar{z}_{i+1} = [z_1, \ldots, z_{i+1}]^T$ و $Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i)$ به صورت

$$Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i) = c_i z_i + z_{i-1} + \alpha_i + k_i e_1 + f_i(\hat{x}_i, z_{i+1} + \alpha_i) - \dot{\alpha}_{i-1} \qquad (۲۸-۶)$$

بیان می‌شود. با فرض اینکه $\alpha_i = h_i(t, \bar{z}_{i+1})$ یک ریشه مجزا برای $Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i) = 0$ باشد، سیستم کاهش یافته بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_i = -c_i z_i - z_{i-1} + z_{i+1}, \qquad z_i(0) = z_{i,0} \qquad (۲۹-۶)$$

و سیستم لایه مرزی با معادله زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{dv_i}{d\tau_i} = -\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) Q_i(t, \bar{z}_{i+1}, v_i + h_i(t, \bar{z}_{i+1})) \qquad (۳۰-۶)$$

که $v_i = \alpha_i - h_i(t, \bar{z}_{i+1})$ و $\tau_i = t/\varepsilon_i$ می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف بصورت $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2$ و استفاده از سیستم کاهش یافته (۶-۲۹)، خواهیم داشت:

$$\dot{V}_i \leq \sum_{j=1}^{i} -c_j z_j^2 + z_i z_{i+1} - r\|e\|^2 + z_1^2 \qquad (۶\text{-}۳۱)$$

گام n: در آخرین مرحله، ورودی کنترل حقیقی u ظاهر می‌شود که هدف اصلی بدست آوردن این کنترل می‌باشد. با مشتق گیری از z_n، بدست می‌آید:

$$\dot{z}_n = \dot{\hat{x}}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = k_n e_1 + f_n(\underline{\hat{x}}_n, u) + u - \dot{\alpha}_{n-1} \qquad (۶\text{-}۳۲)$$

اکنون یک کنترل حقیقی تقریبی با استفاده از جداسازی مقیاس زمانی جهت برآورده کردن رابطه

$$k_n e_1 + f_n(\underline{\hat{x}}_n, u) + u - \dot{\alpha}_{n-1} = -c_n z_n - z_{n-1} \qquad (۶\text{-}۳۳)$$

مطابق معادله زیر ارائه می‌شود:

$$\varepsilon_n \dot{u} = -\text{sign}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) Q_n(t, \bar{z}_n, u), \qquad u(0) = u_0 \qquad (۶\text{-}۳۴)$$

که $\varepsilon_n \ll 1$ ، $\bar{z}_n = [z_1, \dots, z_n]^T$ و $Q_n(t, \bar{z}_n, u)$ به صورت

$$Q_n(t, \bar{z}_n, u) = c_n z_n + z_{n-1} + k_n e_1 + f_n(\underline{\hat{x}}_n, u) + u - \dot{\alpha}_{n-1} \qquad (۶\text{-}۳۵)$$

بیان می‌شود که در آن $c_n > 0$ بهره کنترل مثبت می‌باشد. اگر $u = h_n(t, \bar{z}_n)$ ریشه مجزایی برای $Q_n(t, \bar{z}_n, u) = 0$ باشد، سیستم کاهش یافته بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_n = -c_n z_n - z_{n-1}\ , \qquad z_n(0) = z_{n,0} \qquad (۶\text{-}۳۶)$$

و سیستم لایه مرزی نیز با معادله

$$\frac{dv_n}{d\tau_n} = -sign\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) Q_n(t, \bar{z}_n, v_n + h_n(t, \bar{z}_n)) \qquad (۶\text{-}۳۷)$$

نشان داده می‌شود که در آن $v_n = u - h_n(t, \bar{z}_n)$ و $\tau_n = t/\varepsilon_n$ تعریف می‌شود. با انتخاب تابع لیاپانوف $V = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2$ ، نتیجه می‌شود:

$$\dot{V} \leq -r\|e\|^2 - (c_1 - 1)z_1^2 - \sum_{j=2}^{n} c_j z_j^2 \qquad (۳۸-۶)$$

با توجه به رابطه

$$\lambda_{min}(P)\|e\|^2 \leq e^T P e \leq \lambda_{max}(P)\|e\|^2 \qquad (۳۹-۶)$$

و با تعریف $c = min\{2r/\lambda_{min}(P),\ 2(c_1 - 1),\ 2c_i\ (i = 2, \dots, n)\}$ بدست می‌آید:

$$c\ \left[\frac{1}{2}e^T P e + \frac{1}{2}z_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}z_n^2\right] \leq r\|e\|^2 + (c_1 - 1)z_1^2 + \sum_{j=2}^{n} c_j z_j^2 \qquad (۴۰-۶)$$

با جایگذاری $V = \frac{1}{2}e^T P e + \frac{1}{2}z_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}z_n^2$ نتیجه می‌شود:

$$c\ V \leq r\|e\|^2 + (c_1 - 1)z_1^2 + \sum_{j=2}^{n} c_j z_j^2 \qquad (۴۱-۶)$$

که در نتیجه

$$c\ V \geq -r\|e\|^2 - (c_1 - 1)z_1^2 - \sum_{j=2}^{n} c_j z_j^2 \geq \dot{V} \qquad (۴۲-۶)$$

رابطه $\dot{V} \leq -cV$ را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$V(t) \leq V(0)e^{-ct} \qquad (۴۳-۶)$$

رابطه فوق پایداری نمایی مبدا را برای سیستم کاهش یافته (۶-۱۹)، (۶-۲۹) و (۶-۳۶) نتیجه می‌دهد.

۶-۵- تحلیل پایداری

به منظور آنالیز پایداری سیستم کنترل پیشنهادی قضیه زیر را با استفاده از قضیه Tikhonov ارائه می‌دهیم.

قضیه ۶-۱: مسئله آشفته منفرد رویتگر (۶-۶) و کنترلرهای (۶-۱۷)، (۶-۲۷) و (۶-۳۴) را در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط زیر برای تمام $[t, \bar{z}_{i+1}, \alpha_i - h_i(t, \bar{z}_{i+1}), \varepsilon_i] \in [0, \infty) \times D_{\bar{z}_{i+1}} \times D_{v_i} \times [0, \varepsilon_0)$ برای دامنه‌های $D_{\bar{z}_{i+1}} \subset R^{i+1}$ و $D_{v_i} \subset R$ که شامل مبدأ می‌باشد و در آن $i = 1, \ldots, n$ ، $\bar{z}_{n+1} = \bar{z}_n$، $D_{\bar{z}_{n+1}} = D_{\bar{z}_n}$ و $\alpha_n = u$ تعریف می‌شود برقرار باشد.

