

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده برق و رباتیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

عنوان :

طراحی و شبیه سازی کنترل کننده مقاوم برای سیستمهای غیرخطی

اتونوموس کلاس  $C^k$  با استفاده از روش **BackS tepping**

استاد راهنما :

دکتر محمد حدادظریف

ارائه دهنده :

گوران حسنی فرد

تقدیم به :

دستان پر مهر پدرم

و

نگاه گرم مادرم

که مشوق همیشگی و پشتیبان من در تمام مراحل زندگی بوده‌اند.

و

دیانا کوچولو

Also,

**To:**

**Petar V. Kokotovic**

## تقدیر و تشکر :

در ابتدا بر خود لازم می‌بینیم که از استاد راهنمای گرانقدر خود جناب آقای دکتر محمد حداد ظریف که لحظه به لحظه و در تمام مراحل اجرای پایان‌نامه، در رفع مشکلات من از هیچ کوششی دریغ نکردند، نهایت تشکر و قدردانی کنم. همچنین وظیفه است که از جناب آقای دکتر علی اکبر قره‌ویسی که ایده اولیه این پایان‌نامه را مطرح کردند و با پیشنهادات خود مرا در مسیر این پایان‌نامه قرار دادند، سپاسگذاری مخصوص شود.

از دوستان عزیزم، که در لحظات تلخ و شیرین انجام این تحقیق یار و یاور من بوده‌اند، تشکر کنم؛ مخصوصاً قدردان زحمات جناب آقای مهندس نوید آقانوری می‌باشم که همفکر و همراه من در طی مدت تحقیق بوده‌اند، و برای همه ایشان، کامیابی و موفقیت روزافزون را آرزومندم.

## چکیده :

از ویژگیهای مهم هر الگوریتم کنترلی، فراهم آوردن پایداری و حفظ آن در حضور عدم قطعیتها می باشد. در کنترل غیرخطی مقاوم، سیستم کنترلی در شرایطی طراحی می گردد که عدم قطعیتها مدل وجود داشته باشند. معمولترین ابزار جهت تحلیل و طراحی سیستمهای غیرخطی، استفاده از تکنیکهای لیاپانوف می باشد. از آنجا که برای طراحی سیستمهای کنترل غیرخطی، روش کلی وجود ندارد، اما می توان گفت که مجموعه غنی از روشهای متفاوت برای دسته خاصی از کلاس سیستمها وجود دارد.

روشهای کنترل غیرخطی مقاوم ثابت کرده اند که در سیستمهای کنترلی مختلفی، مؤثر بوده اند؛ از جمله این کنترل کننده ها می توان به کنترل کننده غیرخطی مقاوم به روش پسگام اشاره کرد. در ارتباط با پایدارسازی مقاوم، این ایده مطرح است که چگونه می توان یک تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم و همچنین یک کنترل کننده مقاوم برای یک سیستم غیرخطی ایجاد نمود.

در این پایان نامه، روش پسگام مقاوم به عنوان یک فرآیند سیستماتیک معرفی شده که توسط آن می توان کلاس خاصی از سیستمهای غیرخطی نامعین را که به فرم فیدبک صریح می باشند، کنترل نمود. با اعمال این روش بر روی سیستم فشار خون و همچنین روی سیستم سرو سرعت الکتروهیدرولیکی، کارایی این روش را نشان خواهیم داد.

## فهرست مطالب

۱	..... مقدمه	فصل ۱
۵	..... مفاهیم اساسی تئوری لیاپانوف	فصل ۲
۶	..... مقدمه	۱-۲
۸	..... نقاط تعادل	۲-۲
۹	..... سیستمهای اتونوموس و غیراتونوموس	۳-۲
۱۰	..... مفاهیم پایداری	۴-۲
۱۱	..... پایداری مجانبی	۱-۴-۲
۱۲	..... پایداری محلی و پایداری کلی	۵-۲
۱۲	..... توابع مثبت معین	۶-۲
۱۴	..... ماتریس متقارن، پادمتقارن و مثبت معین	۷-۲
۱۵	..... قضیه سیلوستر	۱-۷-۲
۱۵	..... مفهوم نرم	۸-۲
۱۷	..... تابع لیاپانوف	۹-۲
۱۸	..... توابع لیاپانوف کنترلی	۱۰-۲
۲۰	..... تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم	۱۱-۲

۲۰	..... قضایای پایداری	۱۲-۲
۲۰	..... قضیه لیپانوف برای پایداری محلی	۱-۱۲-۲
۲۱	..... قضیه لیپانوف برای پایداری کلی	۲-۱۲-۲
۲۳	..... اهداف کنترل مقاوم	فصل ۳
۲۴	..... مقدمه	۱-۳
۲۶	..... اهداف کنترل	۲-۳
۲۷	..... مسأله پایداریسازی	۱-۲-۳
۲۸	..... مسأله ردیابی	۲-۲-۳
۲۹	..... مشخص کردن رفتار مطلوب	۳-۳
۳۱	..... کنترل مقاوم	۴-۳
۳۵	..... طراحی کنترل کننده غیرخطی به روش پسگام مقاوم	فصل ۴
۳۶	..... مقدمه	۱-۴
۳۷	..... تاریخچه	۲-۴
۳۸	..... بازطراحی لیپانوف	۳-۴
۳۹	..... عدم قطعیت‌های تطبیق یافته	۱-۳-۴
۴۰	..... طراحی به روش پسگام مقاوم	۴-۴
۴۰	..... کلاس سیستمها (فرم فیدبک صریح)	۱-۴-۴
۴۳	..... ایجاد یک rclf	۲-۴-۴

۴۸	.....	فرآیند طراحی پسگام	۳-۴-۴
۵۶	.....	کنترل فشار خون بیمار تحت عمل جراحی	فصل ۵
۵۷	.....	معرفی فشار خون	۱-۵
۶۱	.....	هدف کنترل فشار خون	۲-۵
۶۳	.....	مدل دینامیکی سیستم فشار خون در پاسخ به داروی هایپوتنسیو	۳-۵
۶۸	.....	مکانیزم کنترل کننده به روش پسگام مقاوم	۴-۵
۶۸	.....	مسأله پایداری سازی	۱-۴-۵
۷۲	.....	مسأله ردیابی	۲-۴-۵
۷۵	.....	مکانیزم کنترل کننده به روش پسگام	۵-۵
۷۶	.....	مسأله پایداری سازی	۱-۵-۵
۷۷	.....	مسأله ردیابی	۲-۵-۵
۷۹	.....	نتایج و شبیه سازی	۶-۵
۷۹	.....	خروجی سیستم بدون کنترل کننده	۱-۶-۵
۸۰	.....	خروجی سیستم با اعمال کنترل کننده پسگام مقاوم	۲-۶-۵
۸۱	.....	خروجی سیستم با اعمال کنترل کننده پسگام	۳-۶-۵
۸۴	.....	کنترل سروسیستم سرعت الکتروهیدرولیکی	فصل ۶
۸۵	.....	مقدمه	۱-۶
۸۶	.....	توصیف سیستم	۲-۶

۹۰	.....	مکانیزم کنترل کننده پسگام مقاوم	۳-۶
۹۵	.....	نتایج و شبیه‌سازیها	۴-۶
۱۰۲	.....	نتیجه‌گیری و پیشنهادات	
۱۰۶	.....	مراجع	



# فصل I

مقدمه

**مقدمه :**

در تئوری کنترل خطی و غیرخطی، مهمترین موضوع قابل بررسی، پایداری سیستمها در نتیجه کنترل آنها می‌باشد. همه سیستمهای موجود در دنیای واقعی، غیرخطی هستند، لذا تئوری کنترل غیرخطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار خواهد شد. همچنین اکثر سیستمها دارای عدم قطعیت هستند و تلاش برای طراحی کنترل فیدبکی که توانایی مقابله با محدوده وسیعی از این عدم قطعیتها را داشته باشد، موجب بروز ساختارهای خاصی در کنترل مقاوم می‌گردد. یک ویژگی مهم هر الگوریتم کنترلی، فراهم آوردن پایداری و حفظ آن در حضور عدم قطعیتها است. این ویژگی تحت عنوان مقاوم بودن تعریف می‌شود. بدیهی است الگوریتم کنترلی که توان تحمل هیچگونه نامعینی حتی با دامنه بسیار کوچک را نداشته باشد، مقاوم نیست. به‌علاوه ممکن است یک الگوریتم کنترلی در یک کاربرد مقاوم باشد ولی در کاربرد دیگر اینگونه نباشد.

در سیستمهای غیرخطی، معمولترین و مفیدترین ابزار جهت تحلیل و طراحی، استفاده از تئوری لیاپانوف می‌باشد که این روش اولین بار توسط ریاضیدان روسی، لیاپانوف، ارائه گردید. مشکل اصلی این تئوری، پیدا کردن تابعی با خصوصیات لیاپانوف بود. لذا، تلاشهای مختلفی جهت بدست آوردن این تابع انجام گرفت.

در زمینه کنترل مقاوم نیز در سالهای اخیر پیشرفتهای مهمی صورت گرفته که منجر به ایجاد ابزارهای قدرتمند طراحی و آنالیز سیستمهای کنترل شده است. یکی از این روشها، روش طراحی بازگشتی لیاپانوف موسوم به روش پسگام مقاوم می‌باشد که موضوع اصلی این پایان‌نامه می‌باشد. در ارتباط با پایداری مقاوم دو ایده مطرح است و آن اینست که آیا می‌توان یک تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم را برای یک سیستم نامعین ایجاد کرد؟ همچنین چگونه می‌توان یک کنترل‌کننده مقاوم برای یک سیستم نامعین فراهم نمود؟ با استفاده از روش پسگام مقاوم این دو ایده بررسی شده و به عنوان مطالعات موردی، این روش را روی سیستم کنترل فشار خون و سیستم سرو سرعت الکتروهایدرولیکی اعمال خواهیم کرد.

گرچه نمی‌توان این روش را برای همه سیستمهای غیرخطی بکار برد، ولی می‌توان کلاس وسیعی از سیستمها را که دارای فرم فیدبک صریح می‌باشند، کنترل نمود.

در فصل دوم، مفاهیم اساسی تئوری لیاپانوف را که مورد نیاز در فصلهای بعدی می‌باشد، بیان می‌کنیم که می‌تواند خواننده را از استفاده از مراجع دیگر بی‌نیاز کند. بطور نمونه در این فصل، توابع لیاپانوف کنترلی و توابع لیاپانوف کنترلی مقاوم معرفی خواهند شد.

در فصل سوم، مختصری از کنترل مقاوم ارائه می‌گردد و همچنین اهداف کنترل مقاوم مطرح می‌شود.

در فصل چهارم، روند طراحی کنترل‌کننده‌های مقاوم به روش پسگام ذکر خواهد شد. در این فصل، یک کلاس ساختاری برای سیستمهای غیرخطی تحت عنوان فرم فیدبک صریح معرفی می‌گردد که مورد استفاده در این روش می‌باشد. سپس به ایجاد تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم و قانون کنترلی

فیدبک حالت پایدارساز مقاوم با استفاده از روش پسگام مقاوم برای این سیستمها خواهیم پرداخت و با ذکر یک مثال کاربرد آن را نشان می‌دهیم.

در فصل پنجم، کنترل فشار خون بیمار را براساس روش پسگام مقاوم ارائه شده در فصل چهارم، انجام می‌دهیم. جزئیات فرآیند طراحی برای سیستم فشار خون در این فصل آمده است. عمل کنترل فشار خون بیمار با استفاده از تزریق داروی هایپوتنسیو<sup>۱</sup> صورت می‌گیرد [۲۴]. این دارو به عنوان کاهنده فشار خون عمل می‌کند که به بدن بیمار تزریق می‌شود و از طریق کنترل نرخ تزریق این دارو، می‌توان فشار خون بیمار را در یک سطح معین نگه داشت. تنظیم دستی نرخ تزریق داروی کاهنده فشار خون جهت کنترل فشار خون توسط پرسنل کلینیک برای بیماران مختلف که پاسخ مختلفی به دارو دارند، اغلب کار دشوار و خسته کننده‌ای می‌باشد. در نتیجه ممکن است منجر به نوسانات خطرناک و نامطلوب فشار خون شود. در نتیجه یک کنترل کامپیوتری جهت تنظیم فشار خون سرخرگی مورد نیاز می‌باشد. در این فصل نتایج روش پسگام مقاوم با روش مقایسه شده است.

در فصل ششم، سیستم سرو سرعت الکتروهیدرولیکی را با استفاده از روش پسگام مقاوم کنترل کرده و نتایج را با دو روش پسگام و خطی سازی فیدبکی مقایسه می‌کنیم.

---

<sup>۱</sup> - Hypotensive

## فصل II

### مفاهيم اساسی تئوری لياپانوف

## ۲-۱. مقدمه :

در سیستم کنترلی، اولین و مهمترین موضوع درباره ویژگیهای متعدد آن، پایداری<sup>۱</sup> سیستم است. زیرا سیستم ناپایدار اصولاً بی فایده و ذاتاً خطرناک است. از لحاظ کیفی، سیستمی پایدار است که شروع سیستم از نقطه ای نزدیک نقطه کار مطلوب، منجر به باقی ماندن دائمی آن در اطراف نقطه کار شود.

معمولترین و مفیدترین ابزار برای مطالعه پایداری سیستمهای کنترل غیر خطی، تئوری لیاپانوف<sup>۲</sup> می باشد که در اواخر قرن ۱۹ توسط ریاضیدان روسی به نام «الکساندر میخائیلوویچ لیاپانوف<sup>۳</sup>» مطرح شده است.

نظریه اساسی لیاپانوف شامل دو روش است که توسط لیاپانوف معرفی شده است: روش غیرمستقیم<sup>۴</sup> و روش مستقیم<sup>۵</sup>. روش غیرمستقیم یا روش خطی سازی، بیان می کند که خواص پایداری یک سیستم غیرخطی در نزدیکی یک نقطه تعادل، اصولاً همانند تقریب خطی شده آن است. این روش به عنوان یک توجیه نظری برای استفاده کنترل خطی در سیستمهای فیزیکی است که

---

<sup>۱</sup> - Stability

<sup>۲</sup> - Lyapunov

<sup>۳</sup> - Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

<sup>۴</sup> - Lyapunov's Indirect Method

<sup>۵</sup> - Lyapunov's Direct Method

همیشه بطور ذاتی غیرخطی هستند. در واقع، این روش دربارهٔ پایداری محلی سیستم غیرخطی، اطراف نقطهٔ تعادل، از روی خواص پایداری تقریب خطی آن می باشد.

روش مستقیم، یک ابزار قوی جهت تحلیل سیستم غیرخطی است. این روش تعمیم مفهوم انرژی در یک سیستم مکانیکی است:

«حرکت یک سیستم مکانیکی پایدار است اگر مجموع انرژی مکانیکی آن در همهٔ زمانها کاهش یابد.»

در هنگام استفاده از روش مستقیم در تحلیل پایداری یک سیستم غیرخطی، ایجاد یک تابع شبه انرژی اسکالر (تابع لیاپانوف<sup>۱</sup>) در سیستم مورد نظر است و مشاهدهٔ اینکه آیا این تابع کاهش می یابد یا نه؟ کارآیی این روش در خاصیت تعمیم آن برای همه گونه سیستمهای کنترل می باشد، چه تغییرپذیر با زمان و چه تغییرناپذیر با زمان. محدودیت این روش در این است که اغلب پیدا کردن یک تابع با خصوصیات لیاپانوف در یک سیستم کار مشکلی است. روش مستقیم، به حرکت محلی محدود نمی شود و خواص پایداری سیستم غیرخطی را با ایجاد یک تابع اسکالر شبه انرژی در سیستم و بررسی تغییرات زمانی تابع، تعیین می گردد. گرچه روش مستقیم لیاپانوف در اصل یک روش تحلیل پایداری است، ولی می تواند برای طراحی کنترل کننده های غیرخطی بکار رود. بدین صورت که یک تابع مثبت اسکالر از حالت های سیستم پیدا کرده و سپس قانون کنترلی را چنان انتخاب می کنیم که این تابع کاهش یابد. در این حالت پایداری سیستم کنترل غیرخطی تضمین می شود.

در این فصل به ارائهٔ چند تعریف اساسی مورد نیاز در فصلهای بعدی می پردازیم:

<sup>۱</sup> - Lyapunov Function

## ۲-۲. نقاط تعادل :

نقطه تعادل، نقطه ای است که حالات سیستم در آن نقطه به آرامش می رسند. ممکن است مسیر<sup>۱</sup> سیستم معادل تنها یک نقطه باشد. چنین نقطه ای را نقطه تعادل<sup>۲</sup> می نامند.

**تعریف ۲-۱:** حالت  $x^*$  یک حالت تعادل (نقطه تعادل) سیستم است هنگامی که  $x(t)$  برابر  $x^*$  شود، تا ابد برابر  $x^*$  باقی بماند.

از لحاظ ریاضی، اگر سیستم به صورت زیر باشد؛

$$\dot{x} = f(x)$$

نقطه تعادل بدان معنی است که بردار ثابت  $x^*$  شرط زیر را برآورده کند:

$$f(x^*) = 0$$

نقاط تعادل را می توان از حل معادلات جبری غیرخطی فوق بدست آورد.

در سیستمهای خطی، تعداد نقاط تعادل یا یکتا است یا بیشمار نقطه تعادل دارد ولی در سیستمهای غیرخطی نقاط تعادل مجزای متعددی (یا بیشمار) می توانند داشته باشند.

در تحلیل و طراحی سیستمهای خطی و غیرخطی، جهت ساده سازی، معادلات را به شکلی تبدیل می کنیم که مبدأ فضای حالت، نقطه تعادل شود. بدین منظور با معرفی متغیر جدیدی بصورت  $y = x - x^*$  و جایگذاری  $x = y + x^*$  در معادلات، یک دسته جدید معادلات بر حسب متغیر  $x$  بدست می آید که نقطه تعادل در مبدأ می باشد.

---

<sup>۱</sup> - Trajectory  
<sup>۲</sup> - Equilibrium Point



## ۳-۲. سیستم‌های اتونوموس<sup>۱</sup> و غیراتونوموس<sup>۲</sup>:

در سیستم‌های خطی بر حسب اینکه ماتریس سیستم با زمان تغییر نکند یا تغییر کند، به سیستم‌های تغییرناپذیر با زمان و تغییرپذیر با زمان تقسیم می‌شوند. در سیستم‌های غیرخطی این صفات بطور معمول توسط واژه‌های اتونوموس و غیراتونوموس جایگزین می‌شوند.

**تعریف ۲-۲:** سیستم غیر خطی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1-2)$$

که در آن  $f$  تابع برداری غیرخطی  $n \times 1$  و  $x$  بردار حالت  $n \times 1$  است.

این سیستم اتونوموس است اگر  $f$  بطور صریح<sup>۳</sup> به زمان بستگی نداشته باشد؛ یعنی بتوان معادله حالت سیستم را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2-2)$$

در غیر این صورت، سیستم غیراتونوموس است.

در نتیجه، سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)<sup>۴</sup>، معادل اتونوموس، و سیستم‌های خطی تغییرپذیر با زمان (LTV)<sup>۵</sup> معادل غیراتونوموس در سیستم‌های غیرخطی هستند. اگر بخواهیم دقیقتر شویم، تمام سیستم‌های فیزیکی، غیراتونوموس هستند، زیرا هیچ یک از ویژگی‌های دینامیکی آنها کاملاً تغییرناپذیر با زمان نیستند.

<sup>۱</sup> - Autonomus

<sup>۲</sup> - Nonautonomus

<sup>۳</sup> - Explicit

<sup>۴</sup> - Linear Time Invariant

<sup>۵</sup> - Linear Time Variant

ناپایداری نقطه تعادل واقعاً نامطلوب است، زیرا اغلب، سیستم را به سمت سیکل حدی<sup>۱</sup> سوق می دهد و یا باعث آسیب قطعات و اجزاء مکانیکی یا الکتریکی سیستم می شود. ذکر این نکته حایز اهمیت است که فرق کیفی بین ناپایداری و تصور شهودی انفجار<sup>۲</sup> (تمام مسیرهای نزدیک به مبدأ از آن دورتر و دورتر شده، به سمت بینهایت حرکت کنند.) در سیستمهای خطی اینست که ناپایداری با انفجار معادل است، زیرا قطبهای ناپایدار همواره منجر به رشد نمایی حالتهای سیستم می شود، اما در سیستمهای غیرخطی، انفجار تنها یکی از راههای ناپایداری است.

## ۲-۴-۱. پایداری مجانبی<sup>۳</sup>:

**تعریف ۲-۴:** نقطه تعادل مبدأ بصورت مجانبی پایدار است اگر دو شرط زیر را داشته باشد:

- پایدار لیاپانوفی باشد.

- اگر  $r > 0$  وجود داشته باشد بطوریکه  $\|x(0)\| < r$ ، آنگاه نتیجه زیر را داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0 \quad (2-5)$$

پایداری مجانبی به این معنی است که نقطه تعادل پایدار است و به علاوه، حالتهایی که نزدیک

صفر شروع می شوند، در نهایت به صفر همگرا شوند. نقطه تعادلی که پایدار لیاپانوفی باشد ولی

بصورت مجانبی پایدار نباشد، پایدار مرزی گفته می شود.

<sup>۱</sup> - Limit Cycle  
<sup>۲</sup> - Blowing up  
<sup>۳</sup> - Asymptotica Stability

## ۲-۵. پایداری محلی<sup>۱</sup> و پایداری کلی<sup>۲</sup>:

تعاریف فوق برای توصیف رفتار محلی سیستم، یعنی چگونه حالت سیستم پس از شروع از نزدیکی نقطه تعادل نمو می کند، استفاده می شوند.

**تعریف ۲-۵:** اگر تعاریف بیان شده برای مفهوم پایداری به ازاء برخی از شرایط اولیه برقرار باشد، پایداری را محلی و اگر به ازاء تمام شرایط اولیه برقرار باشد، پایداری کلی گفته می شود.

اگر پایداری مجانبی (یا نمایی) در هر حالت اولیه حفظ شود، نقطه تعادل را به مفهوم وسیع، بصورت مجانبی (یا نمایی) پایدار می نامند.

## ۲-۶. توابع مثبت معین<sup>۳</sup>:

**تعریف ۲-۶:** تابع اسکالر پیوسته  $V(x)$  بصورت محلی مثبت معین (PD) نامیده می شود اگر  $V(0)=0$  باشد و در گوی  $B_{R_0}$  (یک کره به شعاع  $R_0$ ) داشته باشیم:

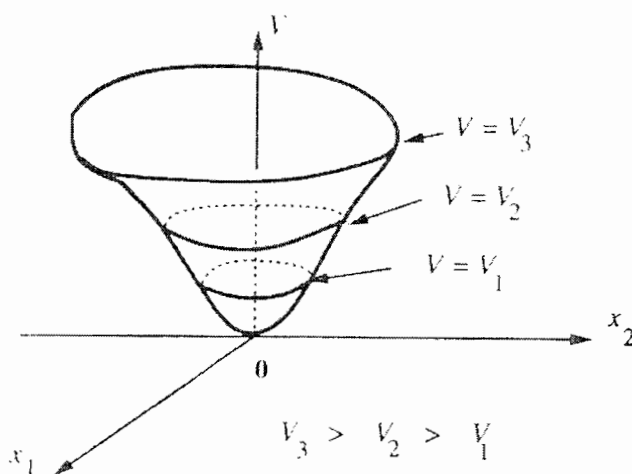
$$X \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0 \quad (۲-۶)$$

اگر  $V(0)=0$  باشد و خاصیت فوق برای تمام فضای حالت برقرار باشد، آنگاه  $V(x)$  بصورت کلی مثبت معین است.

تعریف فوق بیان می کند که تابع  $V$ ، مینیمم واحد در مبدأ دارد. در حقیقت با داشتن هر تابعی که مینیمم منحصر به فرد در گوی مشخصی داشته باشد، می توانیم به سادگی با افزودن مقدار ثابتی به تابع، یک تابع مثبت معین بصورت محلی بسازیم.

<sup>۱</sup> - Local Stability  
<sup>۲</sup> - Globally Stability  
<sup>۳</sup> - Positive Definite

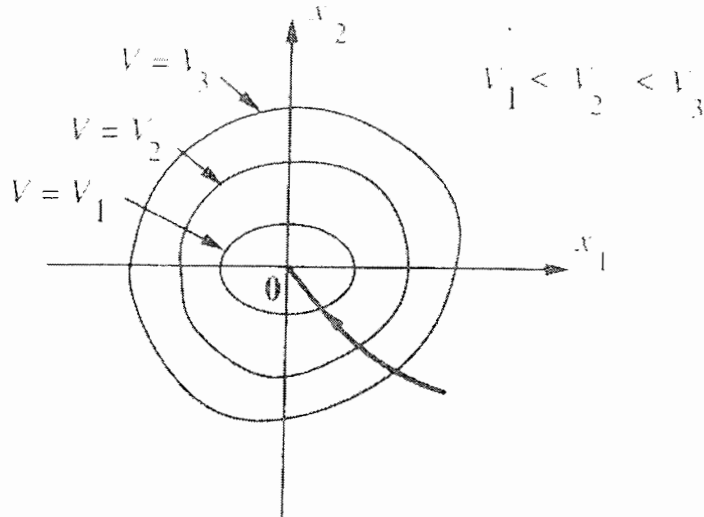
نمایش هندسی توابع مثبت معین در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. تابع مثبت معین  $V(x)$  با دو متغیر حالت  $x_1$  و  $x_2$  را در نظر بگیرید. با رسم در صفحه سه بعدی،  $V(x)$  عموماً به صورت سطحی شبیه یک جام رو به بالا خواهد بود که نقطه تحتانی جام در مبدأ قرار دارد.



شکل (۲-۲): نمایش هندسی توابع مثبت معین

نمایش هندسی دوم را می توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

با در نظر گرفتن  $x_1$  و  $x_2$  به عنوان محورهای مختصات کارتزین، منحنیهای سطح  $V(x_1, x_2) = V_a$  تشکیل مجموعه ای از شکلهای بیضوی که مبدأ را احاطه کرده اند، می دهند، که هر شکل بیضوی مربوط به یک مقدار مثبت  $V_a$  است. این شکلهای بیضوی را، که غالباً منحنی های کانتور نامیده می شوند، می توان سطح مقطعی از یک جام که توسط صفحات افقی تشکیل شده اند و بر روی صفحه  $(x_1, x_2)$  تصویر می شوند، دانست. توجه شود که منحنی های کانتور همدیگر را قطع نمی کنند. شکل (۳-۲).



