دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی برق و رباتیک

گروه کنترل

کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز سیستم‌های مقیاس- بزرگ

دانشجو: سجاد شجاع مجیدآباد

استاد راهنما:

دکتر حیدر طوسیان شاندیز

استاد مشاور:

دکتر امین حاجی زاده

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

شهریور ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحيم

شماره : ۱۲-۱/۱/۵۰۰-ت
تاریخ : ۹۳/۶/۲۷
ویرایش : —

مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره ۱۲

باسمه تعالی

صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم سجاد شجاع مجیدآباد دانشجوی دکتری رشته کنترل به شماره

دانشجویی ۸۹۱۷۹۹۵ ورودی سال ۸۹ درتاریخ ۹۳/۶/۲۷ از رساله خود با عنوان :

کنترل مـد لغزشی مرتبه کسری سیستم های قدرت مقیاس گسترده

دفاع و با اخذ نمره ۱۸/۹۰ به درجه : بسیار خوب نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☑
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹– ۱۵ ☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر حیدر طوسیان شاندیز	استاد/ اساتید راهنما	دانشیار	
۲	دکتر امین حاجی زاده	مشاور/ مشاورین	استادیار	
۳	دکتر ابوالفضل رنجبر	استاد مدعو ~~داخلی~~ / خارجی	دانشیار	
۴	دکتر ع اکبرزاده کلات	استاد مدعو داخلی / ~~خارجی~~	استادیار	
۵	دکتر محمد مهدی ...	استاد مدعو داخلی / ~~خارجی~~	استاد	
۶	دکتر حسن تقی زاده	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران: تاریخ و امضاء:

تقدیم به

خانواده‌ام

تقدیر و تشکر

از استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر طوسیان و همچنین استاد مشاور جناب آقای دکتر حاجی‌زاده به خاطر حمایت‌ها و زحمات گرانقدرشان کمال تشکر را دارم. از اساتید داور جناب آقای دکتر فاتح، جناب آقای دکتر رنجبر، جناب آقای دکتر اکبرزاده و نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر قلی زاده که ارزیابی این تحقیق را بر عهده داشتند، صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین از خانواده عزیزم و به خصوص پدر و مادر گرانقدرم که همواره مایه دلگرمی‌ام بوده‌اند، کمال قدردانی را دارم.

در انتها از تمامی اساتید گروه کنترل دانشگاه صنعتی شاهرود که در طول دوران تحصیل، بنده را یاری نموده‌اند، تشکر و برای ایشان آرزوی موفقیت و بهروزی دارم.

تـعـهـد نـــامــه

اینجانب **سجاد شجاع مجیدآباد** دانشجوی دوره دکتری رشته **برق کنترل** دانشکده **برق و رباتیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز سیستم‌های مقیاس- بزرگ** تحت راهنمائی **دکتر حیدر طوسیان شاندیز** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۹۳/۷/۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله، طراحی کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز بر روی سیستم‌های غیرخطی مقیاس- بزرگ در حضور عدم‌قطعیت‌ها و برهم‌کنش‌های بین زیرسیستم‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. کنترل‌کننده‌های پیشنهادی برای هر دو دسته سیستم‌های مرتبه- کسری و مرتبه- صحیح توسعه داده شده‌اند. در ابتدا، دو سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری با مشتقات کسری متفاوت در نظر گرفته شده و دو قانون کنترلی مقاوم با سطوح لغزش متفاوت و جدید پیشنهاد شده‌اند. همچنین، یک سیستم قدرت چند- ماشینه به عنوان سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح انتخاب شده و پایدارساز زاویه قدرت با سطح لغزش غیرخطی جدیدی برای آن پیشنهاد می‌گردد. همچنین، برای سنکرون‌سازی و حفظ ولتاژ پایانه ژنراتورهای سیستم قدرت چند- ماشینه به صورت همزمان، ساختار ترکیبی مناسبی بکار گرفته شده است. همه کنترل‌کننده‌های پیشنهادی با فرض معلوم بودن کران بالای برهم‌کنش بین زیرسیستم‌ها و عدم‌قطعیت‌ها طراحی شده‌اند. اما تعیین این کران برای سیستم مقیاس- بزرگ امری مشکل و پیچیده است. بنابراین در ادامه، یک تقریبگر فازی با ساختار تطبیقی برای تخمین جملات برهم‌کنش و عدم‌قطعیت‌ها بکار گرفته شده است. به دلیل اینکه تقریبگر فازی- تطبیقی برخی از متغیرهای حالت زیرسیستم‌های همسایه را به عنوان ورودی خود بکار می‌گیرد، این روش کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری شبه- غیرمتمرکز نامیده می‌شود. برای همه کنترل‌کننده‌های ارایه شده، پایداری سیستم حلقه- بسته بسته به نوع دینامیک سطح لغزش به وسیله قضایای پایداری مرتبه- کسری یا مرتبه- صحیح بررسی شده است. در نهایت، شبیه‌سازی‌های جامعی به منظور نشان دادن قابلیت کنترل‌کننده‌های پیشنهادی ارایه شده‌اند.

کلید واژه‌ها: سیستم‌های غیرخطی مقیاس- بزرگ، راهبردهای کنترل غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز، پایداری مرتبه- کسری، کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری، کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری غیرخطی.

فهرست مقالات مستخرج از رساله

مقالات ژورنالی

- Sajjad Shoja Majidabad, Heydar Toosian Shandiz, Amin Hajizadeh, "Decentralized sliding mode control of fractional-order large-scale nonlinear systems," Nonlinear Dynamics, vol. 77, pp.119-134, 2014. (Springer IF=2.419).

- Sajjad Shoja Majidabad, Heydar Toosian Shandiz, Amin Hajizadeh, "Nonlinear fractional-order power system stabilizer for multi-machine power systems based on sliding mode technique," International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2014. DOI: 10.1002/rnc.3159. (John Wiley & Sons IF=2.652)

- Sajjad Shoja Majidabad, Heydar Toosian Shandiz, Amin Hajizadeh, "Decentralised sliding mode control of RL-derivative-based fractional-order large-scale nonlinear systems," International Journal of Systems, Control and Communications, 2014 (In press). (Inderscience Scopus)

مقالات کنفرانسی

- Sajjad Shoja Majidabad, Heydar Toosian Shandiz, Amin Hajizadeh, "Nonlinear sliding mode block control of fractional-order systems," 6th Conference on Information and Knowledge Technology (IKT), May 27-29, 2014.

- Sajjad Shoja Majidabad, Heydar Toosian Shandiz, Amin Hajizadeh, "Decentralized control of RL-derivative based fractional-order large-scale systems," The 45th Annual Iranian Mathematics Conference, Agust 26-29, 2014.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل اول

مقدمه

۱-۱- تاریخچه مختصری از محاسبات مرتبه- کسری

بسیاری از دانشجویان ریاضی و علوم مهندسی با عملگرهای دیفرانسیلی d/dx، d^2/d^2x و ... مواجه می‌شوند، اما تعداد کمی از آنها در مورد اینکه آیا ضرورتی دارد که مرتبه دیفرانسیل عدد صحیحی باشد می‌اندیشند. چرا مرتبه دیفرانسیل اعداد گویا، کسری، اصم یا حتی مختلط نباشد؟ در سال ۱۶۹۵ و ابتدای شروع محاسبات دیفرانسیلی- انتگرالی، لایبنیتز[۱] در نامه‌ای به هوپیتال[۲] چنین می‌نویسد: "آیا مفهوم مشتقاتی با مرتبه- صحیح[۳] را می‌توان به مشتقاتی با مرتبه غیرصحیح[۴] تعمیم داد؟" هوپیتال در مورد سوال کمی کنجکاو بود و آن را با سوالی دیگر جواب می‌دهد: "اگر مرتبه مشتق 0.5 باشد چه خواهد شد؟" لایبنیتز در ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ چنین پاسخ داد: "این منجر به پارادوکس خواهد شد ولی روزی به نتایج مهمی می‌انجامد." سوال مطرح شده توسط لایبنیتز در مورد مشتقات مرتبه- غیرصحیح به مدت ۳۰۰ سال موضوعی در حال پیشرفت بوده و اکنون تحت عنوان محاسبات مرتبه- کسری[5] شناخته می‌شود. در واقع، محاسبات مرتبه- کسری تعمیمی از انتگرال و دیفرانسیل مرتبه- صحیح (معمولی) به مرتبه غیرصحیح می‌باشد [۱-۲].

پس از مطرح شدن بحث محاسبات مرتبه- کسری، دانشمندان زیادی سعی در بسط و توسعه آن نمودند. دانشمندانی همچون اویلر[۶] (۱۷۳۰)، لاگرانژ[۷] (۱۷۷۲)، لاپلاس[۸] (۱۸۱۲)، لاکرویس[۹] (۱۸۱۹)، فوریه[۱۰] (۱۸۲۲)، لیویل[۱۱] (۱۸۳۲)، ریمان[۱۲] (۱۸۴۷)، گرونوالد[۱۳] (۱۸۶۷)، لتنیکف[۱۴] (۱۸۶۸)، ویل[۱۵]

---

[1] Leibniz

[2] L'Hopital

[3] Integer-order

[4] Non-integer

[5] Fractional-order calculus

[6] Euler

[7] Lagrange

[8] Laplace

[9] Lacroix

[10] Fourier

[11] Liouville

[12] Riemann

[13] Grunwald

[14] Letnikov

[15] Weyl

(۱۹۱۷) و نظایر آن مطالعات زیادی در زمینه محاسبات مرتبه- کسری انجام دادند. به عنوان نمونه؛ لاکرویس در کتاب ۷۰۰ صفحه‌ای خود دو صفحه (۴۱۰-۴۰۹) به محاسبات کسری اختصاص داده و نشان داد که $\frac{d^{0.5}}{dv^{0.5}}v=\frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}}$ [۳]. با ادامه روند توسعه محاسبات مرتبه- کسری، اولین کنفرانس دیفرانسیل و انتگرال کسری در سال ۱۹۷۴ برگزار شد. دومین و سومین کنفرانس در این زمینه نیز در سال‌های ۱۹۸۴ و ۱۹۸۹ در گلاسکو و توکیو برگزار شدند.

۱-۲- مروری بر کارهای گذشته

در سال‌های اخیر، محاسبات مرتبه- کسری رشد تئوری و عملی چشمگیری در علوم فیزیکی و مهندسی داشته است. از جمله این پیشرفت‌ها می‌توان بکار برد محاسبات کسری در زمینه مدلسازی‌ها و تحلیل معادلات: مدارات و عناصر الکتریکی [۴-۶]، سیستم‌های بیولوژیکی [۷]، مطالعات اقتصادی [۸]، سیستم‌های آشوبی [۹]، باتری‌های اسیدی [۱۰]، مدل‌های جمعیت [۱۱]، سیستم‌ها و معادلات انتشار گرما [۱۲-۱۳]، سیستم‌های ترموالکتریک [۱۴] و نظایر آن اشاره کرد. طراحی کنترل‌کننده‌های مرتبه- کسری نیز یکی دیگر از کاربردهای مهم محاسبات کسری می‌باشد [۱۵]. از اولین تحقیقاتی که مفاهیم محاسبات کسری را در علم کنترل بکار گرفتند می‌توان به روش حوزه فرکانسی Crone [۱۶-۱۷] و طراحی کنترل‌کننده تناسبی- انتگرالی- مشتقگیر[1] مرتبه- کسری ($PI^{\lambda}D^{\mu}$) [۱۸] اشاره نمود.

در علم کنترل، کاربرد محاسبات کسری در دو زمینه کلی مدل‌سازی مرتبه- کسری و کنترل مرتبه- کسری می‌باشد. در حالت کلی، برای یک سیستم حلقه- بسته از نظر مدل و طراحی کنترل‌کننده (مرتبه- صحیح یا کسری) چهار حالت وجود دارد [۱۹]:

۱- سیستم تحت کنترل مرتبه- صحیح با کنترل‌کننده مرتبه- صحیح.

[1] Proportional-integral-derivative

۲- سیستم تحت کنترل مرتبه- صحیح با کنترل‌کننده مرتبه- کسری.

۳- سیستم تحت کنترل مرتبه- کسری با کنترل‌کننده مرتبه- صحیح.

۴- سیستم تحت کنترل مرتبه- کسری با کنترل‌کننده مرتبه- کسری.

از میان بندهای فوق، بندهای ۲ و ۴ از پشتوانه تحقیقاتی قوی برخوردار بوده و مبنای کار این رساله نیز می‌باشند. در مورد بند ۲، با توجه به اینکه استفاده از کنترل‌کننده‌های مرتبه- کسری بر روی سیستم‌های مرتبه- صحیح، پارامترهای قابل تنظیم بیشتری نسبت به کنترل‌کننده‌های معمولی در اختیار طراح می‌گذارد، لذا می‌توان با تنظیم این پارامترهای اضافی به رفتار حلقه- بسته مناسب‌تری دست یافت. همچنین، کنترل‌کننده‌های نوع معمولی زیرمجموعه کنترل‌کننده‌های نوع مرتبه- کسری- اند. به عنوان مثال؛ کنترل‌کننده $PI^{\lambda}D^{\mu}$ دارای پنج پارامتر قابل تنظیم است، در حالی که PID معمولی سه پارامتر قابل تنظیم دارد. علاوه بر این، انتخاب $\lambda = \mu = 1$ همان کنترل‌کننده PID معمولی را نتیجه می‌دهد. در مورد بند ۴، با توجه به اینکه سیستم دینامیکی شامل مشتق و انتگرال کسری است، لذا در حالت کلی استفاده از کنترل‌کننده‌های متناظر مرتبه- کسری مطلوبتر از نوع مرتبه- صحیح خواهد بود. توجه شود که از چهار بند مذکور، به ازای بندهای ۲، ۳ و ۴ سیستم حلقه- بسته از نوع مرتبه- کسری خواهد بود. زیرا برای مرتبه- کسری بودن سیستم حلقه- بسته کافی است که کنترل‌کننده یا سیستم و یا هر دو از نوع کسری باشند [۱۹].

بر پایه مفاهیم مطرح شده در پاراگراف پیشین، کنترل‌کننده‌های مرتبه- کسری را می‌توان بر روی سیستم‌های مرتبه- صحیح و مرتبه- کسری طراحی و اعمال نمود. لازم به ذکر است که اعمال این گونه کنترل‌کننده‌ها بر روی سیستم‌های مرتبه- صحیح نسبت به سیستم‌های مرتبه- کسری پیچیده‌تر می‌باشد. لیکن به دلیل اینکه اکثر سیستم‌های فیزیکی به فرم مرتبه- صحیح مدل می‌شوند، طراحی کنترل‌کننده‌های مرتبه- کسری بر روی سیستم‌های مرتبه- صحیح رویکردی عملی و واقع‌گرایانه خواهد داشت. ایده اصلی کاربرد کنترل‌کننده‌های مرتبه- کسری بر روی سیستم‌های مرتبه- صحیح در

مقاله [۲۰] مطرح شده است. در این مقاله بر پایه یک مثال عددی، اثبات می‌شود که همگرایی بهینه به ازای مرتبه‌های- غیرصحیح صورت می‌پذیرد. اگر چه ایده این مقاله بسیار جالب است، اما قابل گسترش به همه سیستم‌ها نمی‌باشد. زیرا ممکن است بهینه‌گی به ازای پارامترهای مرتبه- صحیح رخ دهد. این مسئله با یک مثال ساده در فصل ۹ مرجع [۲] ثابت می‌شود. در چنین حالتی، کنترل‌کننده مرتبه- کسری عملکرد بهتری نسبت به نوع معمولی نخواهند داشت. برای رفع این مشکل و در صورت امکان باید کنترل‌کننده مرتبه- کسری جدید و مناسبی پیشنهاد شود.

از طرفی کنترل مد لغزشی[۱] (SMC) گونه خاصی از کنترل‌کننده‌های ساختار متغیر است که در اتحاد جاهیر شوروی توسط امیلیانوف[۲] پیشنهاد شد. این روش کنترل مقاوم یکی از ابزارهای قدرتمند برای غلبه بر مسئله کنترل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی است. کنترل مد لغزشی همواره به دلیل عملکرد دقیق و مقاوم در برابر تغییرات پارامترها، دینامیک‌های مدل نشده و اغتشاشات خارجی کاربردهای وسیعی در مهار سیستم‌های دینامیکی داشته است [۲۱-۲۲]. از جمله این کاربردها می-توان به کنترل: ربات‌ها [۲۳]، مبدل‌های الکترونیک قدرت [۲۴]، سیستم تعلیق [۲۵] و نظایر آن اشاره نمود. در کنترل‌کننده مد لغزشی معمولی سطح لغزش[۳] به صورت خطی تعریف می‌گردد. اما با بکارگیری سطح لغزش غیرخطی می‌توان به عملکرد سریعتر و دقیقتری نسبت به نوع خطی دست یافت. این ساختار نیز به کنترل مد لغزشی غیرخطی (ترمینال)[۴] (NSMC یا TSMC) معروف است [۲۶].

به منظور بهره‌گیری از قابلیت‌هایی که برای روش کنترل مد لغزشی بیان شد، می‌توان این تکنیک را در حوزه محاسبات مرتبه- کسری نیز توسعه داد. در حالت کلی، بکارگیری کنترل‌کننده مد لغزشی برای مهار سیستم‌های مرتبه- کسری، یا طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با سطح لغزش دارای

[1] Sliding mode control

[2] Emelyanov

[3] Sliding surface or sliding manifold

[4] Nonlinear (Terminal) sliding mode

دینامیک‌های مرتبه- کسری (مشتق و انتگرال)، یا هر دو مورد با هم را کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری[1] (FSMC یا FOSMC) گویند [۲۷]. به عبارت دیگر، برای اطلاق لفظ کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری کافی است که سیستم یا کنترل‌کننده یا هر دو دارای دینامیک‌های کسری باشند. در چند سال اخیر، مطالعه و طراحی انواع کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری بر روی سیستم‌های دینامیکی مرتبه- کسری و مرتبه- صحیح مورد توجه فراوان محققین قرار گرفته است. از جمله این تحقیقات می‌توان به سنکرون‌سازی و کنترل سیستم‌های آشوبی [۲۸-۳۳]، کنترل سیستم‌های مرتبه- کسری چند متغیره [۳۴]، ردیابی خروجی در سیستم غیرخطی مرتبه- کسری [۳۵]، طراحی سطح لغزش انتگرالی بر پایه روش غیرفعال بودن[2] [۳۶] و مطالعاتی در زمینه همگرایی [۳۷-۳۸] و ارتقاع کیفت روش مد لغزشی مرتبه- کسری [۳۹] اشاره کرد. علاوه بر این، طراحی انواع سطوح لغزش غیرخطی به منظور همگرایی سریع نیز در مراجع [۴۰-۴۱] گزارش شده است. همچنین در پنج سال اخیر، روش مد لغزشی مرتبه- کسری برای تخمین و کنترل سیستم‌هایی مرتبه- صحیح مختلفی از قبیل: بازوهای ربات [۴۲]، موتور مغناطیس دائم [۴۳]، سیستم ضد قفل [۴۴]، موتور القایی [۴۵]، حذف لرزش‌های مکانیکی [۴۶]، کنترل روشنایی [۴۷] و سیستم تبدیل انرژی بادی [۴۸] داشته است. در این میان، برخی از ساختارهای پیشنهادی نیز در قالب سطح لغزش غیرخطی بیان شده‌اند [۴۷، ۴۹-۵۰]. لازم به تاکید است که همه مراجعی که ذکر شدند، کنترل سیستم‌های خطی و غیرخطی مقیاس- کوچک[3] را مورد بررسی قرار داده‌اند.

سیستم‌های مقیاس- بزرگ[4] غالبا از چندین زیرسیستم[5] ابعاد- پایین[6] مرتبط با هم تشکیل می‌شوند. چنین سیستم‌هایی نمود صنعتی گسترده‌ای دارند که از آن جمله می‌توان به: سیستم‌های قدرت

[1] Fractional-order sliding mode control

[2] Passivity

[3] Small-scale

[4] Large-scale systems

[5] Subsystem

[6] Low dimension

[7] Power electric systems

الکتریکی[7] [۵۱]، فرآیندهای شیمیایی [۵۲]، سیستم‌های رباتیک [۵۳] و نظایر آن اشاره کرد. پیچیده‌گی سیستم‌های مقیاس- بزرگ در غیرخطی بودن، ابعاد- بالای سیستم و برهم‌کنش[1] مابین زیرسیستم‌ها نهفته است که عملا بکارگیری راهبرد کنترل متمرکز[2] را به لحاظ محاسباتی غیرممکن می‌سازد. همچنین، اگر خطایی در کنترل‌کننده متمرکز رخ دهد، کل سیستم مختل خواهد شد. برای رفع مشکلات فوق، می‌توان از راهبرد کنترل غیرمتمرکز[3] بهره گرفت. در این روش، برای هر زیرسیستم یک کنترل‌کننده محلی با استفاده از داده‌های محلی طراحی می‌شود. مزیت اساسی این راهبرد کنترلی، حجم کم محاسبات آن نسبت به راهبرد متمرکز است. اما چالش مهم پیش رو، نحوه تعامل با برهم‌کنش‌های نامعلوم مابین زیرسیستم‌ها است. در صورتی که این تعامل به درستی انجام نگیرد، ممکن است باعث ناپایداری سیستم مقیاس- بزرگ گردد [۵۴]. در عمل به منظور حفظ پایداری سیستم‌های مقیاس- بزرگ، طراحی‌هایی که بر پایه روش کنترل غیرمتمرکز انجام می‌گیرند دارای محافظه‌کاری بیشتری هستند [۵۲].

امروزه، پیشرفت تکنولوژی ارتباطات برای محققین امکان طرح راهبردهای کنترلی جدید با محافظه‌کاری کمتری مانند: کنترل شبه- غیرمتمرکز[4] [۵۵-۵۶]، کنترل توزیع یافته[5] [۵۷-۵۸] و نظایر آن را فراهم ساخته است. در راهبرد کنترل شبه- غیرمتمرکز، از اطلاعات سیستم‌های همسایه برای تخمین برهم‌کنش‌های نامعلوم استفاده می‌شود. البته اغلب محققین این روش کنترلی را جزو همان راهبرد غیرمتمرکز دسته‌بندی می‌کنند. مبنای روش توزیع یافته نیز تبادل اطلاعات مابین کنتر-ل‌کننده‌های محلی است. در این رساله، راهبردهای کنترلی غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز مبنای

[1] Interconnections

[2] Centralized control strategy

[3] Decentralized control strategy

[4] Semi-decentralized control strategy

[5] Distributed control strategy

[6] Predictive control

طراحی‌ها می‌باشند، اما روش کنترل توزیع یافته به دلیل ارتباط با مباحث کنترل پیش‌بین[۶] از حیطه بحث‌های این رساله خارج است.

همانطور که اشاره شد، یکی از چالش‌های اساسی در کنترل غیرمتمرکز سیستم‌های مقیاس- بزرگ، پیشنهاد قانون کنترل مناسب برای تعامل با ترم‌های برهم‌کنش و عدم‌قطعیت و تضمین پایداری سیستم کلی است. بدین منظور، روش‌های کنترل متنوعی در مراجع گزارش شده است. در برخی از این مقالات، روش‌های هوشمند فازی- تطبیقی [۵۹-۶۰] و عصبی- تطبیقی [۶۱] برای تقریب ترم-های برهم‌کنش و عدم‌قطعیت‌ها پیشنهاد شده‌اند. در مراجع [۵۵-۵۶]، تکنیک فازی- تطبیقی مستقیم و غیرمستقیم بر مبنای راهبرد کنترل شبه- غیرمتمرکز پیشنهاد شده است. در مراجع [۶۲-۶۹] نیز کنترل‌کننده مد لغزشی غیرمتمرکز برای مهار انواع سیستم‌های خطی و غیرخطی مقیاس- بزرگ گزارش شده است. در اکثر این مقالات فرض می‌شود که ترم‌های برهم‌کنش محدود به چندجمله‌ای‌های معلوم وابسته به متغیرهای حالت باشد. اگر چه این عمل در انتخاب بهره‌های لغزشی مفید است، لیکن برای برخی از سیستم فیزیکی ممکن است این فرض برقرار نباشد. به منظور رفع این نقیصه، در مقالات [۷۰-۷۱] ترکیب تکنیک‌های هوشمند به همراه روش مد لغزشی غیرمتمرکز پیشنهاد شده است. لازم به تاکید است که همه مراجع [۵۱-۷۱] توصیف شده: اولا، فقط به تحلیل سیستم‌های مقیاس- بزرگ از نوع مرتبه- صحیح پرداخته‌اند. دوما، همه روش‌های کنترلی بکارگرفته شده نیز از نوع مرتبه- صحیح می‌باشند، و به جرأت می‌توان گفت که تاکنون در زمینه استفاده از مفاهیم محاسبات مرتبه- کسری در کنترل مقاوم سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- معمولی گزارشی ارایه نشده است. لیکن با توجه به عمومیت و درجه آزادی بیشتر کنترل‌کننده‌های مرتبه- کسری، ضرورت بهره‌گیری از این ابزار در کنترل مقاوم سیستم‌های خطی و غیرخطی مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح احساس می‌شود. لذا در بخشی از این رساله، کنترل مد لغزشی مرتبه-کسری (غیرمتمرکز و

شبه- غیرمتمرکز) سیستم قدرت چند- ماشینه[1] به عنوان مثالی از سیستم‌های غیرخطی مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح مورد بررسی قرار می‌گیرد. در طراحی کنترل‌کننده‌ها با راهبرد غیرمتمرکز، کران بالای ترم‌های برهم‌کنش و عدم‌قطعیت‌ها معلوم فرض شده است. اما به دلیل مشکل بودن تحقق عملی این فرض، در طراحی کنترل‌کننده‌ها با راهبرد شبه- غیرمتمرکز از تقریبگرهای فازی- تطبیقی برای تقریب ترم‌های برهم‌کنش و عدم‌قطعیت‌های مدل استفاده می‌شود.

در زمینه کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ از نوع مرتبه- کسری، به دلیل جدید بودن مفاهیم کسری در علم مهندسی و توسعه ناچیز مدل‌سازی مقیاس- بزرگ کسری (تئوری و عملی)، تاکنون مطالعات اندکی انجام شده است. اخیراً مقالات [۷۲-۷۳]، بحث کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری را مطرح نموده‌اند. در مرجع [۷۲]، طراحی قانون فیدبک پایدارکننده برای یک سیستم خطی مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری بررسی شده است. در مرجع [۷۳] نیز کنترل‌کننده مقاوم به کمک روش LMI[2] پیشنهاد گردیده است. با توجه به موارد مذکور، واضح است که مباحث پایداری و کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری به تازه‌گی مطرح شده و نیازمند توسعه اساسی می‌باشند. بدین منظور و در بخش دیگری از این رساله، طراحی انواع کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری (غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز) بر روی سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری مورد بررسی قرار می‌گیرند. همانند بخش قبلی، تقریبگرهای فازی- تطبیقی نیز برای تقریب ترم‌های برهم- کنش و عدم‌قطعیت‌های مدل بکار گرفته می‌شوند.

در نهایت، ذکر این مورد با ارزش است که طراحی تقریبگرهای تطبیقی و فازی- تطبیقی در قالب مرتبه- کسری به دلیل پیچیدگی روابط و تحلیل‌های پایداری امری مشکل است. به همین دلیل، توسعه تکنیک‌های تطبیقی در حوزه محاسبات کسری به کندی و با احتیاط صورت می‌گیرد.

[1] Multi-machine power system

[2] Linear matrix inequality

همچنین، معدود مقالاتی پیشنهادی در این زمینه [۳۳، ۷۴-۷۷]، یا دارای ایراداتی بوده‌اند [۷۶]، و یا سیستم‌ها و ساختارهای نه چندان پیچیده را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۳۳، ۷۷] . بنابراین، پیشنهاد تقریبگرهای فازی- تطبیقی مرتبه- کسری مناسب و اثبات پایداری سیستم در حضور آن‌ها نیازمند مطالعات ژرفی است. به همین منظور، توسعه تقریبگرهای تطبیقی- فازی در قالب راهبرد شبه- غیرمتمرکز در این رساله مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱-۳- نوآوری‌های مهم رساله

نوآوری‌های مهم این رساله را می‌توان در بندهای زیر خلاصه نمود:

۱- پیشنهاد کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری جدید برای سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری با وجود برهم‌کنش بین زیرسیستم‌ها، عدم‌قطعیت مدل سازی و اغتشاش خارجی.

۲- پیشنهاد کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری با سطح لغزش غیرخطی جدید برای سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح (سیستم قدرت چند- ماشینه) با وجود برهم‌کنش مابین زیرسیستم‌ها، عدم‌قطعیت مدل سازی و خطاهای ناگهانی.

۳- طراحی تقریب‌گرهای فازی- تطبیقی مرتبه- کسری در قالب راهبرد شبه- غیرمتمرکز و تحلیل پایداری سیستم حلقه- بسته در حضور این تقریب‌گرها.

۴- بیان مقایسه‌ای روابط، خواص، قضایای پایداری و تفاوت‌های اساسی دو مشتق ریمان- لیویل و کپوتو، به دلیل مطالعه دو دسته مختلف از سیستم‌های مرتبه- کسری با مشتق‌های RL و Caputo.

۱-۴- مروری بر ساختار رساله

ساختار کلی این رساله به شرح زیر است:

در فصل دوم به منظور آشنایی با محاسبات مرتبه- کسری: توابع اولیه عملگرهای کسری، تعاریف انتگرال و مشتق مرتبه- کسری، ویژگی‌ها و تفاوت‌های مهم آن‌ها مورد بحث قرار گرفته است. علاوه بر این، مفاهیم دیگری از قبیل؛ قاعده لایبنیتز، شرایط اولیه معادلات دیفرانسیلی مرتبه- کسری، خاصیت همنواختی و پاسخ زمانی معادلات دیفرانسیلی خطی مرتبه- کسری بررسی می‌شوند.

فصل سوم به بیان قضایای مهم پایداری سیستم‌های مرتبه- کسری خطی و غیرخطی مطرح شده در سال‌های اخیر می‌پردازد. اما به دلیل ماهیت غیرخطی سیستم‌های مورد مطالعه در این رساله، تحلیل‌های غیرخطی بطور جامع‌تری توصیف شده‌اند.

در فصل چهارم، دینامیک دو دسته مختلف سیستم‌های مقیاس- بزرگ مورد مطالعه در این رساله توصیف شده است. دسته اول مربوط به سیستم‌هایی با دینامیک مرتبه- کسری، و دسته دوم مربوط به سیستم‌هایی با دینامیک مرتبه- صحیح می‌باشد.

روش کنترل مد لغزشی به همراه مزایا و معایب آن در فصل پنجم مورد بررسی قرار می‌گیرد. علاوه بر این، گونه‌های مختلف این روش از قبیل: کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری، کنترل مد لغزشی غیرخطی و کنترل مد لغزشی غیرمتمرکز توصیف می‌شوند.

در فصل ششم، کنترل سیستم‌های غیرخطی مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری با وجود برهم‌کنش بین زیرسیستم‌ها، عدم‌قطعیت‌های مدلسازی و اغتشاشات خارجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه مشتقات موجود در معادلات دینامیکی این سیستم‌ها می‌توانند از نوع RL یا Caputo باشند، لذا کنترل هر دو دسته از سیستم‌های مقیاس- بزرگ مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. در ادامه این فصل، طراحی و اعمال کنترل‌کننده‌های مدلغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز بر روی سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری انجام می‌شود. برای نشان دادن قابلیت‌های هر یک از کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، شبیه‌سازی‌های کامپیوتری جامعی نیز ارایه شده است.

در فصل هفتم، کنترل زاویه قدرت و ولتاژ پایانه ژنراتورهای سیستم‌های قدرت چند- ماشینه به عنوان مثالی از سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، کنترل‌کننده‌های مدلغزشی مرتبه- کسری غیرخطی بر پایه راهبردهای غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز پیشنهاد شده‌اند. در انتهای این فصل نیز عملکرد مقاوم کنترل‌کننده‌های پیشنهادی با وجود برهم- کنش بین زیرسیستم‌ها، عدم‌قطعیت‌های مدلسازی و خطاهای ناگهانی به کمک شبیه‌سازی‌ها تایید می‌گردد.

فصل آخر نیز نتایج تحقیقات انجام شده را به همراه پیشنهاداتی برای مطالعات آتی تبیین می‌نماید.

فصل دوم

محاسبات مرتبه- کسری و برخی خواص مهم

۲-۱- مقدمه

در این فصل به منظور آشنایی با محاسبات مرتبه- کسری: توابع اولیه عملگرهای کسری، تعاریف انتگرال و مشتق مرتبه- کسری، خواص و ویژگی‌ها و تفاوت‌های مهم آن‌ها مورد بحث قرار می‌گیرند. علاوه بر این، مفاهیم دیگری از قبیل؛ قاعده لایبنیتز، شرایط اولیه معادلات دیفرانسیلی مرتبه- کسری، خاصیت همنواختی و پاسخ زمانی معادلات دیفرانسیلی خطی مرتبه- کسری مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-۲- توابع اولیه عملگرهای مرتبه- کسری

۲-۲-۱- تابع گاما

در ساده‌ترین تفسیر، تابع گاما[1]، تابع فاکتوریل‌های توسعه یافته برای تمام اعداد حقیقی و مختلط می‌باشد. تابع گاما را بر اساس روابط ریاضی می‌توان به صورت رابطه (۲-۱) تعریف نمود [۲]:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (۱-۲)$$

که به ازای $\mathrm{Re}(z)>0$ همگرا است.

یکی از ویژگی‌های اساسی تابع گاما، برقراری رابطه زیر است:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \qquad (۲-۲)$$

با توجه به اینکه $\Gamma(1)=1$ می‌باشد، لذا برای اعداد $z=1,2,3,...$ می‌توان نوشت:

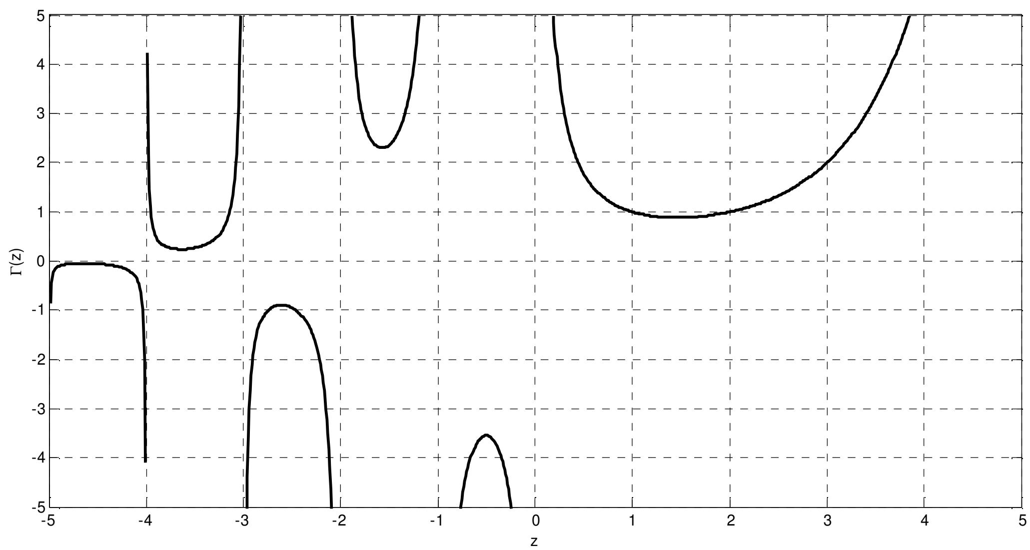
$$\begin{aligned}\Gamma(2)&=1\cdot\Gamma(1)=1=1!\\ \Gamma(3)&=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1!=2!\\ \Gamma(4)&=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2!=3!\end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

[1] Gamma

$$\begin{aligned} &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n! \end{aligned}$$

رابطه فوق، تعریف فاکتوریل برای اعداد طبیعی است.

شماتیک تقریبی تابع گاما در بازه $[-5 \quad 5]$ در شکل ۲-۱ نشان داده شده است ($z \in R$). با توجه این شکل، واضح است که مقدار تابع گاما به ازای مقادیر صحیح منفی z به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. همچنین به ازای $z > 0$ داریم $\Gamma(z) > 0$.



شکل ۲-۱: شکل تقریبی تابع گاما.

۲-۲-۲- تابع بتا

در اکثر موارد به جای ترکیبی از توابع گاما از تابع بتا[1] استفاده می‌شود. این تابع به عنوان انتگرال اویلر فرم اول نیز شناخته می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲]:

$$\beta(z,w) = \int_0^1 (1-\tau)^{z-1} \tau^{w-1} d\tau, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0, \;\; \mathrm{Re}(w) > 0 \tag{۲-۴}$$

ارتباط بین تابع گاما و تابع بتا را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

[1] Beta

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}=\beta(w,z) \qquad (۵-۲)$$

۲-۲-۳- تابع میتاگ- لفلر

تابع نمایی e^z در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی (مرتبه- صحیح) نقش مهمی ایفا می‌کند. تعمیم یک پارامتری تابع مذکور، به صورت رابطه (۲-۶) توسط جی. ام. میتاگ- لفلر[1] تعریف شده و مورد مطالعه قرار گرفت [۲]. این تابع در حل معادلات دیفرانسیلی مرتبه- کسری نیز کاربرد فراوانی دارد.

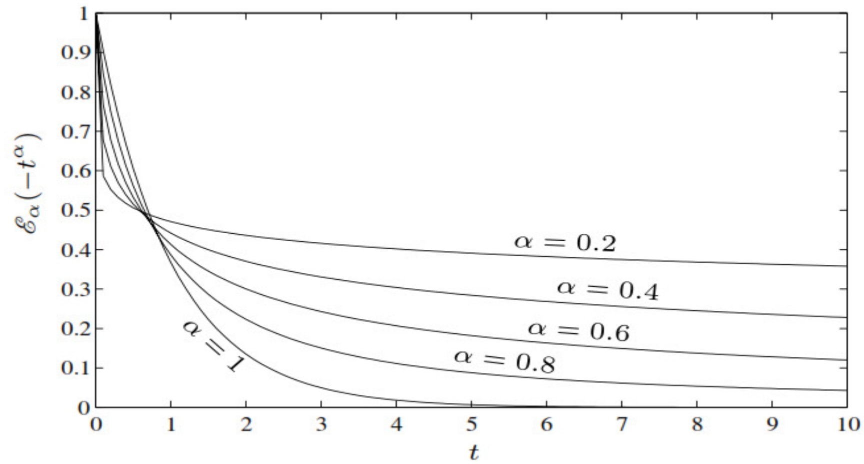
$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad \alpha>0 \qquad (۶-۲)$$

به ازای مقادیر صحیح α، تابع میتاگ- لفلر یک پارامتری، به توابع شناخته شده‌ای تبدیل خواهد شد [۲]:

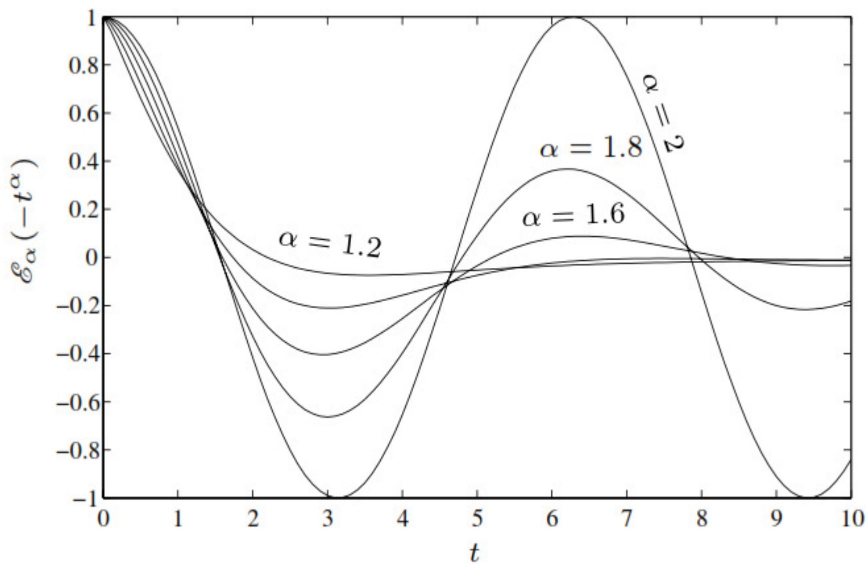
$$\begin{aligned}
E_0(z)&=\frac{1}{1-z}\\
E_1(z)&=e^z\\
E_2(z)&=\cosh(\sqrt{z})\\
E_3(z)&=\frac{1}{3}\left[e^{z^{\frac{1}{3}}}+2e^{\frac{z-\frac{1}{3}}{2}}+\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z^{\frac{1}{3}}\right)\right]\\
E_4(z)&=\frac{1}{2}\left[\cos(z^{\frac{1}{4}})+\cosh(z^{\frac{1}{4}})\right]
\end{aligned} \qquad (۷-۲)$$

شکل‌های ۲-۲ و ۲-۳، تابع میتاگ- لفلر $E_\alpha(z=-t^\alpha)$ را به ازای مقادیر مختلف α به ترتیب در بازه‌های $0<\alpha<1$ و $1<\alpha<2$ نشان می‌دهند (به ازای $\alpha=1$ تابع میتاگ- لفلر برابر تابع نمایی e^{-z} است) [۱].

---
[1] Mittag-Leffler



شکل ۲-۲: تابع میتاگ- لفلر $E_\alpha(-t^\alpha)$ به ازای $\alpha = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1$ [۱].



شکل ۲-۳: تابع میتاگ- لفلر $E_\alpha(-t^\alpha)$ به ازای $\alpha = 1.2,\ 1.4,\ 1.6,\ 1.8,\ 2$ [۱].

۲-۲-۴- تابع میتاگ- لفلر دو پارامتری

تابع میتاگ- لفلر از نوع دو پارامتری برای اولین بار توسط آگراوال[1] به صورت رابطه (۲-۸) معرفی شد.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad \alpha, \beta > 0 \tag{۲-۸}$$

[1] Agrawal

تابع دو پارامتری میتاگ- لفلر نیز در حالتی که α و β اعداد صحیح انتخاب شوند، تبدیل به توابع شناخته شده‌ای خواهد شد [۲].

$$\begin{aligned}
&E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z\\
&E_{1,2}(z)=\frac{e^z-1}{z}\\
&E_{1,3}(z)=\frac{e^z-1-z}{z^2}\\
&E_{2,1}(z^2)=\cos(z)\\
&E_{2,2}(z^2)=\frac{\sin(z)}{z}
\end{aligned} \tag{۲-۹}$$

لازم به ذکر است که با انتخاب $\beta=1$، تابع میتاگ- لفلر دو پارامتری به تابع یک پارامتری تبدیل می‌شود.

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}=E_{\alpha}(z) \tag{۲-۱۰}$$

۲-۲-۵- تابع میتاگ- لفلر تعمیم یافته

علاوه بر تعاریف میتاگ- لفلر یک و دو پارامتری، تابع میتاگ- لفلر سه پارامتری به شکل رابطه (۲-۱۱) قابل تعریف بوده و تابع میتاگ- لفلر تعمیم یافته[1] نامیده می‌شود.

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!} \tag{۲-۱۱}$$

با مقایسه تعاریف (۲-۸) و (۲-۱۱)، می‌توان نوشت:

$$E_{\alpha,\beta}^{1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}=E_{\alpha,\beta}(z) \tag{۲-۱۲}$$

[1] Generalized Mittag-Lefler

به کمک تابع (۲-۱۱)، فرمول کلی تبدیل لاپلاس توابع میتاگ- لفلر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L\{t^{\beta-1}E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{\left(s^{\alpha}+\lambda\right)^{\gamma}} \qquad (۲\text{-}۱۳)$$

با استفاده از رابطه فوق، برخی از تبدیل لاپلاس‌های مهم و کاربردی مرتبط با توابع میتاگ- لفلر به راحتی قابل استنتاج هستند. برخی از این تبدیلات مهم عبارت‌اند از [۱، ۷۸]:

۱- اگر $\gamma = \beta = 1$، آنگاه:

$$L\{E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\} = L\{E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda} \qquad (۲\text{-}۱۴)$$

۲- اگر $\gamma = 1$ و $\beta = \alpha$، آنگاه:

$$L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{1}{s^{\alpha}+\lambda} \qquad (۲\text{-}۱۵)$$

۳- اگر $\gamma = 1$، آنگاه:

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+\lambda} \qquad (۲\text{-}۱۶)$$

۴- اگر $\gamma = 1$ و $\beta = \alpha+1$، آنگاه:

$$L\{t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{1}{s\left(s^{\alpha}+\lambda\right)} \qquad (۲\text{-}۱۷)$$

رابطه (۲-۱۷) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود.

$$L\{\frac{1}{\lambda}\left(1-E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\right)\} = \frac{1}{s\left(s^{\alpha}+\lambda\right)} \qquad (۲\text{-}۱۸)$$

۵- اگر $\gamma = k$ و $\beta = \alpha k$ (k عدد صحیح)، آنگاه:

$$L\{t^{\alpha k-1}E^{k}_{\alpha,\alpha k}(-\lambda t^{\alpha})\}=\frac{1}{(s^{\alpha}+\lambda)^{k}} \tag{۱۹-۲}$$

۶- اگر $\gamma=k$ و $\beta=\alpha k+1$، آنگاه:

$$L\{t^{\alpha k}E^{k}_{\alpha,\alpha k+1}(-\lambda t^{\alpha})\}=\frac{1}{s(s^{\alpha}+\lambda)^{k}} \tag{۲۰-۲}$$

۲-۲-۶- تابع میتاگ- لفلر از نوع ماتریسی

تابع میتاگ- لفلر از نوع ماتریسی به صورت رابطه (۲-۲۱) تعریف می‌شود [۷۹].

$$E_{\alpha}(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\qquad \alpha>0 \tag{۲۱-۲}$$

که در آن A ماتریس مربعی $n\times n$ است. تعریف (۲-۲۱) در حل معادلات از نوع ماتریسی کاربرد گسترده‌ای دارد. همچنین به کمک تعریف فوق، تبدیل لاپلاس‌های بخش ۲-۲-۵ قابل تعمیم به شکل ماتریسی اند. به عنوان مثال داریم [۸۰]:

$$L\{E_{\alpha}(\mp At^{\alpha})\}=s^{\alpha-1}(s^{\alpha}I\pm A)^{-1} \tag{۲۲-۲}$$

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\mp At^{\alpha})\}=s^{\alpha-\beta}(s^{\alpha}I\pm A)^{-1} \tag{۲۳-۲}$$

$$L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\mp At^{\alpha})\}=(s^{\alpha}I\pm A)^{-1} \tag{۲۴-۲}$$

با توجه به مطالب گفته شده در این بخش، در ادامه به معرفی مشتق و انتگرال مرتبه- کسری می‌پردازیم.

۲-۳- تعاریف متداول انتگرال و مشتق مرتبه- کسری و برخی از خواص مهم آن‌ها

محاسبات کسری تعمیمی از مشتق‌گیری و انتگرالگیری به مرتبه غیر- صحیح با عملگر اساسی $D_{t_0,t}^{\alpha}$ است که در آن t و t_0 محدوده عملیات مرتبه- کسری‌اند. عملگر مشتق- انتگرالی پیوسته مذکور به صورت رابطه (۲-۲۵) تعریف می‌گردد.

$$D_{t_0,t}^{\alpha}=\begin{cases}\dfrac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} & \mathrm{Re}\{\alpha\}>0\\ 1 & \mathrm{Re}\{\alpha\}=0\\ \int_{t_0}^{t}(d\tau)^{-\alpha} & \mathrm{Re}\{\alpha\}<0\end{cases} \tag{۲-۲۵}$$

که در آن α مرتبه عملیات بوده و می‌تواند گویا، اصم یا مختلط (درحالت کلی) انتخاب شود، ولی در این رساله $\alpha\in R^{+}$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین زمان اولیه $t_0=0$ لحاظ خواهد شد.

در حالت کلی، روش‌های مختلفی برای بسط انتگرال و مشتق مرتبه- کسری وجود دارند که هر کدام برای کاربردهای متفاوتی بکار می‌روند. اما در اکثر موارد از سه تعریف معروف گرانوالد- لتنیکف[۱] (GL)، ریمان- لیویل[۲] (RL) و کاپوتو[۳] (Caputo) استفاده می‌شود.

۲-۳-۱- تعریف انتگرال ریمان- لیویل (RL)

انتگرال کسری (ریمان- لیویل) $D_{0,t}^{-\alpha}$ با مرتبه- کسری $\alpha\in R^{+}$ تابع پیوسته $f(t)$ به صورت رابطه (۲-۲۶) تعریف می‌شود [۸۱]:

$$D_{0,t}^{-\alpha}f(t)=I_{0,t}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \tag{۲-۲۶}$$

[1] Grunwald-Letnikov

[2] Riemann-Liouville

[3] Caputo

همانند انتگرال مرتبه- صحیح، انتگرال مرتبه-کسری نیز دارای خاصیت توالی است. به بیانی دیگر:

خاصیت ۲-۱ (خاصیت توالی[1] انتگرال کسری) [۸۲]: به ازای $\alpha, \beta \in R^{+}$ داریم:

$$D_{0,t}^{-\alpha} D_{0,t}^{-\beta} f(t) = D_{0,t}^{-\alpha-\beta} f(t) \tag{۲-۲۷}$$

خاصیت ۲-۲ [۸۱]: اگر $f(t) \in C^{0}[0,T]$ به ازای $T > 0$ و $\alpha > 0$، آنگاه

$$D_{0,t}^{-\alpha} f(t)|_{t=0} = 0 \tag{۲-۲۸}$$

خاصیت ۲-۳ [۸۳]: اگر به ازای $t \geq 0$ داشته باشیم $f(t) \geq 0$ ($f(t) \leq 0$)، آنگاه $D_{0,t}^{-\alpha} f(t) \geq 0$ ($D_{0,t}^{-\alpha} f(t) \leq 0$) خواهد بود.

تبدیل لاپلاس رابطه (۲-۲۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت [۱]:

$$L\left[D_{0,t}^{-\alpha} f(t)\right] = \int_{0}^{\infty} e^{-st} D_{0,t}^{-\alpha} f(t) dt = s^{-\alpha} F(s) \tag{۲-۲۹}$$

۲-۳-۲- تعریف مشتق گرانوالد- لتنیکف (GL)

مشتق کسری گرانوالد- لتنیکف ${}_{GL}D_{0,t}^{\alpha}$ با مرتبه- کسری α به ازای $f(t) \in C^{m}[0,t]$، به صورت زیر بیان می‌شود [۸۱]:

$$ {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0) t^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \tag{۲-۳۰}$$

که در آن $m-1 \leq \alpha < m \in Z^{+}$ است.

البته تعریف اصلی مشتق کسری گرانوالد- لتنیکف به فرم رابطه حدی (۲-۳۱) است.

[1] Sequential property

$$ {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t}} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh) \qquad (۳۱-۲) $$

اما تعریف فوق مصطلح نبوده و غالبا برای تحلیل‌های ریاضی از تعریف اول استفاده می‌شود. همچنین، تفاوت عمده تعاریف فوق در ماهیت گسسته تعریف (۲-۳۱) است، که برای پیاده‌سازی مشتقات مرتبه- کسری بکار گرفته می‌شود.

خاصیت ۲-۴ (خاصیت توالی مشتق گرانوالد- لتنیکوف) [۸۱]: به ازای $\alpha, \beta \in R^{+}$ داریم:

$$ {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha}\, {}_{GL}D_{0,t}^{\beta} f(t) = {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha+\beta} f(t) \qquad (۳۲-۲) $$

تبدیل لاپلاس مشتق کسری گرانوالد- لتنیکوف نیز به شکل زیر بیان می‌شود:

$$ L\left[{}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-st}\, {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} f(t)dt = s^{\alpha}F(s) \qquad (۳۳-۲) $$

۲-۳-۳- تعریف مشتق ریمان- لیویل (RL)

مشتق ریمان- لیویل از مرتبه- کسری α تابع $f(t)$ توسط رابطه (۲-۳۴) تعریف می‌شود [۸۱]:

$$ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} D_{0,t}^{-(m-\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \qquad (۳۴-۲) $$

که در آن $m-1 \le \alpha < m \in Z^{+}$ است.

خاصیت ۲-۵ [۸۱]: اگر $f(t) \in C^m[0,t]$، آنگاه ${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} f(t)$.

در واقع، برای دسته‌ای از توابع که دارای مشتقات پیوسته تا درجه n هستند، تعاریف گرانوالد- لتنیکف و ریمان- لیویل معادل هم هستند. خاصیت مذکور در شبیه‌سازی مشتقات ریمان- لیویل کاربرد فراوانی دارد.

تبدیل لاپلاس رابطه (۲-۳۴) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$L\left[{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)\right]=\int_0^{\infty}e^{-st}\,{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)dt=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k}\left[D_{0,t}^{\alpha-k-1}f(t)\right]_{t=0} \qquad (۳۵-۲)$$

در حالات خاص با فرض $1>\alpha>0$ و $2<\alpha<1$، رابطه (۲-۳۵) به شکل زیر ساده می‌گردد:

$$L\left[{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)\right]=s^{\alpha}F(s)-\left[D_{0,t}^{\alpha-1}f(t)\right]_{t=0}, \qquad 0<\alpha<1 \qquad (۳۶-۲)$$

$$L\left[{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)\right]=s^{\alpha}F(s)-\left[D_{0,t}^{\alpha-1}f(t)\right]_{t=0}-s\left[D_{0,t}^{\alpha-2}f(t)\right]_{t=0}, \qquad 1<\alpha<2 \qquad (۳۷-۲)$$

در تعاریف فوق شرایط اولیه‌ای از جنس $\left[D_{0,t}^{\alpha-k-1}f(t)\right]_{t=0}$ مورد نیاز است. اگر چه در موارد جزئی تفسیرهایی برای این نوع شرایط اولیه بیان شده است [۸۴]، اما در حالت کلی تفسیر فیزیکی و اندازه-گیری چنین شرایط اولیه‌ای آسان نبوده و حتی غیرممکن است [۸۱]. به منظور غلبه بر این عیب، تعریف جدیدی توسط کاپوتو بیان شده است.

۲-۳-۴- تعریف مشتق کاپوتو (Caputo)

مشتق کاپوتو از مرتبه- کسری α تابع $f(t)\in C^{m}[0,t]$ به صورت زیر ارایه می‌شود [۸۱]:

$${}_{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t)=D_{0,t}^{-(m-\alpha)}D^{m}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^{t}\frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}}d\tau \qquad (۳۸-۲)$$

که در آن $m-1<\alpha<m\in Z^{+}$ می باشد.

به دلیل آنکه در تعریف فوق انتگرالپذیر بودن مشتق مرتبه m- ام تابع $f(t)$ لازم است، لذا رابطه فوق نسبت به تعریف ریمان- لیویل محدودتر می‌باشد. همچنین در حالت کلی داریم:

$${}_{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t)\neq{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t) \qquad (۳۹-۲)$$

تبدیل لاپلاس رابطه (۲-۳۸) را نیز می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۸۱]:

$$L\left[{}_{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t)\right]=\int_0^{\infty}e^{-st}\,{}_{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t)dt=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(t)\big|_{t=0} \qquad (۴۰-۲)$$

در حالات خاص با فرض $0 < \alpha < 1$ و $1 < \alpha < 2$، رابطه (۲-۴۰) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$L\left[{}_{C}D_{0,t}^{\alpha} f(t)\right] = s^{\alpha} F(s) - s^{\alpha-1} f(0), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{۲-۴۱}$$

$$L\left[{}_{C}D_{0,t}^{\alpha} f(t)\right] = s^{\alpha} F(s) - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f^{(1)}(0), \quad 1 < \alpha < 2 \tag{۲-۴۲}$$

شرایط اولیه روابط فوق همانند شرایط اولیه مشتقات مرتبه- صحیح بوده و لذا مشکلات تفسیر فیزیکی، اندازه‌گیری و شبیه‌سازی مشتق ریمان- لیویل را ندارند.

با فرض اینکه $f(t)$ به اندازه کافی نرم[1] (دارای مشتق‌های پیوسته) باشد، مشتق گرانوالد- لتنیکوف و ریمان- لیویل معادل هم خواهند بود. لذا در ادامه رساله مطالعات خود را به مشتقات ریمان- لیویل و کاپوتو محدود می‌سازیم. همچنین، به منظور ساده‌سازی نمایش‌ها، واژه‌های RL و Caputo جایگزین واژه‌های ریمان- لیویل و کاپوتو می‌گردند.

قضیه ۲-۱ [۸۱] : به ازای $f(t) \in C^m[0,\infty)$ و $m-1 < \alpha < m \in Z^+$، می توان نوشت:

۱- ${}_{C}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) \right)$.

۲- ${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} D_{0,t}^{-\alpha} f(t) = f(t)$.

۳- ${}_{C}D_{0,t}^{\alpha} D_{0,t}^{-\alpha} f(t) = f(t)$ به ازای $m=1$.

۴- $D_{0,t}^{-\alpha}\, {}_{C}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

۵- $D_{0,t}^{-\alpha}\, {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{m} \left[D_{0,t}^{\alpha-k} f(t) \right]_{t=0} \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$.

[1] Smooth

۶- $_{RL}D_{0,t}^{m}D_{0,t}^{-m}f(t)=f(t)$ و $D_{0,t}^{-m}\,{}_{RL}D_{0,t}^{m}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}x^{(k)}(0)$.

اثبات بند ۳: به کمک بندهای ۱ و ۲ و خاصیت ۲-۲ می‌توان نوشت:

$$_{C}D_{0,t}^{\alpha}\left(D_{0,t}^{-\alpha}f(t)\right)={}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}\left(D_{0,t}^{-\alpha}f(t)-D_{0,t}^{-\alpha}f(t)\left.\right|_{t=0}\right)={}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}\left(D_{0,t}^{-\alpha}f(t)-0\right)=f(t) \qquad (۴۳-۲)$$

اثبات مابقی قسمت‌ها در مراجع [۸۱-۸۲] بیان شده است.

یکی از ویژگی‌های اساسی مشتقات مرتبه- صحیح برقراری خاصیت توالی است. به بیانی دیگر، به ازای m و n دلخواه داریم $D^mD^nf(t)=D^{m+n}f(t)$. اما در حالت کلی این خاصیت برای مشتقات مرتبه- کسری برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر، به ازای $\alpha_1,\alpha_2\in R^+$ روابط $_{RL}D_{0,t}^{\alpha_1}\,{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha_2}f(t)={}_{RL}D_{0,t}^{\alpha_1+\alpha_2}f(t)$ و $_{C}D_{0,t}^{\alpha_1}\,{}_{C}D_{0,t}^{\alpha_2}f(t)={}_{C}D_{0,t}^{\alpha_1+\alpha_2}f(t)$ برقرار نیستند. لیکن تحت شرایط و تمهیدات ویژه‌ای خاصیت توالی برقرار خواهد بود.

خاصیت ۲-۶ (خاصیت توالی مشتق کپوتو) [۸۱]**:** اگر به ازای $T>0$، $(i=1,2)$ $\alpha_i\in(0,1)$ و $\alpha_1+\alpha_2\in(0,1]$ داشته باشیم $f(t)\in C^1[0,T]$، آنگاه داریم:

$$_{C}D_{0,t}^{\alpha_1}\,{}_{C}D_{0,t}^{\alpha_2}f(t)={}_{C}D_{0,t}^{\alpha_2}\,{}_{C}D_{0,t}^{\alpha_1}f(t)={}_{C}D_{0,t}^{\alpha_1+\alpha_2}f(t),\quad t\in[0,T] \qquad (۴۴-۲)$$

خاصیت فوق از جذابیت زیادی در طراحی کنترل‌کننده‌های مد لغزشی برخوردار بود و در فصل‌های بعدی بکار گرفته می‌شود.