۱) در هر مجموعه فشرده $D_{\bar{z}_{i+1}} \times D_{v_i}$، توابع Q_i و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها نسبت به $(\bar{z}_{i+1}, \alpha_i, t)$ پیوسته و کراندار باشد. همچنین $h_i(t, \bar{z}_{i+1})$ و $(\partial Q_i / \partial \alpha_i)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول کراندار نسبت به آرگومان‌های خود باشند و $(\partial Q_i / \partial \bar{z}_{i+1})$ بطور یکنواخت در t، برای $\bar{z}_{i+1}$ لیپشیتز باشد.

۲) $(t, \bar{z}_{i+1}, v_i) \mapsto (\partial Q_i / \partial \alpha_i)(t, \bar{z}_{i+1}, v_i + h_i(t, \bar{z}_{i+1}))$ بازای تمام $(t, \bar{z}_{i+1}) \in [0, \infty) \times D_{\bar{z}_{i+1}}$ دارای کران پایین مثبت باشد.

آنگاه مبدا سیستم‌های (۶-۲۰)، (۶-۳۰) و (۶-۳۷) پایدار نمایی می‌باشد.

همچنین اجازه دهید Ω_{v_i} یک زیرمجموعه فشرده‌ای از Γ_{v_i} باشد که $\Gamma_{v_i} \subset D_{v_i}$ یک ناحیه جذب برای سیستم $(dv_i / d\tau_i) = -\mathrm{sign}(\partial Q_i / \partial \alpha_i) Q_i(0, \bar{z}_{i+1,0}, v_i + h_i(0, \bar{z}_{i+1,0}))$ با $\bar{z}_{i+1,0} = [z_{1,0}, \ldots, z_{i+1,0}]^T$ می‌باشد. آنگاه برای هر زیرمجموعه فشرده $\Omega_{\bar{z}_n} \subset D_{\bar{z}_n}$، وجود دارد ثابت مثبت ε^* و $T > 0$ بطوریکه برای تمام $t \geq 0$ ، $\bar{z}_{i+1,0} \in \Omega_{\bar{z}_{i+1}}$ ، $\alpha_{i,0} - h_i(0, \bar{z}_{i+1,0}) \in \Omega_{v_i}$ و $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$، سیستم (۶-۶)، (۶-۱۷)، (۶-۲۷) و (۶-۳۴) دارای یک جواب منحصر به فرد $\hat{x}_{i,\varepsilon_i}(t), i = 1, \ldots, n$ روی $[0, \infty)$ می‌باشد و همچنین $\hat{x}_{1,\varepsilon_1}(t) = y_r(t) + O(\varepsilon_1)$ بطور یکنواخت برای $t \in [T, \infty)$ برقرار می‌باشد.

اثبات: بایستی شرایط قضیه ۶-۱ شرایط (الف)-(ج) قضیه Tikhonovرا ارضا کنند. شرط (۱) مستقیما شرط (الف) را برآورده می‌کند. همچنین شرط (ب) نیز بدلیل اینکه مبدا سیستم‌های (۶-۱۹)، (۶-۲۹) و

(۶-۳۶) پایدار نمایی می‌باشد، برقرار است. به عبارتی $\|\bar{z}_n(t)\| \leq \|\bar{z}_{n,0}\|e^{-w_0 t}$ برای $t \geq 0$ برقرار می-باشد که در آن $w_0 > 0$ و $\bar{z}_{n,0} = [z_{1,0}, \dots, z_{n,0}]^T$. با استفاده از قضیه لیاپانوف معکوس وجود دارد تابع لیاپانوف V_c طوریکه

$$w_1\|\bar{z}_n\|^2 \leq V_c(t, \bar{z}_n) \leq w_2\|\bar{z}_n\|^2 \qquad (۶-۴۴)$$

$$\frac{\partial V_c}{\partial t}(t, \bar{z}_n) + \frac{\partial V_c}{\partial \bar{z}_n}(t, \bar{z}_n) C\bar{z}_n \leq -w_3\|\bar{z}_n\|^2 \qquad (۶-۴۵)$$

که w_1، w_2 ، w_3 ثوابت مثبت و $C = \mathrm{Diag}[-c_1, \dots, -c_n]$ یک ماتریس قطری می‌باشد. لازم به ذکر است که هر ثابت مثبت c در شرط (ب) میتواند انتخاب شود و $\Omega_{\bar{z}_n} \subset \{\bar{z}_n \in D_{\bar{z}_n} | w_1(\bar{z}_n) \leq \rho c, 0 < \rho < 1\}$ می‌تواند هر زیرمجموعه فشرده‌ای از $D_{\bar{z}_n}$ باشد.

پایداری نمایی سیستم‌های (۶-۲۰)، (۶-۳۰) و (۶-۳۷)، بوسیله خطی سازی حول v_i بطور محلی اثبات می‌شود.

با در نظر گرفتن فرض ۶-۲ و شرط ۲، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}\right) = \mathrm{sign}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i}\right) > 0$$
$$\mathrm{sign}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial \mathrm{u}}\right) = \mathrm{sign}\left(\frac{\partial f_n}{\partial \mathrm{u}}\right) > 0 \qquad (۶-۴۶)$$

که این دلالت بر پایداری نمایی محلی مبدا برای سیستم لایه مرزی دارد. در نهایت از آنجایی که هر سه شرط قضیه Tikhonovبرآورده شده است، می‌توان این قضیه را بکار برد.

برای هر زیرمجموعه فشرده $\Omega_{\bar{z}_n} \subset D_{\bar{z}_n}$ ، وجود دارد ثابت مثبت ε^* و $T > 0$ بطوریکه برای تمام $t \geq 0$، $\bar{z}_{i+1,0} \in \Omega_{\bar{z}_{i+1}}$، $\alpha_{i,0} - h_i(0, \bar{z}_{i+1,0}) \in \Omega_{v_i}$ و $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$، سیستم (۶-۶)، (۶-۱۷)، (۶-۲۷) و (۶-۳۴) دارای یک جواب منحصر به فرد $\hat{x}_{i,\varepsilon_i}(t), i = 1, \dots, n$ روی $[0, \infty)$ می‌باشد و همچنین $\hat{x}_{1,\varepsilon_1}(t) = y_r(t) + O(\varepsilon_1)$ بطور یکنواخت برای $t \in [T, \infty)$ برقرار می‌باشد.