شکل (۳-۲): نمایش هندسی دوم توابع مثبت معین

**تعریف ۷-۲:** تابع  $V(x)$  مثبت نیمه معین است اگر  $V(0)=0$  باشد و داشته باشیم:

$$\forall X \neq 0 \Rightarrow V(x) \geq 0 \quad (7-2)$$

**تعریف ۸-۲:** تابع  $V(x)$  منفی (نیمه) معین است اگر  $-V(x)$  مثبت (نیمه) معین باشد.

**۷-۲. ماتریس متقارن<sup>۱</sup>، پادمتقارن<sup>۲</sup> و مثبت معین<sup>۳</sup>:**

**تعریف ۹-۲:** ماتریس مربعی  $M$  متقارن است اگر  $M=M^T$  باشد. (به بیان دیگر، اگر

$$M_{ij} = M_{ji} \quad \forall i, j \text{ باشد.})$$

ماتریس مربعی  $M$  پادمتقارن است اگر  $M=-M^T$  باشد. (یعنی اگر  $M_{ij} = -M_{ji}$   $\forall i, j$  باشد.)

<sup>۱</sup> - Symmetric Matrix  
<sup>۲</sup> - Skew-Symmetric Matrix  
<sup>۳</sup> - Positive Definite

یک شرط لازم و کافی برای پادمتقارن بودن ماتریس  $M$  به صورت زیر است :

$$\forall x: x^T M x = 0 \quad (۸-۲)$$

**تعریف ۸-۲:** ماتریس مربعی  $M_{n \times n}$  مثبت معین (PD) است اگر :

$$x \neq 0 \Rightarrow x^T M x > 0 \quad (۹-۲)$$

یک شرط لازم برای اینکه ماتریس مربعی  $M$  مثبت معین باشد، این است که عناصر قطری آن

کاملاً مثبت باشند. یک نتیجه معروف جبر ماتریسی، قضیه سیلوستر<sup>۱</sup> نامیده می شود که بصورت زیر

بیان می گردد:

**۱-۷-۲. قضیه ۱-۲ (قضیه سیلوستر) :**

با فرض متقارن بودن  $M$ ، شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس  $M$  مثبت معین باشد این است

که تمام کهادهای<sup>۲</sup> اصلی آن ( یعنی  $\det M, M_{11}, M_{11}M_{22} - M_{21}M_{12}, \dots$  ) اکیداً مثبت باشند؛ یا بطور

معادل، تمام مقادیر ویژه آن اکیداً مثبت باشند.

بخصوص یک ماتریس مثبت معین، همواره معکوس پذیر است، زیرا قضیه فوق ایجاب می کند

که دترمینان آن صفر نباشد.

**۸-۲. مفهوم نرم<sup>۳</sup> :**

**تعریف ۱۱-۲ (نرم برداری) :** نرم  $\|x\|$  مربوط به بردار  $x$ ، تابعی با مقدار حقیقی است که دارای

ویژگیهای زیر باشد:

<sup>۱</sup> - Silvester  
<sup>۲</sup> - Minor  
<sup>۳</sup> - Norm

- به ازاء جمیع مقادیر  $x \in \mathbb{R}^n$  داریم:  $\|x\| \geq 0$ . ضمناً  $\|x\| = 0$  است اگر و تنها اگر  $x = 0$ ؛
- به ازاء جمیع مقادیر  $x, y \in \mathbb{R}^n$  داریم:  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ؛
- به ازاء جمیع مقادیر  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $x \in \mathbb{R}^n$  داریم:  $\|\alpha x\| \leq |\alpha| \|x\|$ .

ویژگی دوم به نام نامساوی مثلثی<sup>۱</sup> خوانده می‌شود. می‌توان دسته نرمهای  $p$  را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\|x\|_p = \left( |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (10-2)$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad (11-2)$$

سومین دسته نرم بسیار پر استفاده، نرمهای  $\|x\|_1$ ،  $\|x\|_2$  و  $\|x\|_\infty$  و نرم اقلیدوسی است:

$$\|x\|_2 = \left( |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \right)^{1/2} = (x^T x)^{1/2} \quad (12-2)$$

تمامی نرمهای  $p$  از این لحاظ هم‌ارزند که اگر  $\|\cdot\|_\alpha$  و  $\|\cdot\|_\beta$  دو نرم  $p$ ی مختلف باشند، آنگاه می‌توان

ثابتهای مثبت  $c_1$  و  $c_2$  را چنان یافت که برای همه مقادیر  $x \in \mathbb{R}^n$  داشته باشیم:

$$c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha \quad (13-2)$$

تقریباً هرگاه از نرم استفاده می‌کنیم، فقط از ویژگیهای ناشی از سه خاصیت اصلی همه نرمها

بهره می‌جوئیم؛ در این حالتها، زیرنویس  $p$  حذف می‌شود تا نشان دهد نرم کاربردی می‌تواند هر یک

از نرمهای  $p$  باشد.

<sup>۱</sup> - Triangle inequality

۲-۹. تابع لیاپانوف<sup>۱</sup>:

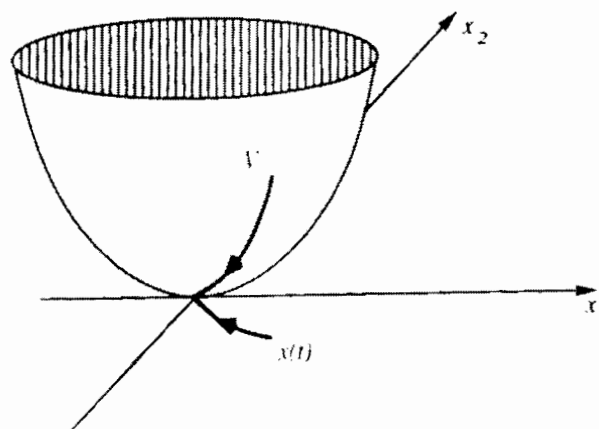
با در نظر گرفتن  $x$  به عنوان حالت سیستم  $\dot{x} = f(x)$ ، تابع اسکالر  $V(x)$ ، در واقع بیانگر یک تابع ضمنی از زمان  $t$  است. با فرض مشتق پذیر بودن  $V(x)$ ، مشتق آن نسبت به زمان با استفاده از قاعده زنجیره ای زیر بدست می آید:

$$\dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (2-14)$$

می بینیم از آنجاییکه  $x$  باید در معادله حالت اتونوموس  $\dot{x} = f(x)$  صدق کند،  $\dot{V}(x)$  تنها به  $x$  وابسته است.

**تعریف ۲-۱۲:** اگر در گوی  $B_{R_0}$ ، تابع  $V(x)$  مثبت معین و مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد و اگر مشتق زمانی آن در امتداد هر مسیر حالت سیستم  $\dot{x} = f(x)$  منفی نیمه معین باشد یعنی  $\dot{V}(x) \leq 0$ . آنگاه  $V(x)$  را یک تابع لیاپانوف سیستم می نامند.

تعبیر هندسی تابع لیاپانوف در شکل (۲-۴) نشان داده شده است.



شکل ۲-۴: تعبیر هندسی تابع لیاپانوف

<sup>۱</sup> - Lyapunov Function



وجود یک تابع لیاپانوف، مهمترین شرط لازم و کافی برای پایداری سیستمهای غیرخطی می‌باشد. شرط کافی بودن آن توسط لیاپانوف ارائه شد [۲] و شرط لازم بودن، نیم قرن بعد با ظهور تئوریهای موسوم به تئوریهای معکوس اثبات شد [۳، ۴]. ابتدا، تئوری لیاپانوف با سیستمهای دینامیکی بدون ورودی سروکار داشت. به همین دلیل، فقط برای سیستمهای کنترل حلقه-بسته بصورت متداول کاربرد داشت، یعنی سیستمهایی که ورودی از طریق جانشینی کنترل فیدبک از پیش تعیین شده، حذف می‌شد. به‌هرحال، بعضی نویسندگان، توابع لیاپانوف منتخب در طراحی فیدبک را طوری بدست آوردند که مشتق لیاپانوف هنگام انتخاب کنترل، منفی باشد. چنین ایده‌ای منجر به معرفی تابع لیاپانوف کنترل برای سیستمهای با ورودیهای کنترلی شد. [۵، ۶]

## ۲-۱۰. توابع لیاپانوف کنترلی<sup>۱</sup>:

**تعریف ۲-۱۳:** یک تابع لیاپانوف کنترلی (clf) برای یک سیستم به فرم زیر:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (۱۵-۲)$$

یک تابع شعاعی نامحدود مثبت معین کلاس  $C^1$  مانند  $V(x)$  است بطوریکه:

$$x \neq 0 \Rightarrow \inf_{u \in U} \nabla V(x).f(x, u) < 0 \quad (۱۶-۲)$$

که در آن  $U$  یک مجموعه محدب از مقادیر قابل قبول متغیر کنترلی  $u$  است. به عبارت دیگر؛ یک clf به سادگی یک تابع لیاپانوف کاندید می‌باشد که مشتق آن می‌تواند با در نظر گرفتن مقادیر مناسب کنترلی، منفی گردد. واضح است که اگر  $f$  پیوسته باشد و یک فیدبک حالت پیوسته برای (۱۵-۲)

<sup>۱</sup> - Control Lyapunov Function

<sup>۲</sup> - inf: بزرگترین کران پایین

وجود داشته باشد، بطوریکه نقطه  $x=0$  بصورت مجانبی، نقطه تعادل پایدار کلی برای سیستم حلقه- بسته شود، آنگاه با استفاده از تئوریهای لیپانوف معکوس باید یک clf برای سیستم (۲-۱۵) وجود داشته باشد.

بطور خلاصه؛ وجود یک تابع لیپانوف، شرط لازم و کافی برای پایداری سیستمهای بدون ورودی است و وجود یک clf، شرط لازم و کافی برای پایداری سیستمهای همراه با ورودی می باشد. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را بیان می کنیم:

### مثال ۲-۱:

سیستم مرتبه II زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \Phi(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= u + \Psi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (۲-۱۷)$$

$\Phi$  و  $\Psi$  توابع پیوسته و  $u$  مقادیری از مجموعه  $U = \mathbb{R}$  را شامل می شود. تابع

که رابطه زیر را برقرار می کند:

$$\inf_{u \in U} \nabla V(x).f(x, u) = \inf_{u \in U} \left[ -x_1^4 + x_1 x_2 \Phi(x_1, x_2) + x_2 u + x_2 \Psi(x_1, x_2) \right] = \begin{cases} -x_1^4 & ; \quad x_2 = 0 \\ -\infty & ; \quad x_2 \neq 0 \end{cases} \quad (۲-۱۸)$$

یک clf برای این سیستم است. نتیجه می گیریم که این سیستم به صورت مجانبی و کلی پایدارپذیر

است. در این حالت می توانیم پایدارپذیری را با ایجاد یک کنترل فیدبک ویژه اثبات کرد؛ همانا کنترل

$u(x_1, x_2) = -x_2 - \Psi(x_1, x_2) - x_1 \Phi(x_1, x_2)$  باعث می شود که  $\dot{V}$  منفی معین شود و در نتیجه پایداری

مجانبی کلی را تضمین می کند.

۲-۱۱. تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم:  $(rclf)$ : [۷]

تعریف ۲-۱۴: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u + H(x)\omega \quad (۱۹-۲)$$

که در آن،  $F$  و  $G$  و  $H$  توابع پیوسته و معلومی هستند.  $u$  ورودی کنترلی و  $\omega$  ورودی اغتشاش است. برای اینکه تابع  $V$  یک  $rclf$  برای سیستم فوق باشد، باید شرط زیر را به ازاء همه  $x \neq 0$  ارضاء کند:

$$\inf_{u \in U} \sup_{\omega \in B} \nabla V(x) \cdot [F(x) + G(x)u + H(x)\omega] < 0 \quad (۲۰-۲)$$

یا بطور معادل:

$$\nabla V(x) \cdot G(x) = 0 \Rightarrow \nabla V(x) \cdot F(x) + \|\nabla V(x) \cdot H(x)\| < 0 \quad (۲۱-۲)$$

## ۲-۱۲. قضایای پایداری:

قضیه ۲-۲ (قضیه لیاپانوف برای پایداری محلی):

اگر در گوی  $B_{R_0}$ ، تابع اسکالر  $V(x)$  با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته وجود داشته باشد به

گونه ای که:

- $V(x)$  مثبت معین باشد. (به صورت محلی در  $B_{R_0}$ )
- $\dot{V}(x)$  منفی نیمه معین باشد. (به صورت محلی در  $B_{R_0}$ )

آنگاه نقطه تعادل مبدأ پایدار محلی است. اگر  $\dot{V}(x)$  در  $B_{R_0}$  بصورت محلی، منفی معین باشد، آنگاه

پایداری مجانبی است. { اثبات: [۱] }

<sup>۱</sup> - Robust Control Lyapunov Function

<sup>۲</sup> - sup : کوچکترین کران بالا

## قضیه ۲-۳ (قضیه لیاپانوف برای پایداری کلی):

فرض کنید که تابع اسکالری مانند  $V(x)$  از حالت  $x$  وجود داشته باشد که مشتقات مرتبه اول پیوسته داشته باشد، به گونه ای که :

- $V(x)$  مثبت معین باشد.
- $\dot{V}(x)$  منفی معین باشد.
- $V(x)$  به صورت شعاعی نامحدود باشد؛ یعنی وقتی که  $\|x\| \rightarrow \infty$  میل می کند، آنگاه  $V(x) \rightarrow \infty$  میل کند.

آنگاه نقطه تعادل مبدأ به صورت کلی پایدار است. {اثبات : [۱]}

در قضایای فوق، مشکل اصلی، پیدا کردن تابع لیاپانوف می باشد. برای یک سیستم ممکن است چندین تابع لیاپانوف وجود داشته باشد. اگر برای انتخاب تابع لیاپانوف مانند  $V(x)$ ، شرطهای موجود برای  $V(x)$  برقرار نباشد، هیچ نتیجه گیری بر روی پایداری یا ناپایداری سیستم نمی توان گرفت. در واقع باید تابع لیاپانوف دیگری امتحان شود.

بنابراین سؤال این است که چگونه باید تابع لیاپانوف را برای یک مسئله خاص پیدا کرد. هنوز هیچ راه کلی برای یافتن توابع لیاپانوف برای سیستمهای غیرخطی وجود ندارد. این یک مشکل اساسی روش مستقیم لیاپانوف است. بنابراین، در مواجهه با سیستمهای خاص، باید از تجربه، احساس و دید فیزیکی برای پیدا کردن تابع لیاپانوف مناسب استفاده کرد. البته روشهای مختلفی برای پیدا کردن

توابع لیپانوف وجود دارد؛ از جمله می توان به خطی سازی حول نقطه تعادل و نوشتن  $V(x)$  با حل معادله ریکاتی، روش کراسفسکی<sup>۱</sup>، روش کراسفسکی تعمیم یافته<sup>۲</sup> روش گرادیان متغیر<sup>۳</sup> و ... نام برد.

---

<sup>۱</sup> - Krasovskii's Method  
<sup>۲</sup> - Generalized Krasovskii's Method  
<sup>۳</sup> - Variable Gradient Method

# فصل III

## اهداف کنترل مقاوم

### ۳-۱. مقدمه :

در سیستم‌های غیرخطی، معمولترین ابزار جهت تحلیل و طراحی، استفاده از روش مستقیم لیاپانوف می‌باشد که در آن برای سیستم مورد نظر، کفایت تابع با خصوصیات لیاپانوف پیدا شود تا پایداری آن تضمین شود. در روشهای اشاره شده در فصل قبلی، در انجام تحلیل، به طور ضمنی فرض کردیم که قوانین کنترلی<sup>۱</sup> خاصی برای سیستمها انتخاب شده است. اما در بسیاری از مسائل کنترلی، کار اصلی پیدا کردن قانون کنترل مناسب در یک سیستم است.

همانند تحلیل سیستمهای کنترل غیرخطی، در طراحی کنترل کننده های غیرخطی یک روش کلی وجود ندارد. چیزی که موجود است یک مجموعه غنی از روشهای متفاوت و مکمل است که هر کدام برای دسته خاصی از مسائل کنترل غیر خطی بهترین کاربرد را دارا است.

دو تکنیک اصلی استفاده از روش مستقیم لیاپانوف در طراحی کنترل وجود دارد که ماهیت سعی و خطا دارند. تکنیک اول شامل فرض کردن یک شکل قانون کنترل است و سپس یافتن تابع لیاپانوفی که انتخاب مربوطه را تأیید می کند. برعکس، تکنیک دوم نیاز به فرض کردن برای تابع لیاپانوف منتخب و سپس یافتن قانون کنترلی است که این انتخاب را یک تابع لیاپانوفی واقعی بسازد.

<sup>۱</sup> - Control Law

بر اساس دو تکنیک فوق، در بعضی از انواع سیستمهای غیرخطی، عملیات طراحی قاعده داری ایجاد شده اند. بطور نمونه می توان از روش طراحی پسگام<sup>۱</sup>، کنترل مد لغزشی<sup>۲</sup>، کنترل تطبیقی<sup>۳</sup> و ... نام برد.

موارد بسیاری در کنترل وجود دارند که مستلزم استفاده از کنترل فیدبکی<sup>۴</sup> می باشند؛ علاوه براین با توجه به هدف طراحی، فرمولبندیهای مختلفی برای مسائل کنترل وجود دارد. موارد مختلفی مانند پایدارسازی، ردیابی، حذف و یا تضعیف اغتشاش ( و ترکیبهای مختلفی از آنها ) موجب پدید آمدن مسائل گوناگونی در کنترل می شود. در هر یک از این مسائل یا با شکلی از فیدبک حالت مواجهیم که به کمک آن می توان همه متغیرهای حالت را اندازه گرفت و یا شکلی از فیدبک خروجی که در آن فقط می توان بردار خروجی ای را اندازه گرفت که ابعاد آن بطور معمول، کوچکتر از ابعاد بردار حالت است.

علاوه براین در مسائل کنترل، اهداف دیگری نیز برای طراحی مدنظر است که به عنوان نمونه می توان از برآورده ساختن خواسته های ویژه در پاسخ گذرا<sup>۵</sup> و یا تأمین قیدهای خاص بر ورودی نام برد. ممکن است این خواسته ها در تضاد با هم باشند و لازم باشد طراح مصالحه ای<sup>۶</sup> میان آنها بوجود آورد.

<sup>۱</sup> - Backstepping

<sup>۲</sup> - Sliding Mode

<sup>۳</sup> - Adaptive Control

<sup>۴</sup> - Feedback Control

<sup>۵</sup> - Transient

<sup>۶</sup> - Trade off



چنانچه عدم قطعیت<sup>۱</sup> مدل را در نظر بگیریم، مباحث حساسیت<sup>۲</sup> و مقاوم بودن<sup>۳</sup> به میان می‌آید، تلاش برای طراحی کنترل فیدبک، که توانایی مقابله با محدوده وسیعی از عدم قطعیت‌های مدل را داشته باشد، موجب بروز فرمولبندیهای خاصی در کنترل مقاوم<sup>۴</sup> می‌گردد. در کنترل مقاوم، عدم قطعیت مدل را به عنوان آشفتگی نسبت به مدل نامی در نظر می‌گیریم، بدین معنا که می‌توان مدل نامی را به عنوان نقطه‌ای از فضا و مدل‌های آشفته را به صورت نقاط «گویی» در فضا در نظر گرفت که آن نقطه را نیز در برگیرد، در این صورت کنترل مقاوم در پی آنست که بتواند برای همه مدل‌های موجود در «گوی عدم قطعیت» هدف کنترل را برآورده سازد. [۸]

### ۳-۲. اهداف کنترل :

به طور کلی وظایف سیستم‌های کنترلی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

پایدارسازی<sup>۵</sup> (تنظیم<sup>۶</sup>) و ردیابی<sup>۷</sup> (سرو<sup>۸</sup>).

- در مسائل پایدارسازی، یک سیستم کنترل به نام پایدارساز<sup>۹</sup> (تنظیم کننده)، بایستی طوری طراحی شود که حالت سیستم حلقه بسته حول یک نقطه پایدار شود. مانند کنترل دمای یخچالها، کنترل ارتفاع هواپیما و کنترل موقعیت بازوهای ربات.

<sup>۱</sup> - Uncertainty

<sup>۲</sup> - Sensitivity

<sup>۳</sup> - Robustness

<sup>۴</sup> - Robust Control

<sup>۵</sup> - Stabilization

<sup>۶</sup> - Regulation

<sup>۷</sup> - Tracking

<sup>۸</sup> - Servo

<sup>۹</sup> - Stabilizer

- در مسائل ردیابی، هدف از طراحی، ساخت یک کنترل کننده به نام ردیاب، بصورتی است که خروجی سیستم یک مسیر متغیر با زمان را ردیابی کند. مانند وادار کردن یک هواپیما به پرواز در امتداد یک مسیر مشخص شده و یا مجبور کردن یک بازوی ربات به رسم خطوط مستقیم و یا دایره.

### ۳-۲-۱. مسأله پایدارسازی :

مسأله پایدارسازی فیدبک حالت استاتیکی برای سیستم :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (۱-۳)$$

عبارتست از طراحی قانون کنترل فیدبک استاتیکی به صورت زیر:

$$u = \gamma(t, x) \quad (۲-۳)$$

به نحوی که مبدأ  $x = 0$  ، نقطه تعادل پایدار مجانبی یکنواخت برای سیستم حلقه بسته زیر باشد:

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x)) \quad (۳-۳)$$

مسأله پایدارسازی فیدبک خروجی استاتیکی برای سیستم:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x, u) \end{cases} \quad (۴-۳)$$

عبارتست از طراحی قانون کنترل فیدبک استاتیکی خروجی به شکل زیر:

$$u = \gamma(t, y) \quad (۵-۳)$$

به نحوی که مبدأ، نقطه تعادل پایدار مجانبی یکنواخت<sup>۱</sup> برای سیستم حلقه بسته باشد.

<sup>۱</sup> - Uniform Asymptotic Stability

## ۳-۲-۲. مسأله ردیابی :

حال به تعریف حالت کلی تری از مسائل کنترل به نام مسأله ردیابی<sup>۱</sup> در حضور اغتشاش<sup>۱</sup>

می‌پردازیم. در این مورد با سیستمی به شکل زیر سر و کار داریم :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u, \omega) \\ y &= h(t, x, u, \omega) \\ y_m &= h_m(t, x, u, \omega) \end{aligned} \quad (۸-۳)$$

که  $x$  حالت،  $u$  ورودی کنترل،  $\omega$  ورودی اغتشاش،  $y$  خروجی کنترل شده و  $y_m$  خروجی اندازه گیری شده است. هدف اصلی، طراحی ورودی کنترلی است که به کمک آن، خروجی کنترل شده  $y$  بتواند سیگنال مرجع  $y_R$  را دنبال کند؛ یعنی :

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \approx 0, \quad \forall t \geq t_0 \quad (۹-۳)$$

که  $t_0$  زمان آغاز کنترل و  $e(t)$  خطای ردیابی سیستم است. چون مقدار اولیه  $y$  وابسته به حالت اولیه  $x(t_0)$  است، برای دستیابی به این خواسته برای تمامی مقادیر  $t \geq t_0$ ، لازم است حالت اولیه در زمان  $t_0$  از قبل میزان<sup>۲</sup> شود. در عمل چنین کاری معمول نیست، از این رو اغلب به دنبال ردیابی مجانبی خروجی هستیم، بدین معنی که با افزایش  $t$  به سمت بینهایت، خطای ردیابی  $e(t)$  به سمت صفر میل کند، یعنی:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow e(t) \rightarrow 0$$

دستیابی به چنین هدفی در غیاب اغتشاش  $\omega$  و یا در حالت‌های خاصی از ورودیهای اغتشاش امکانپذیر است، در هر یک از این حالتها گوییم به حذف مجانبی اغتشاش دست یافته ایم. اگر در حالت کلی ورودی اغتشاش،  $\omega(t)$ ، متغیر با زمان باشد، نمی‌توان به حذف مجانبی اغتشاش رسید؛ در

<sup>۱</sup> - Disturbance

<sup>۲</sup> - Preset

چنین مواردی فقط می توان به تضعیف اغتشاش دست یافت که آن را به صورت رسیدن به حد نهایی خطای ردیابی با میزان ترانس مشخص زیر تعریف می کنیم:

$$\|e(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T$$

که  $\varepsilon$  عدد مثبت (کوچک) از پیش تعیین شده ای است. [۸]

دسته مهمی از مسائل ردیابی، مربوط به مواردی است که در آنها سیگنال مرجع  $y_R$  ثابت است. در چنین حالتی مرسوم است  $y_R$  را به عنوان نقطه مرجع<sup>۱</sup> و مسأله را بصورت مسأله تنظیم در نظر می گیرند. در اینجا مسأله اصلی کنترل، پایدار سازی سیستم حلقه بسته در یک نقطه تعادل است بطوری که  $y = y_R$  شود.

### ۳-۳. مشخص کردن رفتار مطلوب :

در کنترل خطی، رفتار دلخواه یک سیستم کنترل را می توان به طور قانونمند، یا در حوزه زمان (بر حسب زمان خیز<sup>۲</sup>، فراجش<sup>۳</sup> و زمان استقرار<sup>۴</sup> مطابق با پاسخ پله) و یا در حوزه فرکانس (بر حسب محدوده ای که تابع تبدیل حلقه، باید در فرکانسهای پایین و بالا در آن قرار بگیرد) مشخص نمود. در طراحی کنترل خطی، ابتدا مشخصات کمی سیستم کنترل حلقه بسته ترسیم می شود، آنگاه یک کنترل کننده که این مشخصات را برآورده می کند، ساخته می شود. اما، مشخصات قانونمند در سیستمهای غیرخطی (بجز آنهایی که معادل سیستمهای خطی اند) کمتر مشهودند، زیرا پاسخ

<sup>۱</sup> - Set Point  
<sup>۲</sup> - Rise Time  
<sup>۳</sup> - Overshoot  
<sup>۴</sup> - Settling Time

سیستم غیرخطی به یک دستور، پاسخ آن را به دستور دیگر منعکس نمی کند، لذا یک توصیف مبتنی بر حوزه فرکانس ممکن نیست.

در نتیجه، در سیستمهای غیرخطی، جستجوی مشخصات کیفی رفتار دلخواه در یک محدوده کار سیستم مورد توجه است. در مورد رفتار دلخواه سیستمهای کنترل غیرخطی، یک طراح می تواند بطور نمونه مشخصات زیر را در نظر بگیرد :

- پایداری.
- دقت و سرعت پاسخ.
- مقاوم بودن .
- هزینه.

در اینجا می توان به چند نکته اشاره کرد :

اول اینکه؛ پایداری موجب توانایی تحمل اغتشاشهای مستمر حتی با دامنه کم نمی شود. دلیل آن، این است که پایداری سیستمهای غیرخطی نسبت به شرایط اولیه<sup>۱</sup> تعریف می شود، و تنها اغتشاشهای موقتی را می توان به عنوان شرایط اولیه در نظر گرفت. برای مثال؛ یک سیستم کنترل پایدار ممکن است توانایی یک هواپیما را در مقابله با تند باد تضمین کند، در حالی که برای مقابله با بادهای برنده حتی با دامنه کم هم نامناسب است. این وضعیت با کنترل خطی، که در آن همیشه پایداری موجب توانایی مقابله با اغتشاشهای کراندار ( با فرض اینکه سیستم در محدوده خطی باقی

<sup>۱</sup> - Initial Condition

بماند) می شود، متفاوت است. اثرات اغتشاشهای مستمر بر رفتار سیستمهای غیرخطی توسط مفهوم مقاوم بودن بررسی می شود.

