

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل مستقیم عددی جریان جت

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

تهیه کننده:

حسین ایزی

۱۳۸۵

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که در تمامی این سالها حامی من بودند

تقدیر و تشکر :

ضمن سپاس بیکران خداوند لازم می دانم از استاد محترم آقای دکتر مغربی که با ارائه راهنمایی های مدیرانه نظارت و سرپرستی این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از راهنمای های مفید و دلسوزانه برادر عزیزم آقای سعید ایزی بسیار متشکر هستم و از درگاه خداوند طلب موفقیت در تمامی مراحل زندگی را برای ایشان خواستارم.

تیر ۱۳۸۵

چکیده:

جریان جت سیال با شرایط فیزیکی دلخواه به جهت آنکه دارای کاربردهای عملی و صنعتی فراوانی است در زمره مهمترین مباحث مکانیک سیالات قرار گرفته است و به همین دلیل از همان زمانیکه علم مکانیک سیالات بنا نهاده شده است مبحث فوق مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است.

هرگاه یک سیال جدیدی در مومنتوم بالا داخل یک سیال ساکن با دانسیته یکسان پاشیده شود یک جت تشکیل می شود. به عبارت ساده تر یک جت به وسیله خروج یک جریان از یک نازل در یک سیال محیط تشکیل می شود.

جت ها از لحاظ هندسه منفذ به دو نوع صفحه ای و مدور تقسیم بندی می شوند. به دلیل هندسه خاص جت های مدور، اینگونه بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته است. از این رو با توجه به فقر اطلاعاتی در مورد جت های صفحه ای دوبعدی، تلاشی برای شناخت بهتر اینگونه جریان انجام شده است.

در این بررسی سعی شده تا با کمک شبیه سازی عددی و بدور از هر گونه مدل سازی و یا فرضی برای ساده سازی، جریان جت دو بعدی غیر قابل تراکم را به روش حل عددی مستقیم تحلیل کنیم و پدیده خود تشابهی در پروفیل سرعت و گردابه مورد بررسی قرار گیرد. چگونگی ارتباط سرعت خط مرکزی و نیم عرض جت با فاصله از ورودی جت نیز مورد توجه قرار گرفته است.

اغتشاشاتی نیز در ورودی جریان، منتج از حل پایداری جت در سرعت عمود بر جریان قرار داده شده و ترم های تنش های رینولدز هم مورد بررسی قرار گرفته است.

فهرست مطالب:

۱	۱- فصل اول: پیشگفتار
۲	۱-۱- مقدمه
۲	۲-۱- جریان‌های برش آزاد
۳	۳-۱- آشنایی با جریان جت
۵	۴-۱- تقریب‌ها در تحلیل جریان جت
۵	۵-۱- توصیف جریان در یک جت
۷	۶-۱- حل عددی جریان‌ها
۸	۷-۱- حل عددی مستقیم
۹	۲- فصل دوم: مروری بر کارهای انجام شده
۱۰	۱-۲- مقدمه
۱۱	۲-۲- تحلیل جت‌های دو بعدی توربلاز
۱۷	۳-۲- مطالعات آزمایشی
۱۸	۴-۲- توزیع سرعت
۲۰	۵-۲- توربلاز در جت‌های دو بعدی
۲۲	۶-۲- تحلیل جت‌های دو بعدی آرام
۲۷	۳- فصل سوم: معادلات دیفرانسیل، شرایط مرزی و اولیه

۲۸	۳-۱- مقدمه
۲۹	۳-۲- معادله ناوراستوکس
۳۲	۳-۳- شرایط مرزی
۳۴	۳-۴- شرط اولیه
۳۵	۴- روش های عددی
۳۶	۴-۱- مقدمه
۳۷	۴-۲- محاسبه مشتقات مادی
۴۲	۴-۳- روش محدود کردن دامنه y
۴۵	۴-۴- انتگرال گیری
۴۶	۴-۵- پیشروی در زمان:
۴۸	۴-۶- حل معادله پواسون
۴۹	۴-۷- ارزیابی کد و شبیه سازی عددی:
۴۹	۴-۷-۱- معادله نفوذ وابسته به زمان
۵۱	۴-۷-۲- گردابه های استوارت
۵۳	۴-۷-۳- حل معادله لایه مرزی
۵۴	۴-۷-۷- جریان جت دو بعدی آرام
۵۹	۵- جریان جت مغشوش
۶۰	۵-۱- مقدمه

۶۰ ۵-۲- اغتشاشات ورودی .