۶-۶- نتایج شبیه سازی

در این قسمت برای بررسی بهتر عملکرد کنترل طراحی شده و مقایسه آن با طرح پیشنهادی در [۱۲۷] ، سیستم زیر را که در [۱۲۷] نیز شبیه سازی شده در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + \frac{{x_2}^3}{2}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 + u + \frac{u^3}{7}$$

$$y = x_1 \qquad (۴۷-۶)$$

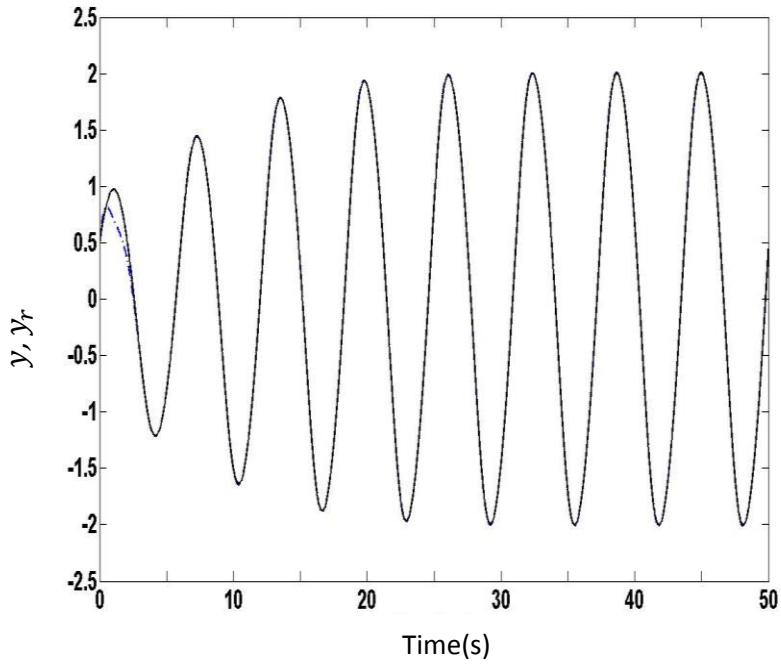
هدف، پیشنهاد سیگنال کنترل u است به گونه‌ای که خروجی سیستم، مسیر مرجع y_r را که بوسیله سیستم نوسانگر واندرپل زیر تولید می‌شود، ردگیری کند.

$$\dot{x}_{d1} = x_{d2}$$

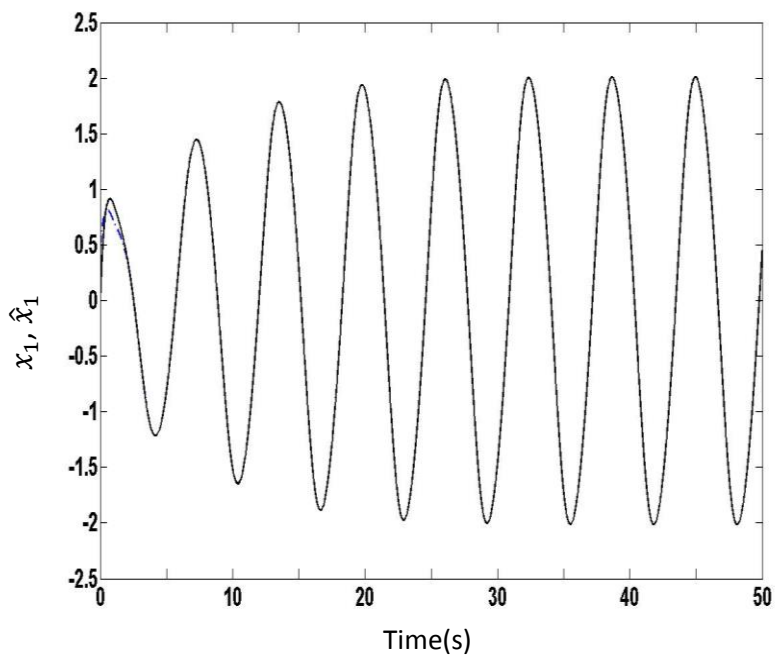
$$\dot{x}_{d2} = -x_{d1} + \beta(1 - {x_{d1}}^2)x_{d2}$$

$$y_r = x_{d1} \qquad (۴۸-۶)$$

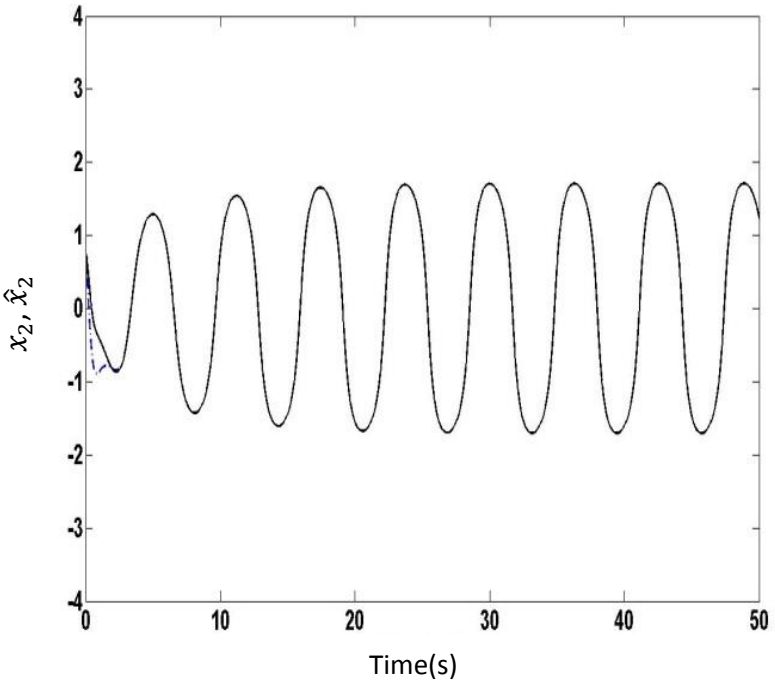
برای این سیستم $\beta = 0.2$، $x_{d1}(0) = 0.5$ و $x_{d2}(0) = 0.8$ در نظر گرفته شده است. دقت شود که متغیر حالت x_2 قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد. مقادیر اولیه بصورت $x_1(0) = 0.5$، $x_2(0) = 0$، $\hat{x}_1(0) = 0$ ، $\hat{x}_2(0) = 0$ و همچنین پارامترهای طراحی این کنترل پیشنهادی بصورت $k_1 = 5$، $k_2 = 6$ و $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$ فرض شده‌اند.