در خاصیت ۲-۶، شرط $\alpha_1+\alpha_2\in(0,1]$ اهمیت زیادی داشته و برقرار نشدن آن برقراری رابطه (۲-۴۴) را ضمانت نمی‌کند. مثال زیر تاییدی بر این ادعاست:

$$_{0}^{C}D_{t}^{0.6}\,{}_{0}^{C}D_{t}^{0.5}t=\frac{1}{\Gamma(0.9)}t^{-0.1},\qquad {}_{0}^{C}D_{t}^{1.1}t=0$$

علاوه بر شرط مذکور، پیوسته بودن توابع $f(t)$ و $\dot{f}(t)$ (برقراری شرط C^1) نیز شرط مهمی است. برای اثبات این ادعا، خاصیت توالی به ازای دو تابع مختلف (اولی فاقد شرط C^1 و دومی دارای شرط C^1) در جدول ۲-۱ بررسی شده است. در این جدول، تابع اول دارای مشتق پیوسته نبوده، و لذا طبیعی است که ضمانتی برای برقراری خاصیت توالی وجود ندارد.

جدول ۲-۱: تاثیر شرط C^1 در برقراری خاصیت توالی.

تابع	$f(t)$	$\dot{f}(t)$	خاصیت توالی ($\alpha_1=\frac{1}{3}$ و $\alpha_2=\frac{1}{2}$)
$f_1(t)=t^{0.5}$	پیوسته	ناپیوسته $\dot{f}_1(t)=\frac{0.5}{t^{0.5}}$ $\dot{f}_1(0^+)\to\infty$	${}_C D_{0,t}^{\alpha_1+\alpha_2} f_1(t)=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2/3)}t^{-\frac{1}{3}}$ ${}_C D_{0,t}^{\alpha_1}\,{}_C D_{0,t}^{\alpha_2} f_1(t)=0$ ${}_C D_{0,t}^{\alpha_2}\,{}_C D_{0,t}^{\alpha_1} f_1(t)=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2/3)}t^{-\frac{1}{3}}$
$f_2(t)=t^{1.5}$	پیوسته	پیوسته $\dot{f}_2(t)=1.5t^{0.5}$ $\dot{f}_2(0)=0$	${}_C D_{0,t}^{\alpha_1+\alpha_2} f_2(t)={}_C D_{0,t}^{\alpha_1}\,{}_C D_{0,t}^{\alpha_2} f_2(t)$ $={}_C D_{0,t}^{\alpha_2}\,{}_C D_{0,t}^{\alpha_1} f_2(t)=\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/3)}t^{\frac{2}{3}}$

در حالت کلی، به ازای تعداد محدودی از نقاط ناپیوستگی $\dot{f}(t)$، همچنان $f(t)$ مشتق‌پذیر- پیوسته[1] (C^1) فرض می‌شود.

خاصیت ۲-۷ [۸۱]: به ازای هر عدد ثابت c داریم:

۱- ${}_C D_{0,t}^{\alpha} c=0$.

۲- ${}_{RL} D_{0,t}^{\alpha} c=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}$.

[1] Continuously differentiable

خاصیت مذکور نیز یکی دیگر از تفاوت‌های مشتق RL و Caputo را آشکار می‌سازد. به عبارت دیگر، مشتق Caputo عدد ثابت صفر است، اما مشتق RL آن در لحظات اولیه صفر نبوده و رفته رفته به سمت صفر میل می‌کند. در واقع، مشتقات Caputo و RL در حالت گذرا متفاوت‌اند اما در حالت دائمی باهم برابراند [۲].

برخی دیگر از خواص عملگرهای مرتبه- کسری [۸۱]:

۱- ترکیب با عملگر انتگرال: به ازای $\alpha, \beta \in R^{+}$، آنگاه ${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} D_{0,t}^{-\beta} f(t) = {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha-\beta} f(t)$.

۲- ترکیب با عملگر مشتق معمولی: به ازای $m-1 \leq \alpha < m \in Z^{+}$ و $n > 0$، آنگاه $D^{n}\, {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha+n} f(t) \neq {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} D^{n} f(t)$.

۳- ترکیب با عملگر مشتق معمولی[۸۲]: به ازای $m-1 < \alpha < m \in Z^{+}$ و $n > 0$، آنگاه $D^{n}\, {}_{C}D_{0,t}^{\alpha} f(t) \neq {}_{C}D_{0,t}^{\alpha+n} f(t) = {}_{C}D_{0,t}^{\alpha} D^{n} f(t)$.

۴- به ازای $\alpha \in R^{+}$ می‌توان نوشت:

الف) ${}_{RL}D_{0,t}^{1-\alpha}\, {}_{C}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = Df(t) = \dot{f}(t)$.

ب) ${}_{C}D_{0,t}^{1-\alpha} f(t) = D_{0,t}^{-\alpha} Df(t) = D_{0,t}^{-\alpha} \dot{f}(t)$.

ج) ${}_{RL}D_{0,t}^{1-\alpha} f(t) = DD_{0,t}^{-\alpha} f(t)$.

۲-۴- قاعده لایبنیتز

لازم به ذکر است که برخی از خواص مشتقات مرتبه- صحیح از قبیل قاعده زنجیره‌ای و قاعده لایبنیتز[۱] برای مشتقات مرتبه- کسری برقرار نمی‌باشند. به عنوان نمونه، قاعده لایبنیتز در محاسبه مشتق مرتبه- صحیح (مرتبه n - ام) تابع $g(t)f(t)$ عبارت است از [۲]:

$$\frac{d^n}{dt^n}\big(g(t)f(t)\big)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(t)f^{(n-k)}(t) \tag{۴۵-۲}$$

که با فرض $n=1$، مشتق فوق به شکل $\frac{d}{dt}\big(g(t)f(t)\big)=g(t)f^{(1)}(t)+g^{(1)}(t)f(t)$ ساده می‌شود. اما در حالتی که مشتق از نوع مرتبه- کسری ($n=\alpha$) باشد، رابطه (۲-۴۵) برقرار نبوده و رابطه صحیح به فرم زیر خواهد بود [۸۵]:

$${}_{RL}D^{\alpha}\big(g(t)f(t)\big)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}D^{k}g(t)\,{}_{RL}D^{\alpha-k}f(t) \tag{۴۶-۲}$$

که در آن $k>[\alpha]+1$ می‌باشد. تفاوت اصلی رابطه فوق با رابطه (۲-۴۵)، نامحدود بودن کران بالای سیگما است که باعث نامحدود شدن تعداد جملات مشتق می‌شود. همین امر یکی از عوامل اصلی محدودیت کاربرد مشتقات مرتبه- کسری است. به منظور تشریح بیشتر این مفهوم، فرض کنید که $g(t)=f(t)$ باشد، در این صورت می توان نوشت:

$$\frac{d^n}{dt^n}f^2(t)=2f(t)Df(t)=2f(t)\dot{f}(t) \tag{۴۷-۲}$$

$${}_{RL}D^{\alpha}f^2(t)=f(t)\,{}_{RL}D^{\alpha}f(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}\,{}_{RL}D^{k}f(t)\,{}_{RL}D^{\alpha-k}f(t) \tag{۴۸-۲}$$

[1] Leibniz Rule

تابع فوق ($f^2(t)$) ساده‌ترین تابع لیاپانوفی است که در تحلیل‌های پایداری کاربرد دارد. اما رابطه (۲-۴۸) دارای جملات نامحدودیست که یکی از دلایل مهم پیچیدگی تحلیل‌های پایداری سیستم‌های مرتبه- کسری غیرخطی است. با توجه به رابطه (۲-۴۹)، مشکل مذکور برای مشتق Caputo نیز برقرار است [۸۶].

$$ {}_{C}D^{\alpha}\big(g(t)f(t)\big)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}D^{k}g(t)\,{}_{C}D^{\alpha-k}f(t) \qquad (۲-۴۹)$$

۲-۵- محاسبه مشتق و انتگرال کسری تابع $f(t)=t^{\nu}\,,\nu>-1$

در این بخش، جهت آشنایی بیشتر با کاربرد فرمول‌های ارایه شده و همچنین درک تفاوت این نوع از محاسبات با محاسبات مرتبه- صحیح، مشتق و انتگرال مرتبه- کسری یک تابع ساده و در عین حال پرکاربرد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

انتگرال کسری و مشتقات RL و Caputo تابع $f(t)=t^{\nu}\,,\nu>-1$ به ازای $m-1<\alpha<m$ به صورت روابط زیر قابل محاسبه‌اند [۲، ۸۷]:

$$D_{0,t}^{-\alpha}f(t)=\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+\alpha)}t^{\nu+\alpha} \qquad (۲-۵۰)$$

$$ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)=\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\alpha)}t^{\nu-\alpha} \qquad (۲-۵۱)$$

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\alpha)}t^{\nu-\alpha}, & \nu>m-1,\ \ \nu\in R\\ 0 & \nu\le m-1,\ \ \nu\in \mathrm{N}\end{cases} \qquad (۲-۵۲)$$

با فرض $\alpha=0.5$ و با توجه به روابط فوق، می‌توان به نتایج ساده‌تر زیر دست یافت ($\Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$ و $\Gamma(0)=\infty$):

$$f(t)=t^2 \quad \rightarrow \quad {}_C D_{0,t}^{\alpha} f(t) = {}_{RL} D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{1.5}$$

$$f(t)=t^{0.5} \quad \rightarrow \quad {}_C D_{0,t}^{\alpha} f(t) = {}_{RL} D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \Gamma(1+0.5) = 0.5\sqrt{\pi}$$

$$f(t)=t^{-0.5} \quad \rightarrow \quad {}_C D_{0,t}^{\alpha} f(t) = 0, \quad {}_{RL} D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(0.5)}{\Gamma(0)} t^{-1} = 0$$

$$f(t)=c=ct^{0} \quad \rightarrow \quad {}_C D_{0,t}^{\alpha} f(t) = 0, \quad {}_{RL} D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0.5)} t^{-0.5} = \frac{c}{\sqrt{\pi t}} \neq 0$$

ملاحظه می‌شود که مشتق RL یک مقدار ثابت، برخلاف مشتق مرتبه- صحیح و Caputo آن صفر نشده و حتی به متغیر t وابسته است.

۲-۶- معادلات دیفرانسیلی مرتبه- کسری و مفهوم شرایط اولیه

با فرض پیوسته بودن $f(t,x(t))$ و $\alpha \in (0,1)$، معادلات دیفرانسلی بر مبنای مشتقات RL و Caputo به شکل زیر قابل بیان‌اند:

$$ {}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) = f(t,x(t)) \tag{۵۳-۲}$$

$$ {}_{RL} D_{0,t}^{\alpha} x(t) = f(t,x(t)) \tag{۵۴-۲}$$

با اعمال انتگرال $D_{0,t}^{-\alpha}$ به طرفین روابط فوق، و با استناد به قضیه ۲-۱ می‌توان نوشت:

$$x(t) - x(0) = D_{0,t}^{-\alpha} f(t,x(t)) \tag{۵۵-۲}$$

$$x(t) - \frac{D^{\alpha-1}x(t)|_{t=0}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} = D_{0,t}^{-\alpha} f(t,x(t)) \tag{۵۶-۲}$$

به عبارت ساده‌تر

$$x(t) = D_{0,t}^{-\alpha} f(t,x(t)) + x(0) \tag{۵۷-۲}$$

$$x(t) = D_{0,t}^{-\alpha} f(t,x(t)) + \frac{D^{\alpha-1}x(t)|_{t=0}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \tag{۵۸-۲}$$

با توجه به معادلات (۲-۵۷) و (۲-۵۸)، واضح است که شرایط اولیه معادله دیفرانسیلی با مشتق Caputo همانند معادلات با مشتقات معمولی است ($x(0)$). اما شرایط اولیه معادله دیفرانسیلی با مشتق RL کاملا متفاوت می‌باشد ($\frac{D^{\alpha-1}x(t)\mid_{t=0}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$). در حالت کلی، تفسیر و پیاده‌سازی چنین شرایط اولیه‌ای مشکل بوده و برای دوری از این مشکل معمولا $x(0)=0$ در نظر گرفته می‌شود. در حالتی که $x(0)=0$ باشد، هر دو معادله (۲-۵۷) و (۲-۵۸) یکسان خواهند بود ($x(t)=D_{0,t}^{-\alpha}f(t,x(t))$).

در ادامه این بخش، به بررسی و تعیین ترمینال- پایین و ترمینال- بالای مشتقات RL و Caputo می‌پردازیم.

اکنون، به ازای $m-1\le\alpha<m\in Z^{+}$ ، روابط حدی زیر برای مشتق RL قابل استنتاج اند [۸۱]:

$$\lim_{\alpha\to(m-1)^{+}} {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=x^{(m-1)}(0)+\int_0^t x^{(m)}(\tau)d\tau=\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} \tag{۵۹-۲}$$

$$\lim_{\alpha\to m^{-}} {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=x^{(m)}(0)+\int_0^t x^{(m+1)}(\tau)d\tau=\frac{d^{m}x(t)}{dt^{m}} \tag{۶۰-۲}$$

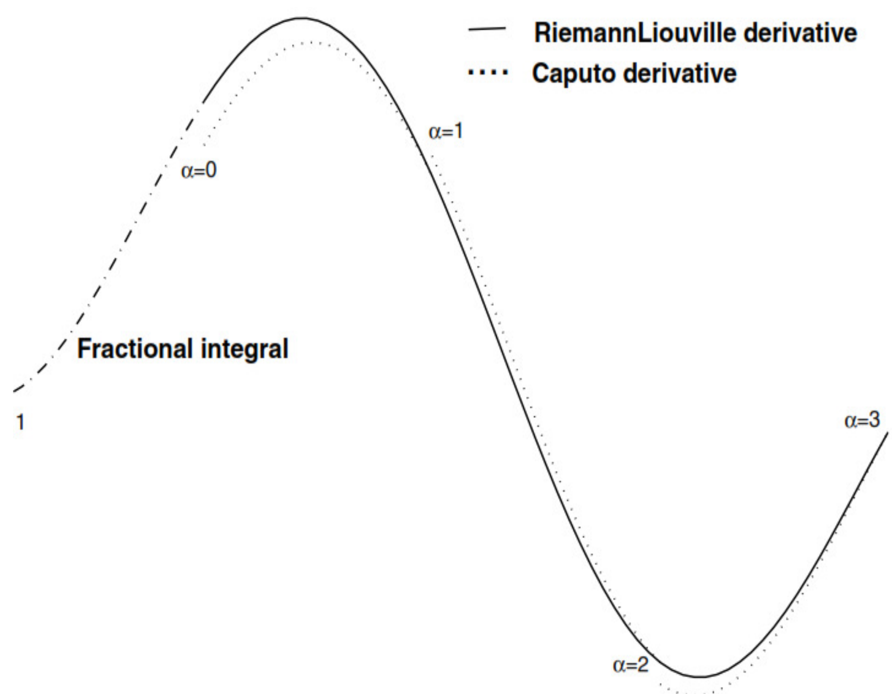
همچنین به ازای $m-1<\alpha<m\in Z^{+}$ ، روابط حدی مشتق Caputo نیز عبارت‌اند از:

$$\lim_{\alpha\to(m-1)^{+}} {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=\int_0^t x^{(m)}(\tau)d\tau=\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}-\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}\mid_{t=0} \tag{۶۱-۲}$$

$$\lim_{\alpha\to m^{-}} {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=x^{(m)}(0)+\int_0^t x^{(m+1)}(\tau)d\tau=\frac{d^{m}x(t)}{dt^{m}} \tag{۶۲-۲}$$

از فرمول‌های (۲-۵۹) و (۲-۶۰) مشخص می‌شود که در واقع مشتق ${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t)$ پلی مابین $\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}$ و $\frac{d^{m}x(t)}{dt^{m}}$ است. این ویژه‌گی را خاصیت همنواختی[1] نامند. همچنین، از روابط (۲-۶۱) و (۲-۶۲) واضح است که مشتق ${}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)$ از ترمینال- پایین فاقد خاصیت همنواختی است.

بیان واضح و شماتیکی خاصیت همنواختی در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۲-۴: خاصیت همنواختی عملگرهای مرتبه- کسری [۸۱].

۲-۷- پاسخ زمانی معادلات دیفرانسیلی خطی مرتبه- کسری

در قسمت انتهایی این فصل، پاسخ زمانی معادلات دیفرانسیلی خطی مرتبه- کسری با دو نوع مشتق متفاوت (RL و Caputo) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[1] Consistency

۲-۷-۱- معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه- کسری با مشتق Caputo

معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه- کسری با مشتق Caputo (۲-۶۳) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} {}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \qquad (۲-۶۳)$$

که در آن $x(t) \in R^{n\times 1}$، $A \in R^{n\times n}$ و $0 < \alpha < 1$ است.

به کمک تبدیل لاپلاس مشتق Caputo می‌توان نوشت:

$$s^{\alpha} X(s) - s^{\alpha-1} x_0 = AX(s) \qquad (۲-۶۴)$$

ساده سازی رابطه فوق نتیجه می‌دهد:

$$(s^{\alpha} I - A) X(s) = s^{\alpha-1} x_0 \quad \rightarrow \quad X(s) = x_0 s^{\alpha-1} (s^{\alpha} I - A)^{-1} \qquad (۲-۶۵)$$

با بکارگیری تبدیل لاپلاس تابع میتاگ- لفلر ماتریسی (۲-۲۲)، پاسخ زمانی معادله (۲-۶۵) به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$x(t) = x_0 E_{\alpha}(At^{\alpha}) \qquad (۲-۶۶)$$

۲-۷-۲- معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه- کسری با مشتق RL

معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه- کسری با مشتق RL زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} {}_{RL} D_{0,t}^{\alpha} x(t) &= Ax(t) \\ D_{0,t}^{\alpha-1} x(t) |_{t=0} &= x_0 \end{aligned} \qquad (۲-۶۷)$$

که در آن $x(t) \in R^{n\times 1}$، $A \in R^{n\times n}$ و $0 < \alpha < 1$ است.

با اعمال تبدیل لاپلاس به طرفین رابطه (۲-۶۷)، معادله جبری زیر حاصل می‌گردد:

$$s^{\alpha}X(s)-x_0=AX(s) \tag{۶۸-۲}$$

که قابل بازنویسی به شکل (۲-۶۹) است.

$$(s^{\alpha}I-A)X(s)=x_0 \quad \rightarrow \quad X(s)=x_0(s^{\alpha}I-A)^{-1} \tag{۶۹-۲}$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس میتاگ- لفلر ماتریسی (۲-۲۴)، پاسخ زمانی معادله (۲-۶۹) به صورت رابطه (۲-۷۰) تعیین می‌شود.

$$x(t)=x_0t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}) \tag{۷۰-۲}$$

با مقایسه پاسخ‌های زمانی سیستم‌های (۲-۶۳) و (۲-۶۷)، تفاوت دیگری از مشتق‌های RL و Caputo آشکار می‌شود. در حالت کلی، پاسخ‌های زمانی بدست آمده (۲-۶۶) و (۲-۷۰)، کاربرد زیادی در تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه- کسری دارند.

فصل سوم

پایداری سیستم‌های مرتبه- کسری خطی و غیرخطی

۳-۱- مقدمه

در این فصل، مرور جامعی بر مهمترین قضایای پایداری مربوط به سیستم‌های خطی و غیرخطی مرتبه- کسری مطرح شده در سال‌های اخیر انجام می‌گیرد. همچنین، برای تشریح بیشتر برخی از قضایای پایداری، مثال‌هایی نیز بیان شده است.

از طرف دیگر، به دلیل ماهیت غیرخطی سیستم‌های مورد مطالعه در این رساله، تحلیل‌های پایداری غیرخطی از اهمیت بیشتری برخوردارند. در حالت کلی، تحلیل‌های غیرخطی بیان شده در این فصل مربوط به چهار دسته از مراجع معروف [۸۶]، [۸۸-۸۹]، [۹۰] و [۹۱-۹۲] می‌باشند. از بین این منابع، مراجع [۸۸-۸۹] مبنای اصلی طراحی‌های انجام شده در فصل‌های آتی می‌باشند. همچنین، مقالات [۸۶] و [۹۱-۹۲] که بعد از اتمام رساله منتشر شده‌اند، صرفا به منظور تکمیل مرور منابع این فصل مورد بررسی قرار گرفته و در ادامه رساله کاربردی ندارند.

۳-۲- پایداری سیستم‌های خطی مرتبه- کسری

۳-۲-۱- پایداری سیستم خطی مرتبه- کسری با مشتق Caputo

سیستم خطی مستقل از زمان مرتبه- کسری با مشتق Caputo (۳-۱) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{۳-۱}$$

که در آن $\alpha \in (0, 1)$، $x \in R^n$ و $A \in R^{n\times n}$ است. به منظور درک تاثیر پارامتر α بر روی پایداری سیستم فوق، نواحی پایداری به ازای مقادیر مختلف α در شکل ۳-۱ رسم شده است. همانطور که از این شکل برمی‌آید، بزرگترین ناحیه پایداری به ازای $0<\alpha<1$ حاصل می‌گردد.

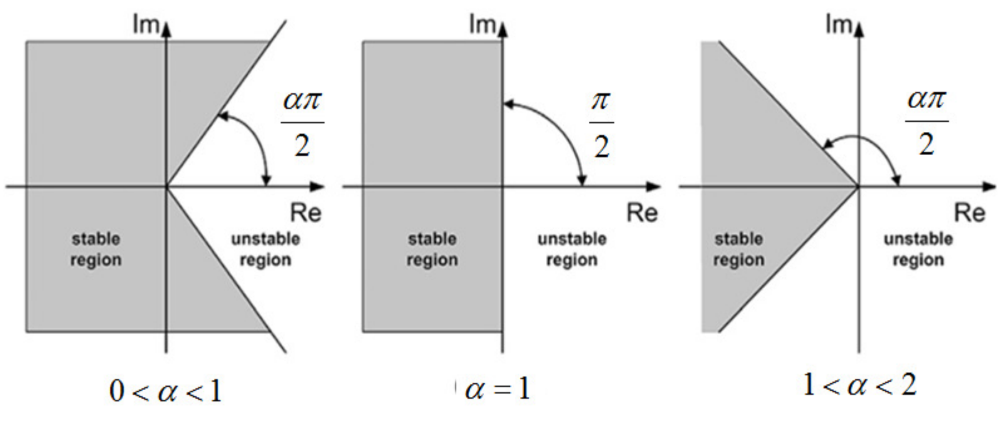
پایداری سیستم (۳-۱)، برای اولین بار توسط ماتیگنن[1] در قالب قضیه زیر مورد بررسی قرار گرفت.

قضیه ۳-۱ [۹۳]**:** سیستم مستقل از زمان (۳-۱) با مشتق Caputo، $0<\alpha\le 1$ و شرایط اولیه $x_0 = x(0)$:

الف) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر $|\arg(\lambda(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$ باشد. در این صورت، اجزای حالت سیستم با نرخ کاهشی $t^{-\alpha}$ به سمت صفر نزدیک می‌شوند.

ب) پایدار است اگر و فقط اگر پایدار مجانبی باشد، یا مقادیر ویژه بحرانی‌ای که در رابطه $|\arg(\lambda(A))| = \frac{\alpha\pi}{2}$ صدق می‌کنند، از نوع ساده باشد، یا به عبارت دیگر تکثر هندسی[2] مقادیر ویژه واحد باشد. ($\lambda(A)$ نشان دهنده مقادیر ویژه ماتریس A است).

در قضیه فوق، تعداد بردارهای ویژه مستقل متناظر با مقادیر ویژه سیستم (۳-۱) را تکثر از نوع هندسی گویند.



شکل ۳-۱: نواحی پایداری سیستم‌های مرتبه- کسری به ازای مقادیر مختلف α [۱].

[1] Matignon

[2] Geometric multiplicity

در ادامه، برای بررسی پایداری از دیدگاه ورودی- خروجی (BIBO)، فرم کامل معادلات حالت سیستم بصورت (۳-۲) لحاظ می‌گردد.

$$\begin{cases} {}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \qquad x(0) = x_0 \end{cases} \tag{۳-۲}$$

در عبارت فوق $\alpha \in (0,\, 1)$، $x \in R^n$، $y \in R^l$، $u \in R^m$، $A \in R^{n \times n}$، $B \in R^{n \times m}$ و $C \in R^{l \times n}$ می‌باشد.

قضیه ۳-۲ [۹۳]: اگر سه‌تایی $(A\,, B\,, C)$ مینیمال باشد، آنگاه سیستم (۳-۲) پایدار BIBO است اگر و فقط اگر $\left|\arg(\lambda(A))\right| > \dfrac{\alpha\pi}{2}$ باشد.

مثال ۳-۱ [۷۸]: برای بررسی پایداری سیستم

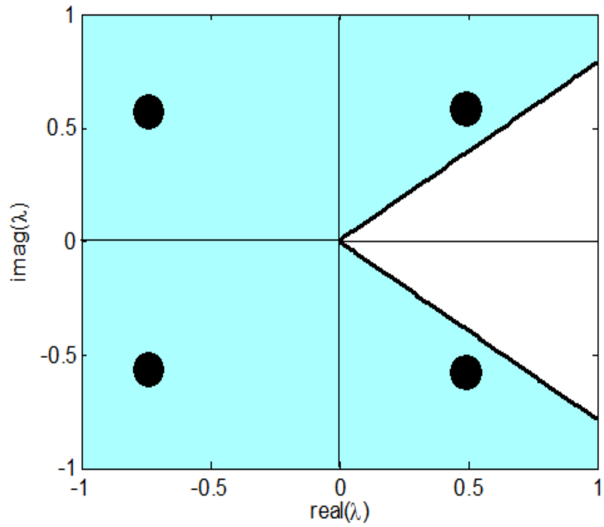
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s^{1.5} + 0.5} = \frac{1}{(s^{0.5})^4 + 0.5(s^{0.5})^3 + 0.5} \tag{۳-۳}$$

با فرض $\lambda = s^{0.5}$، معادلات حالت کانونی سیستم به شکل زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} {}_C D_{0,t}^{0.5} x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{۳-۴}$$

مقادیر ویژه سیستم (۳-۴)، عبارت‌اند از $\lambda_{1,2} = -0.7388 \pm 0.5688j$ و $\lambda_{3,4} = 0.4888 \pm 0.5799j$.

همچنین، با توجه به اینکه $\left|\arg(\lambda_{1,2})\right| = 2.4855rad > \dfrac{\pi}{4}$ و $\left|\arg(\lambda_{3,4})\right| = 0.8704rad > \dfrac{\pi}{4}$، لذا سیستم مذکور پایدار است. برای تایید این موضوع، مکان مقادیر ویژه سیستم در شکل ۳-۲ رسم شده است. همانطور که از این شکل بر می‌آید، هر چهار مقدار ویژه در ناحیه پایداری (ناحیه رنگی) قرار دارند.



شکل ۳-۲: مکان مقادیر ویژه سیستم (۳-۳) در صفحه مختلط.

در مواردی که مرتبه هر یک از معادلات حالت متمایز از دیگری باشد، قضایای ۳-۱ و ۳-۲ را نمی‌توان بکار برد. در چنین حالتی، تحلیل در حوزه s را می‌توان جایگزین تحلیل‌های حوزه- زمان نمود. به منظور تبین این مفهوم، تابع تبدیل سیستم مرتبه- متناسب (۳-۵) با $0<\alpha<1$ و $k\in Z$ را در نظر بگیرید.

$$G(s)=K_0\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k(s^{\alpha})^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k(s^{\alpha})^k}=K_0\frac{Q(s^{\alpha})}{P(s^{\alpha})} \tag{۳-۵}$$

قضیه ۳-۳ [۷۸]: سیستم مرتبه- متناسب[1] توصیف شده با تابع تبدیل (۳-۵) پایدار است اگر و فقط اگر $\left|\arg(\lambda_i)\right|>\frac{\alpha\pi}{2}$ باشد (λ_i ریشه i-ام چند جمله‌ای $P(\lambda=s^{\alpha})$ است).

با انتخاب $\alpha=\frac{1}{m}$ و $\lambda=s^{\alpha}$، معادله مشخصه مرتبه- کسری $P(s^{\alpha})$، تبدیل به معادله مشخصه‌ای با مرتبه- صحیح $P(\lambda)$ شده، و پایداری یا ناپایداری سیستم از روی ریشه‌های $P(\lambda)$ قابل استنتاج است. اما تعدادی از ریشه‌های بدست آمده ممکن است غیرفیزیکی باشند.

[1] Commensurate-order

تبصره ۳-۱: در حالت کلی ریشه‌های معادله مشخصه $P(\lambda)$ بصورت زیر قابل دسته بندی اند:

۱- محدوده ناپایداری $\left|\arg(\lambda_i)\right| < \frac{\pi}{2m}$.

۲- محدوده پایداری $\left|\arg(\lambda_i)\right| > \frac{\pi}{2m}$: الف) محدوده فیزیکی $\frac{\pi}{2m} < \left|\arg(\lambda_i)\right| < \frac{\pi}{m}$. ب) محدوده غیرفیزیکی $\left|\arg(\lambda_i)\right| > \frac{\pi}{m}$.

مثال ۳-۲ [۷۸]: برای بررسی پایداری سیستم زیر

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1} \tag{۳-۶}$$

مدل فضای حالت سیستم را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}_C D_{0,t}^{\frac{9}{10}} x_1(t) \\ {}_C D_{0,t}^{\frac{13}{10}} x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/0.8 & -0.5/0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/0.8 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۳-۷}$$

به دلیل مرتبه‌های متفاوت معادله (۳-۷)، قضیه ۳-۱ بصورت مستقیم قابل اعمال نخواهد بود. در ادامه به منظور بررسی پایداری، معادله مشخصه سیستم (۳-۶) را در نظر بگیرید:

$$P(s^{\alpha}) : 0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 0.8s^{\frac{22}{10}} + 0.5s^{\frac{9}{10}} + 1 = 0 \tag{۳-۸}$$

با فرض $m = 10$ و $\lambda = s^{\frac{1}{10}}$، چندجمله‌ای مشخصه سیستم بصورت رابطه (۳-۹) قابل بازنویسی است.

$$P(\lambda) : 0.8\lambda^{22} + 0.5\lambda^{9} + 1 = 0 \tag{۳-۹}$$

ریشه‌های معادله فوق عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{1,2} = -0.9970 \pm 0.1182j, \quad \left|\arg(\lambda_{1,2})\right| = 3.023,\\
&\lambda_{3,4} = -0.9297 \pm 0.4414j, \quad \left|\arg(\lambda_{3,4})\right| = 2.698,\\
&\lambda_{5,6} = -0.7465 \pm 0.6420j, \quad \left|\arg(\lambda_{5,6})\right| = 2.431,\\
&\lambda_{7,8} = -0.5661 \pm 0.9625j, \quad \left|\arg(\lambda_{7,8})\right| = 2.151,\\
&\lambda_{9,10} = -0.259 \pm 0.8633j, \quad \left|\arg(\lambda_{9,10})\right| = 1.834,\\
&\lambda_{11,12} = -0.0254 \pm 1.0111j, \quad \left|\arg(\lambda_{11,12})\right| = 1.595,\\
&\lambda_{13,14} = 0.3080 \pm 0.9772j, \quad \left|\arg(\lambda_{13,14})\right| = 1.265,\\
&\lambda_{15,16} = 0.5243 \pm 0.8359j, \quad \left|\arg(\lambda_{15,16})\right| = 1.010,\\
&\lambda_{17,18} = 0.7793 \pm 0.6795j, \quad \left|\arg(\lambda_{17,18})\right| = 0.717,\\
&\lambda_{19,20} = 0.9084 \pm 0.3960j, \quad \left|\arg(\lambda_{19,20})\right| = 0.411,\\
&\lambda_{21,22} = 1.0045 \pm 0.1684j, \quad \left|\arg(\lambda_{21,22})\right| = 0.1661,
\end{aligned}$$

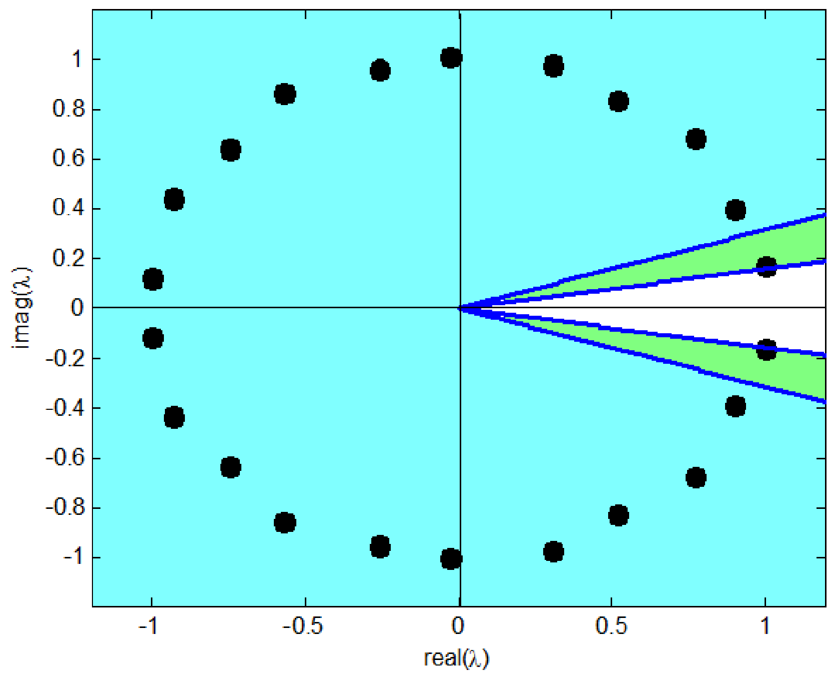
به دلیل اینکه همه ریشه‌های $P(\lambda)$ در شرط $\left|\arg(\lambda_i)\right| > \frac{\pi}{20}$ صدق می‌کنند، لذا سیستم فوق پایدار است. اما فقط دو ریشه $\lambda_{21,22}$ که در ناحیه $\frac{\pi}{20} < \left|\arg(\lambda_i)\right| < \frac{\pi}{10}$ قرار دارند از نوع فیزیکی بوده و مابقی از نوع غیرفیزیکی‌اند. برای تشریح بیشتر موضوع، مکان ریشه‌ها به همراه نواحی پایداری و ناپایداری در شکل ۳-۳ رسم شده‌اند. در این شکل، ناحیه سفید رنگ نشانگر ناحیه ناپایداری، ناحیه سبز رنگ نشانگر ناحیه پایدار- فیزیکی و ناحیه آبی رنگ نشانگر ناحیه پایدار- غیر فیزیکی هستند.

ویژگی اصلی قضایای مذکور، بررسی پایداری به کمک مقادیر ویژه ماتریس A یا قطب‌های تابع تبدیل $G(s)$ است. اما قضایای دیگری نیز پیشنهاد شده‌اند که از مفهوم نامساوی ماتریسی خطی[۱] (LMI) کمک می‌گیرند [۹۴]. در ادامه، به بیان برخی از این قضایا می‌پردازیم.

قضیه ۳-۴ [۹۵]: سیستم مرتبه- کسری توصیف شده با معادله (۳-۱) با مرتبه $0 < \alpha < 1$ پایدار مجانبی است اگر ماتریس $P > 0$ و $P \in R^{n \times n}$ وجود داشته باشد که در نامساوی (۳-۱۰) صدق کند.

[1] Linear Matrix Inequality

$$\left(A^{\frac{1}{\alpha}}\right)^T P + P\left(A^{\frac{1}{\alpha}}\right) < 0 \qquad (۱۰-۳)$$



شکل ۳-۳: مکان ریشه‌های سیستم (۳-۶) در صفحه مختلط.

رابطه (۳-۱۰) شرط کافی برای پایداری بوده، و شرط محافظه‌کارانه‌ای است. به منظور دوری از این محافظه‌کاری، قضیه جدیدی بر پایه تحلیل هندسی از ناحیه پایداری به صورت زیر پیشنهاد شده است:

قضیه ۳-۵ [۹۵]: سیستم مرتبه- کسری توصیف شده با معادله (۳-۱) و مرتبه $0<\alpha<1$ پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر ماتریس مثبت معین $P \in S$ وجود داشته باشد (S نشان دهنده مجموعه‌ای از ماتریس‌های متقارن است)، بطوریکه

$$\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right)^T P + P\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right) < 0 \qquad (۱۱-۳)$$

در رابطه فوق، $(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ به صورت $e^{\frac{1}{2-\alpha}\log(-A)}$ تعریف می‌گردد.

روابط ۳-۱۰ و ۳-۱۱ نسبت به ماتریس A خطی نمی‌باشند، لذا کاربرد این روابط به موارد خاصی از پایداری محدود می‌شود. به منظور غلبه بر این مشکل، قضایای متفاوتی در مرجع [۹۵] پیشنهاد شده است.

۳-۲-۲- پایداری سیستم خطی مرتبه- کسری با مشتق RL

در برخی از منابع مانند [۹۶]، پایداری سیستم (۳-۱) با جایگزینی عملگر ${}_{C}D_{0,t}^{\alpha}$ با ${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}$ مورد مطالعه قرار گرفته است. اما در حالت کلی، به دلیل کاربرد فیزیکی محدود عملگر ${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}$، در ادامه به توصیف مختصری از معادلات شامل این عملگر اکتفا خواهد شد.

قضیه ۳-۶ [۹۴، ۹۶]: سیستم خطی مستقل از زمان کسری ($0<\alpha<1$) با عملگر مشتق RL زیر

$$\begin{aligned} &{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = Ax(t) \\ &x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{۳-۱۲}$$

الف) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر $\left|\arg(\lambda(A))\right| > \frac{\alpha\pi}{2}$ باشد، یا ماتریس A k- مقدار ویژه متناظر با بلوک‌های جردن $diag(J_1,J_2,\ldots,J_i)$ داشته باشد، که در آن J_l فرم کانونی جردن با مرتبه n_l، $\sum_{l=1}^{i} n_l = k$ و $n_l\alpha<1$، $1\le l\le i$ (در این حالت، اجزای حالت سیستم با نرخ کاهشی $t^{-\alpha-1}$ به سمت صفر نزدیک می‌شوند).

ب) پایدار است اگر و فقط اگر پایدار مجانبی باشد، یا مقادیر ویژه بحرانی‌ای که در رابطه صدق می‌کنند، کثرت هندسی و جبری یکسانی داشته باشند، یا ماتریس A k- مقدار ویژه متناظر با بلوک‌های جردن $diag(J_1,J_2,\ldots,J_i)$ داشته باشد، که در آن J_l فرم کانونی جردن با مرتبه n_l، $\sum_{l=1}^{i} n_l = k$ و $n_l\alpha \le 1$، $1\le l\le i$.

در قضیه مذکور، تعداد تکرارهای یک مقدار ویژه را تکثر جبری می‌نامند.

با توجه به قضایای ۳-۱ و ۳-۶، تفاوت اصلی سیستم‌های (۳-۱) و (۳-۱۲) در نرخ کاهشی آنها و شرط $n_l \alpha < 1$ می‌باشد.

۳-۲-۳- پایداری سیستم خطی مرتبه- کسری به ازای $1 < \alpha < 2$

در بعضی از منابع مانند [۹۷]، سیستم (۳-۱) با پارامتر کسری $1 < \alpha < 2$ مورد بررسی قرار گرفته است. اما به دلیل کاهش محدوده پایداری سیستم به ازای $1 < \alpha < 2$، تحلیل فوق از محبوبیت کمتری برخوردار است.

در ادامه، به بیان دو قضیه پایداری به ازای $1 < \alpha < 2$ اکتفا می‌کنیم.

قضیه ۳-۷ [۹۷]: سیستم مستقل از زمان (۳-۱) با مشتق Caputo، $1 < \alpha \le 2$ و شرایط اولیه $x_0 = x(0)$:

الف) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر $\left|\arg(\lambda(A))\right| > \frac{\alpha\pi}{2}$ باشد. در این صورت، اجزای حالت سیستم با نرخ کاهشی $t^{-\alpha+1}$ به سمت صفر نزدیک می‌شوند.

ب) پایدار است اگر و فقط اگر پایدار مجانبی باشد، یا مقادیر ویژه بحرانی‌ای که در رابطه $\left|\arg(\lambda(A))\right| = \frac{\alpha\pi}{2}$ صدق می‌کنند، تکثر هندسی و جبری یکسانی داشته باشند.

قضیه پایداری سیستم (۳-۱) به ازای $1 < \alpha < 2$ را می‌توان به شکل LMI نیز بیان نمود.

قضیه ۳-۸ [۹۷]: سیستم مرتبه- کسری توصیف شده با معادله (۳-۱) با مرتبه $1 < \alpha < 2$ پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر ماتریس $P = P^T > 0$، $P \in R^{n \times n}$ وجود داشته باشد بطوری که

$$\begin{pmatrix} (A^T P + PA)\sin(\alpha\frac{\pi}{2}) & (A^T P - PA)\cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \\ (-A^T P + PA)\cos(\alpha\frac{\pi}{2}) & (A^T P + PA)\sin(\alpha\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} < 0 \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

۳-۲-۴- پایداری سیستم خطی مرتبه- صحیح متناظر با سیستم مرتبه- کسری

در مرجع [۹۸]، روش ارزشمندی دیگری برای بررسی پایداری سیستم‌های مرتبه- کسری ارایه شده است. این روش تحلیل پایداری سیستم مرتبه- کسری را به پایداری سیستم مرتبه- صحیح معادل تبدیل می‌کند. قضایا ۳-۹ و ۳-۱۰ بر مبنای این ایده پیشنهاد شده‌اند.

قضیه ۳-۹ [۹۸]: سیستم (۳-۱) با مشتق Caputo و مرتبه $0 \le \alpha < 2$ پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم (۳-۱۴) پایدار مجانبی باشد.

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\begin{pmatrix} A\sin(\alpha\frac{\pi}{2}) & A\cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \\ -A\cos(\alpha\frac{\pi}{2}) & A\sin(\alpha\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}\tilde{x}(t) \qquad (۱۴-۳)$$

قضیه ۳-۱۰ [۹۸]: همه مقادیر ویژه سیستم (۳-۱) با مشتق Caputo و مرتبه $0 < \alpha \le 1$ در ناحیه ناپایداری قرار می‌گیرند اگر و فقط اگر سیستم (۳-۱۵) پایدار مجانبی باشد.

$$\dot{\tilde{x}}(t)=-\begin{pmatrix} A\sin(\alpha\frac{\pi}{2}) & -A\cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \\ A\cos(\alpha\frac{\pi}{2}) & A\sin(\alpha\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}\tilde{x}(t) \qquad (۱۵-۳)$$

۳-۳- پایداری سیستم‌های غیرخطی مرتبه- کسری

۳-۳-۱- تحلیل پایداری به روش مستقیم لیاپانوف مرتبه- کسری

تحلیل‌های پایداری مطرح شده در این بخش مربوط به مراجع [۸۸-۸۹] بوده و مبنای اصلی طراحی‌های این رساله می‌باشند. این نوع تحلیل پایداری به دلیل اقتباس از روش مستقیم لیاپانوف کلاسیک به روش مستقیم لیاپانوف مرتبه- کسری معروف است.

۳-۳-۱-۱- تعریف سیستم‌های وابسته به زمان مرتبه- کسری

سیستم وابسته به زمان مرتبه- کسری با مشتق Caputo زیر را در نظر بگیرید [۸۸-۸۹]:

$$_{C}D^{\alpha}_{t_0,t}x(t) = f(t,x) \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

که در آن $x(t_0)$ شرایط اولیه، $\alpha \in (0,1)$، $f:[t_0 \quad \infty] \times \Omega \to R^n$ تابعی با فرم تکه‌ای پیوسته در t و لیپشیتز محلی در x بر روی بازه $[t_0 \quad \infty] \times \Omega$، و $\Omega \in R^n$ ناحیه ای که شامل مبدا است.

نقطه تعادل سیستم (۳-۱۶) به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳-۱: ثابت x_0 را نقطه تعادل سیستم کسری با مشتق Caputo (۳-۱۶) گویند، اگر و فقط اگر $f(t,x_0) = 0$.

ملاحظه ۳-۱: برای راحتی تحلیل‌ها، مبدا مختصات ($x_0 = 0$) به عنوان نقطه تعادل برای همه تعاریف و قضایا در نظر گرفته می‌شود. به دلیل اینکه هر نقطه تعادل قابل شیفت به مبدا مختصات است، لذا فرض مذکور به کلیت مسئله خدشه‌ای وارد نمی‌کند. برای اثبات این مطلب، فرض کنید که نقطه تعادل سیستم (۳-۱۶) برابر $\bar{x} \neq 0$ است. در نتیجه با تعریف متغیر جدید $y = x - \bar{x}$، می‌توان نوشت:

$$_{C}D^{\alpha}_{t_0,t}y = {}_{C}D^{\alpha}_{t_0,t}(x-\bar{x}) = {}_{C}D^{\alpha}_{t_0,t}x - 0 = f(t,x) = f(t,y+\bar{x}) = g(t,y) \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

که به ازای متغیر y داریم $g(t,0) = 0$، و نقطه تعادل سیستم جدید مبدا مختصات خواهد بود.

سیستم وابسته به زمان مرتبه- کسری با مشتق RL زیر را در نظر بگیرید:

$$_{RL}D^{\alpha}_{t_0,t}x(t) = f(t,x) \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

که در آن $x(t_0)$ شرایط اولیه، $\alpha \in (0,1)$، $f:[t_0 \quad \infty] \times \Omega \to R^n$ تابعی با فرم تکه‌ای پیوسته در t و لیپشیتز محلی در x بر روی بازه $[t_0 \quad \infty] \times \Omega$، و $\Omega \in R^n$

ناحیه ای که شامل مبدا است. نقطه تعادل سیستم (۳-۱۸) به شکل زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳-۲: ثابت x_0 را نقطه تعادل سیستم کسری با مشتق RL (۳-۱۸) گویند، اگر و فقط اگر $f(t,x_0) = {}_{RL}D_{t_0,t}^{\alpha} x_0$.

ملاحظه ۳-۲: برای راحتی تحلیل‌ها، مبدا مختصات ($x_0 = 0$) به عنوان نقطه تعادل برای همه تعاریف و قضایا در نظر گرفته می‌شود. به دلیل اینکه هر نقطه تعادل قابل شیفت به مبدا مختصات است، لذا فرض مذکور به کلیت مسئله خدشه‌ای وارد نمی‌کند. برای اثبات این مطلب، فرض کنید که نقطه تعادل سیستم (۳-۱۸) برابر $\bar{x} \neq 0$ است. در نتیجه با تعریف متغیر جدید $y = x - \bar{x}$، داریم:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_{t_0,t}^{\alpha} y &= {}_{RL}D_{t_0,t}^{\alpha}(x-\bar{x}) = {}_{RL}D_{t_0,t}^{\alpha} x - \frac{\bar{x}t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = f(t,x) - \frac{\bar{x}t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= f(t, y+\bar{x}) - \frac{\bar{x}t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \bar{g}(t,y) \end{aligned} \tag{۱۹-۳}$$

که به ازای متغیر y داریم $\bar{g}(t,0) = 0$، و نقطه تعادل سیستم جدید مبدا مختصات خواهد بود.

سیستم غیرخطی وابسته به زمان مرتبه- کسری با مشتقات RL و Caputo زیر را در نظر بگیرید:

$${}_{RL,C}D_{t_0,t}^{\alpha} x(t) = f(t,x) \tag{۲۰-۳}$$

که در آن ${}_{RL,C}D$ عملگر نشان دهنده هر دو مشتق مرتبه- کسری RL و Caputo، $x(t_0)$ شرایط اولیه، $\alpha \in (0,1)$، $f : [t_0 \;\; \infty] \times \Omega \to R^n$ تابعی با فرم تکه‌ای پیوسته در t و لیپشیتز محلی در x بر روی بازه $[t_0 \;\; \infty] \times \Omega$، و $\Omega \in R^n$ ناحیه ای که شامل مبدا است.

لم ۳-۱: برای تابع حقیقی و پیوسته $f(t,x)$ در رابطه (۳-۱۶)، داریم $\left\| D_{t_0,t}^{-\alpha} f(t,x) \right\| \leq D_{t_0,t}^{-\alpha} \left\| f(t,x) \right\|$، که در آن $\alpha \geq 0$ و $\|\cdot\|$ نشان دهنده نرم دلخواه است.

اثبات: به کمک رابطه (۳-۱۶) و خواص نرم می‌توان نوشت:

$$\left\|D_{0,t}^{-\alpha} f(t,x(t))\right\| = \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f(\tau,x(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\left\|f(\tau,x(\tau))\right\|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\ \leq D_{0,t}^{-\alpha}\left\|f(t,x(t))\right\| \quad (۲۱-۳)$$

با توجه به اینکه لم فوق در شکل انتگرالی تعریف شده است، لذا برای رابطه (۳-۱۸) نیز می‌تواند صادق باشد.

۳-۳-۱-۲- پایداری میتاگ- لفلر، میتاگ- لفلر تعمیم یافته و پایداری توانی

تعریف ۳-۳ (پایداری میتاگ- لفلر): جواب معادله (۳-۲۰) را پایدار میتاگ- لفلر گویند اگر

$$\left\|x(t)\right\| \leq \left\{m[x(t_0)]E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\right\}^b \quad (۲۲-۳)$$

که در آن $\alpha \in (0,1)$، $\lambda \geq 0$، $b > 0$، $m(0)=0$ و $m(x) \geq 0$ در ناحیه $x \in B \in R^n$ لیپشیتز (با ثابت m_0) است.

تعریف ۳-۴ (پایداری میتاگ- لفلر تعمیم یافته): جواب معادله (۳-۲۰) را پایدار میتاگ- لفلر تعمیم یافته گویند اگر

$$\left\|x(t)\right\| \leq \left\{m[x(t_0)](t-t_0)^{-\gamma} E_{\alpha,1-\gamma}(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\right\}^b \quad (۲۳-۳)$$

که در آن $\alpha \in (0,1)$، $-\alpha < \gamma \leq 1-\alpha$، $\lambda \geq 0$، $b > 0$، $m(0)=0$ و $m(x) \geq 0$ در ناحیه $x \in B \in R^n$ لیپشیتز (با ثابت m_0) است.

ملاحظه ۳-۳: پایداری میتاگ- لفلر و پایداری میتاگ- لفلر تعمیم یافته، پایداری مجانبی را نتیجه می‌دهند.

ملاحظه ۳-۴: با در نظر گرفتن $\lambda = 0$، معادله (۳-۲۳) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\|x(t)\| \le \left[\frac{m[x(t_0)]}{\Gamma(1-\gamma)}\right]^b (t-t_0)^{-\gamma b} \tag{۲۴-۳}$$

که پایداری توانی[1] نام داشته و حالت خاصی از پایداری میتاگ- لفلر است.

۳-۳-۱-۳- روش مستقیم لیاپانوف مرتبه- کسری و قضایای پایداری

با آگاهی از اینکه روش مستقیم لیاپانوف معمولی پایداری مجانبی سیستم‌های مرتبه- صحیح را نتیجه می‌دهد. در ادامه این فصل، کاربرد روش مستقیم لیاپانوف مرتبه- کسری بر روی سیستم‌های مرتبه- کسری (که منجر به پایداری میتاگ- لفلر می‌شود) مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین بدون از دست رفتن کلیت مسئله، در اکثر تحلیل‌ها زمان اولیه صفر در نظر گرفته می‌شود ($t_0 = 0$).

قضیه ۳-۱۱: با در نظر گرفتن $x=0$ به عنوان نقطه تعادل سیستم (۳-۲۰)، و $D \in R^n$ به عنوان ناحیه شامل مبدا، و با فرض اینکه $V(t,x(t)):[0 \;\; \infty]\times D \to R$ مشتق‌پذیر- پیوسته و لیپشیتز محلی در x باشد بطوریکه

$$\alpha_1\|x\|^a \le V(t,x(t)) \le \alpha_2\|x\|^{ab} \tag{۲۵-۳}$$

$$_C D_{0,t}^{\beta} V(t,x(t)) \le -\alpha_3\|x\|^{ab} \tag{۲۶-۳}$$

که در آن $t \ge 0$، $x \in D$، $\beta \in (0,1)$، α_1، α_2، α_3، a و b ثابت‌های مثبت اختیاری اند. بنابراین $x=0$ پایدار میتاگ- لفلر است. همچنین، اگر فرضیات فوق برای کل فضای R^n برقرار باشند، آنگاه $x=0$ پایدار میتاگ- لفلر جامع خواهد بود.

اثبات: از روابط (۳-۲۵) و (۳-۲۶) می‌توان نوشت:

---
[1] Power stability

$${}_{C}D_{0,t}^{\beta}V(t,x(t)) \le -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}V(t,x(t)) \tag{۲۷-۳}$$

تابع غیرمنفی مانند $M(t)$ وجود دارد که نامساوی (۳-۲۷) را به تساوی تبدیل می‌کند.

$${}_{C}D_{0,t}^{\beta}V(t,x(t)) + M(t) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}V(t,x(t)) \tag{۲۸-۳}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس به طرفین رابطه فوق نتیجه می‌گیریم:

$$s^{\beta}V(s) - V(0)s^{\beta-1} + M(s) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}V(s) \tag{۲۹-۳}$$

که در آن $V(0) = V(0,x(0))$ و $V(s) = L\{V(t,x(t))\}$ می‌باشد. لذا می‌توان نوشت:

$$V(s) = \frac{V(0)s^{\beta-1} - M(s)}{s^{\beta} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}} \tag{۳۰-۳}$$

اگر $x(0)=0$، یعنی $V(0)=0$، آنگاه $x=0$ جواب (۳-۲۰) خواهد بود.

اگر $x(0)\neq 0$، $V(0)>0$، به دلیل لیپشیتز بودن $V(t,x)$ نسبت به x، جواب یکتای لاپلاس معکوس معادله (۳-۲۰) بصورت زیر خواهد بود.

$$V(t) = V(0)E_{\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right) - M(t) * \left[t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right)\right] \tag{۳۱-۳}$$

از آنجایی که $t^{\beta-1}$ و $E_{\beta,\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right)$ توابعی غیرمنفی اند، نتیجه می‌گردد:

$$V(t) \le V(0)E_{\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right) \tag{۳۲-۳}$$

جایگذاری (۳-۳۲) در (۳-۲۵) نتیجه می‌دهد:

$$\|x(t)\| \leq \left[\frac{V(0)}{\alpha_1} E_\beta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta\right)\right]^{\frac{1}{a}} \qquad (۳-۳۳)$$

که در آن به ازای $x(0) \neq 0$ داریم $\frac{V(0)}{\alpha_1} > 0$. همچنین با تعریف $m = \frac{V(0)}{\alpha_1} = \frac{V(0, x(0))}{\alpha_1} \geq 0$، داریم:

$$\|x(t)\| \leq \left[m E_\beta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta\right)\right]^{\frac{1}{a}} \qquad (۳-۳۴)$$

که در آن $m = 0$ برقرار است اگر و فقط اگر $x(0) = 0$ باشد. همچنین به دلیل اینکه $V(t, x(t))$ نسبت به x لیپشیتز است و $V(0, x(0)) = 0$ برقرار خواهد بود اگر و فقط اگر $x(0) = 0$ باشد، نتیجه می‌گردد که $m = \frac{V(0, x(0))}{\alpha_1}$ نیز نسبت به $x(0)$ لیپشیتز و $m(0) = 0$ باشد، بنابراین پایداری میتاگ- لفلر سیستم (۳-۲۰) نتیجه می‌شود.

لم ۳-۲: به ازای $\beta \in (0,1)$ و $M(0) \geq 0$ می‌توان نوشت:

$${}_C D_{0,t}^\beta M(t) \leq {}_{RL} D_{0,t}^\beta M(t) \qquad (۳-۳۵)$$

اثبات: با توجه به قضیه ۲-۱ از فصل ۲ داریم:

$${}_C D_{0,t}^\beta M(t) = {}_{RL} D_{0,t}^\beta M(t) - \frac{M(0) t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \qquad (۳-۳۶)$$

با توجه به اینکه $\beta \in (0,1)$ و $M(0) \geq 0$ است، لذا ${}_C D_{0,t}^\beta M(t) \leq {}_{RL} D_{0,t}^\beta M(t)$ خواهد بود.

قضیه ۳-۱۲: با در نظر گرفتن $x = 0$ به عنوان نقطه تعادل سیستم (۳-۲۰)، و $D \in R^n$ به عنوان ناحیه شامل مبدا، و با فرض اینکه $V(t, x(t)) : [0 \ \infty] \times D \to R$ مشتق‌پذیر- پیوسته و لیپشیتز محلی در x باشد بطوریکه

$$\alpha_1\|x\|^a \le V(t,x(t)) \le \alpha_2\|x\|^{ab} \tag{۳-۳۷}$$

$$_{RL}D_{0,t}^{\beta}V(t,x(t)) \le -\alpha_3\|x\|^{ab} \tag{۳-۳۸}$$

که در آن $t \ge 0$، $x \in D$، $\beta \in (0,1)$، α_1، α_2، α_3، a و b ثابت‌های مثبت اختیاری اند. بنابراین $x=0$ پایدار میتاگ- لفلر است. همچنین، اگر فرضیات فوق برای کل فضای R^n برقرار باشند، آنگاه $x=0$ پایدار میتاگ- لفلر جامع خواهد بود.

اثبات: به کمک لم ۳-۲ می‌توان نوشت $_{C}D_{0,t}^{\beta}V(t,x(t))\le {}_{RL}D_{0,t}^{\beta}V(t,x(t)) \le -\alpha_3\|x\|^{ab}$، و لذا ادامه اثبات همانند اثبات قضیه ۳-۱۱ می‌باشد ($\|x(t)\| \le \left[\frac{V(0)}{\alpha_1}E_{\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{a}}$).

قضیه ۳-۱۳: برای سیستم مرتبه- کسری (۳-۱۸)، با تابع لیپشیتز $f(t,x)$ و ثابت لیپشیتز $l>0$، با فرض اینکه تابع کاندیدای لیاپانوف $V(t,x(t))$ در شرایط زیر صدق کند

$$\alpha_1\|x\|^a \le V(t,x(t)) \le \alpha_2\|x\| \tag{۳-۳۹}$$

$$\dot V(t,x(t)) \le -\alpha_3\|x\| \tag{۳-۴۰}$$

که در آن α_1، α_2، α_3 و a ثابت‌های مثبت اختیاری و $\dot V(t,x(t)) = \frac{dV(t,x(t))}{dt}$ است، داریم

$$\|x(t)\| \le \left[\frac{V(0,x(0))}{\alpha_1}E_{1-\alpha}\left(\frac{\alpha_3}{l\alpha_2}t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

اثبات: به کمک روابط (۳-۳۹)، (۳-۴۰) و لم ۳-۱ داریم:

$$\begin{aligned} {}_{C}D_{0,t}^{1-\alpha}V(t,x(t)) &= D_{0,t}^{-\alpha}\dot V(t,x(t)) \le -\alpha_3 D_{0,t}^{-\alpha}\|x\| \le -\alpha_3 l^{-1} D_{0,t}^{-\alpha}\|f(t,x)\| \\ &\le -\alpha_3 l^{-1}\left\|D_{0,t}^{-\alpha}f(t,x)\right\| = -\alpha_3 l^{-1}\|x\| \end{aligned} \tag{۳-۴۱}$$

که در آن $\left[D_{0,t}^{\alpha-1}x(t)\right]_{t=0}=0$ است. ادامه اثبات همانند اثبات قضیه ۳-۱۱ می‌باشد.

