بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مکانیک
گروه طراحی کاربردی

تعیین بار کمانش یک استوانه جدار نازک تحت بارگذاری محوری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

دانشجو : فرید محبوبی نسرکانی

استاد راهنما :
جناب آقای دکتر ایپک‌چی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۰

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای فرید محبوبی نسرکانی رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تعیین بار کمانش یک استوانه جدار نازک تحت بارگذاری محوری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول که در تاریخ نهم بهمن ماه نود با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸٫۴۲) ☒ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸) ✓

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر ایپک چی	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	-	-	-
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر گردویی	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر شاطر زاده	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر جعفری	استادیار	

رئیس دانشکده : دکتر مهدی قناد کهتویی

تشکر و قدردانی

پس از حمد و سپاس خداوند متعال که در لحظه لحظه‌ی زندگی بهترین راهنما، دوست و یاور زندگی من بوده، در ابتدا از زحمات فراوان استاد عزیزم جناب آقای دکتر ایپک‌چی تشکر می‌کنم که در تمام مراحل تهیه این پایان‌نامه مرا با صبر و حوصله یاری نموده‌اند.

اینجانب فرید محبوبی نسرکانی تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه تماما نتیجه تحقیقات خودم می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده ام. کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه بار کمانش برای یک پوسته استوانه‌ای همگن تحت بار محوری در حالت الاستیک به دست آمده است. معادلات تعادل و پایداری به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و روش انرژی تعیین شده است. روابط کرنش جابجایی بر اساس معادلات فن-کارمن بوده و مساله متقارن محوری است. در نهایت معادلات بی بعد شده تعادل، با کمک تئوری اغتشاشات حل گردیده است، پس از آن معادلات پایداری حل شده و بار کمانش به دست آمده است. علاوه بر آن، حل به دست آمده از معادلات تعادل و پایداری با روش عددی به کمک نرم افزار انسیس مقایسه شده است. در نهایت تاثیر پارامترهای هندسی بر بار کمانش مطالعه شده است. همچنین مقایسه‌ای بین نتایج حل بر اساس تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی صورت گرفته است.

کلمات کلیدی: تحلیل کمانش، روش اجزا محدود، تئوری اغتشاشات، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

فهرست مطالب:

فهرست اشکال:

فهرست جداول:

فصل اول

مبانی تئوری و مرور مقالات

۱-۱)مقدمه:

در این فصل به بررسی رایج‌ترین تئوری‌های موجود در زمینه پوسته‌ها و کمانش آنها پرداخته شده است، معایب و محاسن هر تئوری مطرح شده و فرض‌های تئوری‌ها با یکدیگر مقایسه شده است، همچنین سعی شده است تا حد امکان به طور مختصر و مفید به بررسی مقالات و تحقیق‌هایی که در این زمینه تا کنون انجام شده است، پرداخته شود.

۱-۲)کلیات:

پوسته‌های استوانه‌ای کاربردهای بسیار وسیعی در صنعت دارند، برای مثال در مخازن، کپسول‌ها و... به طور وسیعی کاربرد این نوع پوسته‌ها مشاهده می‌شود. مطالعه بر روی پوسته‌ها به خصوص پوسته استوانه‌ای تاریخچه کهنی دارد به طوری که معادلات پایداری پوسته‌های استوانه‌ای از قبل از سال ۱۸۰۰ موجود بوده است، ولی برای نخستین بار به وسیله لورنز[۱](۱۹۱۱) به طور خاص به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری پرداخته شد، سپس توسط ساوتول[۲](۱۹۱۳) و فن میزز[۳](۱۹۱۴) حل کمانش پوسته تحت فشار یکنواخت جانبی به دست آمد. فلوگه[۴] (۱۹۳۲) به بررسی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری مرکب و همچنین تحت خمش پرداخت و روش‌هایی برای حل ارائه داد. اما چیزی که امروز بیش از هر تئوری و روشی مورد استفاده قرار می‌گیرد بسط روابط ساده‌ای است که برای پایداری استوانه تحت پیچش توسط دانل[۵](۱۹۳۴) و شورین[۶] (۱۹۲۵) ارائه شد. دانل (۱۹۳۴) تئوری غیر خطی پوسته‌های خود را منتشر کرد که بر اساس فرضیات ساده شده‌ی پوسته‌های کم عمق بوده و به دلیل سادگی و دقت به طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در تئوری دانل عوامل زیادی همچون نیروهای اینرسی درون صفحه‌ای[۷]، تغییر شکل‌های برشی و اینرسی‌های دورانی[۸] در نظر گرفته نمی‌شوند و به همین خاطر نتایج این تئوری فقط برای پوسته‌های نازک صادق و از دقت بالایی برخوردار است. از دیگر نواقص این تئوری آن است که، به غیر از یک سری جملات سینماتیک غیر خطی غالب، سایر جملات غیر خطی حذف می‌شوند.

[1] Lorenz
[2] Southwell
[3] Von Mises
[4] Flugge
[5] Donnel
[6] Schwerin
[7] In-Plane Inertia
[8] Rotary Inertia

فن کارمن[1] و تسین[2] (۱۹۴۱) یک مطالعه بر پایه تئوری دانل انجام دادند و تئوری غیر خطی وون کارمن را ارائه دادند. ساندرس[3] (۱۹۶۳) یک تئوری بهبود یافته برای پوسته‌های استوانه‌ای بیان کرد که برای حالت کشش بیان شده بود. همان معادلات توسط کویتر[4] (۱۹۶۶) دوباره تعیین گردید که به همین خاطر به آنها معادلات تئوری ساندرس-کویتر گفته می‌شود. بعدها این روابط در دستگاه منحنی‌الخط نیز فرمول بندی شد، که کاربرد بیشتری داشت. بر اساس تئوری ساندرس-کویتر هر سه جابجایی در معادلات حرکت ظاهر شدند.نقدی و نوردگرن[5] (۱۹۶۳) بر اساس فرضیات کیرشهف تئوری غیر خطی خود را ارائه دادند. در سال ۱۹۸۵ تئوری غیر خطی تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط ردی[6] و چاندراشخارا[7] به منظور کاربرد در پوسته‌های ضخیم لایه‌ای ارائه شد.[۱,۲,۳]

۱-۳)تئوری کمانش تیموشنکو(تئوری کلاسیک پوسته‌ها) [۴]:

تیموشنکو در روش خود برای به دست آوردن بار کمانش در یک پوسته استوانه‌ای که تحت فشار محوری متقارن قرار دارد مقدار جابجایی را در جهت شعاعی به صورت سینوسی در نظر می‌گیرد، در واقع این فرض بر این اساس استوار است که جابجایی‌ها در جهت شعاعی نسبت به محور مرکزی متقارن می‌باشند که تا حدودی صحیح است البته به شرط آنکه تمام شرایط از جمله بارگذاری، هندسه، شرایط مرزی و... همگی متقارن محوری بوده که این خود فرضی ایده آل است و وجود نواقص هندسی در پروفیل پوسته و شرایط محیطی دیگر به راحتی این تقارن را بر هم می‌زنند اما به صورت کلی فرض تقارن به عنوان یک نظریه تئوری تا حدود زیادی به واقعیت نزدیک است و تقریب مناسبی به حساب می‌آید. تیموشنکو در نظریه خود جابجایی شعاعی(W) را به صورت رابطه(۱-۱) در نظر می‌گیرد.

$$\mathrm{w} = -\mathcal{A} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \tag{۱-۱}$$

رابطه اخیر برای جابجایی تنها یک رابطه تقریبی می‌باشد و در حقیقت با واقعیت در مواردی اختلاف زیادی دارد اما با این حال امروزه نیز در بسیاری از مقالات برای تعیین جابجایی‌ها از همین روش استفاده می‌شود. تیموشنکو در ادامه با استفاده از همین جابجایی مقادیر کرنش را به دست آورد، برای به دست آوردن مقدار

[1] Von Karman
[2] Tsien
[3] Sanders
[4] Koiter
[5] Nordgren
[6] Reddy
[7] Chandrashekhara

کرنش‌ها در هنگامی که کمانش رخ داده است فرض می‌کند که مقدار تنش در طول زمان کمانش ثابت باقی می-ماند.

با محاسبه انرژی کرنشی قبل و بعد از کمانش و همچنین محاسبه کار انجام شده توسط نیروی فشاری اعمالی و در نهایت با برابر قرار دادن اختلاف انرژی‌ها و کار انجام شده (روش انرژی) مقدار بار کمانش را به صورت رابطه(۱-۲) به دست می‌آورد. در این رابطه l طول پوسته، h ضخامت و m تعداد نیم موج‌های هر شکل مد پوسته می‌باشد.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{h} = D\left(\frac{m^2\pi^2}{h\ell^2} + \frac{E}{a^2 D}\frac{\ell^2}{m^2\pi^2}\right)(N/m) \qquad (۱-۲)$$

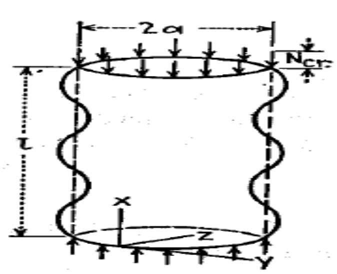
رابطه(۱-۲) نشان دهنده تمامی شکل موج‌های بار کمانش می‌باشد که با کمینه کردن آن نسبت به m می‌توان مقدار بار بحرانی را به صورت رابطه(۱-۳) به دست آورد:

$$\sigma_{cr} = \frac{2}{ah}\sqrt{EDh} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \qquad (۱-۳)$$

که این مقدار در نیم موج زیر اتفاق می‌افتد:

$$\frac{m\pi}{\ell} = \sqrt[4]{\frac{Eh}{a^2 D}} \qquad (۱-۴)$$

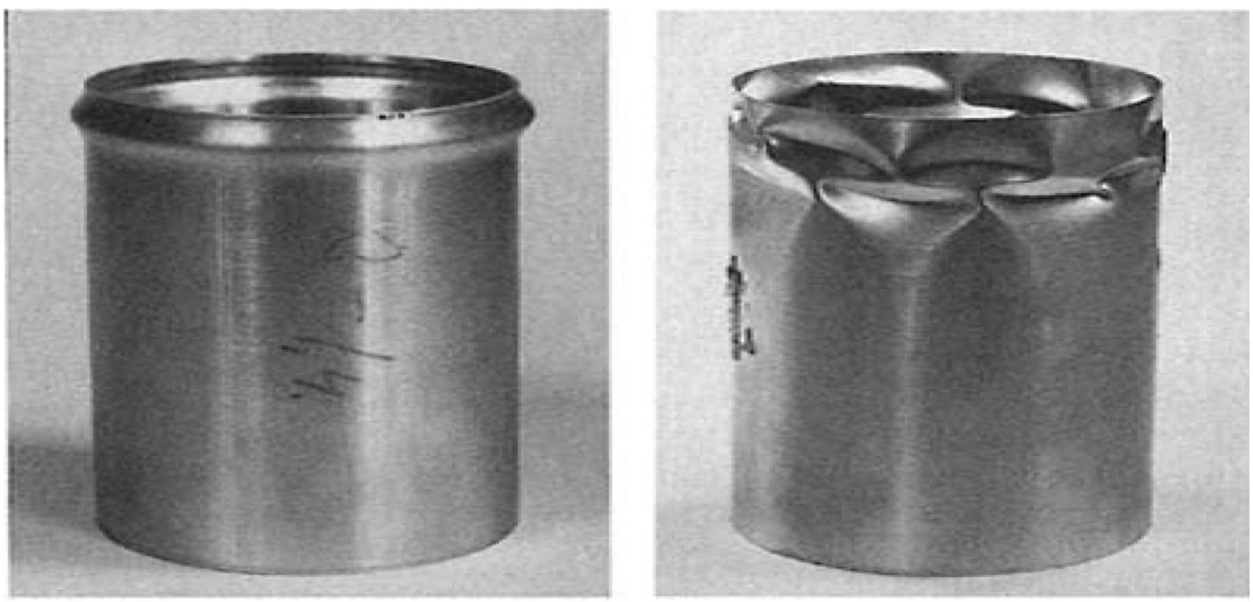
البته تیموشنکو برای به دست آوردن بار بحرانی از روش‌های دیگری نیز استفاده کرده است، برای مثال با استفاده از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر پوسته متقارن رابطه دیگری برای بار بحرانی به دست آورده است که در نهایت نشان داده می‌شود که این دو رابطه به لحاظ کمی دارای مقادیری یکسان هستند. تمامی پارامترهای استفاده شده در روابط اخیر در شکل(۱-۱) که نشان دهنده یکی از شکل مدهای کمانش پوسته تیموشنکو می-باشد مشخص است:



شکل(۱-۱) یکی از شکل مدهای کمانش بر طبق تئوری تیموشنکو[۴]

پس از انجام تست‌های آزمایشگاهی و عملی مشخص شد که تئوری کلاسیک یا تئوری تیموشنکو با واقعیت دارای اختلاف است به خصوص در مواردی که پوسته از نوع نازک بوده، هر چند در پوسته‌های ضخیم نیز این اختلاف مشاهده شده است اما در مواردی نتایج قابل قبول است، برای مثال در شرایط متقارن محوری پاسخ دارای تقریب خوبی می‌باشد. [۵]

آزمایشات تجربی نشان می‌دهد که در پوسته‌های نازک معمولا در هنگام کمانش پوسته به صورت متقارن کمانش نمیکند در حالی که عکس این موضوع راجع به پوسته‌های ضخیم صادق است، شکل(۱-۲). البته باز هم فرض تقارن یک فرض ایده‌آل است که در بسیاری از مقالات برای پوسته‌های با هندسه متقارن و جنس متقارن مناسب و تقریب خوبی به حساب می‌آید.



الف ب

شکل(۱-۲) تاثیر ضخامت بر روی شکل مد کمانش الف-پوسته ضخیم ب-پوسته نازک[۵]

۱-۴) تئوری غیر خطی دانل[۶]:

تئوری و فرضیات دانل از مهمترین و پرکاربردترین تئوری‌هاست که امروزه مرجع بسیاری از مقالات به صورت مستقیم یا غیر مستقیم می‌باشد. در فرضیات دانل در حوزه تغییر مکان‌های کوچک، چرخش‌ها حول محورهای درون صفحه‌ای[1] کوچک فرض شده در نتیجه تمامی سینوس‌ها و کسینوس‌ها در روابط تعادل به ترتیب با خود زاویه و عدد یک جایگزین می‌شوند. عبارات درجه دوم نشان دهنده رابطه غیر خطی بین نیروهای برشی عرضی

[1] In-plane Axial

کوچک و چرخش‌ها، به طور قابل اغماضی کوچک هستند. در فرضیات تعادل با نازک فرض کردن پوسته نیز از مقدار منتجه تنش برشی (Q_θ) در معادلات تعادل در جهت محیطی صرفنظر می‌شود. به طور کلی می‌توان برای تئوری دانل فرضیات زیر را دسته‌بندی کرد:

الف- پوسته بسیار نازک است و ضخامت در مقابل شعاع و طول پوسته بسیار کوچک است.

ب- دامنه و شدت خیز شعاعی(w) هم مرتبه با ضخامت پوسته می‌باشد، یعنی خیز پوسته نیز در مقابل شعاع و طول پوسته بسیار کوچک است.

ج- شیب تغییرات خیز در هر نقطه کوچک است یا عبارت زیر در هر نقطه صادق است:

$$|\frac{\partial w}{\partial \mathrm{x}}| \ll 1, |\frac{\partial \mathrm{w}}{\mathrm{R}\,\partial \theta}| \ll 1$$

د- همه اجزای کرنش کوچک هستند و در نتیجه تمامی فرضیات و تئوری‌های الاستیسیته خطی قابل استفاده می‌باشند.

ه- فرضیات لوو-کیرشهف نیز صادق است، یعنی آنکه مقدار تنش در جهت عمود بر لایه میانی پوسته قابل چشم پوشی بوده و کرنش در این جهت با ضخامت پوسته رابطه خطی دارد و به صورت خطی با ضخامت تغییر می-کند.

و- جابجایی‌ها در راستای طولی و محیطی (uوv) بسیار کوچک بوده و قابل صرفنظر است و در روابط کرنش-جابجایی تمامی ترم‌های غیر خطی بر اساس جابجایی شعاعی (w) می‌باشد.

در اکثر تئوری‌ها بعد از دانل تقریبا تمامی فرضیات دانل به غیر از فرض آخر معمولا رعایت می‌شود که علت آن هم به دست آوردن معادلاتی دقیق و نزدیکتر به واقعیت است و وجود جابجایی‌ها برای بیان دقیق کرنش‌ها در روابط غیر خطی لازم است.

در فرضیات دانل روابط کرنش-جابجایی برای سطح میانی به صورت رابطه(۱-۵) در نظر گرفته می‌شود. که در آن u، v و w به ترتیب جابجایی در راستای طول، محیط و شعاع بوده و x و θ به ترتیب محورهای مختصات در راستای طول و محیط می‌باشند.

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2$$
$$\mathcal{E}_{\theta\theta} = \frac{1}{\mathrm{a}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \theta} + \mathrm{w}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\mathrm{a}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \theta}\right)^2$$
$$\gamma_{\mathrm{x}\theta} = \left(\frac{1}{\mathrm{a}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{1}{\mathrm{a}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \theta} \qquad (۱-۵)$$

روابط بالا شکل ساده شده معادلات دانل-مشتری-والسو می‌باشد که برای دستگاه استوانه‌ای ساده شده است. جایگزینی این روابط در معادلات بنیادین، محاسبه منتجه‌ها و قرار دادن آنها در معادلات تعادل منجر به یک دستگاه با سه معادله دیفرانسیل غیر خطی بر حسب متغیرهای u و v و w می‌شود که به آن معادلات غیر خطی دانل گفته می‌شود.

معادلات دیگری نیز وجود دارد که با همان فرضیاتی که در ابتدا گفته شد با حذف همه عبارت‌های مرتبه دوم و بالاتر u و v و w به دست می‌آیند که به آنها معادلات خمشی خطی دانل می‌گویند و این معادلات که تشکیل یک دستگاه سه معادله و سه مجهول می‌دهند در رابطه(۱-۶) آورده شده است. با تعریف یک تابع تنش می‌توان دستگاه را به دو معادله و دو مجهول تبدیل کرد که این نیز یک دستگاه خطی می‌باشد. اگر در روابط زیر مقدار سختی خمشی صفر باشد معادلات غشایی مربوط به پوسته‌ها حاصل می‌شود. در رابطه زیر P بار خارجی می‌باشد.

$$\nabla^4 u = -\frac{\nu}{a} w_{,xxx} + \frac{1}{a^3} w_{,x\theta\theta}$$
$$\nabla^4 v = -\frac{2+\nu}{a^2} w_{,xx\theta} - \frac{1}{a^4} w_{,\theta\theta\theta}$$
$$D\nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{a^2} C w_{,xxxx} = \nabla^4 p \qquad (۱-۶)$$

شکل غیر خطی معادلات تعادل به صورت رابطه(۱-۷) می‌باشد که به طور وسیعی برای تعیین تغییر مکان‌های بزرگ پوسته‌های استوانه‌ای استفاده می‌شود:

$$a N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} = 0$$
$$a N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} = 0$$
$$D\nabla^4 w + \frac{1}{a} N_\theta - \left(N_x w_{,xx} + \frac{2}{a} N_{x\theta} w_{,x\theta} + \frac{1}{a^2} N_\theta w_{,\theta\theta}\right) = p \qquad (۱-۷)$$

در روابط بالا جمله‌های N همگی منتجه‌های تنش می‌باشند که بر حسب جابجایی‌ها به صورت رابطه(۱-۸) تعریف می‌شوند:

$$N_x = C(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta)$$
$$N_\theta = C(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x)$$
$$N_{x\theta} = C\frac{1-\nu}{2}\gamma_{x\theta}$$
$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \qquad (۸-۱)$$

۱-۵)تئوری غیر خطی فلوگه- لور- بایرن[1] [۲]:

در این تئوری فرض آخر در تئوری دانل حذف می‌شود. در این تئوری تمامی جابجایی‌ها بر حسب جابجایی صفحه میانی تعریف می‌شوند. روابط کرنش- جابجایی برای صفحه میانی به صورت رابطه(۱-۹) بیان می‌شود.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{a\partial\theta} + \frac{w}{a} + \frac{1}{2a^2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v\right)^2\right\} + \frac{1}{a^2}\left\{\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v\right) + w_0\left(w + \frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right\}$$
$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{a\partial\theta} + \frac{1}{a}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x}w_0\right\} \qquad (۹-۱)$$

در تمامی روابط بالا w_0 تعریف ریاضی نواقص هندسی می‌باشد. در واقع نواقص هندسی نوعی پیش‌بینی سوراخ، حفره و یا هر نوع نقص در پروفیل پوسته است و منجر به کاهش مقاومت پوسته در برابر بارگذاری می‌شود.

۱-۶)تئوری غیر خطی ساندرس-کویتر[۲]:

در این تئوری نیز مانند تئوری فلوگه از فرضیه آخر دانل صرفنظر می‌شود. از کرنش‌های برشی عرضی صرفنظر و روابط کرنش جابجایی برای صفحه میانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{a\,\partial\theta}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{a\partial\theta} + \frac{w}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{a\partial\theta} - \frac{v}{a}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u}{a\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w_0}{a\partial\theta}\left(\frac{\partial w}{a\partial\theta} - \frac{v}{a}\right)$$
$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial u}{a\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{a\partial\theta} - \frac{v}{a}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{a\partial\theta} - \frac{v}{a}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{a\partial\theta} \qquad (۱۰-۱)$$

بر طبق این تئوری تغییرات پیچش و انحنا به صورت خطی می‌باشد.

---
[1] Flugge-Lure-Byrne

۱-۷)تئوری غیر خطی دانل برای پوسته‌های کم عمق[1][۲]:

به طور کلی اصطلاح کم عمق به پوسته‌هایی گفته می‌شود که شیب در مقایسه با شعاع انحنای آنها کوچک باشد. در واقع این تئوری یک توسعه و یا رشد برای تئوری دانل می‌باشد، مانند تئوری دانل نیروهای اینرسی درون صفحه‌ای قابل چشم پوشی بوده، از تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی چرخشی نیز صرفنظر می‌شود. در این تئوری فرض(ه) در تئوری دانل را در نظر نگرفته و در نتیجه از منتجه‌های تنش در جهت عمود بر صفحه میانی (Q_θ و Q_x) صرفنظر نمی‌شود. سایر منتجه‌ها با رابطه(۱-۱۱) تعریف می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
N_x &= C\left\{-\frac{\nu w}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{a\,\partial \theta}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\nu}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right\}\\
N_\theta &= C\left\{-\frac{w}{a}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{a\,\partial \theta}\right)^2+\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right\}\\
N_{x\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left\{\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\\
M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{a^2\,\partial \theta^2}\right)\\
M_\theta &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{a^2\,\partial \theta^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
M_{x\theta} &= -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x a\,\partial \theta}\\
D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}
\end{aligned}
\qquad (۱-۱۱)
$$

Q_θ و Q_x بر حسب روابط بالا به دست می‌آیند.[۲]

۱-۸)مرور مقاله‌ها:

ان جی و لام [۷](۱۹۹۹) به بررسی پایداری یک پوسته استوانه‌ای لایه‌ای پرداخته‌اند. آنها از سه تئوری دانل، لاو و فلوگه استفاده کرده‌اند. پوسته تحت بارگذاری مرکب ثابت و پریودیک محوری قرار دارد. ناپایداری دینامیک در پوسته‌های استوانه‌ای که تحت بارگذاری پریودیک قرار دارند شامل چهار نوع می‌شود: تشدید پارامتری مرتبه اول، تشدید پارامتری مرتبه‌ی بالا،مجموع ترکیب تشدیدها و تفاضل ترکیب تشدیدها. ناپایداری در پوسته زمانی رخ می‌دهد که یک رابطه بین فرکانس‌های طبیعی پوسته و همچنین فرکانس تحریک بار محوری باشد. دو نوع اول ناپایداری با نام تشدید پارامتری مستقیم و دو نوع دوم با نام تشدید پارامتری مرکب، معمولا شناخته می-

[1] Shallow Shells

شوند. معادلات پایداری با هر سه تئوری به دست می‌آید و سپس برای نوع اول نا پایداری با استفاده از روش عددی نواحی ناپایداری رسم شده است. در این مقاله اثر استهلاک ویسکوز نادیده گرفته شده است. با رسم نمودارهای مختلف تاثیر پارامترهای گوناگون همچون نسبت طول به شعاع یا نسبت شعاع به ضخامت بر پایداری پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان نشان داده می‌شود که نواحی ناپایداری به دست آمده به وسیله تئوری‌های فلوگه و لاو دارای انطباق بسیار خوبی بوده ولی نواحی به دست آمده برای تئوری دانل اختلاف تقریبا زیادی با دو تئوری دیگر دارد به طوری که برای نوع اول ناپایداری، ناحیه ناپایدار به دست آمده از تئوری دانل حدود ۷.۵-۸ درصد بزرگتر از نواحی به دست آمده از تئوری فلوگه و لاو است.

کای و همکاران[۸](۲۰۰۲) تاثیر نقص هندسی را بر مقاومت کمانشی یک پوسته استوانه‌ای نازک تحت بارگذاری محوری متمرکز مورد بررسی قرار داده‌اند. تفاوت عمده این تحقیق با دیگر کارهای انجام شده در این زمینه در نوع بارگذاری آن بر روی سازه می‌باشد، به این ترتیب که در این مقاله بار فشاری محوری به صورت متمرکز وارد می شود. در این مقاله نقص هندسی به صورت یک تورفتگی در وسط پوسته در نظر گرفته شده است. روش کار، تحلیل با نرم افزار ABAQUS است.

ژیو و همکاران[۹](۲۰۰۲) سعی کرده‌اند با بررسی رفتار کمانشی یک پوسته، تناقض موجود بین تئوری و تجربه را برطرف سازند. این تناقض مربوط به رابطه تنش بحرانی با توان ضخامت در مسئله کمانش است. در روابط کلاسیک نشان داده می‌شود که تنش بحرانی رابطه مستقیم با ضخامت(t) دارد. ولی در آزمایش‌های تجربی دیده می‌شود که این تنش با توان سه دوم ضخامت($t^{3/2}$) رابطه مستقیم دارد. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد در نظر گرفتن عواملی مانند نقص‌های هندسی، وزن خود پوسته واستفاده از تئوری کلاسیک می‌تواند باعث ایجاد اختلاف در پاسخ شود.

هانت و همکاران [۱۰](۲۰۰۳) به معرفی یک روش جدید برای پیش‌بینی تعداد موج‌های کمانش پوسته استوانه‌ای نازک تحت بار محوری پرداخته‌اند. برای بررسی صحت این تئوری، تعداد موج‌های پیش بینی شده توسط تئوری با تعداد امواج حاصل از حل عددی و تجربی مقایسه شده است.