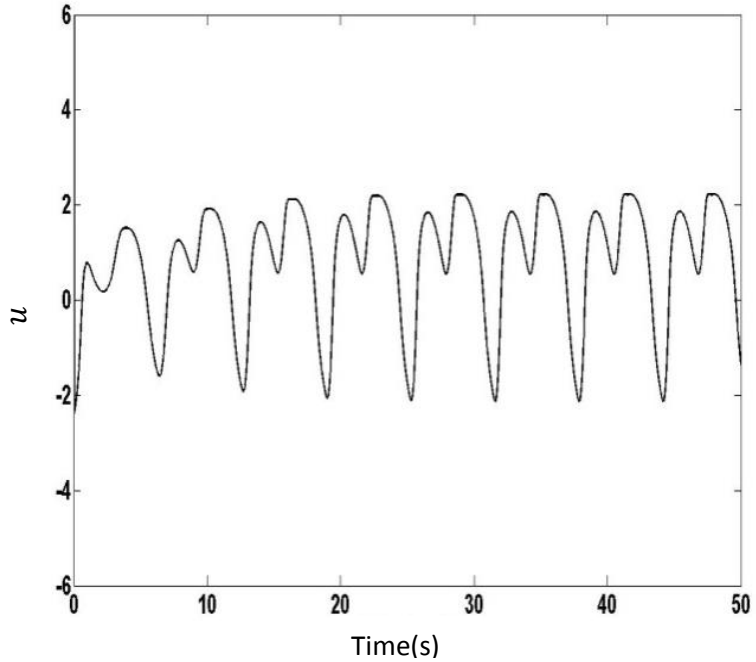
شکل (۶-۱) x_1 (-·-·-·-) و y_r (——)



شکل (۶-۲) x_1 (-·-·-·-) و $\hat{x}_1$(——)



شکل (۶-۳) x_2 (-·-·-·-) و $\hat{x}_2$ (———)



شکل (۶-۴) ورودی کنترل u

سیگنال کنترل بوسیله دینامیک های سریع زیر محاسبه می‌شود.

$$0.01\dot{\alpha}_1 = -sign\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}\right) Q_1(t, z_1, z_2, \alpha_1) \qquad (۴۹-۶)$$

$$0.01\dot{u} = -sign\left(\frac{\partial Q_2}{\partial u}\right) Q_2(t, z_1, z_2, \alpha_1, u) \qquad (۵۰-۶)$$

که Q_1 و Q_2 به ترتیب در روابط (۶-۱۸) و (۶-۳۵) با $c_1 = 2$ و $c_2 = 2$ آورده شده‌اند.

نتایج شبیه سازی در شکل‌های(۶-۱)-(۶-۴) نشان داده شده است. شکل (۶-۱)، بیانگر توانایی کنترل کننده در ردگیری است. بعد از یک گذر کوتاه خروجی سیستم، سیگنال مرجع تولید شده از سیستم (۶-۴۸) را با دقت بالایی دنبال می‌کند. شکل‌های (۶-۲) و(۶-۳) نتایج پیشبینی را بین متغیرهای حالت سیستم و تخمین حالت‌های ناشی از رویتگر نشان می‌دهند. همچنین در شکل (۶-۴) ورودی کنترل مشاهده می‌شود.

از این شکل‌ها نتیجه می‌شود که به رغم وجود متغیرهای حالت غیر قابل اندازه‌گیری و خاصیت غیرافاین بودن سیستم، طرح پیشنهادی دارای کنترل و عملکرد پیشبینی مناسبی می‌باشد. همچنین ملاحظه می‌شود که متغیرهای حالت و ورودی کنترل در سیستم حلقه بسته کراندار می‌باشند.

۶-۷- نتیجه‌گیری

در این فصل، طراحی یک کنترل کننده فیدبک خروجی برای سیستم‌های فیدبک محض کاملاً غیرافاین با متغیرهای حالت غیر قابل اندازه‌گیری مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا یک رویتگر حالت جهت تخمین این متغیرها طراحی شد و سپس با تلفیق طراحی پسگام و جداسازی مقیاس زمانی، ورودی های کنترل مجازی و کنترل حقیقی بدست آمدند. این کنترل پیشنهادی توانست بر مسئله انفجار پیچیدگی ناشی از روش پسگام در کنترل سیستم‌های فیدبک محض غلبه کند و همچنین همگرایی خطاهای رویتگر و ردگیری را

به همسایگی کوچکی از مبدأ تضمین کند. نتایج شبیه‌سازی بیانگر کارآمدی قانون کنترل پیشنهادی در ردگیری سیگنال مرجع می‌باشد.

فصل هفتم

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۷-۱- نتیجه‌گیری

سیستم‌های فیدبک محض طیف گسترده‌ای از سیستم‌های غیرخطی را شامل می‌شوند که دارای یک ساختار پایین مثلثی بوده و اگر چه طراحی پسگام در خصوص کنترل این سیستم ها یک ساختار سیستماتیک را ارائه می‌دهد اما دارای دو مشکل عمده می‌باشد: اولا تکرار مشتقات ورودی‌های کنترل مجازی منجر به مسئله انفجار پیچیدگی می شود و ثانیا ساختار زنجیروار و غیرافاین این سیستم ها باعث می‌شود که یافتن ورودی‌های کنترل مجازی/ حقیقی صریح بسیار سخت باشد.

در این رساله، کنترل سیستم های فیدبک محض کاملا غیرافاین در حضور عدم قطعیت مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل فیدبک خروجی برای این سیستم‌ها ارائه شد. برای غلبه بر مشکلات ناشی از طراحی پسگام برای سیستم‌های فیدبک محض از تئوری آشفتگی منفرد بهره جستیم و تمام روش‌های کنترل پیشنهادی مبتنی بر تلفیق روش پسگام و جداسازی مقیاس زمانی می‌باشد. از مزیت‌های روش‌های کنترل ارائه شده می‌توان به سادگی، کاهش حجم محاسبات، عدم نیاز به دانستن حدود عدم قطعیت و حذف طراحی پیشبین حالت اشاره کرد. نتایج شبیه‌سازی دلالت بر کارایی روش های کنترل پیشنهادی دارد.

۷-۲- پیشنهادات

در نهایت جهت ادامه کار این پایان نامه موارد زیر پیشنهاد می‌گردد:

۱- کنترل فیدبک خروجی سیستم‌های فیدبک محض در حضور عدم قطعیت پارامتری

۲- پیاده سازی عملی روش‌های کنترلی مذکور بر روی رباتهای تک لینکی با مفصل انعطاف پذیر

فهرست منابع

[1] M. Krstic, P. V. Kokotovic and I. Kanellakopoulos, Nonlinear and adaptive control design, New York: Wiley, 1995.

