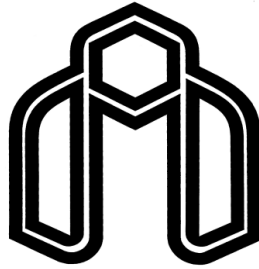


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي  
خَلَقَ الْمَوَدَّعَ الْوَدَّعَ  
وَالْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي  
خَلَقَ الْمَوَدَّعَ الْوَدَّعَ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی برق و رباتیک

گروه : کنترل

کنترل پسگام فازی سیستم ارابه وميله

دانشجو : آرام مظهر

استاد راهنما :

دکتر علی اکبرزاده کلات

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تابستان ۱۳۹۳



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

### فرم صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر ( عج ) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای

..... رشته ..... گرایش ..... تحت عنوان

..... که در تاریخ ..... با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است :

<input type="checkbox"/> قبول ( با درجه : ..... امتیاز ..... )	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input type="checkbox"/> مردود
--	------------------------------------	--------------------------------

۱- عالی ( ۱۹ - ۲۰ )

۲- بسیار خوب ( ۱۸/۹۹ - ۱۸ )

۳- خوب ( ۱۷/۹۹ - ۱۶ )

۴- قابل قبول ( ۱۵/۹۹ - ۱۴ )

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	a عضو هیأت داوران
			۱- استاد راهنما
			۲- استاد مشاور
			۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
			۴- استاد ممتحن
			۵- استاد ممتحن

تأیید رئیس دانشکده:

# تعهد نامه

اینجانب ..... دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ..... دانشکده .....  
..... دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه .....  
..... تحت راهنمایی ..... متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
  - در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
  - مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
  - کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
  - حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
  - در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

## مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد .

\* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

## تشکر و قدردانی:

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر علی اکبرزاده کلات که در طی تحصیل و انجام این پایان نامه زحمات فراوانی را بدون کوچکترین انتظاری برای بنده کشیده و با صبر فراوان من را در انجام اهداف پایان نامه یاری کردند، کمال تشکر را دارم. از اساتید محترم جناب آقای پروفیسور محمد مهدی فاتح و جناب آقای دکتر علی سلیمانی که دعوت داوری این پایان نامه را پذیرفتند نیز بسیار سپاسگزارم.

## تقدیم:

این اثر به پدر و مادر مهربانم تقدیم می‌شود

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار  
وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش  
نمایم.

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود  
پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و  
نشیب آموختند.

آموزگارانی که برایم زندگی؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند

حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان....

## چکیده:

یکی از روش‌های قدرتمند حوزه کنترل مقاوم، روش پسگام است. در این پایان‌نامه از این روش برای کنترل سیستم غیرخطی ارابه و میله استفاده شده است. از آنجایی که معادلات این سیستم به فرمی نیست که بتوان کنترل کننده پسگام مرسوم را برای آن طراحی کرد، لذا روشی جدید موسوم به پسگام دکوپله برای پایدار سازی آن به کار گرفته شده است. در این روش نیازی به تبدیل معادلات سیستم نیست و اغتشاش خارجی وارد شده به سیستم با شرط معلوم بودن کران بالای آن، به عنوان عدم قطعیت در نظر گرفته می‌شود در نتیجه کنترل کننده در برابر آن مقاوم سازی شده است. مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی همواره با عدم قطعیت همراه است. از آنجایی که طراحی کنترل کننده با این رویکرد، نیازمند اطلاع از مدل دینامیکی دقیق سیستم است، در گام بعدی از سیستم استنتاج فازی با مکانیزم تطبیق به منظور تقریب دینامیک‌های سیستم استفاده می‌شود. در هر دو مرحله، نتایج شبیه سازی با روش کنترل مود لغزشی دکوپله مقایسه شده است. در این پایان‌نامه پایداری سیستم با روش لیاپانوف بررسی می‌شود.

**کلمات کلیدی:** کنترل مقاوم، پسگام دکوپله، عدم قطعیت، سیستم استنتاج فازی

لیست مقالات استخراجی از پایان نامه:



## فهرست مطالب:

فصل ۱. مقدمه و پیشینه تحقیق.....	۱
۱-۱- مقدمه.....	۲
۱-۲- پیشینه تحقیق.....	۳
۱-۳- معادلات سیستم.....	۷
۱-۴- مدل سازی سیستم با استفاده از قانون دوم نیوتون.....	۸
۱-۵- معادلات اویلر لاگرانژ.....	۹
۱-۶- نمایش سیستم به فرم حالت.....	۱۱
۱-۷- مروری بر ساختار پایان نامه.....	۱۲
فصل ۲. کنترل پسگام سیستم ارابه و میله.....	۱۵
۲-۱- مقدمه.....	۱۶
۲-۲- روش دوم لیپانوف.....	۱۶
۲-۳- معرفی کنترل کننده پسگام.....	۱۸
۲-۴- روش پسگام برای سیستم ارابه و میله.....	۲۲
۲-۵- طراحی کنترل کننده پسگام دکوپله برای سیستم ارابه و میله.....	۲۷
۲-۶- مقاوم سازی کنترل کننده.....	۳۲
۲-۷- تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته.....	۳۴
۲-۸- نتایج شبیه سازی.....	۳۷
فصل ۳. کنترل پسگام فازی سیستم ارابه و میله.....	۴۱
۳-۱- مقدمه.....	۴۲

۴۴	۲-۳-کنترل کننده فازی تطبیقی.....
۴۵	۳-۳-طراحی قاعده تطبیق.....
۴۹	۳-۴-نتایج شبیه سازی.....
۵۷	فصل ۴. نتیجه گیری و پیشنهادات.....
۵۸	۴-۱-نتیجه گیری.....
۵۹	۴-۲-پیشنهادات.....
۶۰	مراجع.....

## فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) سیستم ارابه و میله..... ۳
- شکل (۱-۲) متغیر  $\alpha$  تعریف شده ..... ۲۷
- شکل (۲-۲) ترم ظاهر شده در مشتق تابع لیپانوف..... ۳۰
- شکل (۳-۲) بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته ..... ۳۴
- شکل (۴-۲) زاویه میله بر حسب رادیان..... ۳۸
- شکل (۵-۲) سرعت زاویه‌ای میله بر حسب رادیان بر ثانیه..... ۳۸
- شکل (۶-۲) موقعیت ارابه بر حسب متر..... ۳۹
- شکل (۷-۲) سرعت ارابه بر حسب متر بر ثانیه..... ۳۹
- شکل (۸-۲) قانون کنترل اعمالی به سیستم بر حسب نیوتون..... ۴۰
- شکل (۱-۳) بلوک دیاگرام کنترل کننده پسگام فازی دکوپله..... ۴۸
- شکل (۲-۳) زاویه میله بر حسب رادیان..... ۵۱
- شکل (۳-۳) سرعت زاویه‌ای میله بر حسب رادیان بر ثانیه..... ۵۱
- شکل (۴-۳) موقعیت ارابه بر حسب متر..... ۵۲
- شکل (۵-۳) سرعت ارابه بر حسب متر بر ثانیه..... ۵۲
- شکل (۶-۳) تابع غیر خطی  $f_1$  و تقریب فازی آن..... ۵۳
- شکل (۷-۳) تابع غیر خطی  $g_1$  و تقریب فازی آن..... ۵۳
- شکل (۸-۳) پارامترهای تطبیق سیستم  $f_1$ ..... ۵۴
- شکل (۹-۳) پارامترهای تطبیق سیستم  $g_1$ ..... ۵۴
- شکل (۱۰-۳) قانون کنترل اعمالی به سیستم بر حسب نیوتون..... ۵۵

## فهرست جداول

جدول (۱-۲) پارامترهای سیستم ارابه و میله..... ۳۷

جدول (۲-۲) پارامترهای کنترل کننده پسگام دکوپله..... ۳۷

جدول (۱-۳) پارامترهای سیستم ارابه و میله..... ۴۹

جدول (۲-۳) پارامترهای کنترل کننده پسگام فازی دکوپله..... ۴۹

## فصل ۱. مقدمه و پیشینه تحقیق:

سیستم آونگ معکوس<sup>۱</sup> یکی از معروفترین سیستم‌هایی است که در آزمایشگاه‌های کنترل، برای تحقیقات روی سیستم‌های غیرخطی و تکنیک‌های جدید کنترلی بر روی این سیستم‌ها به کار برده می‌شود. عمده کاربرد این سیستم زمانی است که پژوهشگران قصد طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های غیر خطی همانند موشک، و یا ساختمان‌های ضد زلزله را داشته باشند. هدف از کنترل این سیستم عمود نگه داشتن آونگ نسبت به سطح با اعمال مستقیم نیرو به آونگ می‌باشد. سیستم ارابه و میله از یک آونگ معکوس که به وسیله یک لولا<sup>۲</sup> بر روی یک ارابه سوار شده، ساخته شده است که آونگ می‌تواند به وسیله لولای نصب شده روی ارابه در جهت افقی نوسان کند. از آنجایی که آونگ به وسیله لولا به ارابه متصل شده است، بنابراین در سیستم ارابه و میله نیرو یا قانون کنترل به صورت مستقیم به آونگ یا همان میله متصل شده به ارابه وارد نمی‌شود بلکه برای کنترل این سیستم قانون کنترل به صورت نیرو به ارابه وارد می‌شود تا با حرکت افقی ارابه، میله سوار شده روی آن کنترل شود. بنابراین هدف از کنترل سیستم ارابه و میله عمود نگه داشتن میله نسبت به سطح، با اعمال نیرو به ارابه و حرکت ارابه در راستای افق، می‌باشد. از آنجایی که در این سیستم قانون کنترل به صورت مستقیم به میله اعمال نمی‌شود، لذا بسیاری از روش‌های کنترلی که برای کنترل سیستم‌های ناپایدار مکانیکی همانند بازوهای ربات، که در آنها قانون کنترل مستقیم به بازو اعمال می‌شود، ارائه می‌شود را برای کنترل سیستم ارابه و میله نمی‌توان به کار برد. سیستم ارابه و میله به چند دلیل به عنوان یک سیستم محک برای سنجش میزان کارایی کنترل کننده‌های مختلف طراحی شده برای سیستم‌های غیرخطی، مورد توجه پژوهشگران حوزه کنترل قرار گرفته است. از جمله اینکه سیستم به شدت غیرخطی است و نقطه تعادل سیستم ناپایدار است و همچنین سیستم نامینیمم فاز است. و اضافه بر دلایل ذکر شده درجه

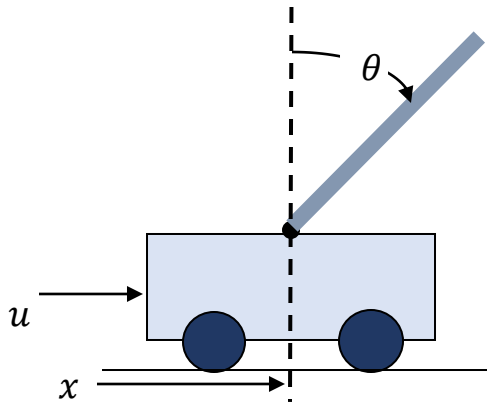
---

<sup>۱</sup> .invert pendulum

<sup>۲</sup> .pivot

نسبی سیستم، زمانی که انرژی میله در حال نوسان، به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته شود ثابت نیست. بدین معنی که سیستم در این حالت قابلیت خطی سازی ورودی خروجی را ندارد [۱].

در شکل زیر سیستم ارابه و میله نشان داده شده است.



شکل (۱-۱) سیستم ارابه و میله

## ۱-۲- پیشینه تحقیق:

از آنجایی که اکثر سیستم‌های فیزیکی ماهیتی غیرخطی دارند، بنابراین کنترل این سیستم‌ها نیازمند دانش عمیقی درباره کنترل غیرخطی و حوزه‌های مربوط به آن می‌باشد لذا تحقیق و پژوهش در این زمینه سابقه طولانی دارد. هر چند سیستم‌های غیر خطی را حول نقطه کار می‌توان به صورت خطی در نظر گرفت و سیستم را با روش‌های حوزه کنترل خطی مانند جایابی قطب<sup>۱</sup> کنترل کرد اما این روش‌ها فقط حول نقطه کار معتبر می‌باشند و برای عملکرد بهتر کنترل کننده، به ناچار باید از روش‌های کنترل غیرخطی در طراحی استفاده کرد. در مرجع [۱] معادلات سیستم را با قوانین نیوتون و معادلات اویلر لاگرانژ به دست آورده و سپس کنترل پذیری معادلات خطی شده، مورد بررسی قرار گرفته شده است. پس از بررسی غیر فعال بودن سیستم<sup>۲</sup>، قانون کنترل اعمالی به سیستم با ارائه تابع لیاپانوف به دست

<sup>۱</sup>. pole placement  
<sup>۲</sup>. passivity

آمده است. در [۲] معادلات سیستم، حول نقطه کار خطی شده است و با روش جابجایی قطب، سیستم را کنترل کرده است. اکثر روش‌های ارائه شده در حوزه کنترل غیرخطی نیازمند مدل ریاضی سیستم می‌باشد هر چند روش‌هایی برای کنترل سیستم‌ها وجود دارد که وابسته به مدل ریاضی سیستم نمی‌باشد مانند کنترل کننده‌های فازی که در آن کنترل کننده بر پایه قواعد اگر آنگاه، سیستم را کنترل می‌کند. این روش‌ها در حوزه کاربردی عملکرد مناسبی دارند اما در حوزه تحقیقاتی، به دلیل اینکه پایداری سیستم حلقه بسته را نمی‌توان با روش لیاپانوف اثبات کرد، زیاد مورد توجه محققان قرار نمی‌گیرد. در [۳] از سیستم عصبی فازی برای کنترل این سیستم استفاده شده و پارامترهای کنترل کننده با استفاده از الگوریتم ژنتیک بهینه شده است. در [۴ و ۵] نیز روش‌هایی را برای کنترل سیستم ارباب و میله ارائه شده که وابسته به مدل سیستم نمی‌باشند، در [۴] از یک سیستم فازی نوع تاکاگی سوگنو کانگ<sup>۱</sup> برای کنترل سیستم استفاده شده است و پارامترهای کنترل کننده با الگوریتم ژنتیک بهینه شده است. همچنین روش‌هایی برای تقریب مدل سیستم غیرخطی، با سیستم فازی وجود دارد. در این روش‌ها به جای اینکه کنترل کننده را برای سیستم غیرخطی طراحی کنند، آن را برای مدل فازی تقریب زده شده طراحی می‌کنند اما معمولاً در اثبات پایداری خطای تقریب در نظر گرفته نمی‌شود و این یکی از مشکلات این روش‌ها است. در [۶] مدل غیرخطی سیستم ارباب و میله با استفاده از سیستم فازی تاکاگی سوگنو کانگ تقریب زده شده و سپس یک کنترل کننده برای مدل فازی سیستم طراحی شده است. روش‌های مبتنی بر مدل نیز مشکلات خاص خود را دارند از جمله اینکه نمی‌توان مدل ریاضی دقیقی از سیستم ارائه کرد و مدل سازی سیستم‌ها همواره با عدم قطعیت همراه است. و وجود این عدم قطعیت‌ها در مدل ریاضی سیستم، پژوهشگران را وادار به طراحی کنترل کننده در حوزه کنترل مقاوم یا کنترل تطبیقی و یا ترکیبی از این دو می‌کند. روش کنترل تطبیقی در مواجهه با عدم قطعیت‌های پارامتری عملکرد بسیار مناسبی را دارد اما در مواجهه با عدم قطعیت غیر پارامتری ناتوان است. در [۷] روش کنترل مقاوم پسگام با روش کنترل تطبیقی ترکیب شده است بدین صورت که سیستم به دو

---

1: takagi sogno kang



زیر سیستم تقسیم شده است و کنترل کننده پسگام تطبیقی زیر سیستم میله را کنترل می‌کند و برای کنترل زیر سیستم ارابه، قانون کنترل از یک جبران‌ساز خطی عبور می‌کند سپس به ارابه اعمال می‌شود. روش‌های کنترل مقاوم در مواجهه با عدم قطعیت پارامتری و غیر پارامتری با شرط در دسترس بودن کران عدم قطعیت‌ها عملکرد مناسبی را دارند. یکی از روش‌های کنترل مقاوم برای سیستم‌های غیر-خطی روش مود لغزشی<sup>۱</sup> است که در این روش یک سطح لغزش به طوری که از مبدأ مختصات عبور کند، تعریف می‌شود و سعی می‌شود که خطای ردگیری<sup>۲</sup> روی این مسیر قرار گیرد تا زمانی که خطا به صفر می‌رسد. در [۸] از روش مود لغزشی برای کنترل این سیستم استفاده شده است. ابتدا با در نظر گرفتن یک سطح لغزش مرتبه ۳، سیگنال کنترل را با استفاده از تابع لیاپانوف به دست آورده است و در ادامه با تغییر پارامترهای در نظر گرفته شده برای سطح لغزش و تعریف سطح لغزش جدید، کنترل کننده را برپایه سطح لغزش جدید طراحی کرده است. در طراحی کنترل کننده با این روش، طراح نیازمند اطلاعات از توابع غیر خطی موجود در مدل سیستم است به گونه‌ای که مدل سیستم معلوم در نظر گرفته شده و بر اساس آن کنترل کننده طراحی شده است و در این روش اثر اغتشاش خارجی بر سیستم در نظر گرفته نشده است. یکی دیگر از روش‌های کنترل مقاوم، روش پسگام است. عمده کاربرد این روش برای سیستم‌هایی است که به فرم فیدبک صریح<sup>۳</sup> یا فیدبک خالص<sup>۴</sup> باشند. در این روش در هر مرحله با استفاده از تابع لیاپانوف یک قانون کنترل برای یک سطر از معادلات به دست می‌آید و در مرحله آخر قانون کنترل نهایی برای سیستم به دست می‌آید. در [۹] معادلات سیستم با تکنیک‌های ریاضیاتی به فرم پیشخور صریح<sup>۵</sup> در آمده سپس با در نظر گرفتن قسمتی از توابع غیر خطی سیستم به عنوان عدم قطعیت، معادلات به فرم فیدبک صریح در آمده و سپس روش پسگام برای کنترل نقطه