قضیه ۳-۱۴: برای سیستم مرتبه- کسری (۳-۱۶)، با تابع لیپشیتز $f(t,x)$ و ثابت لیپشیتز $l>0$، با فرض اینکه تابع کاندیدای لیاپانوف $V(t,x(t))$ در شرایط زیر صدق کند

$$\alpha_1\|x\|^a \le V(t,x(t)) \le \alpha_2\|x\| \tag{۳-۴۲}$$

$$\dot{V}(t,x(t)) \le -\alpha_3\|x\| \tag{۳-۴۳}$$

که در آن α_1، α_2، α_3 و a ثابت‌های مثبت اختیاری و $\dot{V}(t,x(t))=\dfrac{dV(t,x(t))}{dt}$ است، داریم

$$\|x(t)\| \le \left[\frac{V(0,x(0))}{\alpha_1}E_{1-\alpha}\left(\frac{\alpha_3}{l\alpha_2}t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{a}}$$.س

ملاحظه ۳-۵: با توجه به شرط های (۳-۴۰) و (۳-۴۳) در قضایای ۳-۱۳ و ۳-۱۴، تابع $V(t,x(t))=x^2(t)$ را نمی‌توان برای این قضایا به عنوان تابع لیاپانوف بکار برد.

ملاحظه ۳-۶: در حالت کلی، برقراری شروط نامساوی در قضایای ۳-۱۱، ۳-۱۲، ۳-۱۳ و ۳-۱۴ امری سر راست نمی‌باشد. همچنین، در قضایای ۳-۱۱ و ۳-۱۲ شروط مشتق‌پذیر- پیوسته و لیپشیتز بودن $V(t,x(t))$ به سختی قابل تحققاند. لیکن به کمک توابع کلاس-K[۱] این شرایط قابل تعدیل هستند. بنابراین، در ادامه قضایای پایداری بر مبنای توابع کلاس-K مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تعریف ۳-۵: تابع پیوسته $\alpha:[0,1)\to[0,\infty)$ را متعلق به کلاس-K گویند اگر اکیدا صعودی و $\alpha(0)=0$ باشد [۹۹].

لم ۳-۳ (اصل مقایسه مرتبه- کسری): اگر ${}_C D_{0,t}^{\beta}x(t) \ge {}_C D_{0,t}^{\beta}y(t)$ و $x(0)=y(0)$ که $\beta\in(0,1)$، بنابراین $x(t)\ge y(t)$ خواهد بود.

[1] Class-K

اثبات: تابع غیرمنفی‌ای مانند $m(t)$ وجود دارد که نامساوی ${}_C D_{0,t}^{\beta} x(t) \geq {}_C D_{0,t}^{\beta} y(t)$ را به تساوی تبدیل می‌کند، به عبارت دیگر

$${}_C D_{0,t}^{\beta} x(t) = m(t) + {}_C D_{0,t}^{\beta} y(t) \tag{۳-۴۴}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس به طرفین رابطه فوق داریم:

$$s^{\beta} X(s) - s^{\beta-1} x(0) = M(s) + s^{\beta} Y(s) - s^{\beta-1} y(0) \tag{۳-۴۵}$$

با توجه به تساوی $x(0) = y(0)$، رابطه (۳-۴۵) به شکل زیر ساده می‌گردد:

$$X(s) = s^{-\beta} M(s) + Y(s) \tag{۳-۴۶}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس از رابطه (۳-۴۶)، می‌توان نوشت:

$$x(t) = D_{0,t}^{-\beta} m(t) + y(t) \tag{۳-۴۷}$$

با توجه به خاصیت ۲-۲ از فصل ۲، نامساوی $x(t) \geq y(t)$ استنباط می‌گردد.

لم مذکور کاربرد گسترده‌ای در تحلیل‌های پایداری لیاپانوف دارد. همچنین، لم مشابهی برای مشتق از نوع RL نیز قابل بیان است، اما جنس تساوی شرایط اولیه متفاوت خواهد بود [۱۰۰].

قضیه ۳-۱۵: با در نظر گرفتن $x = 0$ به عنوان نقطه تعادل سیستم (۳-۲۰)، و با فرض وجود تابع لیاپانوف $V(t, x(t))$ و توابع کلاس-K : α_1 و α_2 و α_3 که در روابط (۳-۴۸) و (۳-۴۹) صدق می‌کنند

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{۳-۴۸}$$

$${}_C D_{0,t}^{\beta} V(t, x(t)) \leq -\alpha_3(\|x\|) \tag{۳-۴۹}$$

که در آن $\beta \in (0,1)$، نتیجه می‌گردد که سیستم (۳-۲۰) پایدار مجانبی ($\lim_{t\to\infty} x(t)=0$) است.

لم ۳-۴: در قضیه ۳-۱۵، اگر نامساوی (۳-۴۹) با $_{C}D_{0,t}^{\beta}V(t,x(t)) \le 0$ جایگزین شود، آنگاه سیستم (۳-۲۰) فقط پایدار خواهد بود (پایداری مجانبی استنتاج نمی‌گردد).

اثبات: با انتگرالگیری از طرفین رابطه $_{C}D_{0,t}^{\beta}V(t,x(t)) \le 0$، داریم:

$$V(t,x(t)) \le V(0,x(0)) \quad (۳-۵۰)$$

به کمک نامعادله (۳-۴۸)، می‌توان نوشت:

$$\|x(t)\| \le \alpha_1^{-1}\big(V(t,x(t))\big) \le \alpha_1^{-1}\big(V(0,x(0))\big) \quad (۳-۵۱)$$

بنابراین، نقطه تعادل $x=0$ پایدار است.

در رابطه (۳-۴۹)، با تغییر نوع مشتق از C به RL، قضیه ۳-۱۶ قابل استنتاج است.

قضیه ۳-۱۶: با در نظر گرفتن $x=0$ به عنوان نقطه تعادل سیستم (۳-۲۰)، و با فرض وجود تابع لیاپانوف $V(t,x(t))$ و توابع کلاس-K : α_1 و α_2 و α_3 که در روابط (۳-۵۲) و (۳-۵۳) صدق می-کنند

$$\alpha_1\big(\|x\|\big) \le V(t,x(t)) \le \alpha_2\big(\|x\|\big) \quad (۳-۵۲)$$

$$_{RL}D_{0,t}^{\beta}V(t,x(t)) \le -\alpha_3\big(\|x\|\big) \quad (۳-۵۳)$$

که در آن $\beta \in (0,1)$، پایدار مجانبی ($\lim_{t\to\infty} x(t)=0$) بودن سیستم (۳-۲۰) نتیجه می‌شود.

قضایای ۳-۱۵ و ۳-۱۶، ضامن پایداری مجانبی سیستم می‌باشند، ولی تضمینی برای پایداری میتاگ-لفلر وجود ندارد. همین مورد تفاوت اصلی دو قضیه مذکور با قضایای ۳-۱۱ الی ۳-۱۴ را رقم می‌زند.

۳-۳-۱-۴- حل چند مثال پایداری

در این بخش، برای تشریح کاربرد قضایای ۳-۱۱ الی ۳-۱۶ چند مثال ذکر می‌گردد.

مثال ۳-۳: برای سیستم مرتبه- کسری

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = -x^{2n}(t) \tag{۵۴-۳}$$

که در آن $x(0) = x_0 \geq 0$ شرایط اولیه و $\alpha \in (0,1]$، نقطه تعادل $x = 0$ پایدار است.

حل: به کمک اصل مقایسه مرتبه- کسری داریم:

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = -x^{2n}(t) \leq 0 \;\; \rightarrow \;\; {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) \leq 0 = {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x_0 \;\; \rightarrow \;\; x(t) \leq x_0 \tag{۵۵-۳}$$

بنابراین با توجه به محدودیت $0 \leq x(t) \leq x_0$، سیستم پایدار است (لم ۳-۴ نیز پایداری سیستم (۳-۵۴) را تضمین می‌نماید).

مثال ۳-۴: برای سیستم مرتبه- کسری

$$ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}|x(t)| = -|x(t)| \tag{۵۶-۳}$$

که در آن $\alpha \in (0,1)$، نقطه تعادل $x = 0$ پایدار میتاگ- لفلر است.

حل: با انتخاب تابع لیاپانوف لیپشیتز و دارای مشتق پیوسته (بجز در $x(t) = 0$) $V(t, x(t)) = |x(t)|$ و $\beta = \alpha$، می‌توان نوشت:

$$ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}V(t,x(t)) = {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}|x(t)| = -|x(t)| \tag{۵۷-۳}$$

بنا به قضیه ۳-۱۲ سیستم فوق پایدار میتاگ-لفلر است، و انتخاب $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ و $\alpha_3 = -1$، $|x(t)| \leq |x(0)| E_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)$ را نتیجه می‌دهد.

مثال ۳-۵: در سیستم مرتبه- کسری

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = -x^{2n+1}(t) \tag{۵۸-۳}$$

که در آن $\alpha \in (0,1)$، نقطه تعادل $x=0$ مجانبی است.

حل: با انتخاب تابع لیاپانوف $V(t,x(t)) = |x(t)|$ و $\beta = \alpha$، می‌توان نوشت:

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}V(t,x(t)) = \begin{cases} {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) & x \ge 0 \\ -{}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^{2n+1}(t) & x \ge 0 \\ +x^{2n+1}(t) & x < 0 \end{cases} \tag{۵۹-۳}$$
$$ \rightarrow \ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}V(t,x(t)) = -|x(t)|^{2n+1} $$

با توجه به قضیه ۳-۱۵، سیستم فوق پایدار مجانبی است (اثبات متفاوت در [۸۸]).

۳-۳-۲- تحلیل‌های پایداری مطرح شده در مرجع [۹۰]

سیستم مستقل از زمان و مرتبه- کسری

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = g(x(t))x(t) \tag{۶۰-۳}$$

با شرایط اولیه $x(0)$، $\alpha \in (0,1)$ و تابع غیرخطی پیوسته $g(\bullet)$ که به صورت محلی و بر روی x لیپشیتز است را در نظر بگیرید.

اکنون با بکارگیری جواب معادله دیفرانسیلی ماتریسی مرتبه- کسری

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = Ax(t) \tag{۶۱-۳}$$

که برابر است با [۴]:

$$ x(t) = x(0)E_{\alpha}(At^{\alpha}) \tag{۶۲-۳}$$

قضیه ۳-۱۷ برای تحلیل پایداری سیستم (۳-۶۰) بیان می‌گردد.

قضیه ۳-۱۷: به ازای $x(t)\in R$، اگر $g(x(t))\le \zeta$ باشد، آنگاه $|x(t)|\le |x(0)|E_\alpha(\zeta t^\alpha)$.

نتیجه ۳-۱: اگر در قضیه فوق $\zeta \le 0$ باشد، آنگاه سیستم (۳-۶۰) پایدار (میتاگ- لفلر) خواهد بود.

مثال ۳-۶: بنا به قضیه فوق، سیستم (۳-۶۳) ناپایدار، و سیستم (۳-۶۴) پایدار است.

$$ {}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) = \cos(x(t))x(t) \tag{۳-۶۳}$$

$$ {}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) = -|\sin(x(t))|x(t) \tag{۳-۶۴}$$

در (۳-۶۳): $\cos(x(t))\le 1$ و در (۳-۶۴): $-|\sin(x(t))|\le 0$ است.

قضیه ۳-۱۸: برای سیستم مرتبه- کسری

$$ {}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) = f(x(t)) \tag{۳-۶۵}$$

که در آن $x(t)=[x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)]^T$ ، $f(x(t))=[f_1(x(t)),f_2(x(t)),\ldots,f_n(x(t))]^T$ و $\alpha\in(0,1)$ است. اگر $\dfrac{x^T(t)\,{}_C D_{0,t}^{\alpha}x(t)}{x^T(t)x(t)}=\dfrac{x^T(t)f(x(t))}{x^T(t)x(t)}\le \vartheta$ آنگاه $|x(t)|<|x(0)|E_\alpha(\vartheta t^\alpha)$.

نتیجه ۳-۲: اگر پارامتر $\vartheta\le 0$ باشد، آنگاه سیستم (۳-۶۵) پایدار (میتاگ- لفلر) خواهد بود.

مثال ۳-۷: برای سیستم مرتبه- کسری

$$\begin{cases} {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_1(t) = x_2(t) \\ {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_2(t) = -x_1(t)-(1+x_2(t))^2 x_2(t) \end{cases} \tag{۳-۶۶}$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{x^T(t)\,{}_C D_{0,t}^{\alpha}x(t)}{x^T(t)x(t)} &= \frac{x_1(t)x_2(t)-x_2(t)x_1(t)-(1+x_2(t))^2x_2^2(t)}{x_1^2(t)+x_2^2(t)} \\ &\le \frac{-(1+x_2(t))^2x_2^2(t)}{x_1^2(t)+x_2^2(t)}\le 0 \end{aligned} \tag{۳-۶۷}$$

لذا سیستم (۳-۶۶) پایدار است.

قضایای مطرح شده در این بخش، محدوده کاربرد گسترده‌ای نداشته و مربوط به حالات خاص بیان شده در قضایای ۳-۱۷ و ۳-۱۸ می‌باشند.

۳-۳-۳- تحلیل‌های پایداری مطرح شده در [۹۱] و مرجع تکمیلی [۹۲]

سیستم غیرخطی مرتبه- کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = f(x(t)) \qquad (۳-۶۸) $$

که در آن $\alpha \in (0,1)$، $f \in C^1(\Omega)$ با $f(0)=0$، و $\Omega \in R$ ناحیه‌ای که شامل مبدا $x=0$ است.

قضیه ۳-۱۹: برای سیستم (۳-۶۸): اگر $x(t)\cdot f(x(t)) \le 0$ باشد، آنگاه نقطه تعادل $x=0$ پایدار است. همچنین، اگر $x \neq 0$ عبارت $x(t)\cdot f(x(t)) < 0$ را نتیجه دهد، آنگاه نقطه تعادل $x=0$ پایدار مجانبی خواهد بود.

قضیه فوق در مرجع [۹۱] مطرح شده، اما به دلیل نادرست بودن اثبات آن، بعدا مرجع تکمیلی [۹۲] با اثبات پایداری صحیح ارایه شده است.

مثال ۳-۸: برای سیستم مرتبه- کسری

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = -x^{2n+1}(t), \quad n \in Z^{+} \qquad (۳-۶۹) $$

با توجه به اینکه $x(t)\cdot f(x(t)) = -x^{2n+2}(t) \le 0$ بوده و به ازای $x \neq 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $x(t)\cdot f(x(t)) < 0$ است. لذا سیستم (۳-۶۹) پایدار مجانبی است.

مثال ۳-۹: برای سیستم مرتبه- کسری

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = -2x(t) - x(t)\sin(x(t)) \qquad (۳-۷۰) $$

به دلیل اینکه $x(t)\cdot f(x(t))=-x^2(t)(2+\sin(x(t))\leq 0$ بوده و به ازای $x\neq 0$ داریم $x(t)\cdot f(x(t))<0$. بنابراین، سیستم (۳-۷۰) نیز پایدار مجانبی خواهد بود.

تفاوت اصلی قضیه ۳-۱۹ با قضایایی که بر پایه روش دوم لیاپانوف مرتبه- کسری بیان شده اند [۸۸-۸۹]، دوری از مشکل محاسبه مشتقات کسری تابع لیاپانوف است. اما این قضیه فقط برای حالت اسکالر ارایه شده و تابع لیاپانوف خاصی پیشنهاد نمی‌دهد. علاوه بر این، این روش فقط محدود به سیستم‌هایی با مشتق Caputo بوده و برای مشتق RL بحث نشده است.

۳-۳-۴- تحلیل‌های پایداری مطرح شده در مرجع [۸۶]

همانطور که قبلا اشاره شد، قضایای مطرح شده بر پایه روش دوم لیاپانوف مرتبه- کسری به دلیل سرراست نبودن محاسبه عبارت $_{C}D_{t_0,t}^{\beta}V(\bullet)$، با محدودیت‌هایی روبرو هستند. اما به کمک قضایای مطرح شده در مرجع [۸۶]، اخیرا این مشکل تسهیل شده است.

در این قسمت، لم جدیدی مطرح می‌گردد که برای پیدا کردن تابع کاندیدای لیاپانوف و بررسی پایداری دسته وسیعی از سیستم‌های مرتبه- کسری مناسب است.

لم ۳-۵: تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $x(t)\in R$ را در نظر بگیرید. آنگاه به ازای هر ثابت زمانی $t\geq t_0$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}{}_{C}D_{t_0,t}^{\alpha}x^2(t)\leq x(t)\,{}_{C}D_{t_0,t}^{\alpha}x(t),\quad \forall\alpha\in(0,1) \tag{۷۱-۳}$$

لم فوق، برای حالت برداری نیز قابل گسترش است.

لم ۳-۶: بردار با عناصر پیوسته و مشتق پذیر $x(t)\in R^n$ را در نظر بگیرید. آنگاه به ازای هر ثابت زمانی $t\geq t_0$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}{}_C D_{t_0,t}^{\alpha} x^T(t)x(t) \le x^T(t)\,{}_C D_{t_0,t}^{\alpha} x(t), \quad \forall \alpha \in (0,1) \tag{۷۲-۳}$$

با توجه به لم‌های مذکور، قضیه پایداری ۳-۲۰ بصورت زیر قابل بیان است.

قضیه ۳-۲۰: برای سیستم مرتبه- کسری

$${}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) = f(x(t)) \tag{۷۳-۳}$$

که در آن $\alpha \in (0,1)$، $x = 0$ نقطه تعادل سیستم است ($x \in R$).

الف) اگر شرط (۳-۷۴) برقرار شود، آنگاه نقطه تعادل سیستم پایدار است.

$$x(t)\cdot f(x(t)) \le 0, \quad \forall x \tag{۷۴-۳}$$

ب) اگر رابطه (۳-۷۵) برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل سیستم پایدار مجانبی خواهد بود.

$$x(t)\cdot f(x(t)) < 0, \quad \forall x \ne 0 \tag{۷۵-۳}$$

اثبات: تابع لیاپاوف (۳-۷۶) را در نظر بگیرید.

$$V(x(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) \tag{۷۶-۳}$$

به کمک لم ۳-۵، می‌توان نوشت:

$${}_C D_{0,t}^{\alpha} V(x(t)) \le x(t)\,{}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) \tag{۷۷-۳}$$

اگر $x(t)\cdot f(x(t)) \le 0, \quad \forall x$ باشد، آنگاه $x(t)\,{}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t) \le 0$ خواهد بود. به کمک اصل مقایسه مشتقات مرتبه- کسری داریم:

$${}_C D_{0,t}^{\alpha} V(x(t)) \le 0 \;\; \rightarrow \;\; V(x(t)) \le V(x(0)) \;\; \rightarrow \;\; \frac{1}{2}x^2(t) \le \frac{1}{2}x^2(0) \tag{۷۸-۳}$$

که پایداری سیستم (۳-۷۳) را نتیجه می‌دهد.

اگر $x(t)\cdot f(x(t))<0, \quad \forall x\neq 0$ باشد، آنگاه $x(t)\,{}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t)<0$ بوده و می‌توان نوشت:

$$ {}_C D_{0,t}^{\alpha} V(x(t))<0 \;\rightarrow\; V(x(t))<V(x(0)) \;\rightarrow\; \frac{1}{2}x^2(t)<\frac{1}{2}x^2(0) \tag{۳-۷۹}$$

بنا به توضیحات مرجع [۸۶] پایداری مجانبی سیستم نتیجه می‌شود.

تبصره ۳-۲: قضیه ۳-۲۰ به ازای حالت برداری $x(t)\in R^n$ نیز برقرار بود و تابع لیاپانوف آن را می‌توان به شکل $V(x(t))=\frac{1}{2}x^T(t)\cdot x(t)$ تعریف نمود.

مثال ۳-۱۰: برای بررسی پایداری سیستم خطی تغییر پذیر با زمان

$$\begin{aligned} {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_1(t) &= -\sin^2(t)x_1(t)-\sin(t)\cos(t)x_2(t) \\ {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_2(t) &= -\sin(t)\cos(t)x_1(t)-\cos^2(t)x_2(t) \end{aligned} \tag{۳-۸۰}$$

تابع مربعی زیر را به عنوان کاندیدای لیاپانوف تعریف می‌کنیم:

$$ V(x_1(t),x_2(t))=\frac{1}{2}x_1^2(t)+\frac{1}{2}x_2^2(t) \tag{۳-۸۱}$$

روش اول (تحلیل پایداری به روش مستقیم لیاپانوف کلاسیک): به کمک خاصیت توالی مشتق کاپوتو $\dot{x}(t)={}_C D_{0,t}^{1-\alpha}\,{}_C D_{0,t}^{\alpha} x(t)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -{}_C D_{0,t}^{1-\alpha}\left[\sin^2(t)x_1(t)+\sin(t)\cos(t)x_2(t)\right] \\ \dot{x}_2(t) &= -{}_C D_{0,t}^{1-\alpha}\left[\sin(t)\cos(t)x_1(t)+\cos^2(t)x_2(t)\right] \end{aligned} \tag{۳-۸۲}$$

مشتق زمانی رابطه (۳-۸۲) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{dV(x_1(t),x_2(t))}{dt} &= x_1(t)\dot{x}_1(t)+x_2(t)\dot{x}_2(t)\\ &= -x_1(t)\,{}_C D_{0,t}^{1-\alpha}\left[\sin^2(t)x_1(t)\right]-x_1(t)D_{0,t}^{1-\alpha}\left[\sin(t)\cos(t)x_2(t)\right]+\\ &\quad -x_2(t)\,{}_C D_{0,t}^{1-\alpha}\left[\sin(t)\cos(t)x_1(t)\right]-x_2(t)\,{}_C D_{0,t}^{1-\alpha}\left[\cos^2(t)x_2(t)\right]\end{aligned} \tag{۸۳-۳}$$

در رابطه فوق تعیین علامت مشتق تابع لیاپانوف و استنتاج پایداری امری مشکل است.

روش دوم (تحلیل پایداری به روش مستقیم لیاپانوف مرتبه- کسری): به کمک قاعده لایبنیتز (۲-۴۹)، مشتق کسری تابع لیاپانوف به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$${}_C D_{0,t}^{\alpha}V(x_1(t),x_2(t))=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D^k x_1(t)\,{}_C D^{\alpha-k}x_1(t)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D^k x_2(t)\,{}_C D^{\alpha-k}x_2(t) \tag{۸۴-۳}$$

محاسبه عبارت (۳-۸۴) مستلزم محاسبه جمع نامحدود مشتقات مراتب بالاتر از نوع مرتبه- صحیح و کسری می‌باشد. واضح است که محاسبه (۳-۸۴) امری دشوار است.

روش سوم (تحلیل پایداری به کمک قضیه ۳-۲۰): به کمک لم ۳-۵ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}{}_C D_{0,t}^{\alpha}V(x_1(t),x_2(t)) &= \frac{1}{2}\,{}_C D_{0,t}^{\alpha}x_1^2(t)+\frac{1}{2}\,{}_C D_{0,t}^{\alpha}x_2^2(t)\\ &\le x_1(t)\,{}_C D_{0,t}^{\alpha}x_1(t)+x_2(t)\,{}_C D_{0,t}^{\alpha}x_2(t)\\ &= -\left[x_1(t)\sin(t)+x_2(t)\cos(t)\right]^2\le 0\end{aligned} \tag{۸۵-۳}$$

به دلیل منفی شبه- معین بودن رابطه (۳-۱۰۹)، پایداری نقطه تعادل را می‌توان نتیجه گرفت.

مثال ۳-۱۱: برای تحلیل پایداری سیستم مرتبه- کسری

$$\begin{aligned}{}_C D_{0,t}^{\alpha}x_1(t) &= -x_1(t)+x_2^3(t)\\ {}_C D_{0,t}^{\alpha}x_2(t) &= -x_1(t)-x_2(t)\end{aligned} \tag{۸۶-۳}$$

تابع کاندیدای لیاپانوف بصورت (۳-۸۷) در نظر گرفته می‌شود.

$$V(x_1(t),x_2(t))=\frac{1}{2}x_1^2(t)+\frac{1}{4}x_2^4(t) \tag{۸۷-۳}$$

به بکارگیری لم ۳-۵، مشتق کسری تابع لیاپانوف (۳-۸۷) به شکل رابطه (۳-۸۸) قابل محاسبه است.

$$
\begin{aligned}
{}_C D_{0,t}^{\alpha} V(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{1}{2} {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_1^2(t) + \frac{1}{4} {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_2^4(t) \\
&\leq x_1(t) {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_1(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_2^2(t) \\
&\leq x_1(t) {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_1(t) + x_2^3(t) {}_C D_{0,t}^{\alpha} x_2(t) \\
&= -x_1^2(t) - x_2^4(t) < 0
\end{aligned}
\qquad (۳-۸۸)
$$

به دلیل منفی بودن رابطه (۳-۸۸) و بر پایه قضیه ۳-۲۰، نقطه تعادل سیستم مرتبه- کسری پایداری مجانبی است.

تحلیل‌های پایداری مطرح شده در مرجع [۸۶] برای اکثر سیستم‌های فیزیکی سرراست و کاربردی می‌باشند. اما به دلیل محدود بودن بحث‌ها به سیستم‌هایی با مشتق Caputo، برای سیستم‌هایی با مشتق RL قابل اعمال نیستند.

فصل چهارم

دینامیک سیستم‌های مقیاس- بزرگ

۴-۱- مقدمه

در این فصل، ابتدا تعریف و ویژه‌گی‌های یک سیستم مقیاس- بزرگ[۱] مطرح شده، و سپس دینامیک دو دسته مختلف از این سیستم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. دسته اول مربوط به سیستم‌های غیرخطی با دینامیک مرتبه- کسری، و دسته دوم مربوط به سیستم‌هایی با دینامیک مرتبه- صحیح است.

سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری مورد مطالعه شامل دو دسته مجزا از سیستم‌های غیرخطی با مشتقات RL و Caputo هستند. در مدلسازی این سیستم‌ها عدم قطعیت مدلسازی، برهم-کنش مابین زیرسیستم‌ها و اغتشاشات خارجی لحاظ شده است.

در ادامه این فصل، دینامیک سیستم قدرت چند- ماشینه به عنوان نماینده سیستم‌های مقیاس-بزرگ مرتبه- صحیح مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این سیستم‌های غیرخطی متشکل از چندین ژنراتور سنکرون هستند که از طریق خطوط انتقال با هم در ارتباط‌اند. برای کاهش حجم محاسبات در سیستم قدرت چند- ماشینه، از دینامیک گاورنر و سیم‌پیچی‌های دمپر صرفنظر شده است. همچنین، به دلیل همراه نبودن مدل سیستم قدرت چند- ماشینه، روش تبدیل کنترل بلوکی غیرخطی[۲] (NBC) برای بازنویسی مدل بکار گرفته شده است.

۴-۲- تعریف سیستم‌های مقیاس- بزرگ

لفظ "سیستم‌های مقیاس- بزرگ" زمانی مطرح می‌شود که مسایل کنترلی را نتوان با روش‌ها و اصول کنترل چندمتغیره حل نمود. دلیل این امر اینست که سیستمی که باید کنترل شود خیلی "بزرگ" بوده و مسئله‌ای که باید حل گردد "پیچیده" است. در نتیجه حجم محاسبات زیاد بوده و

[1] Large-scale system

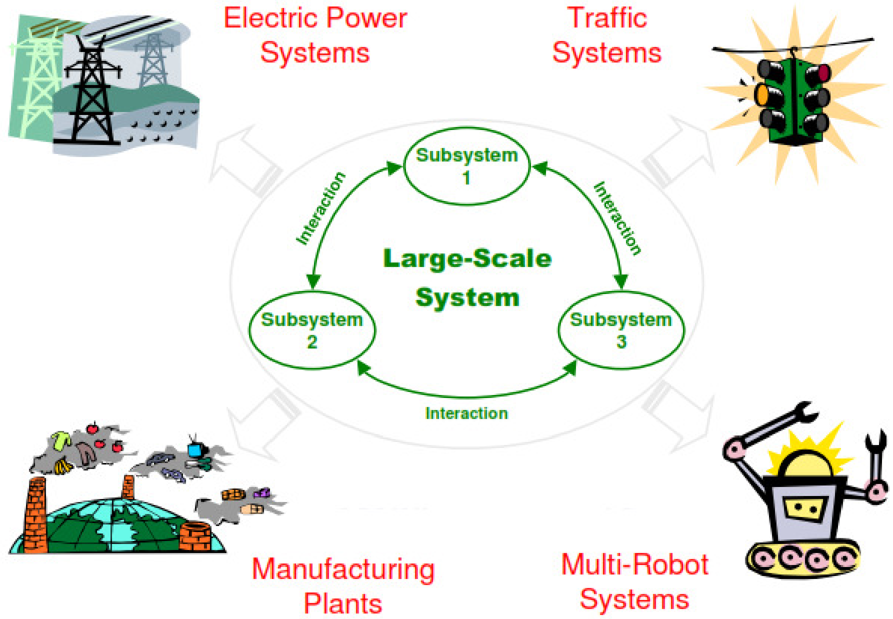
[2] Nonlinear block control linearization

فرضیات کنترل چند متغیره دور از واقعیت خواهند بود. به عنوان مثال؛ در یک سیستم قدرت شامل چندین واحد تولیدی، انرژی الکتریکی در منطقه جغرافیایی وسیعی توزیع شده و مصرف کننده‌گان بزرگ و کوچک را تامین می‌کند. در چنین سیستمی شارش توان و ولتاژ در نقاط مختلفی باید کنترل شود. واضح است که برای چنین سیستمی هیچ مدلسازی دقیق و طراحی کنترل‌کننده منحصر به فردی نمی‌توان انجام داد [۵۴].

سوالی که ممکن است در مورد واژه "مقیاس بزرگ" پیش آید، این است که "سیستم تا چه اندازه بزرگ است؟". تعریف یکسان و جامعی در مورد واژه "مقیاس- بزرگ" وجود نداشته و نظرهای متفاوتی ارایه شده است. یکی از این نظرها عبارت است از: سیستمی مقیاس- بزرگ در نظر گرفته می‌شود که چه به دلایل محاسباتی و چه به دلایل عملی بتوان سیستم را به اتصالات یا زیرسیستم‌های مقیاس- کوچک تجزیه یا دکوپله نمود [۵۴].

نمونه‌های دیگر سیستم‌های مقیاس- بزرگ عبارت‌اند از: سیستم ترافیک با رفتار دینامیکی پیچیده اما تعداد کم داده‌های اندازه‌گیری و ورودی‌های کنترلی، شبکه‌های آب رسانی و توزیع گاز طبیعی، ترکیب چند راکتور و ستون‌های تقطیر در فرایندهای شیمیایی، شبکه‌های کامپیوتری و حمل و نقل [۵۴]. شکل ۴-۱ شماتیک کلی چهار سیستم مقیاس- بزرگ شامل: سیستم ترافیک، سیستم قدرت، سیستم چند- ربات و سیستم صنعتی را نشان می‌دهد.

توجه شود که همه سیستم‌های مقیاس- بزرگ مطرح شده در عمل دارای دینامیک مرتبه- صحیح‌اند، و تاکنون سیستم مقیاس- بزرگ عملی با دینامیک مرتبه- کسری مطرح نشده‌اند. اما از آنجایی که مباحث مدلسازی مرتبه- کسری و کنترل مرتبه- کسری در چند سال گذشته رشد چشمگیری داشته است، لذا برای سال‌های آتی نیاز به مطالعه و کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری نیز بیشتر خواهد بود.



شکل ۴-۱: شماتیک کلی سیستم‌های مقیاس- بزرگ.

۴-۳- دینامیک سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری

سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری متشکل از N زیرسیستم را درنظر بگیرید. در حالت کلی، دینامیک زیرسیستم i- ام (S_i) از سیستم کلی به شکل روابط (۴-۱) و (۴-۲) قابل نمایش است ($i=1,2,\ldots,N$). در روابط (۴-۱) و (۴-۲)، دینامیک زیرسیستم i- ام به ترتیب بر حسب مشتق‌های RL و Caputo به فرم همراه[1] بیان شده است.

$$S_i:\begin{cases} {}_{RL}D^{\alpha}x_{i1}(t)=x_{i2}(t) \\ {}_{RL}D^{\alpha}x_{i2}(t)=x_{i3}(t) \\ \qquad\vdots \\ {}_{RL}D^{\alpha}x_{in}(t)=f_i(X_i)+g_i(X_i)u_i(t)+M_i(X_i,t) \\ \qquad\qquad +I_i(X_1,\cdots,X_N,t) \end{cases} \tag{۴-۱}$$

[1] Companion

$$S_i:\begin{cases} {}_CD^{\alpha}x_{i1}(t)=x_{i2}(t)\\ {}_CD^{\alpha}x_{i2}(t)=x_{i3}(t)\\ \qquad\vdots\\ {}_CD^{\alpha}x_{in}(t)=f_i(X_i)+g_i(X_i)u_i(t)+M_i(X_i,t)\\ \qquad\qquad +I_i(X_1,\cdots,X_N,t)\end{cases} \tag{۲-۴}$$

در روابط مذکور، $\alpha\in(0,1)$ مرتبه سیستم، $X_i=[x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in}]^T$ بردار حالت زیرسیستم i– ام، $u_i\in R$ورودی زیرسیستم i– ام، $f_i(X_i)$ و $g_i(X_i)\neq 0$ توابعی معلوم، $M_i:R^{n+1}\to R$ مجموعه-ای شامل عدم قطعیت‌های مدلسازی و اغتشاش خارجی، و $I_i:R^{n\times N+1}\to R$ ترم نشان دهنده برهم-کنش بین زیرسیستم i– ام با زیرسیستم‌های دیگر است. به دلیل نامعلوم بودن هر دو ترم $M_i(X_i,t)$ و $I_i(X_1,\cdots,X_N,t)$، مجموع آنها $L_i(X,t)=M_i(X_i,t)+I_i(X_1,\cdots,X_N,t)$ به عنوان ترم عدم-قطعیت کلی[1] در نظر گرفته می‌شود.

فرض ۴-۱: فرض می‌شود که همه حالت‌های سیستم‌های (۴-۱) و (۴-۲) قابل اندازه‌گیری‌اند.

با تعریف خطاهای ردیابی زیرسیستم i- ام به شکل

$$\begin{aligned} e_{i1}(t)&=x_{i1}(t)-x_{i1d}(t)\\ e_{i2}(t)&=x_{i2}(t)-x_{i2d}(t)\\ &\vdots\\ e_{in}(t)&=x_{in}(t)-x_{ind}(t)\end{aligned} \tag{۳-۴}$$

و جایگذاری آن‌ها در معادلات دینامیکی (۴-۱) و (۴-۲)، دینامیک خطاهای زیرسیستم i- ام (بر پایه مشتقات RL و Caputo) بصورت روابط زیر حاصل می‌گردد.

$$S_i:\begin{cases} {}_{RL}D^{\alpha}e_{i1}(t)=e_{i2}(t)\\ {}_{RL}D^{\alpha}e_{i2}(t)=e_{i3}(t)\\ \qquad\vdots\\ {}_{RL}D^{\alpha}e_{in}(t)=f_i(X_i)+g_i(X_i)u_i(t)+L_i(X,t)-{}_{RL}D^{\alpha}x_{ind}(t)\end{cases} \tag{۴-۴}$$

[1] Lumped uncertainty

$$S_i : \begin{cases} {}_C D^{\alpha} e_{i1}(t) = e_{i2}(t) \\ {}_C D^{\alpha} e_{i2}(t) = e_{i3}(t) \\ \qquad \vdots \\ {}_C D^{\alpha} e_{in}(t) = f_i(X_i) + g_i(X_i)u_i(t) + L_i(X,t) - {}_C D^{\alpha} x_{ind}(t) \end{cases} \qquad (۵-۴)$$

که در آن $X_{id} = [x_{i1d}, x_{i2d}, \ldots, x_{ind}]^T$ و $E_i = [e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}]^T$ به ترتیب: بردارهای مرجع و خطای زیرسیستم i- ام می‌باشند. همچنین، $E = [E_1^T, E_2^T, \ldots, E_N^T]^T$ بردار خطای سیستم مقیاس- بزرگ است. علاوه بر این، در روابط (۴-۴) و (۵-۴) داریم: $x_{i(j+1)d}(t) = {}_{RL}D^{\alpha} x_{ijd}(t)$ و $x_{i(j+1)d}(t) = {}_C D^{\alpha} x_{ijd}(t)$ که در آن $1 \le j \le n-1$.

۴-۴- دینامیک سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح

۴-۴-۱- مدل دینامیکی سیستم قدرت چند- ماشینه

در این بخش، دینامیک سیستم قدرت چند- ماشینه متشکل از n ژنراتور سنکرون مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور کاهش حجم محاسبات از دینامیک گاورنر و سیم پیچی‌های دمپر صرفنظر شده است. لذا، مدل دینامیکی هر ژنراتور از نوع غیرخطی مرتبه- سه در نظر گرفته شده خواهد شد. در ادامه این بخش، معادلات توصیف کننده رفتار ژنراتور i- ام به صورت کامل شرح داده شده است $(i = 1, \ldots, n)$ [۵۱، ۱۰۱-۱۰۵]:

معادلات دیفرانسیلی مکانیکی ژنراتور i- ام عبارت‌اند از:

$$\dot{\delta}_i(t) = \Delta\omega_i(t) \qquad (۶-۴)$$

$$\Delta\dot{\omega}_i(t) = -\frac{D_i}{2H_i}\Delta\omega_i(t) - \frac{\omega_0}{2H_i}(P_{ei}(t) - P_{m0i}) \qquad (۷-۴)$$

در روابط فوق، $\delta_i(t)$ زاویه قدرت[1] یا زاویه بار[2] ژنراتور (rad)، $\Delta\omega_i(t)$ سرعت نسبی ژنراتور ($rad/\sec$)، P_{mi0} توان ورودی مکانیکی ($p.u.$)، $P_{ei}(t)$ توان الکتریکی تولید شده توسط ژنراتور ($p.u.$)، ω_0 سرعت سنکرون ($rad/\sec$)، D_i ثابت میرایی بر حسب پریونیت و H_i ثابت اینرسی سیستم (sec) است.

معادلات دیفرانسیلی الکتریکی ژنراتور i- ام نیز عبارت‌اند از:

$$\dot{E}'_{qi}(t) = \frac{1}{T'_{doi}}[E_{fi}(t) - E_{qi}(t)] \qquad (۸-۴)$$

در رابطه (۴-۸)، $E'_{qi}(t)$: EMF گذرای ژنراتور در راستای محور- q ($p.u.$)، $E_{qi}(t)$: EMF ژنراتور در راستای محور- q ($p.u.$)، $E_{fi}(t)$: EMF معادل در سیم‌پیچی تحریک ($p.u.$) و T'_{doi} ثابت زمانی اتصال کوتاه گذرا (sec) در راستای محور- d است.

معادلات جبری الکتریکی ژنراتور i- ام:

$$E_{qi}(t) = E'_{qi}(t) - (x_{di} - x'_{di})I_{di}(t) \qquad (۹-۴)$$

$$P_{ei}(t) = \sum_{j=1}^{n} E'_{qi}(t)E'_{qj}(t)B_{ij}\sin(\delta_i(t) - \delta_j(t)) \qquad (۱۰-۴)$$

$$Q_{ei}(t) = -\sum_{j=1}^{n} E'_{qi}(t)E'_{qj}(t)B_{ij}\cos(\delta_i(t) - \delta_j(t)) \qquad (۱۱-۴)$$

$$I_{di}(t) = \sum_{j=1}^{n} E'_{qj}(t)B_{ij}\cos(\delta_i(t) - \delta_j(t)) \qquad (۱۲-۴)$$

$$I_{qi}(t) = \sum_{j=1}^{n} E'_{qj}(t)B_{ij}\sin(\delta_i(t) - \delta_j(t)) \qquad (۱۳-۴)$$

[1] Power angle [2] Load angle

$$E_{fi}(t)=k_{ci}u_{fi}(t) \tag{۴-۱۴}$$

$$E_{qi}(t)=x_{adi}I_{fi}(t) \tag{۴-۱۵}$$

$$V_{ti}(t)=\sqrt{(E'_{qi}(t)+x'_{di}I_{di}(t))^2+(x'_{di}I_{qi}(t))^2} \tag{۴-۱۶}$$

در روابط (۴-۹)-(۴-۱۶)، $Q_{ei}(t)$ توان راکتیو ($p.u.$)، $I_{di}(t)$ جریان محور- d ($p.u.$)، $I_{qi}(t)$ جریان محور- q ($p.u.$)، B_{ij} عنصر ردیف i- ام و ستون j- ام ماتریس پذیرنده‌گی یا سوسپتانس[1] ($p.u.$)، $u_{fi}(t)$ ورودی تقویت کننده SCR ($p.u.$)، k_{ci} بهره تقویت کننده تحریک ($p.u.$)، $I_{fi}(t)$ جریان تحریک ($p.u.$)، x_{adi} راکتانس متقابل مابین سیم‌پیچی تحریم و سیم‌پیچی استاتور ($p.u.$)، x_{di} راکتانس در راستای محور- d ($p.u.$)، و $V_{ti}(t)$ ولتاژ ترمینال ($p.u.$) ژنراتور i- ام است.

به دلیل اینکه $E'_{qi}(t)$ بصورت فیزیکی قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد، لذا بکارگیری معادله الکتریکی (۴-۸) ملموس نخواهد بود. اما با مشتق گیری از رابطه (۴-۱۰) و جایگزینی (۴-۸) در آن، متغیر $E'_{qi}(t)$ حذف شده و معادله‌ای جدیدی برحسب توان الکتریکی $P_{ei}(t)$ بدست می‌آید. بنابراین، مدل ژنراتور i- ام با دسته جدیدی از متغیرها $(\delta_i,\Delta\omega_i,\Delta P_{ei})$ به شکل (۴-۱۷) حاصل می‌گردد [۵۱، ۱۰۵].

$$\begin{cases}\dot{\delta}_i(t)=\Delta\omega_i(t)\\ \Delta\dot{\omega}_i(t)=-\dfrac{D_i}{2H_i}\Delta\omega_i(t)-\dfrac{\omega_0}{2H_i}\Delta P_{ei}(t)\\ \Delta\dot{P}_{ei}(t)=-\dfrac{1}{T'_{doi}}\left[\Delta P_{ei}(t)+P_{mi0}-(x_{di}-x'_{di})I_{qi}(t)I_{di}(t)\right]-Q_{ei}\Delta\omega_i(t)\\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{T'_{doi}}k_{ci}I_{qi}(t)u_{fi}(t)+\gamma_i(\delta,\omega)\end{cases} \tag{۴-۱۷}$$

که در آن داریم:

$$\Delta P_{ei}(t)=P_{ei}(t)-P_{m0i} \tag{۴-۱۸}$$

---
[1] Susceptance

$$\gamma_i(\delta,\omega)=\sum_{j=1}^{n}E'_{qi}(t)\dot{E}'_{qj}(t)B_{ij}\sin(\delta_i(t)-\delta_j(t))-\sum_{j=1}^{n}E'_{qi}(t)E'_{qj}(t)B_{ij}\cos(\delta_i(t)-\delta_j(t)) \quad (۱۹-۴)$$

در عبارت فوق $\gamma_i(\delta,\omega)$ ترم برهم‌کنش مابین ژنراتور $\mathbf{i}$- ام با ژنراتورهای دیگر است.

فرض ۴-۲: به دلیل ثابت زمانی آهسته مرتبط با توان مکانیکی ورودی، P_{m0i} ثابت فرض می‌شود.

فرض ۴-۳: به منظور دوری از صفر شدن $I_{qi}(t)$، فرض می‌گردد که ژنراتورها در ناحیه نرمال کار می‌کنند ($0<\delta_i<\pi$ و $\delta_i-\delta_j\neq 0,\pi$).

ملاحظه ۴-۱: با توجه به ملاحظه ۳-۴ مرجع [۱۰۳]، به دلیل اینکه توان اکتیو $P_{ei}(t)$ و راکتیو $Q_{ei}(t)$ هر ژنراتور و توان انتقالی در خط انتقال محدود هستند، و ولتاژ تحریک $E_{fi}(t)$ ممکن است تا 5 برابر $E_{qi}(t)$ افزایش یابد، لذا کران بالای ترم برهم‌کنش به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\left|\gamma_i(\delta,\omega)\right|\le\sum_{j=1}^{n}(\gamma_{i1j}\left|\sin(\delta_j)\right|+\gamma_{i2}\left|\Delta\omega_j\right|)\le\sum_{j=1}^{n}(\gamma_{i1j}+\gamma_{i2}\left|\Delta\omega_j\right|) \quad (۲۰-۴)$$

که در آن

$$\gamma_{i1j}=\begin{cases}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}4p_{1ij}\dfrac{\left|P_{ei}\right|_{\max}}{\left|T'_{doj}\right|_{\min}} & j=i\\ 4p_{1ij}\dfrac{\left|P_{ei}\right|_{\max}}{\left|T'_{doj}\right|_{\min}} & j\neq i\end{cases},\qquad \gamma_{i2}=p_{2ij}\left|Q_{ei}\right|_{\max} \quad (۲۱-۴)$$

و p_{1ij} و p_{1ij} پارامترهایی با مقدار 0 یا 1 هستند (0 بدین معنی است که مابین ژنراتورهای $i-$ام و $j-$ام هیچ برهم‌کنشی وجود ندارد).

۴-۲-۴- بازنویسی دینامیک سیستم قدرت چند- ماشینه به کمک تبدیل NBC

با توجه به اینکه معادله دینامیکی سیستم چند- ماشینه (۴-۱۷) دارای فرم همراه نیست، لذا طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی برای این سیستم امری مشکل و چالش برانگیز است. اما بر پایه

مفاهیم مطرح شده در پیوست الف و منابع [۱۰۶-۱۰۷]، می‌توان نشان داد که معادله دینامیکی سیستم چند- ماشینه (۴-۱۷) دارای فرم- NBC با سه بلوک است. بنابراین، با اعمال تبدیل NBC می‌توان مدل (۴-۱۷) را بازنویسی نموده و راه را برای اعمال کنترل‌کننده‌های مختلف هموار کرد.

در ادامه این بخش، مراحل اعمال تبدیل NBC بر روی سیستم چند- ماشینه شرح داده می‌شود.

مرحله ۱: با توجه به اینکه یکی از اهداف کنترل سیستم‌های قدرت چند- ماشینه مهار زاویه قدرت $\delta_i(t)$ در حضور عدم‌قطعیت‌ها و برهم‌کنش مابین زیرسیستم‌ها است، لذا خطای ردیابی را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$z_{1i}(t) = \delta_i(t) - \delta_{di} \tag{۴-۲۲}$$

که در عبارت فوق δ_{di} مقدار مرجع زاویه قدرت بوده و ثابت فرض می‌شود. اکنون با جایگزینی معادله اول (۴-۱۷) در (۴-۲۲) داریم:

$$\dot{z}_{1i}(t) = \Delta\omega_i(t) \tag{۴-۲۳}$$

در ادامه، به منظور پایدارسازی دینامیک رابطه (۴-۲۳)، قانون اول کنترل مجازی[1] به شکل زیر پیشنهاد می‌گردد [۱۰۶]:

$$\Delta\omega_i(t) = -k_{1i} z_{1i}(t) + z_{2i}(t), \quad k_{1i} > 0 \tag{۴-۲۴}$$

با جایگزینی قانون کنترل مجازی (۴-۲۴) در رابطه (۴-۲۳)، دینامیک حلقه- بسته $z_{1i}(t)$ به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{z}_{1i}(t) = -k_{1i} z_{1i}(t) + z_{2i}(t) \tag{۴-۲۵}$$

---
[1] Virtual control

مرحله ۲: با استفاده از معادله (۴-۲۴)، متغیر جدید $z_{2i}(t)$ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$z_{2i}(t) = \Delta\omega_i(t) + k_{1i} z_{1i}(t) \tag{۴-۲۶}$$

مشتق گیری از (۴-۲۶) و بکارگیری روابط (۴-۱۷) و (۴-۲۵)، نتیجه می‌دهد:

$$\dot{z}_{2i}(t) = -\frac{\omega_0}{2H_i}\Delta P_{ei}(t) + (\frac{D_i k_{1i}}{2H_i} - k_{1i}^2) z_{1i}(t) + (k_{1i} - \frac{D_i}{2H_i}) z_{2i}(t) \tag{۴-۲۷}$$

با در نظر گرفتن ΔP_{ei} به عنوان ورودی مجازی در (۴-۲۷)، قانون کنترل مجازی دوم به صورت رابطه (۴-۲۸) پیشنهاد می‌شود.

$$\begin{aligned} &\Delta P_{ei}(t) = \frac{2H_i}{\omega_0}\left((\frac{D_i k_{1i}}{2H_i} - k_{1i}^2) z_{1i}(t) + (k_{1i} - \frac{D_i}{2H_i}) z_{2i}(t) + k_{2i} z_{2i}(t) - z_{3i}(t) \right) \\ &k_{1i}, k_{2i} > 0 \end{aligned} \tag{۴-۲۸}$$

با جایگزینی قانون کنترل مجازی (۴-۲۸) در رابطه (۴-۲۷)، دینامیک حلقه- بسته $z_{2i}(t)$ به شکل (۴-۲۹) بدست می‌آید.

$$\dot{z}_{2i}(t) = -k_{2i} z_{2i}(t) + z_{3i}(t) \tag{۴-۲۹}$$

مرحله ۳: با استفاده از رابطه (۴-۲۸)، متغیر جدید $z_{3i}(t)$ به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$z_{3i}(t) = -\frac{\omega_0}{2H_i}\Delta P_{ei}(t) + (\frac{D_i k_{1i}}{2H_i} - k_{1i}^2) z_{1i}(t) + (k_{1i} + k_{2i} - \frac{D_i}{2H_i}) z_{2i}(t) \tag{۴-۳۰}$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق و بکارگیری روابط (۴-۱۷)، (۴-۲۵) و (۴-۲۹)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{3i}(t) = &\frac{\omega_0}{2H_i T'_{doi}}\left(\Delta P_{ei}(t) + P_{m0i} - (x_{di} - x'_{di}) I_{qi}(t) I_{di}(t) + T'_{doi} Q_{ei}(t)\Delta\omega_i(t)\right) \\ &+ g_i(z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}) - \frac{\omega_0}{2H_i T'_{doi}} k_{ci} I_{qi}(t) u_{fi}(t) - \frac{\omega_0}{2H_i}\gamma_i(\delta, \omega) \end{aligned} \tag{۴-۳۱}$$

که در عبارت فوق تابع $g_i(z_{1i}, z_{2i}, z_{3i})$ عبارت است از:

$$g_i(z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}) = (k_{1i}^3 - \frac{D_i k_{1i}^2}{2H_i}) z_{1i}(t) + \left((\frac{D_i k_{1i}}{2H_i} - k_{1i}^2 - k_{2i}(k_{1i} + k_{2i} - \frac{D_i}{2H_i}) \right) z_{2i}(t) + (k_{1i} + k_{2i} - \frac{D_i}{2H_i}) z_{3i}(t) \quad (۳۲\text{-}۴)$$

در نهایت با تجمیع روابط (۴-۲۵)، (۴-۲۹) و (۴-۳۱)، معادله دینامیکی تبدیل شده سیستم قدرت چند- ماشینه (۴-۱۷) به شکل رابطه (۴-۳۳) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{z}_{1i}(t) = -k_{1i} z_{1i}(t) + z_{2i}(t) \\ \dot{z}_{2i}(t) = -k_{2i} z_{2i}(t) + z_{3i}(t) \\ \dot{z}_{3i}(t) = \dfrac{\omega_0}{2H_i T'_{doi}} \left(\Delta P_{ei}(t) + P_{m0i} - (x_{di} - x'_{di}) I_{qi}(t) I_{di}(t) + T'_{doi} Q_{ei}(t) \Delta\omega_i(t) \right) \\ \qquad + g_i(z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}) - \dfrac{\omega_0}{2H_i T'_{doi}} k_{ci} I_{qi}(t) u_{fi}(t) - \dfrac{\omega_0}{2H_i} \gamma_i(\delta, \omega) \end{cases} \quad (۳۳\text{-}۴)$$

مدل دینامیکی مذکور، مبنای اصلی تحلیل سیستم قدرت چند- ماشینه در فصل‌های بعدی است.

اگر با پیشنهاد قانون کنترل $u_{fi}(t)$ مناسب $z_{3i} \to 0$ میل نماید، آنگاه مدل سیستم حلقه- بسته به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{cases} \dot{z}_{1i}(t) = -k_{1i} z_{1i}(t) + z_{2i}(t) \\ \dot{z}_{2i}(t) = -k_{2i} z_{2i}(t) + 0 \end{cases} \quad (۳۴\text{-}۴)$$

و انتخاب مقادیر مناسب برای بهره‌های کنترلی k_{1i} و k_{2i}، ردیابی زاویه قدرت تضمین می‌گردد.

فصل پنجم

کنترل مد لغزشی و انواع مختلف آن

۵-۱- مقدمه

در این فصل، گونه‌های مختلف روش کنترل مد لغزشی (SMC) مورد مطالعه قرار می‌گیرند. بدین منظور، ابتدا نحوه طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی معمولی بررسی شده است. همچنین، مشکلات ناشی از نوسانات ناخواسته و لرزش[1] سیگنال کنترلی و روش‌های رفع آن نیز توضیح داده شده‌اند. در مرحله دوم، کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری (FSMC یا FOSMC) و انواع قوانین لغزشی کاربردی برای سیستم‌های مرتبه- کسری بحث شده است. در مرحله بعد، کنترل‌کننده‌های مد لغزشی غیرخطی (ترمینال) (NSMC یا TSMC) به اختصار توصیف شده‌اند. در قسمت آخر نیز ابتدا انواع راهبردهای کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ تبیین شده و سپس نحوه طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی بر پایه این راهبردها توضیح داده می‌شوند. لازم به ذکر است که مفاهیم بیان شده در این فصل پایه و اساس طراحی‌های دو فصل آتی‌اند.

۵-۲- کنترل مد لغزشی معمولی

در این بخش، نحوه پیاده‌سازی و ویژه‌گی‌های کنترل مد لغزشی معمولی (کلاسیک) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۵-۲-۱- بیان مسئله

سیستم غیرخطی مرتبه n زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_i(t) = x_{i+1}(t) \\ \quad\vdots \\ x_n(t) = f(x,t) + g(x,t)u(t) + \Delta f(x,t) + d(t) \end{cases} \tag{۵-۱}$$

[1] Chattering

که در آن $x(t)=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]^T$ بردار حالت، $f(x,t)$ و $g(x,t)\neq 0$ توابعی معلوم از بردار حالت و زمان، $|\Delta f(x,t)|<\gamma_f$ عدم قطعیت مدلسازی، $u(t)$ ورودی کنترل و $|d(t)|<\gamma_d$ اغتشاش وابسته به زمان است (γ_f و γ_d پارامترهای معلوم). هدف، طراحی قانون کنترلی است که به ازای آن بردار حالت $x(t)$ بردار مرجع $x_d(t)$ را با وجود عدم قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی با دقت کافی ردیابی نماید.

۵-۲-۲- پیاده‌سازی کنترل‌کننده مد لغزشی

مهم‌ترین مراحل طراحی روش کنترل مد لغزشی عبارت‌اند از [۲۱]:

۱- انتخاب سطح لغزش: سطح لغزش بر اساس مشخصه‌های دینامیکی سیستم انتخاب می‌شود. به عنوان مثال، برای سیستم (۵-۱)، سطح لغزش را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$s(t)=e_n(t)+\sum_{i=1}^{n-1}c_ie_i(t) \qquad (۵-۲)$$

که در آن $e_i(t)=x_i(t)-x_{id}(t)$ خطای ردیابی، $x_{id}(t)$ متغیر حالت مطلوب، و c_1، ...، c_n ضرایب سطح لغزش نام داشته و باید طوری انتخاب شوند که ریشه‌های چندجمله‌ای $P(s)=s^{n-1}+c_{n-1}s^{n-2}+\cdots+c_2s+c_1$ سمت چپ صفحه s قرار گیرند. به دلیل خطی بودن رابطه بین $s(t)$ و ترم‌های خطا در (۵-۲)، سطح لغزش مذکور را سطح لغزش خطی یا معمولی گویند.

۲- پیشنهاد قانون کنترل غیرپیوسته[1]: راهبرد کنترل غیرپیوسته به منظور رساندن حالات سیستم به سطح لغزش و حفظ آن‌ها در همین موقعیت شکل می‌پذیرد. این روند حرکتی را حرکت لغزشی گویند و شامل دو مرحله مهم می‌باشد که عبارت‌اند از [۲۱]:

[1] Discontinuous

۱- **مرحله رسیدن به سطح لغزش**[1]: در این مرحله، حالت سیستم از هر نقطه اولیه در زمان محدود به سطح لغزش آورده می‌شود.

۲- **فاز مد لغزشی**[2]: حالت‌های سیستم بر روی سطح لغزش حرکت لغزشی داشته و در آن می‌مانند. به عبارت دیگر سطح لغزش در نقش جاذب عمل می‌کند.

برای کاراکتریزه کردن حرکت لغزشی و بدست آوردن قانون کنترل غیرپیوسته از روش پایداری لیاپانوف استفاده می‌شود.

برای تعیین قانون کنترل، تابع لیاپانوف به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$V(t) = 0.5s^2(t) \tag{۳-۵}$$

که در آن $V(0)=0$، و به غیر از حالت اولیه باید $V(t)>0$ باشد.

برای سیستم‌های چند ورودی به دلیل برداری بودن $s(t)$، تابع لیاپانوف به فرم $V(t) = 0.5s^T(t).s(t)$ تعریف می‌گردد.

با توجه به تابع لیاپانوف (۵-۳)، شرط کافی برای پایداری سیستم (۵-۱)، عبارت است از:

$$\dot{V}(t) = 0.5\frac{d}{dt}(s^2(t)) \le -\eta|s(t)| \qquad \eta > 0 \tag{۴-۵}$$

به عبارت دیگر، داریم:

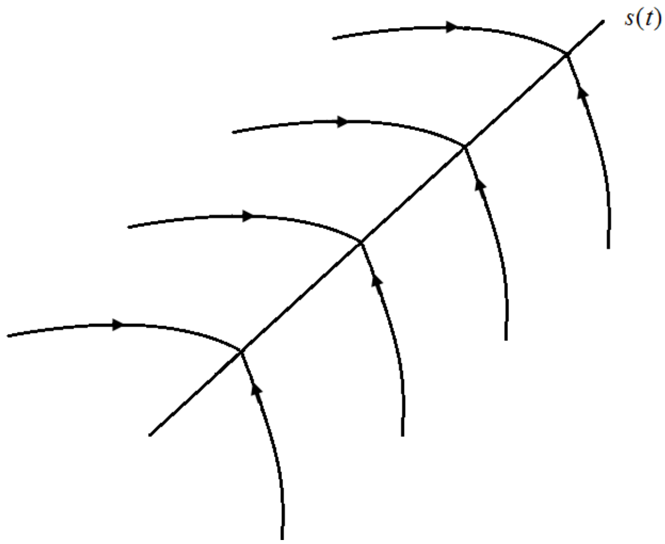
$$\dot{s}(t).\mathrm{sgn}(s(t)) \le -\eta \quad or \quad \dot{s}(t) \le -\eta\,\mathrm{sgn}(s(t)) \tag{۵-۵}$$

رابطه فوق را شرط رسیدن به سطح لغزش گویند. در رابطه فوق، $\mathrm{sgn}(\bullet)$ تابع علامت می‌باشد.