[2] B. Bandyopadhyay, F. Deepak and K. S. Kim, Sliding mode control using novel sliding surfaces, Springer Science & Business Media, 2009.

[3] S. S. Sastry and A. Isidori, "Adaptive control of linearizable systems," IEEE Transactions on Automatic Control, 34(11), 1123-1131, 1989.

[4] J. Zhou and C. Wen, Adaptive backstepping control of uncertain systems: Nonsmooth nonlinearities, interactions or time-variations. Springer Science & Business Media, 2008.

[5] P. Kokotovic and M. Arcak, "Constructive nonlinear control: a historical perspective," Automatica, 37, pp. 637–662, 2001.

[6] C. Kwan and F. L. Lewis, "Robust backstepping control of nonlinear systems using neural networks," IEEE Trans. Syst., vol. 30, pp. 753–766, 2000.

[7] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic and A. S. Morse, "Systematic design of adaptivecontrollers for feedback linearizable systems," IEEE Transactions on Automatic Control, 36(11), 1241-1253, 1991.

[8] W. Lin and C. Qian, Adaptive control of nonlinear parameterized systems: The non-smooth feedback framework. IEEE Transactions on Automatic Control, 47, PP.757-774, 2002.

[9] W. Lin and C. Qian, "Adaptive control of nonlinear parameterized systems: The smooth feedback case," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 1249-1266, 2002.

[10] Y. Niu, J. Lam, X. Wang and D. W. Ho, "Adaptive control using backstepping design and neural networks," Journal of dynamic systems, measurement, and control, 127(3), 478-485, 2005.

[11] F. Mnif and A. S. Yahmadi, "Recursive backstepping stabilization of a wheeled mobilerobot. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I," Journal of Systems and Control Engineering, 219(6), 419-429, 2005.

[12] M. Lungu and R. Lungu, "Adaptive backstepping flight control for a mini-UAV," International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 27(8), 635-650, 2013.

[13] I. Ali, G. Radice and J. Kim, "Backstepping control design with actuator torque bound forspacecraft attitude maneuver," Journal of guidance, control, and dynamics, 33(1), 254-259, 2010.

[14] L. R. Hunt and G. Meyer, “Stable inversion for nonlinear systems,” Automatica, vol. 33, no. 8, pp. 1549–1554, 1997.

[15] A. Ferrara and L. Giacomini, “Control of a class of mechanical systems with uncertainties via a constructive adaptive/second order VSC approach,” J. Dynamic Syst., Meas., Control, vol. 122, no. 1, pp. 33–39, 2000.

[16] P. V. Kokotovic, “The joy of feedback: nonlinear and adaptive,” IEEE Control System Magazine, vol.12, no. 7, pp. 7-17, June 1992.

[17] S. S. Ge and J. Zhang, “Neural-network control of non-affine nonlinear system with zero dynamics by state and output feedback,” IEEE Trans. on Neural Network, vol. 14, no. 4, pp. 900-918, July 2003.

[18] B. J. Yang and A. J. Calise, “Adaptive control of a class of non-affine systems using neural networks,” IEEE Trans. on Neural Network, vol. 18, no. 4, pp. 1149-1159, July 2007.

[19] S. Labiod and T. M. Guerra, “Adaptive fuzzy control of a class of SISO non-affine nonlinear systems,” Fuzzy Sets and systems, vol. 158, no. 10, pp. 1126-1137, May 2007.

[20] J. H. Park, G. T. Park, S. H. Kim and C. J. Moon, “Direct adaptive self-structuring fuzzy controller for non-affine nonlinear system,” Fuzzy Sets and Systems, vol. 153, no. 3, pp. 429-445, August 2005.

[21] S. Labiod and T. M. Guerra, “Indirect adaptive fuzzy control for a class of non-affine nonlinear systems with unknown control directions,” International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 8, no, 4, pp. 903-907, August 2010.

[22] J. Y. Park and G. T. Park, “Robust adaptive fuzzy controller for non-affine nonlinear systems with dynamic rule activation,” International Journal of Robust Nonlinear Control, vol. 13, no. 2, pp. 117-139, December 2003.

[23] N. Hovakimyan, E. Lavretsky, and Ch. Cao, “Adaptive dynamic inversion via time-scale separation,” IEEE Trans. on Neural Network, vol. 19, no. 10, pp. 1702-1711, October 2008.

[24] E. Lavretsky and N. Hovakimyan, “Adaptive dynamic inversion for non-affine-in-control uncertain systems via time-scale separation. Part II,” Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 14, no. 1, pp. 33–41, January 2008.

[25] S. S. Ge and C. Wang, “Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback

systems,” Automatica, vol. 38, no. 4, pp. 671-682, April 2002.

[26] D. Wang and J. Huang, “Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback from,” Automatica, vol. 38, no. 8, pp. 1365-1372, August 2002.

[27] D. X. Gao, Z. Q. Sun and J. H. Liu, "Dynamic inversion control for a class of pure-feedbacksystems," Asian Journal of Control, 14(2), 605-611, 2012.

[28] Y. Li, S. Tong and T. Li, "Adaptive fuzzybackstepping control design for a class of pure-feedback switched nonlinear systems," Nonlinear Analysis: HybridSystems. 16, 72-81, 2014.

[29] J. Yu, "Adaptive fuzzy stabilization for a class of pure-feedback systems with unknown dead-zones," International Journal of Fuzzy systems, 15, 2013.

[30] T. P. Zhang, H. Wen and Q. Zhu, "Adaptive fuzzy control of nonlinear systems in pure feedback form based on input-to-state stability," IEEE Trans. Fuzzy Syst., 18: 80–93, 2010.

[31] A. M. Zou, Z. G. Hou, "Adaptive control of a class of nonlinear pure feedback systems using fuzzy backstepping approach," IEEE Trans. Fuzzy Syst. 16: 886–897, 2008.

[32] Q. Shen, P. Shi, T. Zhang and C. C. Lim, "Novel neural control for a class of uncertain pure-feedback systems. Neural Networks and Learning Systems, IEEE Transactions on, 25(4), 718-727, 2014.

[33] G. Sun, D. Wang, X. Li and Z. Peng, "A DSC approach to adaptive neural network tracking controlfor pure-feedback nonlinear systems," Applied Mathematicsand Computation, 219(11), 6224-6235, 2013.

[34] H. Wang, B. Chen and C. Lin, "Adaptive neural tracking control for a class of perturbedpure-feedback nonlinear systems," Nonlinear Dynamics, 72(1-2), 207-220, 2013.