دوم؛ خصوصیات فوق تا اندازه ای تضاد ایجاد می کنند و سیستم کنترل خوب را می توان بر اساس مصالحه مؤثر در ویژگیهای پایداری/مقاوم بودن، پایداری/عملکرد، و هزینه/عملکرد و غیره بدست آورد.

### ۳-۴. کنترل مقاوم :

در کنترل کننده غیرخطی مبتنی بر مدل خاص (مانند روش اصلی کنترل خطی سازی فیدبکی)، قانون کنترل بر اساس مدل اسمی سیستم فیزیکی طراحی می شود. در مرحله طراحی روشن نیست که سیستم کنترل در شرایطی که عدم قطعیت‌های مدل وجود دارد، چگونه عمل خواهد کرد. از سوی دیگر، در کنترل غیرخطی مقاوم، (مانند کنترل مد لغزشی<sup>۱</sup>، پسگام مقاوم<sup>۲</sup>)، کنترل کننده براساس ملاحظات مدل اسمی و مشخصاتی از عدم قطعیت‌های مدل طراحی می شود. عدم قطعیتها در مدل ممکن است ناشی از عدم قطعیت‌های پلان (مثلاً پارامترهای نامعلوم پلان)، یا بخاطر انتخاب هدفدار یک نمایش ساده شده از دینامیکهای سیستم باشد (مثلاً مدلسازی اصطکاک به صورت خطی، یا صرفنظر کردن معقول از حالت‌های ساختاری در یک سیستم مکانیکی سخت). از دیدگاه کنترلی، عدم قطعیتها در مدلسازی را می توان به دو نوع اصلی زیر طبقه بندی کرد :

<sup>۱</sup> - Sliding Mode Control

<sup>۲</sup> - Robust Backstepping

۱. عدم قطعیت‌های ساختاری (یا پارامتری)

۲. عدم قطعیت‌های غیرساختاری (یا دینامیک‌های مدل نشده)

نوع اول به عدم قطعیت در جملاتی که واقعاً در مدل هستند، مربوط می‌شوند، در حالی که نوع دوم به عدم قطعیت در مرتبه سیستم (یعنی تخمین مرتبه پایینتر) مربوط می‌شوند. عدم قطعیت در مدلسازی می‌تواند اثرات نامطلوب شدید بر سیستم‌های غیرخطی بگذارد. بنابراین، هر طراحی عملی بایستی آنها را صریحاً مورد نظر قرار دهد.

هدف اصلی هر حلقه فیدبکی، با توجه به ماهیت سیستم یا طراحی شده توسط مهندسین، کاهش تأثیر عدم قطعیت‌ها روی سیستم می‌باشد. در واقع، فیدبک به عنوان یک الگوی طراحی در سیستم‌های دینامیکی، توانایی مقابله با عدم قطعیت‌ها را دارد. بنابراین، سیستم‌های دینامیکی فیدبکی (سیستم حلقه بسته) اغلب پیچیده تر از سیستم‌های بدون فیدبک (حلقه باز) هستند و طراحی کنترل کننده‌های فیدبکی با خطرات<sup>۱</sup> مختلفی همراه خواهند بود. فیدبک می‌تواند برای پایداری مورد استفاده قرار گیرد، اما کنترل کننده‌های فیدبکی که به صورت نامناسب طراحی شده باشند، ممکن است ناحیه پایداری را کاهش دهند. اگر یک کنترل کننده فیدبکی که روی سیستم خطی-سازی شده عملکرد خوبی داشته باشد، ممکن است ناحیه پایداری سیستم غیرخطی واقعی را کاهش دهد.

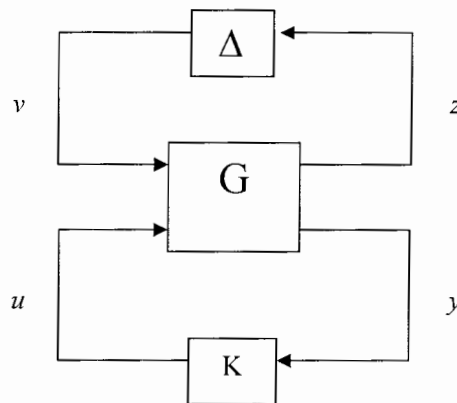
یک ویژگی مهم هر الگوریتم کنترلی، فراهم آوردن پایداری و حفظ آن در حضور عدم قطعیت‌ها است. این ویژگی تحت عنوان مقاوم بودن تعریف می‌شود. بدیهی است الگوریتم کنترلی که توان

<sup>۱</sup> - Risk

تحمل هیچگونه نامعینی حتی با دامنه بسیار کوچک را نداشته باشد، مقاوم نیست. به علاوه ممکن است یک الگوریتم کنترلی در یک کاربرد مقاوم باشد ولی در کاربرد دیگر اینگونه نباشد.

در تئوری کنترل مقاوم، یک سیستم دینامیکی نامعین توسط مجموعه‌ای از مدلها به جای یک مدل تنها توصیف می‌شود. برای مثال، یک سیستم با یک پارامتر نامعین، به ازاء هر مقدار قابل قبول از پارامتر، مجموعه‌ای از مدلها را ایجاد خواهد کرد.

در سالهای اخیر، پیشرفتهای مهمی در تئوری کنترل مقاوم خطی، منجر به ابزارهای قدرتمند جدید طراحی و آنالیز سیستمهای کنترل شده است. یک الگوی رایج برای چنین تئوری در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. [۷]



شکل (۱-۳)

تئوری کنترل مقاوم خطی بر این اساس استوار است که سیستم نامی  $G$  خطی باشد. معمولاً مستقل از زمان با بعد محدود) همچنین خانواده‌های مختلفی از عدم قطعیت‌های سیستم  $(\Delta)$  را می‌توان در نظر گرفت. از جمله می‌توان به عدم قطعیت‌های ساختار یافته و بدون ساختار، حقیقی (بدون



حافظه) و مختلط (دینامیکی)، تغییرناپذیربازمان و تغییرپذیر با زمان و ... اشاره کرد. در هر حال اندازه‌های مختلف در سائز یک عدم قطعیت، منجر به قالبهای مختلفی در کنترل مقاوم شده است؛ مانند  $H_2$  و  $H_\infty$  و  $\mu$  و ... وجه مشترک برای خانواده عدم قطعیتها این است که شرط نرم محدود را برقرار کنند.

سیستمهای فیزیکی که در دنیای واقعی وجود دارند، همگی غیرخطی هستند؛ یعنی در شکل (۱-۳) پلان G بصورت غیرخطی می‌باشد. در نتیجه بحث کنترل مقاوم غیرخطی مطرح می‌شود. روشهای کنترل غیرخطی مقاوم ثابت کرده اند که در سیستمهای کنترل عملی متفاوتی بسیار مؤثر بوده اند. آنها بهترین کاربرد را در دسته های خاصی از سیستمهای غیرخطی داشته و عموماً به اندازه گیری حالت نیاز دارند. از کنترل کننده های غیرخطی مقاوم، می توان به کنترل مد لغزشی و همچنین کنترل کننده مقاوم به روش پسگام اشاره کرد، که روش پسگام مقاوم، موضوع فصل بعدی می‌باشد.

# فصل IV

طراحی کنترل کننده غیر خطی

به روش پسگام مقاوم

## ۴-۱. مقدمه :

در ارتباط با پایدارسازی مقاوم توسط تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم، دو ایده مطرح می‌شود :

۱. چگونه می‌توان یک rclf را برای سیستم غیرخطی نامعین ایجاد کرد؟ آیا می‌توان این rclf را

بصورت سیستماتیک برای کلاس مهمی از سیستمها بکار برد؟

۲. وقتی توانستیم یک rclf پیدا کنیم، چگونه می‌توان کنترل‌کننده مقاوم ایجاد کرد؟

در این فصل، هدف، پیدا کردن یک تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم (rclf) می‌باشد؛ بطوریکه با انتخاب ورودی کنترلی، مشتق تابع لیاپانوف منفی گردد. متأسفانه، در دنیای واقعیت، توابع لیاپانوف کنترلی مقاوم اکثراً ناشناخته هستند، گرچه نمی‌توان کاملاً به هدف خود رسید؛ زیرا فرآیند مشخصی جهت پیدا کردن rclf برای همه سیستمهای غیرخطی وجود ندارد، لیکن می‌توان برای کلاس خاصی از سیستمها آنرا ایجاد کرد. در این قسمت، روش پسگام مقاوم<sup>۱</sup> را معرفی می‌کنیم که یک فرآیند سیستماتیک می‌باشد که توسط آن می‌توان یک خانواده از rclfها را برای کلاس عمده‌ای از سیستمهای غیرخطی نامعین تحت عنوان فرم فیدبک صریح ایجاد نمود و همچنین کنترل‌کننده مقاوم مربوط به آن را ساخت.

<sup>۱</sup> - Robust Backstepping

## ۴-۲. تاریخچه :

مسأله پایدارسازی مقاوم، هنگامی که سیستم غیرخطی شامل عدم قطعیت‌ها می‌باشد، مطرح می‌شود. در بیشتر از دو دهه گذشته، تکنیک‌های مختلف پایدار سازی مقاوم برای سیستم‌های غیرخطی نامعین گسترش یافته است. روش بازطراحی لیاپانوف<sup>۱</sup> توسط Leitmann (۱۹۷۸)، Corless و Barmish (۱۹۸۱) و همکاران (۱۹۸۳) معرفی شد که در آن تلاش شد که clf برای سیستم نامی به عنوان rclf برای سیستم نامعین در نظر گرفته شود. موفقیت این روش در گروه استفاده از شرط انطباق بود. روش پسگام به عنوان تکنیک پایدار سازی غیرخطی، توسط Tsinias (۱۹۸۹) و Isidori ، Byrnes (۱۹۸۹) معرفی شد و اولین بار برای کنترل تطبیقی<sup>۲</sup> غیرخطی توسط Kanellakopoulos و همکاران (۱۹۹۱) مورد استفاده قرار گرفت. این روش منجر به کشف یک شرط ساختاری به نام فرم فیدبک صریح (که خیلی مناسب‌تر از شرط انطباق است) شد که تحت آن ایجاد سیستماتیک یک rclf برای سیستم نامعین به فرم فیدبک صریح همواره ممکن است .

نتایج حاصل از روش پسگام مقاوم ابتدا توسط Freeman ، Kokotovic (۱۹۹۲) معرفی شد و مستقل از آنها Tomei, Marino (۱۹۹۳) و Qu (۱۹۹۳) و Slotine, Hedrick (۱۹۹۳) روی این روش تحقیق کردند.

<sup>۱</sup> - Redesign Lyapunov

<sup>۲</sup> - Adaptive Control

### ۳-۴ . بازطراحی لیاپانوف:

در این بخش، ابتدا، به بررسی اجمالی روش بازطراحی لیاپانوف کلاسیک می‌پردازیم [۹،۱۰،۱۱،۱۲]، بطوریکه یک  $clf$  شناخته شده برای سیستم نامی (سیستم بدون عدم قطعیتها) به عنوان  $rclf$  برای سیستم نامعین استفاده می‌شود. این طراحی محدود به مواردی می‌شود که در آن عدم قطعیتها از طریق کانالهایی به عنوان متغیرهای کنترلی وارد می‌شوند. این شرط محدودیت تحت عنوان شرط انطباق<sup>۱</sup> نامگذاری می‌شود. تلاشهای زیادی برای کم اثر کردن شرط انطباق انجام گرفته که منجر به موفقیت‌هایی شده است [۱۳،۱۴،۱۵]. نتایج اولیه برای سیستمهای غیرخطی نشان می‌دهد که عدم قطعیتهای نامنطبق<sup>۲</sup> باید به اندازه کافی کوچک باشند. شرایط انطباق تعمیم‌یافته در [۱۵] پیشنهاد شده است و در [۱۶] بسط داده شده است. با وجود این، هیچکدام از این تکنیکها نمی‌توانند ما را به مقصود برسانند. برای مسائل کنترل مقاوم مربوط به سیستمهای غیرخطی، روش پسگام مقاوم منجر به کشف یک ساختار با شرط فیدبک صریح می‌شود که خیلی بهتر از شرط انطباق است و تحت آن ایجاد سیستماتیک یک  $rclf$  همواره ممکن است. این روش ابتدا در [۱۷] عنوان شد.

یک روش استاندارد پیدا کردن  $rclf$  برای سیستمهای نامعین، در [۹،۱۱،۱۲،۱۸،۱۹] بیان شده است و به عنوان بازطراحی لیاپانوف یا طراحی  $min-max$  شناخته شده است و در کتابهای [۲۰] و [۲۱] نیز عنوان شده است.

<sup>۱</sup> - Matching Condition  
<sup>۲</sup> - Unmatched

ایده اصلی این روش، بکاربردن یک clf برای سیستم نامی<sup>۱</sup> به عنوان rclf برای سیستم نامعین (سیستم همراه با اغتشاش) می‌باشد.

#### ۴-۳-۱. عدم قطعیت‌های تطبیق یافته:

برای مشخص کردن بازطراحی لیاپانوف، سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u + H(x)\omega \quad (1-4)$$

که  $F$  و  $G$  و  $H$  توابع پیوسته (و معلوم) هستند.  $u$  ورودی کنترل و  $\omega$  ورودی اغتشاش می‌باشد. فرض می‌کنیم که سیستم نامی  $\dot{x} = F(x) + G(x)u$  پایدارپذیر است و هیچ محدودیتی روی ورودی کنترلی وجود ندارد و اغتشاش در یک گوی  $\omega \in W \equiv B$  قرار دارد. فرض اساسی این است که برای سیستم نامی، clf شناخته شده‌ای وجود دارد؛ یعنی یک تابع مناسب<sup>۲</sup> مثبت معین کلاس  $C^1$  مانند  $V: X \rightarrow \mathbb{R}_+$  وجود دارد بطوریکه:

$$\forall x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \inf_{u \in U} \nabla V(x) \cdot [F(x) + G(x)u] < -\alpha_v(x) \quad (2-4)$$

برای تابع مثبت معین  $\alpha_v(x)$ .

یک روش دیگر نوشتن رابطه فوق به این صورت است که:

$$\forall x \neq 0 \quad ; \quad \nabla V(x) \cdot G(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla V(x) \cdot F(x) < -\alpha_v(x) \quad (3-4)$$

شرط انطباق به این صورت بیان می‌شود که  $H(x)$  باید طوری باشد که به ازاء برخی توابع پیوسته  $E(x)$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$H(x) = G(x) \cdot H(x) \quad (4-4)$$

<sup>۱</sup> منظور از سیستم نامی، سیستم بدون اغتشاش می‌باشد.

<sup>۲</sup> - Proper

با استفاده از این شرط، سیستم (۴-۱) به صورت زیر در می آید :

$$\dot{x} = F(x) + G(x)[u + E(x)\omega] \quad (۴-۵)$$

در اینجا گفته می شود که عدم قطعیت با ورودی کنترلی  $u$  تطبیق داده شده است؛ زیرا عدم قطعیت از طریق همان کانال ورودی به عنوان ورودی کنترلی در نظر گرفته می شود. به عنوان مثال، در دو

سیستم زیر :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \omega \\ \dot{x}_2 &= u + x_1^3 \omega & \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (۴-۶)$$

سیستم سمت چپ دارای شرط انطباق (۴-۴) می باشد در صورتیکه سیستم سمت راست این شرط را دارا نمی باشد. ولی هر دوی این سیستمها دارای یک فرم خاصی هستند که بعنوان فرم فیدبک صریح<sup>۱</sup> شناخته می شود و با استفاده از روش پسگام مقاوم، این فرم از سیستمها را می توان کنترل نمود که موضوع بخش بعدی می باشد.

#### ۴-۴. طراحی به روش پسگام مقاوم

##### ۴-۴-۱. کلاس سیستمها (فرم فیدبک صریح):

بحث را با تعریف کلاس سیستمهای غیرخطی نامعین که در روش پسگام مقاوم کاربرد دارد،

شروع می کنیم. فرض کنید یک سیستم درجه  $n$  بصورت زیر باشد:

$$\dot{x} = F(x, \omega) + G(x, \omega)u \quad (۴-۷)$$

<sup>۱</sup> - Strict Feedback Form

که  $F$  و  $G$  توابع پیوسته‌ای هستند. و  $u \in U(x)$  و  $\omega \in W(x)$  می‌باشد. فرض می‌کنیم که فیدبک حالت  $Y(x) = \{x\}$  و ورودی کنترلی نامحدود یکتا  $U(x) = U = \mathfrak{R}$  و اغتشاش  $W(x)$  مستقل از کنترل  $u$  وجود دارند. اگر اغتشاش ثابت را به فرم  $W(x) \equiv B$  در نظر بگیریم، آنگاه برای سیستم (۷-۴) با فرضیات ساختاری  $F$  و  $G$  به صورت زیر، یک rclf ایجاد خواهیم کرد.

ابتدا فرض می‌کنیم که  $F$  و  $G$  می‌توانند به فرم زیر نوشته شوند:

$$F(x, \omega) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(x, \omega) & \Phi_{12}(x, \omega) & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_{21}(x, \omega) & \Phi_{22}(x, \omega) & \Phi_{23}(x, \omega) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,1}(x, \omega) & \Phi_{n-1,2}(x, \omega) & \Phi_{n-1,3}(x, \omega) & \dots & \Phi_{n-1,n}(x, \omega) \\ \Phi_{n1}(x, \omega) & \Phi_{n2}(x, \omega) & \Phi_{n3}(x, \omega) & \dots & \Phi_{nm}(x, \omega) \end{bmatrix}_{m \times n} x + F(0, \omega) \quad (\lambda-4)$$

$$G(x, \omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Phi_{n,n+1}(x, \omega) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

که در آن توابع اسکالر پیوسته هستند. توجه شود که تجزیه  $F$  در (۸-۴) یکتا نیست. همچنین

هر تابع  $\Phi_{ij}$  فقط به  $\omega$  و متغیرهای حالت  $x_1$  تا  $x_i$  بستگی دارد؛ یعنی:

$$\Phi_{ij}(x, \omega) = \Phi_{ij}(x_1, \dots, x_i, \omega) \quad ; \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i+1 \end{matrix}$$

همچنین فرض می‌کنیم که:

$$\Phi_{i,i+1}(x_1, \dots, x_i, \omega) \neq 0 \quad ; \quad \begin{matrix} x_1, \dots, x_i \in \mathfrak{R} \\ \omega \in B \\ 1 \leq i \leq n \end{matrix} \quad (9-4)$$

این شرط آخر تضمین می‌کند که سیستم (۷-۴) به ازاء هر مقدار ثابت  $\omega \in B$  کنترل‌پذیر است.

سیستمی که شرایط ساختاری (۸-۴) و (۹-۴) را دارا باشد، فرم فیدبک صریح و یا فرم مثلثی با قاعده



پایین<sup>۱</sup> شناخته می‌شود. همچنانکه بعداً خواهیم دید، برای هر سیستمی که بتوان آنرا به فرم فیدبک صریح نوشت، یک rclf وجود خواهد داشت.

معمولاً، سیستمهای به فرم فیدبک صریح، شرط انطباق در روش بازطراحی لیاپانوف را برقرار نمی‌کنند. در واقع، شرط انطباق، نیازمند آنست که توابع  $\Phi_{ij}$  باید مستقل از  $\omega$  به ازاء  $1 \leq i \leq n-1$  باشند، که شرط محدود کننده بزرگی است. همچنین، محدودیت کراندار بودن غیرخطیها در فرم فیدبک صریح وجود ندارد. سرانجام، اگر توابع  $\Phi_{ij}$  مستقل از متغیرهای حالت  $x$  باشند، در این صورت، فرم فیدبک صریح به یکی از فرمهای استاندارد در تئوری خطی تبدیل خواهد شد.

بعنوان مثال، سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{u|x_1|^3}{1+u^2} \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \quad (10-4)$$

این سیستم، به خاطر وجود  $u$  در معادله اولی، به فرم فیدبک صریح نمی‌باشد. با این حال، این

سیستم یکی از سیستمهایی به فرم سیستم زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \omega \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \quad (11-4)$$

که در آن  $\omega$  ورودی اغتشاش با محدودیت  $\omega \in [-1, 1]$  می‌باشد. در واقع،  $\omega = \frac{u|u|}{1+u^2}$  یک اغتشاش

قابل قبول می‌باشد، بدین معنی که قانون کنترل پایدارساز مجانبی مقاوم برای سیستم نامعین (۱۱-۴)

یک قانون کنترل پایدارساز مجانبی مقاوم برای سیستم (۱۰-۴) خواهد بود. حال که سیستم جدید به

فرم فیدبک صریح درآمده است، می‌توان یک قانون کنترل با استفاده از روش پسگام مقاوم که توضیح

<sup>۱</sup> - Lower Triangular Form

داده خواهد شد، ایجاد کرد. البته این قانون کنترل ممکن است که همه سیستمهایی را که به فرم (۱۱-۴) هستند، پایدار کند.

#### ۴-۴-۲. ایجاد یک rclf [۷]

در این بخش، نحوه ایجاد یک rclf برای یک سیستم به فرم فیدبک صریح بیان می‌کنیم. ابتدا، یک ساختار برای فضای حالت  $X$  با استفاده از توابع اسکالر هموار<sup>۱</sup>  $s_1(x_1), s_2(x_1, x_2), \dots, s_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$  که در فرآیند بازگشتی تعیین می‌شوند، ایجاد می‌کنیم. هر تابع  $s_i$  فقط به متغیرهای حالت  $x_1$  تا  $x_i$  بستگی دارد. وقتی که این توابع انتخاب شدند، بردار حالت تبدیل یافته  $z$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - z_1 s_1(x_1) \\ z_3 &= x_3 - z_2 s_2(x_1, x_2) \\ &\vdots \\ z_n &= x_n - z_{n-1} s_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (12-4)$$

فرم ماتریسی تجزیه فوق و معکوس ماتریس به صورت زیر می‌باشد:

$$z = S(x)x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 s_2 & -s_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -s_1 s_2 s_3 & -s_2 s_3 & -s_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \pm s_1 \dots s_{n-1} & \mp s_2 \dots s_{n-1} & \pm s_3 \dots s_{n-1} & \dots & -s_{n-1} & 1 \end{bmatrix} x \quad (13-4)$$

$$x = S^{-1}(x)z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 1 \end{bmatrix} z \quad (14-4)$$

<sup>۱</sup> - Smooth Scalar Functions

که علامت سطر آخر در (۴-۱۳) به زوج یا فرد بودن بُعد  $n$  بستگی دارد.

در اثبات قضیه زیر، چگونگی ایجاد توابع  $s_i$  نشان داده خواهد شد و در نتیجه  $V(x) = z^T z$  یک rclf برای سیستم (۴-۷) خواهد شد. همچنین یک قانون کنترل فیدبک حالت پایدارساز مقاوم ایجاد خواهد شد.

#### قضیه ۴-۱:

اگر سیستم (۴-۷) به فرم فیدبک صریح باشد، آنگاه توابع مناسب  $s_i$  وجود خواهند داشت بطوریکه  $V(x) = z^T z$  یک rclf برای سیستم شود.

در واقع اثبات قضیه فوق، روند طراحی را نشان می‌دهد.

#### اثبات [۷]:

ابتدا  $\dot{z}$  را از رابطه (۴-۷) و (۴-۱۳) بدست می‌آوریم. با مشتق گرفتن از  $z = S(x)$  در رابطه (۴-۱۳) داریم:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_1} x & \frac{\partial S}{\partial x_2} x & \cdots & \frac{\partial S}{\partial x_n} x \end{bmatrix} \dot{x} + S(x)\dot{x} = T(x)\dot{x} \quad (۴-۱۵)$$

که  $T(x)$  بسادگی از (۴-۱۳) بدست می‌آید. اگر  $\otimes_i$  بصورت تابعی از متغیرهای حالت  $x_1$  تا  $x_i$  و توابع

$s_i$  تا  $s_1$  و مشتقات جزئی آن در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\dot{z} = T(x)\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \otimes_1 & 1 & & & \cdots & 0 \\ \otimes_2 & \otimes_2 & 1 & & \cdots & 0 \\ \otimes_3 & \otimes_3 & \otimes_3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \otimes_{n-1} & \otimes_{n-1} & \otimes_{n-1} & \cdots & \otimes_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \dot{x} \quad (۴-۱۶)$$

قانون کنترلی فیدبک حالت پایدارساز مقاوم به فرم  $u(x) = z_n s_n(x)$  خواهد بود بطوریکه  $s_n(x)$  تابع هموار دیگری است که هنوز تعیین نشده است. با انتخاب این  $u$  و استفاده از (۴-۱۴)، می توان معادله

(۴-۱۷) را دوباره به صورت زیر نوشت :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n-1,1} & \phi_{n-1,2} & \phi_{n-1,3} & \cdots & \phi_{n-1} & 0 \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{n3} & \cdots & \phi_{nn} & \phi_{n,n+1} \end{bmatrix} z + F(0, \omega) \quad (۴-۱۷)$$

با جایگذاری (۴-۱۷) برای  $\dot{x}$  در (۴-۱۶) می توان بدست آورد:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \phi_{11} + \phi_{12}s_1 & \phi_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ *_{11} & *_{12} + \phi_{23}s_2 & \phi_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ *_{n-2} & *_{n-2} & \cdots & \ddots & \phi_{11} \\ *_{n-1} & *_{n-1} & *_{n-1} & \cdots & *_{n-1} + \phi_{n,n+1}s_n \end{bmatrix} z + T(x)F(0, \omega)$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ *_{11} & *_{11} & \phi_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ *_{21} & *_{21} & *_{21} & \phi_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ *_{n-2} & *_{n-2} & *_{n-2} & \cdots & *_{n-2} & \phi_{n-1,n} \\ *_{n-1} & *_{n-1} & *_{n-1} & *_{n-1} & \cdots & *_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \phi_{12}s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_{23}s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{34}s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_{n,n+1}s_n \end{bmatrix} z + T(x)F(0, \omega) \quad (۴-۱۸)$$

$*_i$  تابعی است که فقط به اغتشاش  $\omega$  و متغیرهای حالت  $x_1$  تا  $x_{i+1}$  و توابع  $s_1$  تا  $s_i$  و مشتقات جزئی آن بستگی دارد. توجه شود که تابع نوع  $\otimes_i$  از نوع تابع  $*_i$  است. البته عکس آن درست نمی باشد، زیرا تابع  $*_i$  مجاز است که به  $\omega$  و  $x_{i+1}$  بستگی داشته باشد.