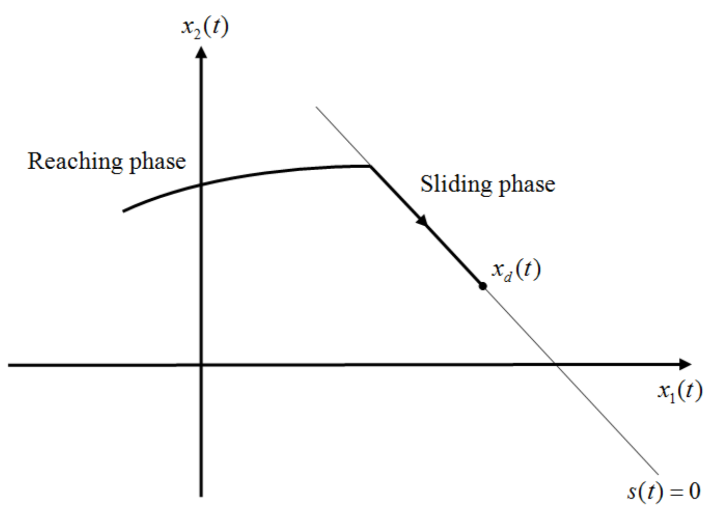
[1] Reaching phase

[2] Sliding mode phase

رسیدن به سطح لغزش به این معناست که حالت سیستم $x(t)$ خارج از $s(t)$ شروع به حرکت به سمت آن نموده، و بدون توجه به عدم‌قطعیت‌ها و اغتشاشات بر روی سطح لغزش به سمت مقدار مطلوب می‌لغزد. اصول حرکت لغزشی در شکل‌های ۵-۱ و ۵-۲ برای یک سیستم مرتبه $n = 2$ نشان داده شده است [۲۱].



شکل ۵-۱: سطح لغزش (برگرفته از [۲۱]).



شکل ۵-۲: تفسیر حرکت لغزشی با توجه شرط (۵-۵) (برگرفته از [۲۱]).

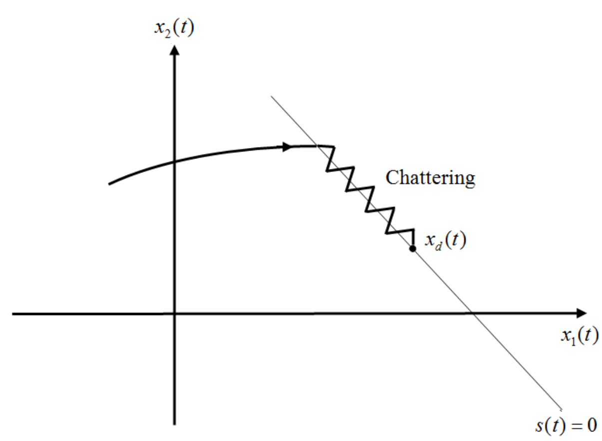
برای طراحی قانون کنترل غیرپیوسته، ابتدا قانون کنترل معادل[1] $u_{eq}(t)$ طوری پیشنهاد می‌شود که سیستم به روی سطح لغزش برود. سپس برای مقابله با ترم‌های عدم قطعیت و حفظ حرکت در سطح لغزش یک ترم کلیدزنی اضافه می‌گردد. این مفهوم به وضوح در رابطه (۵-۶) بیان شده است.

$$\begin{aligned} &u_{eq} = \frac{1}{g(x,t)}\left(-f(x,t) + \dot{x}_{nd}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1}(t)\right) \\ &u(t) = u_{eq} - K_{sw}\,\mathrm{sgn}(s(t)) \\ &K_{sw} \geq \gamma_d + \gamma_f \end{aligned} \tag{۵-۶}$$

در عبارت فوق، K_{sw} بهره لغزش نام دارد.

۵-۲-۳- پدیده لرزش و روش‌های کاهش آن

رفتار ایده‌ال مد لغزشی زمانی است که فرکانس کلیدزنی بی‌نهایت شود. لیکن تاخیر زمانی کلیدزنی باعث انحراف اندک مسیر از سطح لغزش می‌شود. این انحراف به کرات تکرار شده و مسیر دوباره به سطح لغزش برمی‌گردد. این لرزش‌ها باعث ناپیوسته شدن قانون کنترل $u(t)$ شده و در عمل باعث استهلاک سیستم می‌شوند. پدیده لرزش در شکل (۵-۳) به وضوح نشان داده شده است [۱۰۸].



شکل ۵-۳: لرزش ناشی از کلیدزنی غیرایده‌ال (برگرفته از [۲۱]).

[1] Equivalent control law

در حالت کلی پدیده لرزش یا نوسانات ناخواسته بسیار نامطلوب است، زیرا دربرگیرنده فعالیت کنترل خیلی زیادی می‌شود. در نتیجه باعث تلفات گرمایی، استهلاک مکانیکی و تحریک دینامیک‌های فرکانس بالای صرفنظر شده در مدل می‌شود. بنابراین، کاهش لرزش از اهمیت زیادی برخوردار است.

سه روش متداول کاهش لرزش در کنترل مد لغزشی بطور خلاصه عبارت‌اند از:

۱- استفاده از تقریب‌های پیوسته به جای تابع علامت نظیر توابع [۲۱، ۱۰۸]:

الف) تابع اشباع[1]:

$$sat(\frac{s(t)}{\phi}) = \begin{cases} \frac{s(t)}{\phi} & |s(t)| \le \phi \\ \mathrm{sgn}(s(t)) & |s(t)| > \phi \end{cases} \qquad (۵-۷)$$

ب) تانژانت هیپربولیک:

$$\tan(\frac{s(t)}{\rho}) = \frac{e^{\frac{s(t)}{\rho}} - e^{-\frac{s(t)}{\rho}}}{e^{\frac{s(t)}{\rho}} + e^{-\frac{s(t)}{\rho}}} \qquad (۵-۸)$$

ج) تقریب کسری:

$$\mathrm{sgn}(s(t)) \cong \frac{s(t)}{|s(t)| + \delta} \qquad (۵-۹)$$

در روابط مذکور، پارامترهای $0 < \phi$، $0 < \rho$ و $0 < \delta$ بسته به نوع سیستم تحت کنترل انتخاب می-شوند.

۲- جایگزینی ترم لغزشی با تقریبگرهای عدم‌قطعیت و اغتشاش از نوع فازی، عصبی و ... [۱۰۹].

[1] Saturation function

۳- بکارگیری روش کنترل مد لغزشی دینامیک[1] [۱۱۰].

۵-۲-۴- قوانین لغزشی رایج

قوانین لغزشی رایج در کنترل سیستم‌های غیرخطی عبارت اند از [۱۱۱]:

۱- قانون لغزشی با بهره ثابت[2]

$$\dot{s}(t) = -K_{sw}\,\mathrm{sgn}(s(t)) \qquad (۵\text{-}۱۰)$$

۲- قانون لغزشی با بهره ثابت و تناسبی[3] (قانون کنترل نمایی[4])

$$\dot{s}(t) = -Ks(t) - K_{sw}\,sign(s(t)) \qquad (۵\text{-}۱۱)$$

۳- قانون لغزشی توانی[5]

$$\dot{s}(t) = -A|s(t)|^{a}\,sign(s(t)) \qquad (۵\text{-}۱۲)$$

در روبط فوق K_{sw} و K ماتریس‌های قطری با المان های مثبت، A یک اسکالر مثبت و $a \in (0,1)$ می‌باشد. انتخاب مناسب این پارامترها شرط رسیدن به سطح لغزش را براورده می‌کند. در نتیجه از قوانین لغزشی مذکور می‌توان در به دست آوردن قانون کنترلی مناسب استفاده کرد.

۵-۳- کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری

همانطور که قبلا اشاره شد، بکارگیری کنترل‌کننده مد لغزشی برای روی سیستم‌های مرتبه- کسری، یا طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با سطح لغزش دارای دینامیک‌های مرتبه- کسری (مشتق و

[1] Dynamic sliding mode control
[2] Constant rate reaching law
[3] Constant plus proportional rate reaching law
[4] Exponential reaching law
[5] Power rate reaching law

انتگرال) ، یا هر دو مورد با هم را کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری (FOSMC) گویند [۲۷]. به عبارت دیگر، برای اطلاق لفظ کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری کافی است که سیستم یا کنترل‌کننده یا هر دو دارای دینامیک‌های مرتبه- کسری باشند.

به دلیل تنوع مشتقات و طراحی‌های مرتبه- کسری، تاکنون سه دسته مختلف از قوانین لغزشی پیشنهاد شده‌اند که عبارت‌اند از:

۱- قانون لغزش معمولی: در مواردی که با پیشنهاد سطح لغزش و قانون کنترلی مناسب بتوان عملگرهای مرتبه- کسری را از دینامیک لغزش حذف نمود، قانون لغزش معمولی (۵-۱۳) مبنای کار خواهد بود. به عنوان مثال: سطح لغزش انتگرالی پیشنهادی در مراجع [۳۴، ۱۱۲] از این دسته است.

$$\dot{s}(t) = -K_{sw}\,\mathrm{sgn}(s(t)) \qquad (۵\text{-}۱۳)$$

لازم به ذکر است که قانون لغزش (۵-۱۳)، معمولا برای سیستم‌های مرتبه- کسری با عملگر ${}_{RL}D^{\alpha}$ استفاده می‌شود. همچنین، تابع کاندیدای لیاپانوف $V(t)=0.5s^2(t)$ برای تحلیل پایداری (۵-۱۳) ابزار مناسبی است.

۲- قانون لغزش مرتبه- کسری (مشتق): در این روش عملگر D^{α} جایگزین مشتق مرتبه- صحیح D^1 می‌گردد. پایه و اساس این روش در مراجع [۲۸، ۳۷- ۳۸] مطرح و گسترش یافته است. لیکن قانون لغزش (۵-۱۴) به دلیل مشکل بودن اثبات پایداری و پیچیدگی محاسبه مشتقات مرتبه- کسری (مانند $D^{\alpha}s^2(t)$)، تاکنون از محبوبیت زیادی برخوردار نشده است.

$$D^{\alpha}s(t) = -K_{sw}\,\mathrm{sgn}(s(t)) \qquad (۵\text{-}۱۴)$$

در ماه‌های اخیر، با توجه به بحث‌های پایداری جدید ارایه شده در مرجع [۸۶] امکان توسعه قانون لغزش (۵-۱۴) فراهم شده است. برای تایید این امر، با تعریف تابع لیاپانوف $V(t)=0.5s^2(t)$ و استفاده از لم ۳-۵، می‌توان نوشت:

$$ {}_C D^{\alpha} V(t) = 0.5 {}_C D^{\alpha} s^2(t) \le s(t) {}_C D^{\alpha} s(t) \le -K_{sw} s(t) \operatorname{sgn}(s(t)) = -K_{sw} |s(t)| \qquad (۱۵-۵) $$

نامساوی فوق، پایداری قانون لغزش (۵-۱۴) با عملگر ${}_C D^{\alpha}$ را بنا به قضیه ۳-۲۰ ضمانت می‌نماید.

تاکنون برای قانون لغزش (۵-۱۴) با عملگر ${}_{RL} D^{\alpha}$ تحلیل پایداری مناسبی ارایه نشده است. دلیل اصلی این امر نیز محدودیت کاربرد فیزیکی عملگر ${}_{RL} D^{\alpha}$ می‌باشد.

۳- **قانون لغزش مرتبه- کسری (مشتق- انتگرال):** ترکیب قانون لغزشی (۵-۱۶) و خاصیت توالی مشتق Caputo، کاربرد گسترده‌ای در کنترل سیستم‌های دینامیکی مختلف داشته است [۲۹، ۳۵].

$$ D^{\alpha} s(t) = -K_{sw} D^{-(1-\alpha)} \operatorname{sgn}(s(t)) \qquad (۱۶-۵) $$

رابطه (۵-۱۶) را با اضافه کردن بهره تناسبی می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$ D^{\alpha} s(t) = -D^{-(1-\alpha)} \left(\eta s(t) + K_{sw} \operatorname{sgn}(s(t)) \right) \qquad (۱۷-۵) $$

اکنون با تعریف تابع لیاپانوف $V(t) = |s(t)|$ و بکارگیری خاصیت توالی، می‌توان نوشت:

$$ \begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{s}(t) \operatorname{sgn}(s(t)) = \left({}_C D^{1-\alpha} {}_C D^{\alpha} s(t) \right) \operatorname{sgn}(s(t)) \\ &= -\left({}_C D^{1-\alpha} D^{-(1-\alpha)} \left(\eta s(t) + K_{sw} \operatorname{sgn}(s(t)) \right) \right) \operatorname{sgn}(s(t)) \\ &= -\eta |s(t)| - K_{sw} \end{aligned} \qquad (۱۸-۵) $$

نامساوی مذکور، بنا به قضیه ۳-۱۳ پایداری قوانین لغزشی (۵-۱۶) و (۵-۱۷) را تضمین می‌کند. توجه شود که در حالتی که تابع لیاپانوف $V(t) = 0.5 s^2(t)$ انتخاب شود، قضیه ۳-۱۳ را نمی‌توان بکار گرفت.

۵-۴- کنترل مد لغزشی غیرخطی

اگرچه روش کنترل مد لغزشی با سطح لغزش خطی در مقایسه با بیشتر متد-های کنترلی عملکرد سریعتر و دقیق‌تری دارد، لیکن با تعریف سطح لغزش

غیرخطـــی (ترمینـــال)[1] مـــی‌تـــوان بـــه رفتـــاری بهتـــر نســـبت بـــه نـــوع خطـــی دســـت یافـــت [۱۱۳]. ایـــن روش بـــه دلیـــل اســـتفاده از ســـطح لغـــزش غیرخطـــی، بـــه کنتـــرل مـــد لغزشـــی غیرخطی یا ترمینال (NSMC یا TSMC) معروف است.

به دلیل استفاده از مفهوم سطح لغزش غیرخطی در فصل هفتم، در این فصل کنترل مد لغزشی غیرخطی با درجه نسبی[2] یک به اختصار توصیف می‌شود.

اکنون برای سیستم (۵-۱) با درجه نسبی یک ($n=1$)، سطح لغزش غیرخطی با توان کسری زیر را در نظر بگیرید [۱۱۳]:

$$s(t)=e(t)+\lambda\int_0^t e^{\frac{p}{q}}(\tau)d\tau \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

در عبارت فوق، $\lambda>0$، $e(t)$ خطای ردیابی، و p و q اعداد صحیح فرد با شرط $q>p>0$ هستند.

بر روی سطح لغزش ($s(t)=0$)، داریم:

$$e(t)+\lambda\int_0^t e^{\frac{p}{q}}(\tau)d\tau=0 \qquad (۲۰\text{-}۵)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۵-۲۰)، می‌توان نوشت:

$$\dot{e}(t)+\lambda e^{\frac{p}{q}}(t)=0 \quad\rightarrow\quad \dot{e}(t)=-\lambda e^{\frac{p}{q}}(t) \qquad (۲۱\text{-}۵)$$

همچنین با انتگرال‌گیری از طرفین معادله دینامیکی (۵-۲۱)، زمان همگرایی خطای ردیابی $e(t)$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

[1] Nonlinear sliding surface or Terminal sliding surface

[2] Relative degree

$$T_f = \frac{|e(0)|^{1-p/q}}{\lambda(1-p/q)} \tag{۲۲-۵}$$

با توجه به رابطه فوق، با انتخاب مقدار مناسب برای نسبت p/q می‌توان به زمان همگرایی سریعتری نسبت به سطح لغزش خطی دست یافت.

۵-۵- کنترل مد لغزشی سیستم‌های مقیاس- بزرگ

در بخش‌های پیشین، طراحی انواع مختلف کنترل‌کننده‌های مد لغزشی بر روی سیستم‌های مقیاس- کوچک مورد بررسی قرار گرفت. لیکن طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی برای حالتی که سیستم مقیاس- بزرگ باشد به دلیل وجود برهم‌کنش بین زیرسیستم‌ها نیازمند تحلیل ژرفی است. بدین منظور، ابتدا به بیان انواع راهبردهای کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ می‌پردازیم.

۵-۵-۱- راهبردهای کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ

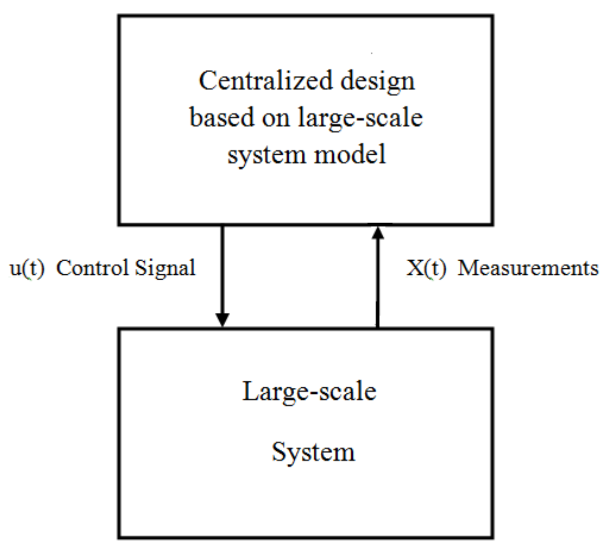
شکل ۵-۴ سه راهبرد عمده برای کنترل مقاوم یک سیستم مقیاس- بزرگ با دو زیرسیستم را نشان می‌دهد. این سه روش عبارتند از [۵۲، ۵۵]:

۱- راهبرد کنترل متمرکز: در این مد کنترلی، کنترل‌کننده مرکزی باید همزمان به اطلاعات همه زیرسیستم‌ها دسترسی داشته باشد. این روش از لحاظ عملی مفید نمی‌باشد. به عنوان مثال، در یک واحد پتروشیمی عملیات کنترل با یک کنترل‌کننده مرکزی حجیم (حجم محاسبات) و هزینه بر بوده (هزینه کابل‌کشی) و در صورت وقوع خطا در کنترل‌کننده مرکزی کل سیستم مختل می‌شود. جزئیات بیشتر این روش در شکل ۵-۴ الف) نشان داده شده است.

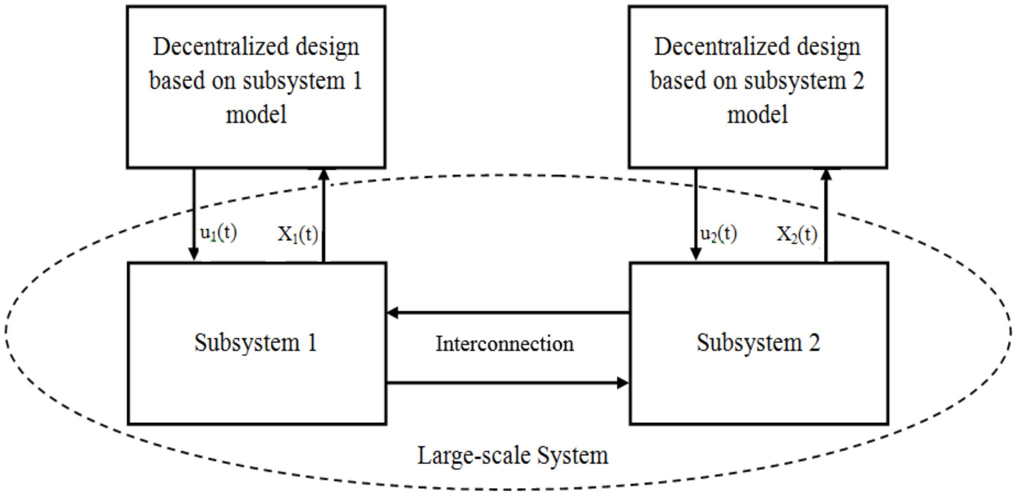
۲- راهبرد کنترل غیرمتمرکز یا محلی: این روش به دلیل آنکه به اطلاعات محلی هر زیرسیستم وابسته است، از لحاظ عملی جذاب می‌باشد. همچنین، نسبت به راهبرد متمرکز به حجم محاسبات کمتری نیاز دارد، و در صورتی که یکی از کنترل‌کننده‌ها دچار مشکل شود کل سیستم مختل نخواهد

شد. لیکن برای حفظ پایداری هر یک از زیرسیستم‌ها طراحی‌های این حوزه کمی محافظه‌کارانه است. به عنوان نمونه، می‌توان به کنترل غیرمتمرکز سیستم‌های قدرت بهم پیوسته اشاره نمود که یکی از موضوعات مورد بحث این رساله نیز می‌باشد. ساختار این روش در شکل ۵-۴ ب) نشان داده شده است.

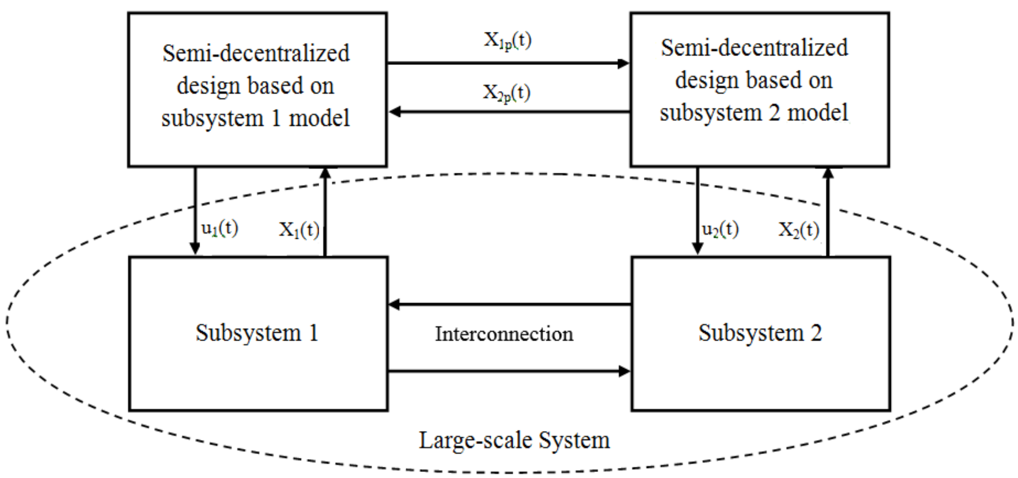
۳- راهبرد کنترل شبه- غیرمتمرکز: راهبرد کنترلی دیگری تحت عنوان کنترل شبه- غیرمتمرکز در [۵۵-۵۶] مطرح شده است. در این روش، هر یک از کنترل‌کننده‌ها علاوه بر اطلاعات زیرسیستم خود از برخی از اطلاعات زیرسیستم‌های همسایه نیز استفاده می‌کنند. امروزه با توجه به پیشرفت و توسعه تکنولوژی‌های انتقال اطلاعات (مانند فیبر نوری)، پیاده‌سازی این راهبرد چندان مشکل نمی‌باشد. در این روش، در حالتی که یکی از کنترل‌کننده‌ها دچار مشکل شود کل سیستم مختل نمی‌شود. گرچه حجم محاسبات روش کنترلی شبه- غیرمتمرکز نسبت به نوع غیرمتمرکز زیاد می‌باشد، اما طراحی‌های آن از محافظه کاری کمتری برخورداراند. جزئیات بیشتر این روش در شکل ۵-۴ ج) نشان داده شده است.



الف) راهبرد کنترل متمرکز



ب) راهبرد کنترل غیرمتمرکز (محلی)



ج) راهبرد کنترل شبه- غیرمتمرکز

شکل ۵-۴: سه راهبرد کنترلی در یک سیستم مقیاس- بزرگ با دو زیرسیستم [۵۲، ۵۵].

۵-۵-۲- طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی برای سیستم‌های مقیاس- بزرگ

در این قسمت، طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی بر روی سیستم‌های مقیاس- بزرگ بر پایه راهبرد غیرمتمرکز مورد بحث قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در بعضی از طراحی‌های کنترلی، مابین راهبردهای کنترل غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز تفاوت چندانی قائل نشده‌اند. اما در عمل چنین تفاوتی وجود دارد.

اکنون، مدل دینامیکی سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح متشکل از N زیرسیستم زیر را در نظر بگیرید ($i=1,2,\dots,N$):

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_{i1}(t) = x_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) = x_{i3}(t) \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{in}(t) = f_i(X_i) + g_i(X_i)u_i(t) + M_i(X_i,t) + I_i(X_1,\cdots,X_N,t) \end{cases} \tag{۲۳-۵}$$

در رابطه فوق، $X_i = [x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}]^T$ بردار حالت زیرسیستم i– ام، $u_i \in R$ ورودی زیرسیستم i– ام، $f_i(X_i)$ و $g_i(X_i) \neq 0$ توابعی معلوم، $M_i(\bullet)$ مجموعه‌ای شامل عدم قطعیت‌های مدلسازی و اغتشاش خارجی، و ترم $I_i(\bullet)$ نشان دهنده برهم‌کنش مابین زیرسیستم i– ام با زیرسیستم‌های دیگر است.

حال سطح لغزش مرتبط با هر زیرسیستم را به شکل زیر در نظر بگیرید [۶۲، ۶۵، ۶۶-۲۲]:

$$s_i(t) = C_i X_i(t) = x_{in}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} x_{ij}(t) \tag{۲۴-۵}$$

که در آن $C_i \in [c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{i(n-1)}, 1]$ باید طوری انتخاب شود که پایداری سطح لغزش $s_i(t)$ را تضمین نماید. با توجه به رابطه (۵-۲۴)، سطح لغزش کلی به شکل $S(t) \in [s_1(t), s_2(t), \cdots, s_N(t)]^T$ خواهد بود.

با مشتق‌گیری از سطح لغزش (۵-۲۴) و جایگذاری (۵-۲۳) در آن، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{s}_i(t) = C_i \dot{X}_i(t) &= f_i(X_i) + g_i(X_i)u_i(t) + \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} x_{i(j+1)}(t) + M_i(X_i,t) \\ &\quad + I_i(X_1,\cdots,X_N,t) \end{aligned} \tag{۲۵-۵}$$

در صورتی که برهم‌کنش مابین زیرسیستم‌ها صفر باشد ($I_i(\bullet)=0$)، پایداری همه زیرسیستم‌ها ($s_i^T(t)\cdot \dot{s}_i(t) < 0$) پایداری سیستم کلی را نتیجه می‌دهد. اما برای حالتی که برهم‌کنش مابین

زیرسیستم‌ها مخالف صفر است ($I_i(\bullet) \neq 0$)، بررسی پایداری تک‌تک زیرسیستم‌ها مناسب نبوده و پایداری سیستم باید یکجا بررسی شود ($S^T(t) \cdot \dot{S}(t) < 0$) [۶۲].

برای تحلیل پایداری سیستم‌های مقیاس- بزرگ به ازای کنترل‌کننده مد لغزشی، معمولا از دو تابع معیار زیر استفاده می‌شود [۶۲، ۶۴-۶۶، ۶۹] :

$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} V_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \left\| s_i(t) \right\| \tag{۲۶-۵}$$

$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} V_i(t) = \sum_{i=1}^{N} 0.5 s_i^T(t) \cdot s_i(t) \tag{۲۷-۵}$$

در صورتی که زیرسیستم‌ها تک ورودی باشند، توابع فوق به صورت روابط (۵-۲۸) و (۵-۲۹) قابل بازنویسی‌اند.

$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} V_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \left| s_i(t) \right| \tag{۲۸-۵}$$

$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} V_i(t) = \sum_{i=1}^{N} 0.5 s_i^2(t) \tag{۲۹-۵}$$

لم ۵-۱ [۶۲، ۶۴-۶۶، ۶۹]**:** اگر یکی از شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i(t) \cdot \dot{s}_i(t)}{\left| s_i(t) \right|} < 0 \tag{۳۰-۵}$$

$$\dot{V}(t) == \sum_{i=1}^{N} s_i(t) \cdot \dot{s}_i(t) < 0 \tag{۳۱-۵}$$

آنگاه سطح لغزشی (۵-۲۴) پایدار مجانبی خواهد بود. با توجه به لم ۵-۱، قانون کنترل $u_i(t) = u_{i-eq}(t) + K_{i-sw}(\bullet)\,\mathrm{sgn}(s_i(t))$ را می‌توان طوری پیشنهاد داد تا یکی از شرایط (۵-۳۰) یا

(۵-۳۱) ارضاء شود. اما مسئله اصلی نحوه انتخاب بهره $K_{i-sw}(\bullet)$ جهت تعامل با ترم برهم‌کنش $I_i(\bullet)$ خواهد بود.

فصل ششم

کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری

۶-۱- مقدمه

در این فصل، کنترل سیستم‌های غیرخطی مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه مشتقات موجود در معادلات دینامیکی این سیستم‌ها می‌توانند از نوع RL یا Caputo باشند، لذا کنترل هر دو دسته از سیستم‌های مقیاس- بزرگ (با مشتق RL یا Caputo) مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. در ابتدا، یک سطح لغزش انتگرالی برای سیستم مقیاس- بزرگ با مشتق RL، و یک سطح لغزش معمولی برای سیستم مقیاس- بزرگ با مشتق Caputo پیشنهاد شده است. در مرحله دوم، با فرض معلوم بود کران عدم قطعیت‌ها و برهم‌کنش بین زیر سیستم‌ها، کنترل‌کننده مدلغزشی مرتبه- کسری با راهبرد غیرمتمرکز[1] (Decentralized FOSMC) پیشنهاد شده، و پایداری هر دو دسته از سیستم‌های مقیاس- بزرگ به کمک قضایای پایداری مرتبه- کسری و مرتبه- صحیح تضمین می‌شود. در مرحله بعد، به دلیل مشکل بودن تعیین کران بالای عدم قطعیت‌ها و برهم‌کنش مابین زیرسیستم‌ها، بحث تخمین آنها به کمک تقریبگرهای فازی مطرح می‌گردد. لذا در ادامه این فصل، طراحی کنترل‌کننده‌های مد لغزشی با تقریب عدم‌قطعیت‌ها و برهم‌کنش بین زیرسیستم‌ها برای هر دو دسته از سیستم‌های مرتبه- کسری مورد توجه قرار می‌گیرد. این روش، به راهبرد کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری شبه- غیرمتمرکز[2] (Semi-decentralized FOSMC) معروف است.

در نهایت، برای بررسی ویژگی‌ها و قابلیت‌های هر یک از کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، شبیه‌سازی کامپیوتری دو مثال مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری متفاوت آورده شده است. نتایج شبیه‌سازی بدست آمده، به دلیل مقایسه رفتار دو دسته متفاوت از سیستم‌های مرتبه- کسری از اهمیت زیادی برخوردار‌اند.

[1] Decentralized fractional-order sliding mode control

[2] Semi-decentralized fractional-order sliding mode control

۶-۲- کنترل مدلغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز

در این بخش، طراحی کنترل‌کننده‌های مدلغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز (Decentralized FOSMC) بر روی سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری (۴-۱) و (۴-۲) ذکر شده در فصل چهارم، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در طراحی این نوع کنترل‌کننده‌ها فرض بر این است که عدم قطعیت کلی $L_i(X,t)$ کراندار با کران معلوم باشد. فرض‌های ۶-۱ و ۶-۲ تبیین کننده این مفهوم هستند.

فرض ۶-۱: فرض کنید که عدم قطعیت کلی $L_i(X,t)$ شرط (۶-۱) را برای زیرسیستم با مشتق RL ارضا نماید.

$$\left|L_i(X,t)\right| \le \psi_{i1} \tag{۶-۱}$$

در عبارت فوق، ψ_{i1} ثابت معلوم و مثبت است.

فرض ۶-۲: فرض کنید که عدم قطعیت کلی $L_i(X,t)$ شرط (۶-۲) را برای زیرسیستم با مشتق Caputo ارضا نماید.

$$\left|{}_{C}D^{1-\alpha}L_i(X,t)\right| \le \psi_{i2} \tag{۶-۲}$$

در عبارت فوق، ψ_{i2} ثابت معلوم و مثبت است.

۶-۲-۱- کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ با مشتق RL

اکنون، دینامیک خطاهای زیرسیستم i- ام توصیف شده با مشتق ${}_{RL}D^{\alpha}$ را در نظر بگیرید:

$$S_i:\begin{cases} {}_{RL}D^{\alpha}e_{i1}(t)=e_{i2}(t)\\ {}_{RL}D^{\alpha}e_{i2}(t)=e_{i3}(t)\\ \qquad\vdots\\ {}_{RL}D^{\alpha}e_{in}(t)=f_i(X_i)+g_i(X_i)u_i(t)+L_i(X,t)-{}_{RL}D^{\alpha}x_{ind}(t)\end{cases} \tag{۶-۳}$$

هدف، پیشنهاد سطح لغزش و قانون کنترل مناسبی است که ردیابی بردارهای مرجع $X_{id}(t)$ توسط بردارهای حالت $X_i(t)$ را تضمین نماید. بدین منظور، سطح لغزشی مرتبه- کسری انتگرالی (۶-۴) تعریف می‌گردد.

$$\sigma_i(t) = D^{-(1-\alpha)}\left(e_{in}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} e_{ik}(t)\right) \tag{۶-۴}$$

در عبارت فوق، c_{i1}، c_{i2} ... و $c_{i(n-1)}$ پارامترهای سطح لغزش نام داشته و باید طوری انتخاب شوند که ریشه‌های چندجمله‌ای $P(s) = s^{n-1} + c_{i(n-1)}s^{n-2} + \cdots + c_{i2}s + c_{i1}$ در سمت چپ صفحه S قرار گیرند.

اکنون با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۶-۴)، می‌توان نوشت:

$$\dot{\sigma}_i(t) = D^1 D^{-(1-\alpha)}\left(e_{in}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} e_{ik}(t)\right) = {}_{RL}D^{\alpha} e_{in}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik\,RL} D^{\alpha} e_{ik}(t) \tag{۶-۵}$$

و با جایگذاری رابطه (۶-۳) در (۶-۵)، داریم:

$$\dot{\sigma}_i(t) = f_i(X_i) + g_i(X_i)u_i(t) - {}_{RL}D^{\alpha} x_{ind}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} e_{i(k+1)}(t) + L_i(X,t) \tag{۶-۶}$$

اینک به کمک روابط فوق، قضیه ۶-۱ قابل پیشنهاد است.

قضیه ۶-۱: زیرسیستم (۶-۳) با مشتق RL، به همراه سطح لغزش (۶-۴) و فرض ۶-۱ را در نظر بگیرید. در این حالت، قانون کنترل غیرمتمرکز:

$$\begin{aligned} u_i(t) = \frac{1}{g_i(X_i)}\Big(&- f_i(X_i) + {}_{RL}D^{\alpha} x_{ind}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} e_{i(k+1)}(t) - \eta_i \sigma_i(t) \\ &- K_{sw-i}\,\mathrm{sgn}(\sigma_i(t))\Big), \quad \eta_i > 0 \end{aligned} \tag{۶-۷}$$

به ازای انتخاب بهره لغزشی:

$$K_{sw-i} \geq \psi_{i1} \geq \left| L_i(X,t) \right| \tag{۶-۸}$$

پایداری مجانبی زیرسیستم (۶-۳) را تضمین می‌کند. بدیهی است که با اعمال قوانین کنترل متناظر با زیرسیستم‌های دیگر، پایداری مجانبی سیستم مقیاس- بزرگ نیز برقرار شده و بردار کلی خطا $E = \left[E_1^T, E_2^T, \ldots, E_N^T\right]^T$ به سمت صفر میل خواهد کرد.

اثبات پایداری: تابع کاندیدای لیاپانوف کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$V(t,\sigma(t)) = \left\| \sigma(t) \right\|_1 = \sum_{i=1}^{N} V_i(t,\sigma_i(t)) = \sum_{i=1}^{N} \left| \sigma_i(t) \right| \tag{۶-۹}$$

که در آن $V_i(t,\sigma_i(t))$ تابع لیاپانوف زیرسیستم i- ام است. با مشتق گیری از رابطه (۶-۹)، داریم:

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}(\sigma_i(t)) \dot{\sigma}_i(t) \tag{۶-۱۰}$$

با جایگذاری دینامیک لغزش (۶-۶) در رابطه (۶-۱۰)، می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}(\sigma_i(t)) \Big(f_i(X_i) + g_i(X_i) u_i(t) - {}_{RL}D^{\alpha} x_{ind}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} e_{i(k+1)}(t) + L_i(X,t) \Big) \tag{۶-۱۱}$$

از طرفی جایگزینی قانون کنترل (۶-۷) در رابطه (۶-۱۱)، نتیجه می‌دهد:

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}(\sigma_i(t)) \big(-\eta_i \sigma_i(t) - K_{sw-i} \operatorname{sgn}(\sigma_i(t)) + L_i(X,t) \big) \tag{۶-۱۲}$$

با توجه به اینکه $\operatorname{sgn}(\sigma_i(t)) \times \operatorname{sgn}(\sigma_i(t)) = 1$ و $\operatorname{sgn}(\sigma_i(t)) \times \sigma_i(t) = \left|\sigma_i(t)\right|$ است، لذا داریم:

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) = -\sum_{i=1}^{N} \big(\eta_i \left|\sigma_i(t)\right| + K_{sw-i} - \operatorname{sgn}(\sigma_i(t)) L_i(X,t) \big) \tag{۶-۱۳}$$

با انتخاب $K_{sw-i} \geq \psi_{i1}$، نامساوی (۶-۱۴) حاصل می‌گردد.

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) \le -\sum_{i=1}^{N}\eta_i\left|\sigma_i(t)\right| \le -\Omega\left\|\sigma(t)\right\|_1, \qquad \Omega=\min\{\eta_1,\ldots,\eta_N\} \tag{۱۴-۶}$$

که بر طبق قضایای پایداری معمولی (مرتبه- صحیح) [۲۱، ۹۹]، پایداری مجانبی سیستم حلقه- بسته را نتیجه می‌دهد. □

۶-۲-۲- کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ با مشتق Caputo

دینامیک خطاهای زیرسیستم i- ام با مشتق ${}_{C}D^{\alpha}$ را در نظر بگیرید:

$$S_i:\begin{cases} {}_{C}D^{\alpha}e_{i1}(t)=e_{i2}(t) \\ {}_{C}D^{\alpha}e_{i2}(t)=e_{i3}(t) \\ \qquad\vdots \\ {}_{C}D^{\alpha}e_{in}(t)=f_i(X_i)+g_i(X_i)u_i(t)+L_i(X,t)-{}_{C}D^{\alpha}x_{ind}(t) \end{cases} \tag{۱۵-۶}$$

برای تضمین همگرایی خطاها، سطح لغزش (۶-۱۶) پیشنهاد می‌شود. برخلاف سطح لغزش (۶-۴)، سطح لغزش فعلی فاقد انتگرال مرتبه- کسری است.

$$\sigma_i(t)=e_{in}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}c_{ik}e_{ik}(t) \tag{۱۶-۶}$$

اعمال مشتق ${}_{C}D^{\alpha}$ به طرفین سطح لغزش فوق، رابطه (۶-۱۷) را نتیجه می‌دهد.

$${}_{C}D^{\alpha}\sigma_i(t)={}_{C}D^{\alpha}e_{in}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}c_{ik}\,{}_{C}D^{\alpha}e_{ik}(t) \tag{۱۷-۶}$$

با جایگزینی معادلات زیرسیستم (۶-۱۵) در (۶-۱۷)، دینامیک سطح لغزش به شکل زیر حاصل می-گردد:

$${}_{C}D^{\alpha}\sigma_i(t)=f_i(X_i)+g_i(X_i)u_i(t)-{}_{C}D^{\alpha}x_{ind}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}c_{ik}e_{i(k+1)}(t)+L_i(X,t) \tag{۱۸-۶}$$

ملاحظه ۶-۱: اگر به ازای $T>0$، $(i=1,2)$ $\alpha_i \in (0,1)$ و $\alpha_1+\alpha_2 \in (0,1]$ داشته باشیم $\sigma(t)\in C^1[0,T]$، آنگاه:

$$\dot{\sigma}(t) = {}_C D_{0,t}^{\alpha} \cdot {}_C D_{0,t}^{1-\alpha} \sigma(t) = {}_C D_{0,t}^{1-\alpha} \cdot {}_C D_{0,t}^{\alpha} \sigma(t) \tag{۱۹-۶}$$

رابطه فوق بسط خاصیت توالی مشتق Caputo به کنترل مد لغزشی بوده و کاربرد گسترده‌ای در اثبات پایداری‌های سیستم‌های مرتبه- کسری دارد. از دیدگاه ریاضی، رابطه (۶-۱۹) به ازای پیوسته بودن $\sigma(t)$ و $\dot{\sigma}(t)$ برقرار است (به علت وجود شرط $\sigma(t)\in C^1$). اما به دلیل وجود تابع علامت $\mathrm{sgn}(\sigma(t))$، مقادیر مرجع غیرصاف $X_{id}(t)$ و تغییرات سریع در اغتشاشات، پیوستگی $\dot{\sigma}(t)$ تضمین نخواهد شد. از دیدگاه مهندسی، بکارگیری تقریبگرهای فازی، جایگزینی تابع $\mathrm{sgn}(\sigma(t))$ با توابع صاف ($\tanh(\sigma(t))$، $sat(\sigma(t))$، $D_{0,t}^{-\alpha}(\sigma(t))$) و اعمال مقادیر مرجع صاف، راه حل‌های عملی برای رفع مشکل مذکور می‌باشند.

قضیه ۶-۲: برای زیرسیستم (۶-۱۵) توصیف شده با مشتق ${}_C D^{\alpha}$، سطح لغزش (۶-۱۶) و فرض ۶-۲، تلاش کنترلی غیرمتمرکز:

$$\begin{aligned} u_i(t) = \frac{1}{g_i(X_i)} \Big(& - f_i(X_i) + {}_C D^{\alpha} x_{ind}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} e_{i(k+1)}(t) \\ & - D^{-(1-\alpha)}(\eta_i \sigma_i(t) + K_{sw-i}\, \mathrm{sgn}(\sigma_i(t))) \Big) \end{aligned} \tag{۲۰-۶}$$

با بهره لغزشی:

$$K_{sw-i} \geq \psi_{i2} \geq \left| {}_C D^{1-\alpha} L_i(X_i,t) \right| \tag{۲۱-۶}$$

پایداری مجانبی بودن زیرسیستم (۶-۱۵) را تضمین می‌نماید. بدیهی است که با اعمال قوانین کنترل متناظر با زیرسیستم‌های دیگر، پایداری سیستم مقیاس- بزرگ نیز برقرار شده و بردار کلی خطای $E=\left[E_1^T, E_2^T, \dots, E_N^T\right]^T$ به همسایگی صفر نزدیک می‌شود.

اثبات پایداری: تابع کاندیدای لیاپانوف را به صورت (۶-۲۲) در نظر بگیرید.

$$V(t,\sigma(t)) = \|\sigma(t)\|_1 = \sum_{i=1}^{N} V_i(t,\sigma_i(t)) = \sum_{i=1}^{N} |\sigma_i(t)| \tag{۶-۲۲}$$

با مشتق‌گیری از $V(t,\sigma(t))$ نسبت به زمان، می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i(t))\dot{\sigma}_i(t) \tag{۶-۲۳}$$

به کمک رابطه (۶-۱۹)، داریم:

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i(t))\dot{\sigma}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i(t))\left({}_C D^{1-\alpha}\, {}_C D^{\alpha} \sigma_i(t)\right) \tag{۶-۲۴}$$

و با جایگذاری دینامیک سطح لغزش (۶-۱۸) در عبارت فوق، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i(t)) \Bigg({}_C D^{1-\alpha} \Bigg(& f_i(X_i) + g_i(X_i) u_i(t) - {}_C D^{\alpha} x_{ind}(t) \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} e_{i(k+1)}(t) + L_i(X,t) \Bigg)\Bigg)\end{aligned} \tag{۶-۲۵}$$

از طرفی جایگزینی قانون کنترل (۶-۲۰) در (۶-۲۵)، رابطه (۶-۲۶) را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{N} & \mathrm{sgn}(\sigma_i(t))\left({}_C D^{1-\alpha}\left(-D^{-(1-\alpha)}(\eta_i \sigma_i(t) + K_{sw-i}\,\mathrm{sgn}(\sigma_i(t)))\right.\right. \\ & \left.\left. + L_i(X,t)\right)\right)\end{aligned} \tag{۶-۲۶}$$

بنا به قضیه ۲-۱ از فصل دوم، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{N} & \Big(-\eta_i |\sigma_i(t)| + \mathrm{sgn}(\sigma_i(t))\Big(-K_{sw-i}\,\mathrm{sgn}(\sigma_i(t)) \\ & + {}_C D^{1-\alpha} L_i(X,t)\Big)\Big)\end{aligned} \tag{۶-۲۷}$$

لذا رابطه (۶-۲۷) به شکل (۶-۲۸) قابل بازنویسی است.

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) \cong -\sum_{i=1}^{N}\Big(\eta_i\left|\sigma_i(t)\right| + \big(K_{sw-i} - \mathrm{sgn}(\sigma_i(t))_C D^{1-\alpha} L_i(X,t)\big)\Big) \qquad (۶\text{-}۲۸)$$

از طرفی با توجه به شرط $K_{sw-i} \geq \psi_{i2}$، می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,\sigma(t)) \leq -\sum_{i=1}^{N}\eta_i\left|\sigma_i(t)\right| \leq -\Omega\left\|\sigma(t)\right\|_1, \qquad \Omega = \min\{\eta_1,\ldots,\eta_N\} \qquad (۶\text{-}۲۹)$$

که پایداری سیستم حلقه- بسته را به کمک قضیه ۳-۱۳ نتیجه می‌دهد. □

ملاحظه ۶-۲: اگر چه قوانین کنترلی غیرمتمرکز (۶-۷) و (۶-۲۰) برای دو سیستم مقیاس- بزرگ با مشتقات متفاوت (۶-۳) و (۶-۱۵) پیشنهاد شده‌اند، اما تفاوت‌های دیگری را نیز برای آنها می‌توان نام برد:

۱- با توجه به بهره‌های لغزشی (۶-۸) و (۶-۲۱)، در حالت کلی قانون کنترلی (۶-۷) به بهره لغزشی کوچکتری نسبت به (۶-۲۰) نیاز دارد.

۲- در قانون کنترل (۶-۲۰)، به دلیل بکارگیری خواص مشتقات Caputo سطح لغزش باید مشتق‌پذیر پیوسته باشد ($\sigma_i(t)\in C^1$)، در حالی که این شرط برای قانون کنترلی (۶-۷) نیاز نیست. البته از دیدگاه ریاضی برای برقراری شرط $\sigma_i(t)\in C^1$ در (۶-۲۰)، می‌توان $\mathrm{sgn}(\sigma_i(t))$ را با تابع نرم $\tanh(\sigma_i(t)/\rho_i)$ با جایگزین نمود.

با وجود این تفاوت‌ها، سیستم (۶-۳) کاربرد فیزیکی و عملی محدودی نسبت به سیستم (۶-۱۵) دارد.

ملاحظه ۶-۳: هر دو قانون کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز پیشنهادی (۶-۷) و (۶-۲۰) دارای محدودیت‌های زیر هستند:

۱- مبنای عملکرد هر دو قانون کنترل فرض‌های ۶-۱ و ۶-۲ می‌باشد. به عبارت دیگر، کران بالای عدم قطعیت‌ها و برهم‌کنش مابین زیرسیستم‌ها برای طراحی این قوانین کنترل معلوم در نظر گرفته شده‌اند. اما در عمل تعیین ψ_{i1} و ψ_{i2} کاری سخت و پیچیده می‌باشد. علاوه براین، اگر در یکی از زیرسیستم‌ها خطایی رخ دهد، ممکن است باعث تغییر محدوده کران عدم قطعیت کلی شود، در حالی که انتخاب آنی ψ_{i1} و ψ_{i2} جدید امکانپذیر نیست. بنابراین، طراحی غیرمتمرکز جدید یا راهبرد کنترلی جدیدی برای تقریب عدم قطعیت‌ها و برهم‌کنش مابین زیرسیستم‌ها مورد نیاز است.

۲- استفاده از توابع $\mathrm{sgn}(\sigma_i(t))$ و $\tanh(\sigma_i(t)/\rho_i)$ (با ρ_i کوچک) در قوانین کنترلی (۶-۷) و (۶-۲۰)، زمینه‌ساز ایجاد پدیده لرزش و نوسانات ناخواسته بوده و موجب آسیب دیدن سیستم‌های فیزیکی و تخطی از شرط C^1 می‌شود.

۶-۳- کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری شبه- غیرمتمرکز

در این بخش، به منظور رفع مشکلات بیان شده در ملاحظه ۶-۳، راهبرد جدید کنترلی تحت عنوان کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری شبه- غیرمتمرکز (Semi-decentralized FOSMC) پیشنهاد شده است. در این روش، از سیستم‌های فازی با تنظیم تطبیقی برای تقریب عدم قطعیت‌ها و برهم‌کنش بین زیرسیستم‌ها استفاده می‌شود. همانطور که قبلا اشاره شد، این روش به علت استفاده از برخی اطلاعات زیرسیستم‌های همسایه‌ی زیرسیستم i- ام به عنوان ورودی تقریبگر فازی، به راهبرد کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری شبه- غیرمتمرکز معروف است. در ادامه این بخش، کاربرد راهبرد شبه- غیرمتمرکز بر روی هر دو سیستم با دینامیک زیرسیستم (۶-۳) و (۶-۱۵) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۶-۳-۱- کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ با مشتق RL

فرم بازنویسی شده رابطه (۶-۶) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{\sigma}_i(t) = f_i(X_i) + g_i(X_i)u_i(t) - {}_{RL}D^{\alpha}x_{ind}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik}e_{i(k+1)}(t) + \theta_i^T \xi_i(X) \qquad (۶-۳۰)$$

که در آن $\theta_i = [\theta_{i1},\ldots,\theta_{iM}]^T$ بردار پارامترها، $\xi_i(X)$ بردار بازگشتی[1]، و $X = [X_1^T, X_2^T, \cdots, X_N^T]$ ورودی تقریبگر فازی است. توضیحات بیشتر در این زمینه در پیوست ب و مرجع [۱۱۴] بیان شده است.

حال با توجه به رابطه (۶-۳۰)، انتخاب قانون کنترل شبه- غیرمتمرکز:

$$u_i(t) = \frac{1}{g_i(X_i,t)}\Big(-f_i(X_i,t) + {}_{RL}D^{\alpha}x_{ind}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik}e_{i(k+1)}(t) - \eta_i\sigma_i(t) - \hat{\theta}_i^T\xi_i(X)\Big) \qquad (۶-۳۱)$$

با مکانیزم تطبیقی:

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \mu_i \xi_i(X)\sigma_i(t) \qquad (۶-۳۲)$$

پایداری زیرسیستم (۶-۳) را تضمین می‌نماید. طبیعی است که با اعمال قوانین کنترل متناظر با زیرسیستم‌های دیگر نیز پایداری سیستم مقیاس- بزرگ تامین می‌گردد. در رابطه (۶-۳۲): $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ بردار خطای پارامتری، $\hat{\theta}$ تخمینی از بردار پارامترهای نامعلوم θ، و μ_i ضریب تطبیق نام دارد.

اثبات پایداری: با جایگذاری رابطه (۶-۳۱) در (۶-۳۰)، می‌توان نوشت:

$$\dot{\sigma}_i(t) = \theta_i^T\xi_i(X) - \eta_i\sigma_i(t) - \hat{\theta}_i^T\xi_i(X) = \tilde{\theta}_i^T\xi_i(X) - \eta_i\sigma_i(t) \qquad (۶-۳۳)$$

برای مطالعه پایداری سیستم حلقه- بسته، تابع کاندیدای لیاپانوف (۶-۳۴) در نظر گرفته شده است.

[1] Regressive vector

$$V(t,Y(t))=\alpha(\|Y\|)=\|Y\|_2^2=\sum_{i=1}^{N}V_i(t,,Y_i(t))=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\sigma_i^2(t)+\frac{1}{2\mu_i}\tilde{\theta}_i^T\tilde{\theta}_i\right) \qquad (۳۴\text{-}۶)$$

که در آن $Y_i=[\sigma_i \quad \tilde{\theta}_i^T]$ است. اکنون، با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف (۶-۳۴) در راستای (۶-۳۳)، داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,Y(t))&=\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i(t)\dot{\sigma}_i(t)+\frac{1}{\mu_i}\tilde{\theta}_i^T\dot{\tilde{\theta}}_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i(t)\left(\tilde{\theta}_i^T\xi_i(X)-\eta_i\sigma_i(t)\right)+\frac{1}{\mu_i}\tilde{\theta}_i^T\dot{\tilde{\theta}}_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}\left(-\eta_i\sigma_i^2(t)+\tilde{\theta}_i^T\left(\xi_i(X)\sigma_i(t)+\frac{1}{\mu_i}\dot{\tilde{\theta}}_i\right)\right)\end{aligned} \qquad (۳۵\text{-}۶)$$

همچنین، با جایگزینی مکانیزم تطبیقی (۶-۳۲) در (۶-۳۵)، نامساوی زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{V}(t,Y(t))=\sum_{i=1}^{N}-\eta_i\sigma_i^2(t)\le 0 \qquad (۳۶\text{-}۶)$$

که پایداری زیرسیستم (۶-۳) و سیستم کلی را تضمین می‌کند. به عبارت دیگر، بنا به لم باربالات[1] [۲۱، ۹۹]، برای زیرسیستم i- ام $\sigma_i\,(t)$ به سمت صفر همگرا شده، و $\hat{\theta}_i$ نیز محدود خواهد ماند. □

۶-۳-۲- کنترل سیستم‌های مقیاس- بزرگ با مشتق Caputo

همانند بخش پیشین، برای زیرسیستم (۶-۱۵) نیز راهبرد شبه- غیرمتمرکز قابل پیاده‌سازی است. بدین منظور، رابطه (۶-۱۸) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$${}_CD^{\alpha}\sigma_i(t)=f_i(X_i)+g_i(X_i)u_i(t)-{}_CD^{\alpha}x_{ind}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}c_{ik}e_{i(k+1)}(t)+D^{-(1-\alpha)}\theta_i^T\xi_i(X) \qquad (۳۷\text{-}۶)$$

با توجه به دینامیک لغزش مذکور، قانون شبه- غیرمتمرکز:

[1] Barbalat's lemma

$$u_i(t)=\frac{1}{g_i(X_i)}\Big(-f_i(X_i)+{}_CD^{\alpha}x_{ind}(t)-\sum_{k=1}^{n-1}c_{ik}e_{i(k+1)}(t)-D^{-(1-\alpha)}(\eta_i\sigma_i(t)+\hat{\theta}_i^T\xi_i(X))\Big) \tag{۶-۳۸}$$

با مکانیزم تطبیقی:

$${}_CD^{\alpha}\hat{\theta}_i=D^{-(1-\alpha)}\mu_i\xi_i(X)\sigma_i(t) \tag{۶-۳۹}$$

پایداری زیرسیستم (۶-۱۵) را تضمین می‌کند.

اثبات پایداری: با جایگزینی رابطه (۶-۳۸) در (۶-۳۷)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}{}_CD^{\alpha}\sigma_i(t)&=D^{-(1-\alpha)}\theta_i^T\xi_i(X)-D^{-(1-\alpha)}(\eta_i\sigma_i(t)+\hat{\theta}_i^T\xi_i(X)\\&=D^{-(1-\alpha)}\left(\tilde{\theta}_i^T\xi_i(X)-\eta_i\sigma_i(t)\right)\end{aligned} \tag{۶-۴۰}$$

اینک برای تحلیل پایداری سیستم حلقه- بسته، تابع لیاپانوف (۶-۴۱) را تعریف می‌کنیم:

$$V(t,Y(t))=\alpha(\|Y\|)=\|Y\|_2^2=\sum_{i=1}^{N}V_i(t,Y_i(t))=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\sigma_i^2(t)+\frac{1}{2\mu_i}\tilde{\theta}_i^T\tilde{\theta}_i\right) \tag{۶-۴۱}$$

با مشتق‌گیری از $V(t,Y(t))$ در راستای معادله (۶-۴۰)، داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,Y(t))&=\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i(t)\dot{\sigma}_i(t)+\frac{1}{\mu_i}\tilde{\theta}_i^T\dot{\tilde{\theta}}_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i(t)\,{}_CD^{1-\alpha}\,{}_CD^{\alpha}\sigma_i(t)+\frac{1}{\mu_i}\tilde{\theta}_i^T\,{}_CD^{1-\alpha}\,{}_CD^{\alpha}\tilde{\theta}_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\tilde{\theta}_i^T\xi_i(X)-\eta\sigma_i(t)\right)\sigma_i(t)+\frac{1}{\mu_i}\tilde{\theta}_i^T\,{}_CD^{1-\alpha}\,{}_CD^{\alpha}\tilde{\theta}_i\right)\end{aligned} \tag{۶-۴۲}$$

بکارگیری مکانیزم تطبیقی (۶-۳۹)، نتیجه می‌دهد:

$$\dot{V}(t,Y(t))=\sum_{i=1}^{N}-\eta_i\sigma_i^2(t)\le 0 \tag{۶-۴۳}$$

به دلیل مرتبه- کسری بودن دینامیک حلقه- بسته سطح لغزش (۶-۴۰)، نامساوی (۶-۴۳) باید به شکل مرتبه- کسری بیان شود. لذا، به کمک تعریف مشتق Caputo، قضیه ۳-۱۵ و لم ۳-۴، می‌توان نوشت:

$$ {}_{C}D^{1-\alpha}V(t,Y(t)) = D^{-\alpha}\dot{V}(t,Y(t)) \leq 0 \qquad (۶-۴۴)$$

نامساوی فوق، پایداری زیرسیستم (۶-۱۵) و محدود بودن سطح لغزش $\sigma_i(t)$ و $\hat{\theta}_i$ را ضمانت می‌نماید. اما همگرایی صفر $\sigma_i(t)$ از رابطه (۶-۴۴) قابل استخراج نمی‌باشد. گرچه این همگرایی در شبیه‌سازی‌ها مشهود است، اما نامساوی (۶-۴۴) اطلاعات بیشتری را در اختیار نمی‌گذارد. □

ملاحظه ۶-۴: اگرچه برای تسهیل اثبات پایداری، قانون تطبیقی (۶-۳۹) به فرم مرتبه- کسری پیشنهاد شده است، اما در واقع هر دو مکانیزم تطبیق (۶-۳۲) و (۶-۳۹) شبیه هم‌اند. این ادعا با انتگرالگیری از طرفین مکانیزم‌های تطبیقی مذکور قابل تایید است.

$$\dot{\hat{\theta}}_i = -\mu_i \xi_i(X)\sigma_i(t) \xrightarrow{D^{-1}} \hat{\theta}_i(t) - \hat{\theta}_i(0) = -\int_0^t \mu_i \xi_i(X)\sigma_i(t)dt \qquad (۶-۴۵)$$

$$\begin{aligned} {}_{C}D^{\alpha}\hat{\theta}_i &= -D^{-(1-\alpha)}\mu_i \xi_i(X)\sigma_i(t) \xrightarrow{D^{-\alpha}} \hat{\theta}_i(t) - \hat{\theta}_i(0) = -D^{-\alpha}D^{-(1-\alpha)}\mu_i \xi_i(X)\sigma_i(t) \\ &= -\int_0^t \mu_i \xi_i(X)\sigma_i(t)dt \end{aligned} \qquad (۶-۴۶)$$

ملاحظه ۶-۵: با جایگزینی قوانین کنترل پیشنهادی در دینامیک سطح لغزش، دینامیک‌های حلقه- بسته سطوح لغزش به صورت زیر قابل استنتاج اند:

راهبرد کنترل غیرمتمرکز (Decentralized FOSMC):

$$\dot{\sigma}_i(t) = -\eta_i \sigma_i(t) - K_{sw-i}\,\mathrm{sgn}(\sigma_i(t))\big) + L_i(X,t) \qquad (۶-۴۷)$$

$$ {}_{C}D^{\alpha}\sigma_i(t) = -D^{-(1-\alpha)}(\eta_i \sigma_i(t) + K_{sw-i}\,\mathrm{sgn}(\sigma_i(t))) + L_i(X,t) \qquad (۶-۴۸)$$

راهبرد کنترل شبه- غیرمتمرکز (Semi-decentralized FOSMC):

$$\begin{aligned}&\dot{\sigma}_i(t)=\tilde{\theta}_i^T\xi_i(X)-\eta_i\sigma_i(t)\\&\dot{\hat{\theta}}_i=-\mu_i\xi_i(X)\sigma_i(t)\end{aligned} \tag{۴۹-۶}$$

$$\begin{aligned}&{}_C D^{\alpha}\sigma_i(t)=D^{-(1-\alpha)}\left(\tilde{\theta}_i^T\xi_i(X)-\eta_i\sigma_i(t)\right)\\&{}_C D^{\alpha}\hat{\theta}_i=D^{-(1-\alpha)}\mu_i\xi_i(X)\sigma_i(t)\end{aligned} \tag{۵۰-۶}$$

واضح است که مشتقات مرتبه- کسری در روابط (۶-۴۸) و (۶-۵۰) حضور دارند، اما در روابط (۶-۴۷) و (۶-۴۹) مشتقات از نوع مرتبه- صحیح اند. به همین دلیل، برای اثبات پایداری روابط (۶-۴۸) و (۶-۵۰) قضایای پایداری مرتبه- کسری، و برای روابط (۶-۴۷) و (۶-۴۹) قضایای پایداری معمولی به کار گرفته شده‌اند.