---

1. sliding mode

2. tracking error

3. strict feed back

4. pure feed back

5. strict feed forward

تعادل سیستم به کار برده شده است. هر چند که روش‌های مود لغزشی و پسگام به تنهایی، می‌توانند در مواجهه با عدم قطعیت‌ها عملکرد مناسبی داشته باشند اما در این روش‌ها توابع غیر خطی موجود در مدل سیستم باید معلوم باشند. با معرفی سیستم‌های فازی و شبکه‌های عصبی، می‌توان از این سیستم-ها برای تقریب توابع نامعلوم استفاده کرد و کنترل‌کننده‌ها را بدون نیاز به معلوم بودن توابع غیر خطی طراحی کرد. لذا استفاده کردن از توابع غیر خطی تقریب زده شده با سیستم‌های فازی یا شبکه‌های عصبی، در قانون کنترل به جای توابع غیر خطی موجود در مدل، پیشرفت بزرگی در علم کنترل محسوب می‌شود. به طوری که نیاز طراح به دانش سیستمی، کم می‌شود و فقط نیاز به داشتن اطلاعات درباره مرتبه سیستم و فرم معادلات سیستم وجود دارد. یکی از روش‌های کنترل غیر خطی روش خطی سازی فیدبکی است که در این روش قانون کنترل تمامی ترم‌های مفید غیر خطی سیستم را حذف می‌کند [۱۰]. سپس یک معادله دینامیکی خطای پایدار، خطای ردگیری سیستم را به سمت صفر می‌برد. در [۱۱] ابتدا معادلات سیستم آونگ معکوس به فرم معادلات ربات در آمده و سپس از روش فازی تطبیقی برای کنترل سیستم استفاده شده است. در [۱۲] از روش عصبی تطبیقی برای کنترل این سیستم استفاده شده است. در این روش‌ها قانون کنترل با روش خطی سازی فیدبکی به دست آمده و سپس توابع غیر خطی مدل، در [۱۱] با سیستم فازی و در [۱۲] با شبکه‌های عصبی تقریب زده شده است و برای تنظیم پارامترهای سیستم‌های فازی و عصبی، مکانیزم تطبیق در نظر گرفته شده است. در [۱۳] قانون کنترل با روش پسگام برای سیستم آونگ معکوس به دست آمده و سپس توابع نامعلوم با روش فازی تطبیقی تقریب زده شده اند و خطای تقریب سیستم فازی، به عنوان عدم قطعیت در نظر گرفته شده است و برای غلبه بر حلقه فیدبک، از فیلتر پایین گذر استفاده شده است. از آنجایی که در این روش معادلات سیستم باید به فرم همراه باشند، این روش برای آونگ معکوس که جزیی از سیستم ارابه و میله است و معادلات آن به فرم همراه<sup>۱</sup> است، عملکرد بسیار خوبی را دارد اما برای سیستم ارابه و میله این روش را نمی‌توان تعمیم داد. هرچند در [۱۴] روشی برای تبدیل معادلات سیستم‌های غیر خطی

---

<sup>1</sup> canonical

به فرم همراه ارائه شده است اما بدون تبدیل معادلات سیستم به فرم همراه نیز می‌توان سیستم ارا به و میله را با روش‌هایی دیگر کنترل کرد. از جمله روشی که در [۱۵] مطرح شده است که در آن روش فازی مود لغزشی سویچینگ<sup>۱</sup> برای کنترل سیستم ارا به و میله استفاده شده است. در این روش سیستم به دو زیر سیستم ارا به، و میله تقسیم شده سپس برای هر کدام از زیر سیستم‌ها یک کنترل کننده فازی مود لغزشی طراحی شده است و در نهایت یک سیستم سویچینگ، عمل سویچینگ را بین این دو قانون کنترل انجام می‌دهد و یک قانون کنترل را برای سیستم فراهم می‌کند. از آنجایی که هر کدام از قوانین کنترل، از جنس نیرو بوده و ساخت یک سیستم که عمل سویچینگ را بین این دو قانون کنترل به صورت دقیق انجام دهد، بسیار سخت است و همچنین این بلوک اضافه شده به حلقه کنترل، باعث تولید نویز<sup>۲</sup> در سیستم حلقه بسته می‌شود لذا اجرای این روش به صورت عملی سخت است. در [۱۶ و ۱۷] یک روش موسوم به روش فازی مود لغزشی دکوپله برای کنترل سیستم معرفی شده است. در این روش ابتدا سیستم اصلی به عنوان دو زیر سیستم در نظر گرفته شده و سپس متغیرهای حالت زیر سیستم اول یعنی وضعیت و سرعت ارا به را به عنوان یک متغیر جدید در معادلات زیر سیستم دوم یعنی میله ظاهر کرده و سپس با تعریف سطح لغزش به گونه‌ای که سطح لغزش هم شامل متغیرهای حالت زیر سیستم اول و هم شامل متغیرهای حالت زیر سیستم دوم می‌شود، و ارائه تابع لیاپانوف برای این سطح لغزش، قانون کنترل اعمالی به سیستم را به دست آورده است. در [۱۷] سطح لغزش را به صورت متغیر با زمان تعریف کرده است.

### ۱-۳- معادلات سیستم:

در این قسمت معادلات ریاضی سیستم ارا به و میله شکل (۱-۱) را با استفاده از قانون دوم نیوتون و معادلات لاگرانژ ارائه می‌نماییم [۱]. پارامترهای سیستم استاندارد (بدون در نظر

---

<sup>1</sup> switching sliding mode

<sup>2</sup> noise

گرفتن اصطکاک چرخ های ارابه با سطح و لقی میله در محل اتصال به ارابه و سایر نیروهای تاثیرگذار بر سیستم) را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$M$ : جرم ارابه

$m$ : جرم میله

$g$ : ثابت گرانش زمین

$l$ : نصف طول میله

$I$ : اینرسی آونگ حول مرکز ثقل

$x$ : وضعیت ارابه در راستای افقی

$\theta$ : زاویه آونگ با خط عمود بر ارابه

$u$ : نیروی وارد به ارابه (ورودی سیستم)

#### ۱-۴- مدل سازی سیستم با استفاده از قانون دوم نیوتون:

مختصات میله به مرکزیت  $x_G, y_G$  به صورت زیر است.

$$x_G = x + l \sin(\theta) \quad (1-1)$$

$$y_G = l \cos(\theta) \quad (1-2)$$

حال با به کار بردن قانون دوم نیوتون در راستای  $x$  داریم:

$$\begin{aligned} u &= M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 x_G}{dt^2} \\ &= M \frac{d^2 x}{dt^2} + m(x + l \sin(\theta)) \\ &= M \ddot{x} + m(\ddot{x} + l \frac{d}{dt} \cos(\theta) \dot{\theta}) \\ &= M \ddot{x} + m \ddot{x} + ml(\cos(\theta) \ddot{\theta} - \sin(\theta) \dot{\theta}^2) \\ &= (M + m) \ddot{x} - ml(\sin(\theta)) \dot{\theta}^2 + ml(\cos(\theta)) \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (1-3)$$

حال قانون دوم نیوتون را برای میله در حال دوران می نویسیم:

$M_A$  حرکت زاویه‌ای میله ترکیبی از بخش‌هایی است که حول یک محور ثابت در حال دوران می‌باشند.

زمانی که میله حول مرکز جرم خود دوران می‌کند، حرکت زاویه‌ای آن به صورت  $I\dot{\theta}$  است.

اما از آنجایی که میله حول لولا دوران می‌کند لذا یک ترم دیگر به خاطر فاصله مرکز جرم با لولا اضافه

می‌شود و بنابراین حرکت زاویه‌ای میله، حول لولا به صورت  $(I + ml^2)\dot{\theta}$  است. همچنین حرکت

میله به خاطر دو نیرو است که به آن وارد می‌شود، نیروی گرانش زمین و همچنین نیرویی که از حرکت

ارابه به وجود می‌آید. نیروی گرانش به صورت  $mg\sin(\theta)$  و نیروی ناشی از حرکت ارابه که به میله

وارد می‌شود به صورت  $-m\ddot{x}l\cos(\theta)$  بیان می‌شود. بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان گفت که حرکت

زاویه‌ای میله حول لولا، برابر است با مجموع نیروهای وارده به میله بنابراین داریم:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} = -m\ddot{x}l\cos(\theta) + mg\sin(\theta) \quad (1-4)$$

سرانجام معادلات توصیف کننده سیستم به صورت (1-3) و (1-4) می‌باشد.

### ۱-۵- معادلات اویلر لاگرانژ:

ابتدا انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را که در محاسبه تابع لاگرانژ لازم می‌شود معرفی می‌کنیم.

انرژی جنبشی ارابه به صورت زیر است.

$$K_1 = \frac{M\dot{x}^2}{2} \quad (1-5)$$

و همچنین انرژی جنبشی میله به صورت زیر است.

$$K_2 = \frac{m\dot{x}_G^2}{2} + \frac{m\dot{y}_G^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} \quad (1-6)$$

که در آن

$$x_G = x + l\sin(\theta) \quad (1-7)$$

$$y_G = l\cos(\theta) \quad (1-8)$$

انرژی جنبشی کل سیستم به صورت زیر است.

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 \quad (1-9)$$

و همچنین انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت زیر است.

$$P = mgl(\cos(\theta) - 1) \quad (1-10)$$

حال تابع لاگرانژ سیستم به صورت زیر است.

$$L = K - P \quad (1-11)$$

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 - mgl(\cos(\theta) - 1)$$

حال معادلات حرکت با توجه به تابع لاگرانژ به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = \tau \quad (1-12)$$

که در آن  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$  متغیرهای کلی و  $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$  نیروی خارجی اعمالی به سیستم می باشد. متغیرهای سیستم ارا به و میله زاویه میله و وضعیت ارا به می باشد. یعنی:

$$q = [x, \theta]^T$$

بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos(\theta)$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml\dot{x} \cos(\theta) + (I + ml^2)\dot{\theta}$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = mgl \sin(\theta) - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin(\theta)$$

لذا با جایگذاری توابع فوق در معادلات لاگرانژ (1-12) باز به معادلات حرکتی (1-3) و (1-4) می رسیم،

بنابراین معادلات حرکتی سیستم ارابه و میله به صورت زیر خواهد بود.

$$u = (M + m)\ddot{x} - ml(\sin(\theta))\dot{\theta}^2 + ml(\cos(\theta))\ddot{\theta} \quad (1-13)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} = -m\ddot{x}l\cos(\theta) + mgl\sin(\theta) \quad (1-14)$$

با در نظر گرفتن معادلات (1-13) و (1-14) مشاهده می شود که این معادلات به صورت صریح نیستند،

لذا با تفکیک متغیرهای  $\ddot{\theta}$  و  $\ddot{x}$  در (1-13) و (1-14) و باز نویسی معادلات بر حسب آنها داریم [۱]:

$$\ddot{\theta} = \frac{-m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - ml u \cos(\theta) + (m+M) m g l \sin(\theta)}{(m+M)(I+ml^2) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \quad (1-15)$$

$$\ddot{x} = \frac{-m^2 l^2 g \cos(\theta) \sin(\theta) + (I+ml^2) ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + (I+ml^2) u}{(m+M)(I+ml^2) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \quad (1-16)$$

#### ۱-۶- نمایش سیستم به فرم حالت:

در این قسمت معادلات (1-5) و (1-6) را به فرم حالت نمایش می دهیم. لذا بردار حالت سیستم را به

صورت  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T$  در نظر می گیریم که در آن:

$\theta$ : زاویه آونگ با خط عمود

$\dot{\theta}$ : سرعت زاویه ای میله

$x$ : وضعیت ارابه

$\dot{x}$ : سرعت ارابه

لذا فرم معادلات سیستم به صورت زیر است.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1-17)$$

$$\dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u \quad (1-18)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (1-19)$$

$$\dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \quad (1-20)$$

که  $f_1(x_1, x_2)$  و  $f_2(x_1, x_2)$  و  $g_1(x_1, x_2)$  و  $g_2(x_1, x_2)$  توابع غیر خطی به صورت زیر هستند:

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{-m^2 l^2 x_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1) + (m+M) m g l \sin(x_1)}{(m+M)(I+m l^2) - m^2 l^2 \cos^2(x_1)} \quad (1-21)$$

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{m l \cos(x_1)}{(m+M)(I+m l^2) - m^2 l^2 \cos^2(x_1)} \quad (1-22)$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{-m^2 l^2 g \cos(x_1) \sin(x_1) + (I+m l^2) m l x_2^2 \sin(x_1)}{(m+M)(I+m l^2) - m^2 l^2 \cos^2(x_1)} \quad (1-23)$$

$$g_2(x_1, x_2) = \frac{(I+m l^2)}{(m+M)(I+m l^2) - m^2 l^2 \cos^2(x_1)} \quad (1-24)$$

## ۷-۱- مروری بر ساختار پایان نامه

فصل‌های دیگر این پایان نامه به ترتیب زیر تنظیم شده اند:

در فصل دوم ابتدا روش کنترل مقاوم پسگام معرفی می‌شود و از آنجایی که روش کنترل پسگام برای فرم‌هایی از معادلات سیستم ارائه می‌شود که سیستم ارابه و میله بدان فرم نیست، لذا در ادامه یک روش جدید بر پایه روش پسگام، موسوم به روش کنترل پسگام دکوپله برای یک کلاس از سیستم‌های غیرخطی مرتبه چهار، از جمله سیستم ارابه و میله ارائه می‌شود. در این قسمت اغتشاش خارجی وارده به سیستم را به عنوان عدم قطعیت غیر پارامتری در نظر می‌گیریم. در قسمت بعد نحوه عملکرد کنترل کننده طراحی شده را در پایدار سازی سیستم مورد نظر تحلیل و آنالیز می‌کنیم. سپس عملکرد کنترل کننده طراحی شده را بر روی سیستم ارابه و میله شبیه سازی می‌کنیم. از مزیت‌های این روش این است که بدون تبدیل معادلات سیستم به فرم همراه یا فرم فیدبک صریح، می‌توان کنترل کننده پسگام



را برای اکثر سیستم‌هایی که دارای معادلاتی به فرم معادلات سیستم ارابه و میله هستند طراحی کرد. از آنجایی که طراحی روش کنترل مقاوم پسگام دکوپله نیازمند در دسترس بودن معادلات دقیق سیستم است و با توجه به اینکه مدل سازی سیستم‌های فیزیکی همواره با خطای مدل سازی همراه است لذا در فصل سوم از سیستم‌های فازی به عنوان تقریب زنده‌های جامع استفاده می‌کنیم. در این فصل کنترل کننده طراحی شده در فصل دوم را به گونه ای توسعه می‌دهیم که طراحی کنترل کننده وابسته به در دسترس بودن توابع غیرخطی موجود در مدل نباشد و از دو سیستم فازی برای تقریب زدن آنها استفاده می‌کنیم و همچنین برای طراحی سیستم‌های فازی، پارامترهای سیستم‌های فازی (مراکز گروه-های فازی خروجی) را نامعلوم در نظر می‌گیریم و با مکانیزم تطبیق آنها را تنظیم می‌کنیم. در قسمت بعد کنترل کننده پسگام فازی دکوپله طراحی شده را بر روی سیستم ارابه و میله شبیه سازی می‌کنیم و سپس به نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات می‌پردازیم. همچنین در پیوست الف، معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول و روش حل آن ارائه می‌شود. از آنجایی که روش‌های کنترلی ارائه شده، بر مبنای نظریه لیاپانوف می‌باشد لذا در تمامی مراحل پایداری سیستم حلقه بسته اثبات می‌شود. شبیه سازی سیستم-های کنترلی با استفاده از نرم افزار متلب انجام می‌شود و نتایج شبیه سازی عملکرد مطلوب سیستم‌های کنترلی را نشان می‌دهد.