اگر  $A(x, \omega)$  و  $D(x, \omega)$  بترتیب ماتریسهای اول و دوم معادله (۴-۱۸) باشند، آنگاه این معادله به صورت زیر درمی آید:

$$\dot{z} = [A(x, \omega) + D(x, \omega)]z + T(x)F(0, \omega) \quad (19-4)$$

حال مشتق  $V(x) = z^T z$  را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\dot{V} = z^T [A(x, \omega) + A^T(x, \omega) + 2D(x, \omega)]z + 2F^T(0, \omega)T^T(x)z \quad (20-4)$$

از نامساوی یانگ<sup>۱</sup> ( $2ab \leq a^2 + b^2$ ) در جمله آخر معادله (۲۰-۴) استفاده کرده و داریم:

$$\dot{V} \leq z^T [A(x, \omega) + A^T(x, \omega) + 2D(x, \omega) + T(x)T^T(x)]z + \|F(0, \omega)\|^2 \quad (21-4)$$

و از معادله (۱۶-۴) داریم:

$$T(x)T^T(x) = I_{n \times n} + \begin{bmatrix} 0 & \otimes_1 & \otimes_2 & \cdots & \otimes_{n-1} \\ \otimes_1 & \otimes_1 & \otimes_2 & \cdots & \otimes_{n-1} \\ \otimes_2 & \otimes_2 & \otimes_2 & \cdots & \otimes_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \otimes_{n-1} & \otimes_{n-1} & \otimes_{n-1} & \cdots & \otimes_{n-1} \end{bmatrix} = I_{n \times n} + T_1(x) \quad (22-4)$$

با ترکیب (۲۱-۴) و (۲۲-۴) و استفاده از تعریف  $A(x, \omega)$  از (۱۸-۴) و (۱۹-۴) خواهیم داشت:

$$\dot{V} \leq z^T z + \|F(0, \omega)\|^2 + 2z^T D(x, \omega)z + z^T \begin{bmatrix} 2\phi_{11} & * & * & \cdots & *_{n-1} \\ * & * & * & \cdots & *_{n-1} \\ * & * & * & \cdots & *_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ *_{n-1} & *_{n-1} & *_{n-1} & \cdots & *_{n-1} \end{bmatrix} z \quad (23-4)$$

حال نشان می‌دهیم که به ازاء هر مقدار  $c > 1$  انتخابی برای  $s_i$  وجود دارد، بطوریکه:

$$\max_{\omega \in B} \dot{V} \leq -(c-1)z^T z + \max_{\omega \in B} \|F(0, \omega)\|^2 \quad (24-4)$$

با استفاده از تعریف  $D(x, \omega)$  در معادله (۱۸-۴) و اضافه و کم کردن  $c z^T z$ ، از معادله (۲۳-۴) داریم:

$$\dot{V} \leq -(c-1)z^T z - z^T M(x, \omega)z + \|F(0, \omega)\|^2 \quad (25-4)$$

که ماتریس متقارن  $M(x, \omega)$  به صورت زیر می‌باشد:

$$M = -cI_{n \times n} - A - A^T - 2D - T_1$$

<sup>۱</sup> - Young's inequality

$$M = \begin{bmatrix} -c - 2\phi_{11} - 2\phi_{12}s_1 & *_{1} & *_{2} & \dots & *_{n-1} \\ *_{1} & *_{1} - 2\phi_{23}s_2 & *_{2} & \dots & *_{n-1} \\ *_{2} & *_{2} & *_{2} - 2\phi_{34}s_3 & \dots & *_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ *_{n-1} & *_{n-1} & *_{n-1} & \dots & *_{n-1} - 2\phi_{n,n+1}s_n \end{bmatrix} \quad (۲۶-۴)$$

اگر بتوان توابع  $s_i$  را طوری پیدا کرد که این ماتریس  $M(x, \omega)$  برای تمام  $x \in X$  و  $\omega \in B$

مثبت معین باشد، آنگاه (۲۴-۴) از (۲۵-۴) نتیجه می‌شود. بدین منظور، کفایت نشان دهیم که

کهادهای<sup>۱</sup> پیشرو اصلی  $M(x, \omega)$  به ازاء تمام  $x \in X$  و  $\omega \in B$  مثبت می‌باشد و این منجر به ایجاد توابع  $s_i$  به صورت زیر می‌شود.

در ابتدا، اولین کهاد پیشرو اصلی<sup>۲</sup>  $M(x, \omega)$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$M_1(x_1, \omega) = -c - 2\phi_{11}(x_1, \omega) - 2\phi_{12}(x_1, \omega)s_1(x_1) \quad (۲۷-۴)$$

چون تابع  $\phi_{12}$  با توجه به فرض (۹-۴) هرگز صفر نمی‌باشد، بنابراین می‌توان تابع هموار  $s_1$  را

طوری پیدا کرد که  $M_1(x_1, \omega)$  به ازاء تمام  $x_1 \in \mathcal{R}$  و  $\omega \in B$  اکیداً مثبت باشد. بعد از اینکه  $s_1$  تعیین

شد، می‌توان بصورت صریح تابع  $*_{1}$  در معادله (۲۶-۴) را محاسبه کرد. کهاد پیشرو اصلی دوم

$M(x, \omega)$  توسط دترمینان ماتریس زیر حساب می‌شود:

$$M_2(x_1, x_2, \omega) = \begin{bmatrix} M_1(x_1, \omega) & *_{1} \\ *_{1} & *_{1} - 2\phi_{23}(x_1, x_2, \omega) s_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (۲۸-۴)$$

چون هم تابع  $M_1(x, \omega)$  و هم  $\phi_{23}$  غیرصفر هستند، در نتیجه تابع هموار  $s_2$  وجود دارد بطوریکه

دترمینان  $M_2$  به ازاء همه  $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$  و  $\omega \in B$  اکیداً مثبت باشد. به همین ترتیب، ساختن هر تابع  $s_i$

را با توجه به اینکه کهادهای  $M_i$  باید اکیداً مثبت باشند، ادامه می‌دهیم. وقتی که همه توابع  $s_i$

<sup>۱</sup> - Minor

<sup>۲</sup> - Leading Minor

انتخاب شدند، قانون کنترلی فیدبک حالت پایدارساز مقاوم  $u(x) = z_n(x)s_n(x)$  صریحاً شناسایی می‌شود و  $V$  یک rclf برای سیستم (۷-۴) خواهد شد.

#### ۳-۴-۴. فرآیند طراحی پسگام :

کلیات فرآیند طراحی در اثبات قضیه (۱-۴) می‌تواند به صورت زیر خلاصه شود.

ابتدا پارامتر طراحی  $c > 1$  و یک تابع هموار  $s_1(x_1)$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $M_1(x, \omega)$  تعریف شده در رابطه (۲۷-۴) همیشه مثبت باشد. مسأله‌ای که در این قسمت می‌توان به آن توجه کرد، ایجاد یک قانون کنترلی مجازی<sup>۱</sup>  $x_2 = x_1 s_1(x_1)$  برای معادله اولی (۷-۴) می‌باشد، بویژه :

$$\dot{x}_1 = \phi_{11}(x_1, \omega)x_1 + \phi_{12}(x_1, \omega)x_2 + F_1(0, \omega) \quad (۲۹-۴)$$

با این ادعا که  $x_2$  متغیر کنترلی است. سپس از (۱۳-۴) و (۱۵-۴) جهت محاسبه  $\otimes_1$  موجود در (۱۶-۴) استفاده می‌کنیم. (این همراه با محاسبه مشتق  $s_1$  نسبت به  $x_1$  می‌باشد.) محاسبات جبری، منجر به ایجاد صریح  $*_1$  موجود در (۲۶-۴) می‌شود. سپس تابع  $s_2$  را طوری انتخاب می‌کنیم که دترمینان  $M_2(x, \omega)$  همیشه مثبت باشد. در این گام نیز، مسأله‌ای که می‌توان به آن توجه کرد ایجاد یک قانون کنترلی مجازی  $x_3 = z_2 s_2(x_1, x_2)$  برای دو معادله اول (۷-۴) می‌باشد :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \phi_{11}(x_1, \omega)x_1 + \phi_{12}(x_1, \omega)x_2 + F_1(0, \omega) \\ \dot{x}_2 &= \phi_{21}(x_1, x_2, \omega)x_1 + \phi_{22}(x_1, x_2, \omega)x_2 + \phi_{23}(x_1, x_2, \omega)x_3 + F_2(0, \omega) \end{aligned} \quad (۳۰-۴)$$

با این ادعا که  $x_3$  متغیر کنترلی است. وقتی  $s_2$  تعیین شد، به معادله (۱۳-۴) و (۱۵-۴) برمی‌گردیم که  $\otimes_2$  را حساب کنیم. (این با محاسبه مشتقات جزئی  $s_2$  همراه می‌باشد.) محاسبات جبری، منجر به ایجاد صریح  $*_2$  موجود در (۲۶-۴) می‌شود و ایجاد تابع  $s_3$  را به همراه دارد. بنابراین فرآیند تا

<sup>۱</sup> - Virtual Control Law

محاسبه  $s_n$  ادامه می‌یابد. در این لحظه، بردار حالت جدید  $z$ ، تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم  $V(x) = z^T z$  و قانون کنترلی  $u(x) = z_n s_n(x)$  همگی بصورت واضح شناسایی می‌شوند.

بطور خلاصه، وقتی تابع  $s_1$  انتخاب شد، فرآیند ایجاد توابع  $s_i$  به ازاء  $i \in \{2, \dots, n\}$  می‌تواند توسط فرم بازگشتی زیر بیان شوند:

❖ گام i: برای محاسبه  $\otimes_{i-1}$  موجود در (۴-۱۶)، از معادلات (۴-۱۳) و (۴-۱۵) استفاده شود.

(این حالت، همراه با محاسبه کردن مشتقات جزئی  $s_{i-1}$  می‌باشد).

❖ گام ii: برای محاسبه کردن  $*_{i-1}$  واقع در (۴-۲۶) از معادلات (۴-۱۷) و (۴-۱۸) و (۴-۲۱) استفاده شود.

❖ گام iii: یک تابع هموار  $s_i(x_1, \dots, x_i)$  را طوری باید انتخاب کرد که در آن دترمینان ماتریس

$M_i(x_1, \dots, x_i, \omega)$  داده شده بصورت زیر، به ازاء همه  $x_1, \dots, x_i \in \mathbb{R}$  و  $\omega \in B$  اکیداً مثبت باشد.

$$M_i = \begin{bmatrix} & & *_{i-1} & \\ & M_{i-1} & \vdots & \\ & & *_{i-1} & \\ *_{i-1} & \cdots & *_{i-1} & *_{i-1} - 2\phi_{i,i+1} s_i \end{bmatrix}$$

بنابراین ایجاد هر تابع  $s_i$  همراه با محاسبه کردن مشتقات جزئی  $s_{i-1}$  (گام i) و انجام عملیات

جبری (گامهای i تا iii) می‌باشد.

برای حالت خاص  $F(0, \omega) = 0$ ، می‌توان جمله  $z^T T(x) T^T(x) z$  را از نامعادله (۴-۲۱) حذف کرد. در این

حالت نامعادله (۴-۲۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{V} \leq -c z^T z = -z^T M(x, \omega) z \quad (۴-۳۱)$$



که در آن  $M(x, \omega)$  به شکل ساده شده زیر در می آید :

$$M(x, \omega) = -cI_{n \times n} - A(x, \omega) - A^T(x, \omega) - 2D(x, \omega) \quad (۳۲-۴)$$

حال می خواهیم فرآیند پسگام مقاوم را برای یک سیستم مرتبه II<sup>۱</sup> بکار ببریم.

مثال ۴-۱ :

سیستم درجه II زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \omega \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (۳۳-۴)$$

که در آن  $\omega$  ورودی اغتشاش است و مقادیری در بازه  $[-1, 1]$  را در برمی گیرد. حال، می خواهیم روش

پسگام مقاوم را روی این سیستم اعمال کنیم. با مقایسه سیستم (۳۳-۴) با (۴-۸)، توابع F و G به

صورت زیر تعریف می شوند:

$$F(x, \omega) = \begin{bmatrix} x_1^2 \omega & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad G(x, \omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که در آن :

$$\phi_{11} = x_1^2 \omega \quad , \quad \phi_{12} = \phi_{23} = 1 \quad , \quad \phi_{21} = \phi_{22} = 0 \quad (۳۴-۴)$$

ابتدا با در نظر گرفتن پارامتر طراحی  $c = 2 > 1$ ، باید  $s_1$  را طوری انتخاب کنیم که

$$M_1(x_1, \omega) = -c - 2\phi_{11}(x_1, \omega) - 2\phi_{12}(x_1, \omega)s_1(x_1)$$

یعنی :

$$M_1(x_1, \omega) = -2 - 2x_1^2 \omega - s_1(x_1) \quad (۳۵-۴)$$

اگر  $s_1(x_1) = -2 - x_1^2$  را انتخاب کنیم آنگاه به ازاء همه  $x_1 \in \mathbb{R}$ ،  $\omega \in [-1, 1]$  این امر محقق می گردد.

در نتیجه :

$$M_1(x_1, \omega) = 2 + 2x_1^2(1 - \omega) \geq 2 \quad (۳۶-۴)$$

با استفاده از (۱۳-۴) و (۱۵-۴)،  $\otimes_1$  موجود در (۱۶-۴) را حساب می‌کنیم:

$$z = S(x)x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2+x_1^2 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{z} = \left[ \frac{\partial S}{\partial x_1} x \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} x \right] \dot{x} + S(x)\dot{x} = T(x)\dot{x} \quad (۳۷-۴)$$

با محاسبه رابطه (۳۷-۴)، خواهیم داشت:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2+3x_1^2 & 1 \end{bmatrix} x$$

می‌بینیم که  $\otimes_1$  فقط تابعی از  $x_1$  و  $s_1$  می‌باشد. با استفاده از رابطه (۱۷-۴)،  $s_2$  وارد معادلات شده و

داریم:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} z$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1^2 \omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} x_1^2 \omega + s_1 & 1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} z \quad (۳۸-۴)$$

$\dot{z}$  از رابطه (۱۸-۴) بدست می‌آید:

$$\dot{z} = T(x)\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1^2 \omega + s_1 & 1 \\ (2+3x_1^2)(x_1^2 \omega + s_1) & 2+3x_1^2 + s_2 \end{bmatrix} z$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^2 \omega & 1 \\ (2+3x_1^2)(x_1^2 \omega + s_1) & 2+3x_1^2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} z \quad (۳۹-۴)$$

در این حالت ماتریسهای  $A(x, \omega)$  و  $D(x, \omega)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A(x, \omega) = \begin{bmatrix} x_1^2 \omega & 1 \\ (2+3x_1^2)(x_1^2 \omega + s_1) & 2+3x_1^2 \end{bmatrix} z$$

$$D(x, \omega) = \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} z \quad (۴۰-۴)$$

چون  $F(0, \omega) = 0$  می‌باشد، در نتیجه از رابطه (۴-۳۲)،  $M(x, \omega)$  را حساب می‌کنیم:

$$M(x, \omega) = -cI_{2 \times 2} - A(x, \omega) - A^T(x, \omega) - 2D(x, \omega) \quad (۴۱-۴)$$

با جایگذاری ماتریسها در معادله فوق، ماتریس  $M(x, \omega)$  به صورت زیر در می‌آید:

$$M(x, \omega) = \begin{bmatrix} M_1(x, \omega) & -1 - (2 + 3x_1^2)(x_1^2 \omega + s_1) \\ -1 - (2 + 3x_1^2)(x_1^2 \omega + s_1) & -6 - 6x_1^2 - 2s_2 \end{bmatrix} \quad (۴۲-۴)$$

حال لازم است که  $s_2$  را طوری انتخاب کنیم که دترمینان فوق، اکیداً مثبت گردد. اگر  $s_2$  را بصورت

زیر در نظر بگیریم، این امر محقق می‌گردد:

$$s_2(x_1) \leq -3 - 3x_1^2 - \max_{\omega \in [-1, 1]} \frac{1 + [1 + (2 + 3x_1^2)(x_1^2 \omega + s_1)]^2}{4 + 4x_1^2(1 - \omega)} \quad (۴۳-۴)$$

این انتخاب منجر به  $|M(x, \omega)| \geq 1$  خواهد شد. در این حالت خاص، تابع  $s_2$  فقط وابسته به  $x_1$

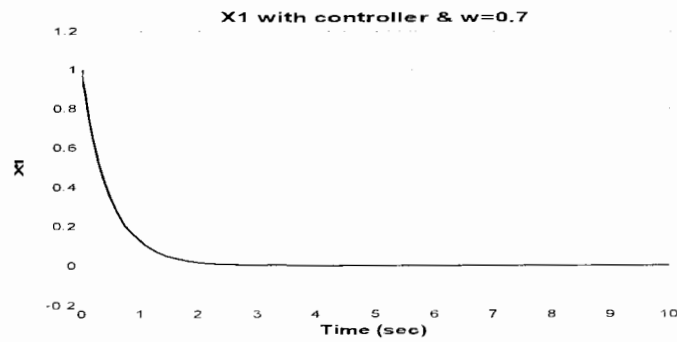
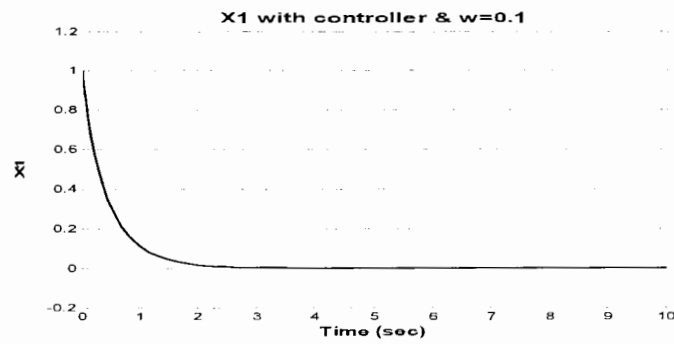
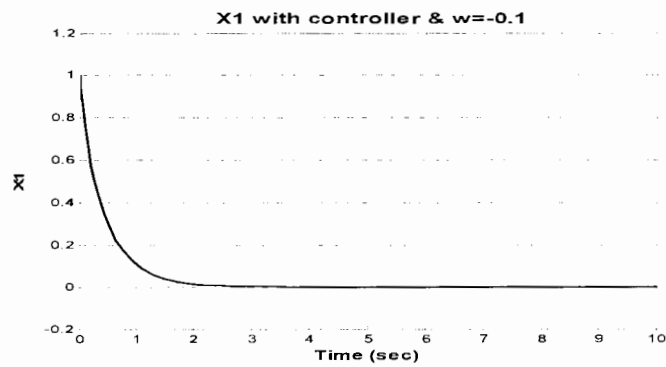
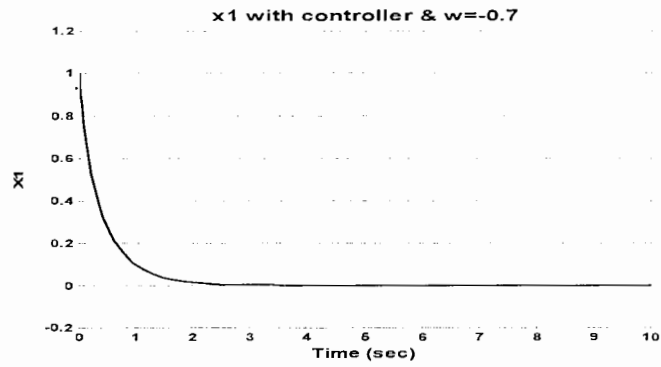
می‌باشد؛ علت این است که سیستم (۴-۳۳) نسبت به متغیر  $x_2$  خطی می‌باشد.

بعد از اینکه  $s_2$  تعیین شد، قانون کنترلی پایدارساز مقاوم به شکل  $u(x) = s_2 s_2(x_1)$  درخواهد

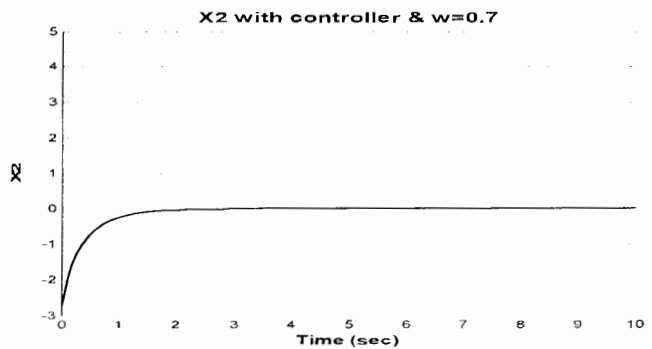
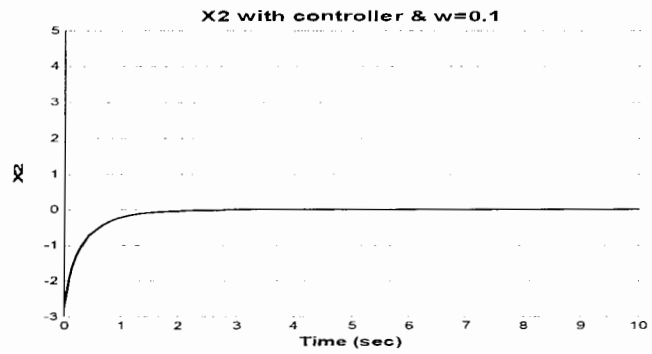
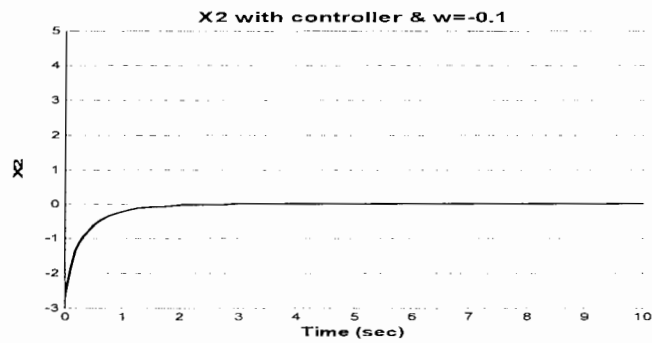
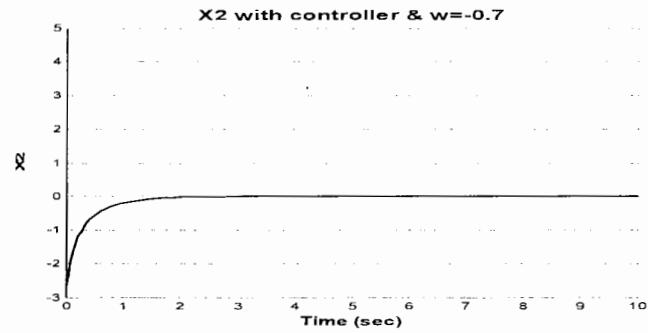
آمد. نتایج شبیه‌سازیها را با استفاده از کنترل کننده طراحی شده به روش پسگام مقاوم ارائه می‌کنیم.

سیستم را به ازاء شرایط اولیه  $\begin{cases} x_1(0) = 5 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$  و چهار مقدار از عدم قطعیت  $\omega = -0.7, -0.1, 0.1, 0.7$

شبیه‌سازی می‌کنیم. شکل (۴-۱) متغیرهای حالت را به ازاء چهار مقدار از عدم قطعیت نشان می‌دهد.

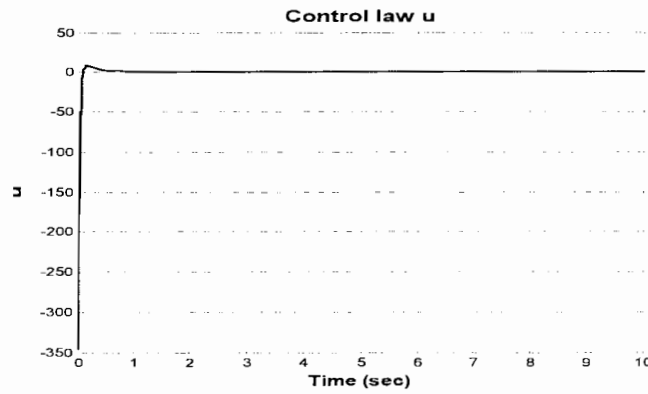


(۴-۱-۱): متغیر حالت  $x_1$

شکل (۴-۱): متغیر حالت  $x_2$ :

شکل (۴-۱): تغییرات زمانی متغیرهای حالت

همچنانکه دیده می‌شود تغییر اغتشاش، هیچگونه تأثیری روی متغیرهای حالت ندارد. در این سیستم قانون کنترل فیدبک حالت پایدارساز مقاوم  $u$  برای سیستم (۳-۴) به روش پسگام مقاوم به صورت شکل (۳-۴) درخواهد آمد.



شکل (۳-۴): قانون کنترلی به روش پسگام مقاوم

در سیستم فوق، اگر درجه سیستم بالاتر باشد، باید مراحل طراحی را طبق سه گام ارائه شده در بخش قبلی، تکرار کنیم. هرچه درجه سیستم بالاتر باشد، انجام عملیات جبری پیچیده‌تر و طولانی‌تر خواهد شد.