ملاحظه ۶-۶: اگر چه در زیرسیستم i- ام: برای ترم برهم‌کنش و عدم قطعیت $L_i(X,t)$ و جمله بازگشتی تقریبگر فازی $\xi_i(X)$، بردار ورودی $X_{(n\times N)\times 1}$ مرتبه کامل در نظرگرفته شده است، اما در عمل ابعاد ورودی مفروض کمتر می‌باشد. به عبارت دیگر، ابعاد بردار ورودی تقریبگر فازی عبارت است از متغیرهای حالت زیرسیستم i- ام و متغیرهای حالتی از زیرسیستم‌های همسایه که در ترم برهم- کنش $L_i(X,t)$ دخیل هستند. بنابراین، متغیرهای حالت و زیرسیستم‌هایی که در $L_i(X,t)$ دخیل نیستند باید از ورودی تقریبگر فازی حذف شوند.

ملاحظه ۶-۷: در سطح لغزش (۶-۴)، برای اثبات همگرایی خطاهای $E_i=\left[e_{i1},e_{i2},\ldots,e_{in}\right]^T$ به ازای $\sigma_i(t)=0$، سطح لغزش (۶-۴) را به شکل کامل زیر باز تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_i(t)=D^{-(1-\alpha)}\left(e_{in}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}c_{ik}e_{ik}(t)\right)+c_0D^{-1}e_{i1}(t) \tag{۵۱-۶}$$

که در آن c_0 عددی ثابت و مثبت است. بر روی سطح لغزش ($\sigma_i(t)=0$) و به کمک معادلات زیرسیستم (۶-۳)، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} {}_{RL}D^{\alpha}e_{i1}(t)=e_{i2}(t) \\ {}_{RL}D^{\alpha}e_{i2}(t)=e_{i3}(t) \\ \\ {}_{RL}D^{\alpha}e_{in}(t)=-\sum_{k=0}^{n-1}c_{ik}e_{i(k+1)}(t) \end{cases} \tag{۶-۵۲}$$

با بازنویسی رابطه مذکور در فرم ماتریسی، داریم:

$${}_{RL}D^{\alpha}E_i(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_{i0} & -c_{i1} & -c_{i2} & & -c_{i(n-1)} \end{bmatrix}E_i(t) \tag{۶-۵۳}$$

به کمک قضیه ۳-۶ مربوط به پایداری سیستم‌های خطی مرتبه- کسری مطرح شده در فصل سوم، برای تضمین پایداری سیستم (۶-۵۳)، پارامترهای c_{i0}، c_{i1}، ... و $c_{i(n-1)}$ باید طوری انتخاب شوند که شرط $\left|\arg(\lambda_i(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_{i0} & -c_{i1} & -c_{i2} & & -c_{i(n-1)} \end{bmatrix}))\right| > \frac{\alpha\pi}{2}$ برقرار شود.

توجه شود که به ازای $c_{i0}=0$، سطح لغزش (۶-۵۱) به سطح لغزش اولیه (۶-۴) تبدیل می‌شود. همچنین، با فرض $c_{i0}=0$، رابطه (۶-۵۳) همچنان پایدار خواهد بود. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد قضیه ۳-۶، به ملاحظه ۳-۴ مرجع [۹۶] و لم ۱ مرجع [۳۴] مراجعه شود.

۶-۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده‌های پیشنهادی Decentralized FOSMC (۶-۷) و (۶-۲۰) و Semi-Decentralized FOSMC (۶-۳۱) و (۶-۳۸) بر روی سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری، دو مثال شبیه‌سازی متفاوت در نظر گرفته شده است. در مثال اول، سیستم غیرخطی

با دو مشتق متفاوت (RL و Caputo) مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما برای مثال دوم، فقط سیستم غیرخطی با مشتق Caputo انتخاب شده است.

به منظور پیاده سازی قوانین کنترلی نظیر (۶-۷) و (۶-۳۱) که دارای عبارت مشتق RL اند، عملگر ${}_{RL}D^{\alpha}$ توسط الگوریتم بازگشتی مشتق GL با فواصل نمونه‌برداری $h=0.005$ تقریب زده می‌شود [۱]. به عبارت دیگر، اگر تعریف مشتق GL را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha}f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}w_k^{(\alpha)}f(t-kh) \\ w_k^{(\alpha)} &= (-1)^k\binom{\alpha}{k} \end{aligned} \qquad (۶-۵۴)$$

آنگاه محاسبه ضرایب $w_k^{(\alpha)}$ به صورت رابطه بازگشتی (۶-۵۵) امکان پذیر است.

$$w_0^{(\alpha)}=1 \qquad w_k^{(\alpha)}=\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)w_{k-1}^{(\alpha)},\ \ k=1,2,\ldots \qquad (۶-۵۵)$$

مبنای این نوع تقریب، خاصیت ۲-۵ بیان شده در فصل دوم است (${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)={}_{GL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)$). برای پیاده‌سازی الگوریتم (۶-۵۵) در نرم‌افزار MATLAB، از بلوک‌های S-Function در محیط Simulink استفاده شده است.

برای پیاده‌سازی قوانین کنترلی نظیر (۶-۲۰) و (۶-۳۸)، که شامل عملگر مشتق Caputo می‌باشند، از جعبه ابزار Ninteger مرجع [۱۱۵] در نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. عملگر ${}_{C}D^{\alpha}$ توسط تقریب Crone در محدوده فرکانسی $[0.01\ \ 100]\,rad/\sec$ و $n=10$ تقریب زده شده است.

۴-۶-۱- مثال اول

سیستم غیرخطی مرتبه- کسری متشکل از دو زیر سیستم S_1 و S_2 را در نظر بگیرید:

الف) معادله دینامیکی سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری با مشتق RL:

$$S_1:\begin{cases} {}_{RL}D^{0.8}x_{11}(t)=x_{12}(t) \\ {}_{RL}D^{0.8}x_{12}(t)=-x_{11}^3(t)-x_{12}(t)+\left(1+e^{-x_{11}(t)+x_{12}^2(t)}\right)u_1(t)+L_1(X(t),t) \end{cases}$$

(۵۶-۶)

$$S_2:\begin{cases} {}_{RL}D^{0.8}x_{21}(t)=x_{22}(t) \\ {}_{RL}D^{0.8}x_{22}(t)=-x_{21}(t)-x_{22}^2(t)+\left(2+\sin(x_{21}(t))\right)u_2(t)+L_2(X(t),t) \end{cases}$$

ب) معادله دینامیکی سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری با مشتق Caputo:

$$S_1:\begin{cases} {}_{C}D^{0.8}x_{11}(t)=x_{12}(t) \\ {}_{C}D^{0.8}x_{12}(t)=-x_{11}^3(t)-x_{12}(t)+\left(1+e^{-x_{11}(t)+x_{12}^2(t)}\right)u_1(t)+L_1(X(t),t) \end{cases}$$

(۵۷-۶)

$$S_2:\begin{cases} {}_{C}D^{0.8}x_{21}(t)=x_{22}(t) \\ {}_{C}D^{0.8}x_{22}(t)=-x_{21}(t)-x_{22}^2(t)+\left(2+\sin(x_{21}(t))\right)u_2(t)+L_2(X(t),t) \end{cases}$$

در روابط فوق، ترم‌های عدم قطعیت کلی عبارت‌اند از:

$$L_1(X(t),t)=0.6\cos(t)+0.4x_{12}(t)\sin(0.5t)+0.2x_{21}(t)\sin(3t)+0.5x_{22}(t)\cos(10t)$$

$$L_2(X(t),t)=0.5\sin(5t)+2x_{11}(t)\sin(x_{21}(t))+0.4x_{22}(t)\sin(0.2t)$$

همچنین، مقادیر مرجع و شرایط اولیه به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$\begin{array}{ll} x_{11d}(t)=\sin((\pi/20)t) & x_{12d}(t)={}_{RL}D^{\alpha}\sin((\pi/20)t)\quad or\quad {}_{C}D^{\alpha}\sin((\pi/20)t) \\ x_{21d}(t)=\sin((\pi/15)t) & x_{22d}(t)={}_{RL}D^{\alpha}\sin((\pi/15)t)\quad or\quad {}_{C}D^{\alpha}\sin((\pi/15)t) \end{array}$$

$$\left(x_{11}(0),x_{12}(0)\right)=(0,0)\qquad \left(x_{21}(0),x_{22}(0)\right)=(0,0)$$

در طراحی کنترل‌کننده‌های Decentralized FOSMC (۶-۷) و (۶-۲۰)، مقادیر پارامترهای کنترلی به شکل زیر پیشنهاد شده‌اند:

$$c_{11}=c_{21}=1,\quad \eta_1=\eta_2=20,\quad K_{sw-1}=K_{sw-2}=100$$

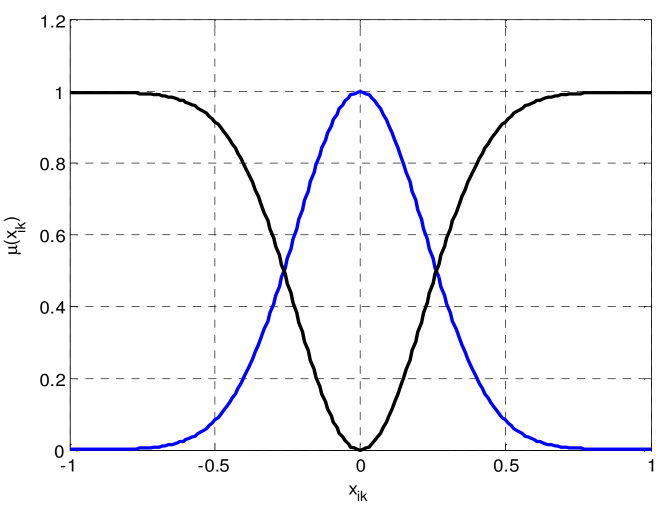
برای حذف نوسانات ناخواسته قانون کنترل (۶-۷)، تابع علامت $\mathrm{sgn}(\sigma_i(t))$ با تابع $\tanh(\frac{\sigma_i(t)}{\rho_i})$ جایگزین شده است. این امر به منظور برقراری شرط C^1 و استفاده از تقریب پیاده‌سازی ${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)={}_{GL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)$ انجام می‌گیرد. مقدار پارامتر ρ نیز برای قانون کنترلی (۶-۷) برابر $\rho_1=\rho_2=1$، و برای (۶-۲۰) برابر $\rho_1=\rho_2=0.05$ پیشنهاد شده است.

در طراحی کنترل‌کننده‌های Semi-Decentralized FOSMC (۶-۳۱) و (۶-۳۸)، به دلیل حضور سه متغیر حالت در ترم‌های $L_1(X(t),t)$ و $L_2(X(t),t)$، برای هر تقریبگر فازی سه متغیر ورودی در نظر گرفته شده است. همچنین، برای هر یک از ورودی‌ها دو تابع عضویت انتخاب شده است. شکل ۶-۱ ویژه‌گی‌های توابع عضویت انتخابی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۶-۱، بدیهی است که تعداد قوانین هریک از تقریبگرهای فازی $2\times2\times2=8$ خواهد بود.

مقادیر پارامترهای قوانین کنترلی (۶-۳۱) و (۶-۳۸) به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$c_{11}=c_{21}=1,\quad \eta_1=\eta_2=20,\quad \mu_1=\mu_2=100$$

$$\mu_1(x_{ik})=\exp(-10x_{ik}^2)$$
$$\mu_2(x_{ik})=1-\mu_1(x_{ik})$$
$$i,k=1,2$$

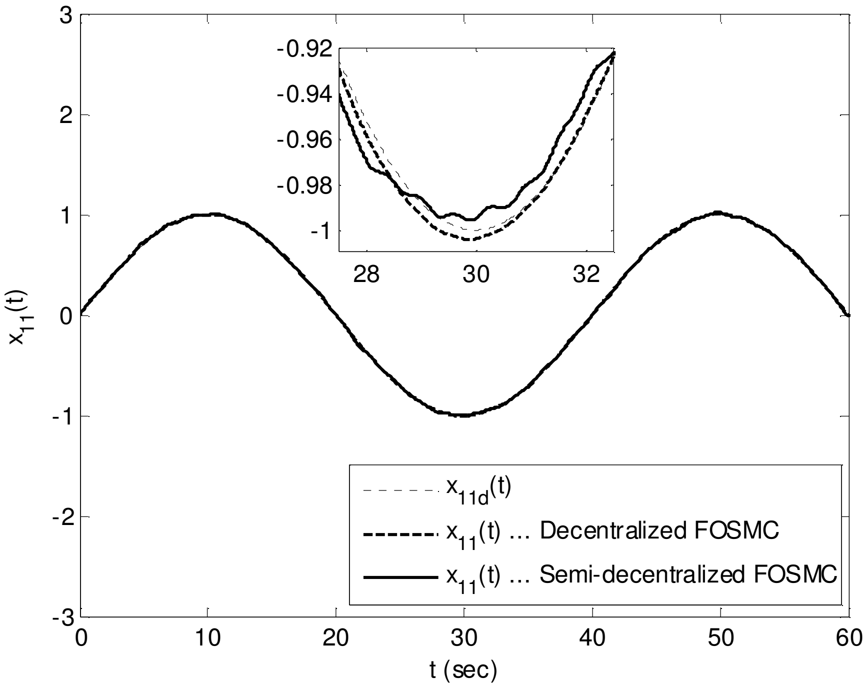


شکل ۶-۱ : توابع عضویت تعریف شده برای ورودی‌های تقریبگر فازی.

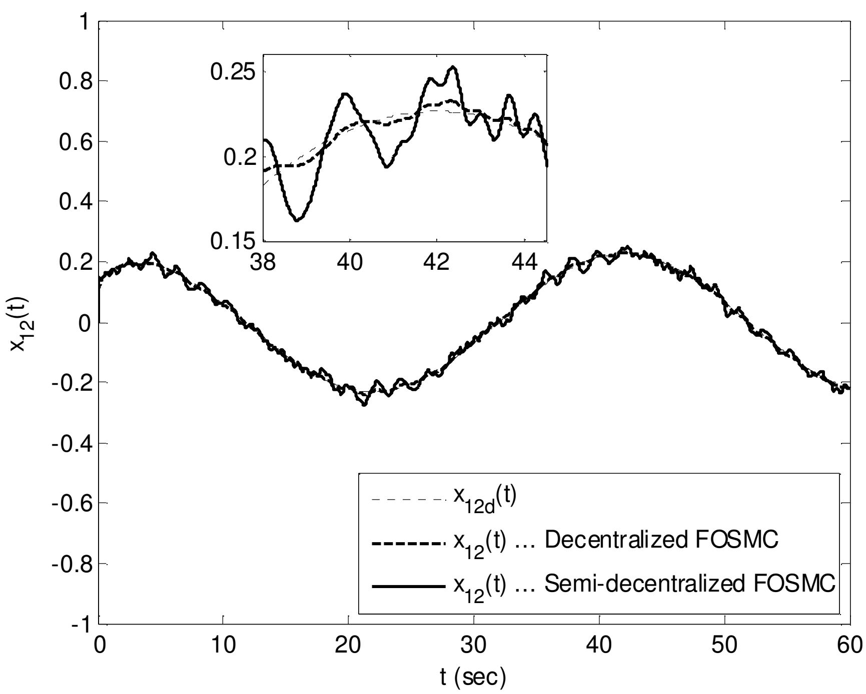
در شکل ۶-۲، پاسخ سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری با مشتق RL (۶-۵۶) به ازای کنترل-کننده‌های Decentralized FOSMC (۶-۷) و Semi-decentralized FOSMC (۶-۳۱) نشان داده شده است. این شکل متشکل از بخش‌های: الف)- ب) متغیرهای حالت ($x_{11}(t)$ و $x_{12}(t)$)، پ) سیگنال کنترلی ($u_1(t)$)، ت) سطح لغزش ($\sigma_1(t)$) برای زیرسیستم S_1، و ث)- ج) متغیرهای حالت ($x_{21}(t)$ و $x_{22}(t)$)، چ) سیگنال کنترلی ($u_2(t)$)، ح) سطح لغزش ($\sigma_2(t)$) برای زیرسیستم S_2 است.

در شکل ۶-۳ نیز پاسخ سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه-کسری با مشتق Caputo (۶-۵۷) به ازای کنترل‌کننده‌های Decentralized FOSMC (۶-۲۰) و Semi-decentralized FOSMC (۶-۳۸) نشان داده شده است. این شکل نیز متشکل از بخش‌های: الف)- ب) متغیرهای حالت ($x_{11}(t)$ و $x_{12}(t)$)، پ) سیگنال کنترلی ($u_1(t)$)، ت) سطح لغزش ($\sigma_1(t)$) برای زیرسیستم S_1، و ث)- ج) متغیرهای حالت ($x_{21}(t)$ و $x_{22}(t)$)، چ) سیگنال کنترلی ($u_2(t)$)، ح) سطح لغزش ($\sigma_2(t)$) برای زیرسیستم S_2 است.

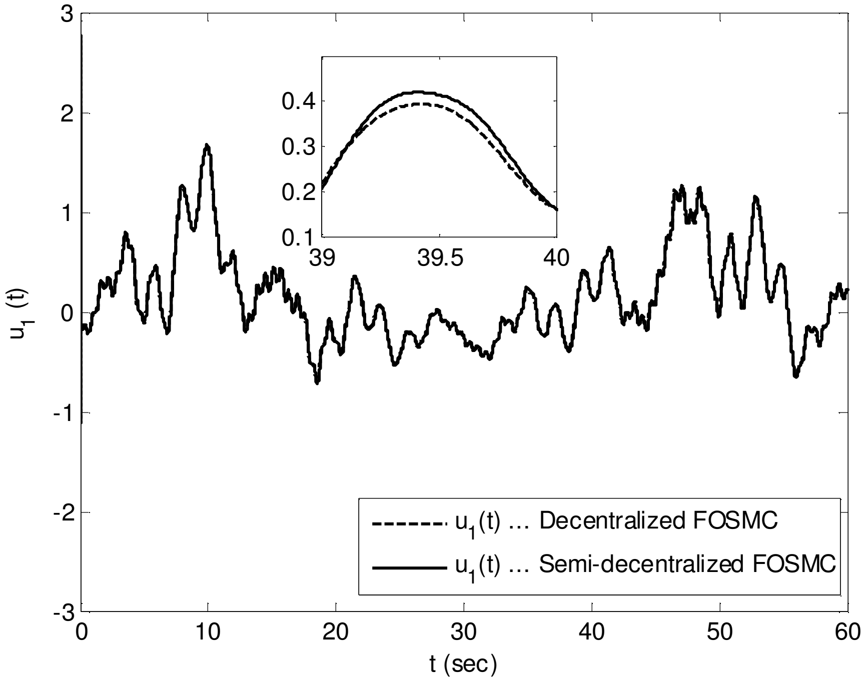
شکل‌های ۶-۲ و ۶-۳، نشانگر ردیابی مناسب مقادیر مرجع به ازای هر چهار کنترل‌کننده پیشنهادی است. لیکن خطای ردیابی و نوسانات حاصل از کنترل‌کننده‌های غیرمتمرکز (۶-۷) و (۶-۲۰) در مقایسه با کنترل‌کننده‌های شبه- غیرمتمرکز (۶-۳۱) و (۶-۳۸) کمتر است. دلیل این نقص راهبرد شبه- غیرمتمرکز، انتخاب تعداد کم توابع عضویت تقریبگرهای فازی می‌باشد (فقط دو تابع عضویت انتخاب شده است). برای رفع این مشکل می‌توان تعداد توابع عضویت را بیشتر لحاظ نمود. اما باید توجه داشت که برای همه سیستم‌های مقیاس- بزرگ ممکن است که این کار عملی نباشد. به عبارت دیگر، اگر ورودی تقریبگرهای فازی زیاد باشند، آنگاه انتخاب توابع عضویت زیاد باعث بالا رفتن تعداد قوانین فازی شده و حجم محاسبات را افزایش خواهد داد. بنابراین، در طراحی راهبرد شبه-غیرمتمرکز باید مابین دقت و حجم محاسبات یک تعادل برقرار نمود.


x11d(t)
x11(t) ... Decentralized FOSMC
x11(t) ... Semi-decentralized FOSMC
x11(t)
t (sec)

الف)

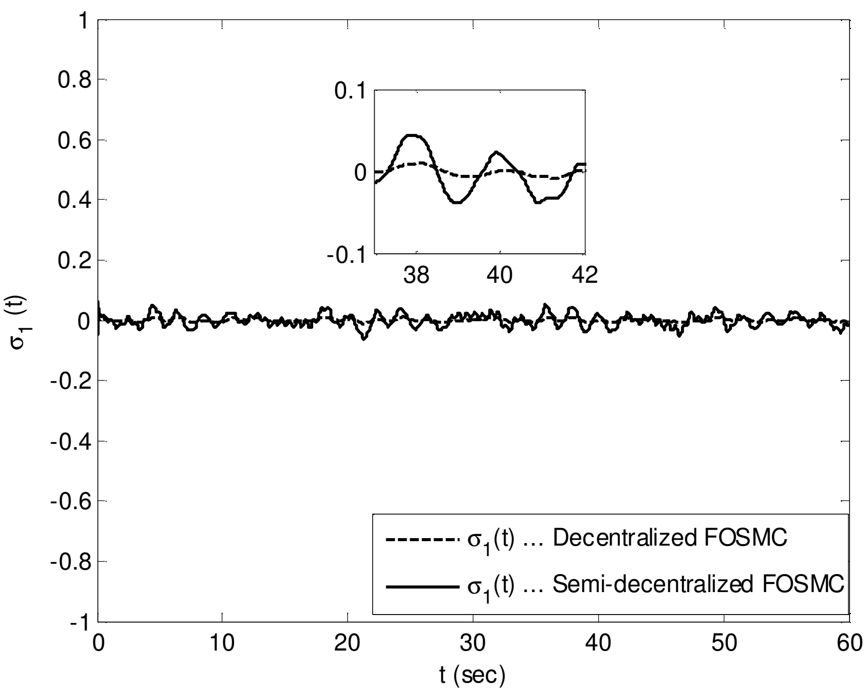

x12d(t)
x12(t) ... Decentralized FOSMC
x12(t) ... Semi-decentralized FOSMC
x12(t)
t (sec)

ب)



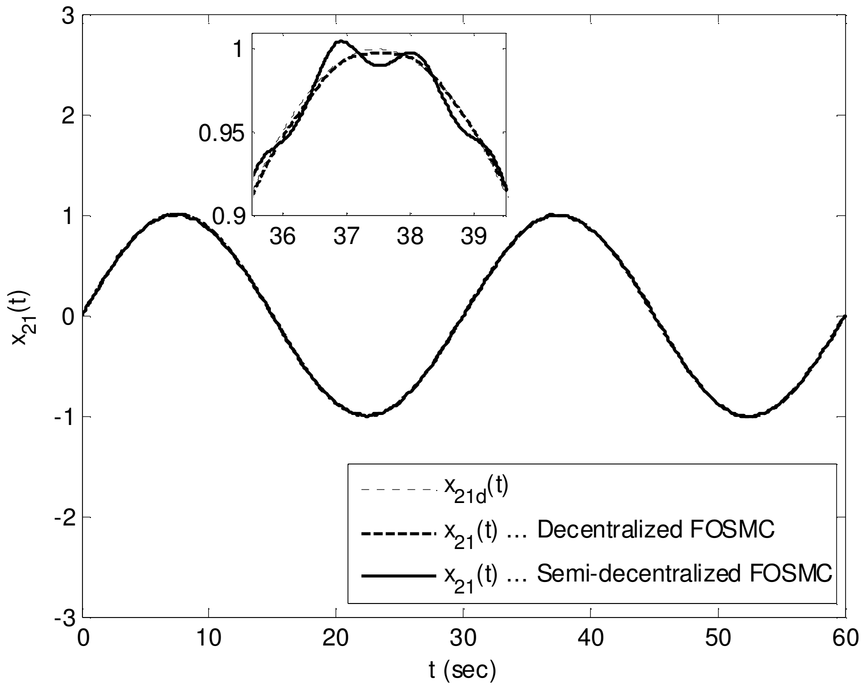
u1 (t)
t (sec)
u1(t) ... Decentralized FOSMC
u1(t) ... Semi-decentralized FOSMC

پ)

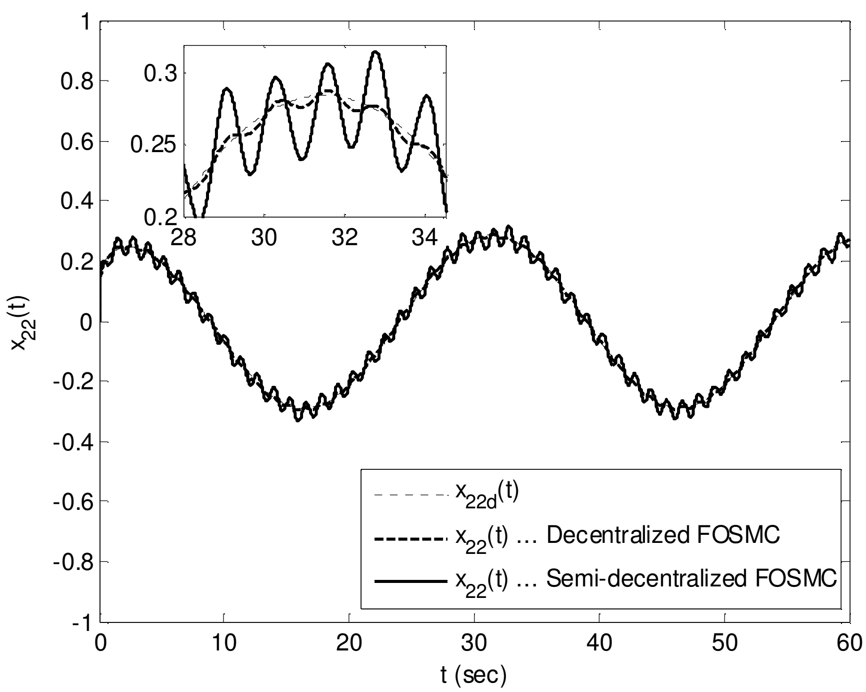


σ1 (t)
t (sec)
σ1(t) ... Decentralized FOSMC
σ1(t) ... Semi-decentralized FOSMC

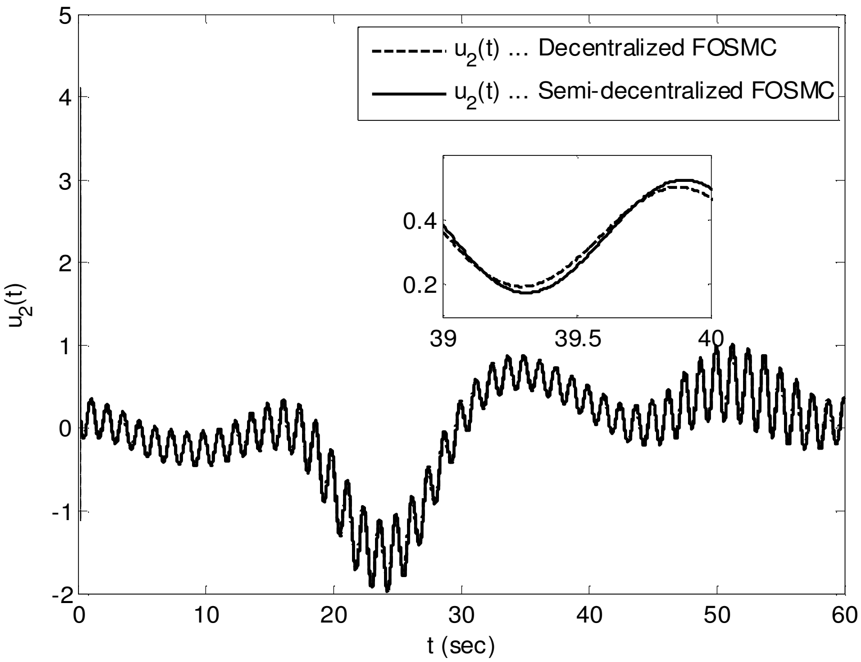
ت)


x21(t)
t (sec)
x21d(t)
x21(t) ... Decentralized FOSMC
x21(t) ... Semi-decentralized FOSMC

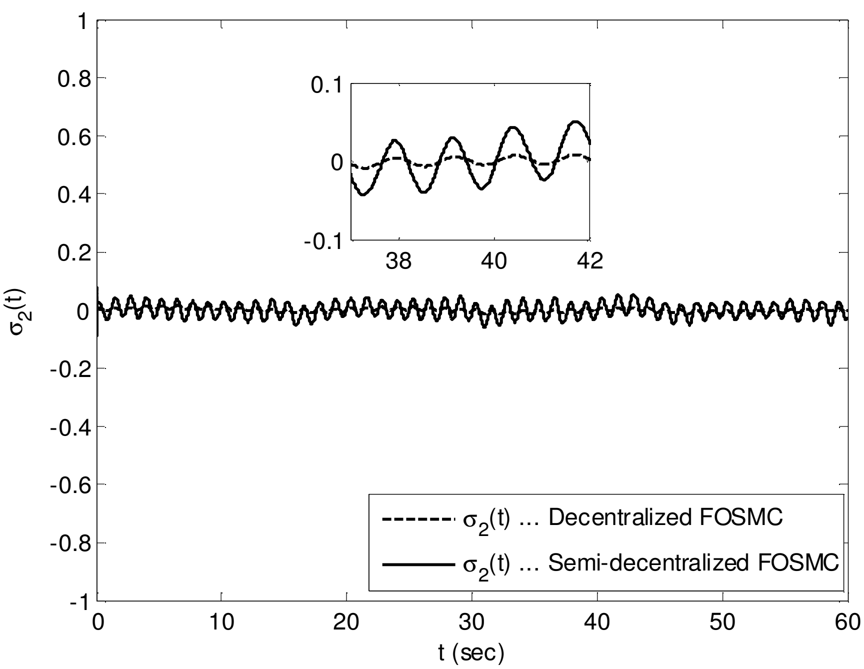
ث)


x22(t)
t (sec)
x22d(t)
x22(t) ... Decentralized FOSMC
x22(t) ... Semi-decentralized FOSMC

ج)

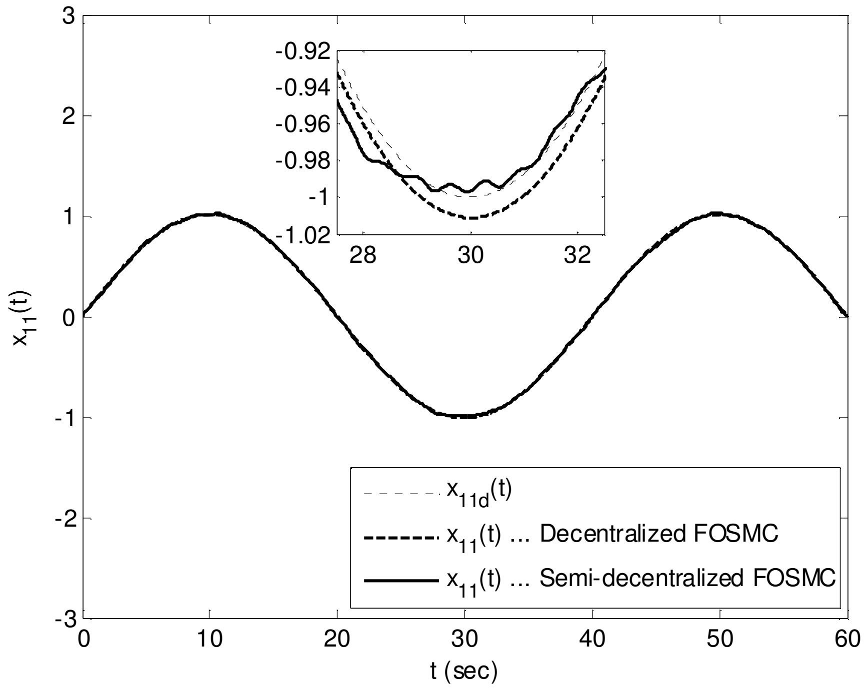


چ)



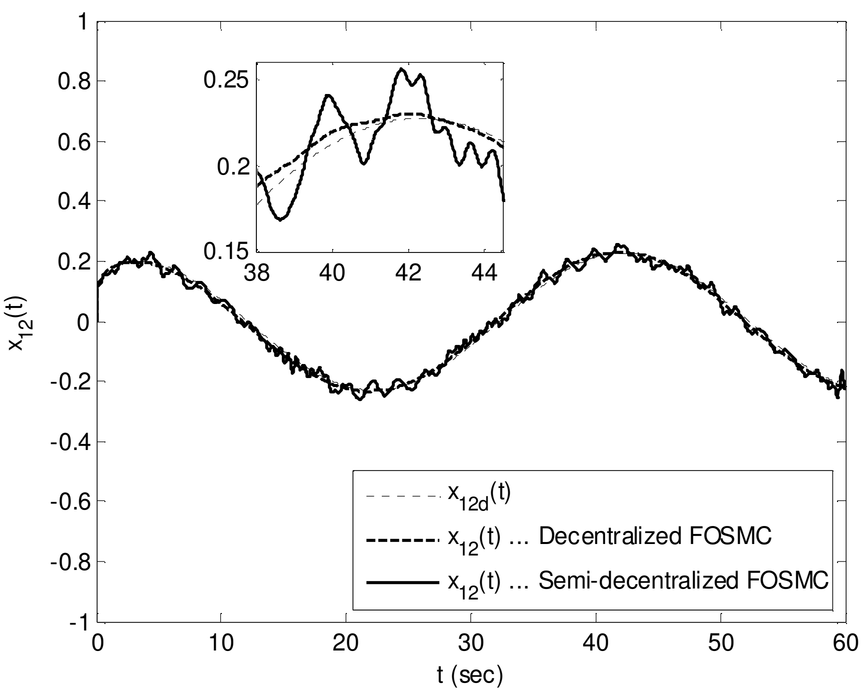
ح)

شکل ۶-۲: پاسخ‌های سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری با مشتق RL (۶-۵۶) به ازای کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز (۶-۷) و شبه- غیرمتمرکز (۶-۳۱)؛ الف)-ب) متغیرهای حالت ($x_{11}(t)$ و $x_{12}(t)$)، پ) سیگنال کنترلی ($u_1(t)$)، ت) سطح لغزش ($\sigma_1(t)$) زیرسیستم S_1: ث)- ج) متغیرهای حالت ($x_{21}(t)$ و $x_{22}(t)$)، چ) سیگنال کنترلی ($u_2(t)$)، ح) سطح لغزش ($\sigma_2(t)$) زیرسیستم S_2.



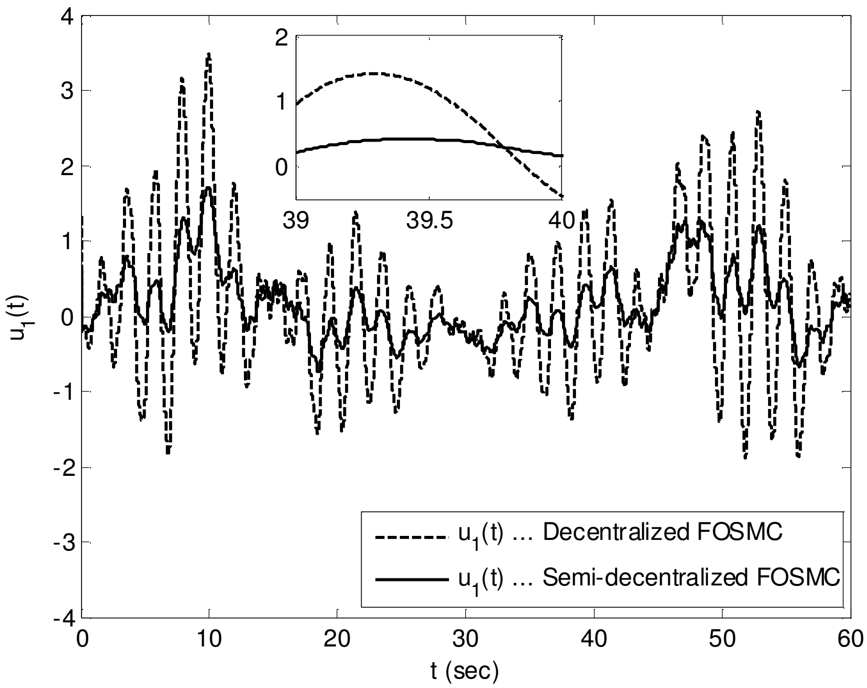
x11(t)
t (sec)
x11d(t)
x11(t) ... Decentralized FOSMC
x11(t) ... Semi-decentralized FOSMC

الف)

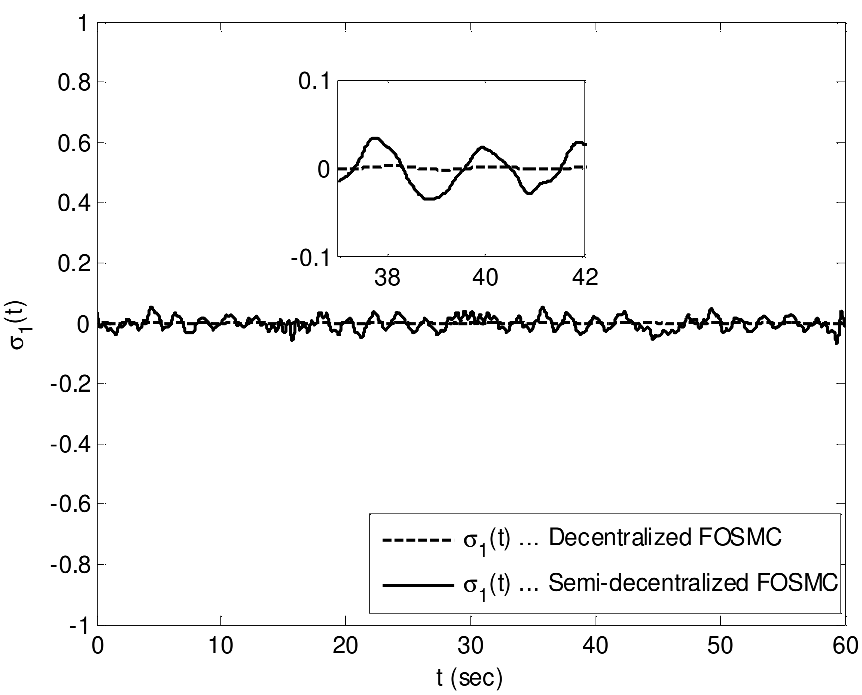


x12(t)
t (sec)
x12d(t)
x12(t) ... Decentralized FOSMC
x12(t) ... Semi-decentralized FOSMC

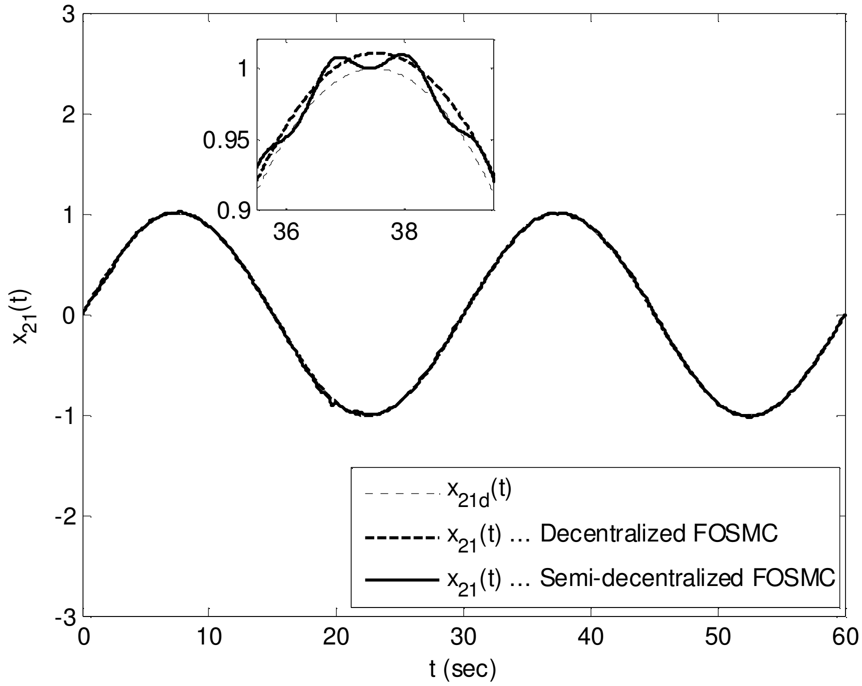
ب)


u1(t) ... Decentralized FOSMC
u1(t) ... Semi-decentralized FOSMC
u1(t)
t (sec)

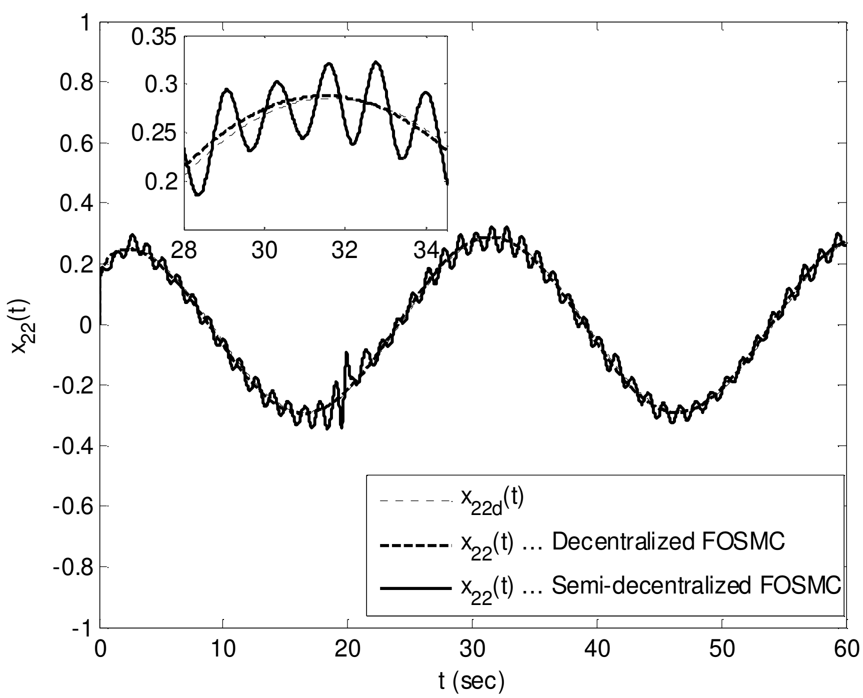
(پ


σ1(t) ... Decentralized FOSMC
σ1(t) ... Semi-decentralized FOSMC
σ1(t)
t (sec)

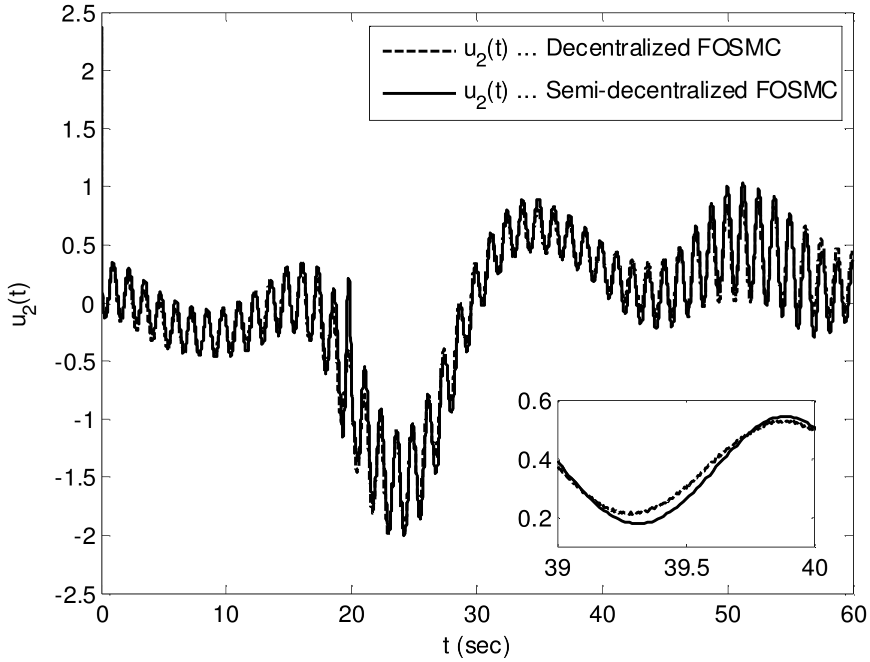
(ت


x21(t)
t (sec)
x21d(t)
x21(t) ... Decentralized FOSMC
x21(t) ... Semi-decentralized FOSMC

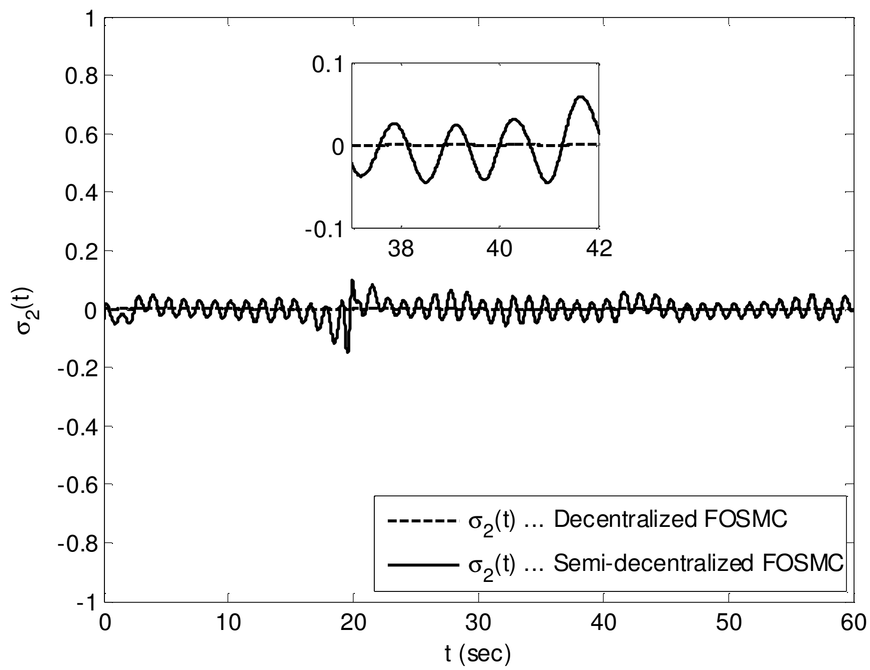
ث)


x22(t)
t (sec)
x22d(t)
x22(t) ... Decentralized FOSMC
x22(t) ... Semi-decentralized FOSMC

ج)



(چ

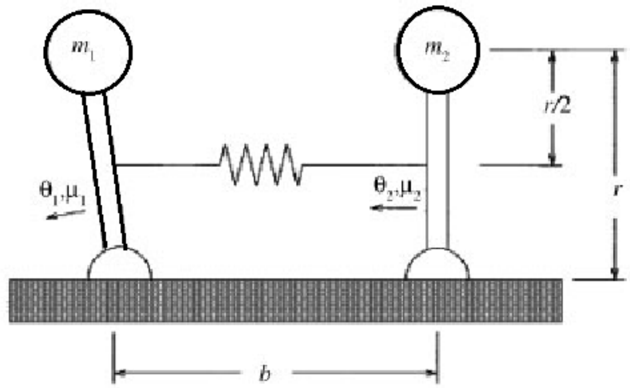


(ح

شکل ۶-۳: پاسخ‌های سیستم مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری با مشتق Caputo (۶-۵۷) به ازای کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز (۶-۲۰) و شبه- غیرمتمرکز (۶-۳۸)؛ الف)-ب) متغیرهای حالت ($x_{11}(t)$ و $x_{12}(t)$)، پ) سیگنال کنترلی ($u_1(t)$)، ت) سطح لغزش ($\sigma_1(t)$) زیرسیستم S_1: ث)-ج) متغیرهای حالت ($x_{21}(t)$ و $x_{22}(t)$)، چ) سیگنال کنترلی ($u_2(t)$)، ح) سطح لغزش ($\sigma_2(t)$) زیرسیستم S_2.

۴-۶-۲- مثال دوم

به منظور بررسی بیشتر قابلیت‌های کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، کنترل سیستم دو پاندول معکوس[۱] متصل با هم، با جایگزینی مشتقات مرتبه- صحیح با مشتق‌های مرتبه- کسری را در نظر می‌گیریم.



شکل ۶-۴: دو پاندول معکوس متصل شده با فنر [۵۵].

مدل دینامیکی سیستم به شکل زیر توصیف شده است:

$$S_1:\begin{cases} {}_C D^{0.85} x_{11}(t) = x_{12}(t) \\ {}_C D^{0.85} x_{12}(t) = \left(\dfrac{m_1 g r}{J_1} - \dfrac{k r^2}{4 J_1}\right)\sin\left(x_{11}(t)\right) + \dfrac{k r}{2 J_1}(l-b) + \dfrac{1}{J_1} u_1(t) + L_1(X(t)) \end{cases}$$

(۶-۵۸)

$$S_2:\begin{cases} {}_C D^{0.85} x_{21}(t) = x_{22}(t) \\ {}_C D^{0.85} x_{22}(t) = \left(\dfrac{m_2 g r}{J_2} - \dfrac{k r^2}{4 J_2}\right)\sin\left(x_{21}(t)\right) - \dfrac{k r}{2 J_2}(l-b) + \dfrac{1}{J_2} u_2(t) + L_2(X(t)) \end{cases}$$

در روابط فوق، $\theta_1 = x_{11}$ و $\theta_2 = x_{21}$ جابجای‌های زاویه‌ای از مرجع عمودی هر پاندول، $L_1(X(t)) = (kr^2/4J_1)\sin\left(x_{21}(t)\right)$ و $L_2(X(t)) = (kr^2/4J_2)\times\sin\left(x_{12}(t)\right)$ ترم‌های عدم قطعیت، m_1 و m_2 جرم پاندول‌ها، J_1 و J_2 ممان اینرسی، r ارتفاع پاندول، k ثابت فنر رابط مابین پاندول‌ها،

[1] Double inverted pendulum

l طول طبیعی فنر، b فاصله مابین پایه پاندول‌ها، و در نهایت g نشانگر شتاب گرانشی است. مقادیر این پارامترها به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$m_1 = 2kg \quad m_2 = 2.5kg \quad J_1 = 0.5kg \quad J_2 = 0.625kg \quad r = 0.5m$$

$$k = 100N/m \quad l = 0.5m \quad b = 0.4m \quad g = 9.81m/\sec^2$$

شرایط اولیه نیز عبارت‌اند از:

$$\left(x_{11}(0), x_{12}(0)\right) = \left(\pi/3, 0\right), \quad \left(x_{21}(0), x_{22}(0)\right) = \left(-\pi/3, 0\right)$$

توجه شود که به منظور دوری از مشکل تفسیر شرایط اولیه مشتق RL، مدل دینامیکی سیستم فقط برپایه مشتق Caputo در نظر گرفته شده است.

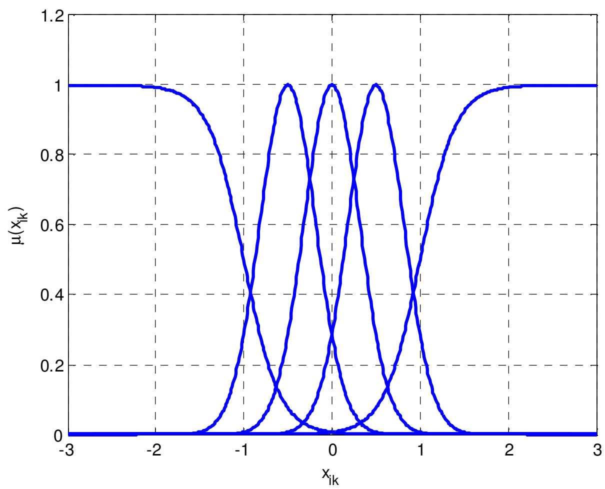
برای کنترل‌کننده غیرمتمرکز (۶-۲۰) و شبه- غیرمتمرکز (۶-۳۸)، مقادیر پارامترها به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$c_{11} = c_{21} = 5, \quad \eta_1 = \eta_2 = 20, \quad \mu_1 = \mu_2 = 100, \quad \rho_1 = \rho_2 = 0.1, \quad K_{sw-1} = K_{sw-2} = 100$$

در راهبرد شبه- غیرمتمرکز، به دلیل اینکه ترم‌های عدم قطعیت $L_1(X(t))$ و $L_2(X(t))$ سیستم پاندول فقط شامل یک متغیر حالت‌اند، لذا تعداد متغیرهای ورودی تقریبگرهای فازی یک خواهد بود. در نتیجه، برای کاهش خطای ردیابی و دوری از مشکل مطرح شده در مثال اول، می‌توان تعداد توابع عضویت بیشتری انتخاب نمود. طبیعی است که به دلیل تک ورودی بودن تقریبگر فازی، قوانین کنترلی زیاد نبوده و حجم محاسبات افزایش نخواهد یافت. برای مثال دوم، پنج تابع عضویت همانند شکل ۶-۵ نظر گرفته شده است.

پاسخ‌های سیستم دو پاندول معکوس متصل باهم (۶-۵۸)، شامل متغیرهای حالت ($x_{11}(t)$، $x_{12}(t)$، $x_{21}(t)$ و $x_{22}(t)$) و سیگنال‌های کنترلی ($u_1(t)$ و $u_2(t)$) به ازای هر دو راهبرد

کنترلی Decentralized FOSMC (۶-۲۰) و Semi-decentralized FOSMC (۶-۳۸) و به ازای مقادیر مرجع مختلف در شکل‌های ۶-۶ و ۶-۷ نشان داده‌اند.



$$\mu_{1i}(x_{ik}) = 1/(1+\exp(-5\times(x_{ik}-1)))$$

$$\mu_{2i}(x_{ik}) = \exp(-5\times(x_{ik}-0.5)^2)$$

$$\mu_{3i}(x_{ik}) = \exp(-5\times(x_{ik})^2)$$

$$\mu_{4i}(x_{ik}) = \exp(-5\times(x_{ik}+0.5)^2)$$

$$\mu_{5i}(x_{ik}) = 1/(1+\exp(5\times(x_{ik}+1)))$$

شکل ۶-۵: توابع عضویت تعریف شده برای ورودی تقریبگر فازی.

در شکل ۶-۶، مقادیر مرجع زیرسیستم‌ها به صورت:

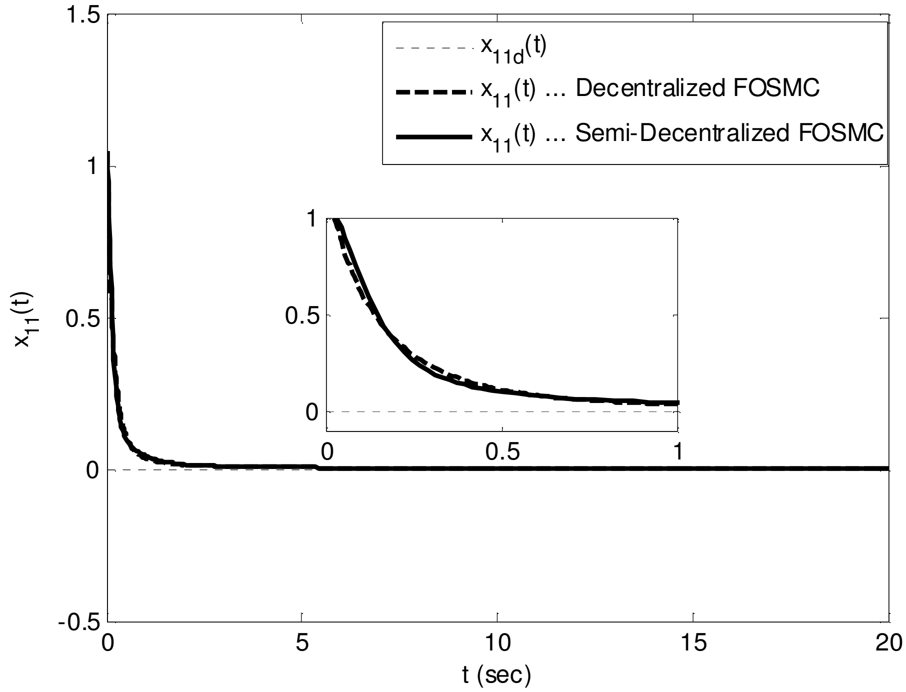
$$x_{11d}(t)=0 \qquad x_{12d}(t)=0 \qquad x_{21d}(t)=0 \qquad x_{22d}(t)=0$$

و در شکل ۶-۷، مقادیر مرجع زیرسیستم‌ها به فرم زیر در نظر گرفته شده‌اند:

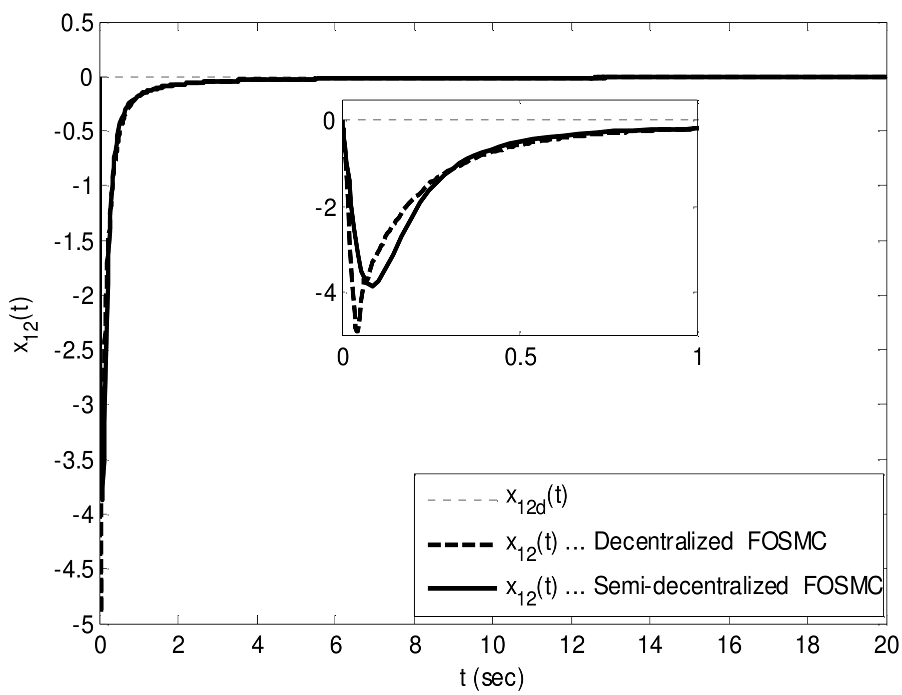
$$x_{11d}(t)=x_{21d}(t)=\sin(t) \qquad x_{12d}(t)=x_{22d}(t)={}_{C}D^{\alpha}\sin(t)$$

با توجه به شکل‌های ۶-۶ و ۶-۷ درمی‌یابیم که همگرایی به مقادیر مرجع (صفر و سینوسی) به ازای هر دو کنترل‌کننده پیشنهادی (۶-۲۰) و (۶-۳۸) به نحو مطلوبی انجام می‌گیرد. البته، کنترل‌کننده (۶-۲۰) همچنان دارای نوسانات ریز کنترلی می‌باشد، در حالی که این نوسانات در قانون کنترلی (۶-۳۸) بطور کامل حذف شده‌اند (شکل ۶-۷ ج).