خملیچی و همکاران [۱۱](۲۰۰۴) کمانش پوسته استوانه‌ای الاستیک را با در نظر گرفتن نقص هندسی متقارن با روش تحلیلی بررسی کرده‌اند. بارگذاری به صورت یک فشار یکنواخت خارجی در راستای محور پوسته می‌باشد. برای به دست آوردن معادله حاکم از مدل فن کارمن-دانل استفاده شده و با استفاده از روش گالرکین این معادلات با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. برای توصیف نقص هندسی از مدل

ریاضی رابطه(۱-۱۲) استفاده شده است، این مدل توانایی توصیف هر گونه نقصی شامل نواقص متمرکز، گسترده و... را دارد و شکل کلی آن به صورت زیر است.

$$\bar{w}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{a}_0(\mathrm{x}) + \mathrm{a}_1(\mathrm{x})\cos(\frac{\mathrm{ny}}{\mathrm{R}}) \qquad (۱-۱۲)$$

در رابطه بالا، a_0 و a_1 توابع اختیاری از مختصات طولی x، n یک عدد صحیح و R شعاع صفحه میانی پوسته می‌باشد. در این مقاله ، ابتدا بار کمانش برای پوسته کامل، بررسی شده و سپس برای پوسته با نقص هندسی که با عبارت ساده شده بالا بیان می‌شود راه حل تحلیلی ارایه می‌شود. در قسمت اول بار بحرانی، همان بار بحرانی کلاسیک می‌باشد و به صورت رابطه(۱-۱۳) بیان می‌شود.

$$\lambda_{cr} = \frac{\mathrm{Eh}}{\mathrm{R}\sqrt{3(1-\nu^2)}} \qquad (۱-۱۳)$$

در رابطه بالا h، E، ν و R به ترتیب ضخامت، مدول یانگ، ضریب پواسون و شعاع صفحه میانی پوسته می‌باشند. این پاسخ با مقادیر واقعی اختلاف زیادی دارد، نشان داده می‌شود که مقدار بار بحرانی از این مقدار کمتر است. در مرحله بعد با در نظر گرفتن نقص هندسی پاسخ به صورت رابطه(۱-۱۴) در نظر گرفته شده و بار بحرانی نیز به صورت تابعی از دامنه نقص هندسی به دست می‌آید و مقدار m در این رابطه با یک برنامه عددی محاسبه می‌شود و یک مینیمم سازی نسبت به n صورت می‌گیرد.

$$\mathrm{w} = \zeta_1 \sin\frac{\mathrm{m}\pi\mathrm{x}}{2\mathrm{l}}\cos\frac{\mathrm{ny}}{\mathrm{R}} \qquad (۱-۱۴)$$

برای بررسی صحت پاسخ، جوابهای به دست آمده با چندین کار تجربی موجود مورد مقایسه قرار گرفته است.

کاردومتیس و سیمیتسس[۱۲](۲۰۰۵) به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته استوانه‌ای بلند ساندویچی تحت فشار خارجی پرداخته و یک راه حل الاستیسیته برای آن ارائه داده‌اند. مسئله به صورت سه بعدی و ماده پوسته ارتوتروپیک است. همچنین بارگذاری به صورت یک فشار هیدرواستاتیک بوده که در زمان کمانش نیز به صورت عمود بر روی سطح خمیده حاصل از کمانش باقی می ماند. در این مقاله از دو دیدگاه ضریب تصحیح برشی مورد مقایسه قرار گرفته است. یکی با توجه به هسته، و دیگری بر اساس لایه‌های تشکیل دهنده بیرونی و نشان داده شده که پیش بینی‌های حاصل از تئوری کلاسیک پوسته‌ها که در آن ضریب تصحیح برشی اعمال نشده است بسیار غیر محافظه کارانه و دور از واقعیت است ولی اگر در همین نتایج(تئوری کلاسیک پوسته‌ها) ضریب تصحیح برشی اعمال شود پاسخ‌ها بسیار نزدیک به واقعیت شده و تقریب بهتری را خواهد داد. در نهایت اهمیت تاثیر برش عرضی بر روی بار بحرانی در این مقاله نشان داده شده است.

روابط کرنش-جابجایی در این مقاله به صورت خطی در نظر گرفته شده و برای هر لایه از پوسته روابط جابجایی به صورت رابطه(۱-۱۵) است که u ، v وw به ترتیب جابجایی در راستای شعاعی، محیطی و طولی می‌باشند.

$$u_i(r,\theta) = U_i(r)cosn\theta \,, v_i(r,\theta) = V_i(r)sin\, n\theta \,, w_i(r,\theta) = 0 \,, i = f_1, c, f_2 \qquad (۱-۱۵)$$

در رابطه بالا f_1، f_2 و c به ترتیب نشان دهنده سطح داخلی، بیرونی و هسته، پوسته می‌باشند.

بررسی رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای فولادی با ضخامت متغیر توسط آقاجری و همکاران[۱۳](۲۰۰۶) انجام شد. ایشان بارگذاری را به صورت یک فشار یکنواخت خارجی در نظر گرفته‌اند. روش حل در این تحقیق،حل عددی و بررسی تجربی است. فشار خارجی با یک پمپ خلا بر روی پوسته ایجاد شده است. به منظور تصدیق دقت پاسخ‌های به دست آمده از مدل اجزا محدود و نتایج حاصل از روش عددی تعیین شده از تحلیل فروپاشی غیر خطی اجزا محدود[۱]،جوابها با نتایج به دست آمده از بررسی تجربی مقایسه شده است،که نشان داده می شود نتایج حاصل بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و همچنین می توان از این مدل اجزا محدود با در نظر گرفتن رفتار غیر خطی هندسی برای تحلیل رفتار کمانشی پوسته‌ها استفاده کرد.

یکی دیگر از نتایج این تحقیق اثبات این موضوع می باشد که در صورت کوچک بودن تغییرات ضخامت پوسته در طول آن، مد کمانشی در تمام طول پوسته قابل ایجاد شدن می‌باشد و برای پوسته با تغییرات ضخامت زیاد مد کمانشی تنها در نواحی نازکتر ظاهر می‌شود،که این موضوع با واقعیت کاملا تطابق دارد. بر اساس نظر مولف، ضخامت متغیر خود نیز نوعی نقص هندسی در شکل پوسته می‌باشد که تاثیر آن در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است.

لی و باترا[۱۴](۲۰۰۶) به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته که از سه لایه تشکیل شده است، پرداخته‌اند. لایه بیرونی و درونی این پوسته از یک جنس و از نوع همگن[۲] و همسانگرد[۳] می‌باشند و لایه وسط آن از جنس مواد FG بوده که ناهمگن و همسانگرد هستند و مدول الاستیسیته آن به صورت سهمی از مدول ورق داخلی در طول ضخامت ورق تا مدول لایه بیرونی تغییر می‌کند. ضریب پواسون[۴] نیز در لایه میانی ثابت است. برای به دست آوردن معادلات حاکم بر پوسته از تئوری فلوگه استفاده شده است. پوسته تحت فشار محوری یکنواخت و گسترده قرار دارد، رابطه کرنش جابجایی خطی بوده و تمام پارامترهای جابجایی به غیر از جابجایی در راستای شعاعی، بر حسب جابجایی‌های لایه میانی نوشته می‌شوند و جابجایی شعاعی با جابجایی شعاعی لایه میانی برابر

[1] Nonlinear Finite Element Collapse Analysis
[2] Homogeneous
[3] Isotropic
[4] Poisson Ratio

است(بر اساس فرضیات تئوری کلاسیک پوسته‌ها). با در نظر گرفتن پاسخ مثلثاتی برای جابجایی‌ها که شرایط مرزی مسئله را ارضا می‌کنند، به یک معادله جبری برای به دست آوردن بار کمانش رسیده است، برای حل معادله جبری حاصل از روش عددی تکرار نیوتن استفاده شده است.

کراسووسکی و کاستیرکو[۱۵](۲۰۰۷) به بررسی تجربی کمانش یک پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری محوری پرداخته‌اند. مهمترین تفاوت این کار با دیگر مقالات در این زمینه، وجود تقویت‌کننده‌هایی[1] در روی پوسته به شکل نوارهای عمودی می‌باشد. در این مقاله تاثیر پارامترهایی همچون طول پوسته، تعداد نوارهای تقویت کننده، موقعیت آنها و شرایط مرزی پوسته بر روی بار کمانش مورد بررسی قرار گرفته است.

قربانپور و همکاران[۱۶](۲۰۰۷) به بررسی کمانش پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری با استفاده از روش انرژی با وجود هسته الاستیک در داخل پوسته پرداخته‌اند. در استخراج معادلات از فرضیات کویتر استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد وجود هسته الاستیک باعث افزایش پایداری پوسته می‌شود و بار کمانش افزایش می‌یابد.

نجفی‌زاده و حیدری[۱۷](۲۰۰۸) به بررسی رفتار کمانشی یک ورق دایره‌ای FGM پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه به دست آمده و خواص ماده در راستای ضخامت تغییر می‌کند. برای به دست آوردن بار کمانش ابتدا با حل معادلات تعادل نیروهای مکانیکی تعیین شده‌اند. سپس معادلات پایداری بر حسب رابطه‌ی منتجه‌ها و جابجایی‌ها مرتب شده است. با تلفیق این معادلات یک معادله یک مجهول به دست آمده است که مجهول همان خیز ورق می‌باشد. با حل معادله پاسخ بر حسب توابع بسل تعیین شده است.

پاپاداکیس[۱۸](۲۰۰۸) یک عبارت ریاضی برای بار بحرانی در یک پوسته استوانه‌ای ضخیم تعیین و این عبارت را با بار بحرانی به دست آمده از تئوری کلاسیک مقایسه کرده است. در این مقاله آثار برش عرضی و تغییرات غیر خطی تنش‌ها و کرنش‌ها نیز در محاسبات لحاظ می‌شوند. در این تحقیق بارگذاری به صورت یک فشار هیدرواستاتیک خارجی می‌باشد. مسئله به صورت دو بعدی، کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته می‌شود و تنها جابجایی‌ها در دو جهت شعاعی و محیطی مد نظر است. عبارت مربوط به جابجایی‌ها به صورت مجموع دو قسمت تعریف می‌شود، اول قسمتی که معرف جابجایی در مرحله تعادل استاتیکی است و دوم قسمتی که معرف مرحله شروع کمانش است و با یک ضریب بسیار کوچک (ε) همراه شده است. در انتهای این مقاله نشان داده

[1] Stiffeners

می‌شود که پاسخ تئوری کلاسیک با دقیقترین پاسخ ارائه شده توسط این مقاله کمتر از ۱۵درصد اختلاف دارد وبرای زمانیکه نسبت h/R کوچک می‌شود (پوسته نازک است) پاسخ تئوری کلاسیک تقریب مناسبی به حساب می‌آید.

یکی از کارهای تحلیلی انجام شده در زمینه کمانش پوسته ها تحقیق عبدالمولا[۱۹] (۲۰۰۸) می باشد. آنها در مقاله خود به بررسی کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای با پارامتر بسیار بزرگ بتدور(Z=l^2/(Rh)*√(1-ν^2))[۱]، تحت فشار خارجی پرداخته اند. یک تحلیل مجانبی[۲]، برای تعیین اثرات شرایط مرزی بر روی بار کمانش و همچنین شکل مدهای کمانش صورت گرفته است. در این تحلیل معکوس پارامتر بتدورف به عنوان پارامتر کوچک اپسیلون در نظر گرفته شده است. ابتدا با یک ساده سازی و حذف جمله های غیر خطی پاسخی برای بار کمانش به دست آمده است. بار دیگر با استفاده از روش تحلیلی تئوری اغتشاشات به حل معادله دقیقتر پرداخته و صحت پاسخ مرحله قبل همراه با دقت جوابها مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین نشان داده شده که شکل کمانش پوسته استوانه‌ای دارای تغییرات بیشتری در جهت محیطی نسبت به طول پوسته می‌باشد: در حالتی که نسبت طول به شعاع پوسته خیلی بزرگ نباشد. در این مقاله برای استخراج معادلات از تئوری غیر خطی دانل استفاده کرده است.

زیانگ وشن شن[۲۰] (۲۰۰۸) در کار خود بر روی یک پوسته استوانه‌ای مرکب[۳] تحت پیچش و بار محوری متمرکز شده‌اند. پوسته مورد نظر دارای یک نقص هندسی اولیه می باشد، معادلات بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها و همچنین روابط سینماتیک غیر خطی فن-کارمن و دانل[۴] به دست آمد است. برای به دست آوردن بار کمانش از تئوری اغتشاشات استفاده شده است.شرایط مرزی در دو لبه به صورت تکیه گاه ساده[۵] یا گیر دار[۶] می باشد. بار کمانش برای دو حالت پیچش و فشار مجزا به دست آمده و با پاسخهای به دست آمده از حل تجربی در مقالات دیگر،مورد مقایسه قرار گرفته اند.

هوانگ و هانگ[۲۱](۲۰۰۹) به بررسی رفتار غیر خطی و الاستیک، کمانش و پس از کمانش پوسته FG[۷] تحت بارگذاری فشار محوری پرداخته است. معادلات به لحاظ جنس ماده خطی بوده و قوانین هوک و معادلات

[1] Batdorf Parameter

[2] Asymptotic Analysis
[3] Composite
[4] Von Karman-Donnell
[5] Simply Supported
[6] Clamped
[7] Functionally Graded

رفتاری خطی بر مسئله حاکم است اما به لحاظ هندسی رفتار ماده غیر خطی بوده و در معادلات سینماتیکی مسئله، عبارت‌های غیر خطی ظاهر می‌شود. در این مقاله بر اساس تئوری غیر خطی دانل معادلات، استخراج و با استفاده از روش انرژی ریتز مراحل تحلیل صورت گرفته است. تمامی خواص ماده(مدول یانگ، ضریب پواسون و...)تابعی توانی از ضخامت پوسته (Z) می‌باشند. همچنین در این مقاله تاثیرات تغییر دما بر روی رفتار ماده مورد بررسی قرار گرفته است. دما نیز به صورت تابعی از ضخامت بیان شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش دما مقدار بار کمانش کاهش می‌یابد.

بررسی کمانش و پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای FGM تحت پیچش در یک محیط حرارتی توسط شن[۲۲](۲۰۰۹) انجام شده است. خواص پوسته تابعی از دما بوده و میدان حرارتی به صورتی در نظر گرفته شده که دما فقط در جهت ضخامت دارای تغییرات باشد. خواص ماده تشکیل دهنده پوسته نیز در جهت ضخامت تغییر کرده و تابع قانون ساده توانی است. معادله حاکم بر سیستم از در نظر گرفتن روابط غیر خطی سینماتیک فن کارمن-دانل و همچنین تئوری مرتبه بالا تغییر شکل برشی به دست آمده است و در آنها نواقص هندسی اولیه و همچنین روابط غیر خطی سینماتیکی پیش از کمانش نیز لحاظ شده است. با استفاده از تکنیک اغتشاشات بار کمانش و مسیرهای تعادل پس‌کمانش به دست آمده‌اند.

هین لیونگ و همکاران[۲۳](۲۰۰۹) در کار خود به بررسی رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت فشار خارجی پرداخته‌اند. برای حل با استفاده از روش تئوری اغتشاشات و روش گالرکین-باب نوف[1] یک بسط مجانبی برای پاسخ به دست آمده، همچنین با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یک حل تحلیلی عددی نیز ارائه شده و در پایان با کارهای دیگر در این زمینه مقایسه انجام شده است.

در ابتدا برای حل، نیروها، کرنش‌ها و جابجایی‌ها را به صورت دو بخشی در نظر گرفته‌اند که شامل بخشی قبل از کمانش و بخشی بعد از کمانش است، به عبارت دیگر برای این پارامترها یک نمو در نظر گرفته شده است که برابر با اختلاف دو بخش مذکور می‌باشد. همچنین برای پارامترهایی چون جابجایی شعاعی و ممان چرخشی در مرحله پیش از کمانش مقدار صفر در نظر گرفته می‌شود که به عبارت دیگر به آن معناست که مقدار نمو برابر با مقدار همان پارامتر در مرحله پس از کمانش است. روابط سینماتیک با فرض خیز کوچک، خطی در نظر گرفته شده‌اند و از آنجاییکه جنس پوسته نیز الاستیک و خطی است در نتیجه معادلات حاکم خطی می‌باشند. شرایط مرزی به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است و دو پارامترخیز و تابع تنش به صورت توابعی تعریف

[1] Bubnov-Galerkin Method

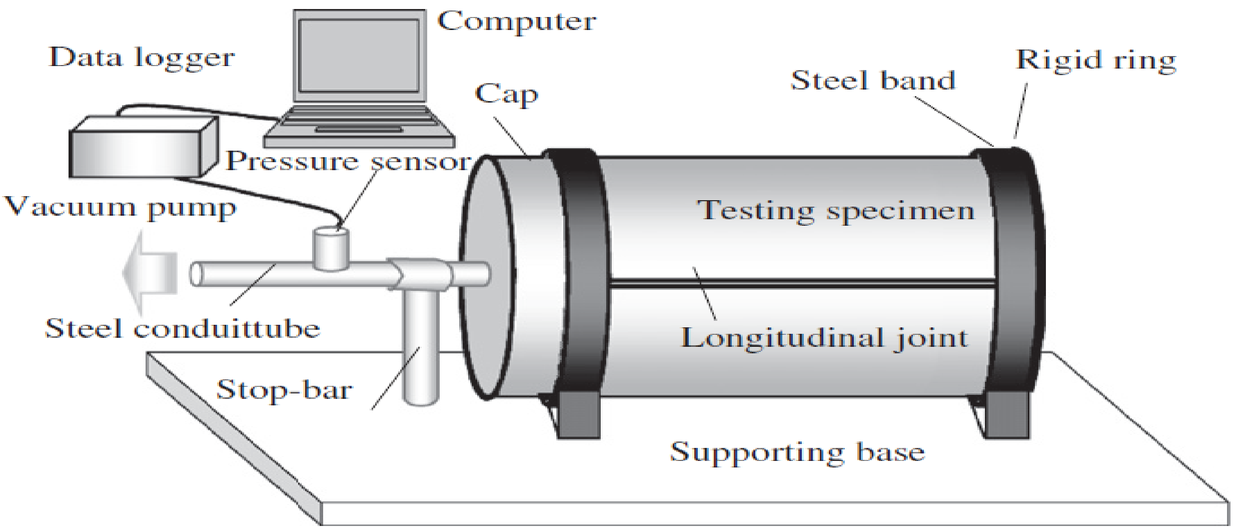
شده‌اند که این شرایط مرزی را ارضا کنند. با تعریف توابع مناسب برای این دو پارامتر و جایگذاری آنها در معادلات حاکم، معادلات تبدیل به دو معادله دیفرانسیل معمولی می‌شوند. از معادله اول که تنها بر حسب تابع تنش است به کمک تئوری اغتشاشات تابع تنش به دست آمده است. سپس با استفاده از روش گالرکین در معادله دوم و همچنین تعریف به دست آمده برای تابع تنش به یک مسئله مقدار ویژه رسیده است که از حل آن مقدار بار بحرانی محاسبه شده است. در پایان نتایج برای پوسته با ضخامت ثابت با نتایج مقالات دیگر مورد مقایسه قرار گرفته که نشان دهنده صحت و دقت پاسخ‌ها می‌باشد.

مین لی و کیون لین[۲۴](۲۰۱۰) در کار خود به بررسی رفتار غیر خطی کمانشی پوسته غیر همسانگرد لایه‌ای[1] استوانه‌ای تحت بارگذاری خارجی غیر یکنواخت پرداخته‌اند. پوسته قادر به تحمل تغییر شکل برشی بوده و یک فشار هیدرواستاتیک غیر یکنواخت خارجی به پوسته وارد می‌شود. هر لایه از پوسته به صورت الاستیک خطی و غیر همسانگرد در نظر گرفته شده است. معادله حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و همچنین روابط سینماتیک غیر خطی فن کارمن-دانل بوده و معادلات حاصل، شامل کوپلینگ کشش-پیچش، کشش-خمش و خمش-پیچش است. از فرضیات دیگر مقاله نقص هندسی اولیه و تغییر شکل‌های غیر خطی در مرحله پیش‌کمانش می‌باشد. مدل ریاضی نقص اولیه هندسی به شکل اولین مد کمانشی پوسته در نظر گرفته شده است. با تعریف یک تابع تنش به جای منتجه‌های تنش و دو پارامتر چرخش، حول محورهای طولی و محیطی معادلات حاکم به صورت چهار معادله غیر خطی و چهار مجهول که شامل سه مجهول مذکور و جابجایی شعاعی پوسته می‌باشد به دست آمده است. شرایط مرزی در دو لبه به صورت تکیه گاه ساده یا گیردار در نظر گرفته شده است، پس از نوشتن شرایط مرزی مسئله بی‌بعد شده و دستگاه معادلات به صورت بی‌بعد نوشته می‌شود. برای حل معادلات از تکنیک اغتشاشات استفاده شده است و به کمک آن فشار بحرانی و مسیرهای تعادل پس-کمانش به صورت تحلیلی به دست آمده است. با روش عددی نیز معادلات حل شده و نتایج با نتایج چند مقاله دیگر مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به طور موثری پیش‌بینی‌های مربوط به بار کمانش را نسبت به تئوری کلاسیک بهبود بخشیده است.

وانگ و کویزومی[۲۵](۲۰۱۰) به بررسی عددی و تجربی رفتار کمانشی یک پوسته تحت فشار خارجی که دارای مفصل‌های طولی می‌باشد پرداخته‌اند. هدف تاثیر مفصل و ابعاد هندسی در رفتار کمانشی پوسته است، مفصل ها به سه دسته صلب، نیمه صلب و شکل پذیر تقسیم می‌شوند که برای ایجاد آنها از جوش خالص و کامل و جوش موضعی و پیچیدن لبه‌ها به یکدیگر استفاده شده است. فشار خارجی یکنواخت به کمک یک پمپ

[1] Anisotropic Laminated shell

خلا انجام شده است و با توجه به اینکه بارگذاری در اینجا فقط در راستای عرضی مد نظر است، با استفاده از تکنیک خاصی اثرات بارهای طولی حذف شده است. به این ترتیب که درابتدا یک طرف پوسته با یک حلقه، بسته و آببندی شده است. سپس پوسته در طرف دیگر به کمک یک مجرای آببندی شده به یک پمپ خلا وصل شده است که مجهز به یک متوقف کننده[1] می‌باشد که به نوعی یک سوپاپ یک‌طرفه نیز می‌باشد. شماتیک آزمایشگاهی پوسته در شکل(۱-۳) مشاهده می‌شود.



شکل(۱-۳) شماتیک آزمایشگاهی پوسته

کرنش سنج‌ها و جابجایی سنج‌ها در وسط پوسته قرار گرفته‌اند. از یک پیزوالکتریک برای اندازه گیری فشار استفاده شده است. تمامی اطلاعات توسط یک ضبط کننده اطلاعات[2] ثبت می‌شود تا زمانی که کمانش رخ دهد. نتایج حاصل از کمانش در یک جدول دسته‌بندی شده است که برای برخی از نمونه‌ها کمانش در دو مرحله و دو شکل مد انجام شده و در برخی از نمونه‌ها به علت ناکافی بودن فشار و بارگذاری اصلا کمانش رخ نداده است. نتایج نشان می‌دهد که مفصل های مختلف نه تنها روی شکل مد کمانش بلکه روی مقدار بار کمانش هم اثر می‌گذارد. همچنین مقدار فشار بحرانی با افزایش سفتی خمشی مفصل، افزایش می‌یابد یا به عبارت دیگر افزایش صلبیت مفصل مقاومت پوسته را افزایش می‌دهد و پوسته در فشارهای بالاتری کمانش می‌کند. برای حل عددی از یک نرم افزار المان محدود استفاده شده است.

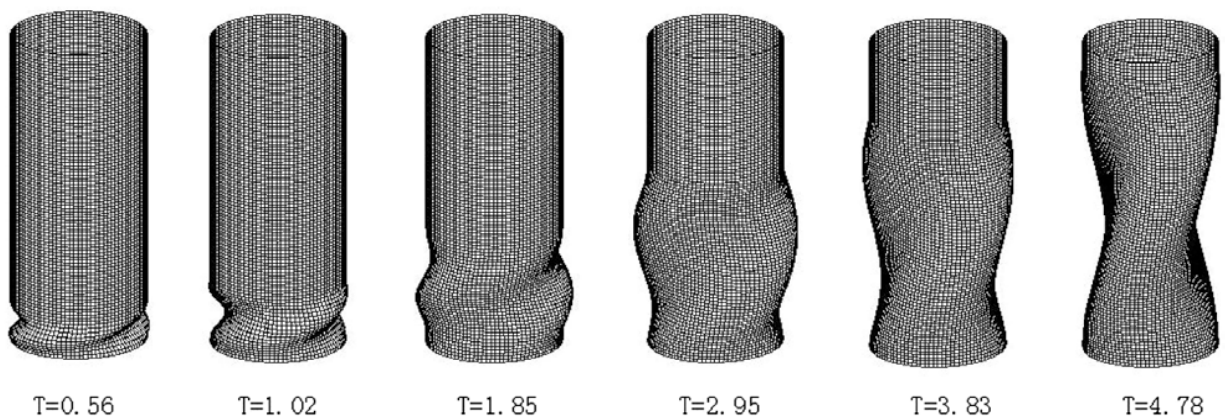
[1] Stop-Bar
[2] Data Logger

هوتچینسون[۲۶](۲۰۱۰) به بررسی و تعریف فاکتورهای شکست[1] در کمانش پوسته‌های استوانه‌ای و کروی پرداخته است. این فاکتورها نوعی ضریب کاهنده است که به جای اعمال اثر نواقص هندسی ظاهر می‌شود. نواقص هندسی به صورت معادلاتی ریاضی در معادلات حاکم ظاهر می‌شوند ولی ضرایب شکست با ضرب در مقدار بار بحرانی به دست آمده از تئوری کمانش، مقدار بار بحرانی کاهش یافته را به دست می‌دهند. ضریب شکست برای پوسته استوانه‌ای نازک تحت فشار محوری یکنواخت قرار دارد و همچنین برای پوسته کروی تحت فشار دو محوری یکسان، مقداری کمتر از ۰/۲ دارد.

ایپک چی و شریعتی[۲۷](۲۰۱۰) به بررسی کمانش یک پانل استوانه‌ای پرداخته‌اند. معادله حاکم بر سیستم، معادلات خطی دانل است و با استفاده از ترکیب دو روش تئوری اغتشاشات و سری‌ها، تنش بحرانی برای یک پانل که دارای دو لبه با تکیه گاه ساده و بارگذاری محوری یکنواخت می‌باشد به دست آمده است. تاثیر پارامترهای طول، شعاع و زاویه قطاع پانل بر بار کمانش بررسی و نتایج با حل عددی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد افزایش طول پانل و یا افزایش شعاع پانل باعث کاهش بار کمانش می‌شود که البته تغییرات شعاع دارای اثر بیشتری بر روی بار کمانش می‌باشد. همچنین یک ضریب تصحیح برای فرمول لورنز[2] به دست آمده است.

زینشنگ وهمکاران[۲۸](۲۰۱۰) در کار خود به بررسی کمانش دینامیکی پیچشی پوسته استوانه‌ای با روش عددی پرداخته‌اند. اختلاف عمده این مقاله با دیگر کارهای انجام شده در این زمینه وجود پارامتر زمان در مسئله است که باعث تبدیل پروسه از یک مسئله کمانش استاتیکی به یک مسئله کمانش دینامیکی شده است. در این مقاله کمانش پوسته به دو دسته کلی از نظر شکل مد تقسیم می‌شود: اول شکل مدهای پیچشی محلی و دیگری شکل مدهای مارپیچی می‌باشد که در شکل(۱-۴) انواع آن نشان داده شده است. تقسیم‌بندی به واسطه زمان انتشار موج برشی[3] به وجود آمده است. هنگامی که مدت زمان انتشار موج برشی کوتاه یا بلند باشد شکل مد کمانش دو حالت پیچشی محلی و یا مارپیچ را به خود می‌گیرد.در این شکل کاملا واضح است که با زیاد شدن زمان انتشار موج شکل کمانش پوسته از یک حالت محلی به یک حالت عمومی در تمام طول پوسته تبدیل می-شود.

[1] Knockdown Factors
[2] Lorens Formula
[3] Propagation Of Shear Wave



شکل(۱-۴) شکل مد کمانش با زمان انتشار موج‌های مختلف

۱-۹) جمع‌بندی:

در این فصل مروری اجمالی به چند مقاله و تئوری در زمینه پوسته‌ها شد که اکثر آنها پوسته استوانه‌ای بوده و دارای جنس الاستیک می‌باشند. وجود نقص‌های هندسی در حالت‌های مختلف اهمیت زیادی داشته و در اکثر مقاله‌ها به آن پرداخته شده است. جنس پوسته‌ها در مقاله‌های جدید به سمت مواد نو مانند مواد مرکب و FGM پیش رفته است. در اکثر مقالات از روش‌های عددی برای حل معادلات استفاده شده است و در اغلب موارد از تئوری‌های غیر خطی مانند دانل و یا فن-کارمن استفاده شده است. در مجموع در هیچ مقاله‌ای مشاهده نشده است که بار کمانش با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی و به روش تحلیلی به دست آمده باشد. در این پایان نامه بار کمانش با این روش به دست آمده است.