## فصل ۲ . کنترل پسگام سیستم ارا به و میله:

مهمترین ویژگی در بین سایر ویژگی‌های سیستم‌های کنترلی پایدار بودن آن است، زیرا سیستم ناپایدار بی‌فایده و خطرناک است. بنا به تعریف سیستمی پایدار خوانده می‌شود که شروع به فعالیت سیستم از موقعیتی نزدیک نقطه کار مطلوبش، منجر به باقی ماندن دائمی آن در اطراف نقطه کار شود. هر سیستم کنترلی خطی یا غیرخطی، یک مشکل پایداری دارد که باید به دقت بررسی شود. مفیدترین و معمولترین نظریه برای بررسی پایداری سیستم‌های کنترلی غیرخطی، نظریه‌ای است که در اواخر قرن ۱۹ میلادی توسط ریاضیدان روسی به نام الکساندر میخائیلوویچ لیاپانف<sup>۱</sup> مطرح شده است. لیاپانف دو روش غیر مستقیم (روش اول لیاپانوف) و روش مستقیم (روش دوم لیاپانوف) را برای تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی ارائه کرد [۱۸]. در روش اول معادلات سیستم حول نقطه کار خطی می‌شود و سپس پایداری آن بررسی می‌شود لذا بدیهی است که اعتبار این روش فقط حول نقطه کار است. از آنجایی که در روش دوم از خطی سازی استفاده نمی‌شود و حالت کلی تری نسبت به روش اول دارد، لذا در این پایان نامه تمرکز بر روی این روش شده است. در این قسمت به بیان این روش می‌پردازیم.

## ۲-۲- روش دوم لیاپانوف:

فلسفه اصلی روش دوم لیاپانوف، بر اساس این اصل نظریه مکانیک کلاسیک استوار است که سیستم‌های نوسانی بدون ورودی خارجی در صورتی پایدار هستند که مجموع انرژی آن‌ها، یا یک تابع اسکالر شبه انرژی (تابعی معین مثبت) به طور پیوسته کاهش یابد (یعنی مشتق انرژی سیستم بر حسب زمان، باید یک تابع معین منفی باشد) تا زمانی که به نقطه تعادل برسد. به عبارت دیگر روش دوم بر اساس این واقعیت بنا نهاده شده است که اگر سیستمی حالت تعادل پایدار مجانبی دارد، انرژی ذخیره شده در سیستم در داخل حوزه جذب با افزایش زمان کاهش یافته تا سرانجام به حداقل مقدار آن در نقطه تعادل

---

1. Alexander Mikhailovich Lyapunov

برسد. برای سیستم‌های صرفاً ریاضی، ویا سیستم‌های پیچیده واقعی راه ساده‌ای برای تعریف تابع انرژی وجود ندارد و برای رفع این مشکل، لیاپانوف ایده تابع انرژی تعمیم یافته را مطرح کرد که تابع انرژی فرضی است و به آن تابع لیاپانوف نیز گفته می‌شود. برای تعریف ریاضی روش دوم لیاپانوف، لازم است که مفهوم نقطه تعادل سیستم را بیان کنیم لذا در این قسمت مفهوم نقطه تعادل را برای سیستم‌های نامتغیر با زمان تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۱-** یک سیستم نامتغیر با زمان<sup>۱</sup> می‌تواند توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف شود که اگر تابع  $F$  نسبت به متغیرهای حالت  $X(t)$  غیر خطی و نسبت به ورودی  $u(t)$  خطی باشد، سیستم غیر خطی افاین<sup>۲</sup> نامتغیر با زمان معروف است.

$$\dot{X}(t) = F(X(t), u(t)) \quad (1-2)$$

نقطه تعادل  $X_e$  بردار ثابتی است که اگر  $X(t_0) = X_e$  و  $u(t) = 0$  باشد، پاسخ سیستم داده شده با معادله (۱-۲) برای کلیه  $X(t) = X_e$ ،  $t \geq t_0$  خواهد بود. هم‌چنین، از آنجایی که نقطه تعادل برداری ثابت است، لذا

$$\dot{X}_e(t) = 0 = F(X_e, 0) \quad (2-2)$$

نقاط تعادل، نشان دهنده پاسخ ثابت حالت ماندگار به معادله (۱-۲) است.

**قضیه ۱-** سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدأ پایدار مجانبی است، اگر تابع اسکالری همانند  $V(X)$  وجود داشته باشد که شرایط زیر را برآورده سازد:

۱-  $V(X)$  در محدوده حول مبدأ  $S$  پیوسته است و مشتقات جزئی آن نیز پیوسته هستند.

۲- همواره برای  $X \neq 0$  تابع  $V(X) > 0$  باشد.

1. Time-invariant

2. Affine

۳- در مبدأ داشته باشیم  $V(0) = 0$

۴- و همچنین  $\dot{V}(X) < 0$

شرایط ذکر شده از ۱-۳ به معنی معین مثبت بودن  $V(X)$  و شرط ۴ نیز به معنی معین منفی بودن  $\dot{V}(X)$  می باشد [۱۹]. هر چند پایداری سیستم، تعاریف گوناگونی دارد همانند پایداری حاشیه‌ای و پایداری  $BIBO$  اما تمرکز ما در این پایان نامه بر روی پایداری مجانبی می باشد.

هر چند که روش دوم لیاپانوف برای تحلیل پایداری سیستم‌ها، روشی بسیار کارآمد و قدرتمند است، اما یکی از مشکلات اساسی که این روش دارد این است که پیدا کردن و پیشنهاد دادن یک تابع شبه انرژی برای هر سیستمی، کار ساده‌ای نیست. روش کنترلی پسگام یکی از قدرتمندترین روش‌های حوزه کنترل مقاوم برای کنترل سیستم‌های غیرخطی است چون این روش یک ساختار منسجم و منظم را برای پیشنهاد تابع لیاپانوف در هر مرحله ارائه می کند و پیدا کردن تابع لیاپانوف را برای فرم‌های خاصی از سیستم‌های غیرخطی به کاری ساده تبدیل می کند.

### ۲-۳- معرفی کنترل کننده پسگام:

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (۳-۲)$$

$$\dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)x_3 \quad (۴-۲)$$

$$\dot{x}_3 = f_2(x_1, x_2, x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3)x_4 \quad (۵-۲)$$

$$\dot{x}_n = f_{n-1}(X) + g_{n-1}(X)u + d \quad |d| < D \quad (۶-۲)$$

که در آن  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  بردار حالت و  $f_i, g_i, g_{n-1}(X) \neq 0$  توابع غیر خطی برحسب متغیرهای حالت،  $d$  اغتشاش وارد شده به سیستم،  $D$  کران بالای اغتشاش که معلوم است و  $u$  ورودی کنترل سیستم است.

**مرحله اول:** حال معادله (۳-۲) را طوری بازنویسی می‌کنیم که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول پایدار، بر حسب  $x_1$  باشد. با انتخاب یک ثابت مثبت ( $c_1$ ) می‌توان معادله (۳-۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_1 x_1 + x_2 \quad (۷-۲)$$

حال یک متغیر جدید بر حسب حالت‌های  $x_1, x_2$  به صورت (۸-۲) تعریف می‌کنیم.

$$\varphi_1 = c_1 x_1 + x_2 \quad (۸-۲)$$

با بازنویسی (۷-۲) بر حسب متغیر تعریف شده به صورت (۹-۲) داریم:

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + \varphi_1 \quad (۹-۲)$$

حال تابع لیاپانوف را به صورت زیر، برای (۹-۲) پیشنهاد می‌دهیم:

$$v_1 = \frac{1}{2} \varphi_1^2 \quad (۱۰-۲)$$

مشتق تابع لیاپانوف (۱۰-۲) به صورت زیر است.

$$\dot{v}_1 = \varphi_1 \dot{\varphi}_1 = \varphi_1 (c_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2) \quad (۱۱-۲)$$

با جایگذاری روابط (۳-۲) و (۴-۲) به جای  $\dot{x}_1$  و  $\dot{x}_2$  در (۱۱-۲) داریم:

$$\dot{v}_1 = \varphi_1 (c_1 x_2 + f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2) x_3) \quad (۱۲-۲)$$

حال یک کنترل کننده مجازی<sup>۱</sup>، یعنی  $x_3$  را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم تا رابطه (۱۲-۲) یک تابع معین منفی باشد.

$$x_3 = \frac{1}{g_1(x_1, x_2)} (-c_1 x_2 - f_1(x_1, x_2) - c_2 \varphi_1) \quad (۱۳-۲)$$

که با جایگذاری (۱۳-۲) در (۱۲-۲) داریم:

$$\dot{v}_1 = -c_2 \varphi_1^2 \quad (۱۴-۲)$$

---

<sup>۱</sup> virtual controller

همانگونه که مشاهده می‌شود مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی در (۲-۱۰) با اعمال کنترل کننده مجازی (۲-۱۳) به صورت رابطه (۲-۱۴) در می‌آید که یک تابع معین منفی است.

**مرحله دوم:** حال با پیشنهاد تابع لیاپانوف دوم به صورت (۲-۱۵) و مشتق گیری از آن به صورت (۲-۱۶) داریم:

$$v_2 = \frac{1}{2} x_3^2 \quad (2-15)$$

$$\dot{v}_2 = x_3 \dot{x}_3 \quad (2-16)$$

حال با جایگذاری رابطه (۲-۵) به جای  $\dot{x}_3$  در (۲-۱۶) داریم:

$$\dot{v}_2 = x_3 (f_2(x_1, x_2, x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3)x_4) \quad (2-17)$$

همانند کاری که در مرحله اول انجام دادیم، در این مرحله نیز با پیشنهاد کنترل کننده مجازی  $x_4$  به صورت زیر داریم:

$$x_4 = \frac{1}{g_2(x_1, x_2, x_3)} (-c_3 x_3 - f_2(x_1, x_2, x_3)) \quad (2-18)$$

با اعمال و جایگذاری این کنترل کننده مجازی به رابطه (۲-۱۷) مشتق تابع لیاپانوف (۲-۱۵) به صورت زیر در می‌آید.

$$\dot{v}_2 = -c_3 x_3^2 \quad (2-19)$$

لازم به ذکر است که در رابطه (۲-۱۸) به جای  $x_3$  همان رابطه‌ای را که در (۲-۱۳) به دست آورده بودیم، جایگذاری می‌کنیم. و این مراحل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به معادله (۲-۶) برسیم و قانون کنترل کلی سیستم را به دست آوریم.

**مرحله 1 - n ام:** در این مرحله برای به دست آوردن قانون کنترل اعمالی به سیستم، تابع لیاپانوف را به صورت (۲-۲۰) پیشنهاد می‌دهیم و با محاسبه مشتق آن به صورت (۲-۲۱) داریم:

$$v_{n-1} = \frac{1}{2} x_n^2 \quad (2-20)$$

$$\dot{v}_{n-1} = x_n \dot{x}_n \quad (2-21)$$



حال با جایگذاری رابطه (۶-۲) به جای  $\dot{x}_n$  در (۲۱-۲) داریم:

$$\dot{v}_{n-1} = x_n(f_{n-1}(X) + g_{n-1}(X)u + d) \quad (۲۲-۲)$$

حال برای کنترل حالت‌ها و همچنین غلبه بر اغتشاش، کنترل کننده حقیقی<sup>۱</sup> را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم:

$$u = \frac{1}{g_{n-1}(X)}(-c_n x_n - f_{n-1}(X) - k \operatorname{sgn}(x_n)) \quad (۲۳-۲)$$

که به جای  $x_n$  همان مقداری را که در مرحله  $n - 1$  به دست آوردیم اعمال می‌کنیم، با اعمال این قانون کنترل، مشتق تابع لیاپانوف (۲۲-۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{n-1} &= -c_n x_n^2 - x_n(k \operatorname{sgn}(x_n) - d) \\ &= -c_n x_n^2 - k x_n \operatorname{sgn}(x_n) + x_n d \\ &\leq -c_n x_n^2 - |x_n|(k - |d|) \end{aligned} \quad (۲۴-۲)$$

$$\dot{v}_{n-1} \leq -c_n x_n^2 - |x_n|(k - |d|) \leq 0 \quad (۲۵-۲)$$

بدترین حالت زمانی است که اغتشاش وارد شده به سیستم حداکثر مقدار خود را داشته باشد یعنی  $d = D$  که در این حالت معادله (۲۶-۲) به صورت زیر می‌باشد.

$$\dot{v}_{n-1} \leq -c_n x_n^2 - |x_n|(k - D) \leq 0 \quad (۲۶-۲)$$

بدیهی است که با انتخاب  $k$  به صورت  $k \geq D$ ، معادله (۲۶-۲) معین منفی می‌شود.

روشی که در این قسمت ارائه شد، روش متعارف کنترل پسگام است که در [۲۰] با تغییراتی بسیار جزیی، معرفی شده است. حال از این روش، برای کنترل سیستم ارا به و میله استفاده می‌کنیم.

---

<sup>1</sup> actual controller

## ۴-۲- روش پسگام برای سیستم ارابه و میله:

در این قسمت روش طراحی کنترل کننده پسگام دکوپله را برای یک کلاس از سیستم های غیر خطی مرتبه چهار ارائه می دهیم. با توجه به اینکه معادلات حالت سیستم ارابه و میله که در قسمت (۱-۵) ارائه شد و همچنین از آنجایی بسیاری از سیستم های غیر خطی از جمله سیستم ارابه و میله و سیستم آونگ دوار<sup>۱</sup> دارای معادلاتی به فرم زیر هستند. لذا در این قسمت می پردازیم به طراحی کنترل کننده پسگام، برای سیستمهایی که به فرم فضای حالت (۱-۴) می باشند.

معادلات حالت بسیاری از سیستم های فیزیکی، از جمله سیستم ارابه و میله که در (۱-۴) تشریح شد به فرم زیر هستند.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (27-2)$$

$$\dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u + d_1 \quad |d_1| \leq D_1 \quad (28-2)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (29-2)$$

$$\dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u + d_2 \quad |d_2| \leq D_2 \quad (30-2)$$

از آنجایی که در سیستم های فیزیکی محدودیتی در انتخاب متغیر های حالت سیستم نداریم، متغیر های حالت سیستم می تواند متغیر های فیزیکی سیستم باشد و یا اینکه متغیر های صرفاً ریاضی باشد. بسیاری از سیستم های فیزیکی مرتبه چهار، دارای ساختاری به فرم (۱-۴) می باشند و فقط تعبیر فیزیکی متغیر های حالت آنها با هم تفاوت دارد مثلاً سیستم غیر خطی گوی و میله نیز دارای ساختار ریاضی به فرم معادلات حالت (۱-۴) می باشد، اما تعبیر متغیر های حالت آن بدین صورت است که  $x_1$  زاویه میله در راستای محور افق،  $x_2$  سرعت زاویه ای میله در راستای محور افق،  $x_3$  وضعیت گوی و  $x_4$  سرعت گوی و  $u$  ورودی کنترل سیستم می باشد. اما در سیستم ارابه و میله متغیر های حالت را به صورت  $x_1$

---

1 . Rotating Pendulum

زاویه میله،  $x_2$  سرعت زاویه‌ای میله،  $x_3$  وضعیت ارابه و  $x_4$  سرعت ارابه در نظر می‌گیریم و همچنین  $d_1$  را به عنوان اغتشاش خارجی وارده به میله و  $d_2$  را به عنوان اغتشاش وارده به ارابه، و  $u$  را به عنوان نیروی وارد بر ارابه در نظر می‌گیریم. هدف از کنترل این سیستم عمود نگه داشتن وضعیت میله نسبت به سطح ارابه با اعمال نیرو به ارابه است. اگر از روش کنترلی پسگام ذکر شده برای طراحی کنترل-کننده رگولاتوری سیستم استفاده کنیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا معادله (۲-۲۷) را به شکل (۲-۳۱) می‌نویسیم:

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_1 x_1 + x_2 \quad (۲-۳۱)$$

با تعریف یک متغیر جدید به صورت (۲-۳۲) داریم:

$$\varphi_1 = c_1 x_1 + x_2 \quad (۲-۳۲)$$

با بازنویسی معادله (۲-۳۱) بر حسب متغیر تعریف شده به صورت زیر داریم:

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + \varphi_1 \quad (۲-۳۳)$$

حال تابع لیاپانوف اول را به فرم (۲-۳۴) تعریف می‌کنیم:

$$v_1 = \frac{1}{2} \varphi_1^2 \quad (۲-۳۴)$$

با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف داریم:

$$\dot{v}_1 = \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \quad (۲-۳۵)$$

با محاسبه مشتق (۲-۳۲) و جایگذاری در (۲-۳۵) داریم:

$$\dot{v}_1 = \varphi_1 (c_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2) \quad (۲-۳۶)$$

حال با جایگذاری (۲-۲۷) به جای  $\dot{x}_1$  و همچنین (۲-۲۸) به جای  $\dot{x}_2$ ، معادله (۲-۳۶) به صورت زیر می‌شود.

$$\dot{v}_1 = \varphi_1 (c_1 x_2 + f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u + d_1) \quad (۲-۳۷)$$

حال قانون کنترل را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم تا رابطه (۲-۳۷) معین منفی شود.

$$u = \frac{1}{g_1} (-c_1 x_2 - f_1 - c_2 \varphi_1 - k_1 \operatorname{sgn}(\varphi_1)) \quad (38-2)$$

که با اعمال این قانون کنترل، رابطه (37-2) به صورت زیر می شود.

$$\dot{v}_1 = -c_2 \varphi_1^2 - \varphi_1 (k_1 \operatorname{sgn}(\varphi_1) - d_1) \quad (39-2)$$

$$\begin{aligned} &= -c_2 \varphi_1^2 - k_1 \varphi_1 \operatorname{sgn}(\varphi_1) + d_1 \varphi_1 \\ &\leq -c_2 \varphi_1^2 - |\varphi_1| (k_1 - |d_1|) \end{aligned} \quad (40-2)$$

لذا بدیهی است که با انتخاب  $k_1$  به صورت (41-2)، معادله (40-2) معین منفی می شود.

$$k_1 \geq D_1 \quad (41-2)$$

$$\dot{v}_1 \leq -c_2 \varphi_1^2 - |\varphi_1| (k_1 - |d_1|) \leq 0 \quad (42-2)$$

بدترین حالت زمانی است که اغتشاش خارجی وارد شده به میله حداکثر مقدار خود را داشته باشد

یعنی  $d_1 = D_1$  که در این حالت معادله (42-2) به صورت زیر می باشد.

$$\dot{v}_1 \leq -c_2 \varphi_1^2 - |\varphi_1| (k_1 - D_1) \leq 0 \quad (43-2)$$

همانطور که مشاهده می شود مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی در (44-2)، با اعمال سیگنال کنترل (2-)

(38) به صورت (43-2) در می آید که یک تابع معین منفی است.