۶۱ ۵-۳- بررسی خود تشابهی و توزیعات تنش رینولدز

۶۹ مراجع

۷۳ ضمائم

فهرست نمودارها:

- شکل ۱-۱: نمایی از جت، دنباله و لایه اختلاطی و نوع پروفیل سرعت ۳
- شکل ۱-۲: (a) لایه اختلاطی (b) جت آزاد (c) دنباله پشت یک جسم ۳
- شکل ۱-۳: نفوذ جت در سیال محیط ۶
- شکل ۱-۲: توزیع سرعت در منطقه جریان توسعه یافته (جت دو بعدی) ۱۹
- شکل ۲-۲: تغییر شدت توربلانسی در سرتاسر جت دو بعدی در محدوده کاملاً توسعه یافته ۲۱
- شکل ۲-۳: الگوی خطوط جریان برای یک جت دو بعدی آرام ۲۲
- شکل ۲-۴: توزیع سرعت در یک جت دو بعدی و دایره ای ۲۵
- شکل ۱-۳: شماتیکی از دامنه فیزیکی مسئله ۲۹
- شکل ۱-۴: تقریب مشتق اول تابع $y = \sin(x) + x^2$ ۳۹
- شکل ۲-۴: مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد ۴۰
- شکل ۳-۴: تقریب مشتق دوم تابع $y = \sin(x) + x^2$ ۴۱
- شکل ۴-۴: مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد ۴۲
- شکل ۵-۴: تقریب مشتق اول تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی سازی در جهت y ۴۴

شکل ۴-۶: تقریب مشتق دوم تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی سازی در جهت y . ۴۴

شکل ۴-۷: تقریب انتگرال تابع $f(y) = e^{-y^2}$ ۴۵

شکل ۴-۸: مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$ ۴۸

شکل ۴-۹: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان ۵۰

شکل ۴-۹-۱: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت x ۵۱

شکل ۴-۹-۲: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y ۵۱

شکل ۴-۱۰: ماکزیمم خطا در u و v برای تست گردابه های استوارت به صورت تابعی از زمان ۵۳

شکل ۴-۱۱: توزیع سرعت در جریان جت با سرعت پائین ۵۴

شکل ۴-۱۲: گذر زمانی u در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جت دوبعدی بدون اغتشاش ورودی ۵۵

شکل ۴-۱۳: گذر زمانی v در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جت دوبعدی بدون اغتشاش ورودی ۵۵

شکل ۴-۱۴: پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جت دوبعدی بدون ۵۶

- شکل ۷-۵: نمایش سرعت خط مرکزی u_m و نیم عرض جت در جهت x . ۶۵
- شکل ۸-۵: نمایش $\sqrt{u'^2} / \bar{u}_m$ ۶۵
- شکل ۹-۵: نمایش $\sqrt{v'^2} / \bar{u}_m$ ۶۶
- شکل ۱۰-۵: نمایش $\sqrt{u'v'} / \bar{u}_m$ ۶۶
- شکل ۱۱-۵: توزیع تنش رینولدز $\overline{u'^2}$ در دامنه فیزیکی ۶۷
- شکل ۱۲-۵: توزیع تنش رینولدز $\overline{v'^2}$ در دامنه فیزیکی ۶۷
- شکل ۱۳-۵: توزیع تنش رینولدز $\overline{u'v'}$ در دامنه فیزیکی ۶۸

فصل اول

پیشگفتار

پیشگفتار

۱-۱- مقدمه

جریان جت سیال با شرایط فیزیکی دلخواه به جهت آنکه دارای کاربردهای عملی و صنعتی فراوانی است در زمره مهمترین مباحث مکانیک سیالات قرار گرفته است و به همین دلیل از همان زمانیکه علم مکانیک سیالات بنا نهاده شده است مبحث فوق مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. جریان سیال از لحاظ نوع مرز به دو نوع محدود و نامحدود^۱ تقسیم می‌شود. جریان‌هایی را که سیال با مرز مادی هیچگونه تماس فیزیکی ندارد جریان‌های برش آزاد^۲ می‌گویند. جریان جت یکی از انواع جریان‌های برش آزاد محسوب می‌شود. [۶]