فصل دوم

استخراج معادلات تعادل و پایداری

۲-۱)مقدمه:

در این فصل معادلات تعادل و پایداری با استفاده از روش انرژی و با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آمده است.

۲-۲)تئوری تغییر شکل برشی:

میدان جابجایی برای هر نقطه پوسته به صورت رابطه(۲-۱) می‌باشد:

$$u = u(x,y,z,t) \quad ,v = v(x,y,z,t) \quad ,w = w(x,y,z,t) \qquad (۱\text{-}۲)$$

که در آن u و v وw به ترتیب جابجایی در جهت x و y و z بوده و t زمان است. پارامتر z در راستای عمود بر ضخامت پوسته می‌باشد. جابجایی‌ها در این تئوری با بسط تیلور رابطه(۲-۱) به دست می‌آیند. در واقع به کمک بسط حول نقطه z=0 نتیجه می‌شود:

$$u(x,y,z,t) = u(x,y,0,t) + z\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}|_{z=0} + \cdots$$

$$v(x,y,z,t) = v(x,y,0,t) + z\frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}|_{z=0} + \cdots$$

$$w(x,y,z,t) = w(x,y,0,t) + z\frac{\partial w}{\partial z}|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}|_{z=0} + \cdots \qquad (۲\text{-}۲)$$

روابط بالا را، با در نظر گرفتن این که کدام مرتبه تئوری تغییر شکل برشی مورد نظر است می‌توان به صورت ساده تری نوشت. برای مثال در مورد مرتبه اول می‌توان میدان جابجایی را به صورت رابطه(۲-۳) نوشت:

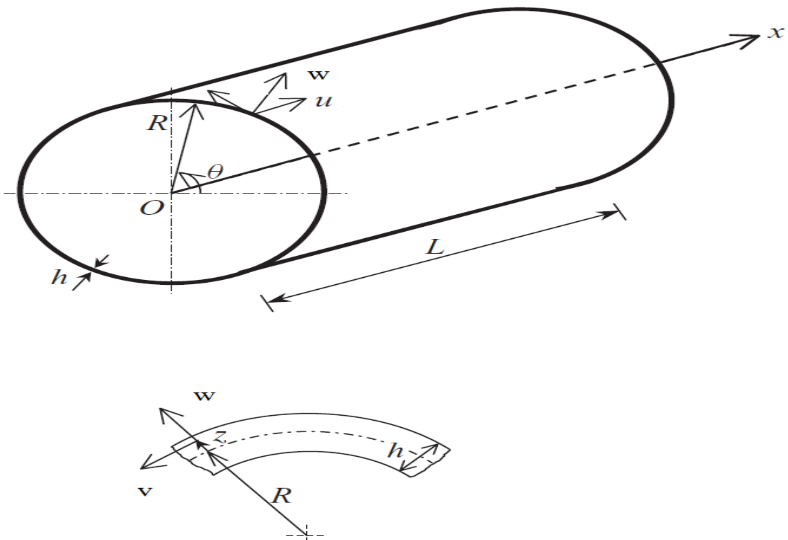
$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + zu_1(x,y,t)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + zv_1(x,y,t)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) + zw_1(x,y,t) \qquad (۳\text{-}۲)$$

با توجه به تعاریف بالا کاملا مشخص است که میدان جابجایی به صورت یک چند جمله‌ای از z تقریب زده شده است. در واقع در تئوری تغییر شکل برشی از تقریب چندجمله‌ای بر حسب z برای تعریف جابجایی‌ها استفاده می‌شود که با توجه به بالاترین توان z در تقریب چندجمله‌ای می‌توان مرتبه تئوری را تعیین کرد. با توجه به

شکل نهایی تعریف میدان جابجایی، کاملا مشخص است که ضرایب z مستقل از z بوده، که این موضوع کمک بسیار زیادی در محاسبات کرده و عملا یکی از متغیرهای مسئله را حذف می‌کند. در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، میدان جابجایی به صورت تابعی خطی از z تقریب زده می‌شود.



شکل(۲-۱) محورهای مختصات برای پوسته استوانه‌ای

برای پوسته با محورهای تعریف شده در شکل(۲-۱) میدان جابجایی با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت رابطه(۲-۴) تعریف شده است :

$$u = u_0(x,\theta) + zu_1(x,\theta)$$
$$v = v_0(x,\theta) + zv_1(x,\theta)$$
$$w = w_0(x,\theta) \qquad (۴-۲)$$

که در آن u و v و w به ترتیب جابجایی در جهت x و θ و z بوده وهرکدام از محورهای zθx در شکل مشخص می‌باشند. در روابط بالا w تنها تابعی از x و θ فرض شده است. از این فرض در بسیاری از مراجع استفاده می-شود[۱].

۲-۳)استخراج معادلات تعادل:

با داشتن میدان جابجایی و با استفاده از روابط سینماتیکی مناسب، می‌توان کرنش‌ها را محاسبه کرد. آمابیلی[۲] تانسور کرنش گرین در دستگاه مختصات استوانه‌ای[1] را به صورت رابطه(۲-۵) بیان می‌کند:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}-\delta_{ij}g_{ii}\right) \quad (۲-۵)$$

در معادلات بالا g تانسور متریک اقلیدسی[2] بوده و پارامتر a در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه(۲-۶) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \mathrm{x}+\mathrm{u}\\
a_2 &= r\sin\theta + w\sin\theta + v\cos\theta\\
a_3 &= r\cos\theta + w\cos\theta - v\sin\theta
\end{aligned} \quad (۲-۶)$$

مقادیر تانسور g نیز برای این دستگاه مختصات به صورت رابطه(۲-۷) می‌باشد:

$$\mathrm{g}_{11}=1\,,\mathrm{g}_{22}=\mathrm{r}^2\,,\mathrm{g}_{33}=1 \quad (۲-۷)$$

با توجه به تعاریف بالا و روابط(۲-۵) تا (۲-۷) می‌توان روابط کرنش جابجایی را از رابطه(۲-۵) به صورت رابطه(۲-۸) به دست آورد که این روابط کلی ترین حالت بوده و تمام جمله‌های مربوط به تانسور کرنش گرین را شامل می‌شود که در حالات مختلف می‌توان با حذف جمله‌های اضافی شکل ساده‌تری از این معادلات را به دست آورد. در نهایت حالت کلی روابط کرنش جابجایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)+\frac{1}{2r^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\right)^2\right]\\
\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right]+\frac{\partial w}{\partial r}\\
\gamma_{x\theta} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\right)\right]\\
\gamma_{xr} &= \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial r}\\
\gamma_{\theta r} &= \frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)-v\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial r}+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]
\end{aligned} \quad (۲-۸)$$

در تمامی روابط بالا z و r به صورت رابطه(۲-۹) با هم ارتباط دارند:

[1] Green’s Strain Tensor In Cylindrical Coordinates
[2] Euclidean Metric Tensor

$$r = R + z \quad , \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{۹-۲}$$

که R شعاع صفحه میانی بوده و z از صفحه میانی به طرف خارج(عمود بر صفحه میانی) مثبت فرض می‌شود. در ادامه با بیان یک سری فرضیات روابط بیان شده در رابطه(۲-۸) تا حد امکان ساده سازی می‌شود، زیرا استفاده از این روابط حل معادلات را به روش تحلیلی بسیار دشوار یا غیر ممکن می‌سازد.

اولین فرضی که در اینجا مورد استفاده قرار گرفته است فرض تقارن محوری می‌باشد. با توجه به هندسه و بارگذاری متقارن و جنس ایزوتروپیک و همسانگرد پوسته می‌توان از این فرض که کمک بسیاری در ساده سازی معادلات می‌کند استفاده کرد. در فرض تقارن محوری تمامی مشتق‌ها نسبت به θ صفر بوده و از پارامتر جابجایی در این راستا چشم پوشی می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \text{و} \quad v = 0 \tag{۱۰-۲}$$

همچنین جابجایی‌ها دیگر تابعی از θ نمی‌باشند و بنابراین جابجایی‌ها به صورت زیر اصلاح می‌شوند:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x) + z u_1(x) \\ v &= 0 \\ w &= w_0(x) \end{aligned} \tag{۱۱-۲}$$

با این فرضیات، تعداد مجهولات مسئله از پنج به سه کاهش یافته است. پوسته مورد نظر نازک و فرضیات پوسته نازک صادق است. مشتقات مرتبه دوم جابجایی در راستای طولی (u) در مقایسه با مشتقات مرتبه اول آن کوچک بوده و قابل صرفنظر است و در روابط کرنش- جابجایی تمامی جمله‌های غیر خطی بر اساس جابجایی شعاعی (w) می‌باشد(روابط سینماتیک فن-کارمن).

استفاده از فرضیات بالا تا حد زیادی معادلات کرنش – جابجایی را ساده می‌کند. ولی باز هم وجود جمله‌های غیر خطی در این معادلات مشهود است. با توجه به اینکه در این تحقیق فرض بر اساس تغییر شکل‌های بزرگ[1] می‌باشد، جمله‌های غیر خطی قابل حذف نیست. در نهایت پس از ساده سازی، روابط کرنش – جابجایی به صورت زیر است:

[1] Large Deformation

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \mathrm{x}}\right)^2\right]$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(w)$$
$$\varepsilon_{rr} = 0$$
$$\gamma_{x\theta} = 0$$
$$\gamma_{xr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\gamma_{\theta r} = 0 \qquad (۱۲-۲)$$

با جایگذاری میدان جابجایی از رابطه(۲-۱۱) در معادلات فوق و جایگزینیr بر حسب z رابطه(۲-۱۳) حاصل می‌شود، که میدان کرنش – جابجایی برای پوسته نازک تحت شرایط متقارن محوری می‌باشد:

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} + z\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} w_0$$
$$\gamma_{xz} = \frac{dw_0}{dx} + u_1$$
$$\varepsilon_z = \gamma_{x\theta} = \gamma_{\theta z} = 0 \qquad (۱۳-۲)$$

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر پوسته از روش اصل کار مجازی[۱] استفاده شده است. بر طبق این اصل تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای خارجی یکسان است:

$$\delta U = \delta W$$

که در رابطه فوق U انرژی کرنشی و W کار نیروهای خارجی است. انرژی کرنشی عبارتست از:

$$U = \iiint U^* dV$$
$$dV = r dr d\theta dx = (R+z) dz d\theta dx$$
$$U^* = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{x\theta}\gamma_{x\theta} + \tau_{\theta z}\gamma_{\theta z}) \qquad (۱۴-۲)$$

که در رابطه فوق U^* دانسیته انرژی کرنشی است. کار نیروهای خارجی با رابطه(۲-۱۵) تعریف می‌شود که در آن P نیروی فشار محوری خارجی بوده که واحد آن نیوتن بر متر مربع است و از نظر ابعادی با مدول یانگ و تنش مشابه می‌باشد.

[1] Virtual Work Principle

$$W=\iint(Pu)rd\theta dz=\int P(u_0+zu_1)(R+z)d\theta dz=\int\left(Pu_0Rh+\frac{Pu_1h^3}{12}\right)d\theta \qquad (۲-۱۵)$$

انتگرال گیری‌ها در بالا در محدوده زیر صورت می‌گیرد:

$$-\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}\ \ ,0\le x\le l\ \ ,0\le\theta\le 2\pi \qquad (۲-۱۶)$$

تغییرات انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی به صورت رابطه(۲-۱۷) بیان می‌شود:

$$\delta U=2\pi R\iint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz})\left(1+\frac{z}{R}\right)dxdz$$
$$\delta W=\int\left(PRh\delta u_0+\frac{Ph^3}{12}\delta u_1\right)d\theta \qquad (۲-۱۷)$$

مقادیر تغییرات کرنش‌ها به صورت رابطه(۲-۱۸) می‌باشند:

$$\delta\varepsilon_x=\delta\left(\frac{du_0}{dx}\right)+z\delta\left(\frac{du_1}{dx}\right)+\frac{dw_0}{dx}\delta\left(\frac{dw_0}{dx}\right)$$
$$\delta\varepsilon_\theta=\frac{1}{R+z}\delta w_0$$
$$\delta\gamma_{xz}=\delta\left(\frac{dw_0}{dx}\right)+\delta u_1 \qquad (۲-۱۸)$$

با استفاده از روابط(۲-۱۷) و (۲-۱۸) و با استفاده از مشتقات جز به جز معادلات حاکم بر پوسته به دست می-آید:

$$-\frac{dN_x}{dx}=0$$
$$-\frac{dM_x}{dx}+Q_x=0$$
$$-\frac{d}{dx}\left(N_x\frac{dw_0}{dx}\right)+\frac{N_\theta}{R}-\frac{dQ_x}{dx}=0 \qquad (۲-۱۹)$$

معادلات رابطه (۲-۱۹) بر حسب منتجه‌های تنش می‌باشند که این منتجه‌ها با رابطه (۲-۲۰) بیان می‌شوند:

$$N_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x\left(1+\frac{z}{R}\right)dz$$
$$M_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}z\sigma_x\left(1+\frac{z}{R}\right)dz$$
$$N_\theta=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_\theta dz$$
$$Q_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xz}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \qquad (۲-۲۰)$$

مقادیر تنش‌ها را می‌توان بر حسب کرنش‌ها با استفاده از رابطه(۲-۲۱) به سادگی بیان کرد. بعد از نوشتن تنش-ها بر حسب کرنش می‌توان با جایگذاری این روابط در معادلات مربوط به منتجه‌ها آنها را نیز بر حسب کرنش‌ها نوشت و در نهایت با استفاده از رابطه(۲-۱۳) تمامی معادلات را بر حسب جابجایی‌ها مرتب کرد که در نتیجه دستگاه معادلات (۲-۱۹) تبدیل به یک دستگاه سه معادله و سه مجهول می‌شود. برای یک ماده همگن در ناحیه الاستیک، روابط هوک به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \alpha[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta] \\
&\sigma_\theta = \alpha[(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x] \\
&\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \\
&\alpha = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ , G = \frac{E}{2(1+\nu)}
\end{aligned} \tag{۲-۲۱}$$

در رابطه(۲-۲۱)، عبارات E و G و ν به ترتیب مدول الاستیسیته، مدول برشی الاستیسیته و ضریب پواسون می-باشند. رابطه فوق، یک رابطه خطی بین تنش و کرنش است. شرایط مرزی مسئله، مرتبط با رابطه (۲-۱۹) عبارتند از:

$$1:\ 2\pi R N_x \delta u_0|_{x=0,l} - 2\pi R P h \delta u_0|_{x=l} = 0$$

$$2:\ 2\pi R M_x \delta u_1|_{x=0,l} - \frac{2\pi h^3}{12} P \delta u_1|_{x=l} = 0$$

$$3:\ 2\pi R N_x \frac{dw_0}{dx} \delta w_0|_{x=0,l} + 2\pi R Q_x \delta w_0|_{x=0,l} = 0 \tag{۲-۲۲}$$

با استفاده از معادله اول در رابطه(۲-۱۹) و همچنین اولین شرط مرزی در رابطه(۲-۲۲) می‌توان به رابطه(۲-۲۳) رسید و می‌توان این رابطه را با اولین معادله در دستگاه معادلات(۲-۱۹) جایگزین کرد.

$$N_x = \text{Constant} = \text{Ph} \tag{۲-۲۳}$$

با استفاده از رابطه(۲-۲۳) می‌توان دستگاه معادلات(۲-۱۹) را به صورت زیر اصلاح کرد :

$$\begin{aligned}
&N_x = Ph \\
&\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \\
&Ph\frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{N_\theta}{R} + \frac{dQ_x}{dx} = 0
\end{aligned} \tag{۲-۲۴}$$

جایگذاری روابط(۲-۲۱) در معادلات مربوط (۲-۲۰) باعث می‌شود تا بتوان منتجه‌های تنش را بر حسب کرنش-ها نوشت. سپس با جایگذاری کرنش‌ها از رابطه(۲-۱۳) در معادلات اخیر، مقادیر منتجه‌ها بر حسب جابجایی‌ها مشخص می‌شوند. جایگذاری این معادلات(منتجه‌ها بر حسب میدان جابجایی) در رابطه(۲-۲۴) منجر به یک دستگاه سه معادله با سه مجهول w_0 و u_0 و u_1 می‌شود.

1. $Rh\frac{du_0}{dx}+\frac{Rh}{2}\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2+\frac{h^3}{12}\frac{du_1}{dx}+\frac{\nu h}{(1-\nu)}w_0=\frac{RPh}{\alpha(1-\nu)}$

2. $-\frac{Rh^3}{12}\frac{d^2u_1}{dx^2}-\frac{h^3}{12}\frac{d^2u_0}{dx^2}-\frac{h^3}{12}\frac{dw_0}{dx}\frac{d^2w_0}{dx^2}+\frac{G}{\alpha(1-\nu)}Rh\left(\frac{dw_0}{dx}+u_1\right)=0$

3. $-\frac{PRh}{(1-\nu)\alpha}\frac{d^2w_0}{dx^2}+\ln\left(\frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}}\right)w_0+\frac{\nu}{1-\nu}h\frac{du_0}{dx}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{h}{2}\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2-\frac{(1-2\nu)Rh}{2(1-\nu)}\left(\frac{d^2w_0}{dx^2}+\frac{du_1}{dx}\right)=0$ (۲-۲۵)

معادلات رابطه(۲-۲۵)، معادلات تعادل حاکم بر پوسته نازک با فرضیات ذکر شده می‌باشد.

۲-۴)استخراج معادلات پایداری:

برای به دست آوردن معادلات پایداری، جابجایی‌ها به دو بخش تقسیم می‌شود. یکی لحظه‌ای قبل از کمانش و در حالت تعادل و دیگری لحظه‌ای بعد از کمانش.

$$U_0=u_0+u_1\,,U_1=y_0+y_1\,,W_0=w_0+w_1 \quad (۲-۲۶)$$

u_0، w_0، y_0 همگی حالت‌های نزدیک تعادل بوده وu_1، w_1، y_1 نموهای کوچک اختیاری می‌باشند. با در نظر گرفتن این جابجایی‌ها و جایگذاری آنها در رابطه(۲-۲۰) و به کمک روابط (۲-۲۱) و (۲-۱۳) می‌توان معادلات مربوط به منتجه‌ها را به صورت رابطه(۲-۲۷) دوباره بازنویسی کرد. در رابطه(۲-۲۷) عبارات ΔN_X، ΔN_θ، ΔM_X، ΔQ_X نموهای متناظر با جابجایی‌های u_1، w_1و y_1 می‌باشند. که از حذف یک سری جمله‌های اضافی غیر خطی بسیار کوچک در آنها می‌توان به شکل ساده‌تری برای آنها رسید که در روابط(۲-۲۸) با N_{X1}، $N_{\theta 1}$، M_{X1}، Q_{X1} مشخص شده‌اند [۳].

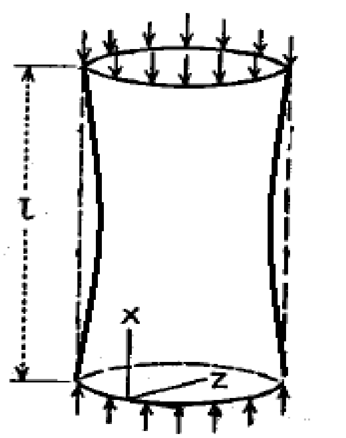
$$N_x + \Delta N_x = \alpha h(1-\nu)\frac{du_0}{dx} + \frac{\alpha h(1-\nu)}{2}\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 + \frac{\alpha h^3(1-\nu)}{12R}\frac{dy_0}{dx} + \frac{\alpha \nu h}{R}w_0 + \alpha h(1-\nu)\frac{du_1}{dx} + \frac{\alpha h(1-\nu)}{2}\left(\left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 + 2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right) + \frac{\alpha h^3(1-\nu)}{12R}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\alpha \nu h}{R}w_1$$

$$N_\theta + \Delta N_\theta = \alpha(1-\nu)mw_0 + \alpha\nu h\frac{du_0}{dx} + \frac{\alpha\nu h}{2}\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 + \alpha(1-\nu)mw_1 + \alpha\nu h\frac{du_1}{dx} + \frac{\alpha\nu h}{2}\left(\left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 + 2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right)$$

$$M_x + \Delta M_x = \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12}\frac{dy_0}{dx} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12R}\frac{du_0}{dx} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{24R}\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12R}\frac{du_1}{dx} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{24R}\left(\left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 + 2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right)$$

$$Q_x + \Delta Q_x = Gh\left(\frac{dw_0}{dx} + y_0\right) + Gh\left(\frac{dw_1}{dx} + y_1\right), m = \ln\left(\frac{R+h/2}{R-h/2}\right) \qquad (۲۷-۲)$$

پارامترها با اندیس صفر بیانگر حالت تعادل می‌باشد و پارامترهای با اندیس یک بیانگر نمو دلخواه در زمان کوچکی بعد از تعادل می‌باشد. برای درک بهتر این مطلب می‌توان به این نکته اشاره کرد که تغییر شکل پوسته بعد از بارگذاری مانند شکل(۲-۲) می‌باشد و منظور از جابجایی‌ها با اندیس صفر همین جابجایی‌های تعادلی می‌باشد اما حداقل باری که باعث خارج شدن پوسته از این حالت می‌شود بار کمانش بوده و جابجایی‌ها با اندیس یک مربوط به این حالت می‌باشد.



شکل (۲-۲) تغییر شکل پوسته پس از بارگذاری

با جداسازی عبارات مربوط به رابطه(۲-۲۷) بر حسب اندیس‌های صفر و یک و استفاده از رابطه تعادل می‌توان روابط (۲-۲۸) را برای نموهای متناظر به دست آورد. از عبارت‌های توان دو و مرتبه بالاتر از u_1، w_1، y_1 به دلیل کوچکی صرفنظر شده است.

$$\begin{aligned}
N_{x1} &= \alpha h(1-\nu)\frac{du_1}{dx} + \frac{\alpha h(1-\nu)}{2}\left(2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right) + \frac{\alpha h^3(1-\nu)}{12R}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\alpha \nu h}{R}w_1 \\
N_{\theta 1} &= \alpha(1-\nu)mw_1 + \alpha\nu h\frac{du_1}{dx} + \frac{\alpha\nu h}{2}\left(2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right) \\
M_{x1} &= \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12R}\frac{du_1}{dx} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{24R}\left(2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right) \\
Q_{x1} &= Gh\left(\frac{dw_1}{dx} + y_1\right)
\end{aligned} \qquad (۲۸-۲)$$

حال به کمک روابط(۲-۲۷) و (۲-۲۸) می‌توان معادلات پایداری را برای یک پوسته نازک به صورت رابطه(۲-۲۹) نوشت:

$$\begin{aligned}
&N_{x1} = 0 \\
&-\frac{dM_{x1}}{dx} + Q_{x1} = 0 \\
&-N_{x0}\frac{d^2w_1}{dx^2} - N_{x1}\frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{N_{\theta 1}}{R} - \frac{dQ_{x1}}{dx} = 0
\end{aligned} \qquad (۲۹-۲)$$

برای استخراج معادلات پایداری روش‌های دیگری نیز وجود دارد که در کتاب‌ها و مقالات به آنها اشاره شده است. اما روش فوق، بیشتر استفاده می‌شود[۳].

با جایگذاری رابطه(۲-۲۸) در رابطه(۲-۲۹) می‌توان معادلات پایداری را به صورت رابطه(۲-۳۰) به دست آورد که در این رابطه معادلات پایداری بر حسب جابجایی‌ها می‌باشد.

$$\begin{aligned}
&1.\quad \alpha h(1-\nu)\frac{du_1}{dx} + \frac{\alpha h(1-\nu)}{2}\left(2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right) + \frac{\alpha h^3(1-\nu)}{12R}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\alpha\nu h}{R}w_1 = 0 \\
&2.\quad \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12}\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12R}\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12R}\frac{d}{dx}\left(\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right) + Gh\left(\frac{dw_1}{dx} + y_1\right) = 0 \\
&3.\quad \Bigg(\alpha h(1-\nu)\frac{du_0}{dx}\frac{d^2w_1}{dx^2} + \frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12R}\frac{dy_0}{dx}\frac{d^2w_1}{dx^2} + \frac{\alpha\nu h}{R}w_0\frac{d^2w_1}{dx^2} + \alpha h(1-\nu)\frac{du_1}{dx}\frac{d^2w_0}{dx^2} + \\
&\frac{\alpha(1-\nu)h^3}{12R}\frac{dy_1}{dx}\frac{d^2w_0}{dx^2} + \alpha h(1-\nu)\left(\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)\Bigg) + \frac{\alpha m(1-\nu)}{R}w_1 + \frac{\alpha\nu h}{R}\frac{du_1}{dx} + \frac{\alpha\nu h}{R}\left(\frac{dw_0}{dx}\frac{dw_1}{dx}\right) - \\
&Gh\left(\frac{d^2w_1}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx}\right) = 0
\end{aligned} \qquad (۳۰-۲)$$

یکی دیگر از روش‌های استخراج معادلات پایداری که در برخی مقالات به آن اشاره شده است([۱۷]و[۱۶])، استفاده از بسط تیلور انرژی کرنشی کل می‌باشد. به این ترتیب که اگر V انرژی پتانسیل کل پوسته باشد می‌توان بسط تیلور آن را به صورت رابطه(۲-۳۱) نوشت و به کمک حداقل انرژی پتانسیل، معادلات تعادل و معادلات پایداری را به دست آورد. در واقع در ابتدای این فصل به کمک همین روش، معادلات تعادل به دست آمد. در این روش با توجه به رابطه(۲-۳۰)، جمله اول بسط بیانگر حالت تعادل بوده و جمله دوم آن بیانگر حالت نزدیک به تعادل یا همان پایداری می‌باشد. این روش برای بررسی پایداری سازه مناسب‌تر است و با استفاده از آن به راحتی می‌توان حالت پایداری سازه را بررسی کرد. برای انجام این روش با محاسبه تغییرات انرژی پتانسیل کل، معادلات تعادل به دست می‌آید و برای استخراج معادلات پایداری لازم است که وریشنال دوم از انرژی پتانسیل کل گرفت:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \cdots \qquad (۲\text{-}۳۱)$$

با توجه به رابطه(۲-۳۱) برای حالت تعادل سه وضعیت پیش خواهد آمد:

الف: اگر $\delta^2 V > 0$ باشد تعادل برای تمام جابجایی‌ها پایدار خواهد بود.

ب: اگر $\delta^2 V < 0$ باشد تعادل برای حداقل یک دسته جابجایی قابل قبول، ناپایدار خواهد بود.

ج: وضعیت $\delta^2 V = 0$ نیز برای استخراج معادلات پایداری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۵)جمع‌بندی:

در این فصل معادلات تعادل و پایداری با استفاده از روش انرژی و به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آمد که برای این کار از تئوری غیر خطی فن-کارمن برای روابط سینماتیک استفاده شده است. با استفاده از یک سری فرضیات معادلات تا حد امکان ساده شده است. در نهایت معادلات تعادل و پایداری که یک دستگاه معادلات غیر خطی می‌باشد به دست آمده است.

فصل سوم

حل معادلات به روش تحلیلی

۳-۱)مقدمه:

در این فصل سعی شده است معادلات به دست آمده در فصل قبل، بصورت تحلیلی حل شوند. برای به دست آوردن بار کمانش لازم است ابتدا معادلات تعادل را حل کرده و سپس با استفاده از حل مسئله مقدار ویژه معادلات پایداری، بار کمانش را به دست آورد. حل تحلیلی به کمک تئوری اغتشاشات و تئوری معادلات دیفرانسیل، انجام شده است. در پیوست الف، مختصری در مورد تئوری اغتشاشات توضیح داده شده است.