حال همین روش را برای معادلات باقیمانده یعنی (29-2) و (30-2) به کار می بریم لذا همانند روشی

که ارائه شد ابتدا معادله (29-2) را به شکل (44-2) می نویسیم:

$$\dot{x}_3 = -c_3 x_3 + c_3 x_3 + x_4 \quad (44-2)$$

با تعریف یک متغیر جدید به صورت زیر داریم:

$$\varphi_2 = c_3 x_3 + x_4 \quad (45-2)$$

با بازنویسی معادله (44-2) بر حسب متغیر تعریف شده به صورت زیر داریم:

$$\dot{x}_3 = -c_3 x_3 + \varphi_2 \quad (46-2)$$

حال تابع لیپانوف دوم را به فرم (۴۷-۲) تعریف می کنیم:

$$v_2 = \frac{1}{2} \varphi_2^2 \quad (۴۷-۲)$$

با مشتق گیری از تابع لیپانوف داریم:

$$\dot{v}_2 = \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \quad (۴۸-۲)$$

با محاسبه مشتق (۴۵-۲) و جایگذاری در (۴۸-۲) داریم:

$$\dot{v}_2 = \varphi_2 (c_3 \dot{x}_3 + \dot{x}_4) \quad (۴۹-۲)$$

حال با جایگذاری (۲۹-۲) به جای  $\dot{x}_3$  و همچنین (۳۰-۲) به جای  $\dot{x}_4$  ، معادله (۴۹-۲) به صورت زیر می شود.

$$\dot{v}_2 = \varphi_2 (c_3 x_4 + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u + d_2) \quad (۵۰-۲)$$

حال قانون کنترل را به صورت زیر پیشنهاد می دهیم تا رابطه (۵۰-۲) معین منفی شود:

$$u = \frac{1}{g_2} (-c_3 x_4 - f_2 - c_4 \varphi_2 - k_2 \operatorname{sgn}(\varphi_2)) \quad (۵۱-۲)$$

که با اعمال این قانون کنترل، رابطه (۵۰-۲) به صورت زیر می شود:

$$\dot{v}_2 = -c_4 \varphi_2^2 - \varphi_2 (k_2 \operatorname{sgn}(\varphi_2) - d_2) \quad (۵۲-۲)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &= -c_4 \varphi_2^2 - k_2 \varphi_2 \operatorname{sgn}(\varphi_2) + d_2 \varphi_2 \\ \dot{v}_2 &\leq -c_4 \varphi_2^2 - |\varphi_2| (k_2 - |d_2|) \end{aligned} \quad (۵۳-۲)$$

لذا بدیهی است که با انتخاب  $k_2$  به صورت (۵۴-۲)، معادله (۵۳-۲) به صورت (۵۵-۲) می شود.

$$k_2 \geq D_2 \quad (۵۴-۲)$$

$$\dot{v}_2 \leq -c_4 \varphi_2^2 - |\varphi_2| (k_2 - |d_2|) \leq 0 \quad (۵۵-۲)$$

بدترین حالت زمانی است که اغتشاش خارجی وارد شده به ارا به حداکثر مقدار خود را داشته باشد

یعنی  $d_2 = D_2$  که در این حالت معادله (۵۵-۲) به صورت زیر می باشد.

$$\dot{v}_2 \leq -c_4 \varphi_2^2 - |\varphi_2|(k_2 - D_2) \leq 0 \quad (56-2)$$

همانطور که مشاهده می شود مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی در (2-47)، با اعمال سیگنال کنترل (2-51) به صورت (2-56) در می آید که یک تابع معین منفی است.

حال اگر از سیگنال کنترل (2-38) برای کنترل سیستم استفاده کنیم، فقط متغیرهای حالت  $x_1, x_2$  به سمت صفر خواهند رفت و همچنین اگر از (2-51) برای کنترل سیستم استفاده کنیم فقط متغیرهای حالت  $x_3, x_4$  به سمت صفر همگرا خواهند شد، و از طرفی نمی توان هر دو قانون کنترل را به سیستم اعمال کرد چون معادلات حالت سیستم به گونه ای است که سیستم فقط یک ورودی کنترل دارد که در هر دو معادله (2-28) و (2-30) ظاهر شده است. لذا روش پسگام متعارف که در [20] معرفی شده است و همچنین دیگر روش های کنترل پسگام نیز که در مراجع [13 و 14 و 20] معرفی شده است را نمی توان به صورت مستقیم برای این سیستم به کاربرد چرا که برای اعمال این روش ها، نیاز است که معادلات سیستم به فرم فیدبک صریح<sup>۱</sup> یا فیدبک خالص<sup>۲</sup> و یا به فرم همراه افاین (حالت خاصی از فرم فیدبک صریح) یا فرم همراه غیرافاین (حالت خاصی از فرم فیدبک خالص) باشند. در مرجع [9] روشی را ارائه کرده است که معادلات به فرم (1-4) را دکوپله (ورودی کنترل تفکیک شده) می کند و روش ارائه شده را هم برای سیستم ارا به و میله و هم برای سیستم آونگ دوار به کار برده است. با اعمال این روش معادلات سیستم ارا به و میله به فرم پیشخور صریح تبدیل می شود و تنها در صورتی که قسمتی از توابع غیرخطی موجود در مدل سیستم به عنوان عدم قطعیت در نظر گرفته شود، معادلات سیستم به فرم فیدبک صریح تبدیل می شود و می توان روش پسگام را روی آن اعمال کرد. هر چند با روشی که در [14] معرفی شده است می توان معادلات این سیستم را به فرم همراه تبدیل کرد، اما در این قسمت روشی را ارائه خواهیم کرد که نیازی به دکوپله کردن معادلات سیستم نباشد و به جای آن کنترل کننده دکوپله را با روش پسگام به منظور کنترل کردن سیستم، طراحی خواهیم کرد.

<sup>1</sup>. strict feed back

<sup>2</sup>. pure feed back

## ۲-۵- طراحی کنترل کننده پسگام دکوپله برای سیستم ارابه و میله:

روشی که در این قسمت ارائه خواهیم کرد، در ابتدا در مرجع [۱۶] معرفی شد و سپس در [۱۷] گسترش داده شد. هر چند در هردو مرجع، کنترل کننده بر مبنای روش مود لغزشی طراحی شده است اما می توان با روش پسگام نیز به نتیجه مشابهی دست یافت.

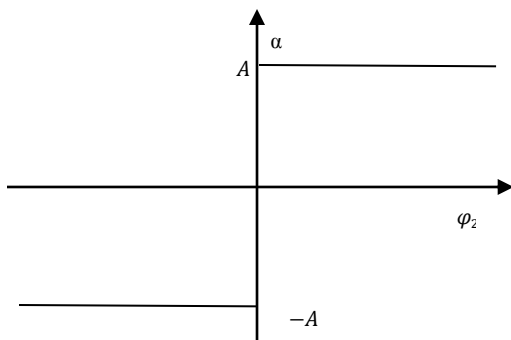
اساس این روش بر این مبنا قرار دارد که برای طراحی کنترل کننده در مرحله اول، سیستم را به دو زیر سیستم تقسیم می کنیم و سپس یک تابع برحسب اطلاعاتی از زیر سیستم اول، را در زیر سیستم دوم وارد می کنیم و سپس کنترل کننده پسگام را برای زیر سیستم دوم طراحی می کنیم. از آنجا که هدف اصلی کنترل میله یعنی متغیرهای حالت  $x_1, x_2$  می باشد و همچنین در معادلات (۲-۲۷) و (۲-۲۸)، متغیرهای  $x_3, x_4$  ظاهر نشده است، لذا یک تابع را برحسب متغیرهای حالت  $x_3, x_4$  تعریف می کنیم و در معادلات زیر سیستم دوم وارد می کنیم. به عبارتی دیگر می توان گفت که ارابه را به عنوان زیر سیستم اول در نظر می گیریم و سپس متغیرهای حالت آن را در زیر سیستم دوم یعنی معادلات میله ظاهر می کنیم. لذا در مرحله اول یک تابع محدود به صورت  $\alpha = h(x_3, x_4)$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\alpha = h(x_3, x_4) = \text{Asgn}(\varphi_2) \quad (۲-۵۷)$$

که در آن:

$$\varphi_2 = c_3 x_3 + x_4 \quad (۲-۵۸)$$

در شکل زیر  $\alpha$  نشان داده شده است.



۲۷ شکل (۲-۱) متغیر  $\alpha$  تعریف شده در (۲-۵۷)

و همچنین  $c_3, A$  ثابت‌های مثبت هستند. حال با وارد کردن  $\alpha$  در معادله (۲-۲۷) و بازنویسی

معادلات میله به صورت زیر داریم:

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_1 \alpha + c_1 x_1 - c_1 \alpha + x_2 \quad (۲-۵۹)$$

$$\dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u + d_1 \quad |d_1| \leq D_1 \quad (۲-۶۰)$$

حال یک متغیر جدید را بر حسب متغیرهای  $\alpha, x_1, x_2$  به صورت (۲-۶۱) تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_1 = c_1(x_1 - \alpha) + x_2 \quad (۲-۶۱)$$

و معادله (۲-۵۹) را بر حسب متغیر تعریف شده، بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_1 \alpha + \varphi_1 \quad (۲-۶۲)$$

حال تابع لیاپانوف را به صورت (۲-۶۳) پیشنهاد می‌دهیم:

$$v = \frac{1}{2} \varphi_1^2 \quad (۲-۶۳)$$

هدف از پیشنهاد تابع لیاپانوف این است که  $\varphi_1$  صفر شود، که با صفر شدن  $\varphi_1$  معادله (۲-۶۲) تبدیل

به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌شود، که متغیر حالت  $x_1$  به سمت  $\alpha$  همگرا می‌شود. در

[۲۱]، این نوع معادله دیفرانسیل به صورت (۲-۶۴) تعریف، و جواب عمومی آن به شکل (۲-۶۵) ارائه

شده است.

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t) \quad (۲-۶۴)$$

جواب عمومی این معادله را با روش عامل انتگرال ساز، می‌توان از فرمول زیر به دست آورد [۲۱].

$$x(t) = e^{-\int p(t)dt} (c + \int q(t) e^{\int p(t)dt} dt) \quad (۲-۶۵)$$

حال معادله (۲-۶۲) را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_1 \alpha + \varphi_1$$

که اگر  $\varphi_1 \rightarrow 0$  آنگاه می‌توان نوشت:

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_1 \alpha \quad (۲-۶۶)$$



با توجه به اینکه  $\alpha = \text{Asgn}(\varphi_2)$  تعریف شده است، لذا  $\alpha$  همواره به صورت زیر است.

$$\alpha = \begin{cases} -A & \text{if } \varphi_2 < 0 \\ 0 & \text{if } \varphi_2 = 0 \\ +A & \text{if } \varphi_2 > 0 \end{cases} \quad (۶۷-۲)$$

و از آنجایی که  $\alpha$  همواره برابر یکی از سه مقدار فوق است لذا آن را به صورت ثابت در نظر می‌گیریم  
لذا جواب عمومی (۶۶-۲) به صورت زیر خواهد بود.

$$x_1 = x_1(0)e^{-c_1 t} + \alpha \quad (۶۸-۲)$$

حال اگر  $\varphi_2 < 0$  باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$x_1 = x_1(0)e^{-c_1 t} - A \quad (۶۹-۲)$$

و اگر  $\varphi_2 > 0$  باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$x_1 = x_1(0)e^{-c_1 t} + A \quad (۷۰-۲)$$

و همچنین اگر  $\varphi_2 = 0$  باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$x_1 = x_1(0)e^{-c_1 t} \quad (۷۱-۲)$$

لذا نتیجه می‌گیریم که در صورت صفر شدن  $\varphi_1$ ، آنگاه  $x_1$  همواره به سمت  $\alpha$  همگرا می‌شود. حال با مشتق گرفتن از تابع لیاپانوف پیشنهاد شده در (۶۳-۲) داریم:

$$\dot{v} = \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \quad (۷۲-۲)$$

مشتق  $\varphi_1$  به صورت زیر است.

$$\dot{\varphi}_1 = (c_1 \dot{x}_1 - c_1 \dot{\alpha} + \dot{x}_2) \quad (۷۳-۲)$$

حال (۷۳-۲) را در (۷۲-۲) جایگذاری می‌کنیم:

$$\dot{v} = \varphi_1 (c_1 \dot{x}_1 - c_1 \dot{\alpha} + \dot{x}_2) \quad (۷۴-۲)$$

حال با جایگذاری (۲۷-۲) و (۲۸-۲) به جای  $\dot{x}_1$  و  $\dot{x}_2$ ، در (۶۶-۲) داریم:

$$\dot{v} = \varphi_1 (c_1 x_2 - c_1 \dot{\alpha} + f_1 + g_1 u + d_1) \quad (۷۵-۲)$$

در این قسمت قانون کنترل زیر را به منظور معین منفی شدن (۷۵-۲) پیشنهاد می‌کنیم:

$$u = \frac{1}{g_1} (-c_1 x_2 - f_1 - c_2 \varphi_1 - k \operatorname{sgn}(\varphi_1)) \quad \text{با فرض } g_1 \neq 0 \quad (۷۶-۲)$$

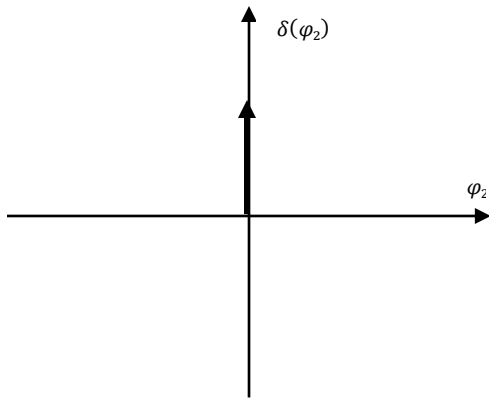
که با اعمال این قانون کنترل، رابطه (۷۶-۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{v} = -c_2 \varphi_1^2 - \varphi_1 (c_1 \dot{\alpha} + k \operatorname{sgn}(\varphi_1) - d_1) \quad (۷۷-۲)$$

حال  $c_1 \dot{\alpha}$  ظاهر شده در مشتق تابع لیاپانوف (۷۷-۲) به صورت زیر می‌شود.

$$c_1 \dot{\alpha} = 2 c_1 A \dot{\varphi}_2 \delta(\varphi_2) \quad (۷۸-۲)$$

که در آن  $\delta(\varphi_2)$  به صورت شکل زیر است:



شکل (۲-۲) ترم ظاهر شده در (۶۹-۲)

نکته ۱.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که ترم  $c_1 \dot{\alpha}$  ظاهر شده در (۷۷-۲) برابر با صفر است. لذا برای (۷۸-۲) می‌توان نوشت.

اگر:

$$\varphi_2 \neq 0 \quad (۷۹-۲)$$

آنگاه:

$$\delta(\varphi_2) = 0 \quad (۸۰-۲)$$

یعنی:

$$c_1 \dot{\alpha} = 0 \quad (۸۱-۲)$$

و اگر:

$$\varphi_2 = 0 \quad (۸۲-۲)$$

آنگاه  $\delta(\varphi_2)$  مقدار دارد، اما با توجه به تعریف متغیر  $\varphi_2$  در (۵۸-۲) و این نکته که  $\varphi_2 = 0$ ، تبدیل به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت زیر می‌شود:

$$\dot{x}_3 + c_3 x_3 = 0 \quad (۸۳-۲)$$

که جواب عمومی آن به صورت زیر است.

$$x_3 = x_3(0)e^{-c_3 t} \quad (۸۴-۲)$$

که این جواب عمومی، در معادله  $\dot{\varphi}_2 = 0$  یعنی معادله (۸۵-۲) نیز صدق می‌کند.

$$\ddot{x}_3 + c_3 \dot{x}_3 = 0 \quad (۸۵-۲)$$

لذا همواره در صورت برقراری رابطه (۸۲-۲) رابطه زیر برقرار است.

$$\dot{\varphi}_2 = 0 \quad (۸۶-۲)$$

یعنی همواره:

$$c_1 \dot{\alpha} = 0 \quad (۸۷-۲)$$

با توجه به نکته فوق می‌توانیم بگوییم که رابطه (۸۱-۲) که در مشتق تابع لیاپانوف (۷۷-۲) ظاهر شده است، در هر حال برابر صفر است حال در این مرحله کنترل کننده را در برابر اغتشاش خارجی وارده به سیستم، مقاوم سازی می‌کنیم.