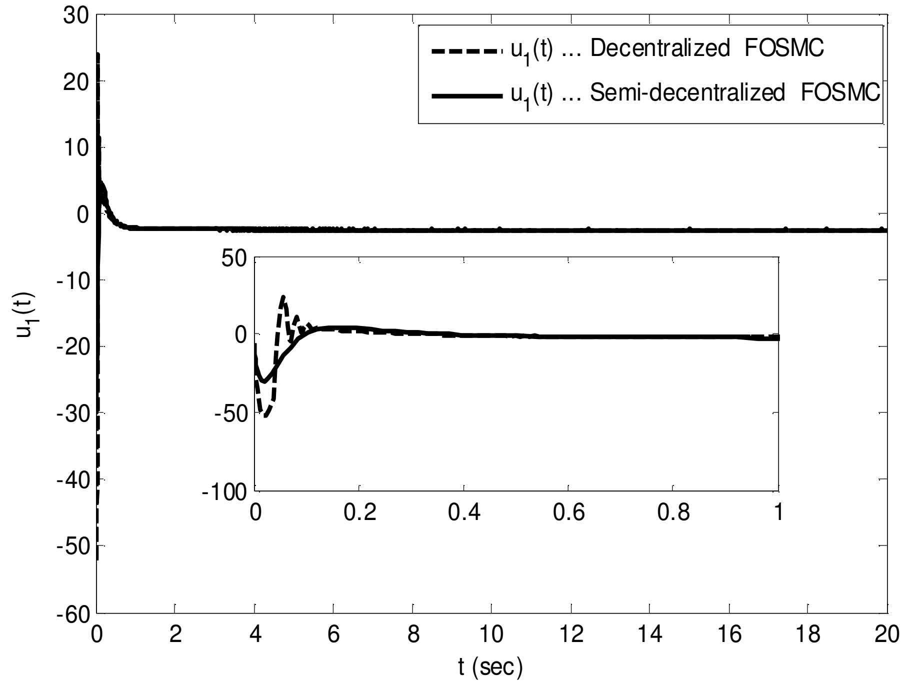
لازم به ذکر است که در مثال دوم به دلیل کم بودن ورودی‌های تقریبگرهای فازی، تعداد توابع عضویت زیاد انتخاب شده است. همین مسئله باعث عملکرد بهتر راهبرد شبه- غیرمتمرکز در مقایسه با مثال قبل است.


$x_{11d}(t)$
$x_{11}(t)$ ... Decentralized FOSMC
$x_{11}(t)$ ... Semi-Decentralized FOSMC
$x_{11}(t)$
t (sec)

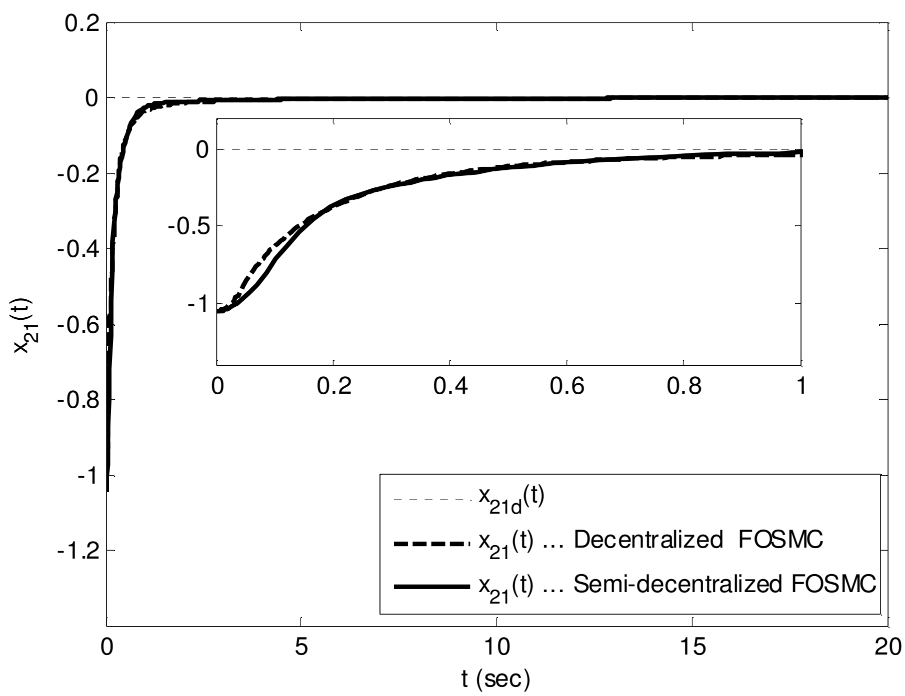
الف)


$x_{12d}(t)$
$x_{12}(t)$ ... Decentralized FOSMC
$x_{12}(t)$ ... Semi-decentralized FOSMC
$x_{12}(t)$
t (sec)

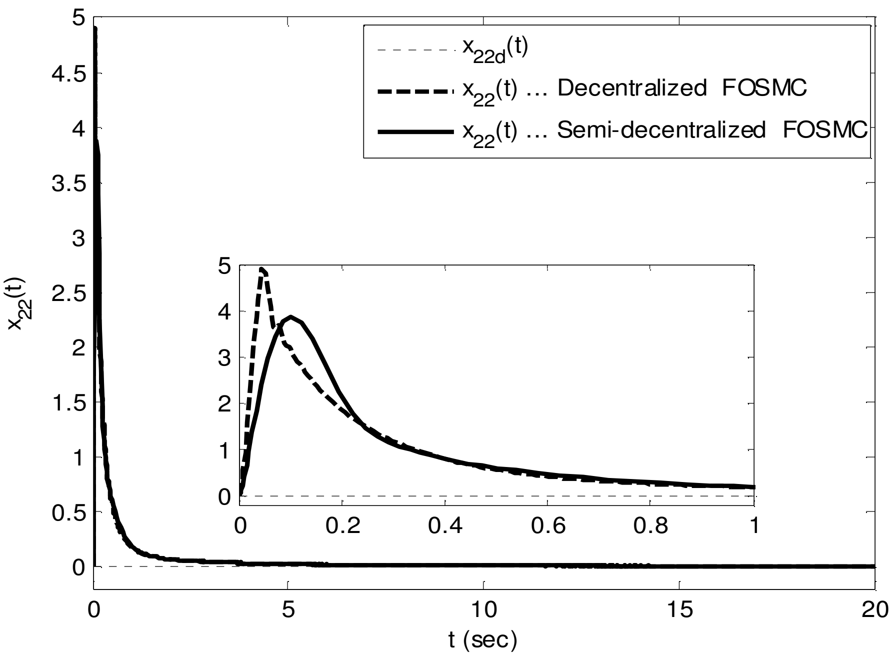
ب)


u1(t) ... Decentralized FOSMC
u1(t) ... Semi-decentralized FOSMC
u1(t)
t (sec)

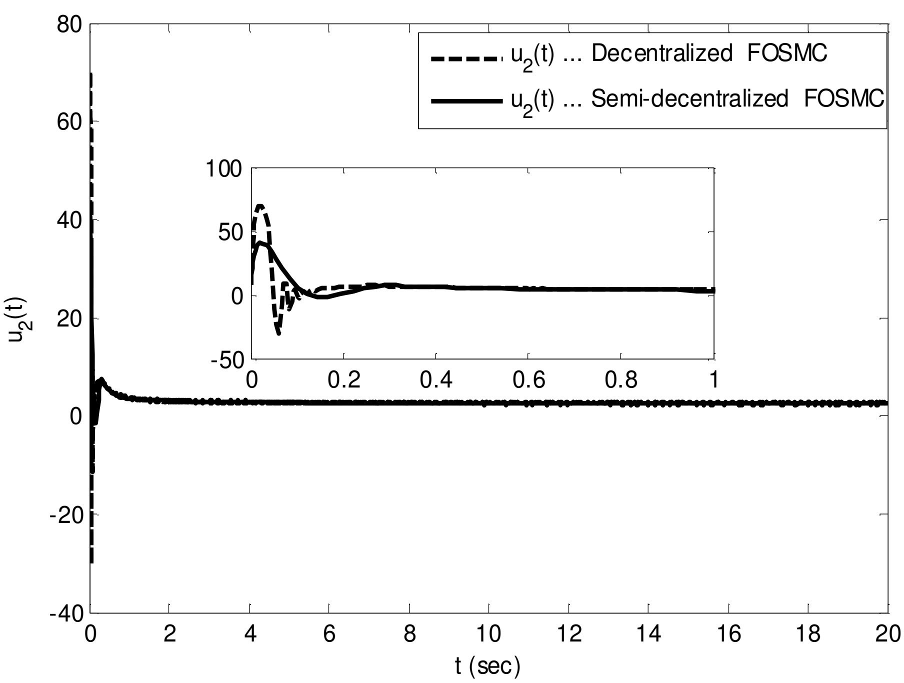
پ)


x21d(t)
x21(t) ... Decentralized FOSMC
x21(t) ... Semi-decentralized FOSMC
x21(t)
t (sec)

ت)

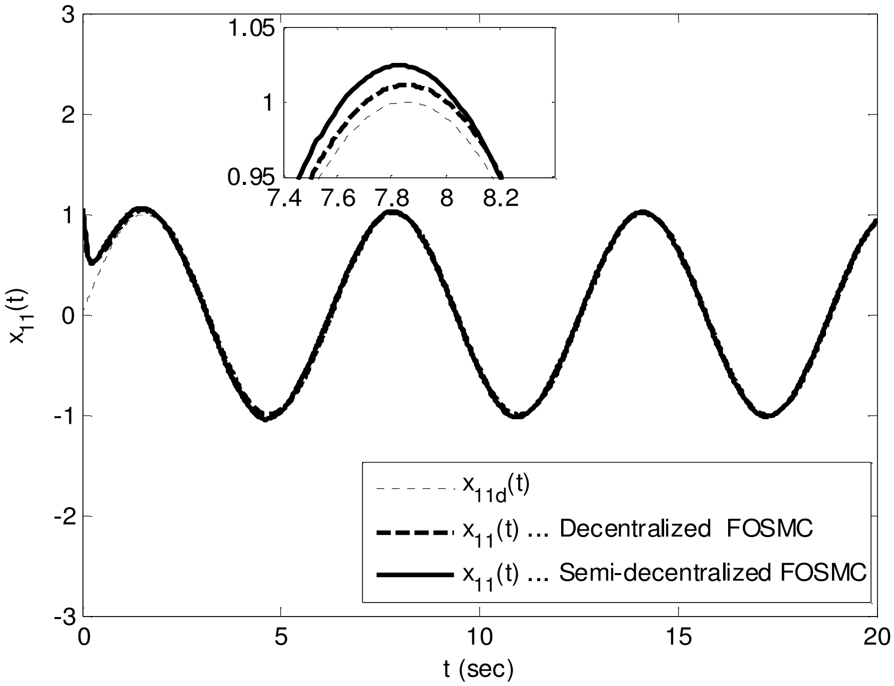


ث)

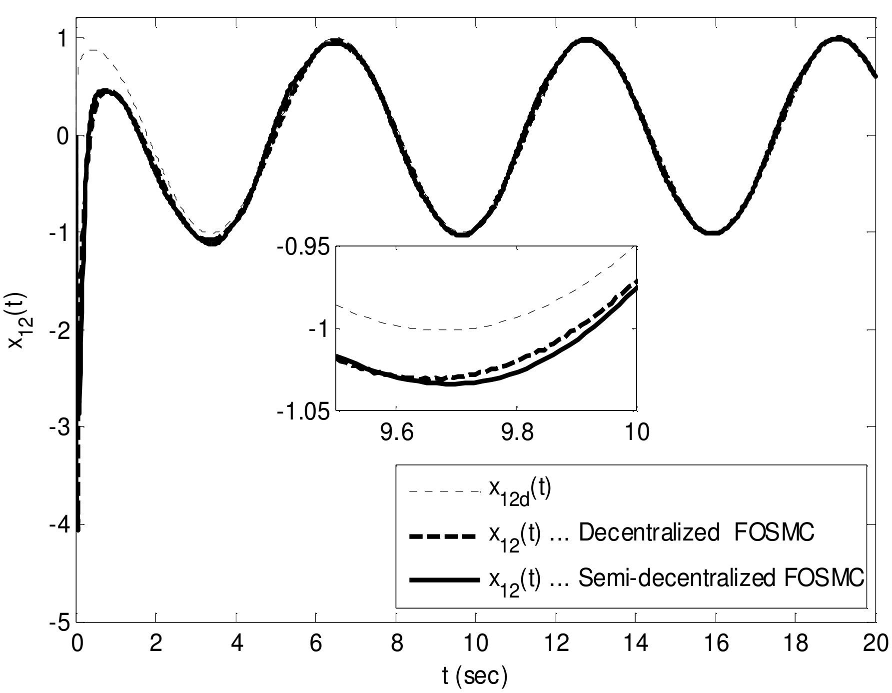


چ)

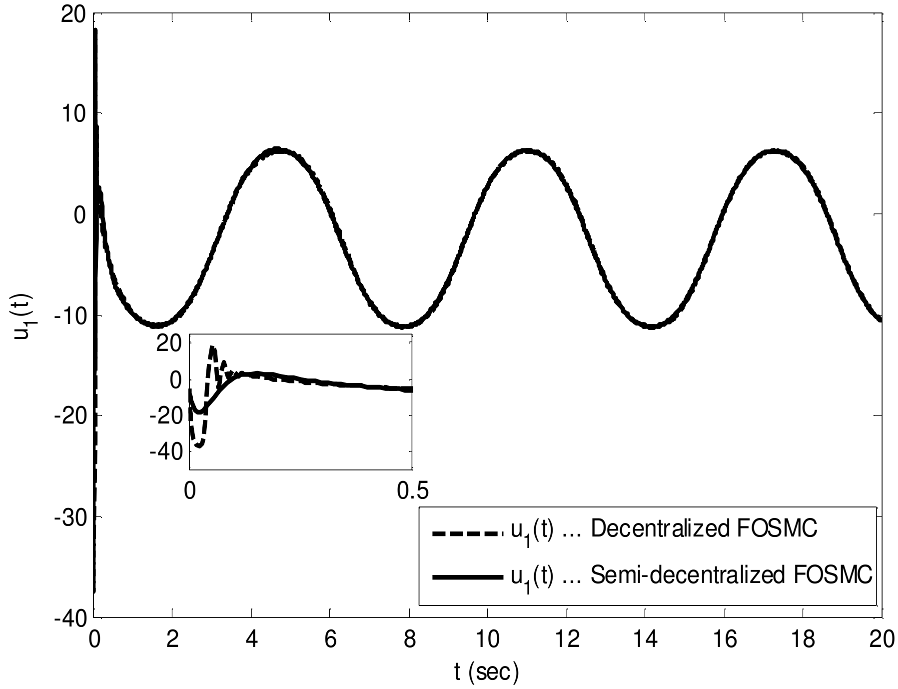
شکل ۶-۶: پاسخ سیستم دو پاندول معکوس متصل به هم به ازای کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز (۶-۲۰) و شبه- غیرمتمرکز (۶-۳۸) و ورودی مرجع صفر؛ الف)-ب) متغیرهای حالت ($x_{11}(t)$ و $x_{12}(t)$)، پ) سیگنال کنترلی ($u_1(t)$) زیرسیستم S_1 : ث)- ج) متغیرهای حالت ($x_{21}(t)$ و $x_{22}(t)$)، چ) سیگنال کنترلی ($u_2(t)$) زیرسیستم S_2 .


x11d(t)
x11(t) ... Decentralized FOSMC
x11(t) ... Semi-decentralized FOSMC
x11(t)
t (sec)

الف)

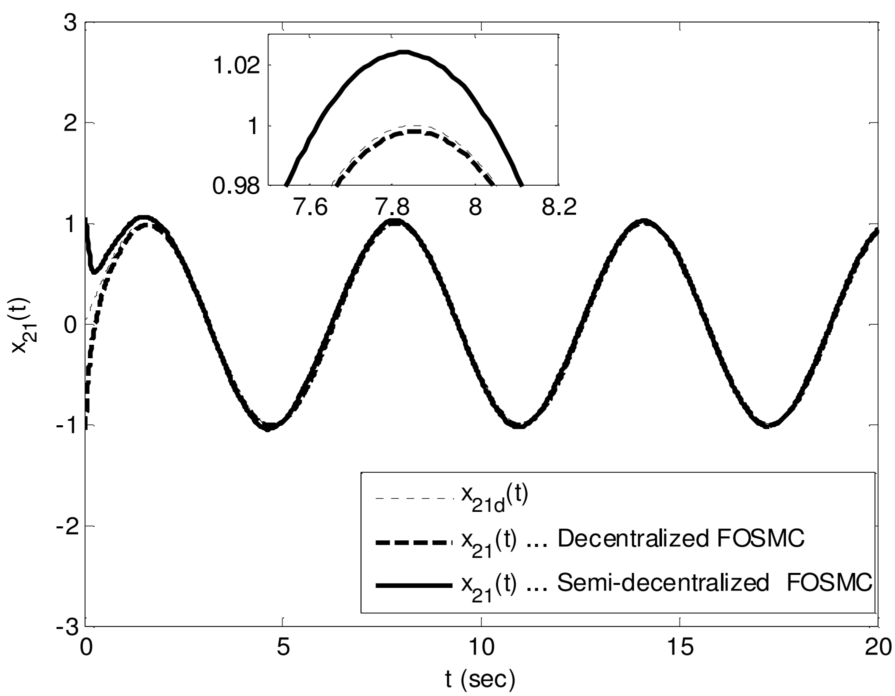

x12d(t)
x12(t) ... Decentralized FOSMC
x12(t) ... Semi-decentralized FOSMC
x12(t)
t (sec)

ب)



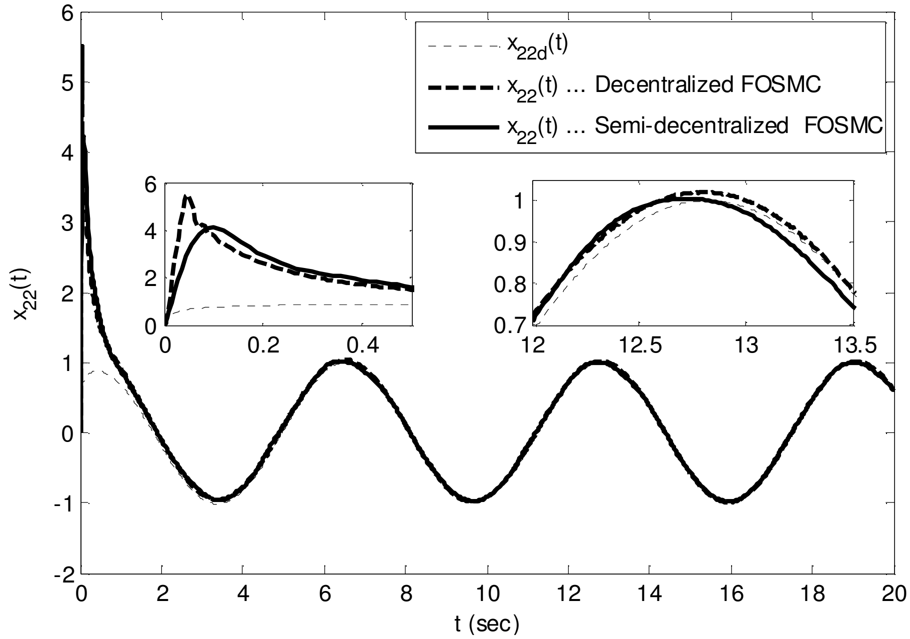
u1(t)
t (sec)
u1(t) ... Decentralized FOSMC
u1(t) ... Semi-decentralized FOSMC

(پ

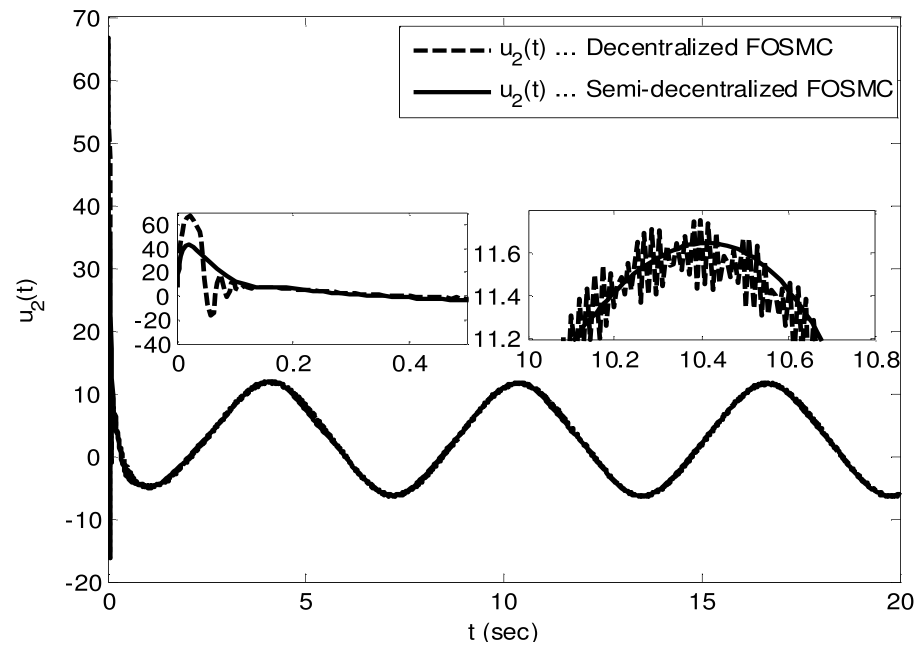


x21(t)
t (sec)
x21d(t)
x21(t) ... Decentralized FOSMC
x21(t) ... Semi-decentralized FOSMC

(ت



ث)



چ)

شکل ۶-۷: پاسخ‌های سیستم دو پاندول معکوس متصل به هم به ازای کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز (۶-۲۰) و شبه- غیرمتمرکز (۶-۳۸) و ورودی مرجع سینوسی؛ الف)-ب) متغیرهای حالت ($x_{11}(t)$ و $x_{12}(t)$)، پ) سیگنال کنترلی ($u_1(t)$) زیرسیستم S_1 ؛ ث)-ج) متغیرهای حالت ($x_{21}(t)$ و $x_{22}(t)$)، چ) سیگنال کنترلی ($u_2(t)$) زیرسیستم S_2 .

فصل هفتم

کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری غیرخطی سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح (سیستم قدرت چند- ماشینه)

۷-۱- مقدمه و مرور منابع

امروزه، اندازه و پیچیدگی سیستم‌های قدرت مقیاس- بزرگ به دلیل افزایش اتصالات الکتریکی بطور مداوم در حال فزونی است. سیستم چند- ماشینه نمونه‌ای از سیستم‌های قدرت مقیاس- بزرگ است که شامل چندین ژنراتور سنکرون با ثابت‌های اینرسی متفاوت‌اند که از طریق خطوط انتقال به هم متصل‌اند. حفظ پایداری و سنکرون‌سازی این ژنراتورها یکی از اهداف اساسی مطالعه سیستم‌های قدرت چند- ماشینه می‌باشد. پایدارسازهای سیستم قدرت[۱] (PSS) خطی و غیرمتمرکز متداول به دلیل کاربرد و طراحی آسان از عمومیت زیادی برخوردارند. اما این PSS های خطی دارای محدوده پایداری کوچکی بوده و فقط برای خطاها و اغتشاش‌های کوچک اطراف نقطه کار قابل اعمال‌اند. بنابراین، زمانی که خطای بزرگی رخ می‌دهد، امکان از بین رفتن رفتار سنکرون سیستم چند- ماشینه وجود دارد [۱۰۱-۱۰۲].

در دو دهه گذشته، به منظور بهبود عملکرد و افزایش محدوده پایداری سیستم چند- ماشینه، مطالعات زیادی در زمینه طراحی PSS های غیرخطی انجام شده است. از جمله‌ی این تحقیقات می‌توان به روش خطی‌سازی فیدبک مستقیم[۲] [۵۱، ۱۰۳]، تکنیک پسگام[۳] [۱۰۴]، و پسگام تطبیقی [۱۰۵] اشاره کرد. در چند سال اخیر نیز روش کنترل مد لغزشی (SMC) به دلیل رفتار مقاوم و دقیق در برابر عدم‌قطعیت‌ها برای کنترل سیستم‌های قدرت بکار گرفته شده است. این روش به همراه خطی‌سازی به فرم NBC برای مهار سیستم تک ماشینه متصل به باس بینهایت [۱۱۶-۱۱۷]، و سیستم چند- ماشینه [۱۱۸-۱۱۹] پیشنهاد شده است. همچنین، روش SMC از نوع فیدبک خروجی در[۶۴]، و از نوع مراتب بالاتر[۴] در مراجع [۱۲۰-۱۲۱] مطرح شده است. علاوه بر موارد فوق، این روش برای کنترل سیستم چند- ماشینه با مدل ساده شده [۱۲۲]، و مدل کامل شامل عدم قطعیت‌های

[1] Power system stabilizer

[2] Direct feedback linearization

[3] Backstepping

[4] Higher order

مختلف [۱۲۳] بکار رفته است. لازم به ذکر است که همه طراحی‌های مقیاس- بزرگ اشاره شده در حوزه محاسبات مرتبه- صحیح پی‌ریزی شده‌اند. اما در حوزه محاسبات مرتبه- کسری به غیر از پایدارساز خطی (PID مرتبه- کسری) [۱۲۴]، مطالعات کنترلی ژرفی برای بهره‌مندی از قابلیت‌های این حوزه وجود ندارد.

در این فصل، کنترل سیستم‌های قدرت چند- ماشینه به عنوان مثالی از سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح در حضور برهم‌کنش بین زیرسیستم‌ها، عدم‌قطعیت‌های مدلسازی و خطاهای ناگهانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف اصلی، طراحی PSS به منظور مهار زوایای قدرت و سنکرون‌سازی ژنراتورها می‌باشد. بدین منظور، ابتدا یک کنترل‌کننده مد لغزشی مرتبه- کسری غیرخطی[۱] از نوع غیرمتمرکز (Decentralized NFOSMC) پیشنهاد شده است. غیرخطی نامیده شدن این کنترل‌کننده به دلیل استفاده از سطح لغزش مرتبه- کسری غیرخطی (ترمینال) جدید است. در مرحله بعدی، به دلیل نامعلوم بودن کران برهم‌کنش‌ها و خطاها، کنترل‌کننده مد لغزشی مرتبه- کسری غیرخطی با راهبرد شبه- غیرمتمرکز (Semi-decentralized NFOSMC) در نظر گرفته می‌شود. تنظیم ضرایب راهبرد غیرمتمرکز (تقریبگر فازی) به کمک قانون تطبیقی مرتبه- کسری انجام می‌شود. لازم به ذکر است که هر دو راهبرد کنترلی مذکور بر مبنای مشتق Caputo پیشنهاد شده‌اند.

از طرف دیگر، با توجه به اینکه در کنترل زاویه قدرت تضمینی برای حفظ سطح ولتاژ پایانه ژنراتورها وجود ندارد، لذا در ادامه برای کنترل همزمان زاویه قدرت و ولتاژ پایانه، یک ساختار ترکیبی پیشنهاد شده است. این ساختار، متشکل از پایدارسازهای مرتبه- کسری پیشنهاد شده و تنظیم‌کننده ولتاژ[۲] (AVR) تناسبی- انتگرالی[۳] (PI) می‌باشد.

[1] Nonlinear fractional-order sliding mode controller

[2] Automatic voltage regulator

[3] Proportional- integral

در انتهای این فصل، به منظور نمایش عملکرد و قابلیت‌های کنترل‌کننده NFOSMC، نتایج شبیه-سازی یک سیستم دو- ماشینه متصل به باس بینهایت نشان داده شده و کلیه پاسخ‌های آن با روش SMC کلاسیک مقایسه شده است.

۷-۲- کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری غیرمتمرکز سیستم قدرت چند- ماشینه

در این بخش، به منظور تضمین پایداری زاویه قدرت در سیستم چند- ماشینه توصیف شده در فصل چهارم، کنترل‌کننده مدلغزشی مرتبه- کسری غیرخطی با راهبرد غیرمتمرکز (Decentralized NFOSMC) طراحی می‌گردد. شماتیک کلی سیستم کنترلی برای ژنراتور i- ام در شکل ۷-۱ نشان داده شده است. در این شکل، کنترل فقط از طریق ولتاژ تحریک انجام شده، و از دینامیک گاورنر صرفنظر می‌شود.

اکنون، دینامیک سیستم چند- ماشینه (۷-۱) و فرم NBC (۷-۲) آن را در نظر بگیرید:

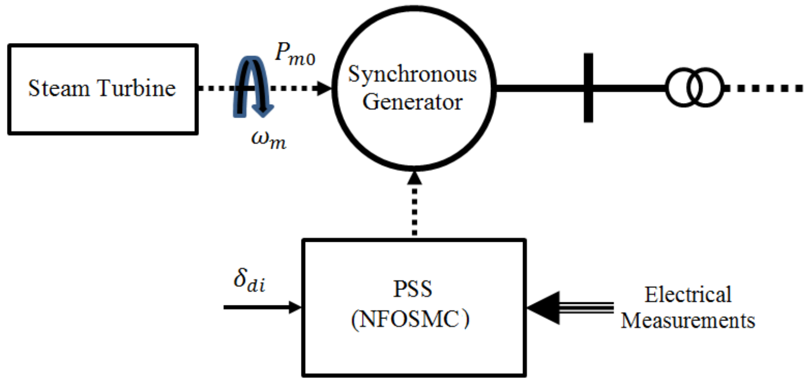
$$\begin{cases} \dot{\delta}_i(t) = \Delta\omega_i(t) \\ \Delta\dot{\omega}_i(t) = -\dfrac{D_i}{2H_i}\Delta\omega_i(t) - \dfrac{\omega_0}{2H_i}\Delta P_{ei}(t) \\ \Delta\dot{P}_{ei}(t) = -\dfrac{1}{T'_{doi}}\left[\Delta P_{ei}(t) + P_{mi0} - (x_{di} - x'_{di})I_{qi}(t)I_{di}(t)\right] - Q_{ei}\Delta\omega_i(t) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{T'_{doi}}k_{ci}I_{qi}(t)u_{fi}(t) + \gamma_i(\delta,\omega) \end{cases} \tag{۱-۷}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_{1i}(t) = -k_{1i}z_{1i}(t) + z_{2i}(t) \\ \dot{z}_{2i}(t) = -k_{2i}z_{2i}(t) + z_{3i}(t) \\ \dot{z}_{3i}(t) = \dfrac{\omega_0}{2H_iT'_{doi}}\left(\Delta P_{ei}(t) + P_{m0i} - (x_{di} - x'_{di})I_{qi}(t)I_{di}(t) + T'_{doi}Q_{ei}(t)\Delta\omega_i(t)\right) \\ \qquad\qquad + g_i(z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}) - \dfrac{\omega_0}{2H_iT'_{doi}}k_{ci}I_{qi}(t)u_{fi}(t) - \dfrac{\omega_0}{2H_i}\gamma_i(\delta,\omega) \end{cases} \tag{۲-۷}$$

برای تضمین همگرایی زاویه قدرت $\delta_i(t)$، سطح لغزش مرتبه- کسری غیرخطی جدید با الهام از فصل پنجم به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$s_i(t)={}_C D^{1-\alpha} z_{3i}(t)+\lambda_i D^{-\alpha} z_{3i}^{p_i/q_i}(t) \tag{۷-۳}$$

در عبارت فوق، $0<\alpha<1$، $\lambda_i>0$، p_i و q_i اعداد صحیح فرد با شرط $q_i>p_i>0$ می‌باشند.



شکل ۷-۱: شماتیک کنترلی ژنراتور i- ام.

اکنون، با اعمال مشتق ${}_C D^{\alpha}$ به طرفین سطح لغزش (۷-۳)، رابطه (۷-۴) نتیجه می‌شود.

$${}_C D^{\alpha} s_i(t)={}_C D^{\alpha}\, {}_C D^{1-\alpha} z_{3i}(t)+\lambda_i\, {}_C D^{\alpha} D^{-\alpha} z_{3i}^{p_i/q_i}(t) \tag{۷-۴}$$

از خاصیت توالی مشتق Caputo و قضیه ۲-۱، رابطه (۷-۴) به شکل زیر ساده می‌گردد:

$${}_C D^{\alpha} s_i(t)=\dot{z}_{3i}(t)+\lambda_i z_{3i}^{p_i/q_i}(t) \tag{۷-۵}$$

با جایگذاری معادله سوم (۷-۲) در (۷-۵)، دینامیک سطح لغزش i- ام به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}{}_C D^{\alpha} s_i(t)=&\frac{\omega_0}{2H_i T'_{doi}}\left(\Delta P_{ei}(t)+P_{m0i}-(x_{di}-x'_{di})I_{qi}(t)I_{di}(t)+T'_{doi}Q_{ei}(t)\Delta\omega_i(t)\right)\\&+g_i(z_{1i},z_{2i},z_{3i})-\frac{\omega_0}{2H_i T'_{doi}}k_{ci}I_{qi}(t)u_{fi}(t)+\lambda_i z_{3i}^{p_i/q_i}(t)-\frac{\omega_0}{2H_i}\gamma_i(\delta,\omega)\end{aligned} \tag{۷-۶}$$

حال برای تضمین پایداری دینامیک سطح لغزش (۷-۶)، قضیه ۷-۱ پیشنهاد می‌گردد.

قضیه ۷-۱: زیرسیستم (۷-۲) با سطح لغزش غیرخطی (۷-۳) را در نظر بگیرید. آنگاه، قانون کنترلی:

$$u_{fi}(t)=\frac{2H_iT'_{doi}}{\omega_0k_{ci}I_{qi}(t)}\left(\frac{\omega_0}{2H_iT'_{doi}}\left(\Delta P_{ei}(t)+P_{m0i}-(x_{di}-x'_{di})I_{qi}(t)I_{di}(t)+T'_{doi}Q_{ei}(t)\Delta\omega_i(t)\right)\right.$$
$$\left.+g_i(z_{1i},z_{2i},z_{3i})+\lambda_iz_{3i}^{p_i/q_i}(t)+D^{-(1-\alpha)}(\eta_is_i(t)+K_{sw-i}\operatorname{sgn}(s_i(t)))\right) \quad (۷-۷)$$

به ازای بهره لغزشی:

$$K_{sw-i}\geq\frac{\omega_0}{2H_i}\left|{}_CD^{1-\alpha}\gamma_i(\delta,\omega)\right| \quad (۸-۷)$$

همگرایی متغیرهای (z_{1i},z_{2i},z_{3i}) را به همسایگی صفر تضمین می‌نماید (متناظر با همگرایی متغیرهای $(\delta_i,\Delta\omega_i,\Delta P_{ei})$ به همسایگی $((\delta_{di},0,0)$. بدیهی است که با اعمال قوانین کنترلی متناظر با ژنراتورهای دیگر، پایداری کل سیستم قدرت چند- ماشینه نیز تضمین می‌گردد.

اثبات پایداری: تابع کاندیدای لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید.

$$V(t,s(t))=\|s(t)\|_1=\sum_{i=1}^{n}V_i(t,s_i(t))=\sum_{i=1}^{n}|s_i(t)| \quad (۹-۷)$$

با گرفتن مشتق زمان از رابطه (۷-۹)، می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,s(t))=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(s_i(t))\dot{s}_i(t) \quad (۱۰-۷)$$

از طرفی، به کمک خاصیت توالی مشتق Caputo، داریم:

$$\dot{s}_i(t)={}_CD^{1-\alpha}\,{}_CD^{\alpha}s_i(t) \quad (۱۱-۷)$$

لذا با جایگذاری رابطه (۷-۱۱) در مشتق تابع لیاپانوف (۷-۱۰)، می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,s(t))=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(s_i(t))\dot{s}_i(t)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(s_i(t))\left({}_CD^{1-\alpha}\,{}_CD^{\alpha}s_i(t)\right) \quad (۱۲-۷)$$

در ادامه، جایگزین کردن دینامیک سطح لغزش (۷-۶) در رابطه (۷-۱۲)، عبارت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,s(t)) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(s_i(t))\Bigg({}_C D^{1-\alpha}\Bigg(\frac{\omega_0}{2H_iT'_{doi}}\big(\Delta P_{ei}(t) + P_{m0i} - (x_{di} - x'_{di})I_{qi}(t)I_{di}(t)\\ + T'_{doi}Q_{ei}(t)\Delta\omega_i(t)\big) + g_i(z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}) - \frac{\omega_0}{2H_iT'_{doi}}k_{ci}I_{qi}(t)u_{fi}(t) + \lambda_i z_{3i}^{p_i/q_i}(t) \quad (۱۳\text{-}۷)\\ - \frac{\omega_0}{2H_i}\gamma_i(\delta,\omega)\Bigg)\Bigg)\end{aligned}$$

با اعمال قانون کنترلی (۷-۷) به عبارت (۷-۱۳)، می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,s(t)) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(s_i(t))\left({}_C D^{1-\alpha}\left(-D^{-(1-\alpha)}\big(\eta_i s_i(t) + K_{sw-i}\operatorname{sgn}(s_i(t))\big) - \frac{\omega_0}{2H_i}\gamma_i(\delta,\omega)\right)\right) \quad (۱۴\text{-}۷)$$

به کمک بند سوم قضیه ۲-۱ می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,s(t)) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i\left|s_i(t)\right| + \operatorname{sgn}(s_i(t))\left(K_{sw-i}\operatorname{sgn}(s_i(t)) + \frac{\omega_0}{2H_i}{}_C D^{1-\alpha}\gamma_i(\delta,\omega)\right)\right) \quad (۱۵\text{-}۷)$$

از طرفی، داریم:

$$\dot{V}(t,s(t)) \cong -\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i\left|s_i(t)\right| + \left(K_{sw-i} + \operatorname{sgn}(s_i(t))\frac{\omega_0}{2H_i}{}_C D^{1-\alpha}\gamma_i(\delta,\omega)\right)\right) \quad (۱۶\text{-}۷)$$

با انتخاب بهره لغزشی $K_{sw-i} \geq \frac{\omega_0}{2H_i}\left|{}_C D^{1-\alpha}\gamma_i(\delta,\omega)\right|$، نامساوی زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{V}(t,s(t)) \leq -\sum_{i=1}^{n}\eta_i\left|s_i(t)\right| \leq -\Omega\left\|s(t)\right\|_1, \qquad \Omega = \min\{\eta_1,\ldots,\eta_n\} \quad (۱۷\text{-}۷)$$

عبارت فوق، پایداری سیستم قدرت چند- ماشینه بازنویسی شده به شکل (۷-۲) را تضمین می‌نماید. بنابراین، برای زیرسیستم محدود شده به سطح لغزش $s_i(t) \to 0$، و در نتیجه $z_{3i}(t) \to 0$، دینامیک رابطه (۷-۲) به شکل زیر کاهش خواهد یافت:

$$\begin{cases}\dot{z}_{1i}(t) = -k_{1i}z_{1i}(t) + z_{2i}(t) \\ \dot{z}_{2i}(t) = -k_{2i}z_{2i}(t) + 0\end{cases} \qquad (۱۸-۷)$$

که به ازای بهره‌های کنترلی مثبت k_{1i} و k_{2i}، همگرایی سیستم فوق تضمین خواهد شد ($\lim_{t\to\infty} z_{2i}(t) = 0$ و $\lim_{t\to\infty} z_{1i}(t) = 0$). □

توجه شود که برای داشتن سطح لغزش نرم، تابع علامت $\mathrm{sgn}(s_i(t))$ را می‌توان با تابع $\tanh(s_i(t)/\rho_i)$ جایگزین نمود. در این حالت خطای همگرایی کمی افزایش می‌یابد اما در عوض شرط ریاضی C^1 تامین خواهد شد.

ملاحظه ۷-۱: برپایه رابطه (۷-۱۸)، مقادیر بزرگ بهره‌های کنترلی k_{1i} و k_{2i}، همگرایی سریع $z_{1i}(t)$ و $z_{2i}(t)$ را تضمین می‌نماید. اما از طرفی و طبق رابطه (۷-۷)، مقادیر بزرگ k_{1i} و k_{2i}، متناظر با افزایش دامنه سیگنال کنترلی است. بنابراین، در انتخاب ضرایب کنترلی باید تعادل مابین سرعت همگرایی و دامنه سیگنال کنترلی رعایت شود.

ملاحظه ۷-۲: از لحاظ نمادگذاری، جمله $\gamma_i(\delta,\omega)$ را می‌توان به عنوان عدم قطعیت کلی شامل: برهم‌کنش بین زیرسیستم‌ها، عدم قطعیت مدل‌سازی و خطاهای ناگهانی جمع شونده در ورودی در نظر گرفت.

۷-۳- کنترل مد لغزشی مرتبه- کسری شبه- غیرمتمرکز سیستم قدرت چند- ماشینه

با توجه به اینکه در طراحی قانون کنترل (۷-۷)، تعیین و تحقق عملی بهره لغزش $K_{sw-i} \geq \frac{\omega_0}{2H_i}\left|{}_C D^{1-\alpha}\gamma_i(\delta,\omega)\right|$ به دلیل وجود جمله ${}_C D^{1-\alpha}$ امری مشکل است، لذا راهبرد جایگزینی مورد نیاز است. در این بخش به منظور رفع مشکل مذکور، راهبرد کنترلی شبه- غیرمتمرکز (Semi-decentralized NFOSMC) با تقریبگر فازی پیشنهاد می‌گردد. در واقع، نقش تقریبگر فازی تعدیل

شرط $K_{sw-i} \geq \frac{\omega_0}{2H_i}\left|{}_C D^{1-\alpha}\gamma_i(\delta,\omega)\right|$ به وسیله تخمین جمله برهم‌کنش، عدم قطعیت و از همه مهم-تر خطاهای ناگهانی سیستم چند- ماشینه است.

اکنون، شکل بازنویسی شده رابطه (۷-۶) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}{}_C D^{\alpha}s_i(t) = &\frac{\omega_0}{2H_iT'_{doi}}\left(\Delta P_{ei}(t) + P_{mi0} - (x_{di}-x'_{di})I_{qi}(t)I_{di}(t) + T'_{doi}Q_{ei}(t)\Delta\omega_i(t)\right)\\ &+ g_i(z_{1i},z_{2i},z_{3i}) - \frac{\omega_0}{2H_iT'_{doi}}k_{ci}I_{qi}(t)u_{fi}(t) + \lambda_i z_{3i}^{p_i/q_i}(t)\\ &+ D^{-(1-\alpha)}\theta_i^T\xi_i(\Delta\omega)\end{aligned} \qquad (۷-۱۹)$$

که در آن $\theta_i = [\theta_{1i},\ldots,\theta_{Mi}]^T$ بردار پارامترها، $\xi_i(\Delta\omega)$ بردار بازگشتی، و $\Delta\omega = [\Delta\omega_1,\ldots,\Delta\omega_n]^T \in R^n$ بردار ورودی تقریبگر فازی است. توجه شود که مبنای انتخاب ورودی-ها رابطه (۴-۱۹) می‌باشد. حال با انتخاب ولتاژ تحریک:

$$\begin{aligned}u_{fi}(t) = &\frac{2H_iT'_{doi}}{\omega_0k_{ci}I_{qi}(t)}\left(\frac{\omega_0}{2H_iT'_{doi}}\left(\Delta P_{ei}(t) + P_{m0i} - (x_{di}-x'_{di})I_{qi}(t)I_{di}(t) + T'_{doi}Q_{ei}(t)\Delta\omega_i(t)\right)\right.\\ &\left.+ g_i(z_{1i},z_{2i},z_{3i}) + \lambda_i z_{3i}^{p_i/q_i}(t) + D^{-(1-\alpha)}(\eta_i s_i(t) + \hat{\theta}_i^T\xi_i(\Delta\omega))\right)\end{aligned} \qquad (۷-۲۰)$$

و مکانیزم تطبیقی:

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \mu_i\xi_i(\Delta\omega)s_i(t) \qquad or \qquad {}_C D^{\alpha}\hat{\theta}_i = D^{-(1-\alpha)}(\mu_i\xi_i(\Delta\omega)s_i(t)) \qquad (۷-۲۱)$$

پایداری دینامیک لغزش (۷-۱۹) و همگرایی سطح لغزش $s_i(t)$ تضمین می‌شود.

در مکانیزم تطبیق (۷-۲۱)، $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$ بردار خطای پارامتری، $\hat{\theta}_i$ تخمینی از بردار نامعلوم θ_i، و μ_i ضریب تطبیق نام دارد.

اثبات پایداری: با جایگذاری قانون کنترل (۷-۲۰) در رابطه (۷-۱۹)، دینامیک حلقه- بسته سطح لغزش به شکل زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} {}_C D^{\alpha} s_i(t) &= D^{-(1-\alpha)} \theta_i^T \xi_i(\Delta\omega) - D^{-(1-\alpha)} (\eta_i s_i(t) + \hat{\theta}_i^T \xi_i(\Delta\omega)) \\ &= D^{-(1-\alpha)} \left(\tilde{\theta}_i^T \xi_i(\Delta\omega) - \eta_i s_i(t) \right) \end{aligned} \tag{۲۲-۷}$$

به منظور مطالعه پایداری، تابع کاندیدای لیاپانوف زیر پیشنهاد می‌شود:

$$V(t, X(t)) = \alpha(\|X\|) = \|X\|_2^2 == \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} s_i^2(t) + \frac{1}{2\mu_i} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i \right) \tag{۲۳-۷}$$

که در آن $X = [X_1, X_2, \ldots, X_n]^T$ و $X_i = [s_i \quad \tilde{\theta}_i^T]$.

با مشتق‌گیری از (۷-۲۳) در راستای (۷-۲۲) و بکارگیری خواص مشتق Caputo، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, X(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \left(s_i(t) \dot{s}_i(t) + \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(s_i(t) {}_C D^{1-\alpha} {}_C D^{\alpha} s_i(t) + \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(s_i(t) \left(\tilde{\theta}_i^T \xi_i(\Delta\omega) - \eta_i s_i(t) \right) + \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(-\eta_i s_i^2(t) + \tilde{\theta}_i^T \left(\xi_i(\Delta\omega) s_i(t) + \frac{1}{\mu_i} \dot{\tilde{\theta}}_i \right) \right) \end{aligned} \tag{۲۴-۷}$$

با جایگزینی مکانیزم تطبیق (۷-۲۱) در (۷-۲۴)، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{V}(t, X(t)) = \sum_{i=1}^{n} -\eta_i s_i^2(t) \le 0 \tag{۲۵-۷}$$

به دلیل مرتبه- کسری بودن دینامیک حلقه- بسته سطح لغزش (۶-۴۰)، نامساوی (۶-۴۳) باید به فرم مرتبه- کسری بیان شود. لذا، به کمک تعریف مشتق Caputo، قضیه ۳-۱۵ و لم ۳-۴، می‌توان نوشت:

$${}_C D^{1-\alpha} V(t, x(t)) = D^{-\alpha} \dot{V}(t, x(t)) \le 0 \tag{۲۶-۷}$$

نامساوی فوق، پایداری زیرسیستم (۷-۲) و سیستم مقیاس- بزرگ کلی را ضمانت می‌نماید. □

۷-۴- کنترل ولتاژ پایانه ژنراتورها

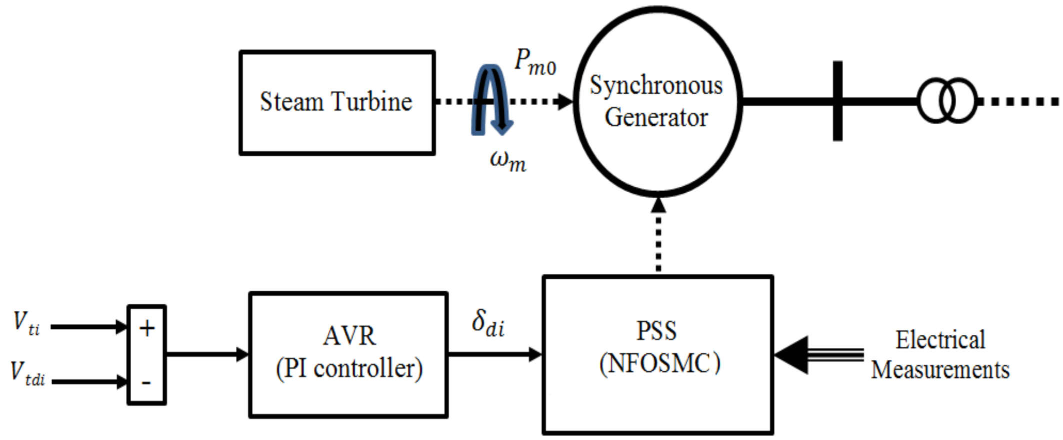
با نگاهی اجمالی به این فصل، می‌توان دریافت که تمامی بحث‌هایی که تاکنون مطرح شده‌اند مربوط به پایدارسازهای زاویه قدرت (مرتبه- کسری) مقاوم در برابر خطاها بوده، و انحرافات ولتاژ پایانه ژنراتورها بعد از وقوع خطا در نظر گرفته نشده‌اند. با توجه به اینکه ولتاژ پایانه $V_{ti}(t)$ تابعی از زاویه قدرت $\delta_i(t)$ و توان الکتریکی $P_{ei}(t)$ می‌باشد، بنابراین هر تغییری در $\delta_i(t)$ باعث تغییر ولتاژ $V_{ti}(t)$ خواهد شد [۱۲۵].

برای غلبه بر مشکل مذکور، کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری (NFOSMC) پیشنهادی (۷-۷) و (۷-۲۰) را می‌توان با کنترل‌کننده تناسبی- انتگرالی (PI) که نقش تولید زاویه قدرت مرجع را بر عهده دارد ترکیب نمود. این ایده از مرجع [۱۲۶] اخذ شده، و در آن ساختار PI به شکل زیر بیان شده است:

$$\delta_{di}(t) = K_{Pi}(V_{ti}(t) - V_{tdi}(t)) + K_{Ii}\int_0^t (V_{ti}(\tau) - V_{tdi}(\tau))d\tau \qquad (۷-۲۷)$$

در عبارت فوق، K_{Pi} و K_{Ii} ضرایب کنترل‌کننده PI بوده و باید طوری تنظیم شوند که تغییرات $\delta_i(t)$ خیلی آرام باشد.

شماتیک ساده شده تکنیک مذکور در شکل ۷-۲ نشان داده شده است. این شماتیک، ترکیبی از پایدارساز زاویه قدرت NFOSMC با تنظیم کننده ولتاژ خودکار از نوع PI است. به کمک این روش، برهم‌کنش مابین کنترل زاویه قدرت $\delta_i(t)$ و کنترل ولتاژ پایانه $V_{ti}(t)$ اصلاح شده، و تنظیم ولتاژ پایانه مقدار مرجع زاویه قدرت را تولید می‌نماید.



شکل ۷-۲: شماتیک کنترلی ژنراتور i- ام به همراه کنترل‌کننده ولتاژ پایانه.

۷-۵- نتایج شبیه‌سازی

به منظور بررسی عملکرد و قابلیت‌های کنترل‌کننده NFOSMC پیشنهادی، یک سیستم قدرت شامل دو ژنراتور متصل به باس بی‌نهایت در نظر گرفته شده است [۱۰۴-۱۰۵]. شماتیک سیستم قدرت مذکور در شکل ۷-۳ نشان داده شده است. همچنین، مشخصات هر یک از ژنراتورها و خطوط انتقال در جدول ۷-۱ لیست شده‌اند. محدوده فیزیکی ولتاژهای تحریک نیز در بازه $-6 \le E_{fi} = u_{fi} \le 6$ در نظر گرفته شده است.

نقاط کار ژنراتورهای ۱# و ۲# در شبیه‌سازی‌های کامپیوتری به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\delta_{d1} = 0.532 \quad rad, \qquad P_{m01} = 0.57 \quad p.u., \qquad V_{t10} = 1.12 \quad p.u.$$

$$\delta_{d2} = 0.567 \quad rad, \qquad P_{m02} = 0.56 \quad p.u., \qquad V_{t20} = 1 \quad p.u.$$

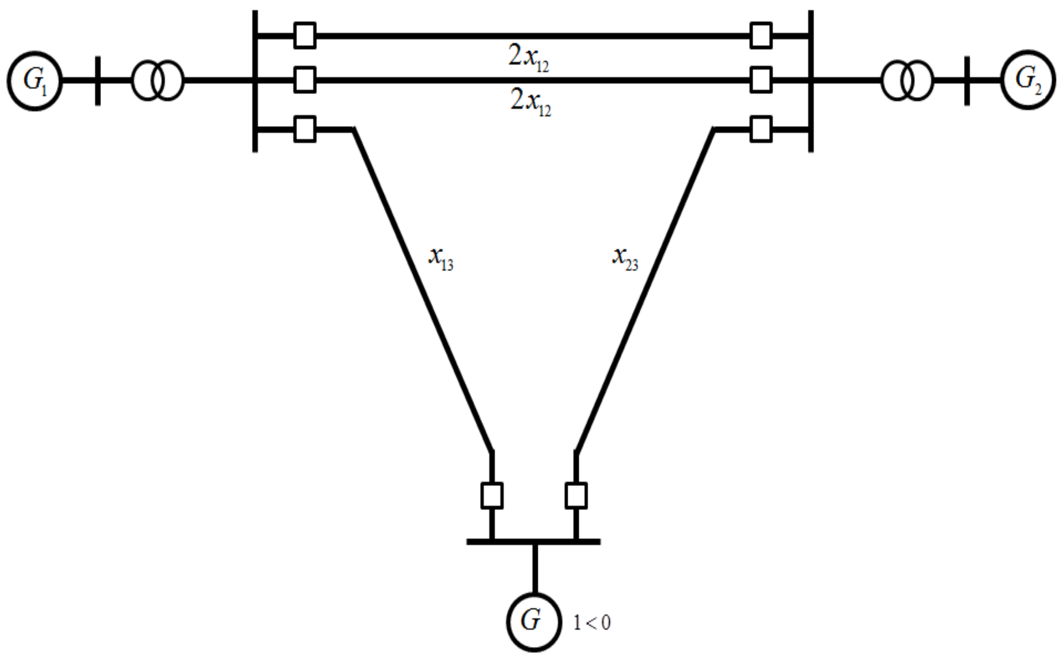
برای محک زدن بهتر کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، دو نوع خطا (در توان مکانیکی P_{m01} و راکتانس- های x_{d1} و x'_{d1}) با دامنه تغییرات نامعلوم در نظر گرفته شده است:

خطای نوع ۱: در حالی که سیستم در حالت پایا عمل می‌کند، ناگهان اختلال ناشناخته‌ای در راکتانس مستقیم x_{d1} و راکتانس گذرای مستقیم x'_{d1} ژنراتور ۱# در لحظه $t = 10 \ \sec$ رخ داده و بازیابی نمی‌شود.

$$x_{d1} = \begin{cases} 1.863 & 0 \le t < 10 \\ 2.608 & 10 \le t \end{cases}, \quad x'_{d1} = \begin{cases} 0.257 & 0 \le t < 10 \\ 0.360 & 10 \le t \end{cases}$$

خطای نوع ۲: زمانی که سیستم در حالت پایاست، تغییر ناشناخته‌ای در توان مکانیکی ژنراتور ۱# در لحظه $t = 10 \ \sec$ اتفاق افتاده، و بعد از یک ثانیه بازیابی می‌شود.

$$P_{m01} = \begin{cases} 0.57 & 0 \le t < 10 \\ 0.48 & 10 \le t < 11 \\ 0.57 & 11 \le t \end{cases}$$



شکل ۷-۳: سیستم قدرت دو- ماشینه متصل به باس بینهایت.

جدول ۷-۱: پارامترهای سیستم قدرت دو- ماشینه متصل به باس بینهایت.

پارامترها	ژنراتور ۱#	ژنراتور ۲#	
$x_d\ (p.u.)$	1.863	2.36	$x_{12}=0.15\ p.u.$ $x_{13}=0.53\ p.u.$ $x_{23}=0.6\ p.u.$ $T'_{do}=T'_{do\min}=T'_{do\max}$
$x'_d\ (p.u.)$	0.257	0.319	
$x_T\ (p.u.)$	0.129	0.11	
$x_{ad}\ (p.u.)$	1.712	1.712	
$T'_{do}\ (\sec)$	6.9	7.96	
$H\ (\sec)$	4	5.1	
$D\ (p.u.)$	5	3	
k_c	1	1	
$E_f\ (p.u.)$	[-6,6]		
$\omega_0\ (rad/\sec)$	314.159		

۷-۵-۱- بررسی عملکرد کنترل‌کننده مد لغزشی مرتبه- کسری غیرخطی شبه- غیرمتمرکز

برای تست عملکرد کنترل‌کننده NFOSMC از نوع شبه- غیرمتمرکز (۷-۲۰)، تغییرات سرعت نسبی ژنراتورها ($\Delta\omega_1$ و $\Delta\omega_2$) به عنوان ورودی تقریبگرهای فازی در نظر گرفته شده است. به دلیل باس بی‌نهایت بودن G_3 (ثابت بودن $\Delta\omega_3$)، در نظر نگرفتن $\Delta\omega_3$ به عنوان ورودی فازی امری معقول خواهد بود. برای هر یک از ورودی‌های سیستم فازی پنج تابع عضویت گوسی در نظر گرفته شده است. در شکل ۷-۴، هر پنج تابع عضویت با ذکر فرمول رسم شده‌اند. طبیعی است که تعداد قوانین فازی 5×5 خواهد بود.

پارامترهای کنترل‌کننده (۷-۲۰) به شکل زیر انتخاب شده‌اند:

$$\alpha=0.2 \qquad \lambda_1=\lambda_2=1 \qquad \frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{3}{11} \qquad \eta_1=\eta_2=10 \qquad \mu_1=\mu_2=40$$

همچنین، بهره‌های کنترلی فرم NBC نیز عبارت‌اند از:

$$k_{11} = k_{12} = 4, \qquad k_{21} = k_{22} = 8$$

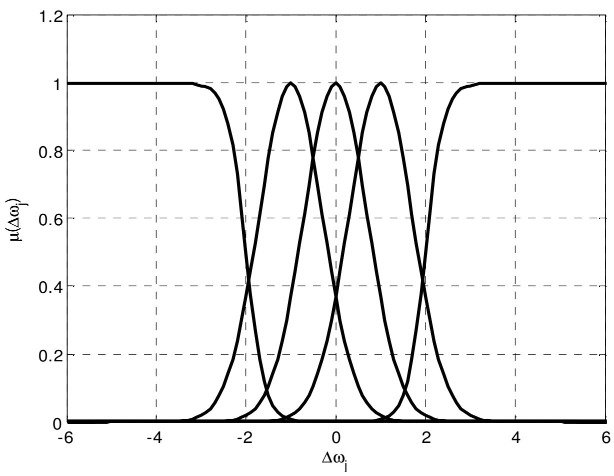
$$\mu_{PBi}(\Delta\omega_j) = 1/(1+\exp(-5\times(\Delta\omega_j - 2)))$$

$$\mu_{PSi}(\Delta\omega_j) = \exp(-(\Delta\omega_j - 1)^2)$$

$$\mu_{Zi}(\Delta\omega_j) = \exp(-(\Delta\omega_j)^2)$$

$$\mu_{NSi}(\Delta\omega_j) = \exp(-(\Delta\omega_j + 1)^2)$$

$$\mu_{NBi}(\Delta\omega_j) = 1/(1+\exp(5\times(\Delta\omega_j + 2)))$$



شکل ۷-۴: توابع عضویت انتخابی برای ورودی‌های تقریبگرهای فازی.