۳-۲)حل معادلات تعادل:

برای حل معادلات به دست آمده در فصل قبل به روش تئوری اغتشاشات، ابتدا باید شکل بی‌بعد معادلات را به دست آورد. نکته قابل توجه در این تحقیق در مقایسه با دیگر کارهای انجام شده در این زمینه، این است که، در این تحقیق معادلات از همان ابتدا به صورت مستقیم پس از بی‌بعد شدن حل شده تا بار کمانش حاصل شود، ولی در مقالات دیگر مانند مرجع[۲۷] ابتدا معادلات با روش سری‌ها حل شده و در نهایت یک معادله جبری به دست آمده است که حل آن منجر به، استخراج بار کمانش می‌شود. این معادله جبری با روش تئوری اغتشاشات حل شده و بار کمانش از حل آن به دست آمده است. برای بی‌بعد سازی نیاز به تعریف پارامترهای بی‌بعد در مسئله است که در روابط (۳-۱) آورده شده‌اند. پارامترهای ستاره‌دار، در رابطه(۳-۱) پارامترهایی بی‌بعد هستند که معادلات در نهایت بر حسب آنها نوشته می‌شوند.

$$u_0{}^* = \frac{u_0}{h_0}\ , h^* = \frac{h}{h_0}\ , R^* = \frac{R}{R_0}\ , w_0{}^* = \frac{w_0}{h_0}\ , u_1{}^* = u_1\ , \frac{1}{Z} = \frac{R_0 h_0}{l^2}\ , \quad Z_1 = \varepsilon Z = \frac{l}{R_0}\ , \beta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\ , \frac{R_0}{l} = \frac{1}{Z\varepsilon}\ , \frac{R_0}{h_0} = \frac{1}{Z\varepsilon^2}\ , x^* = \frac{x}{l}\ , \varepsilon = \frac{h_0}{l}\ , P^* = \frac{P}{(1-\nu)\alpha}\ , m = \ln\frac{R+h/2}{R-h/2} \qquad (۱-۳)$$

در رابطه(۳-۱) پارامترهای E، h، l، Rو ν به ترتیب مدول الاستیسیته، ضخامت، طول، شعاع و ضریب پواسون می‌باشند. R_0 و h_0 به ترتیب شعاع و ضخامت شاخص و z ضریبی از پارامتر بتدورف است و ε پارامتری کوچک و بی‌بعد فرض می‌شود.

با جایگذاری روابط (۳-۱) در (۲-۲۵) می‌توان به شکل بی‌بعد معادلات تعادل رسید. پس از جایگذاری و ساده سازی می‌توان شکل بی‌بعد معادلات تعادل را به شکل رابطه (۳-۲) به دست آورد.

$$1.\quad \varepsilon R^* h^* \frac{du_0{}^*}{dx^*} + \frac{R^* h^*}{2}\varepsilon^2\left(\frac{dw_0{}^*}{dx^*}\right)^2 + \frac{h^{*3} Z}{12}\varepsilon^3\frac{du_1{}^*}{dx^*} + \frac{\nu h^* Z}{(1-\nu)}\varepsilon^2 w_0{}^* = h^* R^* P^*$$

$$2.\quad -\frac{R^* h^{*3}}{12}\varepsilon^2\frac{d^2u_1{}^*}{dx^{*2}} - \frac{h^{*3}Z}{12}\varepsilon^4\frac{d^2u_0{}^*}{dx^{*2}} - \frac{h^{*3}Z}{12}\varepsilon^5\frac{dw_0{}^*}{dx^*}\frac{d^2w_0{}^*}{dx^{*2}} + \beta R^* h^*\left(\varepsilon\frac{dw_0{}^*}{dx^*} + u_1{}^*\right) = 0$$

$$3.\quad -h^* R^* P^* \varepsilon\frac{d^2w_0{}^*}{dx^{*2}} + \ln\left(\frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}}\right)\varepsilon Z w_0{}^* + \frac{\nu h^* Z}{1-\nu}\varepsilon^2\frac{du_0{}^*}{dx^*} + \frac{\nu h^* Z}{2(1-\nu)}\varepsilon^3\left(\frac{dw_0{}^*}{dx^*}\right)^2 - \beta h^* R^*\left(\varepsilon\frac{d^2w_0{}^*}{dx^{*2}} + \frac{du_1{}^*}{dx^*}\right) = 0 \qquad (۲-۳)$$

برای ساده سازی شکل معادلات و همچنین بهبود شکل دستگاه معادلات، از تبدیل زیر در دستگاه معادلات (۳-۲) جایگزین می‌شود:

$$V = \varepsilon\frac{du_0{}^*}{dx^*} \qquad (۳-۳)$$

با استفاده از تبدیل فوق نتیجه می‌شود:

$$1.\quad R^* h^* V + \frac{R^* h^*}{2}\varepsilon^2\left(\frac{dw_0{}^*}{dx^*}\right)^2 + \frac{h^{*3} Z_1}{12}\varepsilon^2\frac{du_1{}^*}{dx^*} + \frac{\nu h^* Z_1}{(1-\nu)}\varepsilon w_0{}^* = h^* R^* P^*$$

$$2.\quad -\frac{R^* h^{*3}}{12}\varepsilon^2\frac{d^2u_1{}^*}{dx^{*2}} - \frac{h^{*3}Z_1}{12}\varepsilon^2\frac{dV}{dx^*} - \frac{h^{*3}Z_1}{12}\varepsilon^4\frac{dw_0{}^*}{dx^*}\frac{d^2w_0{}^*}{dx^{*2}} + \beta R^* h^*\left(\varepsilon\frac{dw_0{}^*}{dx^*} + u_1{}^*\right) = 0$$

$$3.\quad -h^* R^* P^* \varepsilon\frac{d^2w_0{}^*}{dx^{*2}} + \ln\left(\frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}}\right) Z_1 w_0{}^* + \frac{\nu h^* Z_1}{1-\nu}V + \frac{\nu h^* Z_1}{2(1-\nu)}\varepsilon^2\left(\frac{dw_0{}^*}{dx^*}\right)^2 - \beta h^* R^*\left(\varepsilon\frac{d^2w_0{}^*}{dx^{*2}} + \frac{du_1{}^*}{dx^*}\right) = 0 \qquad (۴-۳)$$

معادلات رابطه(۳-۴) شکل بی‌بعد شده معادلات رابطه(۲-۲۵) می‌باشد. با اعمال تغییر متغیر زیر شکل معادلات(۳-۴) به صورت رابطه (۳-۵) تبدیل می‌شود:

$$\eta = \frac{x^*}{\varepsilon}$$

1. $R^*h^*V + \frac{R^*h^*}{2}\left(\frac{dw_0{}^*}{d\eta}\right)^2 + \frac{h^{*3}Z_1}{12}\varepsilon\frac{du_1{}^*}{d\eta} + \frac{\nu h^*Z_1}{(1-\nu)}\varepsilon w_0{}^* = h^*R^*P^*$

2. $-\frac{h^{*3}Z_1}{12}\varepsilon\frac{dV}{d\eta} - \frac{R^*h^{*3}}{12}\frac{d^2u_1{}^*}{d\eta^2} - \frac{h^{*3}Z_1}{12}\varepsilon\frac{dw_0{}^*}{d\eta}\frac{d^2w_0{}^*}{d\eta^2} + \beta R^*h^*\left(\frac{dw_0{}^*}{d\eta} + u_1{}^*\right) = 0$

3. $\varepsilon\frac{\nu h^*Z_1}{1-\nu}V - \beta h^*R^*\frac{du_1{}^*}{d\eta} - (h^*R^*P^* + \beta h^*R^*)\frac{d^2w_0{}^*}{d\eta^2} + \varepsilon\ln\left(\frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}}\right)Z_1w_0{}^* +$
$\frac{\nu h^*Z_1}{2(1-\nu)}\varepsilon\left(\frac{dw_0{}^*}{d\eta}\right)^2 = 0$ (۵-۳)

دستگاه معادلات(۳-۵) یک دستگاه معادلات غیر خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که می‌توان حل دقیقی برای آن پیدا کرد به این ترتیب که از معادله اول می‌توان V را بر حسب ${w_0}^*$ و ${u_1}^*$ به دست آورد و با جایگذاری آن در معادلات دوم و سوم به یک دستگاه معادلات خطی بر حسب w_0 و u_1 رسید که می‌توان آن را حل کرد و با اعمال شرایط مرزی پاسخ را تعیین کرد و در نهایت با جایگذاری در رابطه اول V را نیز به دست آورد. اما نکته این است که اگر هدف، تعیین بار کمانش باشد باید معادلات تعادل به صورت پارامتری بر حسب P^* (بار کمانش) حل شود که در نتیجه پاسخ بسیار پیچیده می‌شود و جایگذاری آن در معادلات پایداری مسئله را بسیار پیچیده کرده و تقریبا حل آن را غیر ممکن می‌سازد. به همین خاطر از تئوری اغتشاشات برای حل معادلات تعادل استفاده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که حل مرتبه صفر معادلات تعادل برای استخراج بار کمانش کفایت می‌کند. برای شروع حل با روش تئوری اغتشاشات، ابتدا جابجایی‌ها به صورت رابطه(۳-۶) در معادلات(۳-۵) جایگذاری می‌شوند. سپس هر معادله در دستگاه معادلات بر حسب توان ε مرتب شده و جملات با مرتبه‌های مختلف مشخص می‌شوند.

$$V(\eta) = \phi_0(\eta) + \varepsilon\phi_1(\eta)$$
$$w_0{}^*(\eta) = \psi_0(\eta) + \varepsilon\psi_1(\eta)$$
$$u_1{}^*(\eta) = \lambda_0(\eta) + \varepsilon\lambda_1(\eta) \quad (۶\text{-}۳)$$

ψ_0، ψ_1، φ_0، φ_1، λ_0 و λ_1 توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. جملات مرتبه صفر دستگاه معادلات عبارتند از:

1. $R^*h^*\phi_0(\eta) - P^*R^*h^* + \frac{1}{2}R^*h^*\left(\frac{d\psi_0(\eta)}{d\eta}\right)^2 = 0$

2. $\beta R^*h^*\frac{d\psi_0(\eta)}{d\eta} - \frac{R^*h^{*3}}{12}\frac{d^2\lambda_0(\eta)}{d\eta^2} + \beta R^*h^*\lambda_0(\eta) = 0$

3. $-R^*h^*P^*\frac{d^2\psi_0(\eta)}{d\eta^2} - \beta R^*h^*\frac{d\lambda_0(\eta)}{d\eta} - R^*h^*\beta\frac{d^2\psi_0(\eta)}{d\eta^2} = 0$ (۷-۳)

شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$at\ \ \eta=0:\quad \lambda_0(0)=\psi_0(0)=0$$
$$at\ \ \eta=\frac{1}{\varepsilon}:\quad \lambda_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\psi_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=0 \qquad (۸-۳)$$

برای حل، از معادله سوم یک بار انتگرال گرفته و از آن λ_0 بر حسب ψ_0 به دست می‌آید، حال λ_0 در معادله دوم جایگذاری می‌شود که نتیجه یک معادله با یک مجهول ψ_0 است و از حل این معادله ψ_0 به دست می‌آید:

$$\psi_0=\frac{h^*\sqrt{3P^*+3\beta}}{6\sqrt{P^*\beta}}\left(C_1e^{\left(\frac{6\eta\sqrt{P^*\beta}}{h^*\sqrt{3P^*+3\beta}}\right)}-C_2e^{\left(-\frac{6\eta\sqrt{P^*\beta}}{h^*\sqrt{3P^*+3\beta}}\right)}\right)+\frac{C_3}{R^*h^*P^*}\eta+C_4 \qquad (۹-۳)$$

حال با جایگذاری ψ_0 در رابطه به دست آمده در مرحله قبل، می‌توان λ_0 را به دست آورد. سپس از معادله اول φ_0 را نیز می‌توان استخراج کرد. در نهایت جملات مرتبه صفر معادله حل شده و پاسخی با تعدادی ضریب ثابت به دست می‌آید که این ضرایب ثابت از اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند.

برای به دست آوردن بار پیش کمانش، باید به کمک اعمال شرایط مرزی بر روی پاسخ‌های به دست آمده در مرحله قبل که بر حسب ثابت‌های نامعین می‌باشند، عمل کرد به این ترتیب که با اعمال شرایط مرزی مناسب به دست آمده از رابطه (۲-۲۲)، یک دستگاه چهار معادله با چهار مجهول تشکیل داده که از برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرایب این دستگاه یک معادله بر حسب P^* به دست می‌آید که با حل آن بار پیش کمانش مرتبه صفر به دست می‌آید که البته این مقدار بسیار کوچکتر از بار کمانش واقعی پوسته می‌باشد.

با اعمال شرایط مرزی رابطه(۳-۸) در پاسخ‌های به دست آمده از دستگاه مرتبه صفر و تشکیل دستگاه معادلاتی که مجهولات آن ضرایب ثابت در پاسخ‌ها می‌باشند و برابر صفر قرار دادن ماتریس ضرایب دستگاه، معادله مشخصه رابطه(۳-۱۰) به دست می‌آید که از حل آن بار پیش کمانش مرتبه صفر به دست می‌آید.

$$(-2\beta\varepsilon+kP^*+k\beta)e^{\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)}+(-2\beta\varepsilon-kP^*-k\beta)e^{\left(-\frac{k}{\varepsilon}\right)}+4\beta\varepsilon=0$$
$$k=\frac{2}{h^*}\sqrt{\frac{3P^*\beta}{(P^*+\beta)}} \qquad (۱۰-۳)$$

معادله رابطه(۳-۱۰) یک معادله ضمنی می‌باشد که به کمک نرم افزار Maple13 حل شده است. حل مرتبه یک معادلات تعادل نیز به همین ترتیب انجام می‌شود با این تفاوت که در این مرحله معادلات شامل ψ_0، φ_0 و

λ_0 می‌باشد که باید مقادیر آنها را بر حسب پاسخ‌های مرحله قبل جایگذاری کرد. معادلات مرتبه یک تعادل به صورت رابطه(۳-۱۱) می‌باشد که از حل آن پاسخ مرتبه یک معادلات تعادل به دست می‌آید.

$$R^*h^*\left(\frac{d\psi_0(\eta)}{d\eta}\right)\left(\frac{d\psi_1(\eta)}{d\eta}\right)+R^*h^*\phi_1+\frac{z_1\nu h\psi_0}{1-\nu}+\frac{1}{12}z_1h^{*3}\frac{d\lambda_0}{d\eta}=0$$

$$\beta R^*h^*\left(\frac{d\psi_1(\eta)}{d\eta}\right)-\frac{R^*h^{*3}}{12}\frac{d^2\lambda_1}{d\eta^2}-\frac{z_1h^{*3}}{12}\frac{d\phi_0}{d\eta}+\beta R^*h^*\lambda_1-\frac{z_1h^{*3}}{12}\left(\frac{d\psi_0(\eta)}{d\eta}\right)\left(\frac{d^2\psi_0(\eta)}{d\eta^2}\right)=0$$

$$-R^*h^*P^*\left(\frac{d^2\psi_1(\eta)}{d\eta^2}\right)-\beta R^*h^*\left(\frac{d\lambda_1(\eta)}{d\eta}\right)+\frac{z_1\nu h^*}{1-\nu}\phi_0-R^*h^*\beta\frac{d^2\psi_1(\eta)}{d\eta^2}+\frac{z_1\nu h^*}{2(1-\nu)}\left(\frac{d\psi_0(\eta)}{d\eta}\right)^2=0 \qquad (۳-۱۱)$$

۳-۳)حل معادلات پایداری:

حال برای استخراج بار کمانش باید به کمک پاسخ‌های مرحله قبل معادلات پایداری به دست آمده در فصل قبل را حل کرد. برای این کار ابتدا باید مقادیر v_0، y_0 و w_0 را که حل معادلات تعادل می‌باشند به دست آورد. پاسخی که در مرحله قبل به عنوان حل مرتبه صفر ویک معادلات تعادل به دست آمد تنها مقدار خیز و جابجایی طولی پوسته بود که برای حل معادلات پایداری از آن استفاده نشده است. برای حل معادلات پایداری باید پاسخ-های معادلات تعادل بر حسب بار P^* معلوم باشد تا بتوان از حل آنها مقدار ویژه P^* که همان بار کمانش است را استخراج کرد. برای این کار با این فرض که جابجایی در جهت شعاعی یا همان جهت z در لحظه قبل از وقوع کمانش که مربوط به حالت تعادل پوسته می‌باشد در مقایسه با لحظه کمانش صفر می‌باشد می‌توان معادلات تعادل را حل کرده و با جایگذاری آنها بر حسب P^* در معادلات پایداری، به یک دستگاه با سه معادله و سه مجهول رسید که مجهولات آن v_1 ، y_1 و w_1 می‌باشند. لازم به ذکر است که در معادلات پایداری(رابطه(۲-۳۰)) به دست آمده در فصل قبل به جای v از u استفاده شده است که برای حل معادلات پایداری مانند معادلات تعادل با استفاده از تغییر متغیر(۳-۳) می‌توان تمام این روابط را بر حسب v نوشت.

با تغییرات انجام شده و حل معادلات رابطه(۳-۷) می‌توان به پاسخ‌های رابطه(۳-۱۲) برای حل معادلات تعادل رسید، که همان حل معادلات مرتبه صفر می‌باشد. باید توجه داشت که در اینجا می‌توان از حل معادلات مرتبه یک نیز استفاده کرد که اینکار معادلات پایداری را بسیار طولانی و پیچیده کرده و حل آنها را غیر ممکن می‌سازد.

$$\phi_0=\mathrm{v}_0=\mathrm{p}^*\,,\psi_0=\mathrm{w}_0=0\,,\lambda_0=\mathrm{y}_0=0 \qquad (۳-۱۲)$$

برای حل نیاز به بی بعد کردن معادلات می‌باشد که این فرآیند مانند معادلات تعادل انجام می‌شود. برای بی بعد کردن معادلات از روابط (۳-۱) استفاده می‌شود. شکل بی‌بعد شده معادلات در رابطه(۳-۱۳) آورده شده است.

$$1.\qquad h^*(1-\nu)\frac{du_1{}^*}{d\eta}+h^*(1-\nu)\left(\frac{dw_0{}^*}{d\eta}\frac{dw_1{}^*}{d\eta}\right)+\frac{h^{*3}(1-\nu)z_1}{12R^*}\varepsilon\frac{dy_1{}^*}{d\eta}+\frac{\nu h^* z_1}{R^*}\varepsilon w_1{}^*=0$$

$$2.\qquad \left(\frac{h^{*3}(1-\nu)}{12}\frac{d^2y_1{}^*}{d\eta^2}+\frac{h^{*3}(1-\nu)z_1}{12R^*}\varepsilon\frac{d^2u_1{}^*}{d\eta^2}+\frac{h^{*3}(1-\nu)z_1}{12R^*}\varepsilon\left(\frac{dw_0{}^*}{d\eta}\frac{d^2w_1{}^*}{d\eta^2}+\frac{dw_1{}^*}{d\eta}\frac{d^2w_0{}^*}{d\eta^2}\right)\right)+ \frac{G}{\alpha}h^*\left(\frac{dw_1{}^*}{d\eta}+y_1{}^*\right)=0$$

$$3.\qquad -\left(\alpha h^*(1-\nu)V^*\frac{d^2w_1{}^*}{d\eta^2}+\frac{\alpha h^*(1-\nu)z_1}{12R^*}\varepsilon\frac{dy_0{}^*}{d\eta}\frac{d^2w_1{}^*}{d\eta^2}+\frac{\alpha h^*\nu z_1}{R^*}\varepsilon w_0{}^*\frac{d^2w_1{}^*}{d\eta^2}+\alpha h^*(1-\nu)\frac{du_1{}^*}{d\eta}\frac{d^2w_0{}^*}{d\eta^2}+\alpha h^*(1-\nu)\left(\frac{dw_0{}^*}{d\eta}\frac{d^2w_0{}^*}{d\eta^2}\frac{dw_1{}^*}{d\eta}\right)+\frac{h^{*3}(1-\nu)\alpha z_1}{12R^*}\varepsilon\frac{dy_1{}^*}{d\eta}\frac{d^2w_0{}^*}{d\eta^2}\right)+\frac{\alpha(1-\nu)mz_1}{R^*}\varepsilon w_1+ \frac{\alpha\nu h^* z_1}{R^*}\varepsilon\frac{du_1{}^*}{d\eta}+\frac{\alpha\nu h^* z_1}{R^*}\varepsilon\left(\frac{dw_0{}^*}{d\eta}\frac{dw_1{}^*}{d\eta}\right)-Gh^*\left(\frac{d^2w_1{}^*}{d\eta^2}+\frac{dy_1{}^*}{d\eta}\right)=0 \qquad (۳-۱۳)$$

با جایگذاری رابطه(۳-۱۲) در معادلات رابطه(۳-۱۳) می‌توان دستگاه معادلات(۳-۱۴) را به دست آورد.

$$1.\qquad h^*(1-\nu)\frac{du_1{}^*}{d\eta}+\frac{h^{*3}(1-\nu)z_1}{12R^*}\varepsilon\frac{dy_1{}^*}{d\eta}+\frac{\nu h^* z_1}{R^*}\varepsilon w_1{}^*=0$$

$$2.\qquad -\left(\frac{h^{*3}(1-\nu)}{12}\frac{d^2y_1{}^*}{d\eta^2}+\frac{h^{*3}(1-\nu)z_1}{12R^*}\varepsilon\frac{d^2u_1{}^*}{d\eta^2}\right)+\frac{G}{\alpha}h^*\left(\frac{dw_1{}^*}{d\eta}+y_1{}^*\right)=0$$

$$3.\qquad -(\alpha h^*(1-\nu)P^*+Gh^*)\frac{d^2w_1{}^*}{d\eta^2}+\frac{\alpha(1-\nu)mz_1}{R^*}\varepsilon w_1+\frac{\alpha\nu h^* z_1}{R^*}\varepsilon\frac{du_1{}^*}{d\eta}-Gh^*\frac{dy_1{}^*}{d\eta}=0 \qquad (۳-۱۴)$$

دستگاه معادلات(۳-۱۴) را که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی است می‌توان به شکل ماتریسی رابطه(۳-۱۵) نوشت:

$$[A]_2 \frac{d^2\{Y\}}{d\eta^2} + [A]_1 \frac{d\{Y\}}{d\eta} + [A]_0\{Y\} + \{F\} = \{0\}$$

$$\{Y\} = [y_1, w_1, u_1]^T , \{F\} = [0,0,0]^T , [A]_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\nu h^* z_1}{R^*}\varepsilon & 0 \\ \frac{Gh^*}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha(1-\nu)mz_1}{R^*}\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{h}^{*3}(1-\nu)\mathrm{z}_1}{12\mathrm{R}^*}\varepsilon & 0 & \mathrm{h}^*(1-\nu) \\ 0 & \frac{G}{\alpha}\mathrm{h}^* & 0 \\ -Gh^* & 0 & \frac{\alpha\nu h^* z_1}{R^*}\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$[A]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{h}^{*3}(1-\nu)}{12} & 0 & -\frac{\mathrm{h}^{*3}(1-\nu)\mathrm{z}_1}{12\mathrm{R}^*} \\ 0 & -(\alpha\mathrm{h}^*(1-\nu)P^* + Gh^*) & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

نکته مهم که باید به آن اشاره کرد وجود ضریب تصحیح برشی می‌باشد که باید در معادلات آن را اعمال کرد، برای این کار در معادلات رابطه(۳-۱۴) باید G را در یک ضریب ثابت ضرب کرد که به این عدد، ضریب تصحیح برشی گفته شده و در اکثر مقالات مرجع این مقدار $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته می‌شود.

معادلات (۳-۱۵) دارای حل عمومی و خصوصی است. با تعریف بردار Y به صورت رابطه(۳-۱۶) به عنوان حل عمومی و جایگزینی در (۳-۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\{Y\} = \{C\}e^{n\eta} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

$$([A]_2 n^2 + [A]_1 n + [A]_0)\{e\} = \{0\} \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

در رابطه(۳-۱۷)، پارامتر n در واقع مقدار ویژه مسئله می‌باشد که از برابر صفر قرار دادن دترمینان رابطه(۳-۱۷) به دست می‌آید و دارای پنج ریشه می‌باشد که یکی از آنها صفر بوده و چهار مقدار دیگر، دو به دو قرینه‌اند. به ازای هر مقدار ویژه یک بردار ویژه وجود دارد که از جایگزینی در(۳-۱۷) به دست می‌آید. پس از به دست آوردن بردارهای ویژه می‌توان پاسخ را به صورت رابطه (۳-۱۸) نوشت که در آن $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، $c_۴$ و $c_۵$ ضرایب ثابت بوده و $V_۱$، $V_۲$،$V_۳$، $V_۴$ و $V_۵$ بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه به دست آمده می‌باشند.

$$\{Y\} = c_1V_1 + c_2V_2e^{m_1\eta} + c_3V_3e^{-m_1\eta} + c_4V_4e^{m_2\eta} + c_5V_5e^{-m_2\eta} \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

لازم به ذکر است که V_1، V_2،V_3، V_4 و V_5 به ترتیب بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه صفر، m_1، $-m_1$، m_2 و $-m_2$ می‌باشند. ضرایب ثابت‌های c_1 تا c_5 با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند ولی با توجه به مقدار ویژه بودن مسئله تعداد ضرایب از معادلات بیشتر می‌باشد. در نهایت برای استخراج بار کمانش باید شرایط مرزی را بر روی معادلات اعمال کرد که منجر به یک دستگاه با پنج معادله و پنج مجهول می‌شود که دو معادله از این دستگاه به یکدیگر وابسته می‌باشند. حال می‌توان ماتریس ضرایب را تشکیل داد، که در این ماتریس بار P^* نیز وجود دارد و با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب معادله‌ای بر حسب بار P^* به دست می‌آید که با حل آن بار بحرانی یا همان بار کمانش حاصل می‌شود. حل این معادلات برای نرم افزار به صورت پارامتری غیر ممکن است و به همین خاطر باید تمام پارامترها مانند طول، شعاع، ضخامت و... را با مقدار عددی آن جایگزین کرد و سپس معادله را حل کرده تا به مقدار عددی متناظر بار کمانش رسید.

۳-۴) جمع‌بندی:

در این فصل حل معادلات تعادل و پایداری با استفاده از تئوری اغتشاشات و تئوری معادلات دیفرانسیل ارائه شد. برای به دست آوردن پاسخ معادلات پایداری نیاز به حل معادلات تعادل بود که به همین خاطر ابتدا معادلات تعادل حل شده و سپس پاسخ معادلات پایداری با استفاده از آن تعیین گردیده است.

فصل چهارم

حل مسئله کمانش به روش عددی

۴-۱)مقدمه:

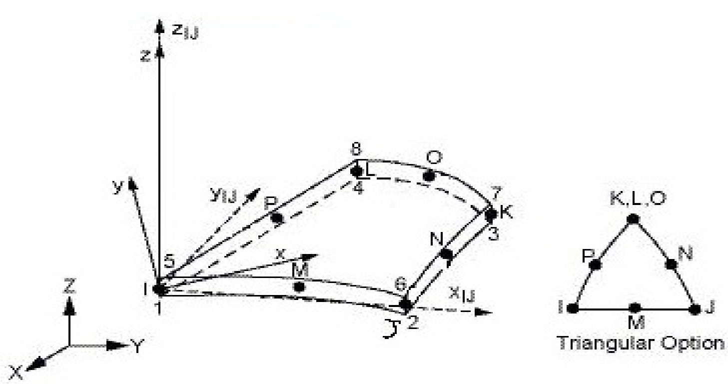
در این فصل بار کمانش برای یک پوسته با استفاده از روش المان محدود[1]محاسبه می‌شود. برای این کار از نرم افزار انسیس ویرایش ۱۱ استفاده شده است. نرم افزار انسیس، یک نرم افزار قدرتمند بوده که به روش عددی محاسبات خود را انجام داده و ما در اینجا به کمک آن و با استفاده از تحلیل استاتیکی و تحلیل مقدار ویژه آن، بار کمانش و پاسخ معادلات تعادل را به دست آورده‌ایم.