## ۲-۶- مقاوم سازی کنترل کننده:

حال در این مرحله بدترین حالتی که برای سیستم رخ می‌دهد را در نظر می‌گیریم یعنی زمانی که اغتشاش وارده به سیستم، دارای مقدار حداکثر آن باشد یعنی:

$$D_1 = d_1 \quad (88-2)$$

لذا در این صورت رابطه (۶۹-۲) به صورت زیر می شود.

$$\dot{v} = -c_2 \varphi_1^2 - \varphi_1 (k \operatorname{sgn}(\varphi_1) - D_1) \quad (89-2)$$

$$= -c_2 \varphi_1^2 - k |\varphi_1| + \varphi_1 D_1$$

$$\leq -c_2 \varphi_1^2 - |\varphi_1| (k - D_1) \quad (90-2)$$

بدیهی است که با انتخاب  $k > D_1$  معادله (۸۲-۲) همواره معین منفی خواهد بود.

از (۹۰-۲) داریم:

$$\varphi_1 = c_1(x_1 - \alpha) + x_2 \quad (91-2)$$

با جایگذاری آن در قانون کنترل (۶۸-۲) و بازنویسی آن به صورت زیر داریم:

$$u = \frac{1}{g_1} [-(c_1 + c_2)x_2 - (c_1 c_2)x_1 - f_1] - \frac{c_2 c_1}{g_1} \alpha - \frac{k}{g_1} \operatorname{sgn}(\varphi_1) \quad (92-2)$$

حال اگر در نظر بگیریم:

$$M_1 \geq A \frac{c_2 c_1}{|g_1|} \quad (93-2)$$

و همچنین:

$$M_2 \geq \frac{k}{|g_1|} \quad (94-2)$$

و لذا قانون کنترل به صورت زیر می باشد.

$$u = \frac{1}{g_1} [-(c_1 + c_2)x_2 - (c_1 c_2)x_1 - f_1] - M_1 \operatorname{sgn}(\varphi_2) - M_2 \operatorname{sgn}(\varphi_1) \quad (95-2)$$

سیستم با اعمال این قانون کنترل پایدار می شود اما مشکلی که به وجود می آید، ایجاد پدیده چترینگ<sup>۱</sup>

یا لرزش در سیگنال کنترل به خاطر ناپیوستگی تابع  $\operatorname{sgn}$  در صفر می باشد. در حالت کلی برای اینکه

عملکرد کنترل کننده به طور مناسب باشد، بایستی لرزش حذف شود برای حل این مشکل می توان از

توابعی که عملکردی مشابه با تابع  $\operatorname{sgn}$  را دارند، استفاده کرد.

---

1 . chattering

در مراجع [۲۲و۴] توابعی را برای مقاوم سازی کنترل کننده معرفی کرده است که دارای عملکردی مشابه با تابع  $sgn$  می باشد، از جمله استفاده از توابع  $tanh$  و همچنین  $sat$ . با توجه به لم (۲-۱۹) که در [۲۳] معرفی شده است می توان با استفاده از توابع نام برده به جای تابع  $sgn$  تا حدودی دقت را قربانی حذف لرزش سیگنال کنترل کرد. در [۲۴] از تابع  $tanh$  برای جایگزینی به جای  $sgn$  استفاده کرده است. لذا در این قسمت برای حذف لرزش سیگنال، از تابع  $tanh$  به جای  $sgn$ ، استفاده می کنیم. یعنی  $\alpha$  را به صورت زیر تعریف می کنیم و همچنین ترم  $M_2sgn(\varphi_1)$  موجود در قانون کنترل را به صورت  $M_2tanh\left(\frac{\varphi_1}{b_1}\right)$  باز نویسی می کنیم.

$$\alpha = A \tanh\left(\frac{\varphi_2}{b_2}\right) \quad (۹۶-۲)$$

که در این صورت قانون کنترل طراحی شده در (۲-۸۷)، با جایگذاری (۲-۸۸)، در آن به صورت زیر می باشد.

$$u = \frac{1}{g_1} [-(c_1 + c_2)x_2 - (c_1c_2)x_1 - f_1] - M_1 \tanh\left(\frac{\varphi_2}{b_2}\right) - M_2 \tanh\left(\frac{\varphi_1}{b_1}\right) \quad (۹۷-۲)$$

حال در نظر می گیریم:

$$c_1c_2 = a_1 \quad (۹۸-۲)$$

$$c_1 + c_2 = a_2 \quad (۹۹-۲)$$

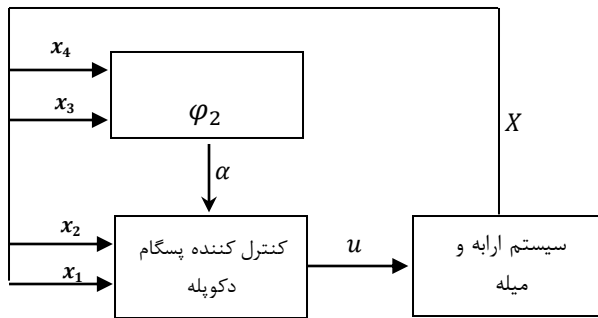
لذا شکل نهایی قانون کنترل پسگام دکوپله، به صورت زیر می باشد.

$$u = \frac{1}{g_1} [-a_2x_2 - a_1x_1 - f_1] - M_1 \tanh\left(\frac{\varphi_2}{b_2}\right) - M_2 \tanh\left(\frac{\varphi_1}{b_1}\right) \quad (۱۰۰-۲)$$

## ۲-۷- تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته:

از آنجایی که کنترل کننده (۲-۱۰۰) براساس روش کنترل مقاوم پسگام دکوپله، برای سیستم ارا به و میله طراحی شد، در این قسمت می خواهیم نحوه عملکرد این کنترل کننده را در پایدار سازی این سیستم بررسی کنیم.

لذا ابتدا در شکل زیر بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته را نشان می‌دهیم.



شکل (۳-۲) بلوک دیاگرام کنترل کننده پسگام دکوپله

می‌توان عملکرد این کنترل کننده را با توجه به مرجع [۱۶]، که ساختار مشابهی دارد و کنترل کننده پسگام دکوپله طراحی شده (۲-۹۷) با آن مقایسه شده است، بدین گونه بیان کرد. اگر  $\varphi_2 \neq 0$ ، یعنی  $\alpha \neq 0$  و از آنجایی که قانون کنترل (۲-۱۰۰) کاهش  $\varphi_2$  را تضمین می‌کند. بنابراین با کاهش  $\varphi_2$ ،  $\alpha$  نیز کاهش می‌یابد تا زمانی که  $\varphi_2$  به سمت صفر همگرا شود، در نتیجه  $\alpha$  نیز به سمت صفر همگرا خواهد شد، بنابراین  $x_1$  و  $\varphi_1$  نیز به سمت صفر همگرا خواهد شد.

هدف از پیشنهاد تابع لیاپانوف (۲-۶۳) این است که متغیر  $\varphi_1$  به سمت میل کند. که اگر این ترم به سمت صفر همگرا شود، معادله (۲-۶۲) به صورت یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول در می‌آید که در آن متغیر حالت  $x_1$  به صورت نمایی و با سرعت همگرایی  $c_1$  همانند (۲-۶۸) به سمت  $\alpha$  همگرا می‌شود.

حال در نظر داشته باشید که اگر متغیر  $\varphi_1$  با اعمال قانون کنترل استخراجی از لیاپانوف (۲-۶۳)، به سمت صفر همگرا شود آنگاه  $x_1$  به صورت (۲-۶۸) در می‌آید و بنابراین رابطه (۲-۶۱) با جایگذاری (۲-۶۸)، زمانی که  $\varphi_1$  به صفر شود به صورت زیر می‌شود.

$$x_2 = c_1 x_1(0) e^{-c_1 t} \quad (۱۰۱-۲)$$

حال با مشتق گیری از (۱۰۱-۲) می‌توان نوشت

$$\dot{x}_2 = -c_1^2 x_1(0) e^{-c_1 t} \quad (۱۰۲-۲)$$

با بررسی (۶۸-۲) این نتیجه را می‌گیریم که  $x_1$  به صورت نمایی به سمت  $\alpha$  همگرا می‌شود. با توجه به نکات ذکر شده و در نظر گرفتن (۱۰۱-۲) این نتیجه را می‌گیریم که  $x_2$  نیز به صورت نمایی به سمت صفر همگرا می‌شود و با در نظر گرفتن (۱۰۲-۲) می‌توان گفت  $\dot{x}_2$  نیز به صورت نمایی به سمت صفر، همگرا خواهد شد. با اعمال سیگنال کنترل (۱۰۰-۲) به سیستم، مدل حلقه بسته به صورت زیر است.

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_1 \alpha + \varphi_1 \quad (۱۰۳-۲)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 - a_1 x_1 - M_1 \tanh\left(\frac{\varphi_2}{b_2}\right) - M_2 \tanh\left(\frac{\varphi_1}{b_1}\right) \quad (۱۰۴-۲)$$

حال با توجه به نکات ذکر شده، و با جایگذاری مقدار متغیرها که در حالت ماندگار، به آن میل خواهند کرد، در (۱۰۴-۲) خواهیم داشت:

$$0 = -a_1 \alpha - M_1 \alpha \quad (۱۰۵-۲)$$

و از آنجایی که  $M_1$  و  $a_1$  ثابت‌های همواره مثبت هستند، لذا رابطه (۹۹-۲) تنها در صورتی برقرار می‌شود که  $\alpha = 0$  باشد. یعنی:

$$\alpha = A \tanh\left(\frac{\varphi_2}{b_2}\right) = 0 \quad (۱۰۶-۲)$$

در این معادله  $A$  و  $b_2$  ثابت‌های مثبت هستند که برای عملکرد بهتر  $\alpha$  در نظر گرفته می‌شوند و همچنین با توجه به خاصیت تابع  $\tanh$ ، رابطه (۱۰۵-۲) تنها در صورتی که آرگومان داخلی آن صفر باشد برقرار است. یعنی:

$$\varphi_2 = c_3 x_3 + x_4 = 0 \quad (۱۰۷-۲)$$

حال با جایگذاری رابطه (۲۹-۲) به جای  $x_4$ ، در (۱۰۱-۲) خواهیم داشت:

$$c_3 x_3 + \dot{x}_3 = 0 \quad (۱۰۸-۲)$$

که (۲-۱۰۲) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همگن، بر حسب  $x_3$  است که جواب عمومی آن به صورت (۲-۸۴) خواهد بود، لذا متغیرهای  $x_3$  و  $x_4$  نیز به سمت صفر همگرا می شود.



## ۸-۲- نتایج شبیه سازی:

جهت بررسی عملکرد کنترل کننده پسگام دکوپله، کنترل کننده طراحی شده را بر روی سیستم ارابه و میله شبیه سازی می‌کنیم. پارامترهای سیستم مورد نظر در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۱-۲) پارامترهای سیستم ارابه و میله

$I(kgm^2)$	$l(m)$	$m(kg)$	$M(kg)$	$g\left(\frac{m}{s^2}\right)$
0.008	0.4	0.1	1	9.8

همچنین پارامترهای کنترل کننده طراحی شده، در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۲-۲) پارامترهای کنترل کننده

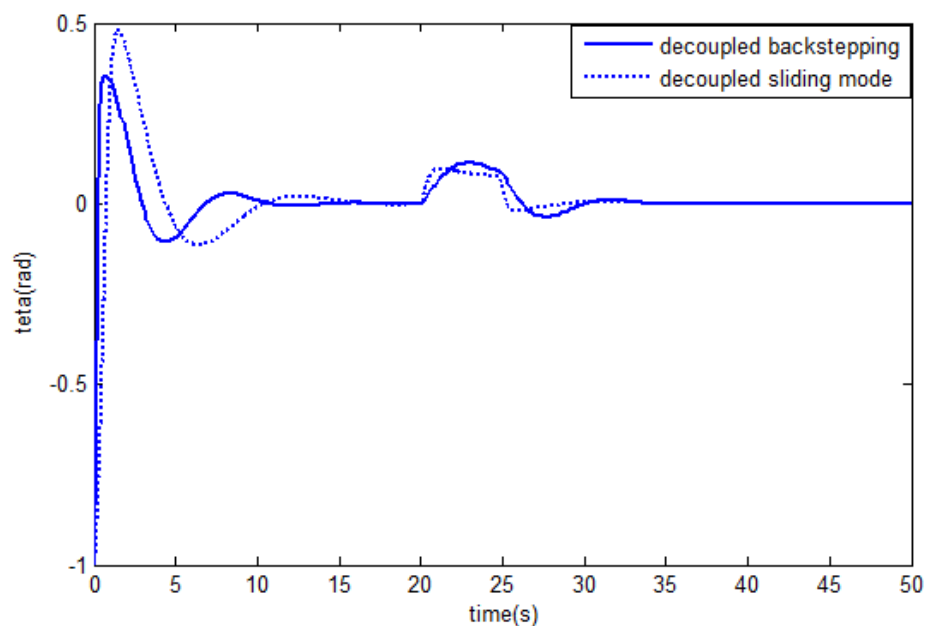
$c_1$	$c_2$	$c_3$	$b_1$	$b_2$	$A$
10	10	1	2	12	0.9425

زمان شبیه سازی را ۵۰ ثانیه، و همچنین گام شبیه سازی را ۰,۰۱ ثانیه در نظر می‌گیریم و اغتشاش خارجی وارده به سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$2 \quad \text{for } 20 \leq t < 25 \quad (۱۰۹-۲)$$

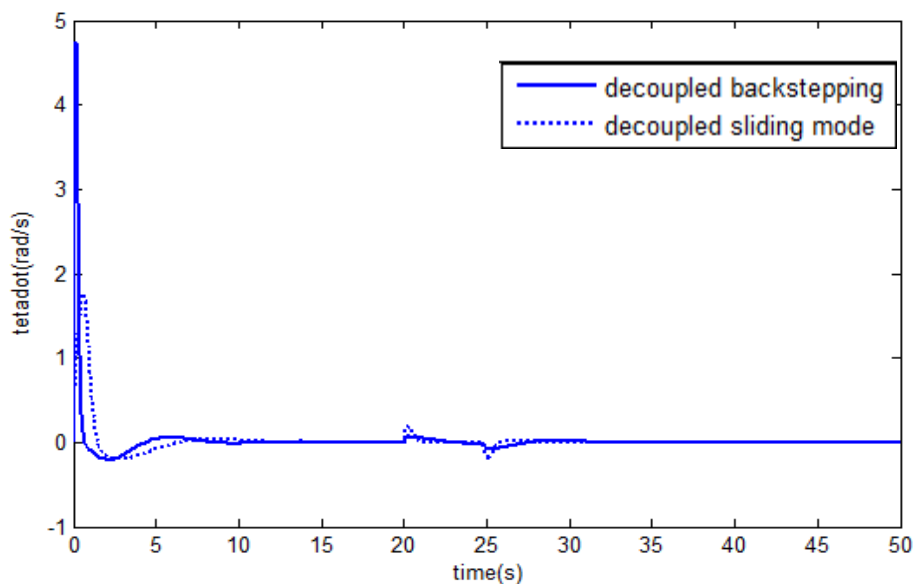
حالت‌های اولیه سیستم را به صورت  $x_1(0) = 1 \text{ rad}$  و  $x_2(0) = 0$  و  $x_3(0) = 0$  و  $x_4(0) = 0$  در نظر می‌گیریم.

در شکل (۴-۲) زاویه میله بر حسب رادیان، در شکل (۵-۲) سرعت زاویه ای میله بر حسب رادیان بر ثانیه، در شکل (۶-۲) وضعیت ارابه بر حسب متر، در شکل (۷-۲) سرعت ارابه بر حسب متر بر ثانیه، و در شکل (۸-۲) قانون کنترل اعمالی به سیستم بر حسب نیوتون نشان داده شده است.