۱-۲- جریان‌های برش آزاد

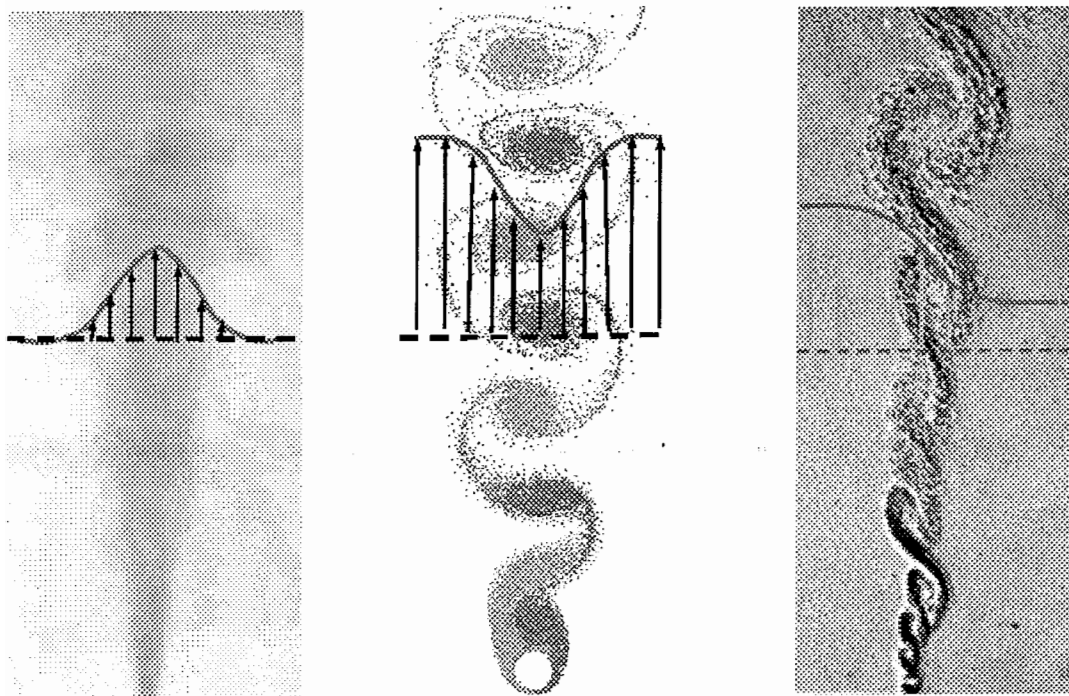
در جریان‌های برش آزاد سیال هیچگونه تماس مرزی فیزیکی با محیط خود ندارد. به همین علت به آن جریان‌های برش آزاد می‌گویند. از انواع جریان‌های برش آزاد می‌توان دنباله^۳، جت^۴، لایه‌های اختلاطی^۵ و پلوم^۶ را نام برد. در شکل ۱-۱ می‌توان آنها را دید. در اینگونه جریانها با پیشروی برش آزاد در محیط، سیال محیط را با خود حمل می‌کنند و محیط‌های گردابه‌ای تولید می‌کنند. با بی‌بعد کردن ابعاد با یک طول مشخصه خاص و سرعت با

^۱ . Unbounded
^۲ . Free Shear Flow
^۳ . Weak
^۴ . Jet
^۵ . Mixing layer
^۶ . Plum

مشخصه سرعت، پروفیل‌های سرعت و توزیع تنش‌های رینولدز در ایستگاه‌های مختلف در دامنه وسیعی به خوبی بر روی هم منطبق می‌شوند. به این پدیده خود تشابهی^۱ می‌گویند. [۶]