۴-۲)مدل سازی:

برای به دست آوردن بار کمانش ابتدا باید پوسته را در محیط انسیس شبیه سازی کرد. سپس عملیات شبکه-بندی را روی آن انجام داده و پس از اعمال شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری مسئله را یک بار به صورت استاتیکی حل کرد و در نهایت با حل مسئله مقدار ویژه بار کمانش نهایی را به دست آورد. پوسته الاستیک همسانگرد و همگن بوده و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون آن در این تحقیق عبارتند از:

$$E = 2e11(Pa), \nu = 0.3$$

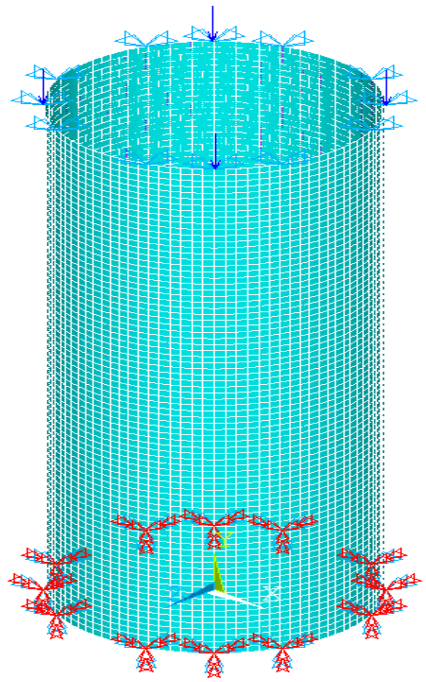
المان استفاده شده SHELL93 است که در هر گره[2] از این المان شش درجه آزادی وجود دارد و هر المان با هشت گره تعریف می‌شود. همچنین این المان قابلیت اعمال جابجایی‌های بزرگ[3] را در خود دارد. شکل (۴-۱) این المان را نشان می‌دهد[۲۹]:



شکل(۴-۱) المانSHELL93 در محیط انسیس

[1] Finite Element Method(FEM)
[2] Node
[3] Large Deflection

در شکل(۴-۲) یک مدل شبکه‌بندی شده در محیط انسیس با بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی مورد نظر مشخص شده است. با استفاده از سعی و خطا مشخص شد که اندازه 0.01 m برای هر لبه از المان در این شبکه‌بندی مناسب می‌باشد.



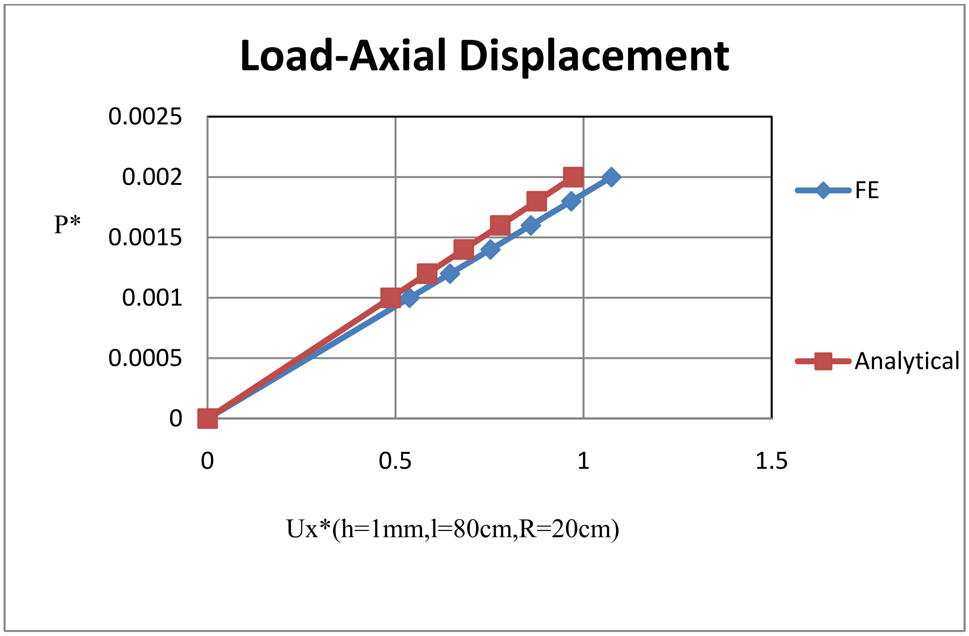
شکل(۴-۲) مدل شبکه‌بندی شده یک پوسته استوانه‌ای در محیط انسیس

شرایط تکیه‌گاهی در یک طرف گیردار و در طرف دیگر نیز گیردار بوده و تنها در جهت طولی می‌تواند حرکت کند. برای اعمال این شرایط در یک طرف لبه‌های پوسته در تمام جهات مهار شده و در لبه دیگر که فشار وارد می‌شود تنها در جهات z و x(شعاعی) پوسته مهار شده و قابلیت حرکت ندارد. بار اعمالی به صورت فشار وارد بر لبه بالایی می‌باشد که در نهایت بار کمانش به دست آمده نیوتن بر واحد طول است. در تحلیل‌های انجام شده از ابعاد زیر در حالت‌های مختلف استفاده شده است:

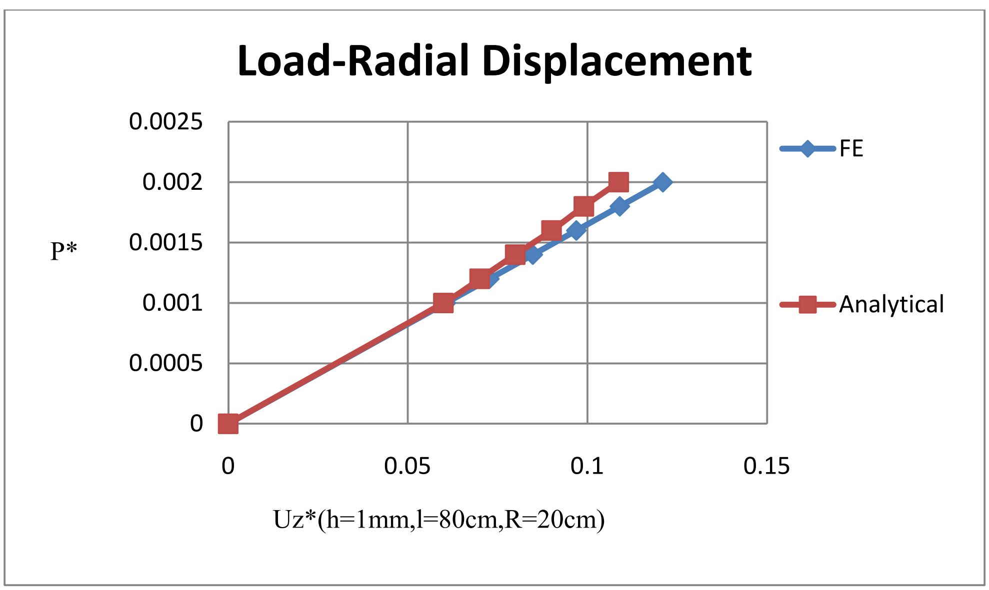
$$l = 80cm$$
$$R = 20cm$$
$$h = 1mm$$

که l طول، h ضخامت و R شعاع پوسته است. بار کمانش برای تک تک حالت‌های مختلف با ابعاد مختلف به دست آمده است و نتایج حاصل روی نمودارهای مختلف رسم شده است.

برای پوسته با مشخصات ذکر شده نمودار بار- جابجایی برای نقطه وسط پوسته در شکل (۴-۳) و (۴-۴) رسم شده است. در این نمودارها تغییرات جابجایی طولی و شعاعی در حالت استاتیک با افزایش بار رسم شده است.

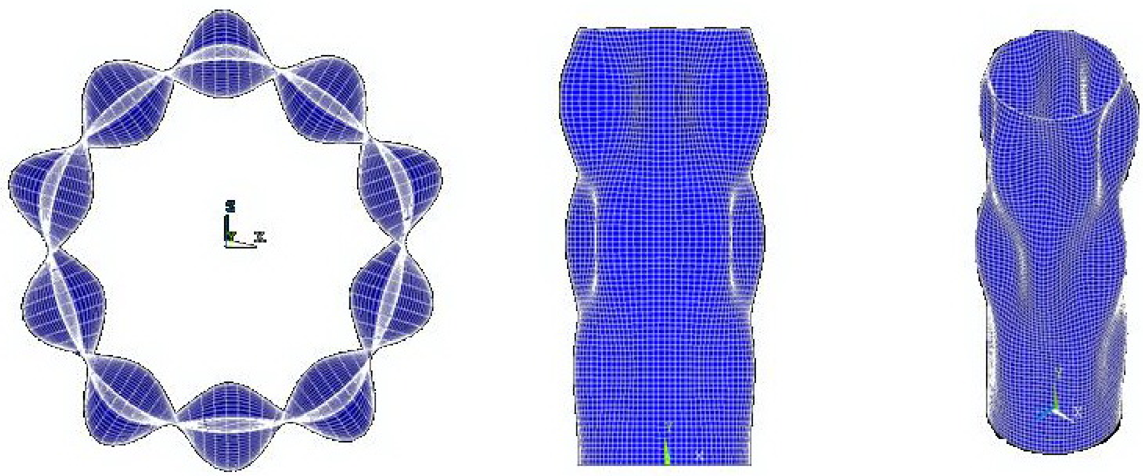


شکل(۴-۳) تغییرات جابجایی طولی برای نقطه وسط پوسته با افزایش بار



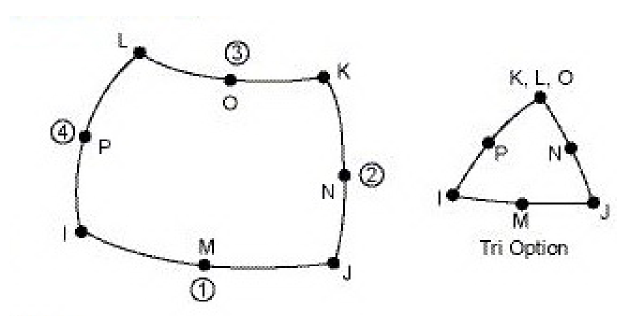
شکل(۴-۴) تغییرات جابجایی شعاعی برای نقطه وسط پوسته با افزایش بار

برای این پوسته بار کمانش ۵۹۷۰۸۲N/m است و در شکل(۴-۵) سه شکل مد کمانش آن از زوایای مختلف رسم شده است که کمانش متقارن محوری را نشان می‌دهد (در هر سه مد کمانش).



شکل(۴-۵) شکل مدهای کمانش برای یک حالت خاص

برای بررسی تغییرات در راستای ضخامت از المان PLANE82 استفاده شده است که یک المان دو بعدی بوده و برای مدل کردن پوسته در حالت متقارن محوری[1]، از این المان استفاده شده است. این المان دارای هشت گره و در هر گره دو درجه آزادی می‌باشد[۳۱]. با تعریف مسیرهای مورد نیاز تغییرات جابجایی‌ها در طول مسیرها به دست آمده است. در شکل (۴-۶) این المان رسم شده است:



شکل(۴-۶) المان PLANE82 در محیط انسیس

1 Axisymmetric

۴-۳)جمع‌بندی:

در این فصل المان‌های استفاده شده و روش کار به طور مختصر توضیح داده شده است. برای مدل کردن پوسته و استخراج بار کمانش از المان SHELL93 و برای به دست آوردن نمودارهای تغییرات جابجایی از المان PLANE82 استفاده شده است. مشخصات هر المان در این فصل توضیح داده شده است.

فصل پنجم

بررسی نتایج

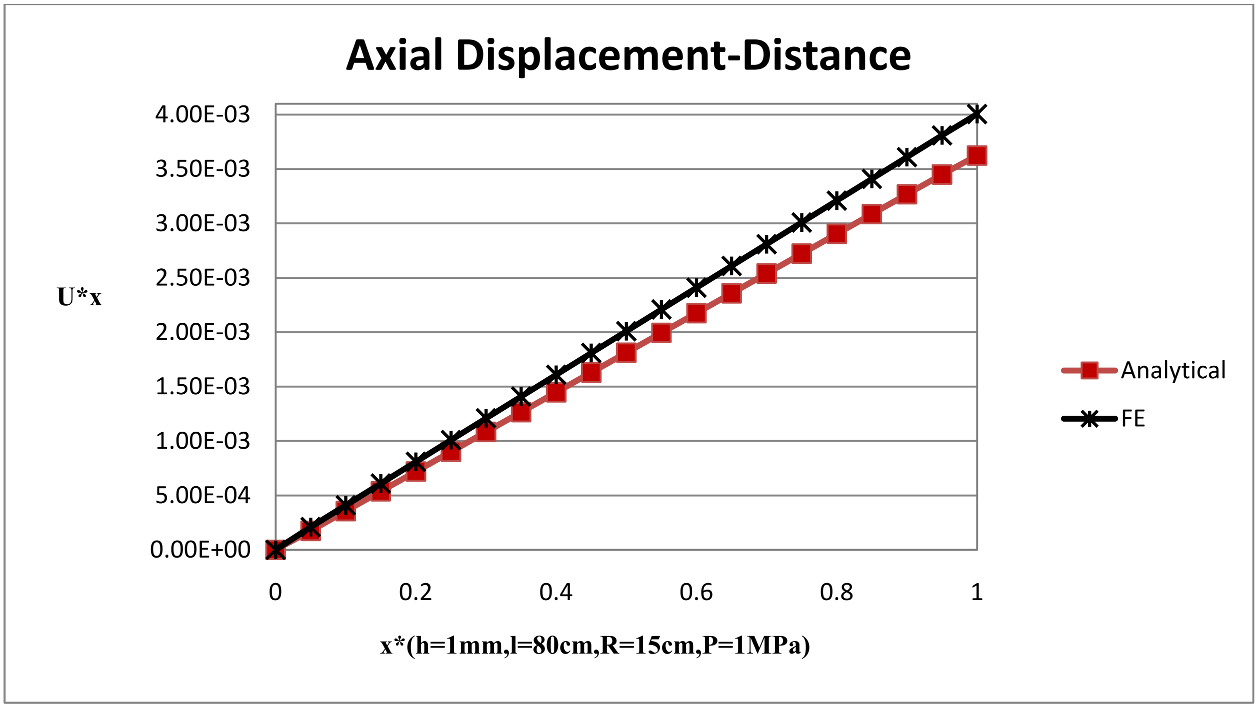
۵-۱)مقدمه:

در این بخش نتایج حاصل از روش تحلیلی با نتایج حاصل از روش عددی و چند مرجع دیگر مقایسه شده و میزان دقت پاسخ تحلیلی بررسی خواهد شد. همچنین با رسم نمودارهای مختلف میزان اختلاف پاسخ تحلیلی با نتایج دیگر و همچنین تاثیر پارامترهای هندسی بر میزان این اختلاف نشان داده خواهد شد.

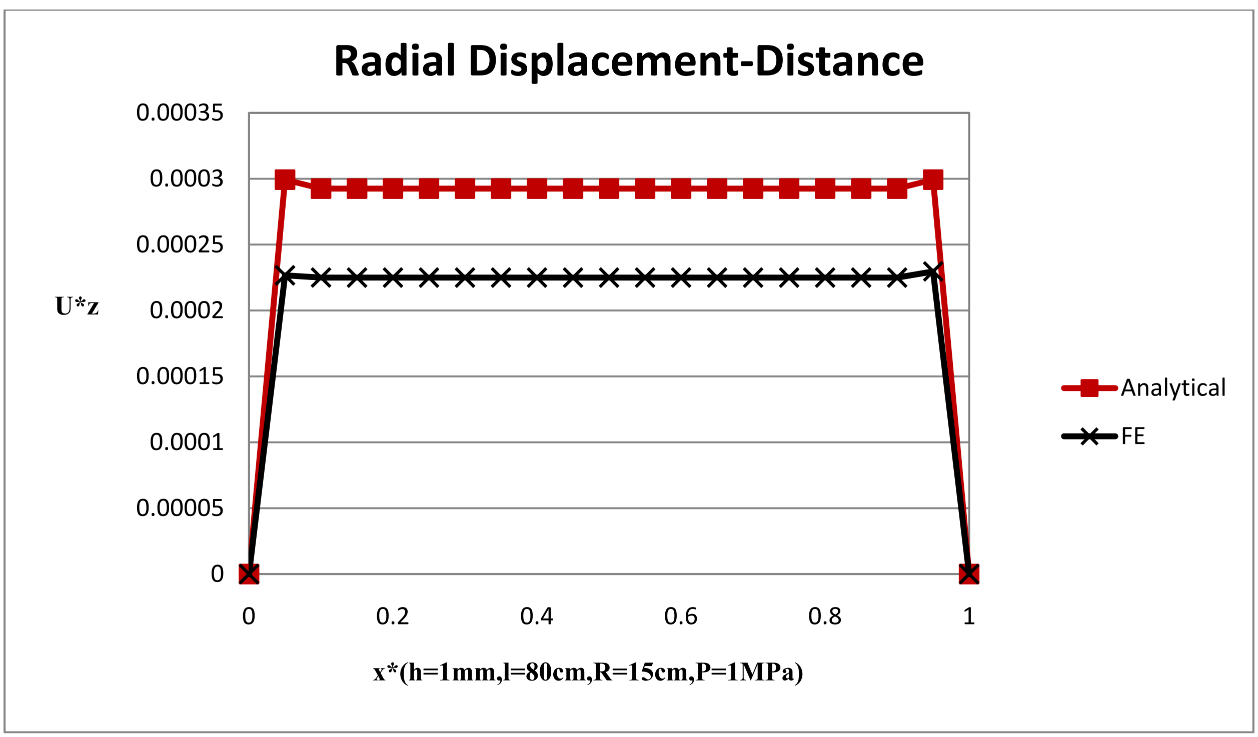
۵-۲)مقایسه نتایج حل تحلیلی با حل عددی

پوسته‌ای استوانه‌ای به طول l، ضخامت h و شعاع R تحت فشار محوری P قرار دارد. مدول الاستیک پوسته ۲۰۰Gpa و ضریب پواسون آن ۰/۳ است. لبه پایینی پوسته ثابت و فشار به لبه بالایی آن وارد می‌شود. موقعیت طولی هر مقطع نسبت به لبه ثابت، x است و $x^{*}=x/l$ و در نمودارها با عنوان "فاصله بی‌بعد" تعریف شده است.

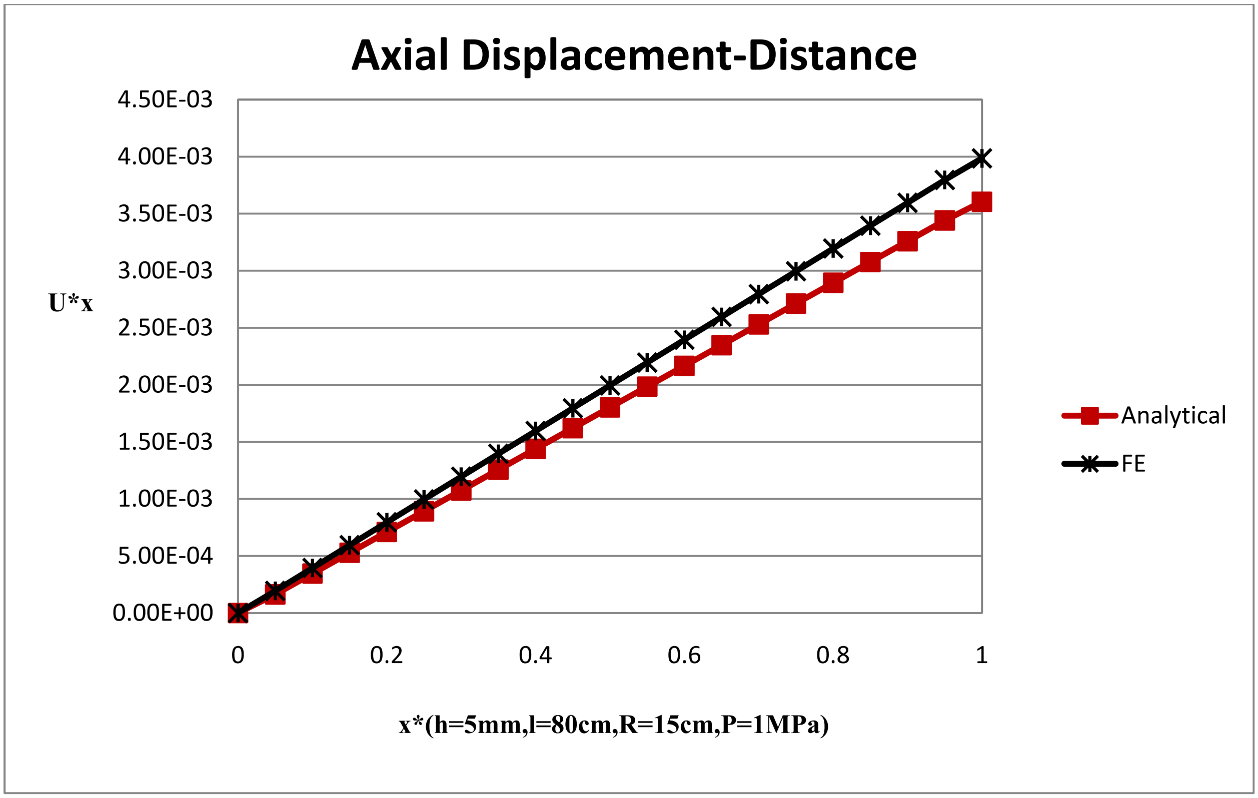
در نمودارهای (۵-۱) تا (۵-۶) جابجایی طولی صفحه میانی و شعاعی برای دو حل تحلیلی(حل دقیق) و عددی با سه ضخامت متفاوت رسم شده است. مشاهده می‌شود افزایش ضخامت تاثیر چندانی بر پاسخ حل تحلیلی ندارد به عبارت دیگر میزان خطا با افزایش ضخامت زیاد نمی‌شود، علت اصلی این موضوع استفاده از تئوری تغییر شکل برشی است زیرا با در نظر گرفتن این تئوری در واقع اثر برش عرضی را نیز در محاسبات خود منظور کرده‌ایم که باعث بالا بردن میزان دقت پاسخ تحلیلی شده و دیگر پاسخ تنها برای پوسته‌های نازک کاربرد ندارد. در واقع افزایش ضخامت باعث پررنگتر شدن تاثیر عامل برش در جابجایی‌ها می‌شود. اما باید توجه داشت که افزایش ضخامت تا حدی مجاز است و برای مشخص شدن این موضوع باید تغییرات جابجایی طولی را در ضخامت پوسته بررسی کرد که به همین خاطر این تغییرات در سه ضخامت مختلف یک، پنج و ده میلیمتر در نمودارهای(۵-۷) تا (۵-۹) رسم شده است. مشاهده می‌شود در ضخامت یک فرض خطی بودن تغییرات یک فرض مناسب است. در ضخامت پنج میلیمتر، تقریبا تغییرات خطی است و باز هم فرض خطی بودن تغییرات یک فرض مناسب است اما برای ضخامت ده میلیمتر دیگر نمی‌توان این تغییرات را خطی فرض کرد. جابجایی طولی در راستای ضخامت تغییری ندارد به جز در نزدیکی مرزها، که این موضوع در پاسخ عددی به وضوح به چشم می‌خورد ولی در پاسخ تئوری کلاسیک این تغییرات دیده نمی‌شود در حالی که در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول این تغییرات به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود. تمامی این تغییرات بر روی نمودارهای رسم شده کاملا مشخص است. به طور کلی تئوری تغییر شکل برشی با مرتبه‌های بالاتر برای پوسته‌های ضخیم مناسبتر از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی است.