پاسخ گذرای سیستم چند- ماشینه به ازای کنترل‌کننده (۷-۲۰) و تحت تاثیر خطاهای نوع ۱ و ۲ به ترتیب در شکل‌های ۷-۵ و ۷-۶ نشان داده شده است. همچنین در این شکل‌ها، نتایج حاصل با کنترل‌کننده SMC کلاسیک از نوع شبه- غیرمتمرکز (با $\eta_1 = \eta_2 = 10$) مقایسه شده است.

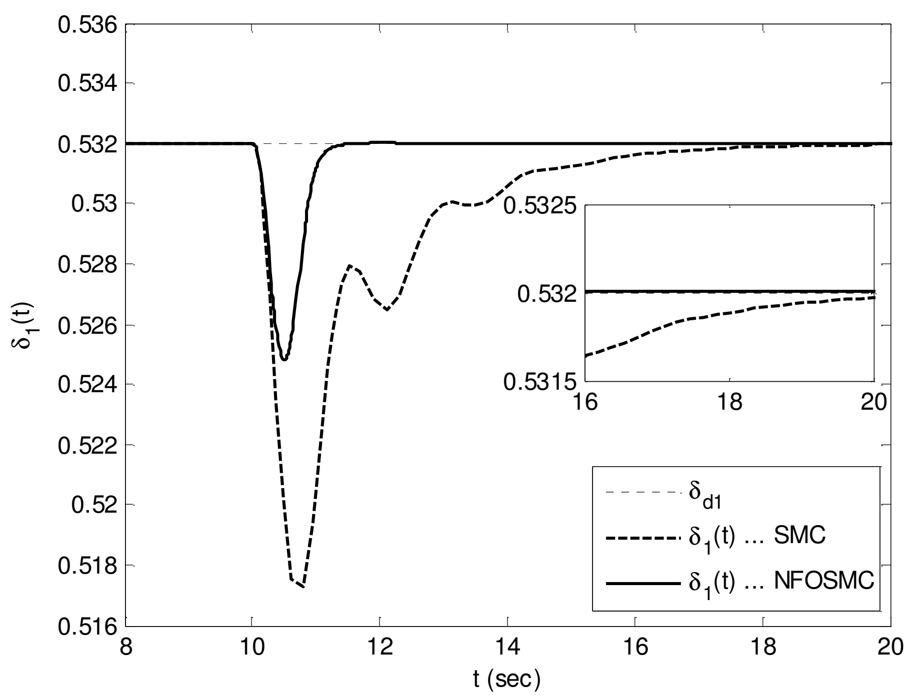
در شکل ۷-۵: زوایای قدرت ژنراتورها (الف- ب)، سرعت‌های نسبی (پ- ت)، توان‌های الکتریکی (ث- ج)، ولتاژهای تحریک (چ- ح) و متغیرهای فرم NBC ژنراتورها (خ- د) نشان داده شده‌اند.

شکل ۷-۶ نیز زوایای قدرت (الف- ب) و ولتاژ تحریک ژنراتورها (پ- ت) را نشان می‌دهد.

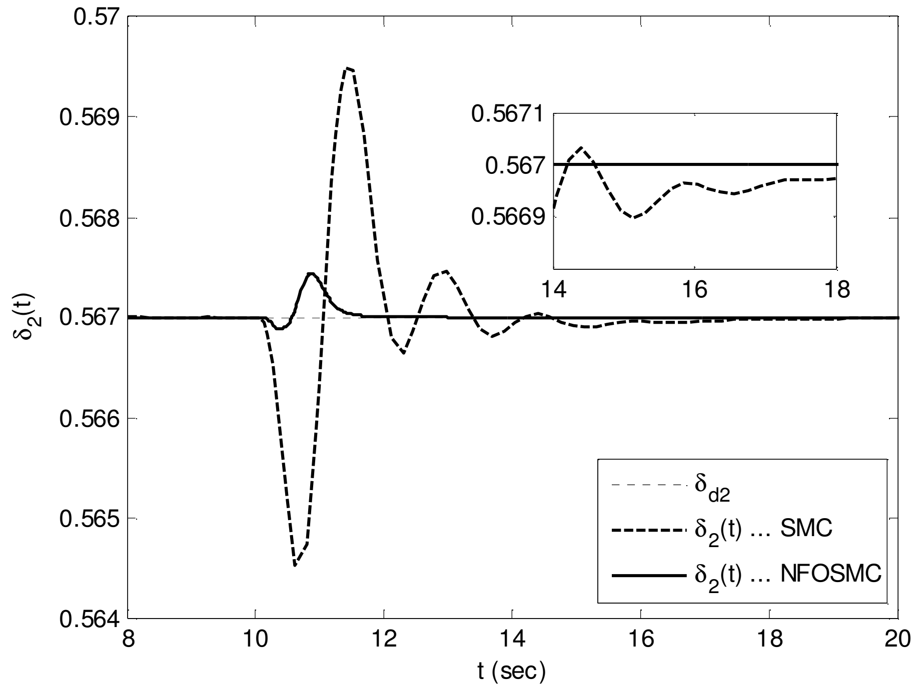
در شکل‌های ۷-۵ و ۷-۶، عملکرد مطلوب کنترل‌کننده NFOSMC در مقایسه با کنترل‌کننده SMC مشهود است. زیرا سرعت همگرایی و دقت ردیابی در متغیرهای $\delta_{1,2}$، $\Delta\omega_{1,2}$ و $P_{e1,2}$ و متغیرهای فرم NBC ($z_{1,1}$، $z_{2,1}$، $z_{3,1}$، $z_{1,2}$، $z_{2,2}$ و $z_{3,2}$) در کنترل‌کننده NFOSMC نسبت به کنترل‌کننده SMC بسیار بهتر است. به عنوان نمونه، در شکل ۷-۵ (الف) به ازای سیگنال‌های کنترلی تقریبا یکسان، زمان همگرایی زاویه قدرت ژنراتور اول در روش NFOSMC برابر ۱۱ ثانیه است، در حالی که این زمان برای

روش SMC از ۱۸ ثانیه بیشتر می‌باشد. همچنین، انحرافات متغیرهای $\delta_{1,2}$، $\Delta\omega_{1,2}$ و $P_{e1,2}$ از مقادیر مرجع با ازای کنترل‌کننده NFOSMC در مقایسه با SMC کمتر است. همه موارد مذکور تاییدی بر عملکرد مطلوب کنترل‌کننده مرتبه- کسری پیشنهادی می‌باشند.

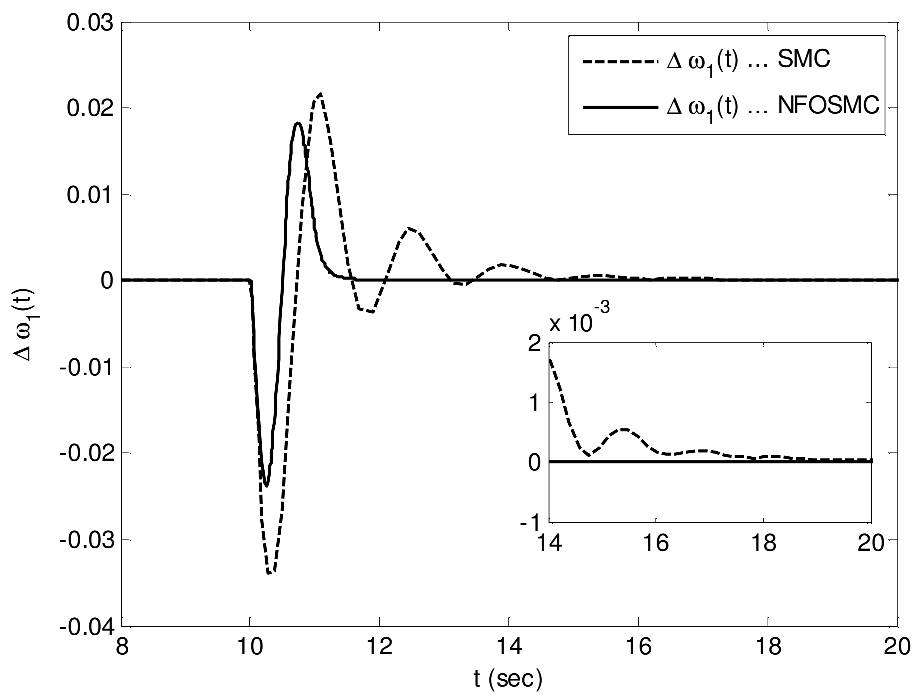
توجه شود که بارز بودن نتایج شبیه‌سازی در شکل ۷-۵ در مقایسه با شکل ۷-۶ به دلیل بازیابی نشدن خطای نوع ۱ (در مقایسه با نوع ۲) است. به عبارت دیگر، چون خطای نوع ۲ بعد از یک ثانیه جبران می‌گردد، لذا برجستگی نتایج در شکل ۷-۶ در مقایسه با شکل ۷-۵ خیلی زیاد نمی‌باشد.



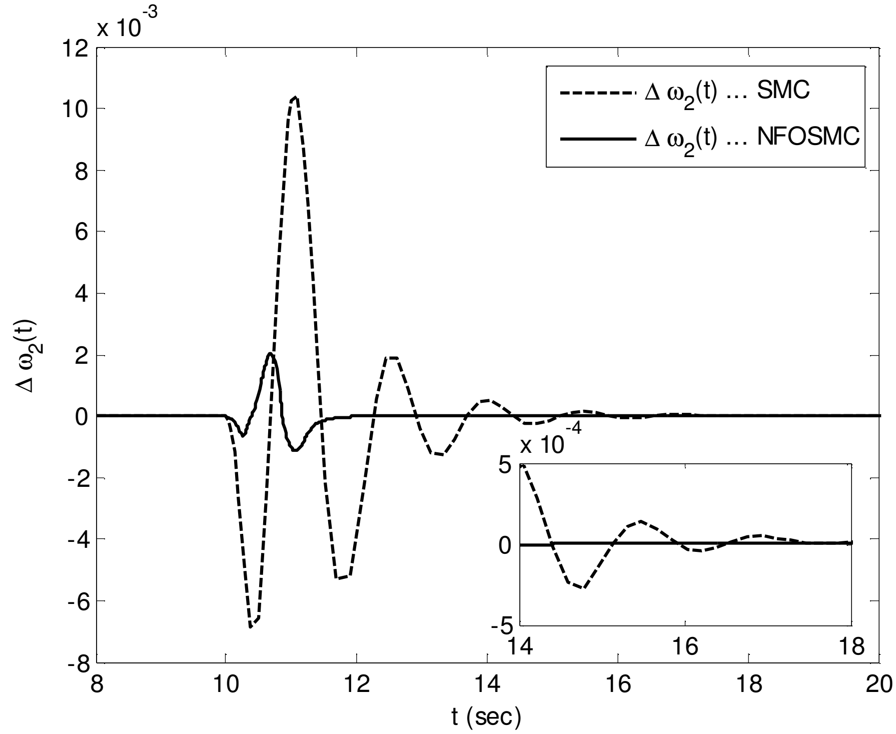
الف) زاویه قدرت ژنراتور ۱#



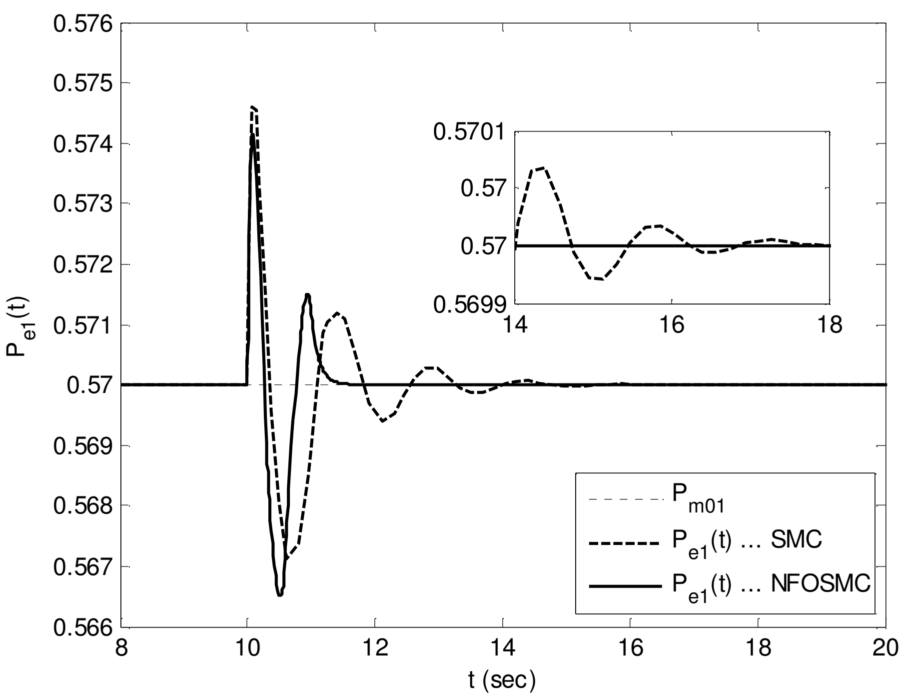
ب) زاویه قدرت ژنراتور ۲#



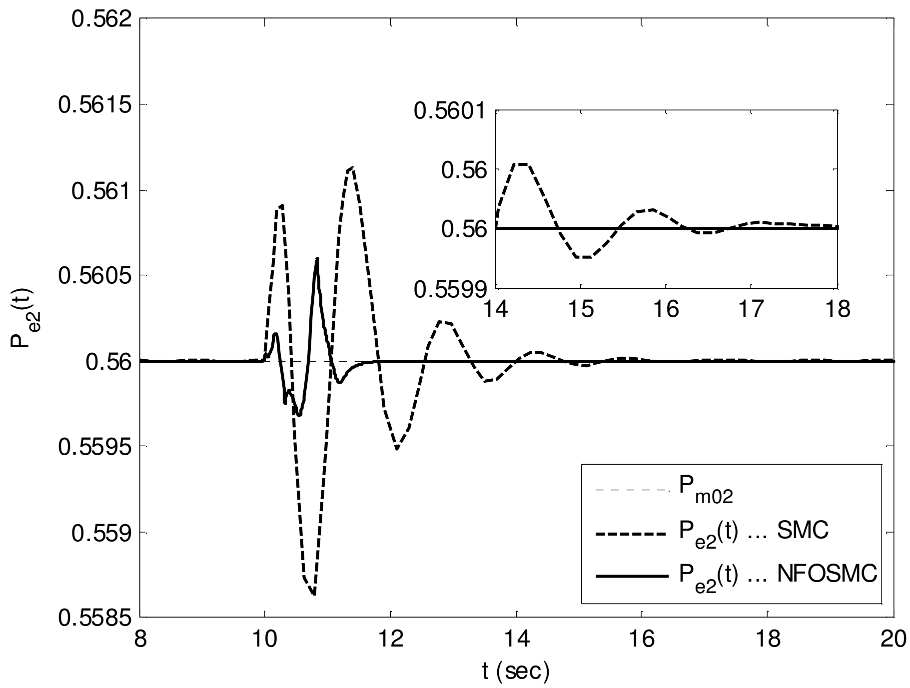
پ) سرعت نسبی ژنراتور ۱#



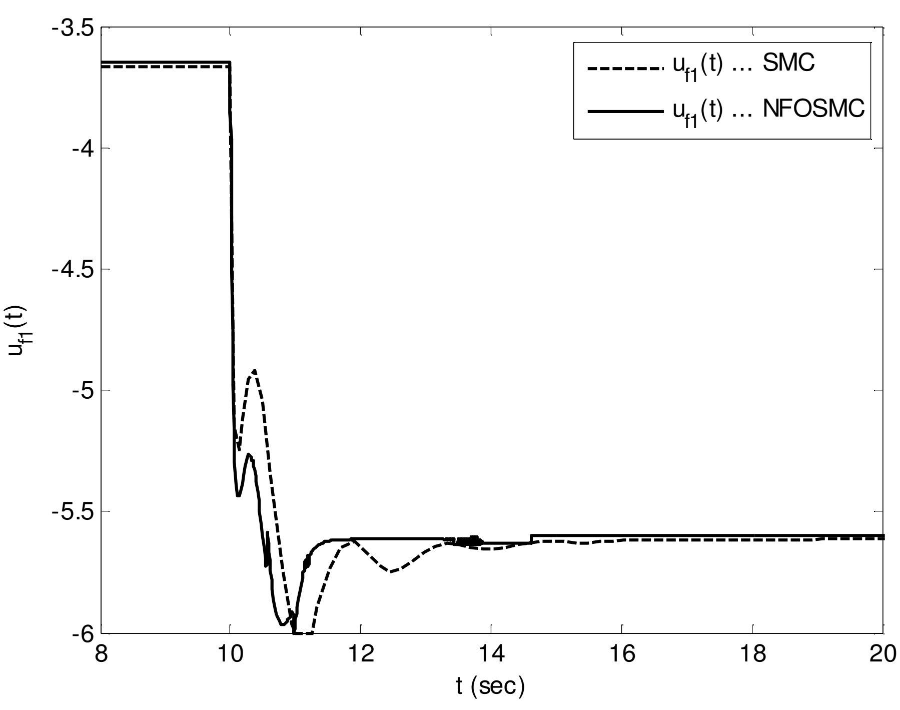
ت) سرعت نسبی ژنراتور ۲#



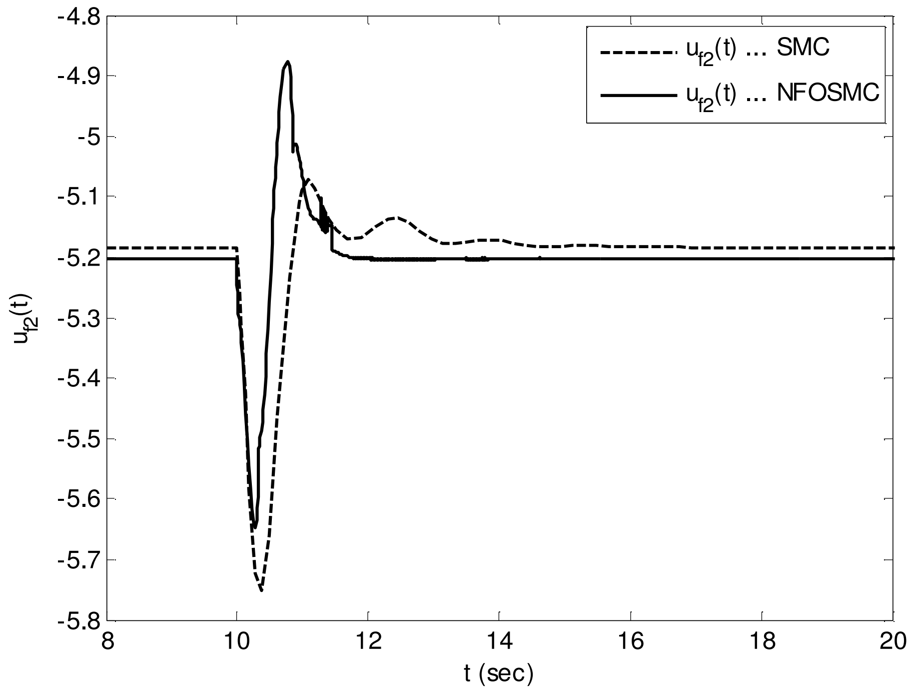
ث) توان الکتریکی ژنراتور ۱#



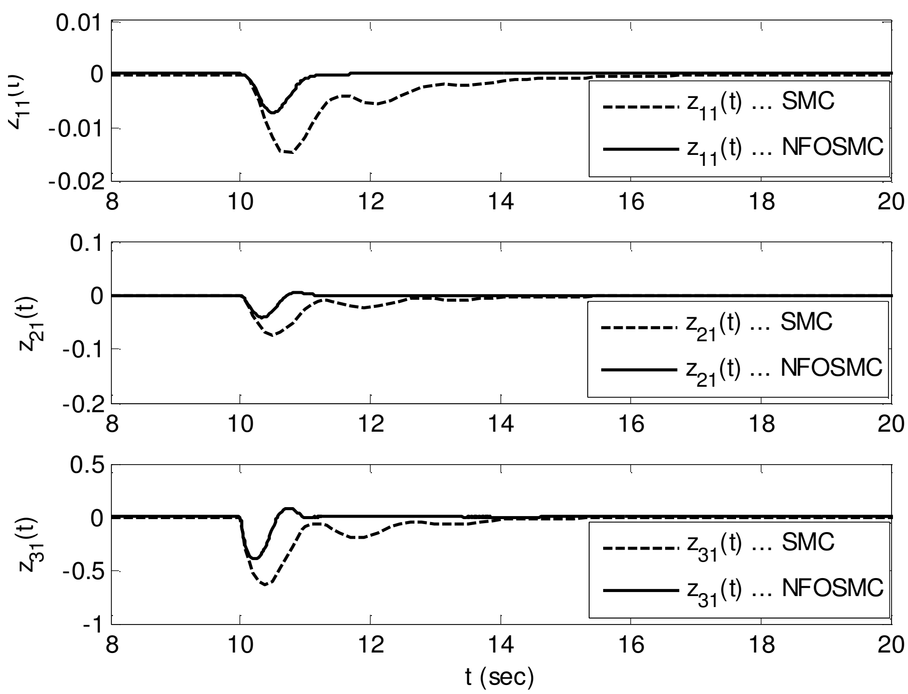
چ) توان الکتریکی ژنراتور ۲#



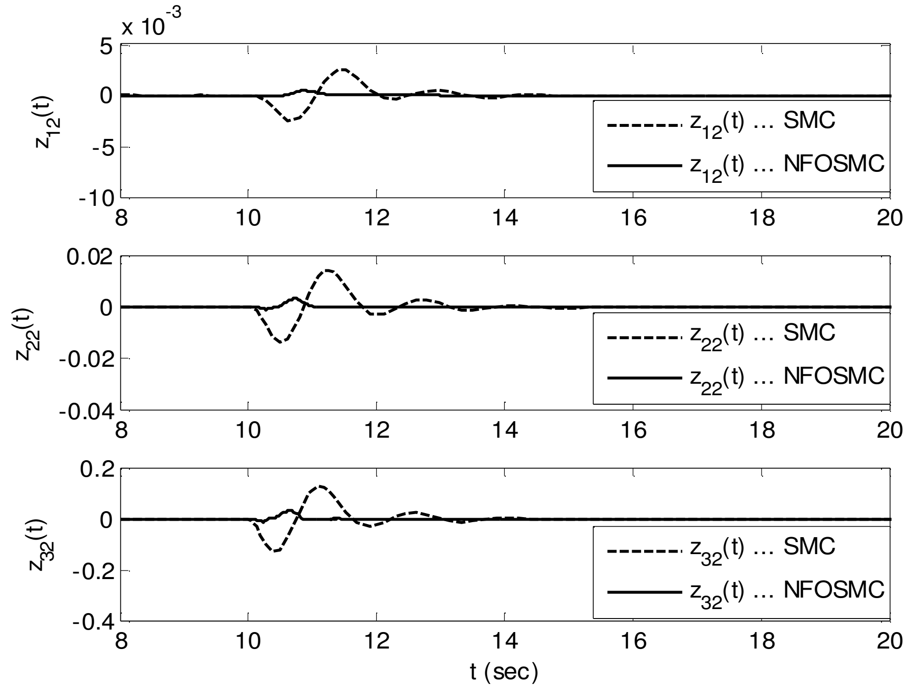
چ) ولتاژ تحریک ژنراتور ۱#



ح) ولتاژ تحریک ژنراتور ۲#

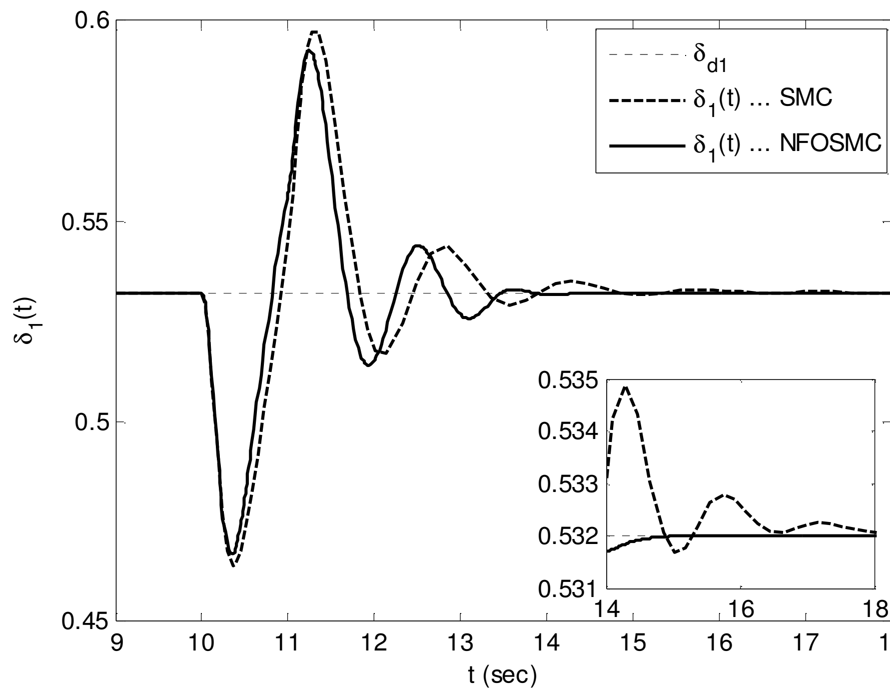


خ) متغیرهای فرم NBC ژنراتور ۱#

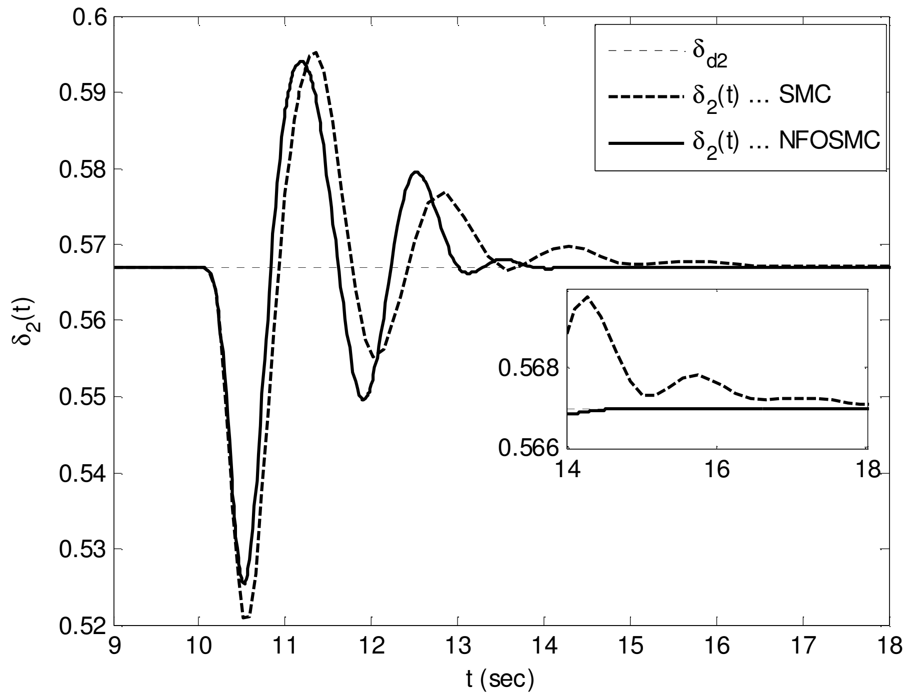


د) متغیرهای فرم NBC ژنراتور ۲#

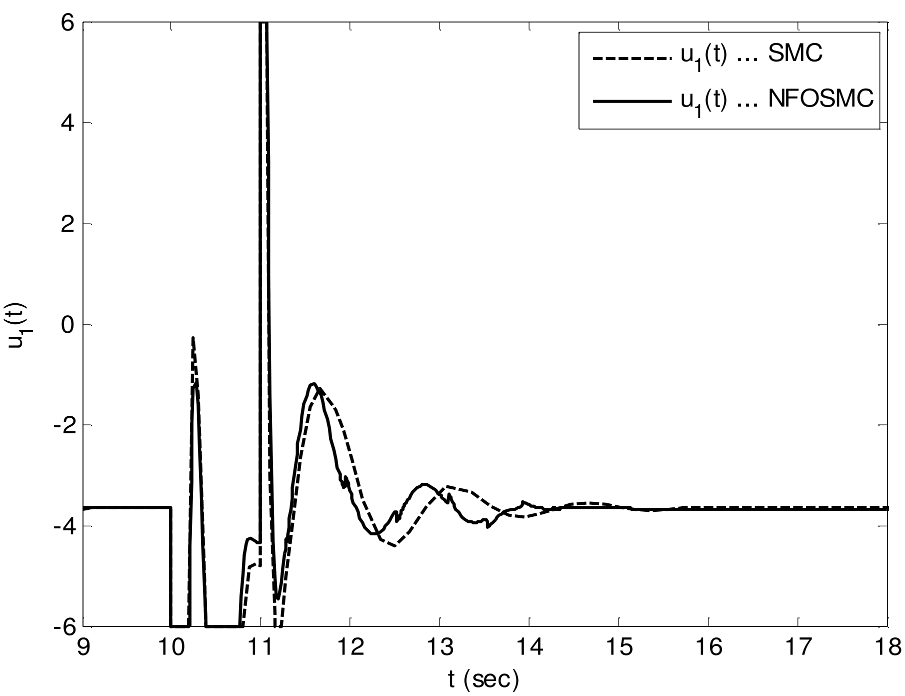
شکل ۷-۵: پاسخ گذرای سیستم چند- ماشینه به ازای کنترل‌کننده شبه- غیرمتمرکز NFOSMC (۷-۲۰) و کنترل- کننده شبه- غیرمتمرکز SMC تحت تاثیر خطای نوع ۱.



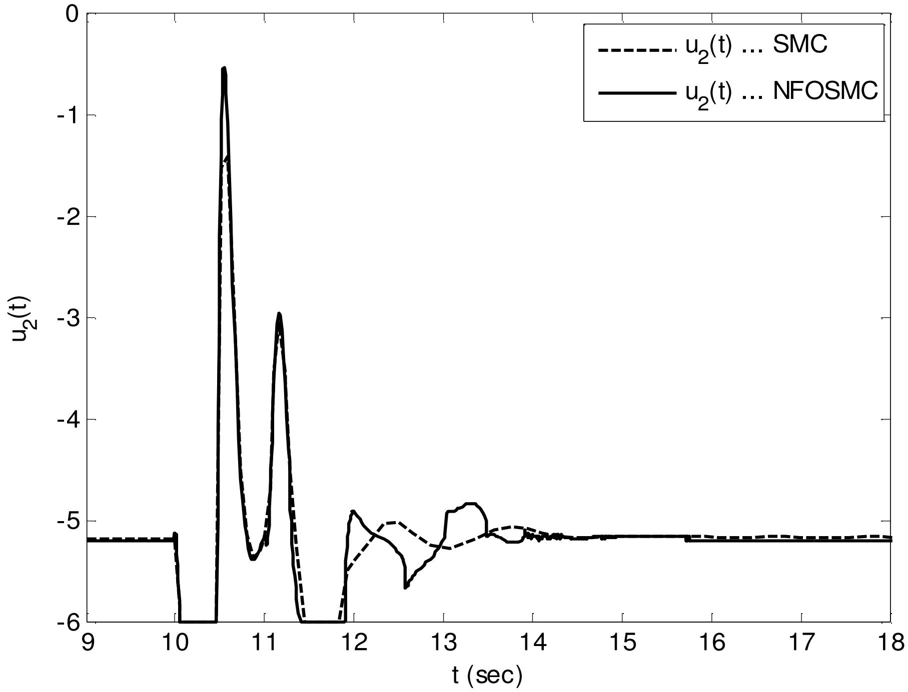
الف) زاویه قدرت ژنراتور ۱#



ب) زاویه قدرت ژنراتور ۲#



پ) ولتاژ تحریک ژنراتور ۱#



ت) ولتاژ تحریک ژنراتور ۲#

شکل ۷-۶: پاسخ گذرای سیستم چند- ماشینه به ازای کنترل‌کننده شبه-غیرمتمرکز NFOSMC (۷-۲۰) و کنترل-کننده شبه-غیرمتمرکز SMC تحت تاثیر خطای نوع ۲.

۷-۵-۲- بررسی اثر پارامتر کسری در کنترل‌کننده مد لغزشی مرتبه- کسری غیرخطی

در این بخش، برای مطالعه تاثیر خالص (بدون تقریبگر فازی) پارامتر کسری α بر روی سیستم حلقه- بسته، کنترل‌کننده NFOSMC با راهبرد غیرمتمرکز (۷-۷) در نظر گرفته شده و $\eta_1 = \eta_2 = 0$ نیز فرض می‌شوند. بدین منظور، پارامترهای کنترل‌کننده (۷-۷) به شکل زیر انتخاب شده‌اند:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{11} \qquad K_{sw-1} = K_{sw-2} = 50 \qquad \rho_1 = \rho_2 = 0.001$$

زوایای قدرت ژنراتورها (الف- ب)، توان‌های الکتریکی (ت-پ) و ولتاژهای تحریک (ث- ج) به ازای دو مقدار متفاوت $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.8$ در شکل ۷-۷ نشان داده شده‌اند. برای جلوگیری از دست رفتن داده‌های مقایسه‌ای (به علت محدودیت سیگنال‌های کنترلی) دامنه خطا نصف مقدار تعریفی در نظر گرفته شده است. نتایج حاصله از شکل ۷-۷ به فرم مقایسه‌ای در جدول ۷-۲ نیز لیست شده و ویژه-

گی‌های برتر با رنگ خاکستری مشخص شده‌اند. در این جدول، تاثیر پارامتر α بر روی سه کمیت مورد مطالعه قرار گرفته که عبارت‌اند از:

۱- انحراف (فرارفت و فرورفت) از مقدار مرجع: مقدار بزرگ α تاثیر انتگرال $D^{-\alpha} z_{3i}^{p_i/q_i}(t)$ را در سطح لغزش (۷-۳) تقویت کرده و باعث افزایش انحراف اولیه از مقدار مرجع می‌گردد. در نتیجه بر طبق معادله (۷-۱۸)، انحرافات $\delta_1(t)$ کم می‌شود و برعکس. اما انحرافات $\delta_2(t)$ و $P_{e2}(t)$ وابسته به نوع برهم‌کنش‌ها بوده و به راحتی قابل تحلیل نمی‌باشند.

۲- سرعت همگرایی: به ازای مقادیر بزرگ α، قانون لغزشی مرتبه- کسری به قانون لغزشی مرتبه- معمولی نزدیک شده و باعث همگرایی سریع‌تر پاسخ‌ها می‌شود و برعکس.

۳- لرزش سیگنال کنترلی: نوسانات سیگنال کنترلی به ازای مقدار کوچک α کمتر می‌شوند و برعکس. علت این امر بزرگ شدن تاثیر انتگرال $D^{-(1-\alpha)} \tanh(\frac{s_i(t)}{\rho_i})$ به ازای αهای کوچک و صافتر شدن جمله کلیدزنی است.

لازم به ذکر است که پارامترهای p_i/q_i و ρ_i نیز تاثیر مستقیمی بر روی لرزش سیگنال کنترلی، خطای ردیابی و سرعت همگرایی متغیرها دارند. جدول‌های ۷-۳ و ۷-۴ نحوه تاثیر این پارامترها را تشریح می‌کنند. این جداول در انتخاب مقادیر مناسب پارامترهای p_i/q_i و ρ_i برای رسیدن به تعادل مابین سرعت همگرایی – لرزش و خطای ردیابی - لرزش مفیداند.

جدول ۷-۲: تاثیر پارامتر α بر عملکرد کنترل‌کننده غیرمتمرکز NFOSMC (۷-۷).

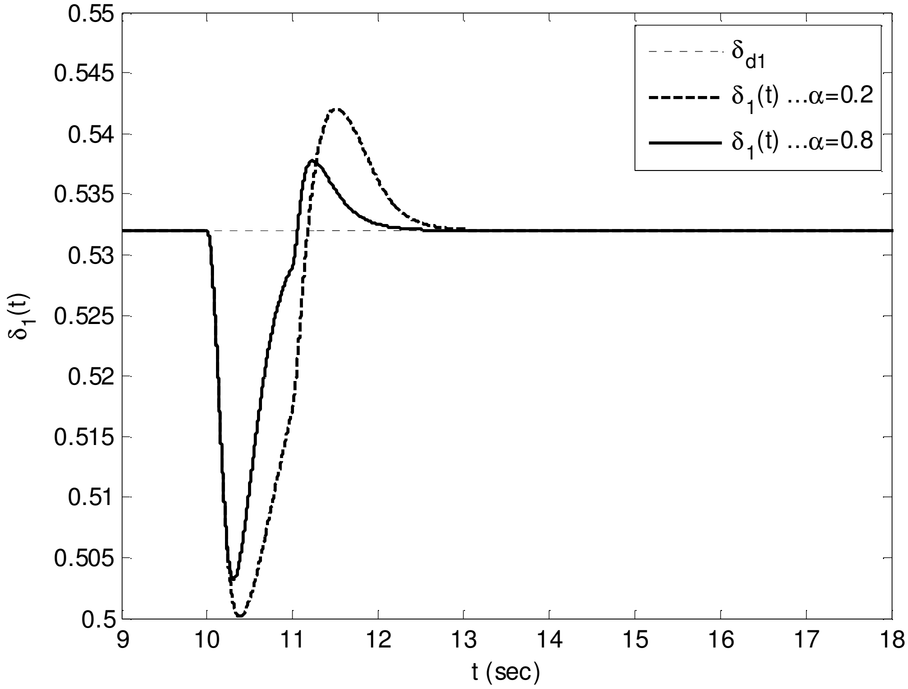
	انحراف از مقدار مرجع		سرعت همگرایی پاسخ‌های گذرا	لرزش سیگنال کنترلی ($E_{f1,2}$)
	$P_{e1}(t)$	$\delta_1(t)$ ، $\delta_2(t)$ ، $P_{e2}(t)$		
پارامتر کسری کوچک ($\alpha = 0.2$)	انحرافات به دلیل کوچک بودن مرتبه انتگرالگیر $D^{-0.2} z_{3i}^{p_i/q_i}(t)$ کم است.	زیاد	$\delta_1(t) \cong 1.8\ \text{sec}$ $\delta_2(t) \cong 1.8\ \text{sec}$ $P_{e1}(t) \cong 1.5\ \text{sec}$ $P_{e2}(t) \cong 1.8\ \text{sec}$	لرزش به علت بزرگ بودن مرتبه انتگرال $D^{-(1-\alpha)} \tanh(\frac{s_i(t)}{\rho_i}) = D^{-0.8} \tanh(\frac{s_i(t)}{\rho_i})$ کم است.
پارامتر کسری بزرگ ($\alpha = 0.8$)	انحرافات به دلیل بزرگ بودن مرتبه انتگرالگیر $D^{-0.8} z_{3i}^{p_i/q_i}(t)$ زیاد است.	کم	$\delta_1(t) \cong 1.4\ \text{sec}$ $\delta_2(t) \cong 1\ \text{sec}$ $P_{e1}(t) \cong 1\ \text{sec}$ $P_{e2}(t) \cong 0.8\ \text{sec}$	لرزش به علت کوچک بودن مرتبه انتگرال $D^{-(1-\alpha)} \tanh(\frac{s_i(t)}{\rho_i}) = D^{-0.2} \tanh(\frac{s_i(t)}{\rho_i})$ زیاد است.

جدول ۷-۳: تاثیر نسبت پارامتری p_i/q_i بر لرزش و سرعت همگرایی.

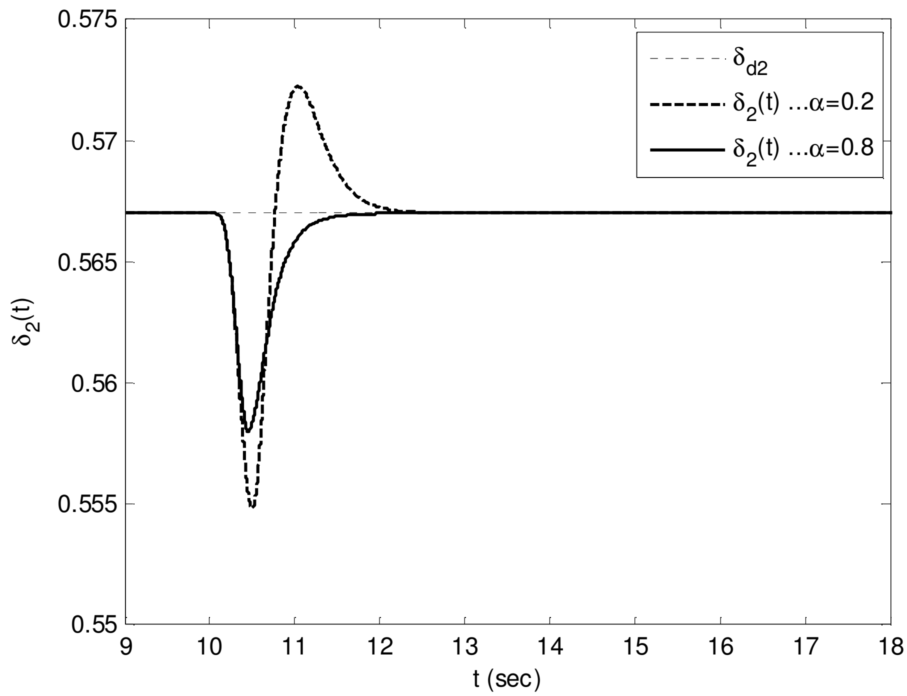
	$p_i/q_i \to 0$	$p_i/q_i \to 1$
لرزش	افزایش	کاهش
سرعت همگرایی	افزایش	کاهش

جدول ۷-۴: تاثیر پارامتر ρ_i بر لرزش و خطای ردیابی.

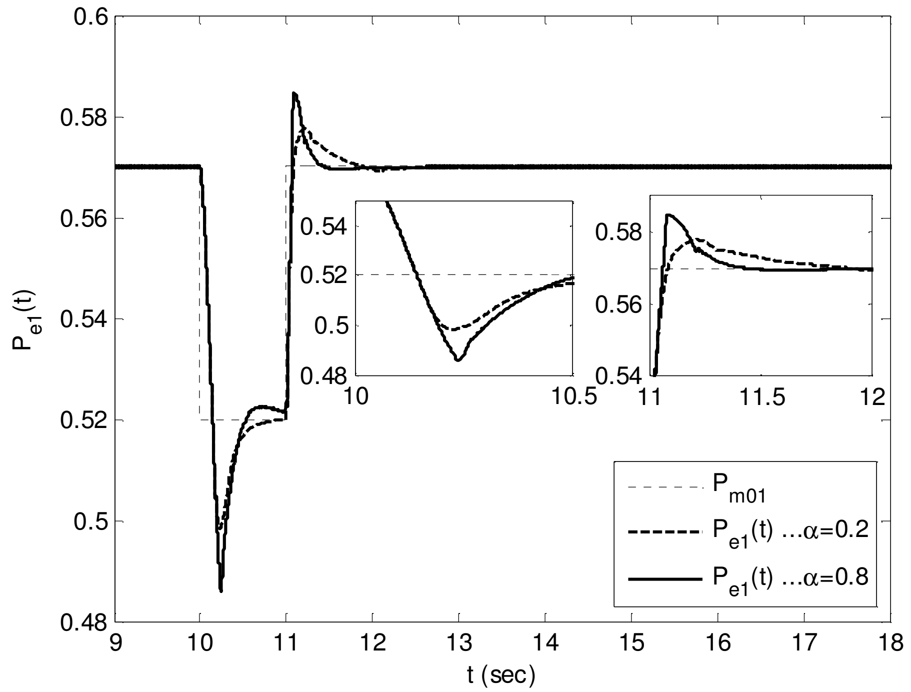
	$\rho_i \to 0$	$\rho_i \to 1 \ \ or \ \ bigger$
لرزش	افزایش	کاهش
خطای ردیابی	کاهش	افزایش



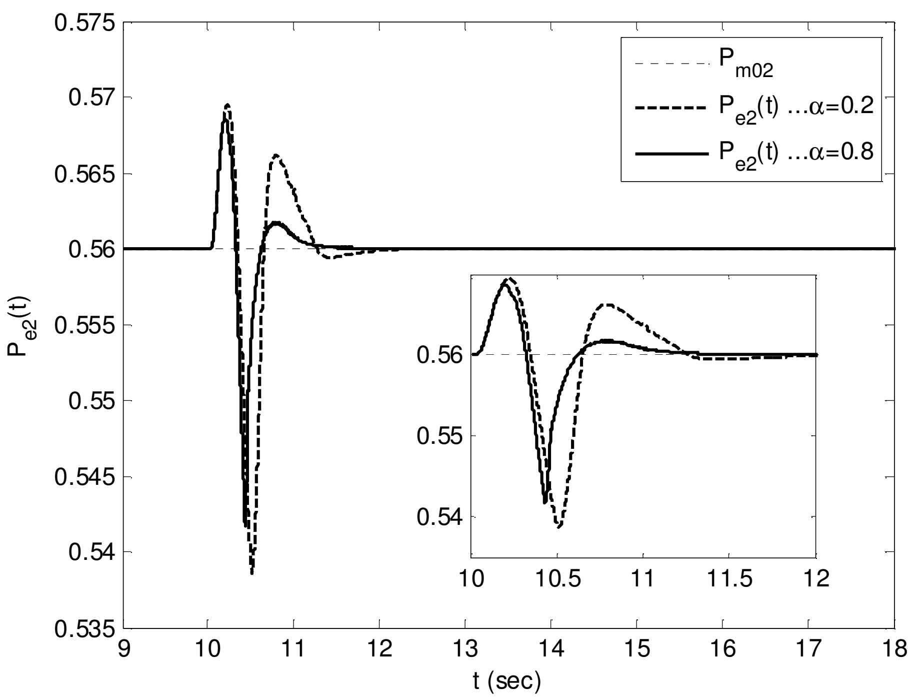
الف) زاویه قدرت ژنراتور ۱#



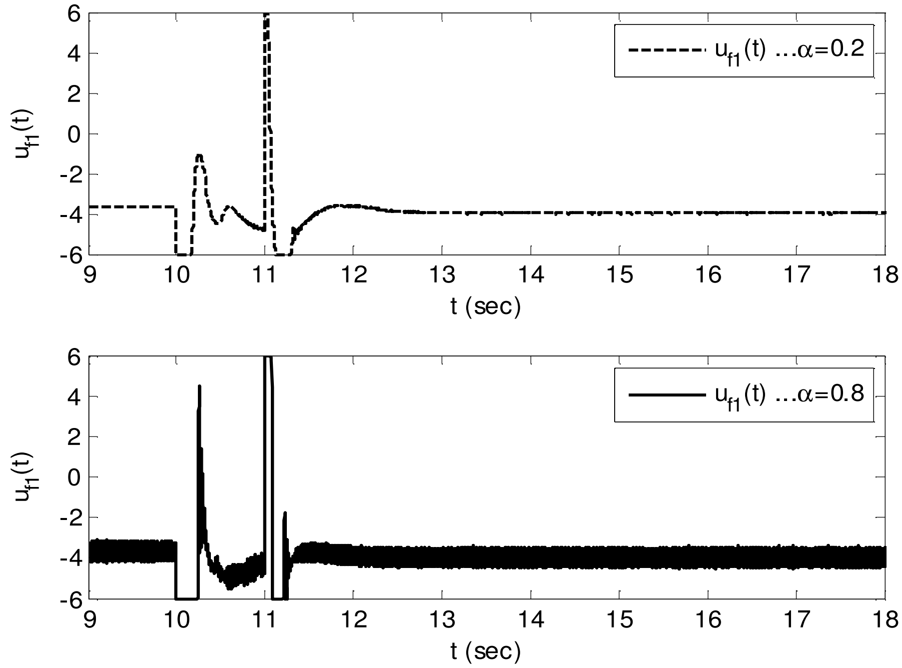
ب) زاویه قدرت ژنراتور ۲#



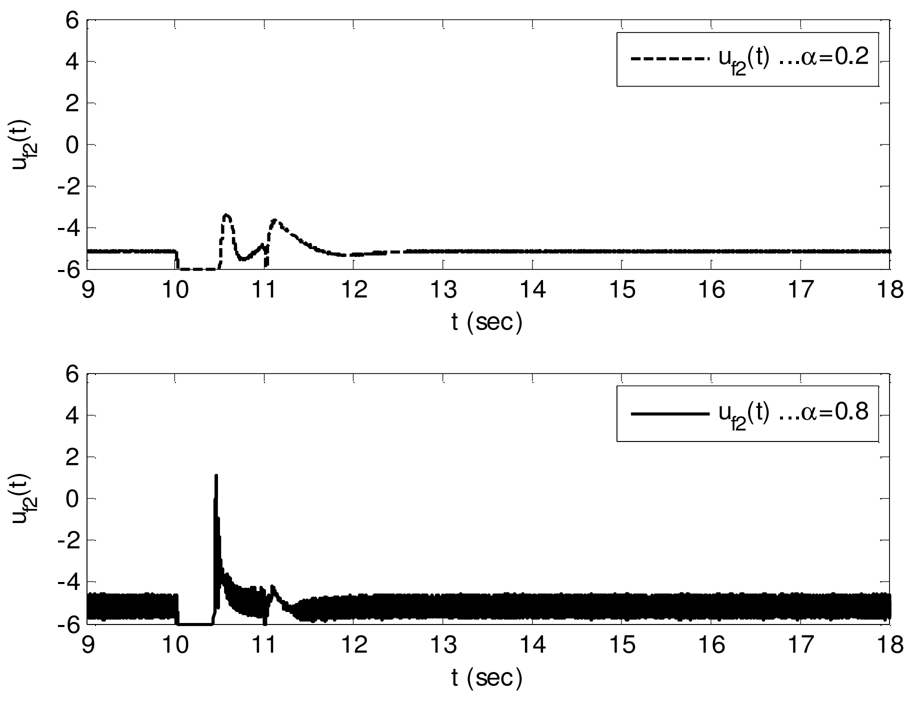
پ) توان الکتریکی ژنراتور ۱#



ت) توان الکتریکی ژنراتور ۲#



ث) ولتاژ تحریک ژنراتور ۱#



ج) ولتاژ تحریک ژنراتور ۲#

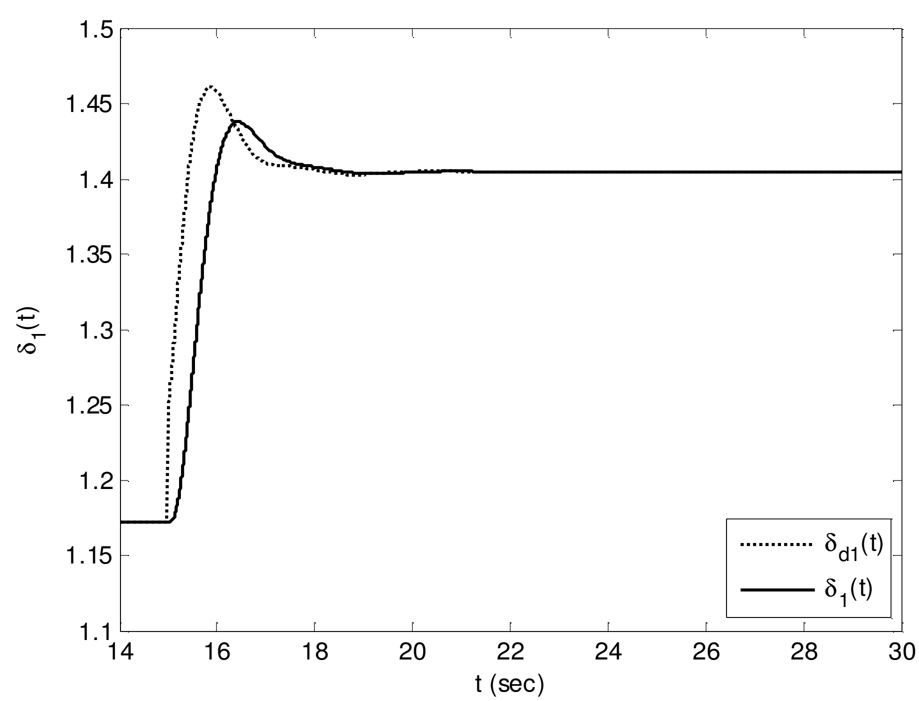
شکل ۷-۷: عملکرد کنترل‌کننده غیرمتمرکز NFOSMC (۷-۷) به ازای مقادیر مختلف پارامتر α و تحت تاثیر نصف خطای نوع ۲.

۷-۵-۴- کنترل ولتاژ پایانه ژنراتورها

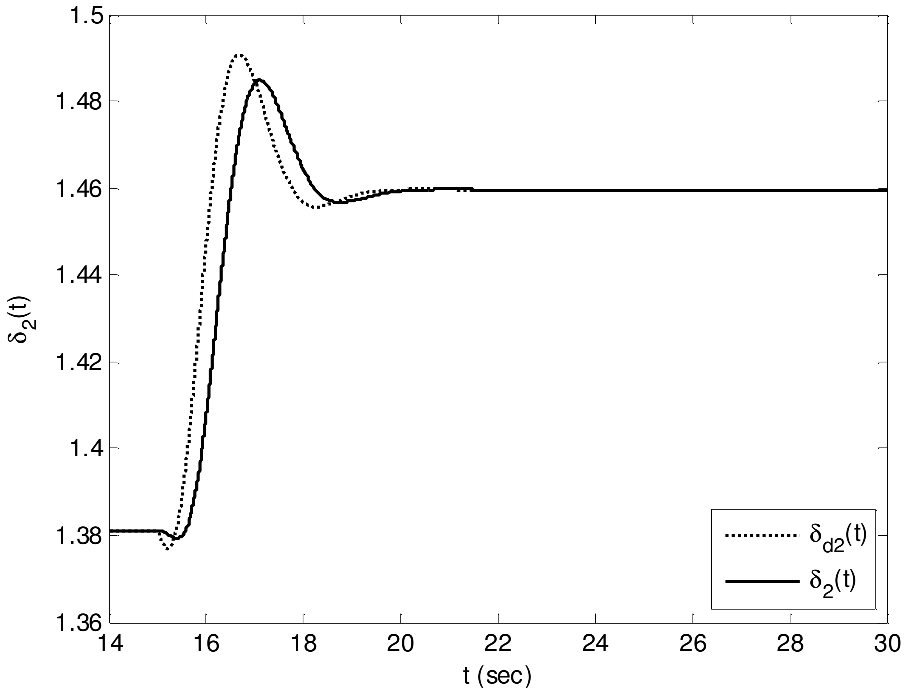
همانطور که در بخش ۷-۴ اشاره شد، کنترل‌کننده‌های غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز NFOSMC (۷-۷) و (۷-۲۰) فقط به منظور کنترل زاویه قدرت ژنراتورها و حفظ سنکرونیزم پیشنهاد شده‌اند و ضمانتی برای حفظ سطح ولتاژ ژنراتورها ندارند. به عبارت دیگر، دو کنترل‌کننده پیشنهادی فقط در نقش PSS عمل می‌کنند. لیکن برای مهار تغییرات ولتاژها نیاز به افزودن AVR است. بدین منظور شماتیک کنترلی پیشنهادی در بخش ۷-۴ مورد آزمایش قرار گرفته است.