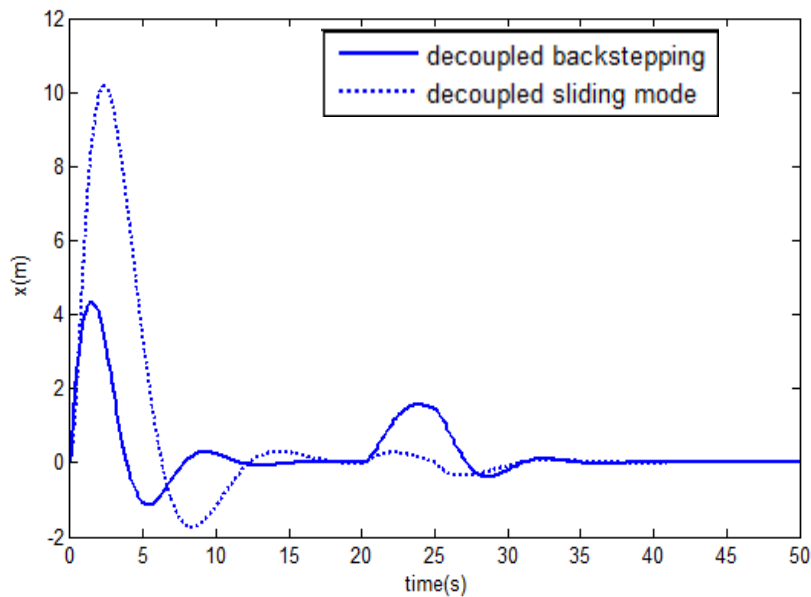
شکل (۴-۲) زاویه میله بر حسب رادیان

همانگونه که از شکل (۴-۲) مشاهده می شود زاویه میله، با اعمال کنترل کننده پسگام دکوپله، جهش کمتری نسبت به مود لغزشی دکوپله داشته است و از سرعت همگرایی بالاتری برخوردار است.

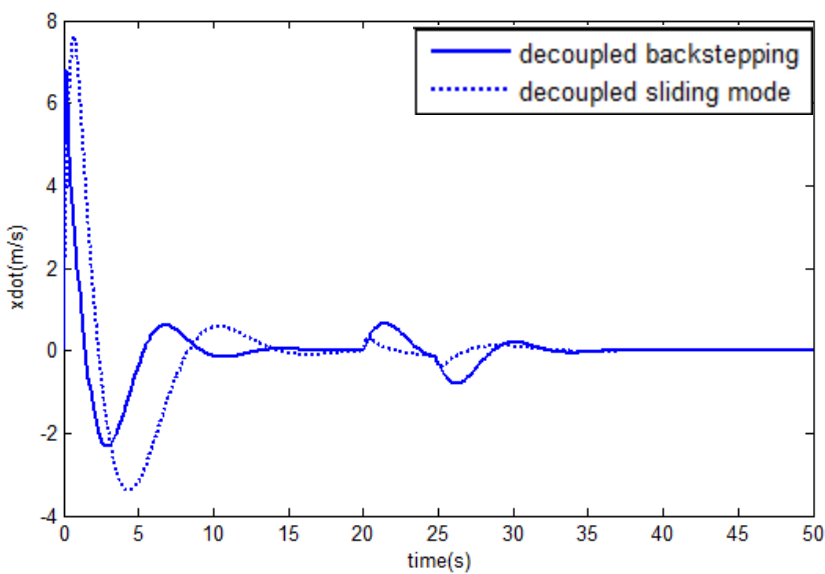


شکل (۵-۲) سرعت زاویه‌ای میله بر حسب رادیان بر ثانیه

با توجه زمان گذر و سرعت عمل بیشتر روش پسگام دکوپله نسبت به روش مود لغزشی دکوپله، مشاهده می شود که دامنه سرعت زاویه‌ای میله، در زمان‌های ابتدایی بزرگتر است.

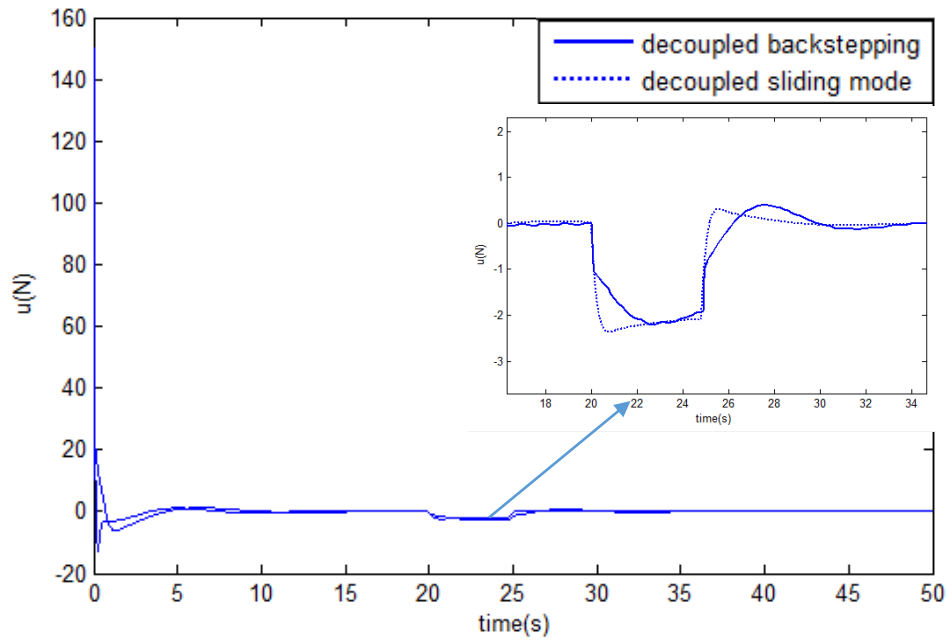


شکل (۶-۲) موقعیت ارابه بر حسب متر



شکل (۷-۲) سرعت ارابه بر حسب متر بر ثانیه

همانطور که در شکل (۶-۲) مشاهده می‌شود، ارابه برای رسیدن به مبدا، با اعمال روش مود لغزشی دکوپله در مقایسه با روش پسگام دکوپله جابه‌جایی بسیار زیادی داشته است و همچنین با توجه به شکل (۷-۲) سرعت آن نیز بالاتر است. با توجه به محدود بودن فضای کار ارابه مزیت روش پسگام دکوپله مشخص است.



شکل (۸-۲) نیروی اعمالی به ارباب بر حسب نیوتون

همانگونه که از شکل (۸-۲) مشخص است سیگنال کنترل پس از پایدار سازی سیستم، صفر شده است و روش پسگام دکوپله عملکرد نرم‌تری نسبت به مود لغزشی دکوپله در برابر اغتشاش خارجی وارده داشته است.

فصل سوم. کنترل پسگام فازی سیستم ارابه و میله

کلمه "فازی" در فرهنگ لغت آکسفورد بصورت "مبهم، نادقیق، در هم و نامشخص" تعریف شده است [۲۳]. با معرفی تئوری فازی توسط "زاده" در سال ۱۹۶۵ این تئوری، مورد توجه بسیاری از محققان حوزه‌های مختلف علوم از جمله (کنترل، پردازش سیگنال، سیستم‌های مخابراتی و ...) قرار گرفت. از جمله کاربردهای مهم این تئوری که در علم کنترل بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، در مدلسازی توابع غیرخطی نامعلوم موجود در سیستم‌های غیرخطی، به وسیله مجموعه قوانین فازی است. این مشخصه مهم باعث شد که سیستم‌های فازی به عنوان تقریب زنده‌های جامع مورد استفاده قرار گیرند. به عبارتی دیگر سیستم‌های فازی می‌توانند به عنوان مدل مجازی یک سیستم غیرخطی، مورد استفاده قرار گیرند [۲۵]. ساختار اصلی سیستم فازی از فازی‌ساز، موتور استنتاج فازی<sup>۱</sup> و غیر فازی‌ساز تشکیل شده است. فازی‌سازها بعنوان نگاشتی از یک نقطه  $X \in U \in R^n$  به یک مجموعه فازی  $A$  در  $U$  تعریف شده است. موتور استنتاج فازی، اصول منطق فازی را برای ترکیب قواعد اگر آنگاه فازی (که در پایگاه قواعد فازی ساخته می‌شوند) برای نگاشتی از مجموعه فازی  $A$  در  $U$  به مجموعه فازی  $B$  در  $V$  انجام می‌دهد. غیرفازی‌سازها بعنوان یک نگاشت از مجموعه فازی  $B$  در  $V$  (که خروجی موتور استنتاج فازی است) به یک نقطه قطعی  $Y \in V$  تعریف می‌گردد. برای هر کدام از این اجزاء، انواع مختلفی ارائه شده است. از جمله سه نوع فازی‌ساز (منفرد، گوسین و مثلثی) و سه نوع غیر فازی‌ساز (مرکز ثقل، میانگین مراکز و ماکزیمم) و پنج نوع موتور استنتاج فازی (ضرب، مینیمم، لوکاشیویکز، زاده و دنیس - رشر) معرفی شده است. لذا با ترکیب انواع موتورهای استنتاج، فازی‌سازها و غیر فازی‌سازها، می‌توان ۴۵ نوع سیستم فازی مختلف، طراحی کرد که بعضی از آنها بسیار کارساز و مفید و برخی دیگر بدون کاربرد است [۲۳]. در این پایان نامه از منطق فازی برای طراحی یک سیستم تقریب زنده، برای تقریب

---

1 . fuzzy inference engine

توابع غیر خطی موجود در مدل سیستم استفاده می‌کنیم. اگر  $X \in R^n$  بردار ورودی یک تابع غیر خطی و  $f \in R^n$  خروجی آن باشد، موتور استنتاج فازی از مجموعه قواعد اگر آنگاه فازی برای نگاشت بردار ورودی  $X \in R^n$  به بردار خروجی  $f \in R^n$  استفاده می‌کند. لذا  $i$  امین قانون اگر آنگاه فازی که در قسمت پایگاه قواعد ساخته می‌شود را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱-۳) \quad \text{اگر } x_1 A_1^i \text{ باشد و } x_2 A_2^i \text{ باشد و... و } x_n A_n^i \text{ باشد آنگاه } f^i, \hat{f} \text{ است}$$

که  $i, n$  به ترتیب تعداد ورودی‌ها و تعداد قوانین سیستم فازی می‌باشند و همچنین  $A_n^i$  گروه فازی برای  $n$  امین ورودی در  $i$  امین قانون و  $f^i$  مرکز گروههای فازی خروجی در قانون  $i$  ام می‌باشد. حال اگر از فازی‌ساز منفرد، موتور استنتاج ضرب و غیر فازی‌ساز میانگین مراکز، در طراحی سیستم فازی استفاده کنیم، سیستم فازی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود [۲۶].

$$(۲-۳) \quad f(X) = \frac{\sum_{i=1}^m f^i(\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j))}{\sum_{i=1}^m (\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j))}$$

که در این سیستم تعداد  $n$  ورودی‌ها و  $m$  تعداد قوانین و  $\mu_{A_j^i}$  درجه تعلق  $x_j$  به  $A_j^i$  می‌باشد. و اگر  $\xi(X)$  را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$(۳-۳) \quad \xi(X) = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j)}{\sum_{j=1}^m (\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j))}$$

و آن را به صورت یک بردار، به صورت زیر بنویسیم:

$$(۴-۳) \quad \xi(X) = [\xi^1 \ \xi^2 \ \dots \ \xi^m]^T$$

همچنین اگر مراکز گروههای فازی خروجی را به صورت بردار زیر در نظر بگیریم:

$$(۵-۳) \quad \theta^T = [f^1 \ f^2 \ \dots \ f^m]$$

آنگاه می‌توان رابطه (۲-۳) را به صورت زیر نوشت:

$$f(X) = \theta^T \xi(X) \quad (6-3)$$

سیستم فازی (۶-۳) می‌تواند به عنوان یک سیستم تقریب زننده عمومی مورد استفاده قرار گیرد اما از آنجایی که انتخاب درست مراکز گروه‌های فازی خروجی (پارامترهای سیستم فازی) به معنی عملکرد درست سیستم فازی است لذا برای آموزش سیستم فازی (انتخاب درست مراکز گروه‌های فازی خروجی) روشهایی ارائه شده است از جمله روشهای هیوریستیک ساده، روشهای آموزش سیستم‌های فازی با استفاده از الگوریتم گرادیان نزولی و روش آموزش با استفاده از الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی که در تمامی آنها سیستم فازی، بر اساس زوج داده‌های ورودی - خروجی طراحی می‌شود یعنی سیستم به صورت یک جعبه سیاه<sup>۱</sup> در نظر گرفته می‌شود و یکدسته ورودی به سیستم اعمال می‌شود سپس سیستم فازی، از روی خروجی حاصل از این ورودی‌ها طراحی می‌شود. لازم به ذکر است که تمامی این روش‌ها هم به صورت روی خط<sup>۲</sup> و هم به صورت خارج خط<sup>۳</sup> قابل پیاده سازی است. اما از آنجا که اکثر روش‌های ذکر شده بر پایه نظریه لیاپانوف نمی‌باشند لذا برای اثبات پایداری سیستم، باید پس از طراحی کنترل کننده فازی و اعمال قانون کنترل به سیستم، پایداری سیستم حلقه بسته مورد بررسی قرار گیرد. اما یکی از روش‌هایی که می‌توان برای آموزش سیستم فازی (۶-۳) در نظر گرفت، در نظر گرفتن (۵-۳) به عنوان پارامترهای تطبیق است و از آنجایی که پارامترهای تطبیق سیستم کنترل بر اساس لیاپانوف به دست می‌آید لذا پایداری سیستم کنترل تضمین می‌شود.

### ۳-۲- کنترل کننده فازی تطبیقی:

در قسمت (۲-۸۹) قانون کنترل پایدار کننده را بر اساس روش کنترل مقاوم پسگام برای سیستم ارا به و میله به دست آوردیم اما در این قسمت توابع غیر خطی موجود در مدل سیستم که در قانون کنترل ظاهر می‌شوند یعنی  $(f_1(x_1, x_2), g_1(x_1, x_2))$  را نامعلوم فرض می‌کنیم و آنها را با سیستم فازی

<sup>۱</sup> · black box

<sup>۲</sup> · on line

<sup>۳</sup> · off line



تطبیقی تقریب می‌زنیم به طوری که پارامترهای سیستم فازی با استفاده از مکانیزم تطبیق محاسبه شوند. لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$f_1 = \widehat{f}_1 + \varepsilon_f = \widehat{\theta}_f^T \xi(x_1, x_2) + \varepsilon_f \quad (7-3)$$

و همچنین:

$$g_1 = \widehat{g}_1 + \varepsilon_g = \widehat{\theta}_g^T \eta(x_1, x_2) + \varepsilon_g \quad (8-3)$$

که در آن  $\varepsilon_f$  خطای تقریب سیستم فازی تقریب زننده تابع  $f_1$  و  $\varepsilon_g$  خطای تقریب سیستم فازی تقریب زننده تابع  $g_1$  می‌باشد. حال با جایگذاری توابع تقریب زده شده به جای توابع غیر خطی، در قانون کنترل (۸۹-۲) داریم:

$$u = \frac{1}{\widehat{g}_1} \left[ -(c_1 + c_2)x_2 - (c_1 c_2)x_1 - \widehat{f}_1 \right] - M_1 \alpha - M_2 \tanh\left(\frac{\varphi_1}{b_1}\right) \quad (9-3)$$

### ۳-۳- طراحی قاعده تطبیق:

برای طراحی قاعده تطبیق از نظریه لیپانوف استفاده می‌کنیم لذا ابتدا قانون کنترل (۹-۳) را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم:

$$u = u_f + u_c + u_r \quad (10-3)$$

که در آن:

$$u_f = \frac{1}{\widehat{g}_1} \left[ -a_2 x_2 - a_1 x_1 - \widehat{f}_1 \right] \quad (11-3)$$

و همچنین:

$$u_c = -M_1 \alpha \quad (12-3)$$

و همچنین:

$$u_r = -M_2 \tanh\left(\frac{\varphi_1}{b_1}\right) \quad (13-3)$$

معادلات زیر سیستم میله به شکل زیر می باشد.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (۱۴-۳)$$

$$\dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u \quad (۱۵-۳)$$

حال با اعمال (۱۱-۳) به (۱۵-۳) داریم:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (۱۶-۳)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 - a_1 x_1 + (\widehat{\theta}_f^T - \theta_f^T) \xi(x_1, x_2) + (\widehat{\theta}_g^T - \theta_g^T) \eta(x_1, x_2) u - \varepsilon \quad (۱۷-۳)$$

لازم به ذکر است که پارامترهای بهینه<sup>۱</sup> به صورت زیر انتخاب می شود.

$$\theta_f^* = \underset{\theta_f \in \Omega_f}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sup_{X \in R^n} |\widehat{f}_1(X|\theta_f) - f_1(X)| \right\} \quad (۱۸-۳)$$

$$\theta_g^* = \underset{\theta_g \in \Omega_g}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sup_{X \in R^n} |\widehat{g}_1(X|\theta_g) - g_1(X)| \right\} \quad (۱۹-۳)$$

و همچنین:

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g \quad (۲۰-۳)$$

حال می توانیم معادلات حلقه بسته زیر سیستم میله را به فرم ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\dot{X} = AX + BU - BW \quad (۲۱-۳)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad (۲۲-۳)$$

و:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (۲۳-۳)$$

و همچنین:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۲۴-۳)$$

---

<sup>۱</sup> optimum

و:

$$U = (\widehat{\theta}_f^T - \theta_f^T) \xi(x_1, x_2) + (\widehat{\theta}_g^T - \theta_g^T) \eta(x_1, x_2) u \quad (25-3)$$

و:

$$W = \varepsilon \quad (26-3)$$

حال برای پایدار کردن (21-3) تابع لیاپانوف را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم:

$$v = \frac{1}{2} X^T S X + \frac{1}{2\gamma_1} (\widehat{\theta}_f^T - \theta_f^T) (\widehat{\theta}_f - \theta_f) + \frac{1}{2\gamma_2} (\widehat{\theta}_g^T - \theta_g^T) (\widehat{\theta}_g - \theta_g) \quad (27-3)$$

که  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  اعداد مثبت دلخواه و همچنین  $S$  یک ماتریس معین مثبت است.