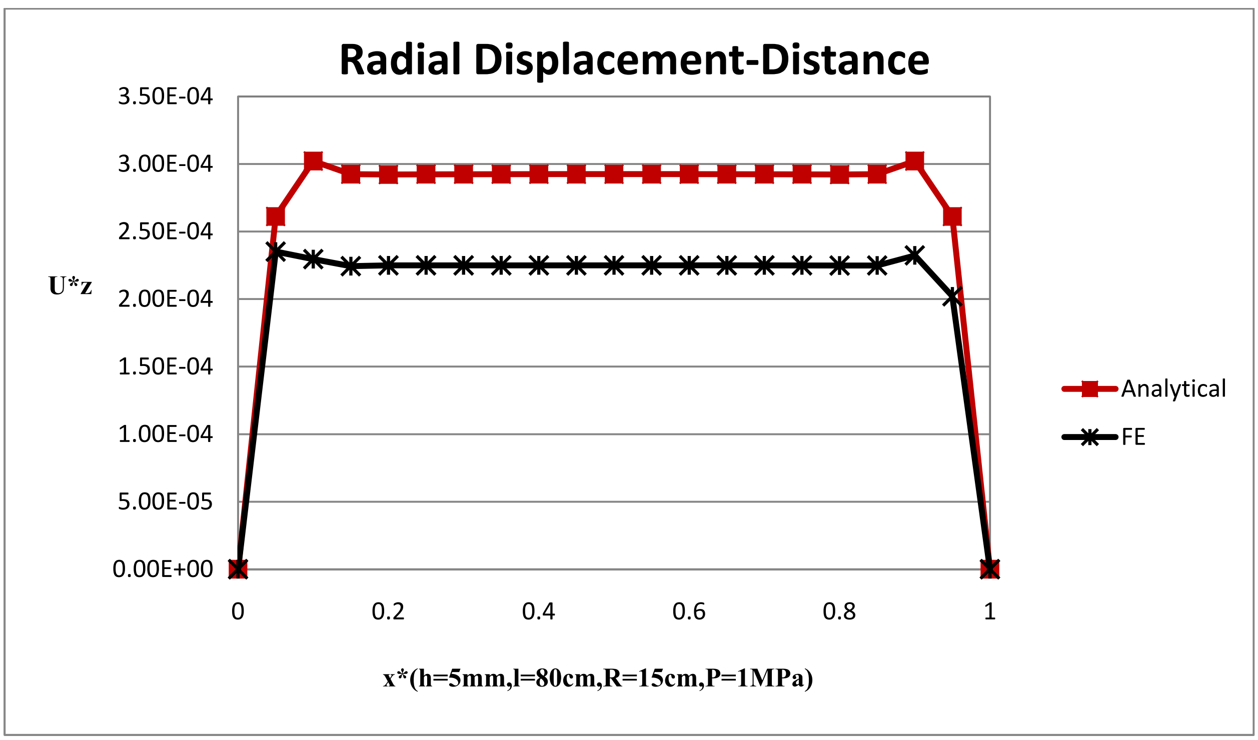
شکل(۵-۱) جابجایی طولی صفحه میانی برای ضخامت یک میلیمتر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی



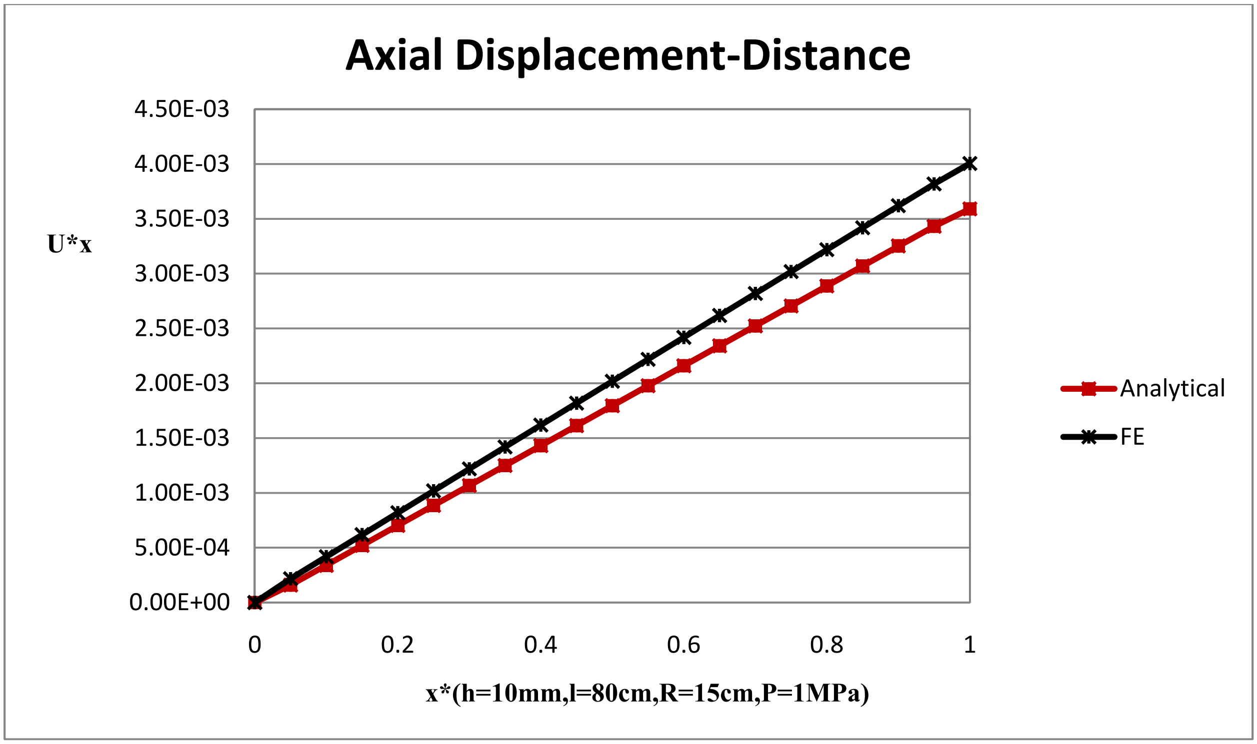
شکل(۵-۲) جابجایی شعاعی برای ضخامت یک میلیمتر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی



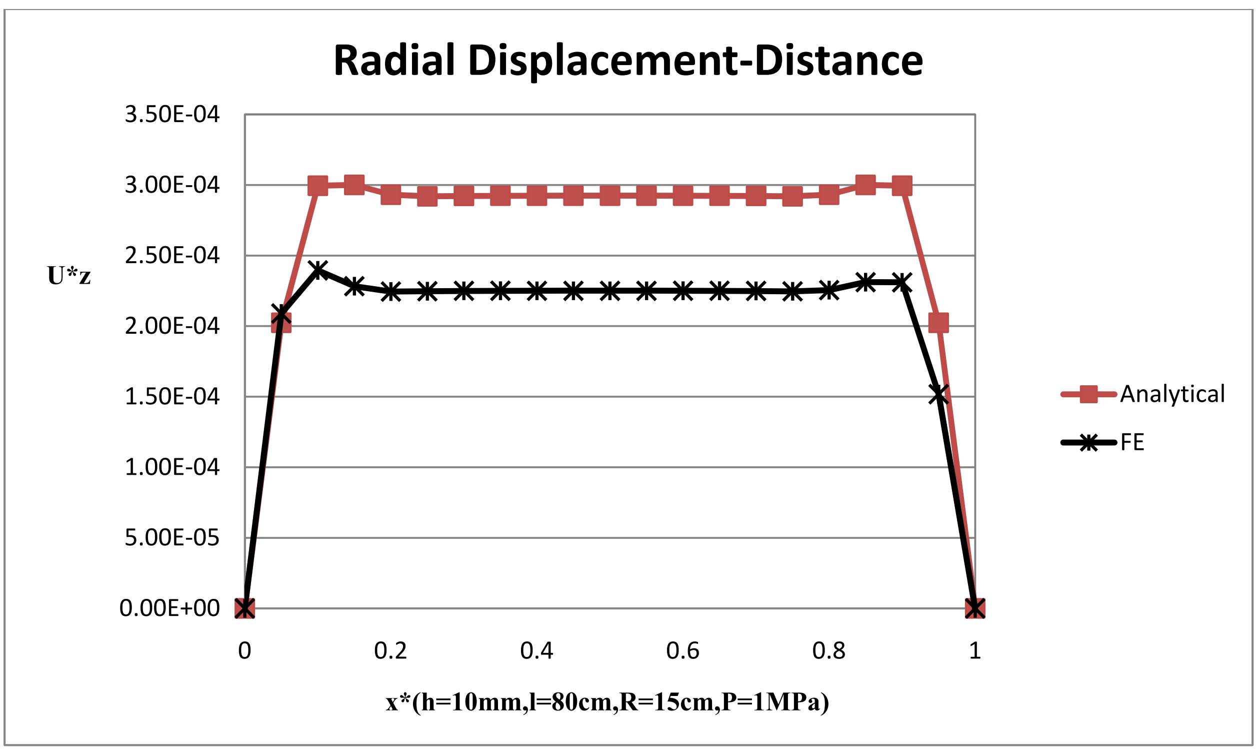
شکل(۵-۳) جابجایی طولی صفحه میانی برای ضخامت پنج میلیمتر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی



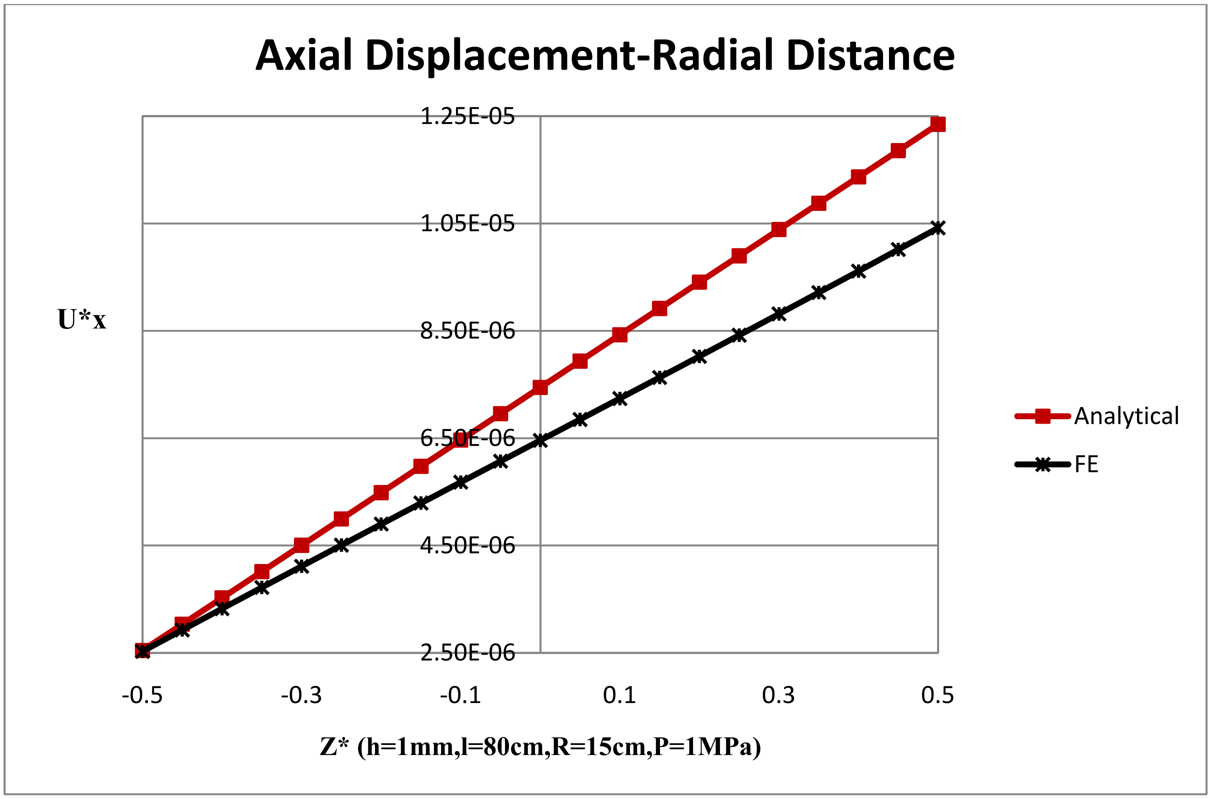
شکل(۵-۴) جابجایی شعاعی برای ضخامت پنج میلیمتر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی



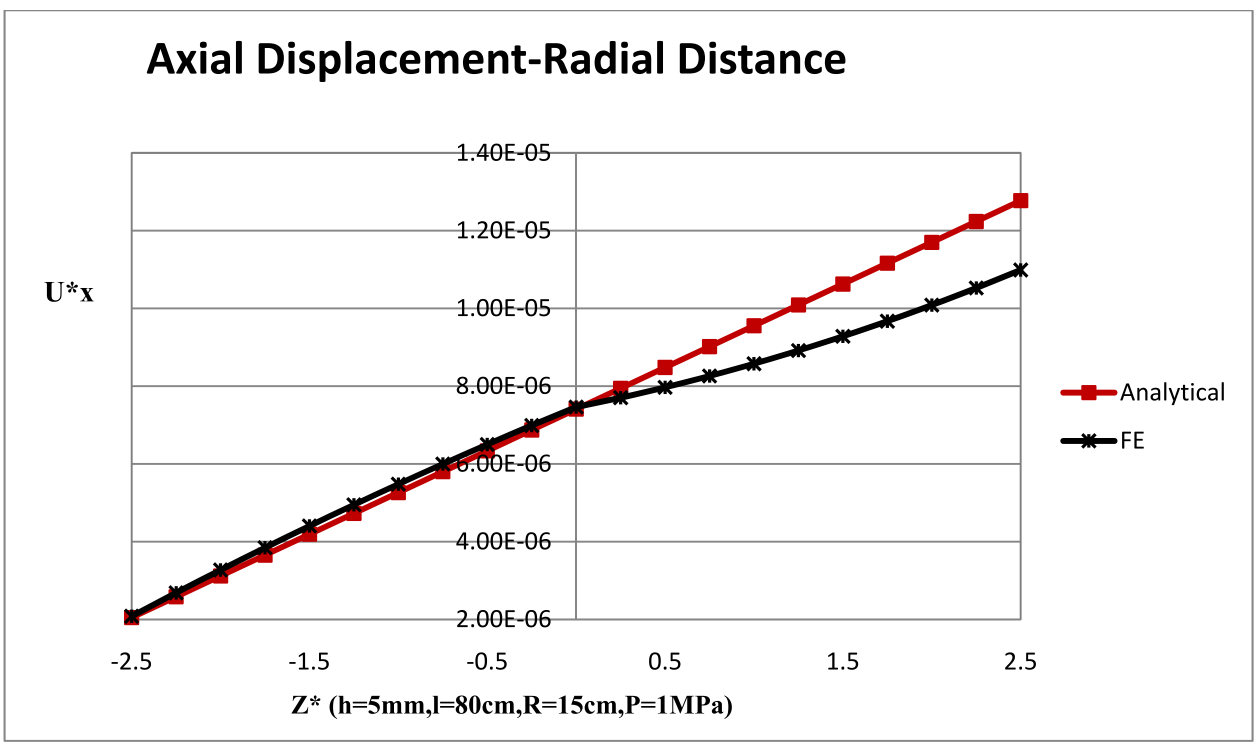
شکل(۵-۵) جابجایی طولی صفحه میانی برای ضخامت ده میلیمتر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی



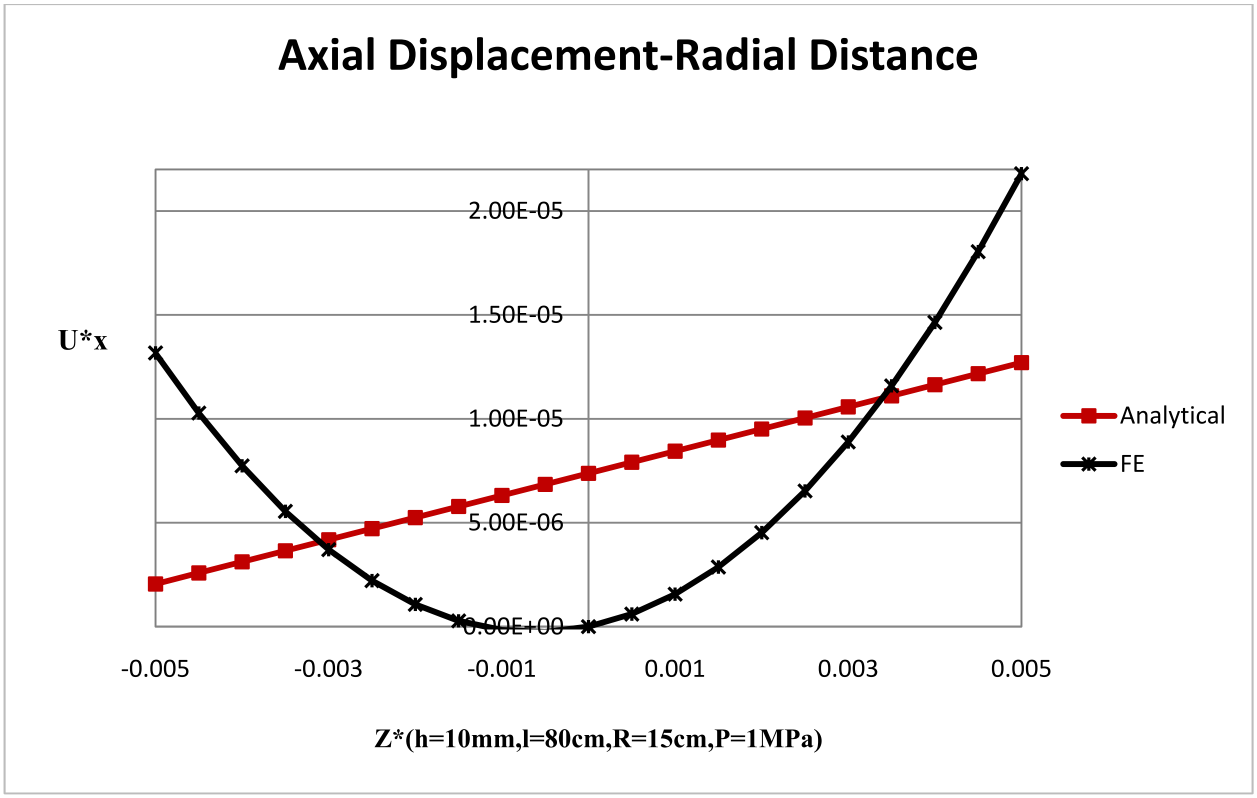
شکل(۵-۶) جابجایی شعاعی برای ضخامت ده میلیمتر بر حسب فاصله بی‌بعد در مقایسه با حل عددی



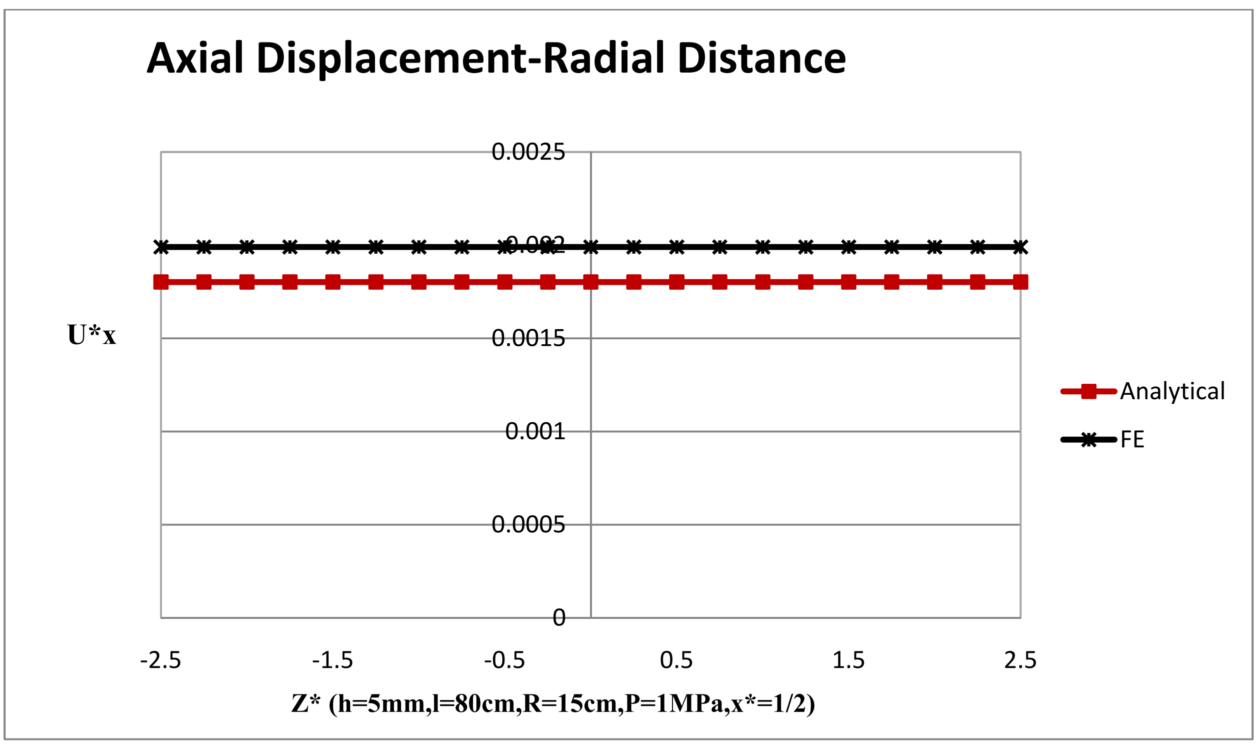
شکل(۵-۷) جابجایی طولی در راستای ضخامت در نزدیکی مرز (x*=0.002) ضخامت یک میلیمتر



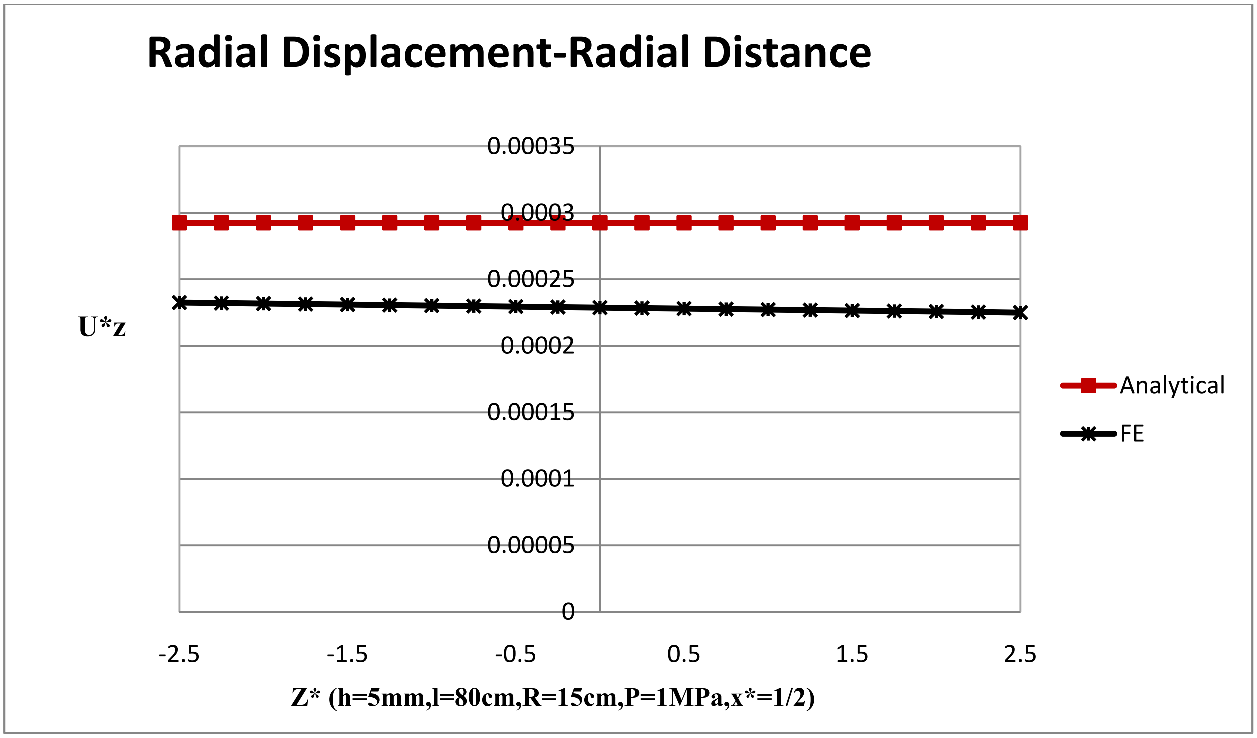
شکل(۵-۸) جابجایی طولی در راستای ضخامت در نزدیکی مرز (x*=0.002) ضخامت پنج میلیمتر



شکل(۵-۹) جابجایی طولی در راستای ضخامت در نزدیکی مرز (x*=0.002) ضخامت ده میلیمتر



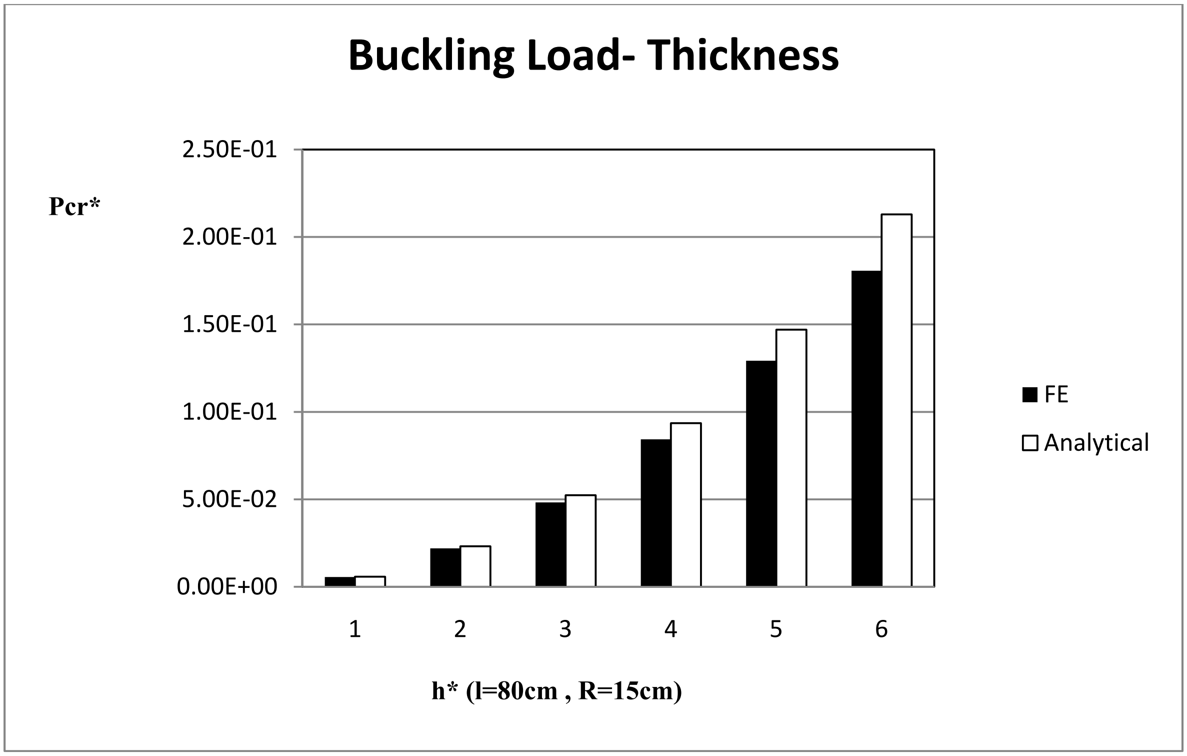
شکل(۵-۱۰) جابجایی طولی در راستای ضخامت در وسط پوسته(x*=0.5)



شکل(۵-۱۱) جابجایی شعاعی در راستای ضخامت در وسط پوسته(x*=0.5)

با دقت در نمودارهای(۵-۱۰) و (۵-۱۱) نیز مشاهده می‌شود که فرض ثابت بودن جابجایی شعاعی در راستای ضخامت فرضی مناسب بوده و جابجایی طولی نیز در طول پوسته نسبت به ضخامت تغییراتی از خود نشان نمی-دهد البته این نمودارها برای ضخامت ۵ میلیمتر رسم شده و نتایج برای ضخامت ده میلیمتر نیز چنین است. تمام نمودارهای (۵-۱) تا (۵-۱۱) با توجه به حل دقیق تحلیلی رسم شده‌اند که نشان دهنده میزان دقت پاسخ است. خیز شعاعی به جز در نزدیکی مرزها تقریبا مقدار ثابتی است و همچنین میزان چرخش در جابجایی طولی نیز تقریبا صفر است(بجز نزدیکی لبه‌ها)، که با توجه به این فرضیات معادلات پایداری با یک تقریب خوب حل می‌شد.

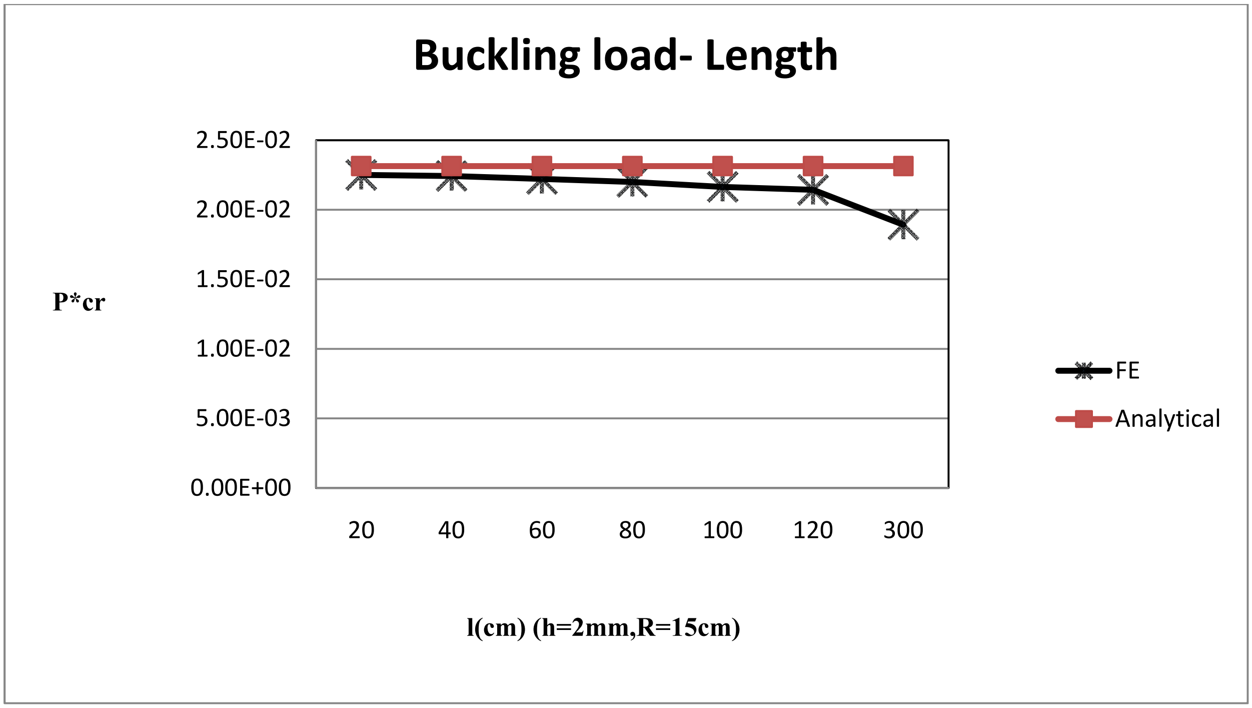
در نمودار شکل(۵-۱۲) تغییرات بار کمانش به دست آمده از دو پاسخ تحلیلی و عددی نسبت به تغییرات ضخامت برای مقادیر ثابت طول و شعاع رسم شده است. با توجه به این نمودار کاملا مشخص است که برای ضخامت‌های کوچک(پوسته نازک) نتایج تحلیلی و حل عددی بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و مقدار خطا زیر یک درصد می‌باشد ولی در ضخامت‌های بالا این اختلاف زیاد شده تا جایی که خطا به حدود ۱۲ درصد می‌رسد.