شکل ۷-۸، پاسخ گذرای سیستم چند- ماشینه به ازای شماتیک پیشنهادی را نشان می‌دهد. ضرایب کنترل‌کننده شبه- غیرمتمرکز NFOSMC (۷-۲۰) همانند بخش‌های قبلی، و ضرایب AVR به فرم زیر انتخاب شده‌اند:

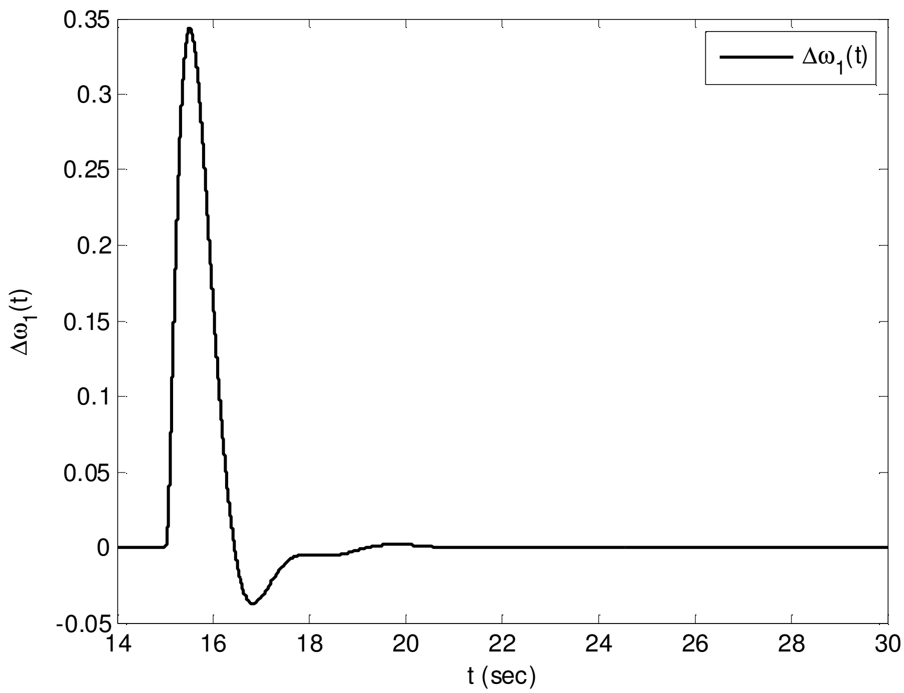
$$K_{P1} = K_{P2} = 4 \qquad K_{I1} = K_{I2} = 0.4$$



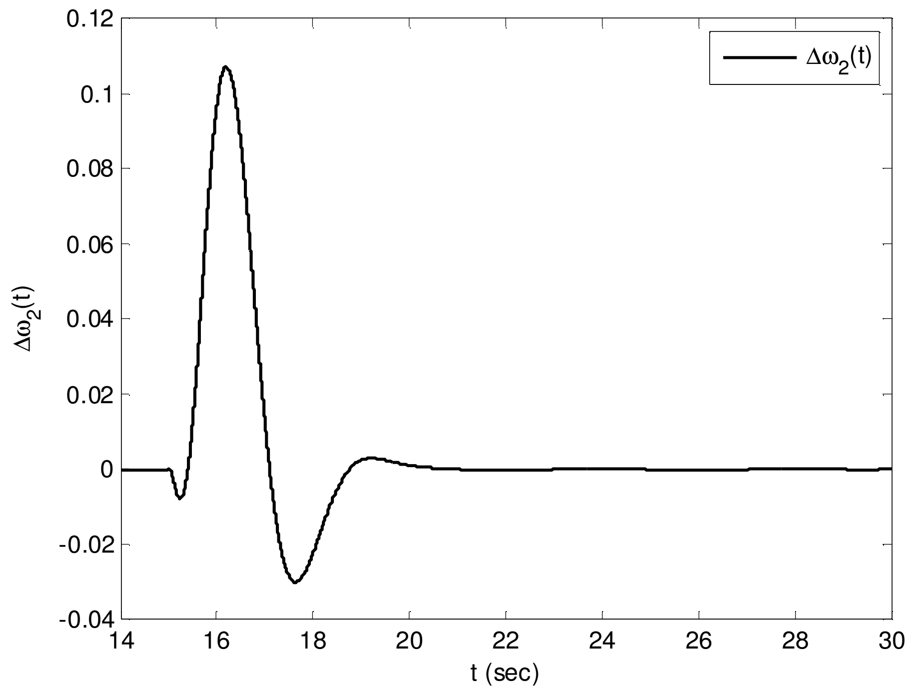
الف) زاویه قدرت ژنراتور ۱#



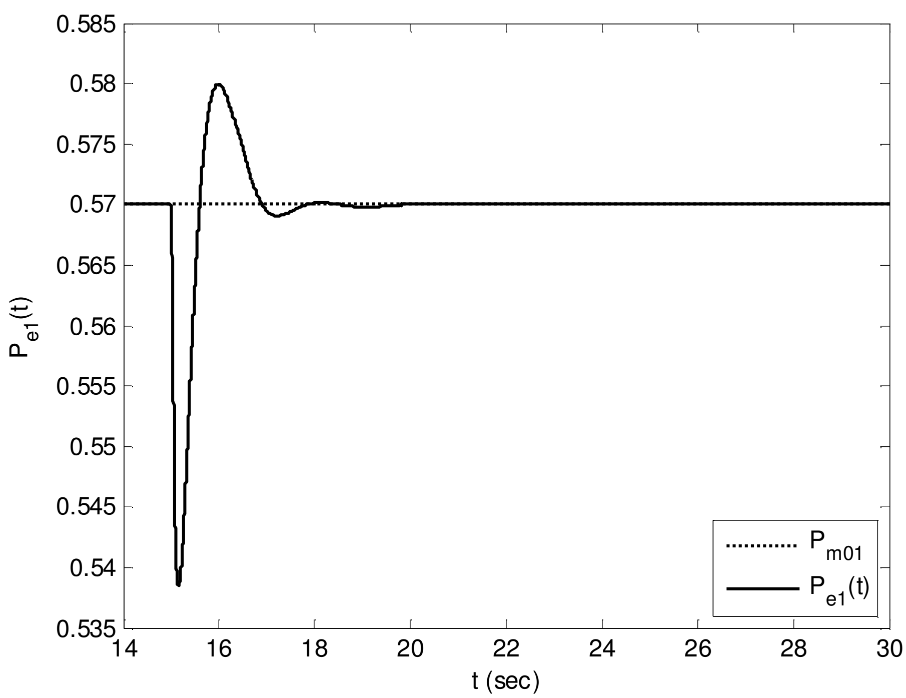
ب) زاویه قدرت ژنراتور ۲#



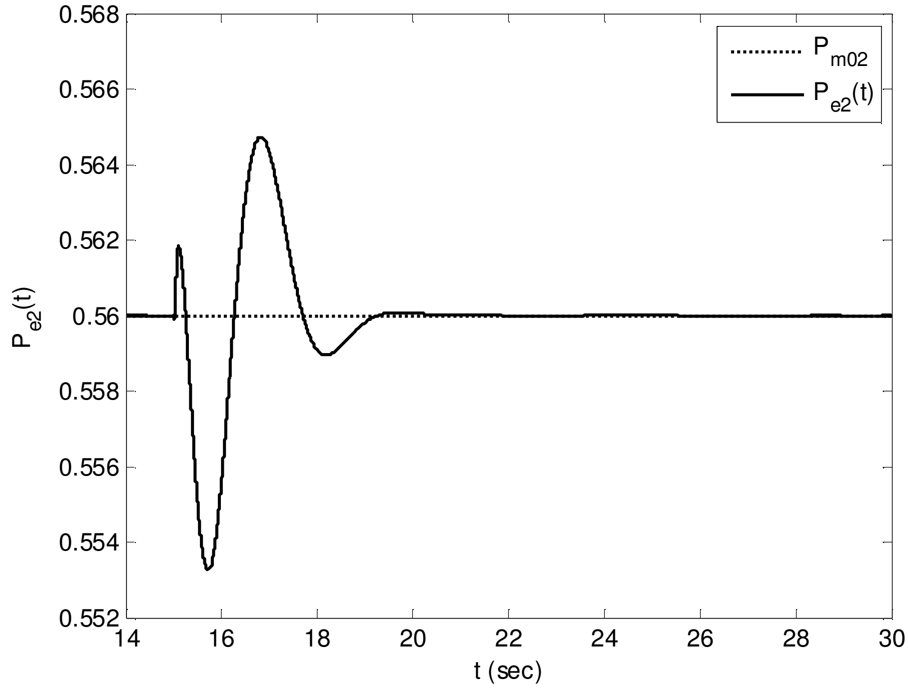
پ) سرعت نسبی ژنراتور ۱#



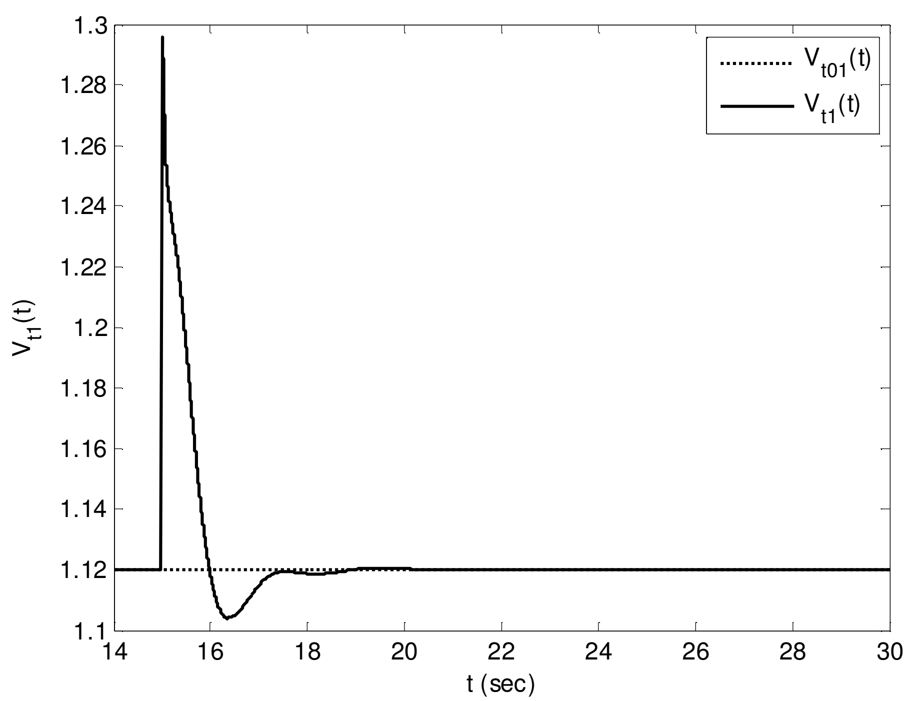
ت) سرعت نسبی ژنراتور ۲#



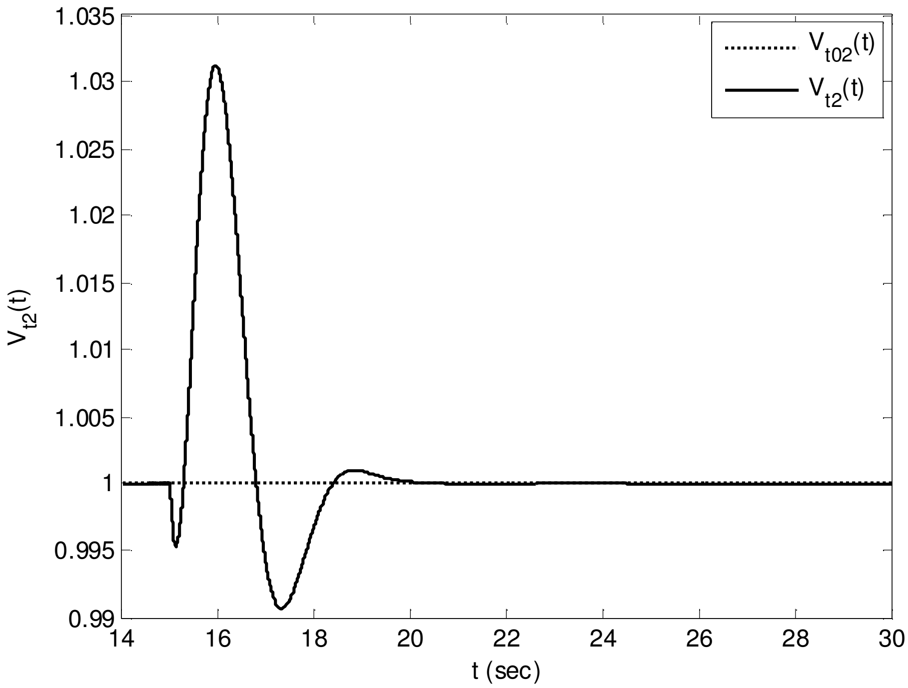
ث) توان الکتریکی ژنراتور ۱#



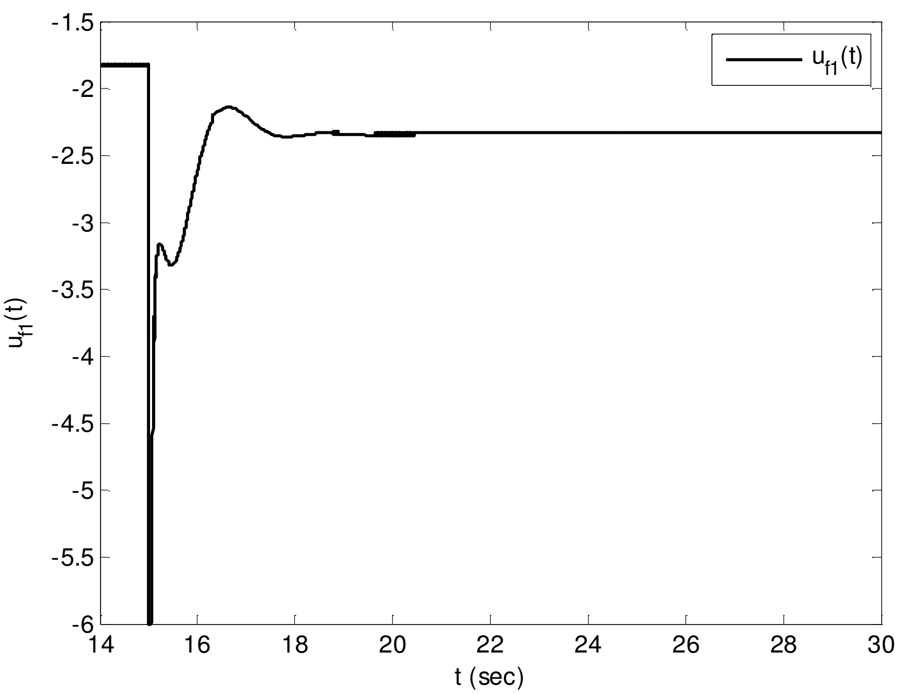
ج) توان الکتریکی ژنراتور ۲#



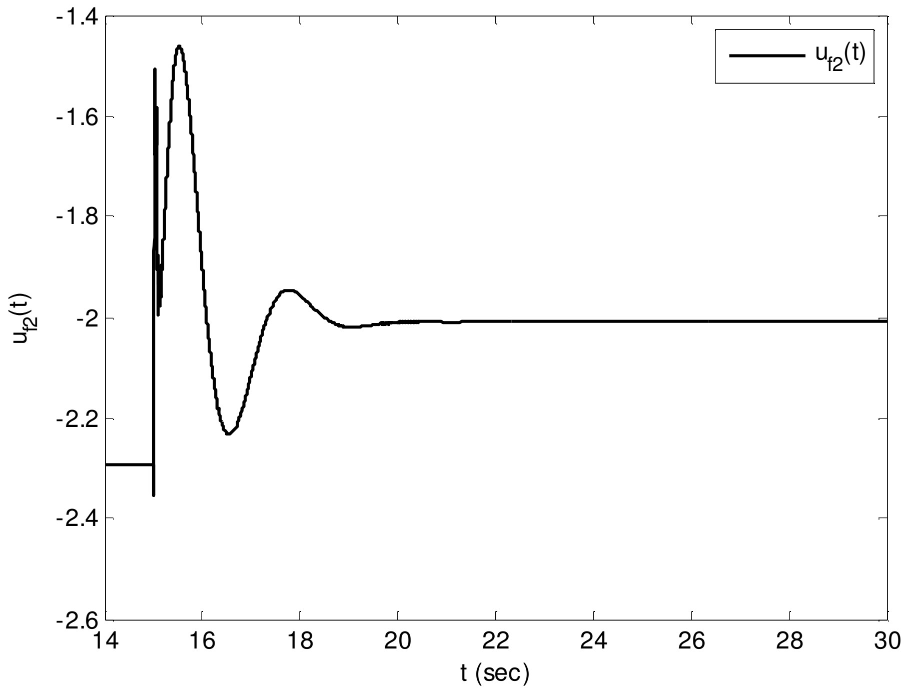
چ) ولتاژ پایانه ژنراتور ۱#



ح) ولتاژ پایانه ژنراتور ۲#



خ) ولتاژ تحریک ژنراتور ۱#



د) ولتاژ تحریک ژنراتور ۲#

شکل ۷-۸: پاسخ گذرای سیستم چند- ماشینه به ازای کنترل‌کننده NFOSMC (۷-۲۰) و کنترل‌کننده PI (۷-۲۷) تحت تاثیر خطای نوع ۱.

در شکل ۷-۸: زاویه قدرت ژنراتورها (الف- ب)، سرعت‌های نسبی (پ- ت)، توان‌های الکتریکی (ث- ج)، ولتاژ پایانه ژنراتورها (چ- ح) و ولتاژهای تحریک (خ- د) به ازای خطای نوع ۱ نشان داده شده‌اند. شکل‌های قسمت (پ- ت) و (چ- ح) نشان می‌دهند که سنکرون‌سازی و کنترل ولتاژ پایانه ژنراتورها به نحو مطلوبی انجام شده است. همچنین، تغییرات زوایای قدرت نیز در حد مطلوبی قرار داشته و مقدار مرجع را ردیابی می‌کنند.

فصل هشتم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۸-۱- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این رساله و برای اولین بار، طراحی کنترل‌کننده‌های مد لغزشی مرتبه- کسری بر روی سیستم‌های غیرخطی مقیاس- بزرگ در حضور برهم‌کنش مابین زیرسیستم‌ها، عدم قطعیت‌ها و خطاها مورد بررسی قرار گرفت. سیستم‌های مورد مطالعه شامل دو دسته‌ی مجزا از سیستم‌های مقیاس- بزرگ با دینامیک‌های مرتبه- کسری و مرتبه- صحیح می‌باشند.

برای سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- کسری، دو کنترل‌کننده مد لغزشی مرتبه- کسری جدید بر پایه راهبرد غیرمتمرکز در فصل ششم پیشنهاد شد. کنترل‌کننده اول برای سیستمی با مشتق RL، و کنترل‌کننده دوم برای سیستمی با مشتق Caputo طراحی شده است. در مرحله بعدی، کنترل‌کننده‌های مذکور در قالب راهبرد شبه- غیرمتمرکز توسعه یافته‌اند. در این مد کنترلی، به دلیل نامعلوم بودن کران عدم‌قطعیت‌ها، برهم‌کنش مابین زیرسیستم‌ها و اغتشاشات خارجی از تقریبگرهای فازی برای تخمین آن‌ها استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های کامپیوتری، عملکرد مقاوم و مناسب قوانین کنترلی پیشنهادی را تصدیق می‌نمایند. در حالت کلی، برخی از مزایای مهم طراحی‌ها و تحلیل‌های فصل ششم عبارت‌اند از:

۱- توسعه و بکارگیری مفهوم پایداری لیاپانوف معمولی و مرتبه- کسری در طراحی انواع کنترل‌کننده‌های مد لغزشی غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز مرتبه- کسری.

۲- بیان مقایسه‌ای و متناظر تحلیل‌ها و طراحی‌ها برای سیستم‌های مرتبه- کسری با دو مشتق مجزای Caputo و RL.

۳- توسعه مکانیزم‌های تطبیقی- فازی معمولی و مرتبه- کسری بر روی سیستم‌های دینامیکی مورد مطالعه.

برای سیستم‌های مقیاس- بزرگ مرتبه- صحیح (سیستم قدرت چند- ماشینه)، مهار زاویه قدرت و ولتاژ پایانه ژنراتورها در فصل هفتم مورد مطالعه قرار گرفت. در ابتدای این فصل، به دلیل کانونیکال نبودن مدل دینامیکی ژنراتورها، از روش NBC برای خطی‌سازی مدل استفاده می‌شود. سپس، طراحی پایدارسازهای مد لغزشی مرتبه- کسری با سطح غیرخطی جدید پیشنهاد شده است. این پایدارسازها در هر دو قالب غیرمتمرکز و شبه- غیرمتمرکز توسعه داده شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی، عملکرد سریع و دقیق کنترل‌کننده‌های پیشنهادی را در مقایسه با کنترل‌کننده مد لغزشی کلاسیک در حضور برهم-کنش مابین زیرسیستم‌ها، عدم‌قطعیت‌های مدلسازی و خطاهای ناگهانی تایید می‌کنند. همچنین، برای کنترل زاویه قدرت و مهار سطح ولتاژ پایانه ژنراتورها بطور همزمان، پایدارسازهای مرتبه- کسری پیشنهادی در قالب یک ساختار ترکیبی تست شده‌اند. مزیت اساسی طراحی‌های کنترلی این فصل علاوه بر مکانیزم‌های تطبیقی و تحلیل‌های پایداری ارایه شده: بدست آوردن پایدارسازهایی با درجه آزادی بیشتر است که امکان رسیدن به گستره وسیعی از جواب‌های مطلوب (پاسخ سریع، لرزش کم، دقت ردیابی زیاد) را فراهم می‌کنند.

با توجه به تجربه‌ای که در حین این کار تحقیقاتی کسب کردیم، ذکر این نکته ضروری است که بکارگیری هر نوع کنترل‌کننده مرتبه- کسری بر روی سیستم‌های مرتبه- صحیح لزوما به جواب بهتری نسبت به کنترل‌کننده مرتبه- صحیح منجر نخواهد شد. حتی ممکن است پاسخ سیستم حلقه-بسته بدتر شده و بار محاسباتی اضافه‌ای به سیستم تحمیل شود. زیرا ممکن است جوابهای بهینه کنترل‌کننده مرتبه- کسری به ازای αای نزدیک به مقادیر صحیح حاصل شود، در این حالت نیازی به بکارگیری آن کنترل‌کننده مرتبه- کسری نخواهد بود و باید کنترل‌کننده دیگری پیشنهاد شود. البته تشخیص این امر به راحتی امکان‌پذیر نبوده و به عوامل زیادی از قبیل: ابعاد سیستم، میزان غیرخطی بودن و پیچیده‌گی سیستم و ... بستگی دارد که با شبیه‌سازی یا کاربردهای عملی قابل تشخیص خواهد بود.

۸-۲- پیشنهادها

برای تحقیقات آتی، موارد زیر می‌توانند راهگشا باشند:

۱- توسعه تحلیل‌های پایداری سیستم‌های مرتبه- کسری بر پایه معیار پایداری لیاپانوف: با توجه به سرراست نبودن محاسبه مشتقات مرتبه- کسری ($D^{\alpha}V(\bullet)$ و $D^{1-\alpha}V(\bullet)$) در روش مستقیم لیاپانوف مرتبه- کسری و حل نشدن کامل مسئله پایداری، نیاز مبرمی به توسعه تحلیل‌های پایداری بر مبنای روش لیاپانوف احساس می‌شود. البته همانطور که در فصل سوم اشاره شد، مقالات پایداری متنوعی در پنج سال گذشته برای سیستم‌های مرتبه- کسری غیرخطی ارایه شده‌اند. لیکن هنوز مسئله پایداری این سیستم‌ها بطور کامل حل نشده است. همچنین، برخی از مقالات مطرح شده نیز دارای اشکالات جزئی بوده و نیازمند نگاهی عمیق‌اند.

۲- جایگزینی شروط $\left|{}_{C}D^{1-\alpha}L(\bullet)\right|<\psi$ **با شرطی مناسب:** با توجه به اینکه تحقق شرط $\left|{}_{C}D^{1-\alpha}L(\bullet)\right|<\psi$ در مقایسه با شرط $\left|L(\bullet)\right|<\psi$ مشکل‌تر است، باید سراغ روش طراحی رفت که این شرط را تعدیل نماید. در این رساله، برای حل این مشکل از تقریبگرهای فازی-تطبیقی استفاده شده است. اما در حالتی که این تقریبگرها بکارگرفته نشوند، مشکل همچنان پابرجا خواهد بود. (لازم به ذکر است که این مشکل در طراحی‌هایی که برحسب مشتق RL اند رخ نداده است). این امر با پیشنهاد کنترل‌کننده‌های جدید یا بکارگیری روش‌های پایداری متفاوت امکان‌پذیر خواهد بود.

۳- توسعه مفهوم شرایط اولیه در سیستم‌های مرتبه- کسری با مشتق RL : همانطور که قبلا اشاره شد، به دلیل گنگ بودن مفهوم شرایط اولیه در سیستم‌های مرتبه- کسری با مشتق RL امکان مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی بر پایه این مشتق کاهش می‌یابد. این امر توسعه تحلیل‌های تئوری بر پایه مشتق RL را محدود می‌سازند، در حالی که برخی از ویژگی‌های متفاوت مشتق RL نسبت به مشتق Caputo در طراحی‌های کنترلی بسیار موثراند (پاراگراف قبلی تاییدی بر یکی از قابلیت‌های

مشتق RL است). در مطالعات آتی، در صورتی که بتوان مشتقی با ویژه‌گی‌های مشتق RL و بدون مشکل شرایط اولیه پیشنهاد نمود، تحول مهمی در مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌های مرتبه- کسری رخ خواهد داد.

۴- توسعه و کاربرد عملی کنترل کننده‌های پیشنهادی بر روی سیستم‌های مختلف: به عنوان مثال، با توجه به تمرکز این رساله بر روی طراحی پایدارسازهای مد لغزشی مرتبه- کسری و رسیدن به نتایج مطلوب، همین روند را می‌توان برای طراحی کنترل‌کننده‌های ولتاژ از نوع مرتبه- کسری نیز طی نمود.

۵- طراحی یک جعبه‌ابزار جامع برای پیاده‌سازی مشتقات مرتبه- کسری: با توجه به بکارگیری روش‌های عددی و جعبه‌ابزارهای مختلف در تقریب دینامیک‌های مرتبه- کسری، نیاز مبرمی به طراحی یک جعبه‌ابزار جامع در محیط MATLAB احساس می‌شود. در صورت پیشنهاد چنین جعبه‌ابزاری، اعتبار نتایج بدست آمده بالا بود و امکان مقایسه بین روش‌های پیشنهادی تسهیل خواهد شد.

فهرست منابع

[1] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue and V. Feliu, Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications. Springer-Verlag, London, 2010.
[2] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. Academic Press, New York, 1999.
[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, 2006.
[4] M. E. Fouda and A. G. Radwan, "On the fractional-order memristor model," Journal of Fractional Calculus and Applications, vol. 4, no. 1, pp. 1-7, Jan, 2013.
[5] Y. Luo, Y. Q. Chen and Y. Pi, "Experimental study of fractional order proportional derivative controller synthesis for fractional order systems," Mechatronics, vol. 21, pp. 204–214, 2011.
[6] A. G. Radwan, "Stability analysis of the fractional-order RLC circuit," Journal of Fractional Calculus and Applications, vol. 3, no. 1, pp. 1-15, Jul, 2012.
[7] I. Petras and R. L. Magin, "Simulation of drug uptake in a two compartmental fractional model for a biological system," Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 16, pp. 4588-4595, 2011.
[8] N. Laskin, "Fractional market dynamics," Physica A, vol. 287, pp. 482–492, 2000.
[9] B. Y. Datsko and V. V. Gafiychuk, "Chaotic dynamics in Bonhoffer–van der Pol fractional reaction–diffusion system," Signal Processing, vol. 91, no. 3, pp. 452–460, March, 2011.
[10] J. Sabatier, M. Cugnet, S. Laruelle, S. Grugeon, B. Sahut, A. Oustaloup, and J. M. Tarascon, "A fractional order model for lead-acid battery crankability estimation," Commun.Nonlinear Sci Numer Simul, vol. 15, pp. 1308–1317, 2010.
[11] M. Rivero, J. J. Trujillo, L. Vàzquez and M. P. Velasco, "Fractional dynamics of populations," Appl. Math. Comput, vol. 218, pp. 1089–1095, 2011.
[12] I. S. Jesus and J. A. T. Machado, "Fractional control of heat diffusion systems," Nonlinear Dynamics, vol. 54, pp. 263–282, 2008.
[13] M. R. Rapaic and Z. D. Jelicic, "Optimal control of a class of fractional heat diffusion systems," Nonlinear Dynamics, vol. 62, pp. 39–51, 2010.
[14] M. A. Ezzat, "Theory of fractional order in generalized thermoelectric MHD," Appl Math Model, vol. 35, pp. 4965–4978, 2011.
[15] M. Ö. Efe, "Fractional order systems in industrial automation-A survey," IEEE Trans on Industrial Informatics, vol. 7, no. 4, November, 2011.
[16] A. Oustaloup, La Commade CRONE: Commande Robuste d'Ordre Non Entier. Hermes, Paris, 1991.
[17] A. Oustaloup, F. Levron, F. Nanot, et al, "Frequency band complex non integer differentiator : characterization and synthesis," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 47, no. 1, pp. 25–40, 2000.
[18] I. Podlubny, "Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers," IEEE Transactions on Automatic Control, 44, pp. 208–214, 1999.
[19] Y. Q. Chen, I. Petras and D. U. Xue, "Fractional Order Control - A Tutorial," American Control Conference, USA, pp. 1397-1411, June, 2009.
[20] Y. Q. Chen, "Ubiquitous fractional order controls?," Proceedings of the second IFAC workshop on fractional differentiation and its applications, 2006.
[21] J.J.E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, NJ Prentice-Hall, 1991.
[22] K. D. Young, V. I. Utkin and U. Uzguner, "A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control," IEEE Trans. On Control System Technology, vol. 7, no. 3, pp. 328-342, 1999.

[23] S. Islam and X. P. Liu, "Robust sliding mode control for robot manipulators," IEEE Trans on Industrial Electronics, vol. 58, no. 6, pp. 2444-2453, 2011.

[24] S. C. Tan, Y. M. Lai and C. K. Tse, "General design issues of sliding mode controllers in DC–DC converters," IEEE Trans. Ind. Electron.,vol. 55, no. 3, pp. 1160–1174, 2008.

[25] N. Yagiz, Y. Hacioglu and Y. Taskin, "Fuzzy sliding mode control of active suspensions," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 55, no. 11, pp. 3883–3890, 2008.

[26] S. S. Majidabad, H. T. Shandiz, "Discrete-time based sliding-mode control of robot manipulators," International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics, vol. 5, no. 3, 2012.

[27] D. Valerio, "Introducing fractional sliding mode control," II Encontro de Jovens Investigadores do LAETA, Porto, April, 2012.

[28] M. S. Tavazoei and M. Haeri, "Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller," Physica A, vol. 387, pp. 57–70, 2008.

[29] S. H. Hosseinnia, R. Ghaderi, A. Ranjbar, M. Mahmoudian and S. Momani, "Sliding mode synchronization of an uncertain fractional order chaotic system," Computers and Mathematics with Applications, vol. 59, pp. 1637-1643, 2010.

[30] Z. Wang, "Synchronization of an uncertain fractional-order chaotic system via backstepping sliding mode control," Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013. http://dx.doi.org/10.1155/2013/732- 503.

[31] M. P. Aghababa, "Robust stabilization and synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller," Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 17, pp. 2670–2681, 2012.

[32] H. Chen, W. Chen, B. Zhang and H. Cao, "Robust Synchronization of Incommensurate ractional-Order Chaotic Systems via Second-Order Sliding Mode Technique," Journal of Applied Mathematics, 2013. http://dx.doi.org/10.1155/2013/ 321253.

[33] C. Yin, S. Dadras, S. M. Zhong and Y. Q. Chen, "Control of a novel class of fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control approach," Applied Mathematical Modelling, vol. 37, pp. 2469–2483, 2013.

[34] A. Pisano, M. Rapaic, Z. Jelicic and E. Usai, "Sliding mode control approaches to the robust regulation of linear multivariable fractional-order dynamics," International Journal of Robust Nonlinear Control, vol. 20, no. 18, pp. 2045-2056, 2010.

[35] T. Binazadeh and M. H. Shafiei, "Output tracking of uncertain fractional-order nonlinear systems via a novel fractional-order sliding mode approach," Mechatronics, 2013. http://dx.doi.org/10.-1016/j.mechatron -ics.2013.04.009.

[36] S. Dadras and H. R. Momeni, "Passivity-based fractional-order integral sliding-mode control design for uncertain fractional-order nonlinear systems," Mechatronics, vol. 23, no. 7, pp. 880-887, 2013.

[37] M. Ö. Efe, "Fractional order sliding mode control with reaching law approach," Turk J Elec Eng & Comp Sci, vol. 18, no. 5, 2010.

[38] M. Ö. Efe, "A sufficient condition for checking the attractiveness of a sliding manifold in fractional order sliding mode control," Asian Journal of Control, vol. 15, no. 4, pp. 1-5, July, 2013.

[39] M. P. Aghababa, "No-chatter variable structure control for fractional nonlinear complex systems," Nonlinear Dynamics. vol. 73, pp. 2329–2342, 2013.

[40] M. P. Aghababa, “Finite-time chaos control and synchronization of fractional-order nonautonomous chaotic (hyperchaotic) systems using fractional nonsingular terminal sliding mode technique” Nonlinear Dynamics, vol. 69, pp: 247-261, 2012.

[41] M. P. Aghababa, “A novel terminal sliding mode controller for a class of non-autonomous fractional-order systems,” Nonlinear Dynamics, vol. 73, pp: 679-688, 2013.

[42] M. Ö. Efe, “Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm,” IEEE Trans on Syatems, Man, and Cybernetics—Part B, vol. 38, pp. 1561-1570, 2008.

[43] B. T. Zhang, Y. G. Pi and Y. Luo, “Fractional order sliding-mode control based on parameters auto-tuning for velocity control of permanent magnet synchronous motor,” ISA Transactions 2012. http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2012.04.006.

[44] Y. Tang, X. Zhang, D. Zhang, G. Zhao and X. Guan, “Fractional-order sliding mode controller design for antilock braking systems,” Neurocomputing, 2012. http://dx.doi.org/10.1016/j.neucom.2012.12.019.

[45] Y. H. Chang, C. Wu, H. C. Chen, C. W. Chang and H. W. Lin, “Fractional-order Integral sliding-mode flux observer for sensorless vector-controlled induction motors,” American Control Conference, San Francisco, USA, 2011.

[46] M. P. Aghababa, “A fractional-order controller for vibration suppression of uncertain structures,” ISA Transactions, 2013. http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra .2013.07.010.

[47] C. Yin et al, “Adaptive minimum energy cognitive lighting control: Integer order vs fractional order strategies in sliding mode based extremum seeking” Mechatronics, 2013. http://dx.doi.org/10.1016/j .mechatronics.2013.09.004.

[48] R. Melicio, V.M.F. Mendes and J.P.S Catalao, “Fractional-order control and simulation of wind energy systems with PMSG/full-power converter topology,” Energy Conversion and Management, vol. 51, pp. 1250–1258, 2010.

[49] S. Dadras and H. R. Momeni, “Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty,” Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 17, pp. 367-377, 2012.

[50] M. P. Aghababa, “A switching fractional calculus-based controller for normal non-linear dynamical systems,” Nonlinear Dynamics, vol. 75, pp: 577-588, 2014.

[51] Y. Guo, D. J. Hill and Y. Wang, “Nonlinear decentralized control of large-scale power systems,” Automatica, vol. 36, pp. 1275–1289, 2000.

[52] W. Al-Gherwi, H. Budman and A. Elkamel, “Selection of control structure for distributed model predictive control in the presence of model errors,” Journal of Process Control, vol. 20, pp. 270-284, 2010.

[53] M. Zhu and Y. Li, “Decentralized adaptive fuzzy sliding mode control for reconfigurable modular manipulators,” International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 20, pp. 472-488, 2010.

[54] J. Lunze, Feedback Control of Large-Scale Systems. Prentice Hall International (UK) Ltd, 1992.

[55] H. Yousef, E. El-Madbouly, D. Eteim and M. Hamdy, “Adaptive fuzzy semi-decentralized control for a class of large-scale nonlinear systems with unknown interconnections,” International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 16, pp. 687-708, 2006.

[56] H. Yousef, M. Hamdy, E. Madbouly, “Robust adaptive fuzzy semi-decentralized control for a class of large-scale nonlinear systems using input–output linearization

concept," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 20, pp. 27-40, 2010.
[57] A. N. Venkat, Distributed Model Predictive Control: Theory and Applications. Ph.D. Thesis, University of Wisconsin–Madison, 2006.
[58] B. T. Stewart, S. J. Wright and J. B. Rawlings, "Cooperative distributed model predictive control for nonlinear systems," Journal of Process Control, vol. 21, pp. 698–704, 2011.
[59] T. P. Zhang and C. B. Feng, "Decentralized adaptive fuzzy control for large-scale nonlinear systems," Fuzzy Sets and Systems, vol. 92, pp. 61-70, 1997.
[60] Y. S. Huang and D. Q. Zhou, "Decentralized adaptive output feedback fuzzy controller for a class of large-scale nonlinear systems," Nonlinear Dynamics, vol. 65, pp. 85-101, 2010.
[61] T. Li, R. Li and J. Li, "Decentralized adaptive neural control of nonlinear interconnected large-scale systems with unknown time delays and input saturation," Neurocomputing, vol. 74, pp. 2277-2283, 2011.
[62] X. Xiaohao, W. Yaohua and H. Wenhu, "Variable-structure control approach of decentralised model-reference adaptive systems," IEE Proceedings, vol. 137, no. 5, Sep, 1990.
[63] X. G. Yan, S. K. Spurgeon and C. Edwards, "Decentralized Output Feedback Sliding Mode Control of Nonlinear Large-Scale Systems with Uncertainties," Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 119, pp. 597-614, 2003.
[64] X. G. Yan, C. Edwards, S. K. Spurgeon and J. A. M. Bleijs, "Decentralised sliding-mode control for multimachine power systems using only output information," IEE Proc-Control Theory Appl, vol. 151, no. 5, pp. 627-635, 2004.
[65] K. C. Hsu, "Decentralized variable structure control design for uncertain large-scale systems with series nonlinearities," International Journal of Control, vol. 68, no. 6, pp. 1231–1240, 1997.
[66] K. K. Shyu, W. J. Liu and K. C. Hsu, "Decentralised variable structure control of uncertain large-scale systems containing a dead-zone," IEE Proc-Control Theory Appl, vol. 150, no. 5, September, 2003.
[67] C. H. Chou and C. C. Cheng, "A Decentralized Model Reference Adaptive Variable Structure Controller for Large-Scale Time-Varying Delay Systems," IEEE Trans on Automatic Control, vol. 48, pp. 1213-1217, 2003.
[68] C. C. Cheng and Y. Chang, "Design of decentralised adaptive sliding mode controllers for large-scale systems with mismatched perturbations," International Journal of Control, vol. 81, pp. 1507–1518, 2008.
[69] W. J. Liu, "Decentralized control for large-scale systems with time-varying delay and unmatched uncertainties," Kybernetika, vol. 47, no. 2, pp. 285–299, 2011.
[70] F. Da, "Decentralized sliding mode adaptive controller design based on fuzzy neural networks for interconnected uncertain nonlinear systems," IEEE Trans on Neural Networks, vol. 11, pp. 1471-1480, 2000.
[71] D. Lin and X. Wang, "Observer-based decentralized fuzzy neural sliding mode control for interconnected unknown chaotic systems via network structure adaptation," Fuzzy Sets and Systems, vol. 161, pp. 2066-2080, 2010.
[72] J. Li, J. G. Lu and Y. Q. Chen, "Robust decentralized control of perturbed fractional-order linear interconnected systems," Computers and Mathematics with Applications, vol. 66, pp. 844–859, 2013.

[73] L. Jianyu, "Robust resilient controllers synthesis for uncertain fractional-order large-scale interconnected system," Journal of the Franklin Institute, vol. 351, pp. 1630–1643, 2014.

[74] T. C. Lin, T. Y. Lee, "Chaos synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with time delay based on adaptive fuzzy sliding mode control," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 19, pp. 623–635, 2011.

[75] T. C. Lin, T. Y. Lee, V. E. Balas, "Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems," Chaos, Solitons & Fractals, vol. 44, pp. 791–801, 2011.

[76] M. S. Tavazoei, "Comments on "Chaos Synchronization of Uncertain Fractional-Order Chaotic Systems With Time Delay Based on Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control," IEEE Transactions Fuzzy Systems, vol. 20, pp. 993–995, 2012.

[77] Z. Wang, X. Huang, H. Shen, "Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode," Neurocomputing, , vol. 83, pp. 83–88, 2012

[78] I. Petras, Fractional-Order Nonlinear Systems Modeling, Analysis and Simulation. Springer, 2011.

[79] V. Daftardar-Gejji and A. Babakhani, "Analysis of a system of fractional differential equations," J. Math. Anal. Appl, vol. 293, pp. 511-522, 2013.

[80] L. Kexue, P. Jigen, "Laplace transform and fractional differential equations," Applied Mathematics Letters, vol. 24, pp. 2019–2023, 2011.

[81] C. Li, W. Deng, "Remarks on fractional derivatives," Applied Mathematics and Computation. vol. 187, pp. 777–784, 2007.

[82] C. Li, D. Qian, and Y. Q. Chen, "On Riemann-Liouville and Caputo Derivatives," Hindawi Publishing Corporation, Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011. doi:10.1155/2011/562494.

[83] M. S. Tavazoei, "On type number concept in fractional-order systems," Automatica, vol. 49, pp. 301–304, 2013.

[84] N. Heymans, I. Podlubny, "Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives," Rheol Acta, vol. 45, pp. 765–771, 2006.

[85] V. E. Tarasov, "No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative," Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013. http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns .2013.04.001.

[86] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud and J. A. Gallegos, "Lyapunov Functions for Fractional Order Systems," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.022.

[87] M. Ishteva, R. Scherer, L. Boyadjiev, "on the Caputo operator of fractional calculus and C-Laguerre Functions," Math. Sci. Res. J. vol. 9, pp. 161–170, 2005.

[88] Y. Li, Y. Q. Chen, I. Podlubny, "Mittag-Leffler stability of fracti-onal order nonlinear dynamic systems," Automatica, vol. 45, pp. 1965-1969, 2009.

[89] Y. Li, Y. Q. Chen, I. Podlubny, "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability," Computers and Mathematics with Applications, vol. 59, pp. 1810-1821, 2010.

[90] L. D. Zhao, J. B. Hu, J. Fang, W.B. Zhang, "Studying on the stability of fractional-order nonlinear system," Nonlinear Dynamics, vol. 70, pp. 475-479, 2012.

[91] X. F. Zhou, L. G. Hu, S. Liu, W. Jiang, "Stability criterion for a class of nonlinear fractional differential systems," Applied Mathematics Letters, vol. 28, pp. 25–29, 2014.

[92] X. F. Zhou, Q. Huang, W. Jiang, “A note on the stability criterion for a class of nonlinear fractional differential systems,” Applied Mathematics Letters, 2014. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2013.12.012.
[93] D. Matignon, “Stability results on fractional differential equations with applications to control processing,” Proceedings of Computational Engineering in Systems and Application Multi-conference, IMACS, IEEE-SMC, pp. 963-968, 1996.
[94] C. P. Li, F. R. Zhang, “A survey on the stability of fractional differential equations,” European Physical Journal, vol. 193, pp. 27-47, 2011.
[95] J. Sabatier, M. Moze, C. Farges, “LMI stability conditions for fractional order systems,” Computers and Mathematics with Applications, vol. 59, pp. 1594-1609, 2010.
[96] D. Qian, C. Li, R. P. Agarwal, P. J. Y. Wong, “Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative,” Mathematical and Computer Modelling, vol. 52, pp. 862-874, 2010.
[97] F. Zhang, C. Li, “Stability Analysis of Fractional Differential Systems with Order Lying in (1, 2),” Advances in Difference Equations, 2011. doi:10.1155/2011/ 213485.
[98] M. S. Tavazoei, M. Haeri, “A note on the stability of fractional order systems,” Mathematics and Computers in Simulation, vol. 79, pp. 1566-1576, 2009.
[99] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, Third editiond, Prentice Hall, 2002.
[100] Y. Li, Y. Q. Chen, I. Podlubny, Y. Cao, “Mittag-Leffler Stability of Fractional Order Nonlinear Dynamic Systems,” In Proceedings of the 3rd IFAC workshop on fractional differentiation and its applications, 2008.
[101] P. Kundur, Power System Stability and Control. McGraw Hill, 1994.
[102] J. Machowski, J. W. Bialek, and J. R. Bumby, Power System Dynamics and Stability. John Wiley & Sons, 2008.
[103] Y. Wang, Y. Guo, D. J. Hill, “Robust Decentralized Nonlinear Controller Multimachine Power Systems,” Automatica, vol. 33, pp. 1725–1733, 1997.
[104] K. Jung, K. Y. Kim, T. W. Yoon, and G. Jang, “Decentralized Control for Multimachine Power Systems with Nonlinear Interconnections and Disturbances,” International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 3, pp. 270-277, 2005.
[105] R. Yan, Z. Y. Dong, T. K. Saha, and R. Majumder, “A power system nonlinear adaptive decentralized controller design,” Automatica, vol. 46, pp. 330–336, 2010.
[106] A. G. Loukianov, “Robust Block Decomposition Sliding Mode Control Design,” Mathematical Problems In Engineering, vol. 8, pp. 349-365, 2002.
[107] A. G. Loukianov, B. C. Toledo, and S. Dodds, “Robust stabilization of a class of uncertain system via block decomposition and VSC,” International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 12, pp. 1317-1338, 2002.
[108] W. Perruquetti and J. P. Barbot, Sliding Mode Control in Engineering. Marcel Dekker Inc., 2002.
[109] X. Yu and O. Kaynak, “Sliding-Mode Control with Soft Computing: A Survey,” IEEE Trans. On Industrial Electronics, vol. 56, no. 9, September, 2009.
[110] N. F. Al-Muthairi and M. Zribi, “Sliding mode control of a magnetic levitation system,” Mathematical Problems in Engineering, vol. 2004, pp. 93-107, February, 2004.

[111] B. Bandyopadhyay, F. Deepak and K. S. Kim, Sliding Mode Control Using Novel Sliding Surfaces. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009

[112] A. Pisano, M. Rapaic, Z. Jelicic and E. Usai, " Nonlinear fractional PI control of a class of fractional-order systems," IFAC Conference on Advances in PID Control, Brescia, March, 2012.
[113] C. S. Chiu, "Derivative and integral terminal sliding mode control for a class of MIMO nonlinear systems," Automatica, vol. 48, pp. 314-326, 2012.
[114] L. X. Wang, A Course in Fuzzy System and Control. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1997.
[115] D. Valério, Ninteger v.2.3 fractional control toolbox for MATLAB. 2005. <http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm>.
[116] A. G. Loukianov, J. M. Cañedo, V. I. Utkin, J. Cabrera-Vázquez, " Discontinuous controller for power systems: Sliding-mode block control approach," IEEE Trans. Ind. Electron, vol. 51, pp. 340–353, 2004.
[117] J. Cabrera-Vázquez, A. G. Loukianov, J. M. Cañedo, V. I. Utkin, "Robust controller for synchronous generator with local load via VSC," Electr Power Energy Syst, vol. 29, pp. 348–359, 2007.
[118] H. Huerta, A. G. Loukianov, J. M. Cañedo, "Multimachine Power-System Control:Integral-SM Approach," IEEE Trans on Industrial Electronics, vol. 56, pp. 348–359, 2009.
[119] H. Huerta, A. G. Loukianov, J. M. Cañedo, "Decentralized sliding mode block control of multimachine power systems," Electr Power Energy Syst, vol. 32, pp. 1-11, 2010.
[120] A. C. Vega, J. Leon-Morales, L. Fridman, O. S. Pena, M. T. Mata-Jimenez, " Robust excitation control design using sliding-mode technique for multimachine power systems," Electr Power Syst Research, vol. 78, pp. 1627–1634, 2008.
[121] S. Benahdouga, D. Boukhetala, F. Boudjema, "Decentralized high order sliding mode control of multimachine power systems," Electr Power Energy Syst, vol. 43, pp. 1081–1086, 2012.
[122] J. F. Vargas, G. Ledwich, "Variable structure control for power systems stabilization," Electr Power Energy Syst, vol. 32, pp. 101–107, 2010.
[123] C. W. Chung, Y. Chang, "Design of a sliding mode controller for decentralised multi-input systems," IET Control Theory Appl, vol. 5, pp. 221-230, 2011.
[124] M. I. Alomoush, "Load frequency control and automatic generation control using fractional-order controllers," Electrical Engineering, vol. 91, pp. 357-368, 2010.
[125] Y. Guo, D. J. Hill, Y. Wang, "Global Transient Stability and Voltage Regulation for Power Systems," IEEE Trans on Power Systems, vol. 16, pp. 678-688, 2001.
[126] A. E. Leon, J. A. Solsona, M. I. Valla, "Comparison among nonlinear excitation control strategies used for damping power system oscillations," Energy Conversion and Management, vol. 53, pp. 55-67, 2012.

پیوست الف

تبدیل کنترل بلوکی غیرخطی (NBC)

در پیوست حاضر، توضیح مختصری از تبدیل کنترل بلوکی غیرخطی (NBC) برگرفته از مراجع [۱۰۶-۱۰۷] بیان شده است.

تبدیل NBC

سیستم غیرخطی شامل عدم‌قطعیت و اغتشاش زیر را در نظر بگیرید [۱۰۶-۱۰۷]:

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u(t) + \Delta f(x,t) + D(x,t)w(t) \tag{۱}$$

در رابطه فوق $x \in X \subset R^n$، $u \in U \subset R^m$ و $w \in W \subset R^s$. تابع f، و ستون‌های B و D نگاشت‌های نرم از کلاس $C^{\infty}_{[t,\infty)}$، همچنین فرض می‌شود که $f(0,t) = \Delta f(0,t) = 0$. نگاشت نامعلوم $\Delta f(x,t)$ نشان دهنده عدم‌قطعیت‌های مدل و $w(t)$ بردار اغتشاشات خارجی است. اینک فرم- NBC متشکل از r- بلوک را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{gathered}\dot{x}_i = f_i(x_1,\ldots,x_i,t) + B_i(x_1,\ldots,x_i,t)x_{i+1} + \Delta f_i(x,t)(x_1,\ldots,x_i,t) + D_i(x_1,\ldots,x_i,t)w(t) \\ i = 1,\ldots,r-1\end{gathered} \tag{۲}$$

$$\dot{x}_r = f_r(x_1,\ldots,x_r,t) + B_r(x_1,\ldots,x_r,t)u(t) + \Delta f_r(x_1,\ldots,x_r,t) + D_r(x_1,\ldots,x_r,t)w(t) \tag{۳}$$

که در آن x_i برداری با ابعاد $n_i \times 1$ است. در هر بلوک، بردار x_{i-1} به عنوان بردار ورودی کنترل مجازی[1] لحاظ شده و داریم:

$$rank(B_i) = n_i, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0 \tag{۴}$$

در عبارت فوق، اعداد صحیح $(n_1, n_2, ..., n_r)$ اندیس‌های کنترلی سیستم (۱) بوده و دارای شرایط $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ و $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r \leq m$ می‌باشند.

[1] Fictitious control or virtual control

در ادامه، تبدیل غیرخطی متغیرهای حالت که ترم‌های نامی معادله (۲) را خطی می‌نماید، توصیف می‌گردد. با در نظر گرفتن حالت x_{i+1}، $i=1,\dots,r-1$ به عنوان بردار کنترل مجازی بلوک i ام در معادله (۲)، روش تبدیل در مراحل زیر تشریح می‌گردد:

مرحله ۱: قانون کنترل مجازی x_2 در رابطه (۲) را به فرم زیر انتخاب کنید:

$$x_2 = B_1^{+}(z_1,t)\left(-f_1(z_1,t)+k_1 z_1 + E_{1,1} z_2\right) \qquad (۵)$$

ماتریس B_1^{+} نشانگر شبه- معکوس از راست ماتریس B_1، $z_1 = x_1$، z_2 بردار متغیرهای جدید با ابعاد $n_2 \times 1$، k_1 یک اسکالر مثبت دلخواه، $E_{1,1} \in R^{n_1 \times n_2}$، $E_{1,1} = [I_{n_1} \quad 0]$.

بلوک اول تبدیل شده رابطه (۲) در مختصات جدید z_1، z_2 و ورودی (۵)، به صورت زیر بدست می-آید:

$$\dot{z}_1 = k_1 z_1 + E_{1,1} z_2 + \Delta f_1(z_1,t) + D_1(z_1,t) w(t) \qquad (۶)$$

اگر ماتریس مربعی

$$\tilde{B}_2(z_1,t) = \begin{bmatrix} B_1(z_1,t) \\ E_{1,2} \end{bmatrix}$$

با $E_{1,2} = [0 \quad I_{n_2-n_1}] \in R^{(n_2-n_1)\times n_2}$، دارای مرتبه n_2 باشد، آنگاه متغیر z_2 از رابطه (۵)، به فرم زیر بدست می‌آید:

$$z_2 = \alpha_1(z_1,x_2,t) = \tilde{B}_2(z_1,t) x_2 + \begin{bmatrix} f_1(z_1,t) - k_1 z_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

مرحله ۲: مشتق (۷)، در راستای مسیر بلوک دوم از رابطه (۲) و (۶)، نتیجه می‌دهد:

$$\dot{z}_2 = \bar{f}_2(z_1,z_2,t) + \overline{B}_2(z_1,z_2,t) x_3 + \Delta\bar{f}_2(z_1,z_2,t) + \overline{D}_2(z_1,z_2,t) w(t) \qquad (۸)$$

در عبارت فوق، $\bar{f}_2(z_1,z_2,t)=(\partial\alpha_1/\partial z_1)(k_1z_1+E_{1,1}z_2)+(\partial\alpha_1/\partial x_2)f_2+\partial\alpha_1/\partial t$ ، $\bar{B}_2=\tilde{B}_2B_2$، $\Delta\bar{f}_2=(\partial\alpha_1/\partial z_1)\Delta f_1+(\partial\alpha_1/\partial x_2)\Delta f_2$ ، $\bar{D}_2=(\partial\alpha_1/\partial z_1)D_1+(\partial\alpha_1/\partial x_2)D_2$. توجه شود که $rank(\bar{B}_2)=rank(B_2)=n_2$.

همانند مرحله اول، بردار ورودی مجازی x_3 در (۸)، به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$x_3=\bar{B}_2^{+}(z_1,z_2,t)\left(-f_2(z_1,z_2,t)+k_2z_2+E_{2,1}z_3\right) \qquad (۹)$$

که در آن z_3 برداری با ابعاد $n_3\times 1$، k_2 اسکالری مثبت، و $E_{2,1}=[I_{n_2}\quad 0]\in R^{n_2\times n_3}$ می‌باشد. بنابراین، ترکیب معادلات (۸) و (۹) همانند معادله (۶) قابل نمایش است، به عبارت دیگر:

$$\dot{z}_2=k_2z_2+E_{2,1}z_3+\Delta\bar{f}_2(z_1,z_2,t)+\bar{D}_2(z_1,z_2,t)w(t) \qquad (۱۰)$$

مشابه مرحله اول، متغیر جدید z_3 از رابطه (۹) به فرم زیر تعیین می‌گردد:

$$z_3=\alpha_2(z_1,z_2,x_3,t)=\tilde{B}_3(z_1,z_2,t)x_3+\begin{bmatrix}\bar{f}_2(z_1,z_2,t)-k_2z_2\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

که در آن ماتریس

$$\tilde{B}_3(z_1,z_2,t)=\begin{bmatrix}\bar{B}_2(z_1,z_2,t)\\ E_{2,2}\end{bmatrix}$$

دارای مرتبه n_3 بوده و $E_{2,2}=[0\quad I_{n_3-n_2}]\in R^{(n_3-n_2)\times n_3}$.

مرحله i: روند مذکور را می‌توان تا مرحله $r-1$ام تکرار نمود ($i=3,\ldots,r-1$).

$$x_{i+1}=\bar{B}_i^{+}(z_1,\ldots,z_i,t)\left(-\bar{f}_i(z_1,\ldots,z_i,t)+k_iz_i+E_{i,1}z_{i+1}\right) \qquad (۱۲)$$

که در آن $\bar{B}_i^{+}$ نشان دهنده ماتریس شبه- معکوس از راست ماتریس $\bar{B}_i=\tilde{B}_iB_i$، k_i اسکالری مثبت، و $E_{i,1}=[I_{n_i}\quad 0]\in R^{n_i\times n_{i+1}}$.

متغیر جدید z_{i+1} نیز از رابطه (۱۲)، به فرم زیر استخراج می‌شود:

$$z_{i+1}=\alpha_i(z_1,\ldots,z_i,x_{i+1},t)=\widetilde{B}_{i+1}(z_1,\ldots,z_i,t)x_{i+1}+\begin{bmatrix}\bar{f}_i(z_1,z_2,t)-k_i z_i\\ 0\end{bmatrix}\qquad i=1,\ldots,r-1 \tag{۱۳}$$

که z_{i+1} برداری با ابعاد $n_{i+1}\times 1$، و $\widetilde{B}_{i+1}=[\overline{B}_i;E_{i2}]$، $E_{i,2}=[0\quad I_{n_{i+1}-n_i}]\in R^{(n_{i+1}-n_i)\times n_{i+1}}$، $\bar{f}_1=f_1$، و $\bar{f}_i$ وابسته به پارامترهای i بلوک‌های قبلی معادله (۲) و بهره‌های کنترلی[1] $k_1,\ldots,k_{i-1}$ است.

در نهایت، معادلات سیستم (۲)-(۳) را می‌توان در مختصات تبدیل شده زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{z}_i=k_i z_i+E_{i,1}z_{i+1}+\Delta\bar{f}_i(z_1,\ldots,z_i,t)+\overline{D}_i(z_1,\ldots,z_i,t)w(t)\qquad i=1,\ldots,r-1 \tag{۱۴}$$

$$\dot{z}_r=\bar{f}_r(z_1,\ldots,z_r,t)+\overline{B}_r(z_1,\ldots,z_r,t)u(t)+\Delta\bar{f}_r(z_1,\ldots,z_r,t)+\overline{D}_r(z_1,\ldots,z_r,t)w(t) \tag{۱۵}$$

که در آن $\Delta\bar{f}_r=\Delta f_r$، $\overline{D}_1=D_1$، و $\Delta\bar{f}_i$ و $\overline{D}_i$ وابسته به پارامترهای i بلوک قبلی از رابطه (۲) و بهره‌های کنترلی $k_1,\ldots,k_{i-1}$ است.

[1] Control gains

پیوست ب

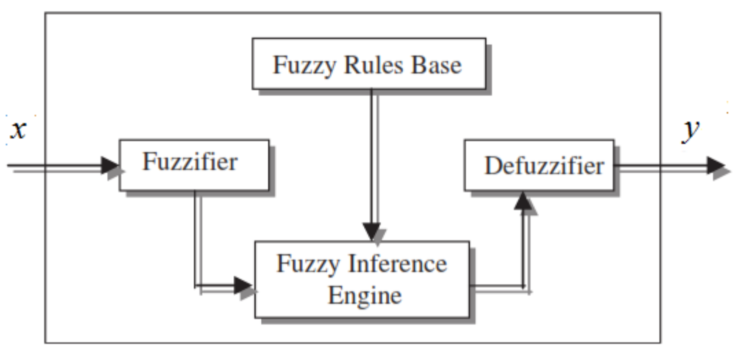
مرور مختصری بر سیستم‌های فازی

در پیوست حاضر، توضیح مختصری از سیستم‌های فازی به عنوان تقریبگرهای عمومی برگرفته از مرجع [۱۱۵] بیان می‌گردد.

ساختار کلی سیستم فازی، متشکل از مجموعه‌ای از قوانین فازی اگر- آنگاه می‌باشد که در شکل ۱ نشان داده شده و به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$Rule\ \ l:\ \ If\ \ x_1\ \ is\ \ F_1^l\ \ and...and\ \ x_p\ \ is\ \ F_p^l\ \ Then\ \ y\ \ is\ \ A^l$$

در عبارت فوق، $X=[x_1,\ldots,x_p]^T\in R^p$ بردار ورودی، $y\in R$ متغیر خروجی نشان دهنده متغیرهای زبانی سیستم فازی، $i=1,2,\ldots,p$ نشان‌دهنده تعداد ورودی‌های سیستم فازی، $l=1,2,\ldots,M$ نشان‌دهنده تعداد قوانین فازی، F_i^l و A^l مجموعه‌های فازی تعریف شده بر روی ورودی‌ها و خروجی می‌باشند.



شکل ۱: شماتیک پایه سیستم فازی.

با بکارگیری موتور استنتاج ضربی، فازی‌ساز منفرد و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز، ارتباط ورودی‌ها و خروجی سیستم فازی به فرم زیر خواهد بود:

$$y(X)=\frac{\sum_{l=1}^{m}y^l\left(\prod_{i=1}^{p}\mu_{F_i^l}(x_i)\right)}{\sum_{l=1}^{m}\prod_{i=1}^{p}\mu_{F_i^l}(x_i)} \qquad (۱)$$

که در آن $\mu_{F_i^l}(x_i)$ و $\mu_{A^l}(y^l)=1$ به ترتیب، توابع عضویت متغیرهای زبانی x_i و y می‌باشند.

با تعریف مفهوم تابع پایه فازی، رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y(X)=\theta^T\xi(X) \tag{۲}$$

که در آن $\theta=\left[y^1,\ldots,y^M\right]^T$ بردار پارامترهای قابل تنظیم و $\xi(X)=\left[\xi^1(X),\ldots,\xi^M(X)\right]^T$ بردار بازگشتی نام داشته و به کمک رابطه (۳) تعریف می‌گردد.

$$\xi^l(X)=\frac{\prod_{i=1}^{p}\mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^{m}\prod_{i=1}^{p}\mu_{F_i^l}(x_i)} \tag{۳}$$

روابط مذکور در پیاده‌سازی ساختارهای تطبیقی- فازی به منظور تقریب توابع غیرخطی، تخمین عدم-قطعیت‌ها و ... بسیار مفیداند.

Abstract

This dissertation deals with designing decentralized fractional-order sliding mode controllers for large-scale nonlinear systems in the presence of uncertainties and interconnections. The proposed controllers are developed for both fractional-order and integer-order large-scale systems. First, two fractional-order large-scale systems with distinctive fractional derivatives are governed by defining two new sliding surfaces with corresponding robust control laws. Also, a multi-machine power system is considered as an integer-order large-scale system, and a robust power system stabilizer with a novel nonlinear sliding surface is suggested. In addition, to keep the synchronism and voltage level of power system, an interesting control scheme is utilized. All of the mentioned controllers are designed under the assumption that the uncertainties and interconnections upper bound is known. However, determining the upper bound in a large-scale system is troublesome. Then in the next step, an adaptive-fuzzy approximator is applied to fix this problem. Since the fuzzy approximator uses the adjacent subsystem variables as its own input, this strategy is known as semi-decentralized fractional-order sliding mode control. For all of the proposed controllers, stability of closed-loop system have been analyzed depend on the sliding surface dynamics by integer-order or fractional-order stability theorems. Finally, comprehensive simulations are carried out to show the effectiveness of the suggested controllers.

Keywords: Large-scale nonlinear systems, Decentralized and Semi-decentralized control strategies, Fractional-order stability, Fractional-order sliding mode control (FOSMC), Nonlinear fractional-order sliding mode control (NFOSMC).

Shahrood University of Technology

Faculty of Electrical and Robotic Engineering

Decentralized fractional-order sliding mode control of large-scale systems

Sajjad Shoja-Majidabad

Supervisor:

Dr Heydar Toosian-Shandiz

September 2014