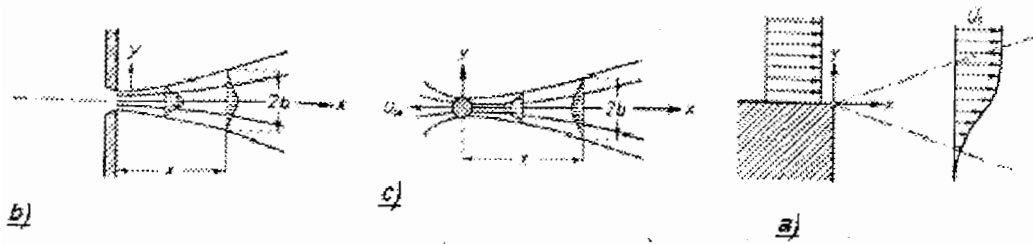
۱-۳- آشنایی با جریان جت

اگر یک سیال جدیدی در مومنتوم بالا، داخل یک سیال ساکن با دانسیته یکسان پاشیده شود، جت تشکیل می‌شود. به عبارت ساده‌تر، یک جت به وسیله خارج شدن جریانی از نازل در سیال محیط تشکیل می‌شود که این سیال محیط می‌تواند ساکن، در حال حرکت و یا مماس با یک سطح صلب باشد. اگر سیال محیط ساکن باشد یک جت آزاد^۲، اگر در حال حرکت باشد یک سری جت^۳ و اگر مماس با یک سطح صلب باشد به آن جت دیواره^۴ گویند.



شکل ۱-۱: نمایی از جت، دنباله و لایه اختلاطی و نوع پروفیل سرعت

1. Self Similarity
2. Free Jet Flow
3. Co flowing Jet
4. Wall Jet



شکل ۱-۲: (a) لایه اختلاطی (b) جت آزاد (c) دنباله پشت یک جسم [۸]

جت یکی از اشکال اصلی جریان محسوب می‌شود که به طور وسیع در بسیاری از کاربردهای عملی مثل محفظه پاشش سوخت، جلوبرندگی در موتور جت و ... به کار برده می‌شود. یکی از مهمترین بررسی‌های انجام شده برای جریان جت فرایند اختلاط و حمل سیال محیط یک جت با توجه به محیط خودش است. مثلاً پاشش سوخت باعث اختلاط یکنواخت‌تر شده و در نتیجه بازده احتراق افزایش می‌یابد و کارکرد موتور بهتر می‌شود. از جریان جت به طور وسیعی در بسیاری از کاربردهای عملی دیگر مانند گرمایش-سرمایش یا خشک کردن سریع برخی از انواع محصولات، خنک کردن قطعات الکترونیکی و پره‌های توربین‌ها را می‌توان نام برد. استفاده از جریان جت برای اختلاط بهتر در محفظه احتراق توربین‌های گازی و موتورهای احتراقی، بکارگیری جت سیال به عنوان عامل بالا برنده در هواپیماهای عمود پرواز ساکن و یا در حال حرکت می‌تواند گویای اهمیت این جریان باشد. استفاده از فشار برخوردی بسیار بالای جریان جت در فرایندهای مختلف ماشین‌کاری از قبیل برش، فرزکاری، تراشکاری، دریل و سوراخ زنی مواد سخت و کامپوزیت‌ها و ... نشان دهنده قابلیت بالای این جریان در کاربردهای صنعتی می‌باشد. جلوگیری و کنترل جدایش لایه مرزی بر روی بال هواپیماها و باله هلی‌کوپتر و افزایش لیفت و کاهش دراگ و جلوگیری از استال را می‌توان از کاربردهای دیگر این جریان شمرد. شکل ۱-۳ جزئیات جریان را در مورد نفوذ یک جت دو بعدی نشان می‌دهد.

دلایل مستند زیادی در مورد تشابه پروفیل‌های سرعت متوسط جت‌ها و دنباله‌ها در مقاطع مختلف وجود دارد. برای هر نوع جریان دارای پروفیل سرعت ناقوسی شکل، وقتی که سرعت‌ها به وسیله سرعت ماکزیمم متوسط و فواصل (ابعاد) به وسیله بعد عرضی بی بعد می‌شوند، پروفیل‌های سرعت دارای تشابه هندسی با هم می‌شوند. توجه کنید که مقیاس طول یا بعد عرضی می‌تواند به صورت نیم مقدار بعد عرضی باشد. فاصله نیم مقدار، فاصله‌ای از محور تقارن است که در آن سرعت متوسط برابر نصف سرعت ماکزیمم متوسط است. [۶]