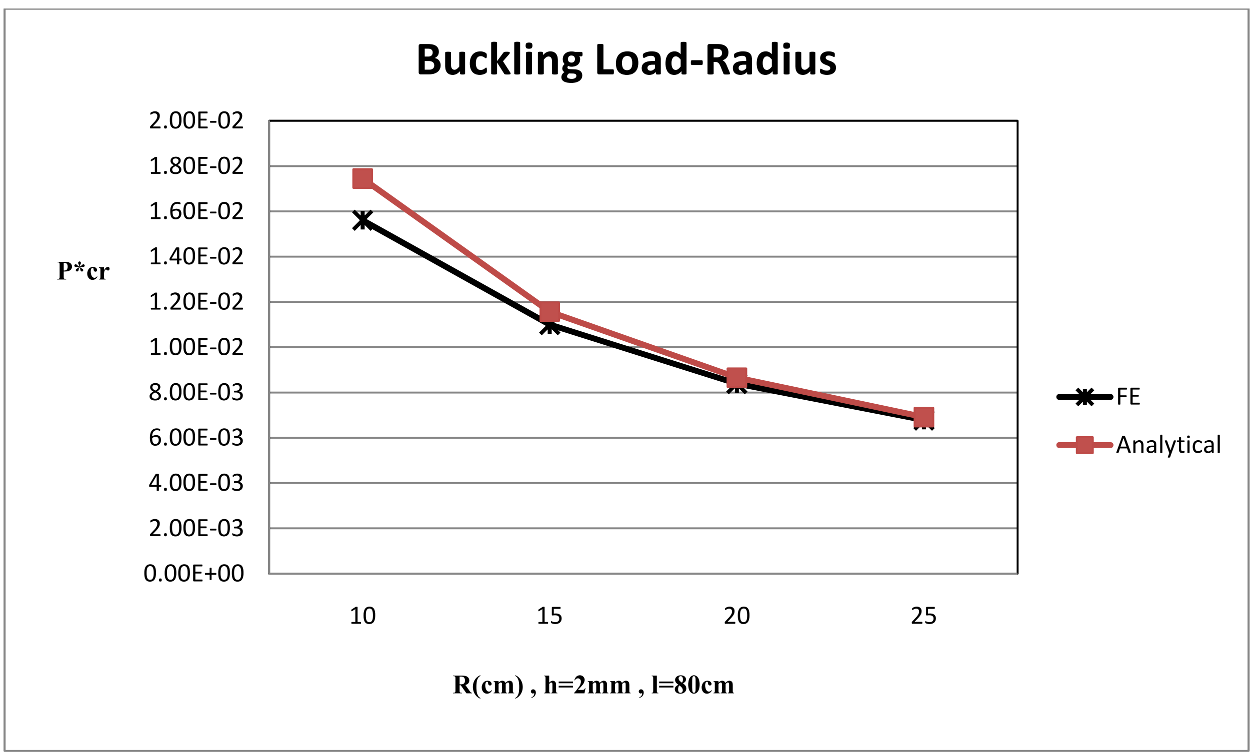
شکل(۵-۱۲) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل عددی و تحلیلی نسبت به ضخامت برای مقادیر ثابت طول وشعاع

در نمودار شکل(۵-۱۳) تغییرات بار کمانش برای دو حل تحلیلی و عددی نسبت به تغییرات طول پوسته برای مقادیر ثابت ضخامت و شعاع رسم شده است. همانطور که از شکل مشخص است تغییرات طول تاثیر چندانی بر حل تحلیلی ندارد البته برای نتایج عددی نیز این موضوع صادق است اما همانطور که از نمودار مشخص است افزایش طول باعث یک مقدار کاهش جزئی در بار کمانش می‌شود که این کاهش در حل تحلیلی مشاهده نمی-شود. می‌توان نتیجه گرفت که افزایش طول پوسته باعث افزایش درصد خطا بین پاسخ تحلیلی و عددی می‌شود.

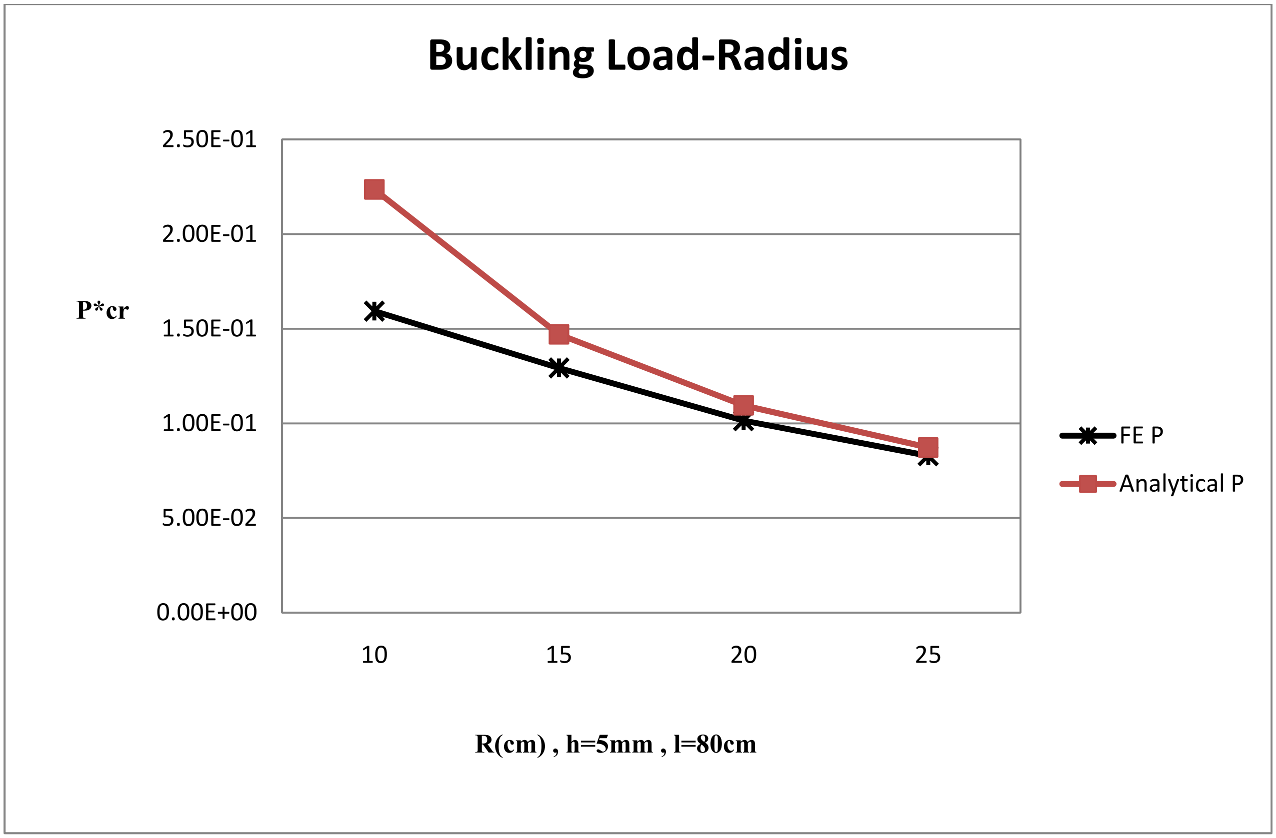
در نمودار شکل(۵-۱۴) تغییرات بار کمانش به دست آمده از دو روش تحلیلی و عددی نسبت به تغییرات شعاع برای مقادیر ثابت ضخامت و طول رسم شده است. افزایش شعاع علاوه بر کاهش بار کمانش میزان اختلاف بین نتایج تحلیلی و عددی نیز کاهش می‌یابد به طوری که در شعاع ۲۵ سانتیمتر درصد خطا تقریبا به صفر می‌رسد. نمودار شکل(۵-۱۵) نیز تغییرات بار کمانش را با شعاع نشان می‌دهد. افزایش شعاع، بار کمانش را کم می‌کند و در مقایسه با شکل (۵-۱۴) می‌توان نتیجه گرفت که کاهش ضخامت باعث کم شدن اختلاف بین حل تحلیلی و عددی می‌شود. با توجه به نمودارهای رسم شده کمترین میزان خطا در طول ۸۰ سانتیمتر و شعاع ۲۵ سانتیمتر و ضخامت ۱ میلیمتر اتفاق می‌افتد.



شکل(۵-۱۳) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل عددی و تحلیلی نسبت به طول برای مقادیر ثابت ضخامت وشعاع

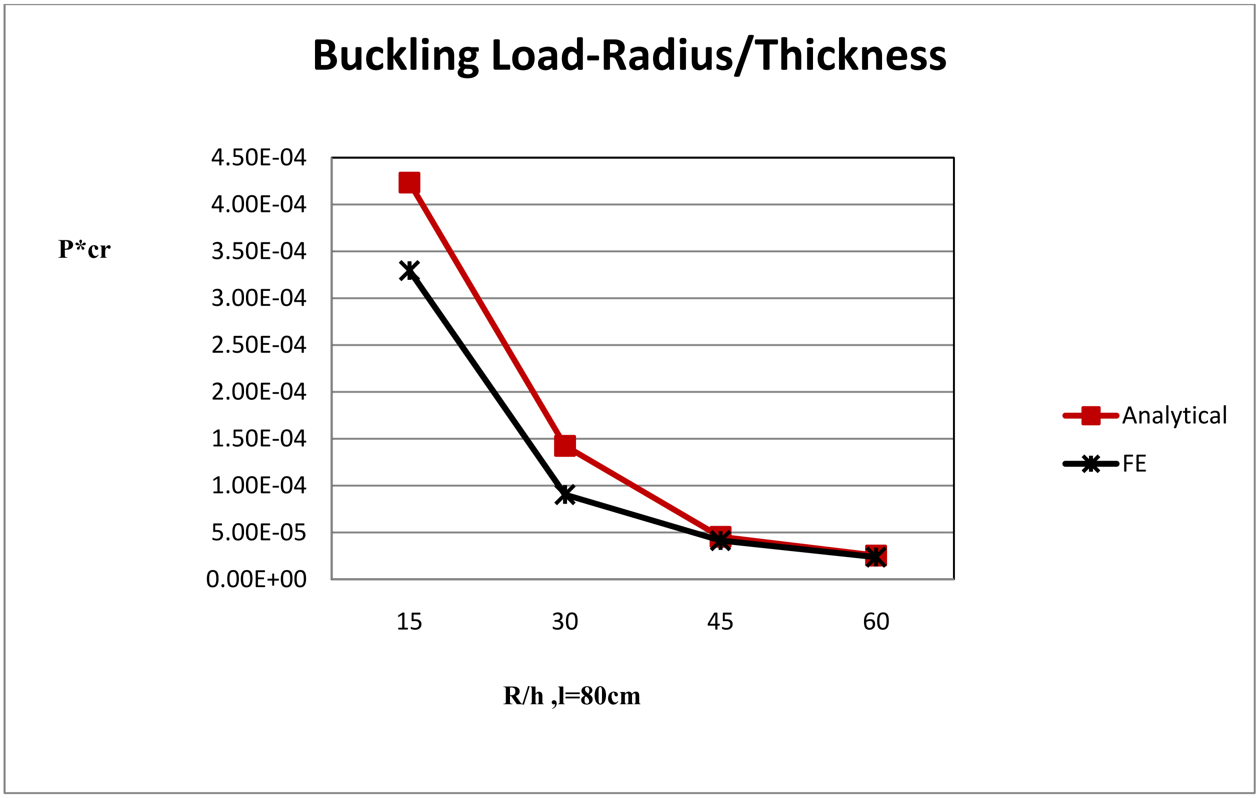


شکل(۵-۱۴) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل عددی و تحلیلی نسبت به شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت(h=2mm)



شکل(۵-۱۵) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل عددی و تحلیلی نسبت به شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت(h=5mm)

پاسخ به دست آمده از روش تحلیلی برای بار کمانش، علاوه بر پوسته‌های نازک برای پوسته‌های ضخیم نیز یک مقدار قابل قبول را می‌دهد، برای بررسی این موضوع نمودار شکل(۵-۱۶) نشان می‌دهد که افزایش ضریب R/h که به معنای نازک شدن پوسته است باعث کاهش خطا می‌شود. بیشترین مقدار خطا در نمودار زیر مقدار ۲۱ درصد می‌باشد.

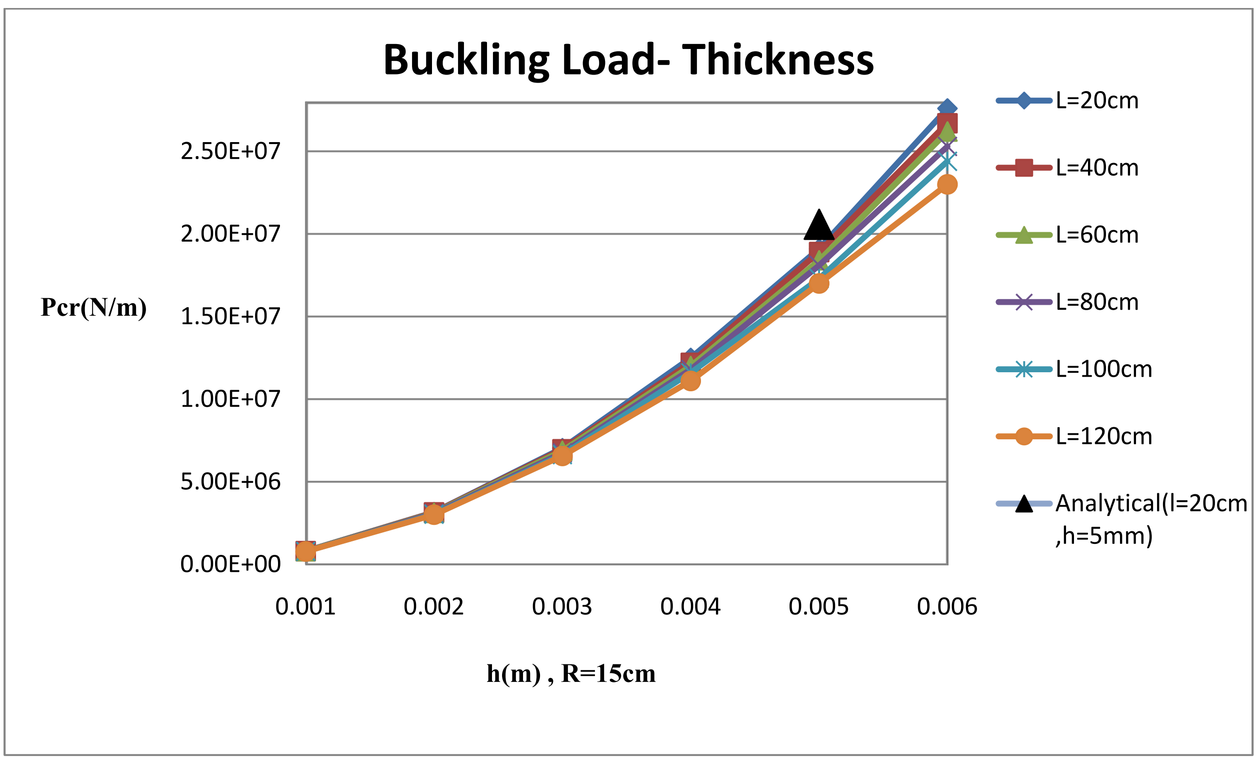


شکل(۵-۱۶) بررسی تاثیر ضریب R/h بر مقدار بار کمانش در مقایسه با روش عددی

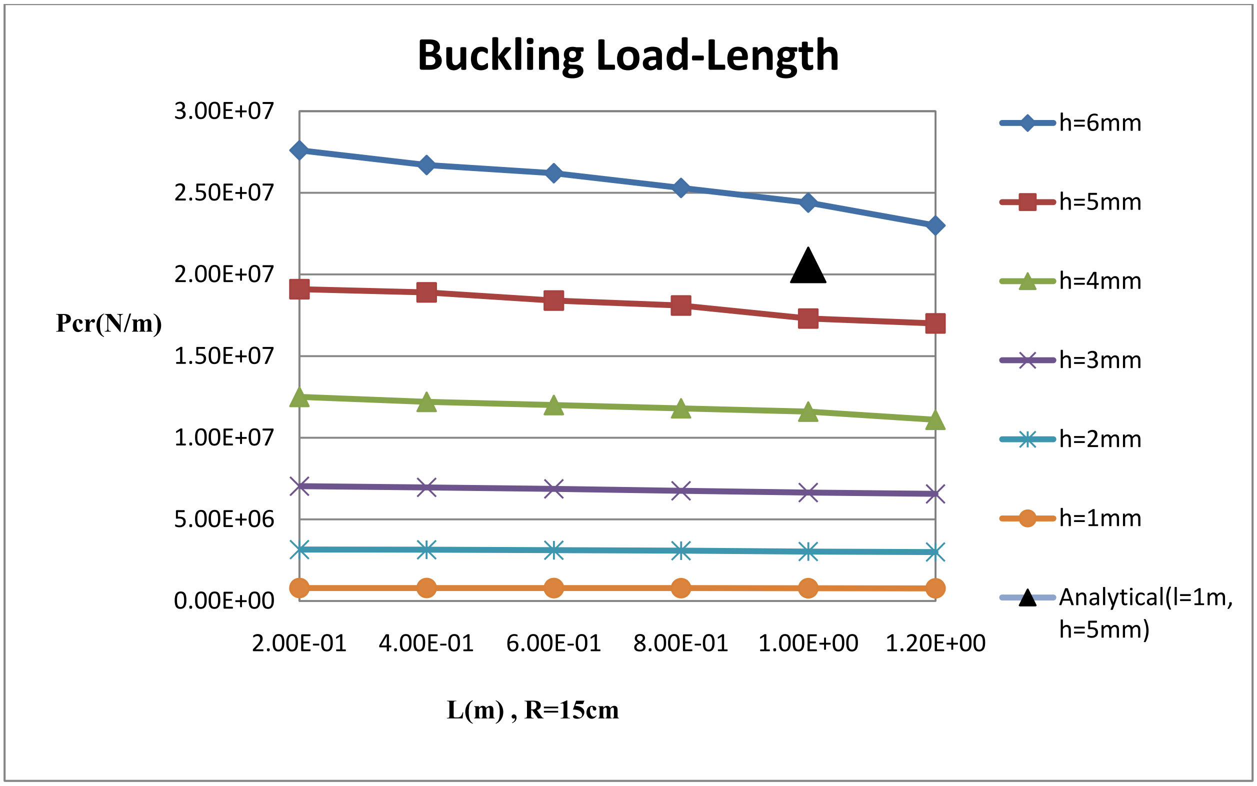
در نمودارهای(۵-۱۷) تا (۵-۲۰) که برای نتایج حل عددی رسم شده است می‌توان تاثیر پارامترهای هندسی را بر روی بار کمانش مشاهده کرد. در نمودار شکل(۵-۱۷) تغییرات بار کمانش به دست آمده از حل عددی نسبت به ضخامت برای طول‌های مختلف پوسته رسم شده است. به روشنی از این نمودار پیداست که افزایش و یا کاهش طول پوسته در مقایسه با تغییرات ضخامت اثری بر بار کمانش ندارد و فقط با افزایش طول مقدار بار کمانش به مقداری جزئی کاهش می‌یابد و این در حالی است که افزایش ضخامت به شدت باعث افزایش بار کمانش شده و به عبارت دیگر باعث افزایش پایداری پوسته می‌شود که این یک نتیجه‌ی منطقی می‌باشد و با نتایج به دست آمده از مقالات و مراجع دیگر نیز همخوانی دارد. از نکات دیگر قابل فهم از این نمودار این است که در ضخامت‌های کم یا در پوسته‌های نازک تغییرات طول تقریبا اثری بر بار کمانش نداشته و کاهش یا افزایش آن تاثیری بر پایداری پوسته نمی‌گذارد. البته اشاره به این نکته ضروری است که در تمام این پوسته‌ها طول محدود می‌باشد.

نمودار شکل(۵-۱۷) برای شعاع ۱۵ سانتیمتر رسم شده است و تاثیر شعاع بر بار کمانش در این نمودار مشخص نیست. در نمودار شکل(۵-۱۸) که بار کمانش نسبت به طول برای ضخامت‌های مختلف رسم شده است نیز نتیجه‌های برگرفته شده از شکل(۵-۱۷) را تایید می‌کند.

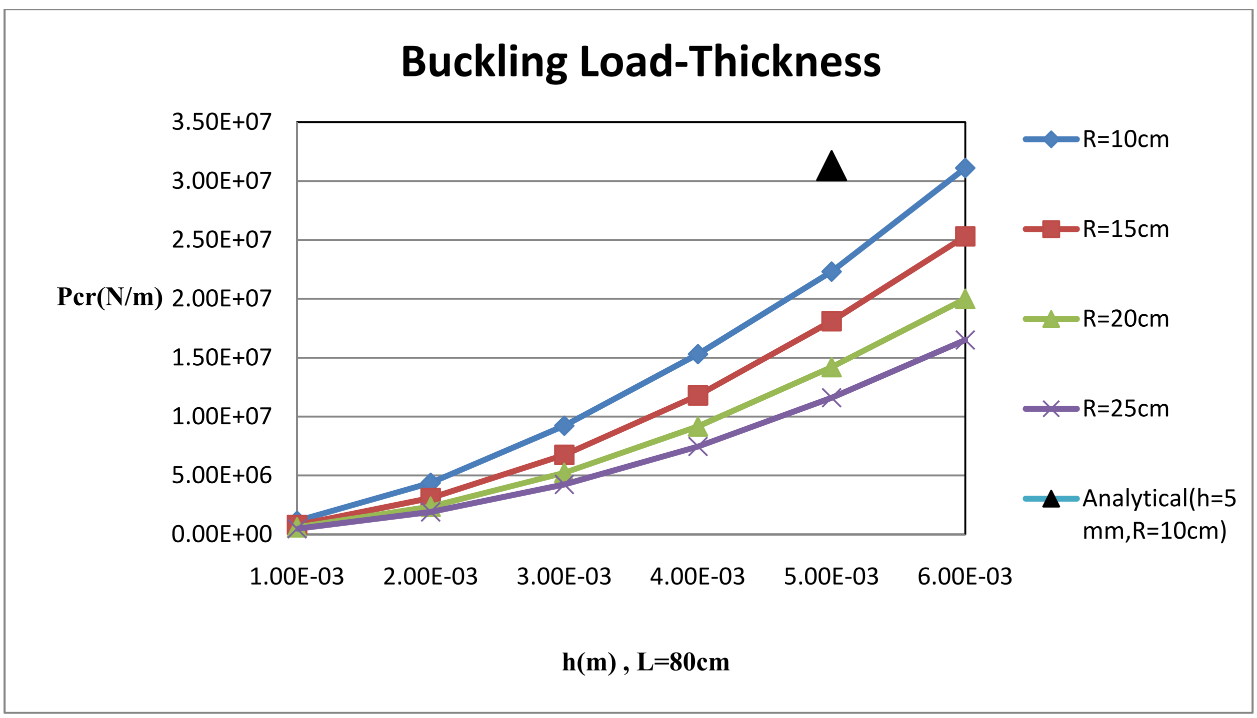
در نمودار شکل(۵-۱۹) تغییرات بار کمانش بر حسب ضخامت برای شعاع‌های مختلف رسم شده است که با دقت در آن متوجه می‌شویم که در اینجا نیز برای ضخامت‌های کم یا در پوسته‌های نازک تاثیر تغییرات شعاع بر بار کمانش کاهش می‌یابد و اثر تغییرات ضخامت پر رنگتر است، البته در همان ضخامت‌های کم نیز نمی‌توان از اثر تغییرات شعاع بر بار کمانش چشم‌پوشی کرد، به طور کلی افزایش شعاع باعث افزایش پایداری پوسته و در نتیجه افزایش بار کمانش می‌شود. در نمودار شکل(۵-۲۰) نیز که تغییرات بار کمانش بر حسب شعاع برای ضخامت‌های مختلف رسم شده است نیز همین نکات به وضوح قابل رویت است. با توجه به شکل‌های(۵-۱۹) و (۵-۲۰) مشخص می‌شود که باز هم اثر تغییرات ضخامت بر مقدار بار کمانش پررنگتر است و اثر تغییرات طول بر بار کمانش نیز از همه پارامترهای هندسی کمتر است. با توجه به نتایج حاصل در این بخش، در این تحقیق با توجه به فرض پوسته نازک انتظار می‌رود که تغییرات طول نباید اثر چندانی بر بار کمانش بگذارد و تنها تغییرات ضخامت و شعاع است که می‌تواند مقدار بار کمانش را افزایش یا کاهش دهد.