[35] C. Wang, D. J. Hillb, S. S. Ge, and G. R. Chen, “An ISS-modular approach for adaptive neural control of pure-feedback systems,” Automatica, vol. 42, no. 5, pp. 723-731, May 2000.

[36] D. Swaroop, J. C. Gerdes, P. P. Yip and J. K. Hedrick, "Dynamic surface control of nonlinear systems," in Proceedings of the American Control Confrence, Albuquerque, NM, pp. 3028–3034, 1997.

[37] P. P. Yip and J. K. Hedrick, "Adaptive dynamic surface control: a simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems," International Journal of Control, 71(5), 959–979, 1998.

[38] D. Wang and J. Huang, "Neural network based adaptive dynamicsurface control for nonlinear systems in strict-feedback form," IEEE Transactions on Neural Networks, 16(1), 195–202, 2005.

[39] T. P. Zhang and S. S. Ge, "Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone in pure feedback form," Automatica, 44: 1895–1903, 2008.

[40] G. Sun, D. Wang, X. Li, et al, "A DSC approach to adaptive neural network tracking control for pure-feedback nonlinear systems," Applied Mathematics and Computation, 219: 6224–6235, 2013.

[41] P. Li, J. Chen, T. Cai, et al, "Adaptive robust dynamic surface control of pure-feedback systems using self-constructing neural networks," International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 9: 2839-2860, 2013.

[42] D. Gao, Z. Sun, and B. Xu, “Fuzzy adaptive control for pure-feedback system via time scale separation”, International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 11, no. 1, pp. 147-158, 2013.

[43] S. J. Yoo, “Adaptive control of non-linearly parameterized pure-feedback systems”, IET Control Theory Appl, vol. 6, iss. 3, pp. 467–473, 2012.

[44] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic, "Adaptive nonlinear control without over parametrization," Systems Control Lett. 19, 177–185, 1992.

[45] R. Marino, P. Tomei, Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive andRobust, Prentice-Hall, London, 1995.

[46] H. K. Khalil, "Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input–output models," IEEE Trans. Automat. Control, 41, 177–188, 1996.

[47] L. Praly, "Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangularsystems with output dependent incremental rate," IEEE Trans. Automat. Control, 48, 1103–1108, 2013.

[48] R. Sepulchre, M. Jankovic, P. V. Kokotovic, Constructive Nonlinear Control, Springer-Verlag, London, 1997.

[49] M. Jankovic, R. Sepulchre, P. V. Kokotovic, "Global adaptive stabilization of cascade nonlinear systems," Automatica, 33, 263–268, 1997.

[50] Z. P. Jiang, L. Praly, "Design of robust adaptive controller for nonlinear systems with dynamic uncertainties," Automatica, 34, 825–840, 1998.

[51] Z. P. Jiang, "A combined backstepping and small-gain approach to adaptive output feedback control," Automatica, 35, 1131–1139, 1999.

[52] D. Karagiannis, A. Astolfi and R. Ortega, "Two results for output feedback

stabilization of nonlinear systems," Automatica, 39,857–866, 2003.

[53] Z. Qu, R.A. Hull and J. Wang, "Globally stabilizing adaptive control design for nonlinearly-parametrized systems," IEEE Trans. Automat. Control, 51, PP. 1073–1079, 2006.

[54] Z. Chen and J. Huang, "Global output regulation for output feedback nonlinear systems," IEEE Trans. Automat. Control, 50, 117–121, 2005.

[55] Z. Chen, "Global stabilization of nonlinear cascade systems with a Lyapunov function in superposition form," Automatica, 45, 2041–2045, 2009.

[56] X. Ye, "Global adaptive control of nonlinearly parametrized systems," IEEE Trans. Automat. Control, 48, 169–173, 2003.

[57] J. D. Bˇoskovic´, “Adaptive control of a class of nonlinearly parameterized plants,” IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 43, pp. 930–934, July 1998.

[58] B. Armstrong-Helouvry, Control of Machines With Friction. Norwell, MA: Kluwer, 1991.

[59] A. M. Annaswamy, F. P. Skantze, and A. Loh, “Adaptive control of continuous time systems with convex/concave parameterization,” Automatica, vol. 34, pp. 33–49, 1998.

[60] A. Kojic, A. M. Annaswamy, A. P. Loh, and R. Lozano, “Adaptive controlof a class of nonlinear systems with convex/concave parameterization,” Syst. Control Lett., vol. 37, pp. 267–274, 1999.

[61] A. Kojic and A. M. Annaswamy, “Adaptive control of nonlinearly parameterized systems with a triangular structure,” in Proc. 38th IEEE Conf. Decision and Control, Phoenix, AZ, pp. 4754–4759, Dec. 1999.

[62] R. Marino and P. Tomei, “Global adaptive output feedback control nonlinearsystems, Part II: Nonlinear parameterization,” IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 38, pp. 33–48, Jan. 1993.

[63] L. Karsenti, F. Lamnabhi-Lagarrigue and G. Bastin, “Backstepping technique extended to nonlinear parametrization,” Systems and Control Letters, 27, 87–97, 1996.

[64] R. Hotzel and L. Karsenti, “Adaptive tracking strategy for a class of nonlinear systems,” IEEE Transactions on Automatic Control. vol. 43, pp. 1272- 1279, 1998.

[65] A. P. Loh, A. M. Annaswamy, and F. P. Skantze, “Adaptation in the presence of general nonlinear parametrization: An error model approach”. IEEE Transactions on Automatic Control, 44, 1634–1652, 1999.

[66] X. Ye, “Global adaptive control of nonlinearly parametrized systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, 48, 169–173, 2003.

[67] X. Ye, “Switching adaptive output- feedback control of nonlinearly parameterized systems,” Automotica, 41, pp. 983- 989, 2005.

[68] X. Ye, “Nonlinear adaptive control by switching linear controllers,” Systems and Control Letters, 61, pp. 617- 621, 2012.

[69] B. Yao and M. Tomizuka, “Adaptive robust control of SISO nonlinear systems in a semi-strict feedback form,” Automatica, vol. 33, no. 5, pp. 893–900, May 1997.

[70] W. Sun, Z. Zhao, and H. Gao, “Saturated adaptive robust control of active suspension systems,” IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 60, no. 9, pp. 3889–3896, Sep. 2013.

[71] Z. Chen, B. Yao, and Q. Wang, “Adaptive robust precision motion control of linear motors with integrated compensation of nonlinearities and bearing flexible modes,” IEEE Trans. Ind. Informat., vol. 9, no. 2, pp. 965–973, May 2013.