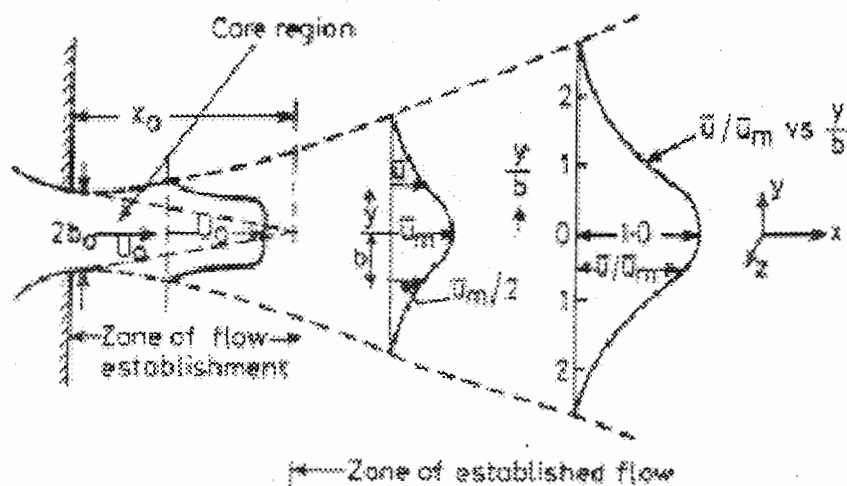
۱-۴- تقریب‌ها در تحلیل جریان جت

در تحلیل جت‌ها، می‌توان یک جهت اصلی را که سرعت جریان خیلی بزرگتر از دو جهت دیگر است متمایز کرد. همچنین پهنای عرضی خیلی کوچکتر از پهنای طولی است. در نتیجه $\partial/\partial x$ کوچکتر از هر دوی $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ است. از طرفی بعد پهلویی (بعد سوم) کوچک می‌باشد و مثل لایه مرزی، فشار در سرتاسر جت را می‌توان ثابت و معادل با فشار خارج جت فرض کرد. پس فشار را در جهت طولی ثابت در نظر می‌گیریم. در نتیجه، فرض می‌کنیم که فشار در هر جایی از میدان جریان جت ثابت است. با توجه به شدت اختلاط بالا و عدد رینولدز بزرگ، فرض قابل حذف بودن تنش‌های لزجت در برابر تنش‌های توربلانسی می‌تواند صحیح باشد. [۶]

۱-۵- توصیف جریان در یک جت

حالتی را بررسی می‌کنیم که جت مدور یا دو بعدی دارای سرعت زیاد، در یک سیال نامحدود وارد می‌شود. هر دوی سیالات دارای دانسیته ثابت هستند. به علت اختلاف سرعت خیلی زیاد در صفحه انفصال (منظور صفحه منطبق با خروجی نازل یا دهانه است)، ادی‌های بزرگی بوجود می‌آیند که موجب اختلاط عرضی شدید می‌شوند. فرایند اختلاط در جهت جریان پایین

دست هم به سمت داخل و هم به سمت خارج جریان ادامه دارد، تا وقتی که سیال محیط به وسیله سیال جت جایجا می‌شود (عملاً سیال محیط شتابدار می‌شود)، سیال جت دچار کاهش شتاب می‌شود. در نتیجه افزایش وسعت جت (پهنای جت)، نرخ جریان در جهت جریان پایین دست به تدریج افزایش می‌یابد. در اینجا، حوزه مخروطی^۱ در جت دارای یک سرعت ثابت است و در همی در مخروط کم می‌باشد، در صورتی که در لبه خارجی حوزه مخروط، سرعت متوسط به سمت خارج کاهش می‌یابد و جریان خیلی در هم می‌شود. در فاصله‌ای از سوراخ نازل در جریان پایین دست، خط مرکزی جت^۲ دچار کاهش شتاب می‌شود، که محدوده بین خروجی جت از سوراخ و این مقطع به منطقه جریان در حال توسعه^۳ شناخته شده است که در شکل ۱-۳ می‌توانید این حوزه را مشاهده کنید. در این منطقه، تولید، رشد، تداخل و خرابی احتمالی ناشی از مقیاس‌های بزرگ ساختار توربلانسی، مکانیزم‌های اولیه‌ای هستند که موجب کاهش شتاب می‌شوند. [۶]



شکل ۱-۳: نفوذ جت در سیال محیط

- ¹ Core Region
- ² Center Line Jet
- ³ Zone Of Flow Establishment

در جریان پایین دست این منطقه، جت کاملاً درهم می‌شود و به طور پیوسته دچار کاهش شتاب می‌گردد. سرعت خط مرکزی کمتر از u_0 است و با افزایش x ، سرعت خط مرکزی همچنان رو به زوال می‌رود و دچار کاهش شتاب می‌شود.