با مشتق گیری از تابع لیاپانوف داریم:

$$\dot{v} = \dot{X}^T S X + X^T S \dot{X} + \frac{1}{\gamma_1} \dot{\widehat{\theta}}_f^T (\widehat{\theta}_f - \theta_f) + \frac{1}{\gamma_2} \dot{\widehat{\theta}}_g^T (\widehat{\theta}_g - \theta_g) \quad (28-3)$$

حال با جایگذاری (21-3) در (28-3) و همچنین محاسبه  $S$  به صورت (29-3) مشتق تابع لیاپانوف به

صورت (30-3) خواهد شد.

$$A^T S + S A = -Q \quad (29-3)$$

که  $Q$  یک ماتریس معین مثبت  $n \times n$  می‌باشد.

$$\dot{v} = -X^T Q X + (\widehat{\theta}_f^T - \theta_f^T) \left[ X^T S B \xi + \frac{1}{\gamma_1} \dot{\widehat{\theta}}_f \right] + \quad (30-3)$$

$$(\widehat{\theta}_g^T - \theta_g^T) \left[ X^T S B \eta u + \frac{1}{\gamma_2} \dot{\widehat{\theta}}_g \right] - X^T S B \varepsilon$$

حال پارامترهای سیستم فازی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$\dot{\widehat{\theta}}_f = -\gamma_1 X^T S B \xi(x_1, x_2) \quad (31-3)$$

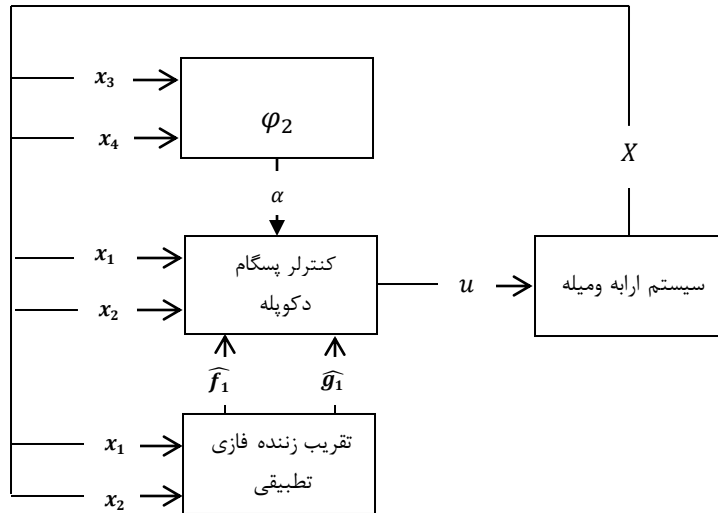
$$\dot{\widehat{\theta}}_g = -\gamma_2 X^T S B \eta(x_1, x_2) u \quad (32-3)$$

که با انتخاب پارامترهای سیستم فازی تطبیقی به صورت (31-3) و (32-3)، مشتق تابع لیاپانوف (30-3)

(30) به صورت زیر خواهد بود.

$$\dot{v} = -X^T Q X - X^T S B \quad (33-3)$$

در شکل زیر بلوک دیاگرام کنترل کننده طراحی شده نشان داده شده است.



شکل (۱-۳) بلوک دیاگرام کنترل کننده پسگام فازی دکوپله

حال می توان با قضیه زیر اثبات کرد که کنترل کننده فازی تطبیقی طراحی شده بردار حالت  $X$  را به سمت صفر می برد.

**قضیه ۲-** سیستم فازی تطبیقی (۱۱-۳) را در نظر بگیرید اگر  $X$ ،  $\theta_f$  و  $\theta_g$  و خطای تقریب  $\varepsilon$  محدود باشند، آنگاه  $(a)$  خطای رابطه

$$\int_0^t |e(t)|^2 dt \leq a + b \int_0^t |\varepsilon(\tau)|^2 d\tau \quad (۳۴-۳)$$

را برای همه  $t \geq 0$  برآورده می نماید که  $b$  و  $a$  ثابت هستند و  $\varepsilon$  خطای تقریب حداقل تعریف شده در (۳-۲۰) می باشد.  $(b)$  اگر  $\varepsilon$  بصورت مربع انتگرال پذیر باشد، یعنی، اگر  $\int_0^\infty |\varepsilon(\tau)|^2 d\tau < \infty$ ، آنگاه می توان نوشت [۲۵]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0 \quad (۳۵-۳)$$

### ۳-۵- نتایج شبیه سازی:

جهت بررسی عملکرد کنترل کننده پسگام فازی تطبیقی دکوپله، کنترل کننده طراحی شده را بر روی سیستم ارابه و میله شبیه سازی می کنیم. پارامترهای سیستم مورد نظر در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۱-۳) پارامترهای سیستم ارابه و میله

$I(kgm^2)$	$l(m)$	$m(kg)$	$M(kg)$	$g\left(\frac{m}{s^2}\right)$
0.008	0.4	0.1	1	9.8

همچنین پارامترهای کنترل کننده طراحی شده، در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۲-۳) پارامترهای سیستم ارابه و میله

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$b_1$	$b_2$	A
10	10	1	2	12	0.9425

توابع تعلق در نظر گرفته شده برای هر کدام از سیستم های فازی به صورت زیر است.

$$\mu_{A_1^1}(x_1) = \exp\left(-\left(\frac{x_1-\pi}{0.5}\right)^2\right) \quad (36-3)$$

$$\mu_{A_1^2}(x_1) = \exp\left(-\left(\frac{x_1-\pi/2}{0.5}\right)^2\right) \quad (37-3)$$

$$\mu_{A_1^3}(x_1) = \exp\left(-\left(\frac{x_1}{0.5}\right)^2\right) \quad (38-3)$$

$$\mu_{A_1^4}(x_1) = \exp\left(-\left(\frac{x_1+\pi/2}{0.5}\right)^2\right) \quad (39-3)$$

$$\mu_{A_1^5}(x_1) = \exp\left(-\left(\frac{x_1+\pi}{0.5}\right)^2\right) \quad (40-3)$$

و همچنین  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$\gamma_1 = 10 \quad (41-3)$$

$$\gamma_2 = 0.05 \quad (42-3)$$

و همچنین  $\widehat{\theta}_g(0)$  و  $\widehat{\theta}_f(0)$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\widehat{\theta}_f(0) = 10^{-5} [1 \ 1 \ \dots \dots \ 1]^T_{25 \times 1} \quad (43-3)$$

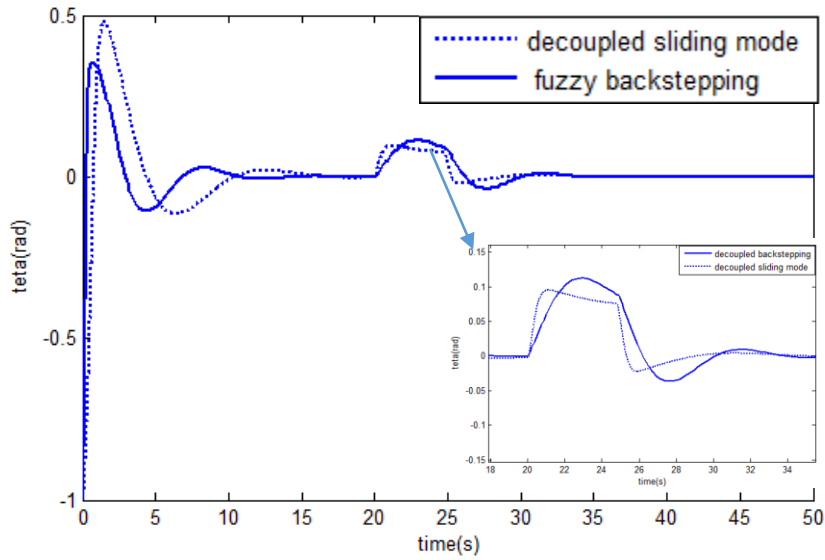
$$\widehat{\theta}_g(0) = 2 [1 \ 1 \ \dots \dots \ 1]^T_{25 \times 1} \quad (44-3)$$

زمان شبیه سازی را ۵۰ ثانیه، و همچنین گام شبیه سازی را ۰,۰۱ ثانیه در نظر می‌گیریم و اغتشاش خارجی وارده به سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$2 \quad \text{for } 20 \leq t < 25 \quad (45-3)$$

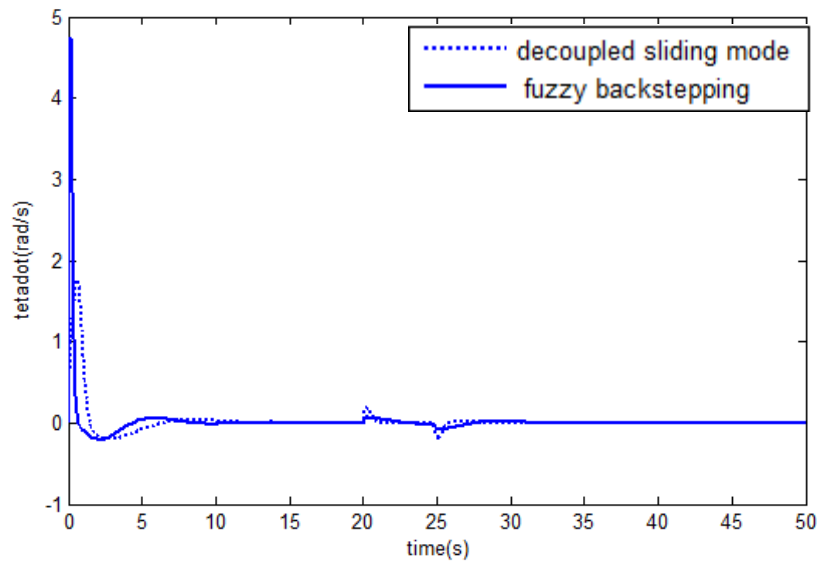
حالت‌های اولیه سیستم را به صورت  $x_1(0) = 1 \text{ rad}$  و  $x_2(0) = 0$  و  $x_3(0) = 0$  و  $x_4(0) = 0$  در نظر می‌گیریم.

در شکل (۳-۲) زاویه میله بر حسب رادیان، در شکل (۳-۳) سرعت زاویه ای میله بر حسب رادیان بر ثانیه، در شکل (۴-۳) وضعیت ارا به بر حسب متر، در شکل (۵-۳) سرعت ارا به بر حسب متر بر ثانیه، و در شکل (۱۰-۳) قانون کنترل اعمالی به سیستم بر حسب نیوتون نشان داده شده است. همچنین در شکل (۸-۳) پارامترهای سیستم فازی تقریب زنده  $\widehat{f}_1$  و در شکل (۹-۳) پارامترهای سیستم فازی تقریب زنده  $\widehat{g}_1$  نشان داده شده است. در شکل (۶-۳) تابع غیر خطی  $f_1$  و  $\widehat{f}_1$  و در شکل (۷-۳) تابع غیر خطی  $g_1$  و  $\widehat{g}_1$  نشان داده شده است.



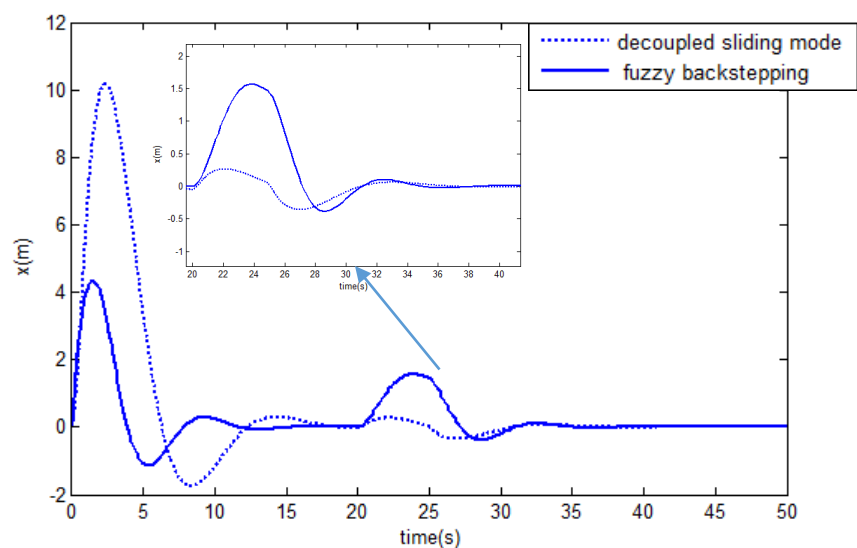
شکل (۲-۳) زاویه میله بر حسب رادیان

همانطور که از شکل (۲-۳) مشاهده می شود زاویه میله، با اعمال کنترل کننده پسگام فازی دکوپله، جهش کمتری نسبت به مود لغزشی دکوپله داشته است و از سرعت همگرایی بالاتری برخوردار است.

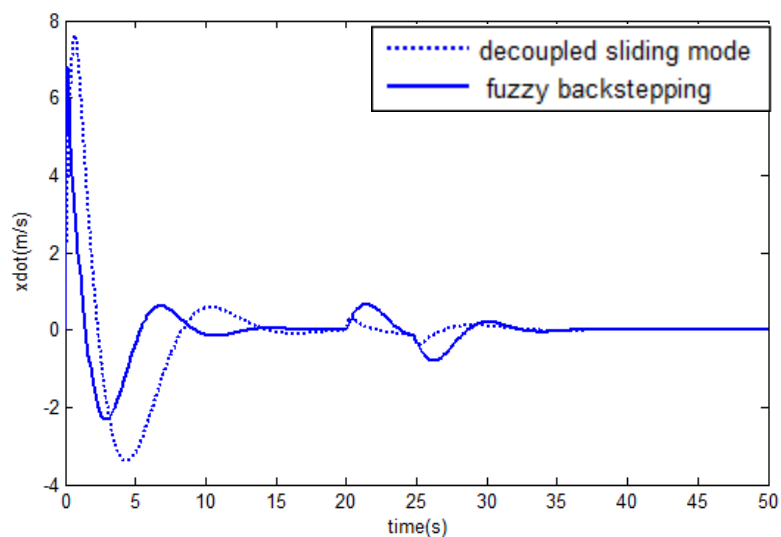


شکل (۳-۳) سرعت زاویه‌ای میله بر حسب رادیان بر ثانیه

با توجه زمان گذر و سرعت عمل بیشتر روش پسگام فازی دکوپله نسبت به روش مود لغزشی دکوپله، در شکل (۳-۳) مشاهده می شود که سرعت زاویه‌ای میله، در زمان‌های اولیه بیشتر است.