[72] M. Liu, L. Zhang, P. Shi, and H. R. Karimi, “Robust control of stochastic systems against bounded disturbances with application to flight control,” IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 61, no. 3, pp. 1504–1515, Mar. 2014.

[73] J. Han, “From PID to active disturbance rejection control,” IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 56, no. 3, pp. 900–906, Mar. 2009.

[74] B. Sun and Z. Gao, “A DSP-based active disturbance rejection control design for a 1-kw H-bridge DC–DC power converter,” IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 52, no. 5, pp. 1271–1277, Oct. 2005.

[75] R. Errouissi, M. Ouhrouche, W.-H. Chen, and A. M. Trzynadlowski, “Robust cascaded nonlinear predictive control of a permanent magnet synchronous motor with anti windup compensator,” IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 59, no. 8, pp. 3078–3088, Aug. 2012.

[76] R. Errouissi, M. Ouhrouche, W.-H. Chen, and A. M. Trzynadlowski, “Robust nonlinear predictive controller for permanent-magnet synchronous motors with an optimized cost function,” IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 59, no. 7, pp. 2849–2858, Jul. 2012.

[77] B. R. Barmish, M. J. Corless, and G. Leitmann, “A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems,” SIAM J. Control Optim., vol. 21, pp. 246–255, 1983.

[78] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, Robust Nonlinear Control Design: State Space and Lyapunov Techniques. Boston, MA: Birkhaüser, 1996.

[79] A. Isidori, Nonlinear Control Systems I. New York: Springer-Verlag, 1995.

[80] Z. Qu, “Global stabilization of nonlinear systems with a class ofunmatched uncertainties,” Syst. Control Lett., vol. 18, pp. 301–307, 1992.

[81] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic, Constructive Nonlinear Control. New York: Springer-Verlag, 1997.

[82] A. Isidori, Nonlinear Control Systems II. New York: Springer-Verlag, 1999.

[83] X. Liu, H. Su, B. Yao and J. Chu, “Adaptive robust control of nonlinear systems with dynamic uncertainties,” Int. J. Adapt. Control Signal Process, 23:353–377, 2009.

[84] A. Chakrabortty and M. Arcak, "Time-scale separation redesigns for stabilization and performance recovery of uncertain nonlinear systems," Automatica, vol. 45, 34-44, 2009.

[85] S. H. Pourdehi, A. Khayatian, “Backstepping time-scale separation redesign for stabilization of a class of nonlinear systems with matched and unmatched uncertainties,” 21th Iranian conference on electrical engineering, 2013.

[86] N. Noroozi, A. Khayatian, T. Chen, “Backstepping control of uncertain strict feedback system basded on time scale separation,” 2nd International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA), 2011.

[87] M. Wang, X. Liu and P. Shi, "Adaptive neural control of pure-feedback nonlinear time-delay systems via dynamic surface technique," IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics, vol. 41, no.6, pp.1681-1692, 2011.

[88] A. M. Zou, Z. G. Hou and M. Tan, "Adaptive control of a class of nonlinear pure-feedback system susing fuzzy backstepping approach," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 16, no. 4, pp. 886-897, 2008.

[89] Q. Zhao and Y. Lin, "Adaptive dynamic surface control for pure-feedback systems," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol.22, no.14, pp.1647-1660, 2011.

[90] B. Yao and M. Tomizuka, "Adaptive robust control of SISO nonlinear systems in a semi-strict feedback form," Automatica, vol.33, no.5, pp.893-900, 1997.

[91] X. B. Liu, H. Y. Su, B. Yao and J. Chu, "Adaptive robust control of nonlinear systems with dynamic uncertainties," International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol.23, no.4, pp.353-377, 2009.

[92] P. Li, J. Chen, T. Cai and G. Wang, “Adaptive robust dynamic surface control of pure-feedback systems using self-constructing neural networks,” International Journal of

Innovative Computing, Information and Control ,Volume 9, Number 7, July 2013 .

[93] G. Sun, D. Wang, Zh. Peng, H. Wang and et.al, "Robust adaptive neural control of uncertain pure-feedback nonlinear systems," International Journal of Control, 2013.

[94] C. H. Qian and W. Lin, "Output Feedback Control of a Class of Nonlinear Systems: A Nonseparation Principle Paradigm" IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 10, pp. 1710-1715, 2002.

[95] J. P. Gauthier and I. Kupka, "A separation principle for bilinear systems with dissipative drift," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, pp. 1970–1974, Dec. 1992.

[96] W. Lin, "Input saturation and global stabilization of nonlinear systems via state and output feedback," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 40, pp. 776–782, Apr. 1995.

[97] W. Lin, "Bounded smooth state feedback and a global separation principle for nonaffine nonlinear systems," Syst. Control Lett., vol. 26, pp. 41–53, 1995.

[98] A. J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observer," Syst. Control Lett., vol. 3, pp. 47–52, 1983.

[99] A. J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observers with linearizable error dynamics," SIAM J. Control Optim., vol. 23, pp. 197–216, 1985.

[100] X. H. Xia and W. B. Gao, "Nonlinear observer design by observer error linearization," SIAM J. Control Optim., vol. 27, pp. 199–216, 1989.

[101] F. Mazenc, L. Praly, and W. D. Dayawansa, "Global stabilization by output feedback: Examples and counterexamples," Syst. Control Lett., vol. 23, pp. 119–125, 1994.

[102] R. Marino and P. Tomei, "Dynamic output feedback linearization and global stabilization," Syst. Control Lett., vol. 17, pp. 115–121, 1991.

[103] G. Besancon, "State affine systems and observer-based control," in Proc. NOLCOS'98, vol. 2, pp. 399–404, July 1998.

[104] H. K. Khalil and A. Saberi, "Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 32, pp. 1031–1035, Nov. 1987.

[105] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems, applications to bioreactocrs," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, pp. 875–880, June 1992.

[106] L. Praly, "Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate," in Proc. 40th IEEE Conf. Decision and Control, Orlando, FL, pp. 3808–3813, 2001.

[107] J. Tsinias, “A theorem on global stabilization of nonlinear systems by linear feedback,” Syst. Control Lett., vol. 17, pp. 357–362, 1991

[108] B. Yang, W. Lin, “Homogeneous Observers, Iterative Design, and Global Stabilization of High-Order Nonlinear Systems by Smooth Output Feedback,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No. 7, pp. 1069-1080, 2004.

[109] A. Bacciotti, Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems.Singapore: World Scientific, 1992.

[110] W. P. Dayawansa, “Recent advances in the stabilization problem for low dimensional systems,” in Proc. 2nd IFAC Symp. Nonlinear Control Systems Design, Bordeaux, France, pp. 1–8, 1992.