در جریان پایین دست منطقه جریان در حال توسعه، توزیع سرعت متوسط در مقاطع مختلف مشابه می‌شود. این منطقه به منطقه جریان توسعه یافته^۱ (یا جریان کاملاً توسعه یافته) شناخته می‌شود. مقطع دقیق مجزا کننده جریان توسعه یافته و جریان در حال توسعه دقیقاً مشخص شده نیست و در آزمایشات می‌توان آن را مشخص کرد. در نهایت، در فاصله‌ای بعد از مقطع سوراخ (مقطع بیرون ریزی جت)، سرعت خط مرکزی به طور قابل ملاحظه‌ای کوچک می‌شود.

۱-۶- حل عددی جریان‌ها

در علوم مهندسی هدف از تحقیق، توسعه محصولات جدید و یا بهبود و بهینه کردن محصولات تولید شده است. در قدیم دو روش برای این امر وجود داشت که آزمایش^۲ و تئوری^۳ بودند. با پیدایش کامپیوتر، روش سومی هم بوجود آمد و آن حل و شبیه سازی عددی^۴ می‌باشد. معادلات ریاضی‌ای که توصیف کننده ماهیت طبیعی پدیده‌ها هستند، اغلب پیچیده‌تر از آن هستند که بتوان با تحلیل و آنالیز به حل و جواب مناسبی رسید. هر روزه هزینه‌های بسیار زیاد و سنگینی در موسسات تحقیقاتی و مراکز علمی صرف انجام آزمایشات می‌شود و گاهی انجام یک سری از آزمایشات به دلیل محدودیت‌های فیزیکی مقدور نمی‌باشد. با کمک شبیه‌سازی و حل عددی قادر به انجام این گونه آزمایشات بدور از هزینه‌های گزاف می‌باشیم.

^۱ . Zone Of Established Flow

^۲ . Experimental

^۳ . Analytical

^۴ . Numerical Simulation

۱-۷- حل عددی مستقیم

نقطه شروع برای هر روش عددی، مشخص کردن مدل ریاضی است که شامل مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی است. معادلاتی که برای بررسی انتخاب می‌شوند دارای ترم‌های غیر خطی هستند که می‌توان آنها را با مدل‌های ریاضی خاص و مناسب به صورت خطی تبدیل کرده و این مدل‌ها را جایگزین ترم‌های غیر خطی^۱ نمود. ولی وقتی که در معادلات ریاضی هیچ گونه دخل و تصرفی صورت نگیرد و هیچگونه ساده سازی و یا مدل سازی^۲ در آن وارد نشود و به همان صورتی که تعریف شده حل عددی شود نتایج بسیار دقیق می‌باشند که در اصطلاح به این نوع حل عددی، "حل عددی مستقیم"^۳ گویند. [۱۲]

در این پروژه نیز جریان جت دو بعدی غیر قابل تراکم به کمک روش حل عددی مستقیم، و بررسی معادلات ناویر استوکس^۴ مورد پژوهش قرار می‌گیرد که به دلیل عدم استفاده از هر گونه ساده سازی و فرضیات ساده کننده، انتظار نتایجی بسیار دقیقتر از روش‌های دیگر می‌رود.

^۱ . Non-Linear Terms

^۲ . Modeling

^۳ . Direct Numerical Simulation

^۴ . Navier Stoks Equation

فصل دوم

مروری بر کارهای انجام شده

مروری بر کارهای انجام شده

۲-۱- مقدمه

همانطور که قبلاً هم اشاره شد، جریان جت از لحاظ هندسه خروجی به دو نوع مدور^۱ و صفحه‌ای^۲ تقسیم بندی می‌شود. در این میان جت مدور به دلیل داشتن هندسه منفذ خروجی خاص بیشتر مورد توجه محققان حاضر قرار گرفته است. بررسی‌های بسیاری بر روی جت های دو بعدی توسط دانشمندانی مثل گوتلر^۳[۷] و تولمین^۴[۱۹] و شلیختینگ^۵[۱۶] انجام شده که به صورت تحلیلی و بررسی‌های آزمایشی بوده است. در این فصل با ارائه نتایج کارهای این افراد در مورد جت دو بعدی، علاوه بر آشنایی بیشتر با جریانات جت دو بعدی، میزان انطباق بین نتایج تئوری و حل‌های عددی و نتایج آزمایشی را می‌توان لمس کرد.