# فصل V

کنترل فشار خون بیمار تحت

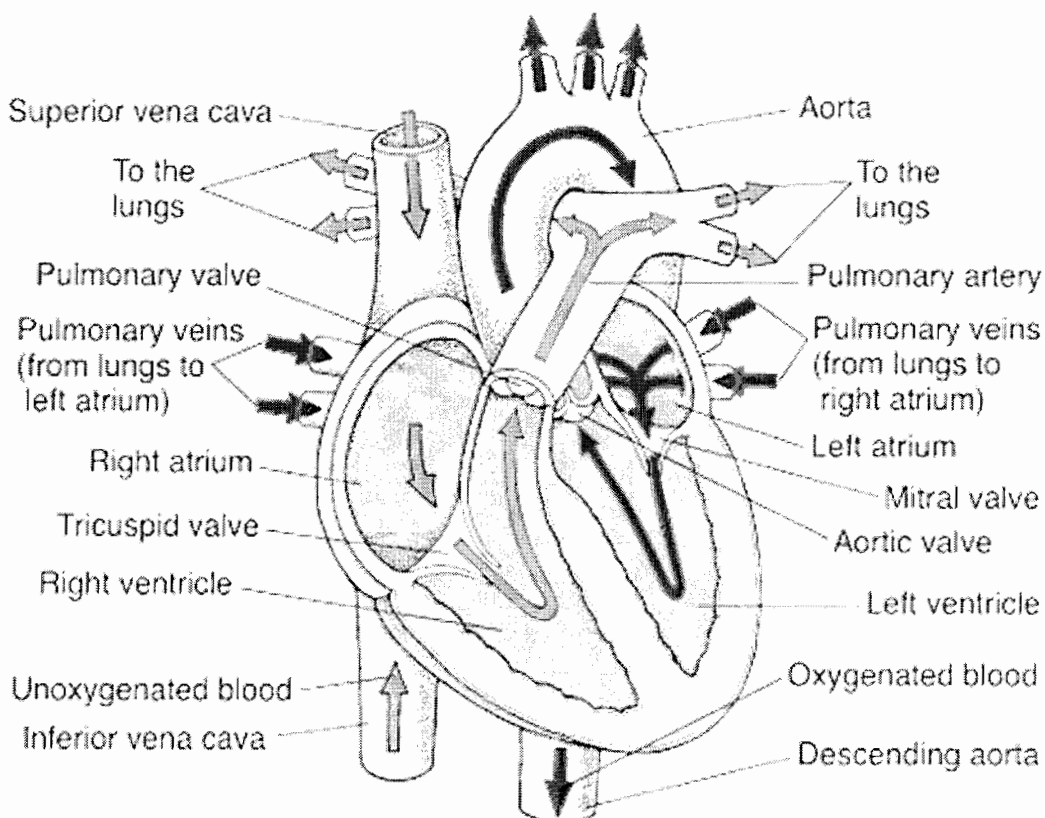
عمل جراحی

## ۵-۱. مقدمه :

قلب شامل چهار حفره می‌باشد؛ دو دهلیز<sup>۱</sup> و دو بطن<sup>۲</sup>. دهلیزها خون را داخل خود انبار کرده و به داخل بطنها می‌فرستند. بطن راست و چپ بصورت پمپ عمل می‌کنند خون بدون اکسیژن بدن از طریق سیاهرگهای تحتانی و فوقانی به قلب برمی‌گردد و به داخل دهلیز راست تخلیه می‌شود و خون از طریق دریچه<sup>۳</sup> تریکوسپید<sup>۳</sup> به داخل بطن راست سرازیر می‌گردد. خون بطن راست توسط دریچه<sup>۴</sup> ریوی به داخل ریه‌ها پمپ می‌شود. خون تصفیه شده از ریه‌ها به داخل دهلیز چپ برگشته و هنگامیکه فشار در دهلیز چپ به یک نقطه بحرانی رسید، دریچه<sup>۴</sup> میترال<sup>۴</sup> باز شده و خون وارد بطن چپ می‌شود. بطن چپ منقبض شده و خون را از طریق دریچه<sup>۵</sup> آئورت<sup>۵</sup> وارد آئورت و سپس سراسر بدن می‌کند. شکل (۵-۱)

<sup>۱</sup> - Atrium  
<sup>۲</sup> - Ventricle  
<sup>۳</sup> - Tricuspid valve  
<sup>۴</sup> - Mitral valve  
<sup>۵</sup> - Aortic valve





شکل (۵-۱): شماتیک قلب

فشار خون با دو عدد اعلام می‌شود: عدد اول فشار خون سیستولیک<sup>۱</sup> یا ماکزیمم و عدد دوم فشار خون دیاستولیک<sup>۲</sup> یا مینیمم را نشان می‌دهد. در فاز دیاستول بطنها استراحت کرده و دهلیزها منقبض می‌شوند. دریچه‌های تریکوسپید و میترال باز می‌شوند. در این حالت دریچه‌های آئورت و ریوی بسته هستند. در فاز سیستول، دهلیزها به استراحت می‌پردازند و از خون پر می‌شوند. دریچه تریکوسپید و میترال در این زمان بسته هستند. فشار بطنها افزایش یافته بطوریکه نیرویی جهت باز

<sup>۱</sup> - Systolic Pressure  
<sup>۲</sup> - Diastolic Pressure

کردن دریچهٔ آئورتی و ریوی مهیا می‌گردد. سپس بطنها منقبض می‌شوند و خون وارد سیستم گردش می‌شود.

هنگامی که قلب منقبض می‌شود و خون را وارد دستگاه گردش خون می‌کند، فشاری ایجاد می‌شود. این فشار، که ناشی از انقباض عضلهٔ قلب است، فشار خون سیستولیک نامیده می‌شود. در فاز دیاستول چرخهٔ ضربان قلب، عضلهٔ آن شل می‌شود و خون وریدی به داخل قلب برمی‌گردد، دریچهٔ آئورت بسته می‌شود و دیگر خونی به سیستم شریانی بدن وارد نمی‌شود. در این مرحله، فشار خون نسبت به مرحلهٔ سیستول پایین می‌آید. این فشار خون فشار خون دیاستولیک نام دارد. سیستول و دیاستول همان ماکزیمم و مینیمم است که برای بیشتر افراد آشناست.

میزان طبیعی فشار خون در کتب مختلف، متفاوت در نظر گرفته شده است. میزانی که بیشتر مورد قبول است حداکثر ۱۴۰ میلی‌متر جیوه برای فشار سیستول یا ماکزیمم و ۹۰ میلی‌متر جیوه برای فشار دیاستول یا مینیمم است. در مقالات تحقیقی اخیر آمده است که فشار سیستولیک نباید بالاتر از ۱۲۰ میلی‌متر جیوه و فشار دیاستولیک هم نباید بیشتر از ۷۰ میلی‌متر جیوه باشد. هر عاملی که باعث شود فشار سیستولیک از این میزان بالاتر رود، باعث پرفشاری خون سیستولیک خواهد شد. اضطراب، تصلب شرایین و چاقی از جمله علل پرفشاری خون سیستولیک هستند.

فشار خون بالا عبارت است از افزایش فشار وارده از جریان خون به دیواره رگ‌های خونی. فشار خون بالا گاهی کشندهٔ بی‌سر و صدا نامیده می‌شود زیرا تا مراحل انتهایی اکثراً هیچ علامتی ندارد. در حقیقت بیش از ۳۰ درصد افراد با فشار خون بالا از بیماری خود آگاه نیستند و دلیل اصلی این مطلب

هم، طبیعت بدون نشانه این بیماری برای ۱۵ تا ۲۵ سال اول است، حتی اگر به سیستم قلبی و عروقی آسیب زیادی برساند. توجه داشته باشید که فشار خون به‌طور طبیعی در اثر فشار عصبی و فعالیت در زمان ابتلا به این بیماری بدنی بالا می‌رود، اما فردی که دچار بیماری فشار خون بالا است، به هنگام استراحت نیز فشار خونسش بالاتر از حد طبیعی قرار دارد. تخمین زده می‌شود که فشار خون دیاستولی که به صورت مزمن ۵ mmHg بالا باشد، حداقل ۳۴ درصد خطر سکته و حداقل ۲۰ درصد احتمال بیماریهای قلبی-کرونی<sup>۱</sup> را افزایش می‌دهد. [۲۳]

با افزایش سن، خاصیت کشسانی یا نرمی دیواره عروق شریانی از بین می‌رود. هرچه میزان غیرطبیعی شدن دیواره شریان‌ها بیشتر باشد، نوسان و تغییرات فشار خون بیشتر خواهد بود. روند تصلب شریانی یعنی سخت شدن دیواره شریان‌ها از اواسط عمر شروع می‌شود و با افزایش سن شدت می‌یابد. به‌طور کلی، هر عاملی که باعث کاهش خاصیت کشسانی عروق شریانی یا نرمی آنها شود، پرفشاری خون ایجاد می‌کند. افزایش سن، وزن و چربی خون، همچنین استرس‌های محیطی از جمله عوامل دخیل در پرفشاری خون شناخته شده‌اند.

معمولاً فشار خون دیاستولیک نصف به علاوه یک فشار خون سیستولیک است. مثلاً اگر فشار خون سیستولیک ۱۲۰ میلی‌متر جیوه باشد، فشار خون دیاستولیک ۷۰ خواهد بود. در اغلب موارد، با افزایش فشار خون سیستولیک، فشار خون دیاستولیک هم افزایش می‌یابد؛ اما آنچه باعث تخریب دیواره عروق می‌شود فشار خون دیاستولیک است. یعنی اگر فشار خون دیاستولیک به‌طور مداوم در

<sup>۱</sup> - Coronary

حدود ۱۱۰ میلی‌متر جیوه باشد، این وضعیت در مقایسه با افزایش گاه‌گاه فشار خون سیستولیک تا اندازه ۱۷۰ یا ۱۸۰ میلی‌متر جیوه مشکلات جانبی بیشتری ایجاد می‌کند. در بیماران مبتلا به پرفشاری خون مزمن، این ارتباط به هم می‌خورد و فشار خون سیستولیک آنها در حدود ۱۴۰ تا ۱۶۰ و فشار خون دیاستولیک در حدود ۱۰۰ تا ۱۱۰ میلی‌متر جیوه خواهد بود. این بیماران نیاز به درمان دارند.

### ۵-۲. هدف کنترل فشار خون :

با توجه به اینکه سیستم فشار خون بیمار در هنگام عمل جراحی برای پرسنل پزشکی دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشد، در نتیجه کنترل آن می‌تواند بیمار را از خطرات زیادی در امان نگه دارد. از مزایای نگه‌داشتن فشار خون بیمار در یک سطح معین به هنگام عمل جراحی، می‌توان به طور خلاصه به موارد زیر اشاره کرد :

۱- کاهش خونریزی داخلی.

۲- آشکار سازی جزئیات ساختارهای آناتومی بدن، که ممکن است توسط خونریزی محو شده باشد.

۳- تسریع و تسهیل در انجام عمل جراحی.

عمل کنترل فشار خون یک بیمار با استفاده از تزریق داروی هایپوتنسیو<sup>۱</sup> صورت می‌گیرد. این

دارو به عنوان کاهنده فشار خون عمل می‌کند. یک نمونه از این دارو، تریمتافان کامسیلات<sup>۲</sup>

است که به بدن بیمار تزریق می‌شود و از طریق کنترل نرخ تزریق این دارو، می‌توان فشار خون بیمار

<sup>۱</sup> - Hypotensive

<sup>۲</sup> - Trimethaphan Camsilate

را در یک سطح معین نگه داشت. فشار خون ، همان فشار سرخرگی میانگین MAP<sup>۱</sup> را در نظر می‌گیرند. مقدار استاندارد MAP برای یک بیمار در محدوده ۸۰-۶۰ میلیمتر جیوه است که البته بهترین مقدار مرجع برای MAP را دکتر متخصص تشخیص می‌دهد. [۲۴]

تنظیم دستی نرخ تزریق داروی کاهنده فشار خون جهت کنترل MAP توسط پرسنل کلینیک برای بیماران مختلف که پاسخ مختلفی به دارو دارند، اغلب کار دشوار و خسته کننده‌ای می‌باشد. در نتیجه ممکن است منجر به نوسانات خطرناک و نامطلوب در MAP شود. در نتیجه یک کنترل کامپیوتری جهت تنظیم فشار خون سرخرگی مورد نیاز می‌باشد.

محققین زیادی در رابطه با کنترل فشار خون به تحقیق پرداخته اند. در اواخر دهه ۱۹۷۰ سیستمهای کنترل فشار خون گسترش یافتند. Sheppard یک کنترل کننده PID را برای کنترل فشار خون بکار برد؛ ولی این کنترل کننده نتوانست نسبت به اختلافات جزئی پاسخ به داروهای هایپوتنسو عملکرد خوبی داشته باشد [۲۵]. کنترل تطبیقی توسط Widrow [۲۶] ، Arnsperger و همکارانش بررسی شد [۲۷]، ولی این روش نیز نسبت به اغتشاشهای موجود، کارایی خوبی نداشت. Koivo سیستم کنترل فشار خونی را بر اساس کنترل بهیینه پایه ریزی کرد که فشار خون را در یک سطح پایین نگه می‌داشت ولی محدوده فشار خونی که می‌توانست به عنوان مرجع در نظر گرفته شود، کم بود [۲۸]. Fukui و Masuzava از منطق فازی<sup>۲</sup> برای کنترل فشار خون استفاده کردند بطوریکه فشار خون را در یک سطح بالا ، برای بعضی کاربردهای پزشکی، کنترل می نمودند ولی نوسانات به سادگی در پاسخ ظاهر می شدند [۲۹].

<sup>۱</sup> - Mea Arterial Pressure  
<sup>۲</sup> - Fuzzy Logic

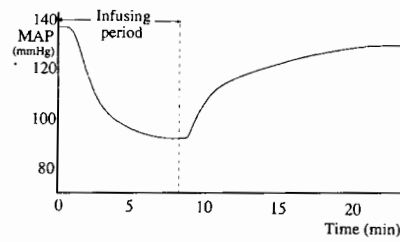
از آنجا که سیستم غیرخطی فشار خون دارای پارامترهایی با عدم قطعیت می‌باشد، در نتیجه وجود چنین پارامترهای نامعین ایجاب می‌کند که کنترل فشار خون توسط روشهای کنترل مقاوم غیرخطی انجام گیرد. روشهای انجام گرفته شده تاکنون، اکثراً غیرمقاوم بوده‌اند و عدم قطعیتها در نظر گرفته نشده‌اند. روش کنترل مقاوم غیرخطی استفاده شده در این فصل، روش پسگام مقاوم می‌باشد، که در آن یک تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم ایجاد خواهد شد و در نتیجه قانون کنترلی فیدبک حالت پایدارساز، عمل کنترل فشار خون را انجام خواهد داد. در قسمت شبیه‌سازیها، این روش را با روش پسگام مقایسه می‌کنیم و کارایی آن را نشان خواهیم داد.

### ۵-۳. مدل دینامیکی سیستم فشار خون در پاسخ به داروی هایپوتنسیو<sup>۱</sup>:

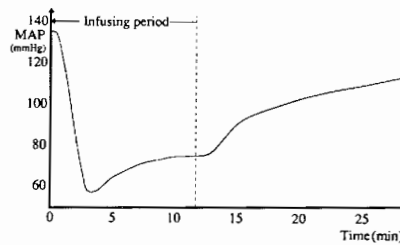
جهت کنترل فشار خون توسط داروی هایپوتنسیو، فشار سرخرگی میانگین را به عنوان خروجی ( $y$ ) در نظر گرفته و  $u$  به عنوان متغیر کنترلی، نرخ تزریق<sup>۱</sup> داروی هایپوتنسیو خواهد بود. مدل دینامیکی که ارتباط بین  $u$  و  $y$  را مشخص می‌کند، بر اساس پاسخ به تزریق ثابت این دارو است. در ادامه، فرآیند مدل‌سازی توضیح داده می‌شود:

فشار سرخرگی میانگین مربوط به دو سگ بعد از تزریق داروی هایپوتنسیو با نرخهای تزریق ثابت، اندازه گیری شده است. نرخهای تزریق برای هر سگ، به ترتیب برابر  $40 \mu g/kg/min$  و  $20$  و  $10$  و  $160 \mu g/kg/min$  و  $80$  و  $40$  بوده است. منحنی های پاسخ در شکل (۵-۲) نشان داده شده است.

<sup>۱</sup> - Infusion Rate



(a)



(b)

شکل (۵-۲): نمودار پاسخ به نرخ تزریق داروی هایپوتنسیو  
(a) برای نرخ تزریق کم (b) برای نرخ تزریق زیاد

از اطلاعات برگرفته از شکل فوق، نتایج زیر بدست می آید:

۱. یک تأخیر خالص در پاسخ وجود دارد.
۲. بعضی غیر خطیها از نوع اشباع<sup>۱</sup> هستند.
۳. دینامیکها در حوزه غیر خطی با استفاده از یک تأخیر مرتبه اول تخمین زده می شوند.

با توجه به نتایج (۱) و (۳) معادلات دینامیکی زیر حاصل می شوند:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}x + \frac{K}{T}u \\ y = x(t-L) \end{cases} \quad (1-5)$$

که در آن:

$x$  متغیر حالت است که به MAP در لحظه  $t+L$  بستگی دارد،  $T$  ثابت زمانی هنگامی که MAP

کاهش می یابد،  $K$  بهره تأخیر مرتبه اول و  $L$  زمان مرده<sup>۲</sup> می باشد.

<sup>۱</sup> - Saturation  
<sup>۲</sup> - Dead Time

از روی نتیجه (۲)، دینامیک دیگری با در نظر گرفتن ناحیه مرده<sup>۱</sup> برای نرخهای تزریق زیاد بدست می آید که به صورت زیر می باشد :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}[u(t) - w(t)] \\ \frac{dw}{dt} = x(t) - c \quad ; \quad x(t) \geq c \\ y(t) = x(t - L) \end{cases} \quad (۲-۵)$$

در این رابطه  $w(t)$  یک انتگرال گیر در حلقه فیدبک و  $c$  عرض ناحیه مرده می باشد، که به مقدار حالت دائمی MAP برای نرخهای تزریق زیاد، بستگی دارد. باید توجه کرد که مقدار انتگرال گیر در حلقه فیدبک، هنگامی که MAP بیشتر از مقدار حالت دائمی خودش در نرخ تزریق زیاد است، باید صفر<sup>۲</sup> شود. بنابراین برای صفرکردن انتگرال گیر، معادله زیر به سیستم اضافه می شود:

$$\frac{dw}{dt} = -kw(t) \quad ; \quad x(t) < c \quad (۳-۵)$$

که  $k$  یک عدد حقیقی مثبت و به اندازه کافی بزرگ می باشد.

از ترکیب روابط (۱) الی (۳) ، معادلات زیر حاصل می شوند :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}[u(t) - w(t)] \\ \frac{dw(t)}{dt} = \begin{cases} x(t) - c & ; \quad x(t) \geq c \\ -kw(t) & ; \quad x(t) < c \end{cases} \\ y(t) = x(t - L) \end{cases} \quad (۴-۵)$$

از نمودارهای پاسخ می توان فهمید که فراجش پاسخ، بزرگتر از پاسخ واقعی است. بنابراین به مدل

دینامیکی سیستم، یک قسمت غیرخطی به صورت ذیل اضافه می شود:

<sup>۱</sup> - Dead Zone  
<sup>۲</sup> - Reset



$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}[\mu(t) - v(t)] \\ \frac{dv(t)}{dt} = \begin{cases} x(t) - c & ; x(t) \geq c \\ -kv(t) & ; x(t) < c \end{cases} \\ y(t) = f(x(t-L)) \end{cases} \quad (۵-۵)$$

$$f(x) =$$

$$\begin{cases} x & ; x < c \\ c \left[ \left( \frac{x}{c} - 1 \right) + \left( \frac{1}{p} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} - c \left[ 1 - \left( \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right] & ; x \geq c \end{cases}$$

و  $p = 4$  می باشد.

محدوده پارامترهای مدل دینامیکی مطابق جدول (۱-۵) باشند.

جدول (۱-۵): محدوده پارامترهای مدل دینامیکی سیستم فشار خون

T	۹۰ ~ ۲۰۰ (s)
L	۳۰ ~ ۴۰ (s)
K	۲ ~ ۴/۵ (mmHg.kg.min/μg)
c	۵۲ ~ ۵۷ (mm)

از جدول (۱-۵) مشاهده می کنیم که پارامترها دارای عدم قطعیت هستند. در تحقیقات انجام شده که

در بالا معرفی شدند، مقادیر پارامترها به صورت جدول (۲-۵) در نظر گرفته شده اند.

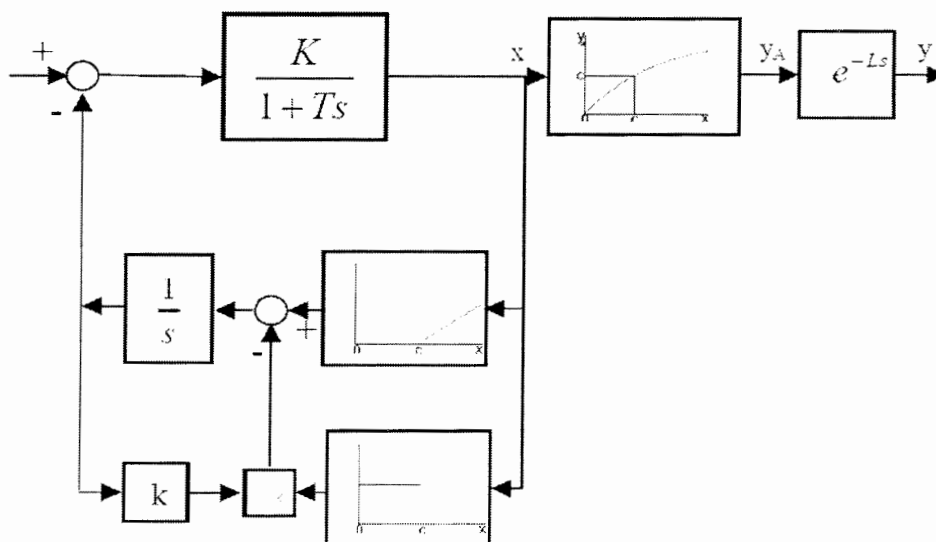
جدول (۲-۵) : مقادیر پارامترها مورد استفاده در تحقیقات انجام گرفته شده

L	۴۰ (s)
K	۴/۵ (mmHg.kg.min/μg)
c	۵۴/۵ (mm)

به منظور استفاده از روش پسگام مقاوم، مقادیر  $K=4.5$  و  $c=54.5$  و  $L=40$  به صورت قطعی در نظر می‌گیریم و پارامتر  $T$  که بیشترین تغییرات را دارد، به عنوان پارامتر دارای عدم قطعیت منظور می‌گردد.

بلوک دیاگرام سیستم فشار خون بصورت شکل (۳-۵) می‌باشد و هدف از کنترل کننده، کنترل

خروجی  $y_A$  در مقدار مرجع می‌باشد.



شکل (۳-۵) : بلوک دیاگرام سیستم فشار خون

## ۴-۵. مکانیزم کنترل کننده به روش پسگام مقاوم: [۳۱]

همچنانکه در فصل قبل دیدیم، کلاس سیستمهای غیرخطی نامعین مورد استفاده در روش پسگام مقاوم باید به صورت فیدبک صریح به فرم زیر باشد؛ حالت دو متغیره را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(x, \omega) & \phi_{12}(x, \omega) \\ \phi_{21}(x, \omega) & \phi_{22}(x, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_{23} \end{bmatrix} u + F(0, \omega) \quad (۶-۵)$$

که  $\phi_{ij}$  توابع اسکالر پیوسته‌ای هستند. فرض می‌کنیم که  $\phi_{ij}$  فقط به  $\omega$  و متغیرهای حالت  $x_1$  تا  $x_i$  بستگی دارد.

با اعمال تغییر متغیرهای زیر، قضیه پایداری را عنوان می‌کنیم.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - z_1 s_1(x_1) \end{aligned} \quad (۷-۵)$$

که  $s_i$  ها به متغیرهای حالت  $x_1$  تا  $x_i$  بستگی دارند و در فرآیند بازگشتی تعیین می‌گردند.

حال برای سیستم مورد نظر، قضیه (۴-۱) را مورد بررسی قرار می‌دهیم و فرآیند طراحی را برای حالت دومتغیره بیان می‌کنیم:

## ۴-۵-۱. مسأله پایداری سازی:

• حالت  $x \geq c$ :

اگر  $\omega = \frac{1}{T}$  به عنوان پارامتر دارای عدم قطعیت در نظر بگیریم، آنگاه معادلات (۵-۵) به صورت زیر در

می‌آیند: فرض کنید  $x_1 = x$  و  $x_2 = \dot{x}$  باشد،

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 54.5 \\ \dot{x}_2 &= -4.5\omega x_1 - \omega x_2 + 4.5\omega u \end{aligned} \quad (۸-۵)$$

با مقایسه قرار دادن این معادلات و معادلات (۶-۵) داریم :

$$\phi_{11}=0 ; \phi_{12}=1 ; \phi_{21}=-4.5\omega ; \phi_{22}=-\omega ; \phi_{23}=4.5\omega ; F_1(0,\omega)=-54.5 \quad (9-5)$$

حال، فرآیند بدست آوردن قانون کنترلی فیدبک حالت پایدارساز مقاوم را برای سیستم فشار خون

تشریح می‌کنیم :

ابتدا  $M_{11}$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$M_{11} = -c - 2\phi_{11} - 2\phi_{12} s_1(x_1) \quad (10-5)$$

مطابق با روش معرفی شده در فصل قبل، با قرار دادن  $c=2$  به عنوان یک عدد بزرگتر از یک،

$s_1(x_1)$  را باید طوری انتخاب کنیم که  $M_{11}$  مثبت گردد. بنابراین با انتخاب  $s_1(x_1) = -2 - x_1^2$  این امر

محقق می‌گردد.