شکل (۴-۳) موقعیت ارابه بر حسب متر

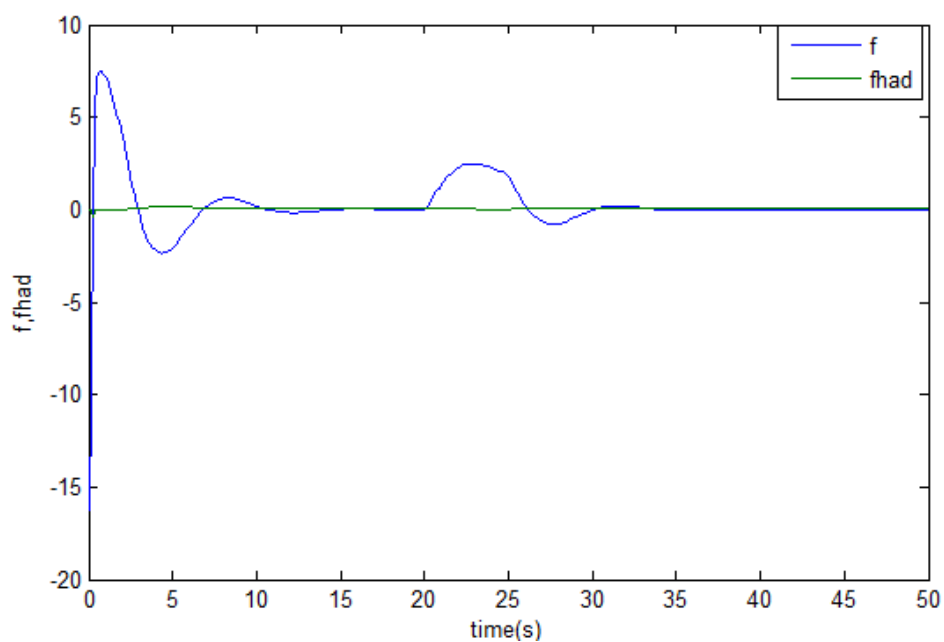


شکل (۵-۳) سرعت ارابه بر حسب متر بر ثانیه

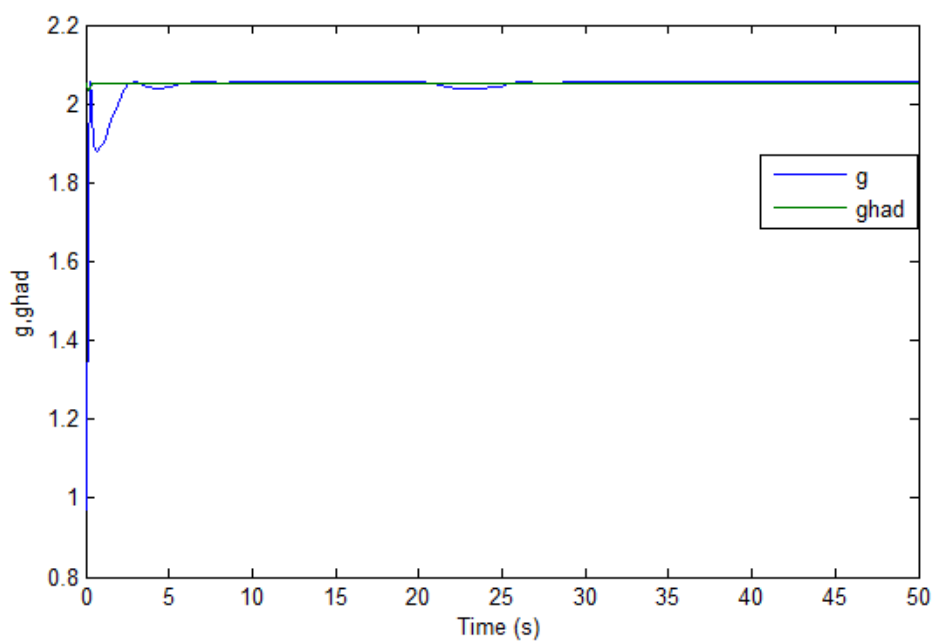
شکل‌های (۴-۳) و (۵-۳) نشان می‌دهد که ارابه با اعمال روش پسگام فازی توانسته است با مقدار جابه جایی و سرعت کمتری نسبت به روش مودلغزشی دکوپله به مبدا برسد.

شکل‌های (۲-۳)، (۳-۳)، (۴-۳) و (۵-۳) نشان می‌دهد که روش پسگام فازی، با فرض نامعلوم بودن دینامیک‌های سیستم توانسته است نتایجی مشابه با روش پسگام دکوپله معرفی شده در فصل قبل داشته باشد و این توانایی سیستم فازی را در تقریب دینامیک‌های سیستم نشان می‌دهد.



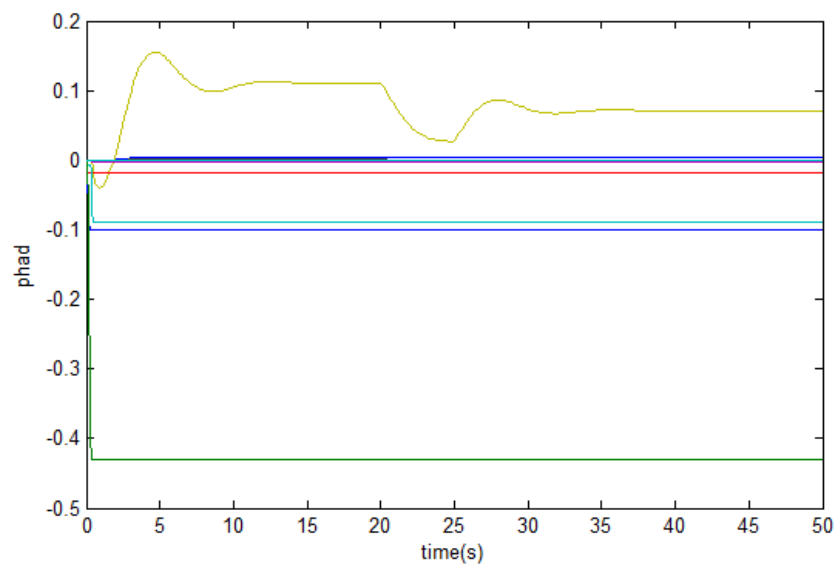


شکل (۶-۳) تابع  $f_1$  (data1) و تقریب فازی آن

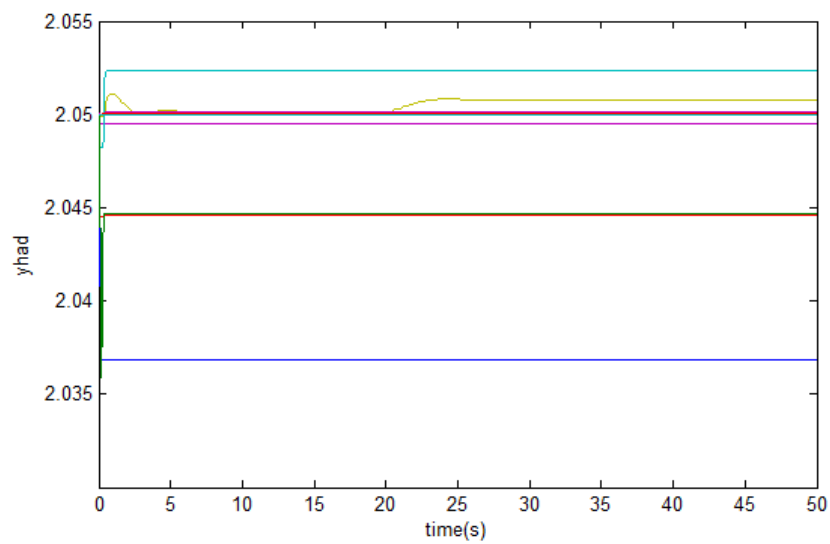


شکل (۷-۳) تابع  $g_1$  (data1) و تقریب فازی آن

شکل‌های (۶-۳) و (۷-۳) نشان می‌دهد که سیستم فازی توانسته است توابع  $f_1$  و  $g_1$  را با دقت بالایی تقریب بزند.

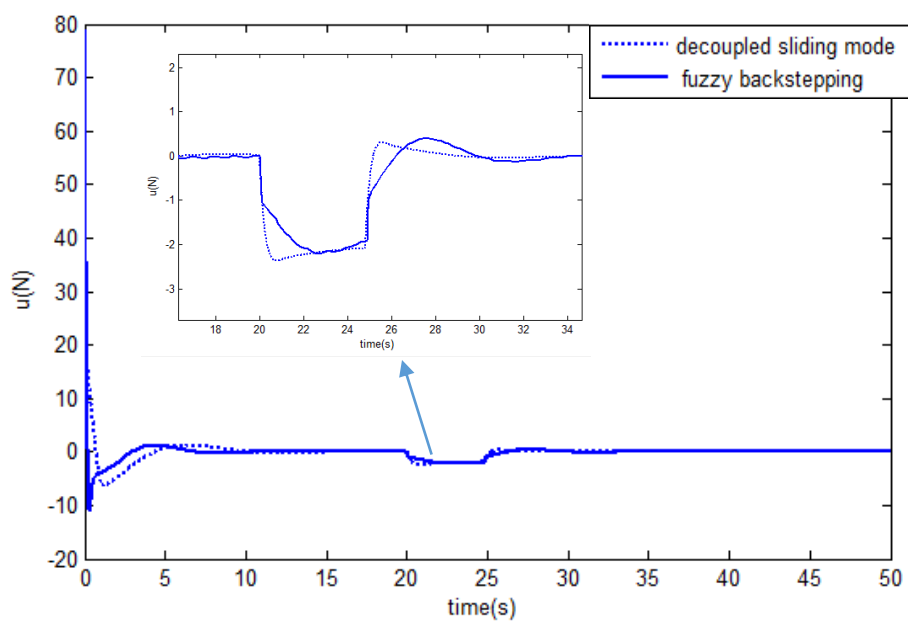


شکل (۸-۳) پارامترهای تطبیق f 1



شکل (۹-۳) پارامترهای تطبیق g1

شکل های (۸-۳) و (۹-۳) همگرایی پارامترهای سیستم فازی را نشان می دهد.



شکل (۳-۱۰) قانون کنترل اعمالی به سیستم بر حسب نیوتون

شکل (۲-۸) نشان می‌دهد که سیگنال کنترل پس از پایدار سازی سیستم، صفر شده است و روش پسگام فازی نرم‌تر از روش مود لغزشی دکوپله در برابر اغتشاش عمل کرده است.



## فصل ۴. نتیجه گیری و پیشنهادات

#### ۴-۱- نتیجه گیری

در فصل دوم این پایان نامه یک روش کنترل مقاوم قدرتمند، موسوم به کنترل کننده پسگام دکوپله برای یک کلاس از سیستم های غیر خطی مرتبه چهار ارائه شده است و پایداری سیستم کنترلی اثبات شده است. مزیت اصلی این روش در این است که بدون تبدیل معادلات سیستم به فرم فیدبک صریح نیز می توان روش پسگام را برای طراحی کنترل کننده به کار برد. کنترل کننده طراحی شده، بر روی سیستم ارا به و میله شبیه سازی شده است که نتایج شبیه سازی نشان داده شده در (۲-۴) تا (۲-۷) عملکرد مناسب کنترل کننده را در حضور اغتشاش نشان می دهد. هر چند که روش ارائه شده وابسته به مدل سیستم (فرم معادلات و مرتبه سیستم) و توابع غیر خطی موجود در مدل سیستم است. در فصل سوم با تقریب زدن توابع غیر خطی موجود در مدل سیستم با استفاده از سیستم تقریب زننده فازی تطبیقی، وابستگی کنترل کننده به توابع غیر خطی موجود در مدل سیستم از بین برده شده است. از آنجایی که پارامترهای تنظیم کننده سیستم فازی بر اساس نظریه لیاپانوف به دست آمده است، لذا پایداری سیستم کنترلی با در نظر گرفتن خطای تقریب نیز اثبات شده است. نتایج شبیه سازی نشان داده شده در (۳-۲) تا (۳-۵) عملکرد مناسب این کنترل کننده را بر روی سیستم ارا به و میله نشان می دهد. همچنین همگرایی پارامترهای تطبیق نشان داده شده در (۳-۸) و (۳-۹) و تقریب دقیق توابع غیر خطی نشان داده شده در (۳-۶) و (۳-۷)، عملکرد مناسب سیستم فازی تطبیقی را به عنوان تقریب زننده نشان می دهد.

## ۴-۲- پیشنهادات

در این قسمت برای انجام تحقیقات در آینده و همچنین بهتر شدن نتایج، پیشنهاداتی را ارائه می‌کنیم.

- پارامترهای کنترل کننده در این پایان نامه با روش سعی و خطا انتخاب شده‌اند لذا استفاده از الگوریتم‌های هوشمند برای انتخاب بهینه آنها می‌تواند در عملکرد بهتر کنترل کننده، مفید باشد.

- استفاده از استراتژی کنترل ولتاژ و ترکیب آن با روش‌های کنترل مقاوم از جمله روش پسگام، برای طراحی کنترل کننده.

- به کار گیری شبکه‌های عصبی یا سیستم‌های فازی-عصبی به عنوان سیستم‌های تقریب زنده

- [1] Fantoni et al. (2002), “Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems”, Springer-Verlag London.
- [2] Nejat Olgac, Mursel Emre Cavdaroglu .(2011), “ Full-state feedback controller design with delay scheduling for cart-and-pendulum dynamics”, *Mechatronics* 21 (2011) 38–47.
- [3] P.C. Li, K.P. Song, F.H. Shang. (2011), “Double chains quantum genetic algorithm with application to neuro-fuzzy controller design”, *Advances in Engineering Software* 42 (2011) 875–886.
- [4] Elmer P. Dadios and David J. Williams.(1988), “Nonconventional Control of the Flexible Pole–Cart Balancing Problem: Experimental Results”, *IEEE Transaction on systems, man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, vol. 28, no. 6, December 1998.
- [5] M.-Y. Shieh, C.-W. Huang and T.-H. S. Li.(2009), “A GA-based Sugeno-Type Fuzzy Logic Controller for the Cart-Pole System”, 1 University Road, Tainan 70101, Taiwan R.O.
- [6] Indrani Kar, Prem Kumar Patchaikani, Laxmidhar Behera.(2012). “On balancing a cart-pole system using T–S fuzzy model”, *Fuzzy Sets and Systems* 207 (2012) 94–110
- [7] A. Benaskeur and A. Desbiens.(1998). “Application of adaptive backstepping to the stabilization of the inverted pendulum”, 0-7803-4314-X/98/ \$10.00 01998 .IEEE.
- [8] Chih-Chen Yih.(2013). “sliding mode Control for swing-up and Stabilization of the Cart-Pole Underactuated System”, *Asian Journal of Control*, Vol. 15, No. 3, pp. 1–14, May 2013.
- [9] Reza Olfati-Saber.(1998). “Fixed Point Controllers and Stabilization of the Cart-pole System and the Rotating Pendulum”.LIDS, MIT 35-409.77 Massachusetts Ave. Cambridge, MA 02139.
- [10] Aria Alasty, Hassan Salarieh.(2007). “Nonlinear feedback control of chaotic pendulum in presence of saturation effect”.*Chaos, Solitons and Fractals* 31 (2007) 292–304.
- [11] Zhijun Lia, Chunquan Xu.(2009). “Adaptive fuzzy logic control of dynamic balance and motion for wheeled inverted pendulums”, *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2009) 1787–1803.



- [12] Omid Omidvar, David L. Elliott.(1997). “ Neural Systems for Control”,525 BStreet, Suite 1900, San Diego, CA 92101-4495, Usa.
- [13] An-Min Zou, Zeng-Guang Hou, Member, IEEE, and Min Tan.(2008). “ Adaptive Control of a Class of Nonlinear Pure-Feedback Systems Using Fuzzy BacksteppingApproach”.IEEE Tarnsaction on Fuzzy Systems, vol. 16,no. 4, August 2008.
- [14] H. K. Khalil.(1992) . “ Nonlinear Systems ”,New York: MacMillan, 1992.
- [15] Tzau-Hseng S Li, Ming-Yuan Shieh.(2000). “Switching-type fuzzy sliding mode control of a Cart-pole system”,Mechatronics 10 (2000) 91-109.
- [16] Ji-Chang Lo and Ya-Hui Kuo.(1998). “Decoupled Fuzzy Sliding-Mode Control”.IEEE Tarnsaction on Fuzzy Systems, vol. 6, no. 3
- [17] Ferhun Yorgancioglu, Hasan Komurcugil.(2010). “Decoupled sliding-mode controller based on time-varying sliding surfaces for fourth-order systems”.Expert Systems with Applications 37 (2010) 67646774
- [18] jean-jacques E. slotine, weiping Li.(1991). “Applied Nonlinear Control”.Prentice Hall,1991.
- [19] ع. خاکی صدیق، اصول کنترل مدرن، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۹۱
- [20] S. Jagannathan, F.L. Lewis.(2000). “ Robust backstepping control of a class of nonlinear systems using fuzzy logic”.Information Sciences 123 (2000) 223-240.
- [21] کرایه چیان، اصغر. "معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها"، چاپ یازدهم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ۱۳۸۵ .
- [22] Hyeongcheol Lee and Masayoshi Tomizuka.(2000). “ Robust Adaptive Control Using a Universal Approximator for Siso Nonlinear Systems”,IEEE Tarnsaction on Fuzzy Systems, vol. 8, no. 1, February 2000.
- [23] وانگ، لی-شین. "سیستم‌های فازی و کنترل فازی"، ترجمه محمد تشنه لب، نیما صفارپور، داریوش افیونی، چاپ ششم، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ۱۳۸۹ .
- [24] N. Ezziani, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui.(2008). “ Backstepping Fuzzy Adaptive Controller of Induction Machine”,16th Mediterranean Conference on Control and Automation Congress Centre, Ajaccio, France June 25-27, 2008.
- [25] Shaocheng Tong, Yongming Li, Peng Shi.(2009). “ Fuzzy adaptive backstepping robust control for SISO nonlinear system with dynamic uncertainties”,Information Sciences 179 (2009) 1319–1332.





**Abstract:**

Backstepping method is a strong method of robust control field. In this thesis, this method is used to control nonlinear cart and pole system. Since the equations of this system is not in a form that can design conventional backstepping controller for it, a new method called is used to stabilization of it. In this method no need to transform system equations. Also external disturbance applied to the system with its specific upper bound condition, is considered as the uncertainty. Therefore the controller is robust against uncertainty. Modeling of physical systems is always associated with uncertainty. Since the design of controller with this approach requires precise dynamic model of the system, in the next step the fuzzy inference system with adaptive mechanisms is used to approximate the dynamics of the system. In each two step, simulations results is compared with decoupled sliding mode control. In this thesis, the stability of the system is proved using Lyapunov method.

**Keywords:** Robust control, decoupled backstepping, Uncertainty, fuzzy inference system





Shahrood University of Technology  
Department of Electrical and Robotic Engineering

Fuzzy Backstepping Control of Cart-pole system

Aram Mazhar

Supervisor:  
Dr. Ali Akbarzadeh Kalat

2014