[111] W. Hahn, Stability of Motion. New York: Springer-Verlag, 1967.

[112] H. Hermes, “Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls,” in Differential Equations Stability and Control, S. Elaydi, Ed. New York: Marcel Dekker, 1991, vol. 109, pp.249–260.

[113] M. Kawski, “Stabilization of nonlinear systems in the plane,” Syst. Control Lett., vol. 12, pp. 169–175, 1989.

[114] W. Lin and C. Qian, “Homogeneous stabilizing feedback laws,” Control Theory Adv. Technol., vol. 6, pp. 497–516, 1990.

[115] W. Lin and C. Qian, “Adding one power integrator: A tool for globalstabilization of high-order lower-triangular systems,” Syst. Control Lett, vol. 39, pp. 339–351, 2000.

[116] W. Lin and C. Qian, “Robust regulation of a chain of power integrators perturbed by alower-triangular vector field,” Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 10, pp. 397–421, 2000.

[117] B. Yang, W. Lin, “Semi-global stabilization of nonlinear systems by non-smooth output feedback,” Int. J. Robust. Nonlinear Control, 2013.

[118] S. Celikovsky, and E. Aranda-Bricaire, "Constructive non-smooth stabilization of triangular systems," Systems & Control Letters, 36: 21–37, 1999.

[119] J. M. Coron, and L. Praly, "Adding an integrator for the stabilization problem," Systems & Control Letters, 17:89–104, 1991.

[120] C. Qian, and W. A. Lin, "Continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems," IEEE Transactions on Automatic Control, 46:1061–1079, 2001.

[121] M. Tzamtzi, and J. Tsinias, "Explicit formulas of feedback stabilizers for a class of triangular systems with uncontrollable linearization," Systems & Control Letters, 38:115–126, 1999.

[122] C. Qian and W. Lin, "Recursive observer design, homogeneous approximation, and non-smooth output feedback stabilization of nonlinear systems," IEEE Transactions on Automatic Control, 51:1457–1471, 2006.

[123] W. Lin, and H. Lei, "Taking advantage of homogeneity: a unified framework for output feedback control of nonlinear systems," Proceedings of the 7th IFAC NOLCOS, Pretoria, South Africa, 27–38, 2007.

[124] B. Yang and W. Lin, "Robust output feedback stabilization of uncertain nonlinear systems with uncontrollable and unobservable linearization," IEEE Transactions on Automatic Control, 50(5): 619–630, 2005.

[125] S. H. Sui, S. H. Tong, and Y. Li, "Adaptive fuzzy backstepping output feedback tracking control of MIMO stochastic pure-feedback nonlinear systems with input saturation," Fuzzy Sets and Systems, 26 – 46, 2014.

[126] Y. Li, and S. H. Tong, "Adaptive fuzzy output-feedback control of pure-feedback uncertain nonlinear systems with unknown dead zone," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 22, 2014.

[127] S. H. Tong and Y. Li, "Observer-based adaptive fuzzy backstepping control of uncertain nonlinear pure-feedback systems," Science China Information Sciences, 57, 2013.

[128] X. Li, D. Wang, T. Li, Zh. Peng, G. Sun and N. Wang, “Adaptive NN control of uncertain non-affine pure-feedback systems with unknown time-delay,” *American Control Conference*, USA, pp. 4219-4224, 2011.

[129] B. Ren, S. S. Ge, C. Y. Su, and T. H. Lee, “Adaptive neural control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form with hysteresis input”, *IEEE Transactions on Systems*, vol. 39, no. 2, pp. 431-443, 2009.

[130] B. Kim and S. Yoo, “adaptive control of nonlinear pure-feedback systems with output constraints: integral barrier lyapunov functional approach,” International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 13, no. 1, pp. 249-256, 2015.

[131] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

[132] F. Ghorbel, J. Y. Hung and M. W. Spong, "Adaptive control of flexible-joint manipulators," *IEEE International Conference on Robotic and Automation*, Scottsdale, Arizona, May 15-19, 1989

[133] Y. Chan Chang, H. Min Yen, "Robust tracking control for a class of electrically driven

flexible-joint robots without velocity measurements," *International Journal of Control*, Vol. 85, No. 2, 194–212, 2012

Abstract: In this dissertation, control of completely non-affine pure-feedback systems in the presence of uncertainties is investigated. First, the adaptive control of parameterized pure-feedback systems is considered. These parametric uncertainties include both linear and nonlinear parameterization and belong to an unknown compact set, i.e., no prior knowledge is required on the bound of the unknown parameters. Therefore, the class of systems considered here is much more general than the systems in previous related works. For non-linearly connected parameters term, using parameter separation technique, the bounding function is obtained which is linear in new unknown parameter. For linearly connected parameters term, a positive function of parameter is applied instead of using the parameter itself. By employing the two mentioned techniques directly in combination of the backstepping and time scale separation procedures, the virtual/actual control inputs are defined as solutions of fast dynamic equations. In this approach, the adaptation law of unknown parameters can be derived based on Lyapunov theory in the backstepping technique and there is no need to design state predictor for this purpose. Therefore, it results in higher accuracy and avoids complexity. The new theorem in singular perturbation theory is presented for closed loop stability of these systems. Second, the robust control of these systems in the presence of matched and unmatched uncertainties are considered. Using singular perturbation theory, high gain filters are designed to estimate these uncertainties. By combination of the backstepping and time scale separation, the virtual/actual control inputs are obtained and the fast variables arising from filters, are employed to cancel the effect of the uncertainties in control design. One of common assumptions in previous related works is that bound of these uncertainties is known. However, in this approach this restrictive assumption is removed. Finally, we present the output feedback control problem for completely non-affine pure-feedback systems with immeasurable states because it is usually impossible that all the states are available in the actual process. First, the state observer is designed to estimate the immeasurable states. Then, the time-scale separation concept and the backstepping technique are combined to develop the approximate version of virtual/actual control laws. This technique has eliminated the problem of "explosion of complexity" caused by the traditional backstepping approach and the circular design problem which exists in pure-feedback systems. The simulation results for different pure-feedback systems are provided to validate the effectiveness of the proposed approach.

Key words: non-affine pure-feedback systems, time scale separation, linear and nonlinear parameterization, positive function of linear parameters, parameter separation.

Shahrood University of Technology

Faculty of Electrical and Robotic Engineering

Control of Nonlinear and Non-Affine Systems in the Presence of Uncertainty Based on Time-Scale Separation

Mehrnoosh Asadi

Supervisor:

Dr. Heydar Toossian Shandiz

February 2016