از تغییر متغیر (۷-۵) داریم :

$$z = S(x)x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_1 & 1 \end{bmatrix} x \quad (11-5)$$

$$x = S^{-1}(x)z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{bmatrix} z \quad (12-5)$$

در نتیجه داریم :

$$S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 + x_1^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (13-5)$$

با مشتق گرفتن از رابطه (۱۱-۵) خواهیم داشت :

$$\dot{z} = \left[ \frac{\partial S}{\partial x_1} x \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} x \right] \dot{x} + S(x)\dot{x} = T(x)\dot{x} \quad (14-5)$$

با قرار دادن مقادیر معلوم بدست می‌آوریم :

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 + 3x_1^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (15-5)$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2+3x_1^2 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} \quad (۱۶-۵)$$

با استفاده از رابطه (۷-۵) و (۱۲-۵) می‌توانیم سیستم (۶-۵) را دوباره به صورت زیر بنویسیم :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} z + F(0, \omega) \quad (۱۷-۵)$$

پس :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ -4.5\omega - \omega s_1 & -\omega + 4.5\omega s_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -54.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۸-۵)$$

با جایگذاری  $\dot{x}$  در معادله (۱۴-۵) داریم :

$$\dot{z} = T(x)\dot{x} = \begin{bmatrix} \phi_{11} + \phi_{12}s_1 & \phi_{12} \\ * & * + \phi_{23}s_2 \end{bmatrix} z + T(x)F(0, \omega) \quad (۱۹-۵)$$

که در آن  $*_i$  هر تابعی است که به اغتشاش  $\omega$  و متغیر حالت  $x_1$  تا  $x_{i+1}$  و توابع  $s_1$  تا  $s_i$  و مشتقات

جزئی آنها بستگی دارد. در نتیجه :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ (2+3x_1^2)s_1 - 4.5\omega - \omega s_1 & 2+3x_1^2 - \omega + 4.5\omega s_2 \end{bmatrix} z + T(x) \begin{bmatrix} -54.5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (2+3x_1^2)s_1 - 4.5\omega - \omega s_1 & 2+3x_1^2 - \omega \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 4.5\omega s_2 \end{bmatrix} z + T(x) \begin{bmatrix} -54.5 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۲۰-۵)$$

اگر  $A$  و  $D$  را به ترتیب ماتریس اولی و دومی رابطه فوق در نظر بگیریم، خواهیم داشت :

$$\dot{z} = [A(x, \omega) + D(x, \omega)]z + T(x)F(0, \omega) \quad (۲۱-۵)$$

حال مشتق تابع لیاپانوف  $V(x) = z^T z$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم :

$$\dot{V} = z^T [A + A^T + 2D]z + 2F^T(0, \omega)T^T z \quad (۲۲-۵)$$

با استفاده از نامساوی یانگ<sup>۱</sup> ( $2ab \leq a^2 + b^2$ ) در جمله آخر معادله فوق نتیجه می‌گیریم :

$$\dot{V} \leq z^T [A + A^T + 2D + TT^T]z + \|F(0, \omega)\|^2 \quad (۲۳-۵)$$

<sup>۱</sup> - Young Inequality

همچنین از رابطه (۱۵-۵) داریم :

$$T(x)T^T(x) = I_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} 0 & \otimes_1 \\ \otimes_1 & \otimes_1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} 0 & 2+3x_1^2 \\ 2+3x_1^2 & (2+3x_1^2)^2 \end{bmatrix} \quad (24-5)$$

نوع<sup>۱</sup> تابع  $\otimes_i$  مانند تابع  $*_i$  می باشد. با ترکیب روابط (۲۳-۵) و (۲۴-۵) و با استفاده از تعریف A

نتیجه می گیریم :

$$\dot{V} \leq z^T z + \|F(0, \omega)\|^2 + 2z^T D(x, \omega)z + z^T \begin{bmatrix} 2\phi_{11} & *_1 \\ *_1 & *_1 \end{bmatrix} z \quad (25-5)$$

با استفاده از تعریف D رابطه زیر به دست می آید :

$$\dot{V} \leq -(c-1)z^T z - z^T M(x, \omega)z + \|F(x, \omega)\|^2 \quad (26-5)$$

بطوریکه ماتریس متقارن M باید مثبت معین باشد که  $\dot{V}$  منفی گردد اگر توابع  $s_i$  را طوری انتخاب

کنیم که M مثبت معین شود، آنگاه  $\dot{V}$  منفی خواهد شد:

$$M = \begin{bmatrix} -c - 2\phi_{11} - 2\phi_{12}s_1 & *_1 \\ *_1 & *_1 - 2\phi_{23}s_2 \end{bmatrix} \quad (27-5)$$

با مقایسه روابط (۲۴-۵) و (۲۵-۵) و (۲۶-۵) ماتریس M بصورت زیر درمی آید :

$$M = -cI_{2 \times 2} - A - A^T - 2D - T_1 \quad (28-5)$$

که در آن  $T(x)T^T(x) = I_{2 \times 2} + T_1(x)$

با قراردادن مقادیر معلوم در رابطه فوق ماتریس M تعیین می گردد :

$$M = \begin{bmatrix} -2-2s_1 & -1-(2+3x_1^2)(s_1+1)+4.5\omega+\omega s_1 \\ -1-(2+3x_1^2)(s_1+1)+4.5\omega+\omega s_1 & -6-6x_1^2+2\omega-(2+3x_1^2)^2-9\omega s_2 \end{bmatrix} \quad (29-5)$$

برای اینکه M مثبت معین باشد، باید همه کدهای اصلی پیشرو M مثبت باشد؛ یعنی :

<sup>۱</sup> - Type

$$-2 - 2s_1 > 0 \quad (۳۱-۵)$$

که این رابطه از ابتدا برقرار بود و همچنین :

$$|M| = (-2 - 2s_1)(-6 - 6x_1^2 + 2\omega - (2 + 3x_1^2)^2 - 9\omega s_2) - (-1 - (2 + 3x_1^2)(s_1 + 1) + 4.5\omega + \omega s_1)^2 \quad (۳۲-۵)$$

در رابطه فوق  $s_2$  باید طوری انتخاب شود که  $|M|$  مثبت گردد. بنابراین کفایت  $s_2$  را به صورت زیر

در نظر بگیریم :

$$s_2 < \frac{1}{9\omega(2 + 2s_1)} + \frac{(-6 - 6x_1^2 + 2\omega - (2 + 3x_1^2)^2)}{9\omega} + \frac{(-1 - (2 + 3x_1^2)(s_1 + 1) + 4.5\omega + \omega s_1)^2}{9\omega(2 + 2s_1)} \quad (۳۳-۵)$$

با در نظر گرفتن  $s_2$  به صورت فوق، قانون کنترلی فیدبک حالت پایدارساز مقاوم به فرم  $u = z_2 s_2$

خواهد بود.

• حالت  $X < C$  :

از معادلات (۵-۵) مشاهده می شود که در این حالت نقطه تعادل در مبدأ می باشد، متغیر

حالت  $w$  بصورت نمایی با ثابت زمانی  $k$  به نقطه تعادل میل می کند. یعنی :

$$w = e^{-kt} \quad (۳۴-۵)$$

بنابراین کفایت که  $u = \frac{1}{\omega K} \left( -x + \omega x + K\omega e^{-kt} \right)$  در نظر گرفته شود تا همه حالات به سمت صفر

میل نموده و مسأله پایدارسازی تضمین گردد.

۵-۴-۲. مسأله ردیابی :

برای ردیابی لازم است که خروجی  $y$  که همان MAP است، مقدار مرجع  $80 \text{ mmHg}$  را دنبال

کند. بنابراین کفایت  $y$  به  $80 \text{ mmHg}$  تعریف  $y^* = 80 \text{ mmHg}$  تعریف

می شود. در ابتدا با صرف نظر کردن از تأخیر سیستم (یعنی  $L$ )، متغیر کنترلی  $u$  را به روش پسگام

مقاوم طراحی کرده و در نهایت، تأخیر  $L=40$  s اعمال می گردد. این مقدار تأخیر برای بعضی کاربردهای پزشکی قابل صرف نظر می باشد.

حال طراحی تابع کنترلی  $u$  در نظر گرفته می شود :

• حالت  $x \geq c$  :

با تغییر متغیر  $\begin{cases} \varepsilon_1 = \omega + \frac{c}{k} \\ \varepsilon_2 = x - c \end{cases}$  معادلات سیستم بصورت زیر در می آیند :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 = -K\omega\varepsilon_1 - \omega\varepsilon_2 + K\omega u \end{cases} \quad (35-5)$$

$$y = c \left[ \frac{\varepsilon_2}{c} + 0.1575 \right]^{\frac{1}{4}} - 0.37c$$

برای اینکه  $y = 80$  mmHg شود، کفایت  $\varepsilon_2^* = 613.25$  میل کند بنابراین تغییر متغیر به صورت  $\begin{cases} \zeta_1 = \varepsilon_1 \\ \zeta_2 = \varepsilon_2 - 613.25 \end{cases}$  پیشنهاد می گردد. در این حالت،  $y$  یا MAP به مقدار مطلوب یعنی

80 mmHg خواهد رسید. با اعمال تغییر متغیر فوق، معادلات زیر بدست می آیند :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = 613.25 + \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -4.5\omega\zeta_1 - \omega\zeta_2 + 4.5\omega u - 613.25\omega \end{cases} \quad (36-5)$$

فرم معادلات فوق به صورت فیدبک صریح می باشد بنابراین از روش پسگام مقاوم استفاده می کنیم. با

مقایسه این معادلات و معادلات (۶-۵) نتیجه می گیریم :

$$\begin{aligned} \phi_{11} = 0 : \phi_{12} = 1 : \phi_{21} = -4.5\omega : \phi_{22} = -\omega : \\ \phi_{23} = 4.5\omega : F_1(0, \omega) = 613.25 : F_2(0, \omega) = -613.25\omega \end{aligned} \quad (37-5)$$

با انجام روند طراحی ذکر شده، قانون کنترلی فیدبک حالت مقاوم به صورت  $u = \varepsilon_2 s_2$  را بدست

می آوریم. کفایت  $s_2$  را به صورت زیر در نظر بگیریم :



$$s_2 < \frac{1}{9\omega(2+2s_1)} + \frac{(-6-6x_1^2+2\omega-(2+3x_1^2)^2)}{9\omega} + \frac{(-1-(2+3x_1^2)(s_1+1)+4.5\omega+\omega s_1)^2}{9\omega(2+2s_1)} \quad (38-5)$$

تا خروجی MAP به سمت مقدار موردنظر میل کند.

• حالت  $x < C$  :

در این حالت، روابط حاکم بر سیستم بصورت زیر می باشد :

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - K\omega w + K\omega u \\ \dot{w} = -kw \\ y = x \end{cases} \quad (39-5)$$

با توجه به این روابط، حالت  $w(t)$ ، به صورت نمایی با ثابت زمانی  $k$  به صفر میل می کند، یعنی :

$$w(t) = w(0)e^{-kt}$$

حالت  $x$  که خروجی سیستم است، باید به  $y^* = 80 \text{ mmHg}$  میل نماید. بنابراین تغییر متغیر را به

صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = x - 80 \end{cases} \quad (40-5)$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -kx_1 \\ \dot{x}_2 = -\omega(x_2 + 80) - K\omega x_1 + K\omega u \end{cases} \quad (41-5)$$

با در نظر گرفتن متغیر کنترلی  $u$  به صورت زیر، حالت  $x$  یا خروجی  $y$  به سمت  $80 \text{ mmHg}$  میل

خواهد کرد :

$$u = \frac{1}{K\omega} [\omega(x_2 + 80)] \quad (42-5)$$

با توجه به طراحیهای انجام شده، برای هر دو حالت  $x \geq c$  و  $x < c$ ، خروجی  $y$  به سمت  $80$  mmHg میل می کند که نتایج حاصل از شبیه سازی سیستم کنترل حلقه بسته در بخش (۵-۶) بررسی می گردند. در این قسمت کنترل فشار خون را براساس روش پسگام ارائه می کنیم: [۳۲]

### ۵-۵. مکانیزم کنترل کننده به روش پسگام<sup>۱</sup>:

در روش پسگام، با فیدبک گرفتن از حالات سیستم و اعمال ترکیب غیر خطی آنها طبق روابط خاصی، پایداری مجانبی سیستم تضمین می گردد. فرم فضای حالتی دو متغیره که قابل استفاده در روش پسگام است [۸]، به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)\eta \\ \eta &= f_2(x_1, \eta) + g_2(x_1, \eta)u \end{aligned} \quad (۴۳-۵)$$

یعنی اولین متغیر حالت، شامل تابعی از خودش به علاوه تابعی دیگر از خودش ضربدر دومین متغیر حالت است. دومین حالت، شامل تابعی از خودش و حالت قبلی و تابعی دیگر از خودش و حالت قبلی ضربدر متغیر ورودی است. بنابراین با تغییر متغیر لازم، می توان دینامیک سیستم فشار خون را به فرم معادلات (۴۳-۵) تبدیل نمود.

در ابتدا پایداری مجانبی، تحت عنوان پایداری سازی بررسی می گردد بدین معنی که همه حالتها باید بعد از مدت زمان معینی به نقطه تعادل خود برسند.

<sup>۱</sup> - Backstepping

## ۵-۵-۱. مسأله پایدارسازی :

• حالت  $x \geq c$

در این حالت نقطه تعادل  $\begin{cases} x^* = c \\ w^* = -\frac{c}{K} \end{cases}$  می باشد که با تغییر متغیر  $\begin{cases} z_1 = w + \frac{c}{K} \\ z_2 = x - c \end{cases}$  روابط

زیر بدست می آیند :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{K}{T}z_1 - \frac{1}{T}z_2 + \frac{K}{T}u \end{cases} \quad (۴۴-۵)$$

با مقایسه این روابط و روابط (۴۳-۵)، می توان سیستم را به روش پسگام پایدار نمود [۸]. در این

روش، متغیر کنترلی  $u$  را می توان با استفاده از روابط خاصی تعیین نمود. با انتخاب تابع لیاپانوف

$V(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2$ ، تابع اسکالر  $\Phi(z) = \frac{1}{2}z_1^2$  طوری تعریف می گردد که تابع لیاپانوف  $V(z_1)$  مثبت معین بوده

و مشتق آن منفی نیمه معین باشد و در نتیجه پایداری مجانبی تضمین می گردد. بنابراین با

انتخاب  $\Phi(z) = -z_1$ ، متغیر کنترلی  $u$  به صورت زیر خواهد بود :

$$u = -\frac{T}{K} \left[ (z_1 + z_2)(1 + k_1) + z_1 + \frac{1}{K}z_2 \right] \quad (۴۵-۵)$$

که در آن  $k_1$  یک عدد حقیقی مثبت است و مقدار آن بر پایداری رفتار گذرا اثر می گذارد.

با انتخاب  $u$  به صورت فوق، مسئله پایدارسازی تضمین شده و متغیرهای  $z_1$  و  $z_2$  به سمت صفر

میل نموده و در نتیجه متغیرهای  $x$  و  $w$  به سمت نقطه تعادلشان میل می کنند.

• حالت  $x < c$  :

در این حالت نقطه تعادل در مبدأ می باشد. متغیر حالت  $w$  با ثابت زمانی  $k$  به نقطه تعادل میل

می کند. یعنی :  $w = e^{-kt}$

بنابراین کافی است که :

$$u = \frac{T}{K} \left( -x + \frac{1}{T}x + \frac{K}{T}e^{-kt} \right) \quad (۴۶-۵)$$

در نظر گرفته شود تا همه حالات به سمت صفر میل نموده و مسأله پایدارسازی تضمین گردد.

### ۵-۵-۲. مسأله ردیابی :

برای ردیابی لازم است که خروجی  $y$  که همان MAP است، مقدار مرجع  $80 \text{ mmHg}$  را دنبال

کند. بنابراین کفایت  $y$  به  $80 \text{ mmHg}$  میل کند. در این حالت مقدار تعادل به صورت  $y^* = 80 \text{ mmHg}$  تعریف

می شود. حال طراحی تابع کنترلی  $u$  را انجام می دهیم :

• حالت  $x \geq c$  :

از معادلات (۴۴-۵) داریم :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{K}{T}z_1 - \frac{1}{T}z_2 + \frac{K}{T}u \end{cases} \quad (۴۷-۵)$$

$$y = c \left[ \frac{z_2}{c} + 0.1575 \right]^4 - 0.37c$$

برای اینکه  $y^* = 80 \text{ mmHg}$  شود، کفایت  $z_2^* = 613.25$  در نظر گرفته شود و حال تغییر متغیر به

صورت  $\begin{cases} \mathcal{A}_1 = z_1 \\ \mathcal{A}_2 = z_2 - 613.25 \end{cases}$  پیشنهاد می گردد. در این حالت،  $y$  یا MAP به مقدار مطلوب یعنی

$80 \text{ mmHg}$  خواهد رسید. با اعمال تغییر متغیر فوق، معادلات زیر بدست می آیند :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_1 = 613.25 + \mathcal{A}_2 \\ \dot{\mathcal{A}}_2 = -\frac{613.25}{T} - \frac{K}{T}\mathcal{A}_1 - \frac{1}{T}\mathcal{A}_2 + \frac{K}{T}u \end{cases} \quad (۴۸-۵)$$

همانطور که دیده می شود، فرم معادلات فوق به صورت (۴۳-۵) هستند که می توان به روش

پسگام آنرا کنترل نمود.

با مقایسه این روابط با معادلات (۴۳-۵) داریم :

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 613.25; & g_1(x_1) &= 1; & f_2(x_1, \eta) &= -\frac{613.25}{T} - \frac{K}{T} \cdot \mathcal{I}_1 - \frac{1}{T} \cdot \mathcal{I}_2 \\ g_2(x_1, \eta) &= \frac{K}{T}; & x_1 &= \mathcal{I}_1; & \eta &= \mathcal{I}_2 \end{aligned} \quad (۴۹-۵)$$

بنابراین با استفاده از روابط فوق، متغیر کنترلی  $u$  به صورت زیر بدست می آید :

$$u = -\frac{T^2}{K^2} \left[ (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 613.25)(1+k_1) \right] + \frac{613.25}{K} + \frac{613.25}{K^2} T + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_1 \frac{T}{K} + \frac{1}{K} \mathcal{I}_2 + \frac{T}{K^2} \mathcal{I}_2 \quad (۵۰-۵)$$

• حالت  $x < C$  :

در این حالت، روابط حاکم بر سیستم بصورت زیر می باشند :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{T}x - \frac{K}{T}w + \frac{K}{T}u \\ \dot{w} = -kw \\ y = x \end{cases} \quad (۵۱-۵)$$

با توجه به این روابط، حالت  $w(t)$ ، به صورت نمایی به صفر میل می کند، یعنی :  $w(t) = w(0)e^{-kt}$

حالت  $x$  که خروجی سیستم است، باید به  $y^* = 80 \text{ mmHg}$  میل نماید. بنابراین تغییر متغیر را به

صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} z_1 = w \\ z_2 = x - 80 \end{cases} \quad (۵۲-۵)$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -kz_1 \\ \dot{z}_2 = -\frac{1}{T}(z_2 + 80) - \frac{K}{T}z_1 + \frac{K}{T}u \end{cases} \quad (۵۳-۵)$$

با در نظر گرفتن متغیر کنترلی  $u$  به صورت زیر، حالت  $x$  یا خروجی  $y$  به سمت ۸۰ میل خواهد کرد:

$$u = \frac{T}{K} \left[ \frac{1}{T}(z_2 + 80) \right] \quad (۵۴-۵)$$

همانطور که دیده شد، برای هر دو حالت  $x \geq c$  و  $x < c$ ، خروجی  $y$  به سمت  $80 \text{ mmHg}$  میل می کند که نتایج حاصل از شبیه سازی سیستم کنترل حلقه بسته در بخش بعد ارائه می گردد.

### ۵-۶. نتایج و شبیه سازی :

در این بخش، نتایج شبیه سازیهای کامپیوتری انجام گرفته شده را بیان خواهیم کرد. ابتدا سیستم فشار خون را بدون کنترل کننده در نظر می گیریم، سپس کنترل کننده پسگام و پسگام مقاوم را اعمال کرده و در نهایت این دو روش را با هم مقایسه می کنیم.

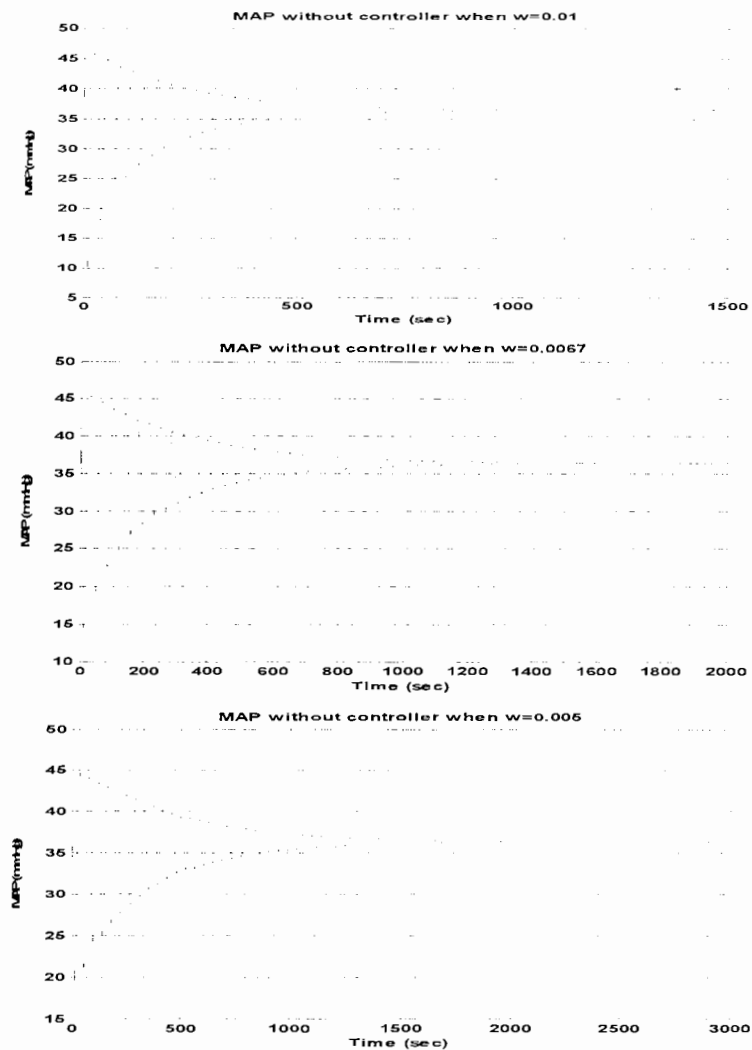
نتایج بر اساس دو نکته می باشند: یکی اینکه خروجی MAP با پاسخ زمانی مناسب به مقدار مرجع برسد؛ دوم اینکه مقادیر مختلف عدم قطعیت، اثری روی خروجی نداشته باشد.

در این قسمت، ما به ازاء سه مقدار از عدم قطعیت زیر سیستم را شبیه سازی کرده ایم:

$$T = 100, 150, 200 \Rightarrow \omega = \frac{1}{T} = 0.01, 0.0067, 0.005$$

### ۵-۶-۱. خروجی سیستم بدون کنترل کننده :

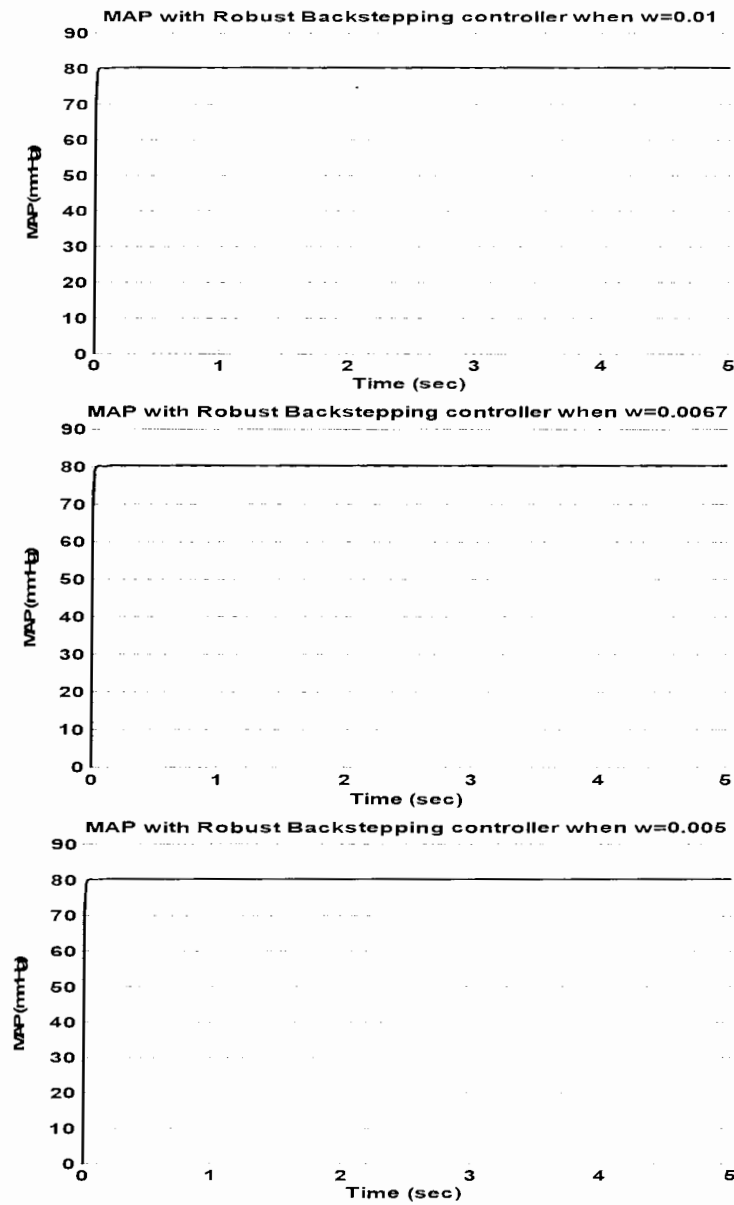
در ابتدا سیستم را بدون اینکه کنترل کننده را اعمال کنیم، شبیه سازی می کنیم. همچنانکه در شکل (۴-۵) مشاهده می گردد، خروجی MAP به ازاء سه مقدار از عدم قطعیت دارای تغییرات زیادی می باشد. همچنین خروجی دارای پاسخ زمانی نامناسبی می باشد. (شامل نوسانات فراوان و زمان نشست و فراجش خیلی زیاد).



شکل (۴-۵): خروجی سیستم بدون کنترل کننده

#### ۵-۶-۲. خروجی سیستم با اعمال کنترل کننده پسگام مقاوم:

در این حالت با اعمال کنترل کننده طراحی شده در بخش ۴-۵ به سیستم، به ازاء سه مقدار از عدم قطعیت، خروجی را در شکل (۵-۵) مشاهده می‌کنیم. با مشاهده شکل می‌توان فهمید که خروجی MAP در عین حال که مقدار مرجع  $80 \text{ mmHg}$  را بدون نوسان و فرجهش و با زمان نشست مناسب (کمتر از یک ثانیه) دنبال می‌کند، نسبت به تغییر پارامتر  $w$  یا معادل آن یعنی  $T$  ثابت می‌باشد.



شکل (۵-۵): خروجی سیستم با اعمال کنترل کننده پسگام مقاوم

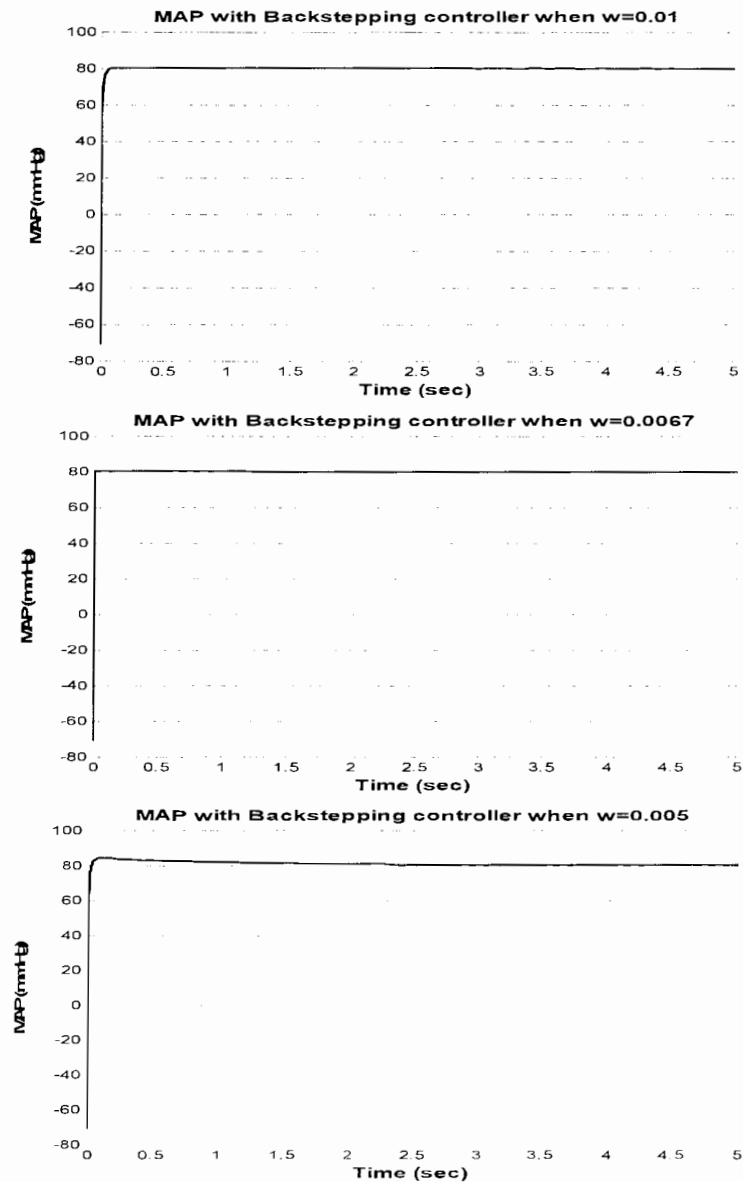
### ۵-۶-۳. خروجی سیستم با اعمال کنترل کننده پسگام:

در این حالت نیز با اعمال کنترل کننده طراحی شده در بخش ۵-۵ به سیستم، به ازاء سه مقدار

از عدم قطعیت، خروجی را در شکل (۵-۶) مشاهده می‌کنیم. همچنانکه دیده می‌شود خروجی



MAP مقدار مرجع  $80 \text{ mmHg}$  را بدون نوسان و فراجهش و با زمان نشست مناسب (کمتر از یک ثانیه) دنبال می کند، ولی نسبت به تغییر پارامتر  $w$  یا معادل آن یعنی  $T$  دارای تغییرات می باشد.