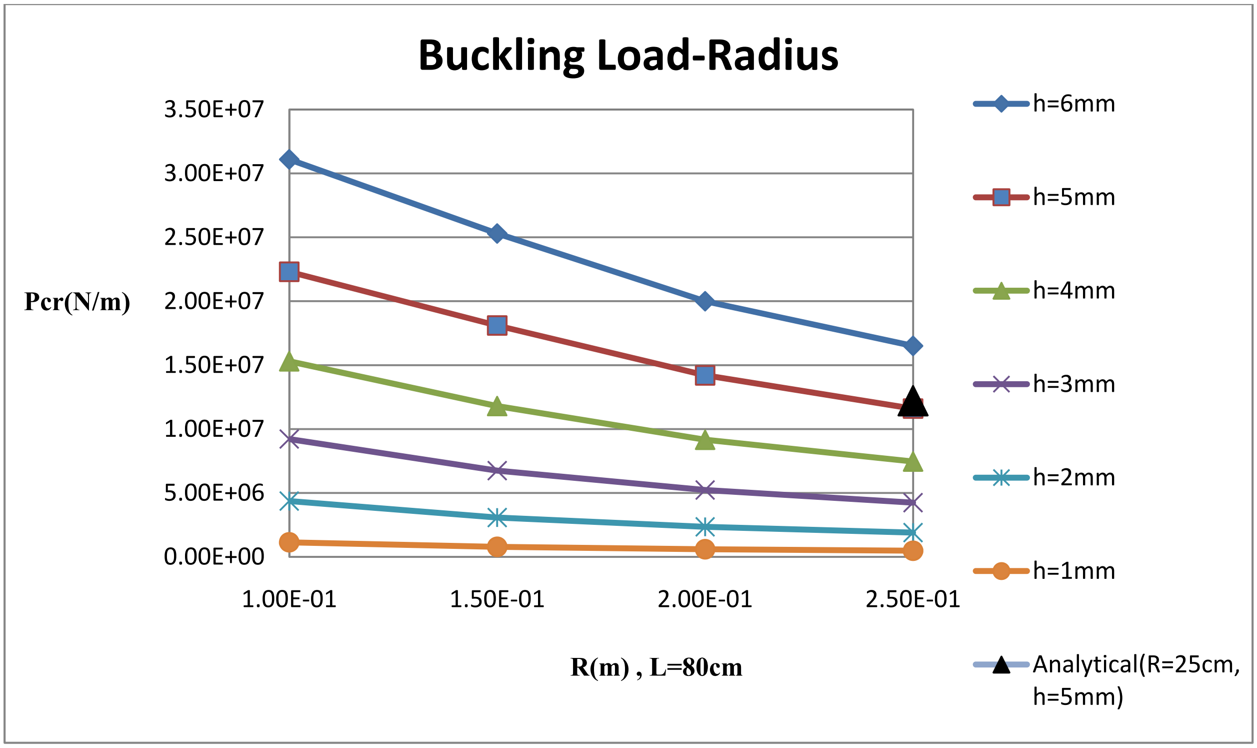
شکل(۵-۱۷) تغییرات بار کمانش نسبت به ضخامت برای طول‌های مختلف



شکل(۵-۱۸) تغییرات بار کمانش نسبت به طول برای ضخامت‌های مختلف



شکل(۵-۱۹) تغییرات بار کمانش بر حسب ضخامت برای شعاع‌های مختلف



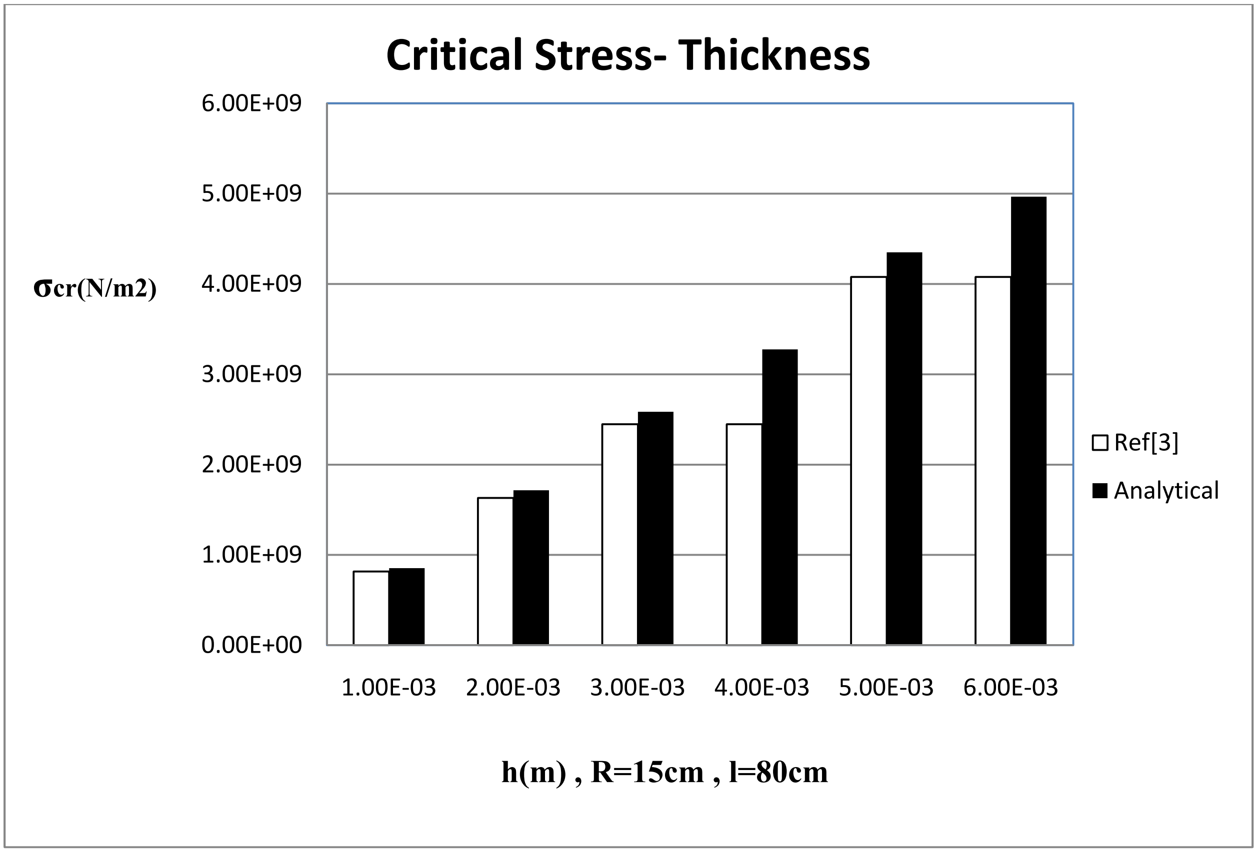
شکل(۵-۲۰) تغییرات بار کمانش بر حسب شعاع برای ضخامت‌های مختلف

۵-۳)مقایسه نتایج حل تحلیلی با مراجع دیگر:

برای مقایسه پاسخ در این روش با روش‌های دیگر، در این بخش نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج به دست آمده مرجع[۳] مقایسه می‌شود. بر طبق این مرجع تنش بحرانی برای استوانه‌ای که دو انتهای آن بر روی تکیه-گاه ساده قرار دارد از رابطه(۵-۱) به دست می‌آید.

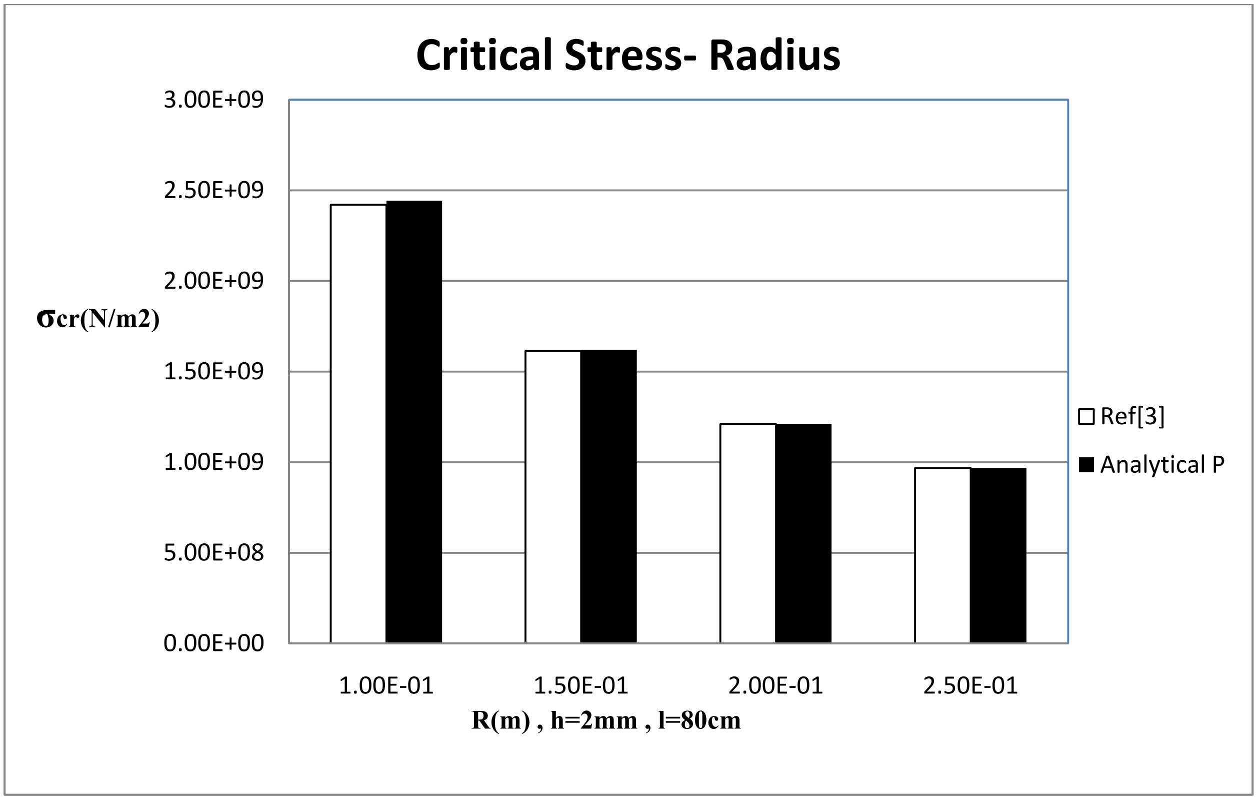
$$\sigma_{cr} = \frac{\mathrm{Eh}}{\mathrm{R}(3(1-\nu^2))^{1/2}} \qquad (۵-۱)$$

در نمودار شکل(۵-۲۱) تغییرات تنش بحرانی نسبت به تغییرات ضخامت برای مقادیر ثابت شعاع و طول، رسم شده است که نشان دهنده میزان اختلاف کم بین دو روش تحلیلی و رابطه(۵-۱) در ضخامت‌های کم می‌باشد.



شکل(۵-۲۱) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل تحلیلی و رابطه(۶-۱) نسبت به ضخامت برای مقادیر ثابت طول و شعاع

در نمودار شکل(۵-۲۲) تغییرات تنش بحرانی نسبت به تغییرات شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت رسم شده است. که نشان دهنده درصد خطای بسیار پایین می‌باشد. از رابطه(۵-۱) در مرجع[۴] به عنوان بار کمانش کلاسیک یاد شده است.



شکل(۵-۲۲) تغییرات بار کمانش حاصل از دو حل تحلیلی و رابطه(۵-۱) نسبت به شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت

در جدول(۵-۱) مقدار تنش بحرانی برای سه روش مختلف آمده است و میزان خطا نسبت به روش عددی مشخص شده است. مشاهده می‌شود که در ضخامت‌های زیاد تئوری کلاسیک به طور کامل جواب غلط می‌دهد در حالی که نتایج تئوری تغییر شکل برشی دارای خطای نسبتا کمتری است و می‌توان در ضخامت‌های بالاتر نیز از آن استفاده کرد.

جدول(۵-۱) مقادیر تنش بحرانی برای پوسته با شعاع ۱۰ سانتیمتر و طول ۸۰ سانتیمتر

Method	h (mm)	P_{cr}(Pa)	Difference percentage with respect to FE
FSDT	1	1.21e9	6.1%
FE	1	1.14e9	0
Classical Theory	1	1.21e9	6.1%
FSDT	5	5.26e9	17.9%
FE	5	4.46e9	0
Classical Theory	5	6.05e9	35.7%
FSDT	10	1.006e10	25.8%
FE	10	8e9	0
Classical Theory	10	1.21e10	51.3%

۵-۴) جمع‌بندی:

در این فصل نتایج حل تحلیلی با نتایج حل عددی و نتایج حاصل از تئوری کلاسیک مقایسه شده است. با توجه به شکل‌ها و گراف‌های رسم شده مشاهده می‌شود که استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای پوسته-های نازک جوابی با خطای بسیار ناچیز به دست آورده و در پوسته‌های ضخیم نیز نتایجی با خطای خیلی کمتر در مقایسه با تئوری کلاسیک به دست می‌آورد.

فصل ششم

جمع‌بندی و پیشنهادها

۶-۱)مقدمه:

در این فصل سعی شده تا به صورت خلاصه یک جمع‌بندی از تمام فصل‌ها انجام شود و در پایان پیشنهادهایی را که با توجه به نتایج می‌توان مطرح کرد به صورت اجمالی ذکر شده است.

۶-۲) جمع‌بندی:

با توجه به نتایج فصل‌های گذشته مشاهده می‌شود که استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای پوسته‌های نازک مناسب بوده و پاسخ آن از تئوری کلاسیک در اکثر موارد مناسبتر است. نتایج زیر را می‌توان استخراج کرد:

۱- افزایش ضخامت باعث افزایش خطا در نتایج حل تحلیلی می‌شود.

۲- کاهش شعاع نیز باعث افزایش خطا در نتایج حل تحلیلی می‌شود.

۳- تغییرات طول تاثیر چندانی بر روی نتایج حاصل از حل تحلیلی نشان نمی‌دهد و تنها با افزایش طول اختلاف میان نتایج حل تحلیلی و عددی افزایش می‌یابد.

۴- نتایج به دست آمده در مقایسه با تئوری کلاسیک با افزایش ضخامت خطای کمتری دارد.

۵- افزایش ضخامت باعث می‌شود تا تغییرات جابجایی طولی در راستای ضخامت شکل غیر خطی به خود بگیرد و به همین خاطر تئوری مرتبه اول که بر اساس خطی بودن این تغییرات استوار است دیگر جواب قابل قبولی را نمی‌دهد.

با استفاده از روش ارائه شده برای پوسته‌ها با ضخامت کم می‌توان به راحتی معادلات تعادل و پایداری غیر خطی را حل کرد و زمان مورد نیاز بسیار کمتر از روش اجزا محدود است. تحلیل پوسته با این کد نیز راحت‌تر است.

۶-۳) پیشنهادها:

برای استخراج بار کمانش در پوسته‌ها استفاده از تئوری تغییر شکل برشی با مرتبه‌های بالاتر، پاسخی مناسبتر به دست می‌آورد ولی با توجه به اینکه استفاده از تئوری‌های مرتبه بالاتر باعث افزایش حجم محاسبات تا حد

بسیار زیادی می‌شود بهتر است که با توجه به هندسه پوسته تئوری مناسب با کار خود را انتخاب کنیم. به طور کلی پیشنهادهای زیر برای ادامه بحث کمانش پوسته مطرح می‌شود:

۱- برای پوسته‌های نازک استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با وجود اشکالات و نواقصی که دارد با صرفه‌تر است ولی برای پوسته‌های ضخیم دیگر نمی‌توان به نتایج تئوری مرتبه اول اطمینان کرد.

۲- حل معادلات پایداری نیازمند پاسخ معادلات تعادل می‌باشد که در این تحقیق از حل مرتبه صفر این معادلات استفاده شده است که اگر بتوان روشی برای به دست آوردن حل مرتبه یک یا بالاتر معادلات تعادل بر حسب بار P^* به دست آورد قاعدتا جواب دقیق‌تری برای بار کمانش از روش تحلیلی نتیجه می‌شود.

۳- در نظر گرفتن نقص هندسی در پوسته نیز می‌تواند باعث افزایش دقت نتایج شده و نتایج به دست آمده را به واقعیت نزدیکتر کند.

۴- در نظر گرفتن جنس غیر همسانگرد و یا ناهمگن برای پوسته نیز می‌تواند باعث افزایش ضریب سختی شده و مسئله را پیچیده‌تر سازد. پوسته‌های FG ناهمگن در سال‌های اخیر موضوع بسیاری از مقالات و تحقیق‌ها است که همین موضوع اهمیت استفاده از مواد نو را مطرح می‌کند.

پیوست الف: مقدمه‌ای بر تئوری اغتشاشات[30,31]

تئوری اغتشاشات روشی تحلیلی و تقریبی است که پاسخی تقریبی ولی با استناد به ریاضیات، پاسخی صحیح به ما می‌دهد. نکته مهم در این تئوری وجود پارامتر بسیار کوچک بی‌بعد در مسئله و معادلات می‌باشد. در واقع حل مسئله به روش تئوری اغتشاشات دارای دو مرحله سختی می‌باشد: نخست تبدیل معادله به یک معادله بی-بعد و دوم ایجاد یک پارامتر بی بعد بسیار کوچک (ϵ) که این خود ممکن است به اندازه حل یک معادله پیچیده، دارای مشکلات باشد.

در واقع پایه و اساس این تئوری بر مبنای بسط تیلور می‌باشد به این ترتیب که پاسخ معادله به صورت یک سری، از پارامتر کوچک بی‌بعد نوشته شده و با جایگذاری در معادله و مساوی صفر قرار دادن جملات با مرتبه-های[1] یکسان ϵ (توان برابر)، یک حل تحلیلی و تقریبی برای مساله به دست خواهیم آورد. حل مربوطه می‌تواند تا هر مرتبه دلخواه پیش برود اما نکته مهم، توجه به همگرایی پاسخ می‌باشد. در واقع انجام مراحل حل برای هر مرتبه اضافه در پاسخ بسیار وقتگیر و طولانی است، به همین دلیل با بررسی پاسخ، هر زمان که جواب‌ها همگرا شدند دیگر از ادامه حل خودداری می‌کنیم زیرا پاسخ‌های مرتبه بالاتر جواب جدیدی نخواهند داد. ساده‌ترین راه و رایج‌ترین آنها برای بررسی همگرایی پاسخ، مقایسه جواب هر مرتبه با مرتبه بالاتر می‌باشد، که این کار از روش-های گوناگون مانند رسم گراف انجام می‌شود، برای مثال اگر نمودار مربوط به پاسخ مرتبه سه و دو با هم تطابق زیادی داشتند نشان دهنده همگرایی پاسخ بوده و حل تا مرتبه دو برای مسئله کافی می‌باشد و در غیر این صورت می‌توان به همین ترتیب ادامه داد تا به جواب مورد نظر رسید.

دو دسته عمده از مسائل که با تئوری اغتشاشات حل می‌شوند عبارتند از مسائل جبری و معادلات دیفرانسیل، روند کلی در حل مسئله به این صورت می‌باشد، که در ابتدا پارامتر مجهول را به کمک بسط رابطه(الف-۱) بر حسب پارامتر بسیار کوچک ϵ و یک سری مجهولات دیگر می‌نویسیم:

$$x = x_0 + \in x_1 + \in^2 x_2 + \in^3 x_3 + \cdots \qquad \text{(الف-۱)}$$

[1] Order

لازم به ذکر است که مراحل بالا در صورتی انجام پذیر است که قبل از آن معادله بی‌بعد شده و پارامتر بی بعد بسیار کوچک در معادله ساخته شده باشد، برای مثال در یک پوسته استوانه‌ای، نسبت‌هایی چون نسبت ضخامت به شعاع یا ضخامت به طول و حتی در مواردی نسبت شعاع به طول می‌تواند پارامتر بی بعد مناسبی باشد.

پس از جایگذاری پاسخ به صورت بسط رابطه(الف-۱)، پاسخ‌ها با مرتبه‌های یکسان را جدا کرده و یک به یک حل می‌نماییم، مرتبه صفر، معادله‌ای تنها بر حسب x_0 می‌باشد که از حل آن x_0 به دست می‌آید سپس حل مرتبه دو که شامل معادله‌ای بر حسب x_0 و x_1 می‌باشد را حل می‌کنیم، به این ترتیب که با جایگذاری x_0 از حل مرحله قبل می‌توان x_1 را به دست آورد، به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا به یک پاسخ همگرا برسیم و همانطور که گفته شد پس از آزمون همگرایی می‌توان به یک جواب تقریبی و تحلیلی صحیح رسید.

نکته مهم که باید به آن توجه داشت این است که همیشه روند حل مسئله پس از بی بعد سازی به این راحتی نخواهد بود، روش توضیح داده شده در بالا به روش حل مستقیم معروف است، گاها مسئله دارای پیچیدگی‌هایی مانند واگرایی در پاسخ یا وجود ترم های تکین[1] در جواب است که نیاز به اعمال روش‌های حل خاصی می‌باشد. برای مثال در معادله جبری زیر همانطور که می‌بینید پارامتر بی‌بعد بسیار کوچک ϵ در بزرگترین توان مجهول ضرب شده است که اگر مقدار آن را صفر قرار دهیم مرتبه معادله کم خواهد شد که در نتیجه یکی از ریشه‌ها را نمی‌توان به روش معمولی به دست آورد و باید با استفاده از روش‌های خاص که در مرجع[۲۹] به طور کامل توضیح داده شده است، آن را حل کرد:

$$\in x^2 + \mathrm{x} + 1 = 0 \qquad \text{(الف-۲)}$$

برای معادلات دیفرانسیل نیز این چنین مشکلات بسیار اتفاق می‌افتد که باید از روش‌های حلی چون بسط مجانبی[۲۹] استفاده کرد. در مسائل، بسیار دیده می‌شود که ترم‌های تکین در پاسخ وجود داشته باشد که در این صورت پاسخ غیر یکنواخت[2] خواهد بود و باید ترم‌های تکین را از پاسخ حذف کرد که این کار به دو روش انجام می‌گیرد: یکی روش رنورمالیزیشن[3] و دیگری روش مقیاس چندگانه[4] می‌باشد. در روش اول با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب سعی می‌شود جملات تکین حذف شوند و در روش دوم یک مقیاس جدید مطرح می‌شود و پارامتر بی بعد بسیار کوچک در پارامتری مانند زمان ضرب می‌شود. هر دو روش حل به صورت کامل در مراجعی چون[۲۹] و[۳۰] توضیح داده شده‌اند.

---

[1] Singular
[2] Non Uniform
[3] Renormalization
[4] Multiple Scale

از مشکلات دیگری که در حل معادلات دیفرانسیلی بسیار به آن برمی‌خوریم، مسائلی است که با عنوان مسائل لایه مرزی[1] مطرح می‌شوند. در این دسته مسائل پارامتر بی بعد بسیار کوچک در بزرگترین مرتبه مشتق ضرب می‌شوند. روش‌های حل بسیاری برای این دسته مسائل وجود دارد که مهمترین آنها همانطور که گفته شد روش بسط مجانبی متناظر[2] می‌باشد. در این روش، حل تقریبی دیگر تنها بر اساس یک بسط و یک مقیاس تعریف نمی‌شود بلکه حل مساله شامل دو یا چند بسط و مقیاس است که هر کدام در ناحیه‌ای خاص معتبر است و این بسط‌ها باید در نواحی مجاور دارای همپوشانی[3] در حل باشند. معمولا در این روش مسئله دارای دو نوع حل داخلی[4] و خارجی[5] می‌باشد که روش به دست آوردن آنها به طور کامل در مراجع توضیح داده شده است.

[1] Boundary Layers Problems
[2] Matched Asymptotic Expansion
[3] Overlap
[4] Inner Solution
[5] Outer Solution

مراجع

References:

[1] C.R. Calladine (**1983**), ''**Theory of shell structure**'', Cambridge University press.
[2] M. Amabili (**2008**) ''**Nonlinear vibrations and stability of shells and plates**'', Cambridge University press.
[۳] بو ا. آلمورث – ا. براش،(**۱۳۸۳**)،"**کمانش میله‌ها، ورق‌ها و پوسته‌ها**"، مهندس مجتبی قمری زاده و دکتر غلامحسین رحیمی، چاپ اول، دانشگاه امام حسین(ع)، تهران.
[4] Timoshenko S.P., Gere J.M.,(**1963**),'' **Theory of elastic stability** '',2nd Edition, McGRAW-Hill international book company.

[5] L. A. Samuelson, S. Eggwertz (**2005**) ''**Shell Stability Handbook**'', Taylor & Francis e-library.
[6] L.H. Donnell , (**1933**), ''**Stability of thin-walled Tubes under torsion**'', NACA Rep.479.
[7] T.Y. Ng, K.Y. Lam ,(**1999**),''Dynamic stability analysis of cross-ply laminated cylindrical shells using different thin shell theories'' ,Acta Mechanica 134, 147-167.
[8] M. Cai, J. Mark, F.G. Holst , J. M. Rotter ,(**2002**) ,'' Buckling strength of thin cylindrical shells under localized axial compression '' , 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York.
[9]E. Zhu,P. Mandal,C.R. Calladine,(**2002**),''Buckling of thin cylindrical shells :An attempt to resolve a paradox'' ,International Journal of mechanical sciences 44,1583-1601.
[10] G.W. Hunt , G.J.Lord , M.A.Peletier,(**2003**),''cylindrical shell buckling :a characterization of localization and periodicity '', Discrete And Continuous Dynamical Systems–Series B .3(4) ,505-518.

[11] A. Khamlichi , M. Bezzazi , A. Limam , (**2004**) ,''Buckling of elastic cylindrical shells considering the effect of localized axisymmetric imperfections '',Thin-Walled structures 42,1035-1047.

[12] G.A. Kardomateas ,G.J.Simitses ,(**2005**), ''Buckling of Long sandwich cylindrical shells under external pressure'', Journal of Applied Mechanics Vol 72,493-499.
[13] S. Aghajari , K. Abedi , H. Showkati , (**2006**) ,''Buckling and post-Buckling Behavior of Thin-walled cylindrical steel shells With varying thickness subjected to uniform external pressure'' , Thin-Walled Structures 44 , 904-909 .

[14] S. Li,R.C. Batra,(**2006**),''Buckling of axially compressed thin cylindrical shells with functionally graded middle layer'' , Thin walled structures 44,1039-1047.
[15] V.L. Krasovsky ,V.V. Kostyrko ,(**2007**),''Experimental Study Of Buckling Of Stringer Cylindrical Shells Under Axial Compression'' ,Thin-walled Structures 45 ,877-882.
[16] A. Ghorbanpour arani, S. Golabi, A. Loghman, H. Daneshi, (**2007**), '' Investigation elastic stability of cylindrical shell with an elastic core under axial compression by energy method '' , Journal of Mechanical Science and Technology 21,983-996.

[17] M.M. Najafizadeh,H.R. Heydari,(**2008**),''An exact solution for Buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression'' ,International Journal of mechanical sciences 50,603-612.
[18] G. Papadakis , (**2008**) ,''Buckling of thick cylindrical shells under external pressure:A new analytical expression for the critical load and comparison with elasticity solutions'' , International journal of solids and structures 45 ,5308-5321.
[19] R. Abdelmoula , A. Leger ,(**2008**) ,''Singular Perturbation analysis Of the buckling of circular cylindrical shells'' , European Journal of Mechanics A/Solids 27 ,706-729.
[20] H. Shen ,Y. Xiang , (**2008**) , ''Buckling and postbuckling of anisotropic laminated cylindrical under combined axial compression and torsion'' , Composite Structure 84, 375-386.

[21] H. Huang, Q. Han ,(**2009**),''Nonlinear elastic buckling and post-buckling of axially compressed functionally graded cylindrical shell'', International Journal of Mechanical Sciences 51,500-507.

[22] H. Shen,(**2009**), '' Torsional Buckling and post-buckling of FGM cylindrical shells in thermal environments'', International Journal of Non-linear mechanics 44,644-657.
[23] H. Luong T. Nguyen,I. Elishakoff,V.T. Nguyen,(**2009**),''Buckling under the external pressure of cylindrical shells with variable thickness '',International Journal of solids and structures 46,4163-4168.
[24] Z.M. Li , Z.Q. Lin,(**2010**), ''Non-linear buckling and post-buckling of shear deformable anisotropic laminated cylindrical shell subjected to varying external pressure loads'' , composite structure 92,553-567.
[25] J.H. Wang, A. Koizumi , (**2010**),''Buckling of cylindrical shells with longitudinal joints under external pressure'', Thin Walled structures 48,897-904.
[26] J.W. Hutchinson,(**2010**),''Knockdown factors for buckling of cylindrical and spherical shells subject to reduced biaxial membrane stress'', International Journal of solids and structures47,1443-1448.
[27] H.R. Eipakchi, M. Shariati,(**2010**),''Buckling analysis of cylindrical panel under axial stress using perturbation technique '',ZAMM,1-8.
[28] X. Xu, J. Ma,C.W. Lim,Ge. zhang,(**2010**),''Dynamic torsional buckling of cylindrical shells '',Computers and Structures 88,322-330.
[29]Ansys11 user Manual.
[30] A.H. Nayfeh ,(**1993**) , ''**Introduction to perturbation techniques**'', New York ,John Wiley&Sons.
[31] J.A. Murdock , (**1991**) , ''**Perturbations Theory And Methods** '', New York ,John Wiley&Sons.

ABSTRACT

In this research, the buckling load of an axisymmetric elastic cylindrical shell has been determined analytically and the effects of the geometrical parameters on the buckling load have been investigated. The equilibrium and stability equations have been derived by the virtual work method by considering the first order shear deformation theory. The strain components have been determined by Green's kinematic formula. After converting the governing equations to a dimensionless form, the perturbation technique has been used to solve the nonlinear equilibrium equations. The resultant values have been replaced in the stability equations and the buckling load has been determined. Also the buckling load has been determined by using the finite elements method and compared with the analytical results. The results show that the first order shear deformation theory is more effective than the classical theory for predicting the buckling load especially in moderately thick shells. The results have been presented as the graphs and tables.

Key words: buckling analysis, finite elements, perturbation method, first order shear deformation theory

Shahrood University of Technology

Faculty Mechanic Engineering

Buckling load determination of a thin cylindrical shell subjected to axial stress using first order shear deformation theory

Farid Mahboubi Nasrekani

Supervisor: Dr Hamid Reza Eipakchi

Date: January 2012