شکل (۵-۶): خروجی سیستم با اعمال کنترل کننده پسگام

در فرآیند طراحی مقدار تأخیر  $L=40$  را در نظر نگرفتیم. با توجه به اینکه خروجی سیستم کنترل شده در مدت زمان کمتر از یک ثانیه به مقدار مرجع می‌رسد، در واقع می‌توان گفت که خروجی سیستم با تأخیر تقریباً ۴۰ ثانیه‌ای به مقدار مرجع می‌رسد. البته در بسیاری از کاربردهای پزشکی، این مقدار تأخیر را می‌توان نادیده گرفت.

# فصل VI

کنترل سروسیسٹم سرعت

الکتروہیڈرولیکی

## ۶-۱. مقدمه :

سرو سیستمهای الکتروهیدرولیکی (EHSS)<sup>۱</sup> در محدوده وسیعی از کاربردهای صنعتی مدرن مورد استفاده قرار گرفته‌اند. علت این امر را می‌توان به خاطر اینرسی و گشتاور بار زیاد و پاسخ دهی سریع و دقت و عملکرد بالای آنها عنوان کرد [۳۳،۳۴]. از جمله این کاربردها می‌توان به سیستمهای تعلیق فعال، کنترل رباتهای صنعتی، هواپیماهای تجاری، ماهواره‌ها، زیردریایی‌ها، شبیه سازهای پرواز، کنترل توربین و کاربردهای نظامی دیگر اشاره کرد.

با توجه به هدف کنترل مطلوب، یک EHSS می‌تواند به حالت موقعیت، سرعت و نیرو/گشتاور EHSS طبقه بندی شود. در زمینه کنترل موقعیت روشهای مختلفی انجام شده است و اکثر این روشها، بر اساس کنترل خطی یا روش خطی سازی فیدبکی انجام گرفته است. در صورتی که سیستم EHSS دارای دینامیکهای غیر خطی و عدم قطعیت های مدلسازی شده می‌باشد. اخیراً در زمینه کنترل موقعیت از یک کنترل کننده مقاوم تطبیقی ناپیوسته برای در نظر گرفتن غیر خطیها و عدم قطعیتهای پارامتری استفاده شده است. [۳۵] و همچنین با استفاده از یک استراتژی کنترلی دیگر، پایداری کلی غیر

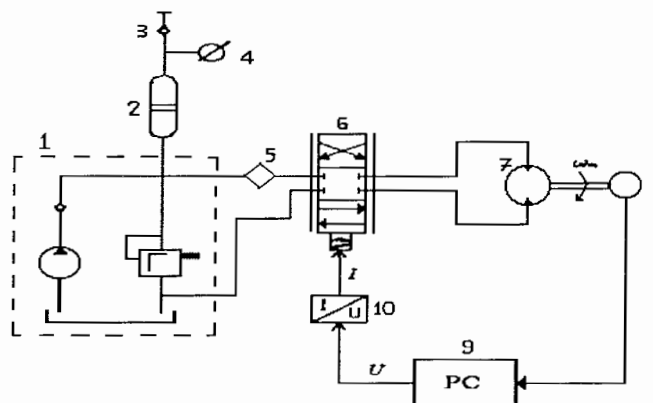
<sup>۱</sup> - ElectroHydraulic Servo System

خطی جهت کنترل موقعیت EHSS تضمین شده است. [۳۶] در زمینه کنترل سرعت، از دو روش خطی سازی فیدبکی<sup>۱</sup> و روش پسگام استفاده شده که در آن سیستم EHSS بصورت قطعی در نظر گرفته شده است [۳۷].

در این فصل کنترل سرعت EHSS با استفاده از روش معرفی شده در فصل ۴ بررسی خواهد شد و برای سیستم EHSS در این روش، غیرخطیها و عدم قطعیت‌های غیر ساختاری مدل دینامیکی در نظر گرفته شده است. در نهایت، روش بررسی شده با روش خطی سازی فیدبکی مقایسه می گردد. نتایج، کارایی روش پیشنهاد شده را نشان می دهد.

## ۶-۲. توصیف سیستم [۳۷]:

شماتیک یک سروسیستم الکتروهیدرولیکی در شکل (۶-۱) نشان داده شده است.



شکل (۶-۱): شماتیک یک سروسیستم الکتروهیدرولیکی

<sup>۱</sup> - Feedback Linearization

قسمتهای اصلی این سیستم عبارتند از :

- ۱- منبع قدرت هیدرولیک. ۲- انباره<sup>۱</sup>. ۳- دریچه شارژ<sup>۲</sup>. ۴- فشارسنج<sup>۳</sup>. ۵- فیلتر. ۶- دریچه هیدرولیکی دوحالت<sup>۴</sup>. ۷- موتور هیدرولیکی. ۸- وسیله اندازه گیری. ۹- کامپیوتر شخصی. ۱۰- مبدل ولتاژ به جریان.

ابتدا، حالت‌های سیستم نشان داده شده در شکل (۶-۱) اندازه گیری می شوند و سپس وارد کامپیوتر شخصی شده و سیگنال ولتاژ الکتریکی بر اساس این اطلاعات و مطابق با قانون کنترلی طراحی شده و با استفاده از مبدل ولتاژ به جریان، به جریان تبدیل می شود. این سیگنال روی دریچه هیدرولیکی عمل کرده بطوریکه موتور هیدرولیکی را با توجه به مقدار روغن فعال می کند.

با استفاده از قانون دوم نیوتن برای حرکت چرخشی شفت موتور، معادله پیوستگی برای هر چمبره<sup>۵</sup> موتور هیدرولیکی و تخمین زدن ارتباط بین گشتاور موتور و حالت اول دریچه الکترو هیدرولیکی توسط یک تابع انتقال مرتبه اول، مدل ریاضی این سیستم در مرجع [۳۸] بیان شده است که مدل دینامیکی EHSS بصورت زیر می باشد:

---

<sup>۱</sup> - Accumulator  
<sup>۲</sup> - Charge valve  
<sup>۳</sup> - Pressure gauge device  
<sup>۴</sup> - Two-stage electrohydraulic servovalve  
<sup>۵</sup> .chamber

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{J_t} [-B_m z_1 + q_m z_2 - q_m C_f P_s \text{sign} z_1] \\ \dot{z}_2 &= \frac{2\beta_e}{V_0} \left[ -q_m z_1 - C_{im} z_2 + C_d W z_3 \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_s - z_2 \text{sign} z_3)} \right] \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{T_r} \left[ -z_3 + \frac{K_r}{K_q} u \right] \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (1-6)$$

که در آن:

$z_1$ : سرعت زاویه ای هیدروموتور ( $rad/s$ )

$z_2$ : اختلاف فشار بار ( $Pa$ )

$z_3$ : جابجایی دریچه ( $m$ )

همچنین مقادیر نامی پارامترهای موجود در معادله (۱-۶) بصورت زیر می باشد:

$J_t = 0.03 Kg.m^2$ : اینرسی کل موتور و بار مربوط به شفت موتور<sup>۱</sup>،  $q_m = 7.96 \times 10^{-7} \frac{m^3}{rad}$ : جابجایی

حجمی موتور<sup>۲</sup>،  $B_m = 1.1 \times 10^{-3} N.ms$ : ضریب میرایی ویسکوز<sup>۳</sup>،  $C_f = 0.104$ : ضریب اصطکاک داخلی

بدون بُعد<sup>۴</sup>،  $V_0 = 1.2 \times 10^{-4} m^3$ : حجم متوسط هر چمبره موتور<sup>۵</sup>،  $\beta_e = 1.391 \times 10^9 Pa$ : مدول مؤثر

سیستم<sup>۶</sup>،  $C_d = 0.61$ : ضریب دشارژ<sup>۷</sup>،  $C_{im} = 1.69 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Pa.s}$ : ضریب نشت داخلی موتور<sup>۸</sup>،  $P_s = 10^7 Pa$

<sup>۱</sup> - total inertia of the motor and load referred to the motor shaft

<sup>۲</sup> - volumetric displacement

<sup>۳</sup> - viscous damping coefficient

<sup>۴</sup> - dimensionless internal friction coefficient

<sup>۵</sup> - average contained volume of each motor chamber

<sup>۶</sup> - effective bulk modulus of the system

<sup>۷</sup> - discharge coefficient

<sup>۸</sup> - internal or cross port leakage coefficient of the motor

: منبع فشار<sup>۱</sup>،  $\rho = 850 \frac{Kg}{m^3}$  : چگالی روغن<sup>۲</sup>،  $T_r = 0.01s$  : ثابت زمانی دریچه<sup>۳</sup>،  $K_r = 1.4 \times 10^{-4} \frac{m^3}{sV}$  : بهره<sup>۴</sup>

دریچه<sup>۴</sup>،  $K_q = 1.66 \frac{m^2}{s}$  : بهره جریان دریچه<sup>۵</sup> و  $W = 8\pi \times 10^{-3} m$  : گرادیان سطحی<sup>۶</sup>.

هدف کنترل، پایدارسازی نقطه کار انتخاب شده براساس نقاط تعادل زیر می باشد :

هر مقدار ثابت اختیاری :  $z_{1N}$

$$z_{2N} = \frac{1}{q_m} [B_m z_{1N} + q_m P_s C_f]$$

$$z_{3N} = \frac{q_m z_{1N} + C_{im} z_{2N}}{C_d W \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_s - z_{2N})}} \quad (2-6)$$

که مقدار سیگنال کنترلی برای اینکه  $x_3$  را در نقطه تعادل نگه دارد، برابر  $u_N = \frac{K_q}{K_r} z_{3N}$  می باشد. فرض

می شود که جهت چرخش شفت موتور تغییر نمی کند، یعنی  $z_1 > 0$ . این یک فرض عملی می باشد و برای

اینکه این فرض برقرار باشد، نباید جابجایی دریچه سرو  $z_3$  نسبت به موقعیت نرمال  $z_3 = 0$  در هر دو

جهت حرکت کند. این حقیقت باعث می شود که محدودیت  $z_3 > 0$  را اعمال کنیم. در این حالت مدل

دینامیکی سیستم بصورت زیر درمی آید :

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{J_l} [-B_m z_1 + q_m z_2 - q_m C_f P_s]$$

$$\dot{z}_2 = \frac{2\beta_e}{V_0} \left[ -q_m z_1 - C_{im} z_2 + C_d W z_3 \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_s - z_2)} \right] \quad (3-6)$$

$$\dot{z}_3 = \frac{1}{T_r} \left[ -z_3 + \frac{K_r}{K_q} u \right]$$

$$y = z_1$$

- <sup>۱</sup> - supply pressure
- <sup>۲</sup> - oil density
- <sup>۳</sup> - valve time constant
- <sup>۴</sup> - valve gain
- <sup>۵</sup> - valve flow gain
- <sup>۶</sup> - surface gradient



## ۳-۶. مکانیزم کنترل کننده پسگام مقاوم :

در این بخش، روش پسگام مقاوم را روی سیستم EHSS اعمال می‌کنیم و کنترل کننده مقاومی را

برای این سیستم براساس بخش ۴-۴ طراحی می‌کنیم که نقاط تعادل در نقطه مورد علاقه پایدار شوند.

فرض می‌کنیم که همه اطلاعات مربوط به حالتها در دسترس باشد. با تغییر متغیر

$$\begin{cases} x_i = z_i - z_{iN}; & \forall i = 1, 2, 3; \\ v = u - u_N \end{cases}$$

و اضافه کردن عدم قطعیت‌های غیرساختاری بصورت  $F(0, \omega)$  به هر یک از

معادلات فضای حالت، و همچنین با جایگذاری مقادیر پارامترهای معلوم در سیستم (۳-۶) و  $x_{1N} = 200$ ،

مدل دینامیکی نهایی سیستم بصورت زیر درمی‌آید. لازم به ذکر است که این عدم قطعیت غیرساختاری

$F(0, \omega)$ ، می‌تواند هر نوع عدم قطعیتی که در شرط قضیه (۴-۱) صدق می‌کند، شامل شود :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 + F_1(0, \omega) \\ \dot{x}_2 &= -k_3 x_1 - \left(k_4 + \frac{k_5}{k_6 + \sqrt{k_7 - 850x_2}}\right) x_2 + \left(k_8 \sqrt{10216 - \frac{1}{850}x_2}\right) x_3 + F_2(0, \omega) \\ \dot{x}_3 &= -100x_3 + k_9 v + F_3(0, \omega) \end{aligned} \quad (۴-۶)$$

که در آن :

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.0367; & k_2 &= 2.653 \times 10^{-5}; & k_3 &= 1845.3933 \times 10^4 \\ k_4 &= 391.7927; & k_5 &= 35.4341 \times 10^6; & k_6 &= 85913.1 \\ k_7 &= 7381.06 \times 10^6; & k_8 &= 35.5418 \times 10^{10}; & k_9 &= 84.337 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

می‌توان سیستم (۴-۶) را به صورت ماتریسی زیر به فرم فیدبک صریح نوشت:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 & 0 \\ -k_3 & -\left(k_4 + \frac{k_5}{k_6 + \sqrt{k_7 - 850x_2}}\right) & k_8 \sqrt{10216 - \frac{1}{850}x_2} \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_9 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} F_1(0, \omega) \\ F_2(0, \omega) \\ F_3(0, \omega) \end{bmatrix} \quad (۵-۶)$$

که در این صورت با مقایسه (۵-۶) و (۸-۴) داریم:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= -k_1; & \phi_{12} &= k_2; & \phi_{21} &= -k_3 \\ \phi_{22} &= -(k_4 + \frac{k_5}{k_6 + \sqrt{k_7 - 850x_2}}); & \phi_{23} &= k_8 \sqrt{10216 - \frac{1}{850}x_2} \end{aligned} \quad (۶-۶)$$

ابتدا با انتخاب  $c = 2 > 1$ ،  $s_1$  را طوری حساب می‌کنیم که  $M_1 > 0$  شود:

$$M_1(x_1, \omega) = -c - 2\phi_{11} - 2\phi_{12}s_1(x_1) = -2 - +2k_1 - 2k_2s_1(x_1) \quad (۷-۶)$$

کافیست  $s_1$  را به صورت زیر در نظر بگیریم که این امر محقق گردد:

$$s_1(x_1) = \frac{1}{k_2}(-1 - x_1^2) \Rightarrow M_1 = 2k_1 + 2x_1^2 > 0 \quad (۸-۶)$$

با استفاده از رابطه (۴-۱۳)، ماتریس  $S(x)$  بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+x_1^2}{k_2} & 1 & 0 \\ s_1s_2 & s_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (۹-۶)$$

با استفاده از رابطه (۴-۱۵)، ماتریس  $T(x)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+x_1^2}{k_2} & 1 & 0 \\ \otimes_2 & \otimes_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۶)$$

حال می‌خواهیم  $A$  و  $D$  را حساب کنیم. از رابطه (۴-۱۷) داریم:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 & 0 \\ -k_3 & -(k_4 + \frac{k_5}{k_6 + \sqrt{k_7 - 850x_2}}) & k_8 \sqrt{10216 - \frac{1}{850}x_2} \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 \\ 0 & s_2 & 1 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = +F(0, \omega) \quad (۱۱-۶)$$

$$= \begin{bmatrix} -k_1 + k_2s_1 & k_2 & 0 \\ -k_3 - s_1\phi_{22} & \phi_{22} + \phi_{23} & \phi_{23} \\ 0 & -100s_2 & -100 + k_9s_3 \end{bmatrix} = +F(0, \omega)$$

با جایگذاری  $T(x)$  و  $\dot{x}$  از روابط (۶-۱۰) و (۶-۱۱)، ماتریس  $\dot{z}$  بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\dot{z} = T(x)\dot{x} = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 & 0 \\ (-k_1 + k_2 s_1)\left(\frac{1+3x_1^2}{k_2}\right) - k_3 - s_1\phi_{22} & (1+3x_1^2) + \phi_{22} & \phi_{23} \\ *_2 & *_2 & *_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} k_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{23} s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{34} s_3 \end{bmatrix} z + T(x).F(0, \omega) \quad (۶-۱۲)$$

که در آن  $A$  ماتریس اولی و  $D$  ماتریس دومی رابطه فوق می‌باشد.

از رابطه (۴-۲۱) داریم:

$$\dot{V} \leq z^T [A(x, \omega) + A^T(x, \omega) + 2D(x, \omega) + T(x)T^T(x)]z + \|F(0, \omega)\|^2$$

با تفکیک  $T(x)T^T(x) = I_{n \times n} + T_1(x)$  بصورت  $T(x)T^T(x) = I_{n \times n} + T_1(x)$  و اضافه و کم کردن  $cz^T z$  در رابطه فوق

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq z^T z + z^T [A + A^T + 2D + T_1]z + \|F(0, \omega)\|^2 + cz^T z - cz^T z \\ \dot{V} &\leq -(c-1)z^T z - z^T [-A - A^T - 2D - T_1 - cI_{n \times n}]z + \|F(0, \omega)\|^2 \end{aligned} \quad (۶-۱۳)$$

در نتیجه ماتریس  $M$  بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$M = -A - A^T - 2D - T_1 - cI_{3 \times 3} \quad (۶-۱۴)$$

حال با تشکیل  $T_1(x)$  از رابطه (۶-۱۰) و همچنین رابطه (۶-۱۲)، ماتریس  $M$  بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$M = \begin{bmatrix} 2k_1 - 2k_2 s_1 - 2 & -k_2 - (-k_1 + k_2 s_1)\left(\frac{1+3x_1^2}{k_2}\right) + k_3 - s_1\phi_{22} - \frac{1+3x_1^2}{k_2} & *_2 \\ -k_2 - (-k_1 + k_2 s_1)\left(\frac{1+3x_1^2}{k_2}\right) + k_3 - s_1\phi_{22} - \frac{1+3x_1^2}{k_2} & -2(1+3x_1^2) - 2\phi_{22} - 2\phi_{23} s_2 - 2 - \left(\frac{1+3x_1^2}{k_2}\right)^2 & *_2 \\ *_2 & *_2 & *_2 \end{bmatrix} \quad (۶-۱۵)$$

حال باید  $s_2$  را طوری حساب کنیم که کهاد پیشرو مرتبه دوم، مثبت گردد. یعنی :

$$M_2 > 0 \Rightarrow (2k_1 - 2k_2s_1 - 2) \left[ -2(1 + 3x_1^2) - 2\phi_{22} - 2\phi_{23}s_2 - 2 - \left(\frac{1 + 3x_1^2}{k_2}\right)^2 \right] \quad (16-6)$$

$$- \left[ -k_2 - (-k_1 + k_2s_1) \left(\frac{1 + 3x_1^2}{k_2}\right) + k_3 - s_1\phi_{22} - \frac{1 + 3x_1^2}{k_2} \right]^2 > 0$$

کافی است که  $s_2$  بصورت زیر در نظر گرفته شود تا  $M_2 > 100$  گردد :

$$s_2 = \frac{\left[ -2(1 + 3x_1^2) - 2\phi_{22} - 2 - \left(\frac{1 + 3x_1^2}{k_2}\right)^2 \right]}{2\phi_{23}} - \frac{\left[ -k_2 - (-k_1 + k_2s_1) \left(\frac{1 + 3x_1^2}{k_2}\right) + k_3 - s_1\phi_{22} - \frac{1 + 3x_1^2}{k_2} \right]^2}{2\phi_{23}(2k_1 - 2k_2s_1 - 2)} \quad (17-6)$$

$$- \frac{100}{2\phi_{23}(2k_1 - 2k_2s_1 - 2)}$$

با تکرار فرآیند فوق، ماتریس  $M$  را کامل می‌کنیم. با انجام عملیات جبری، ماتریسهای  $A$ ،  $D$ ،  $T$  و  $T_1$

بصورت زیر محاسبه می‌گردند :

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1 + x_1^2}{k_2} & 1 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (18-6)$$

که در آن :

$$t_{31} = \frac{\partial s_1 s_2}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial s_2}{\partial x_1} x_2 + s_1 s_2$$

$$t_{32} = \frac{\partial s_1 s_2}{\partial x_2} x_1 - \frac{\partial s_2}{\partial x_2} x_2 - s_2$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+3x_1^2}{k_2} & t_{31} \\ \frac{1+3x_1^2}{k_2} & \left(\frac{1+3x_1^2}{k_2}\right)^2 & t_{31} \frac{1+3x_1^2}{k_2} + t_{32} \\ t_{31} & t_{31} \frac{1+3x_1^2}{k_2} + t_{32} & t_{31}^2 + t_{32}^2 \end{bmatrix} \quad (19-6)$$

و

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 & 0 \\ (-k_1 + k_2 s_1) \left(\frac{1+3x_1^2}{k_2}\right) - k_3 - s_1 \phi_{22} & (1+3x_1^2) + \phi_{22} & \phi_{23} \\ t_{31}(-k_1 + k_2 s_1) + t_{32}(-k_3 + s_1 \phi_{22}) & t_{31} k_2 + t_{32}(\phi_{22} + \phi_{23} s_2) - 100 s_2 & t_{32} \phi_{23} - 100 \end{bmatrix} \quad (20-6)$$

و

$$D = \begin{bmatrix} k_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{23} s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{34} s_3 \end{bmatrix} \quad (21-6)$$

با استفاده از رابطه (۶-۱۴)، ماتریس مقارن کامل شده  $M$  به صورت زیر در خواهد آمد:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{bmatrix} \quad (22-6)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a &= 2k_1 - 2k_2 s_1 - 2; \\ b &= -k_2 - (-k_1 + k_2 s_1) \left(\frac{1+3x_1^2}{k_2}\right) + k_3 - s_1 \phi_{22} - \frac{1+3x_1^2}{k_2} \\ c &= -t_{31}(-k_1 + k_2 s_1) - t_{32}(-k_3 + s_1 \phi_{22}) - t_{31} \\ d &= -\phi_{23} - t_{31} k_2 - t_{32}(\phi_{22} + \phi_{23} s_2) + 100 s_2 - t_{31} \frac{1+3x_1^2}{k_2} - t_{32} \\ e &= -2(1+3x_1^2) - 2\phi_{22} - 2\phi_{23} s_2 - 2 - \left(\frac{1+3x_1^2}{k_2}\right)^2 \\ f &= -2 - 2t_{32} \phi_{23} + 200 - t_{31}^2 - t_{32}^2 - 2\phi_{34} s_3 \end{aligned}$$

حال که ماتریس  $M$  بدست آمد، باید  $s_3$  را طوری در نظر بگیریم که کهاد مرتبه سوم ماتریس  $M$ ، یا در

این حالت،  $|M|$  مثبت گردد. یعنی:

$$|M| = a(ef - bd) - b(bf - cd) + c(bd - ec) > 0$$

بنابراین کافی است که  $s_3$  را بصورت زیر در نظر بگیریم :

$$s_3 < \frac{ae(-2 - 2t_{32}\phi_{23} + 200 - t_{31}^2 - t_{32}^2) - 2abd - b^2(-2 - 2t_{32}\phi_{23} + 200 - t_{31}^2 - t_{32}^2) + bcd - 100}{2ae\phi_{34} - 2b^2\phi_{34}} \quad (۲۳-۶)$$

این انتخاب منجر به  $|M| > 100$  خواهد شد. بعد از اینکه  $s_3$  تعیین گردید، قانون کنترل فیدبک حالت

پایدارساز مقاوم با توجه به قضیه ۴-۱، به فرم  $v = z_3 \cdot s_3$  خواهد شد.

#### ۴-۶. نتایج و شبیه‌سازیها :

با اعمال قانون کنترلی طراحی شده در بخش قبلی، نتایج را براساس شبیه‌سازیهای انجام گرفته در

محیط MATLAB نشان می‌دهیم. با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های غیرساختاری  $F(0, \omega)$  بصورت

۱۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از تغییرات پارامترهای سیستم، پاسخ زمانی سه متغیر حالت  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  را در

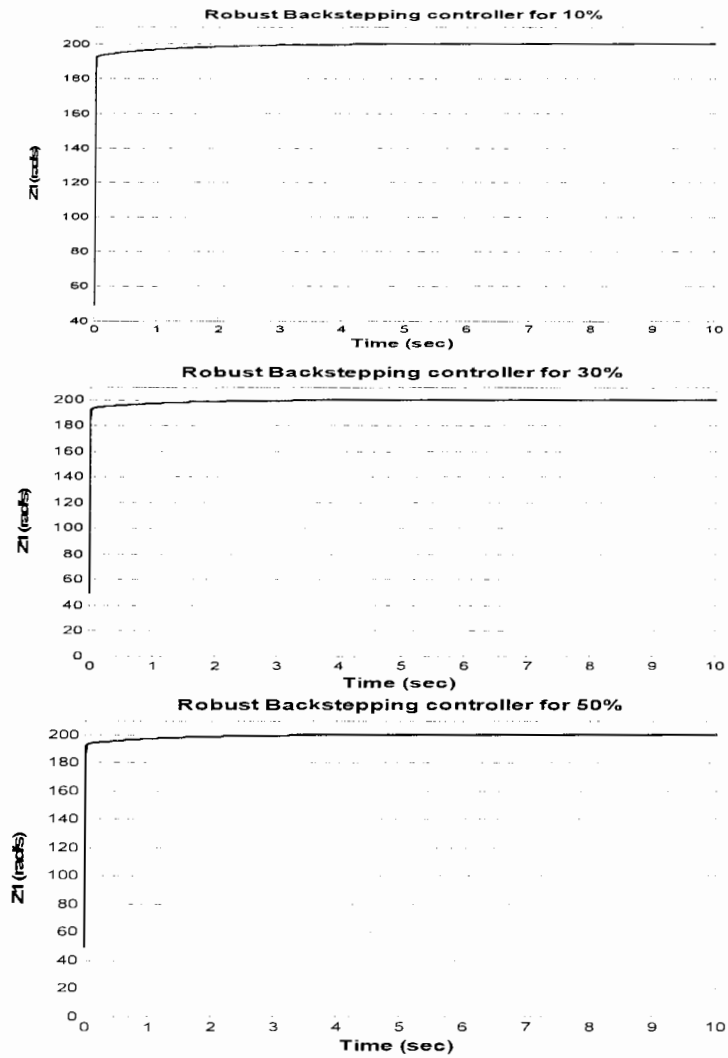
شکل (۲-۶) مشاهده می‌کنیم. براساس رابطه (۲-۶)، مقدار تعادل برای سه متغیر حالت بصورت زیر

می‌باشد:

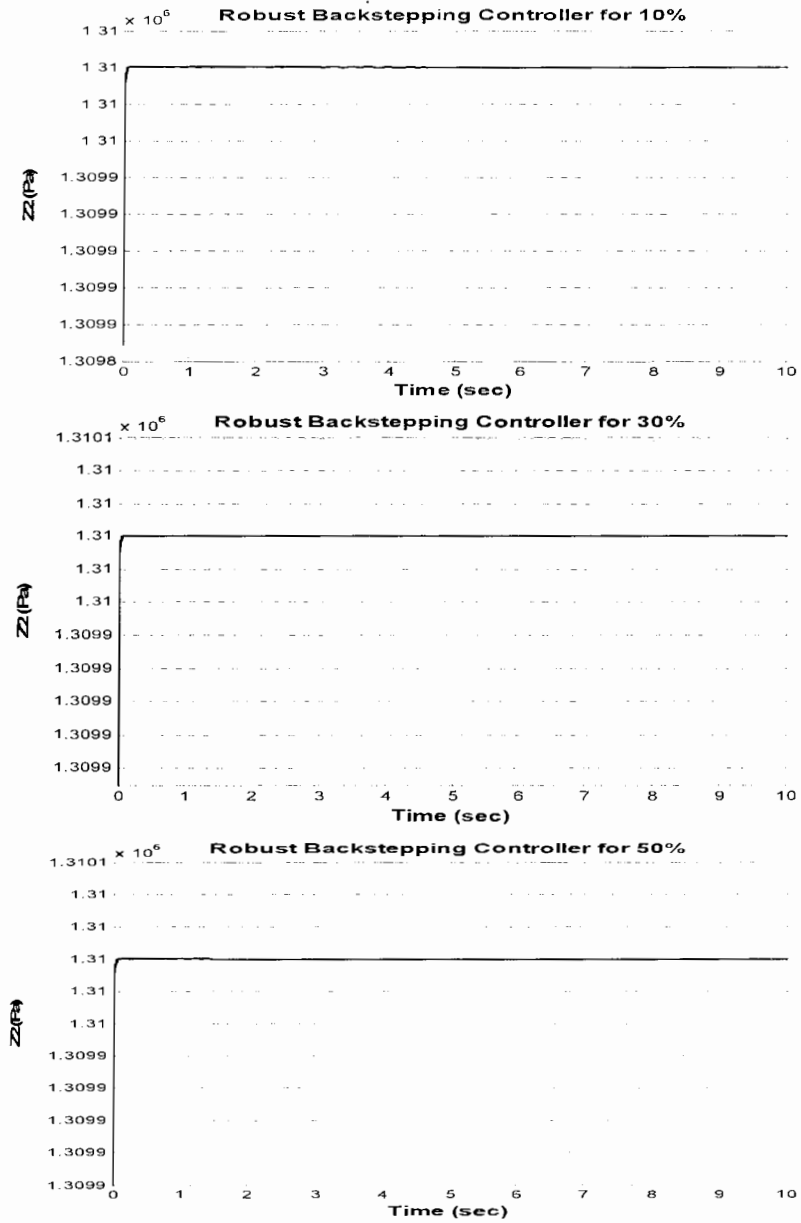
$$z_{1,N} = 200 \text{ rad/s}$$

$$z_{2,N} = 1.3164 \times 10^6 \text{ Pa}$$

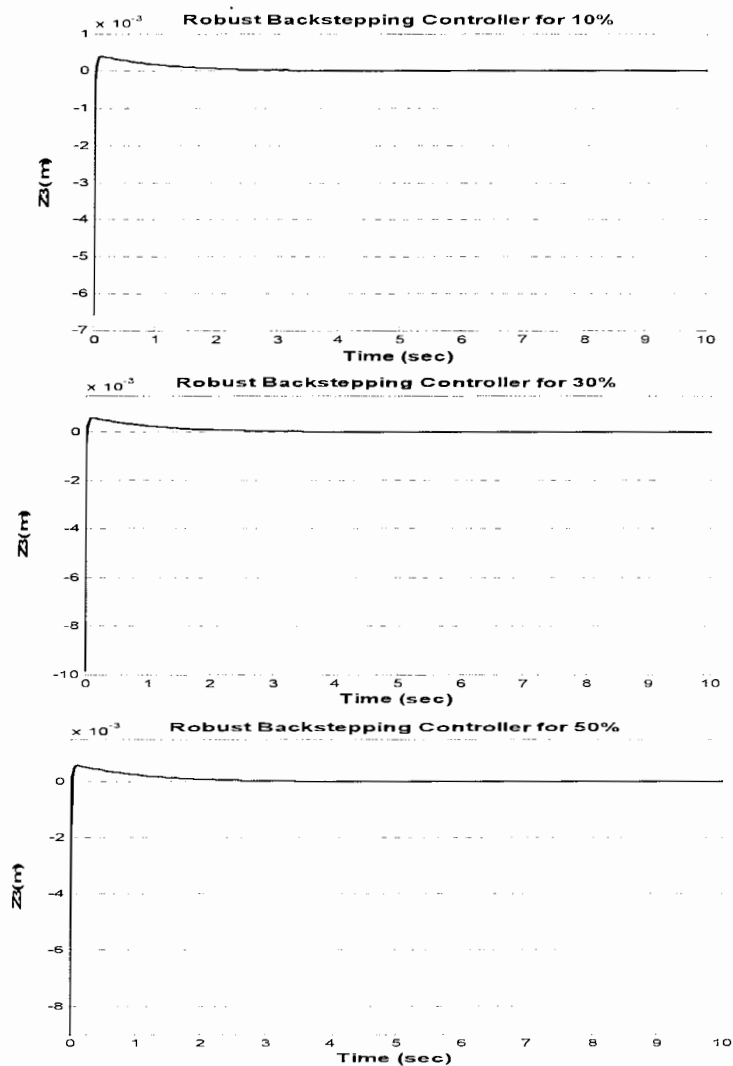
$$z_{3,N} = 0.997 \times 10^{-4} \text{ m}$$



شکل (۶-۲-۱): متغیر حالت  $x_1$ .

شکل (۶-۲-۲): متغیر حالت  $x_2$



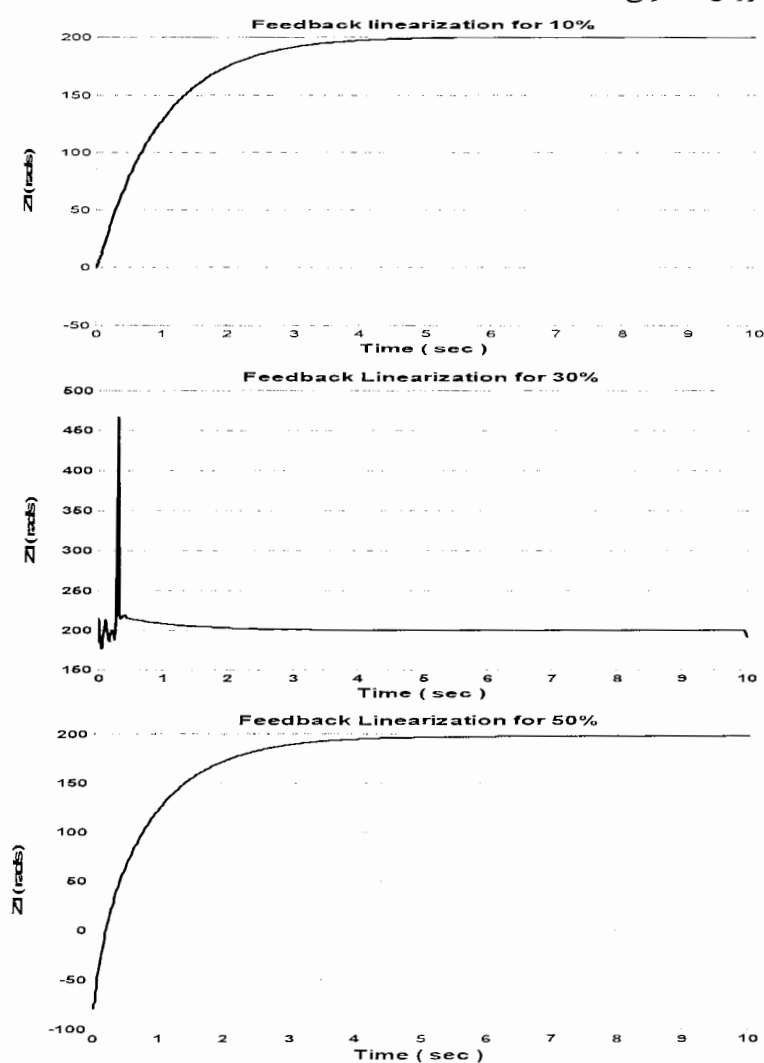
شکل (۶-۳): متغیر حالت  $x_3$ 

شکل (۶-۲): پاسخ زمانی متغیرهای حالت با اعمال کنترل کننده پساگام مقاوم

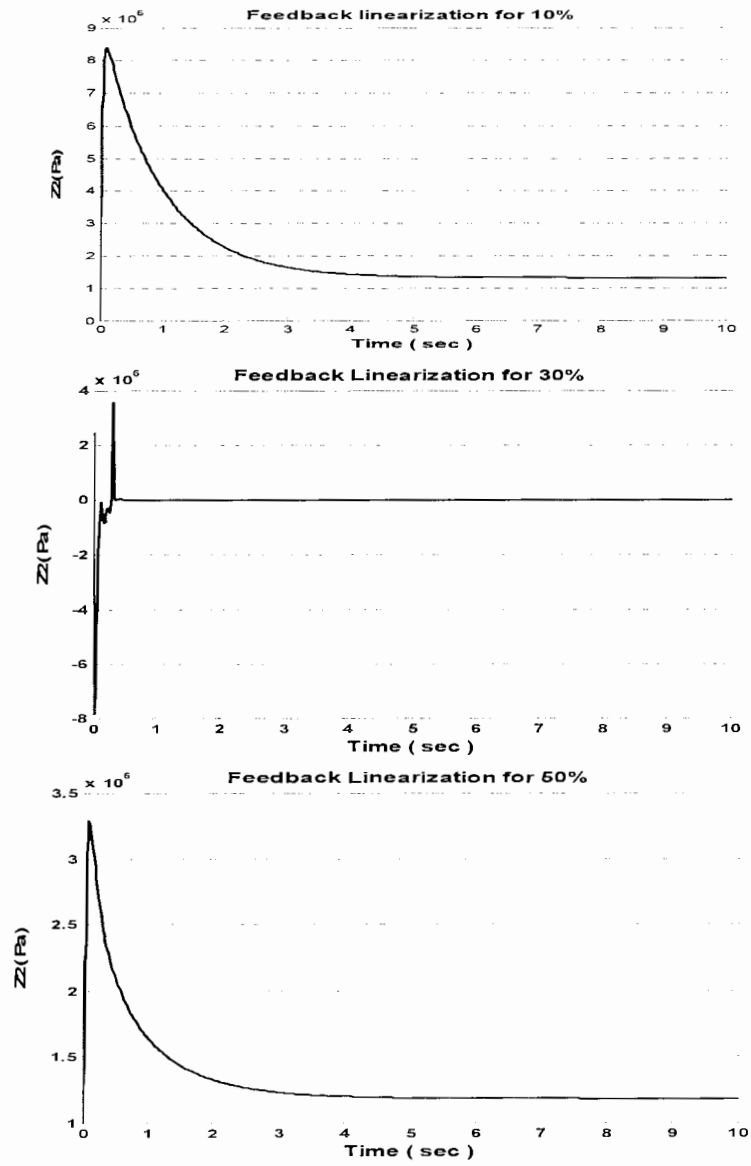
همچنانکه دیده می‌شود، هر سه متغیر حالت در زمانهای خیلی کوتاه و با پاسخ گذرای مناسب به

مقدار تعادل می‌رسند. همچنین عدم قطعیت‌های اضافه شده، روی متغیرهای حالت تأثیری ندارند.

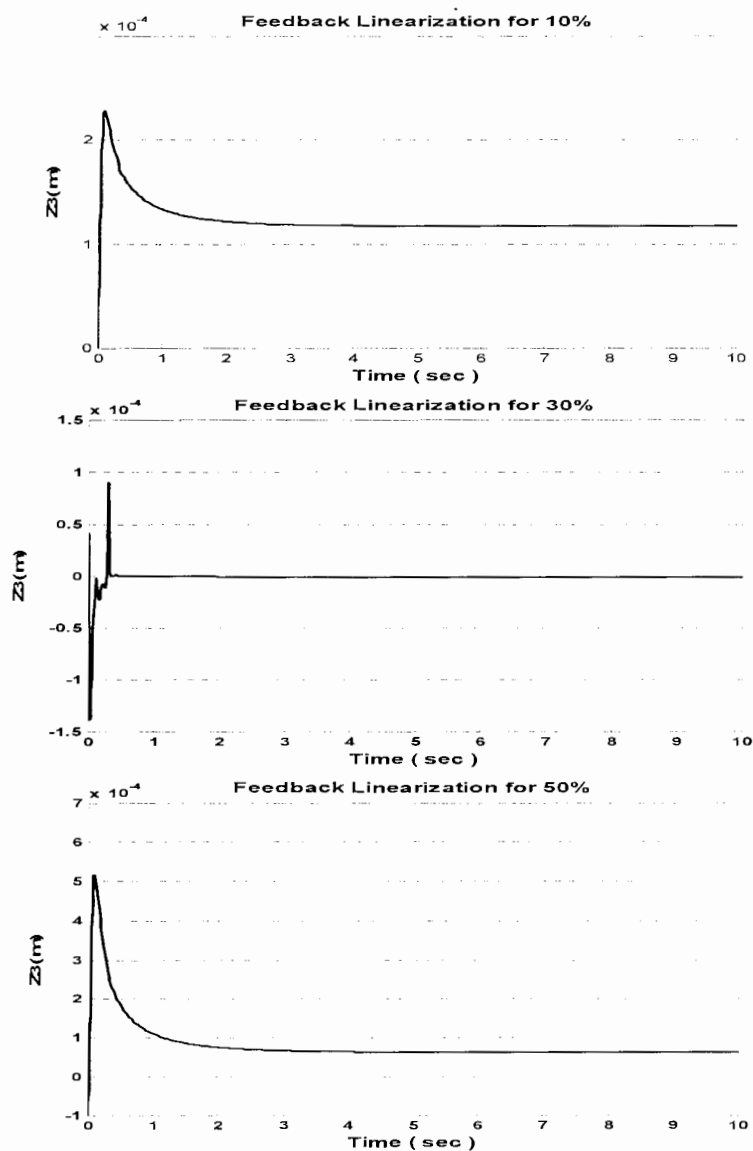
حال پاسخ سیستم را به توجه به روش خطی‌سازی فیدبکی بیان می‌کنیم [۳۷]. در این روش نیز عدم قطعیت‌های غیرساختاری بصورت ذکر شده را در نظر گرفته و متغیرهای حالت را در شکل (۳-۶) مشاهده می‌کنیم. البته مقایسه فقط از نظر پاسخ زمانی صورت می‌گیرد، زیرا روش خطی‌سازی فیدبکی از لحاظ مقاوم بودن روش مطلوبی نیست.



شکل (۳-۶): متغیر حالت  $x_1$



شکل (۶-۳-۲): متغیر حالت  $x_2$

شکل (۳-۳-۶): متغیر حالت  $x_3$ 

شکل (۳-۶): پاسخ زمانی متغیرهای حالت با اعمال کنترل کننده به روش خطی سازی فیدبکی

با مقایسه این روش و روش پسگام مقاوم، می توان نتیجه گرفت که روش پسگام مقاوم، از نظر پاسخ

زمانی می تواند خیلی بهتر از روش خطی سازی فیدبکی عمل کند.

نتیجه گیری

و

پیشنهادات

## ❖ نتایج :

در این پایان نامه، ابتدا برخی مفاهیم مورد نیاز را که برای درک مباحث لازم بود، ارائه شد، سپس اهداف و ضرورت پرداختن به کنترل مقاوم تشریح شد. در ادامه روش پسگام مقاوم به عنوان یک روش سیستماتیک برای کنترل مقاوم سیستمهای غیر خطی نامعین معرفی گردید و در نهایت دو سیستم فشارخون و سروسیستم سرعت الکتروهایدرولیکی به عنوان مطالعات موردی جهت اعمال این روش مورد بررسی قرار گرفتند و در قسمت نتایج و شبیه‌سازیها، با مقایسه این روش با روشهای پسگام و خطی‌سازی فیدبکی، کارایی روش پسگام مقاوم نشان داده شد.

این روش همانند همه روشهای دیگر کنترل غیرخطی، دارای مزایا و معایب مختلفی می‌باشد که بطور خلاصه به آنها اشاره می‌کنیم.

### • مزایای روش پسگام مقاوم :

از مزایای این روش می‌توان بطور خلاصه به موارد زیر اشاره کرد:

✓ در این روش می‌توان دسته مهمی از سیستمهای غیرخطی نامعین را که به فرم فیدبک صریح می‌باشند، کنترل نمود. شرط فیدبک صریح در مقایسه با شرط انطباق که در بازطراحی لیاپانوف کاربرد دارد، به مراتب مناسبتر می‌باشد.

✓ با استفاده از این روش، می‌توان برای سیستمهای غیرخطی نامعین، تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم (relf) و همچنین قانون کنترلی فیدبک حالت پایدارساز مقاوم را همزمان ایجاد نمود.

✓ روند طراحی به روش پسگام مقاوم، یک روند سیستماتیک و منظم می‌باشد که مطابق با سه گام طراحی ارائه شده می‌باشد.

✓ مقاوم بودن این روش براساس اثبات ریاضی صورت گرفته است. یعنی با توجه به شرط محدودیت عدم قطعیت و مثبت معین بودن تابع لیاپانوف، در یک فرآیند بازگشتی، منفی معین بودن مشتق تابع لیاپانوف اثبات شده است.

✓ نتایج شبیه‌سازیهای دو سیستم، کارآیی این روش را بخوبی نشان داده است.

#### • معایب روش پسگام مقاوم :

از معایب این روش، می‌توان گفت که :

✓ در این روش، مدل فضای حالت سیستم باید بطور کامل وجود داشته باشد. همچنین این روش، فقط برای سیستمهای غیرخطی نامعین که به فرم فیدبک صریح می‌باشند، قابل استفاده می‌باشد و همانند هر روش دیگر در تئوری کنترل غیرخطی، نمی‌تواند برای همه سیستمهای غیرخطی کاربرد داشته باشد.

✓ انجام عملیات جبری بصورت دستی، جهت پیدا کردن  $rclf$  و قانون کنترلی مقاوم، برای سیستمهای غیرخطی با مرتبه III بالاتر، خسته کننده و پیچیده خواهد شد.

### ❖ پیشنهادات :

با توجه به مشکلاتی که در طی انجام مرحل مختلف این پایان نامه با آن مواجه شدیم، برخی پیشنهادات جهت رفع این مشکلات ارائه می گردد :

✓ با توجه به حجم زیاد محاسبات جبری این روش برای سیستمهای مرتبه بالا، می توان برنامه کامپیوتری مدونی جهت رفع این مشکل نوشت.

✓ در ابتدای روند طراحی، تابع  $s_1$  را باید طوری در نظر گرفت که باعث افزایش حجم محاسبات نگردد. لذا، انتخاب مناسب  $s_1$  می تواند به کاهش عملیات جبری منجر شود.

✓ باید به این نکته توجه کرد که برخی از سیستمها را می توان با اعمال تغییر متغیرهای ساده، به فرم فیدبک صریح نوشت. بنابراین، تغییر متغیرهای مناسب می تواند وسعت استفاده از روش پسگام مقاوم را برای سیستمهای دیگر، افزایش داد.

✓ انتخاب عدم قطعیت های مناسب، زمینه لازم را جهت کاهش عملیات جبری فراهم می نماید.



## مراجع

- 
- [1]. Slotine Jean-Jaques E. and Li Weiping. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International Editions. Adivision of Simon & Schuster Englewood Cliffs New Jersey 07632, 1991.
- [2]. A. M. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor & Francis, 1992. English Translation of the Original Publication in Russian from 1892.
- [3]. J. Kurzweil, *On the inversion of lyapunov's second theorem on stability of motion*, Ann. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 24 (1956), pp. 19-77.
- [4]. J. L. Massera, *Contributions to stability theory*, *Annals of Mathematic*, 64 (1956), pp. 182-206.
- [5]. Z. Artstein, *Stabilization with relaxed controls*, *Nonlinear Anal.*, 7 (1983), pp. 1163-1173.
- [6]. E. D. Sontag, *A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability*, *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 21 (1983), pp. 462-471.
- [7]. Randy A. Freeman, Petar V. kokotovic, *Robust nonlinear control design state-space and lyapunov techniques*, *Systems & Control: Foundations & Applications*, Birkhauser, Boston. 1996.
- [8]. H. K. Khalil. *Nonlinear systems*, Macmillan. New York, 1992.

- 
- [9]. B. R Barmish, M. J. Corless, And G. Leitmann, *A new class of stabilizing controller for uncertain dynamical systems*, SIAM J. Contr. Optimiz., 21 (1983), pp. 246-255.
- [10]. M. J Corless and G. Leitmann, *Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems*, IEEE Trans. Automat. Contr., 26 (1981), pp. 1139-1144.
- [11]. S. Gutman, *Uncertain dynamical systems- Lyapunov min-max approach*, IEEE Trans. Automat. Contr., 24 (1979), pp. 437-443.
- [12]. G. Leitmann, *Guaranteed ultimate boundedness for a class of uncertain linear dynamical systems*, IEEE Trans. Automat. Contr., 23 (1978), pp. 1109-1110.
- [13]. B. R Barmish, And G. Leitmann, *On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching conditions*, IEEE Trans. Automat. Contr., 27 (1982), pp. 153-158.
- [14]. Y. H. Chen And G. Leitmann, *Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions*, Int. J. Contr., 45 (1987), pp. 1527-1542.
- [15]. J. S. Thorp and B. R. Barmish, *On guaranteed stability of uncertain linear systems via linear control*, J. Optimiz. Theory Appl., 35 (1981), pp. 559-579.
- [16]. K. Wei, *Quadratic stabilizability of linear systems with structural independent time-varying uncertainties*, IEEE Trans. Automat. Contr., 35 (1990), pp. 268-277.

- [17]. R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, *Backstepping design of robust controller for a class of nonlinear systems*, In Proceeding of the IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, Bordeaux, France, June 1992, pp. 307-312.
- [18]. M. J. Corless, *Robust stability analysis and controller design with quadratic Lyapunov functions*, in Variable Structure and Lyapunov Control, A. Zinober, ed., Springer-Verlag, Berlin 1993.
- [19]. \_\_\_\_, *Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties*, ASME J. Dynam. Syst. Meas. Contr., 101 (1979), pp. 212-216.
- [20]. H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Macmillan, New York, 1992.
- [21]. M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & sons, New York, 1989.
- [22]. \_\_\_\_, *Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems*, Automatica, 29 (1993), pp. 181-189.
- [۲۳]. جان وبستر، تجهیزات پزشکی، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۷۸.
- [24]. E. Fututani, M. Araki, et al, *An Automatic Control System of the Blood Pressure of Patients under Surgical Operation*, International journal of control. Automation and System. vol. 2. No. 1, March 2004.

- 
- [25]. L. C. Sheppard, *Computer control of the infusion of vasoactive drug*, Ann. Biomed. Eng., vol. 8, 1980, pp. 431-444.
- [26] B. Widrow, *Adaptive model control applied to realtime blood pressure regulation*, in Pattern Recognition and Machine Learning, K. S. Fu, Ed. New York:Plenum, 1971, pp. 310-324.
- [27]. J. M. Arnsparger, B. C. McInnis, J. R. Glover, and N. A. Normann, *Adaptive control of blood pressure*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-30, no. 3, 1983, pp. 168-176.
- [28]. A. J. Koivo, *Automatic continuous-time blood pressure control in dogs by means of hypotensive drug injection*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-27, no. 10, 1980, pp. 574-581.
- [29]. Y. Fukui and T. Masuzawa, *Development of fuzzy blood control system*, JJME (in Japanese), vol. 27, no. 2, 1989, pp. 19-25.
- [30]. E. Furutani, M. Araki, T. Sakamoto, and S. Maetani, *Blood pressure control during surgical operations*, IEEE Trans. On Biomed. Eng., vol. 42, no. 10, 1995, pp. 999-1006.

- [31]. Mohammad Hadad zarif, Goran Hasanifard, *Blood Pressure Control Using Robust Backstepping Method during Surgical Operation*, WSEAS Multiconference in bukarest, Octob. 2006. Submitted.
- [۳۲]. قره‌ویسی علی‌اکبر، حسنی فرد گوران، "طراحی سیستم کنترل فشار خون بیمار با استفاده از روش پسگام"، دوازدهمین کنفرانس مهندسی پزشکی ایران، تبریز، دانشگاه صنعتی سهند، آبان ۱۳۸۴.
- [33]. H. E. Merritt, *Hydraulic Control System*, New York John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- [34]. J. Watton, *Fluid Power System*, New York, Prentice Hall, 1989.
- [35]. B. Yan, F. Bu, J. Reedy, and G. T. C. Chiu, *Adaptive Robust Motion Control of Single Rod Hydraulic Actuators: Theory and Experiments*, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 5, no. 1, March 2000, pp. 79-91.
- [36]. A. G. Alkyne and R. Liu, *Systematic Control of a Class of Nonlinear Systems with Application to Electrohydraulic Cylinder Pressure Control*, IEEE Transactions on Control System Technology, vol. 8, no. 4, pp. 623-634, July 2000.
- [37]. Mihailo Jovanovic, *Nonlinear Control of an Electrohydraulic Velocity Servosystem*, Proceedings of the American Control Conference Anchorage, AK May 8-10, 2002.

- [38]. M. R. Jovanović, *Practical Tracking Automatic Control of Axial Piston Hydraulic Motors*, Master's thesis, University of Belgrade, 1998.

**Abstract:**

The important characteristic of each control algorithm is to provide and keep the stability when uncertainties are present. In robust nonlinear control, the control system is designed when uncertainties in the system exists. The usual tool for analyzing and designing nonlinear systems, is to use Lyapunov techniques. There is no general technique to design nonlinear control systems, but there exists set of different methods for special type of systems class.

Robust nonlinear control techniques has proven that in different control systems have been effective, we can point out one of these controllers which is called Robust Backstepping controller. In relation to robust stabilization, two different ideas raise that how to construct an robust control lyapunov function and robust controller for an uncertain nonlinear system?

In this dissertation, we introduce a Robust Backstepping technique as a systematic process which can control special type of class of uncertain nonlinear systems that are in the form of strict feedback. We present the performance of this method by applying on blood pressure system and Electrohydraulic Velocity Servosystem.