¹ Round
² Plane
³ Gortler
⁴ Tolmien
⁵ Schlichting

۲-۲- تحلیل جت های دو بعدی توربلانس [۶]

چندین مشخصه جت دو بعدی یا سه بعدی نفوذ کننده در یک سیال نامحدود می تواند به

وسیله تحلیل انتگرالی بدست آید. اگر فرض شود که توزیع سرعت مشابه باشد یعنی $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = f(\eta)$ ، که

برای جت دو بعدی است، که در اینجا b به صورت نصف پهنای جت یا فاصله از محور تقارن

در نظر گرفته می شود که $\bar{u} = \bar{u}_m / 2$ ، (شکل ۱-۳ را ببینید) که \bar{u}_m هم سرعت خط مرکزی است.

ابتدا، به ما اجازه بدهید که یک جت دو بعدی با نصف پهنای b_0 را بررسی کنیم و معادله مومنوم را

برای جریان متوسط به کار ببریم. از آنجا که فرض کردیم که فشار ثابت باشد، و چون نیروی فعال

بیرونی هم روی سیال وجود ندارد، شار مومنوم M از مقطعی به مقطعی دیگر باید ثابت بماند. در

نتیجه، در منطقه جریان توسعه یافته داریم:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (1-2)$$

اما:

$$M = 2 \int_0^{\infty} \rho \bar{u}^2 dy = 2 \rho \bar{u}_m^2 b \int_0^{\infty} f^2(\eta) d\eta \quad (2-2)$$

$\partial M / \partial x = 0$ نشان می دهد که:

$$\partial / \partial x [2 \rho \bar{u}_m^2 b \int_0^{\infty} f^2(\eta) d\eta] = 0 \quad (3-2)$$

از آنجا که $\int_0^{\infty} f^2(\eta) d\eta$ یک مقدار عددی است و برای قانون توزیع سرعت شناخته شده و ثابت می باشد،

ثابت بودن M از مقطعی به مقطع دیگر نشان می دهد که:

$$\partial / \partial x (\bar{u}_m^2 b) = 0 \quad (۴-۲)$$

یا $\bar{u}_m^2 b$ مستقل از x است، یعنی:

$$\bar{u}_m^2 b \propto x^0 \quad (۵-۲)$$

با فرض اینکه $\bar{u}_m \propto x^p$ و $b \propto x^q$:

$$2p + q = 0 \quad (۶-۲)$$

$$\bar{u}_m^2 b \propto x^{2p+q}$$

با دانستن اینکه عرض نیم جت b است و \bar{u}_m با x تغییر می‌کند، ما به یک معادله بیشتر احتیاج داریم،

که این معادله می‌تواند با بکار بردن $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = f(\eta)$ ، $\bar{u}_m \propto x^p$ ، $b \propto x^q$ ، $\tau_t / \rho \bar{u}_m^2 = g(\eta)$ و معادله

ناویر استوکس در حالت پایدار بدست آورد:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y} \quad (۷-۲)$$

چنین تحلیلی به وسیله راجاراتنام^۱ [۶] انجام شده و $p = -0.5$ بدست آمده است. پس:

$$\begin{aligned} \bar{u}_m &\propto 1/\sqrt{x} \\ b &\propto x \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

راجاراتنام همچنین نشان داد که اگر از فرم انتگرالی معادله انرژی استفاده شود $q = 1$ می‌شود.

قبلا هم ذکر شد که به علت سوار کردن سیال محیط توسط جت، تخلیه Q در جت در جهت

جریان پایین دست افزایش می‌یابد. همچنین ماهیت وابسته Q همانند b و \bar{u}_m می‌تواند از تحلیل

ابعادی تعیین شود. با حذف اثرات لزجت، یعنی برای مقادیر بالای عدد رینولدز، می‌توان نوشت:

$$b, \bar{u}_m \text{ or } Q = f(M_0, \rho, x) \quad (۹-۲)$$

^۱ Rajaratnam

که M_0 برابر است با شار مومنتوم اولیه و برابر $2b_0\rho u_0^2$ می باشد.

با آنالیز ابعادی داریم:

$$\bar{u}_m / \sqrt{M_0 / \rho x} = C_1 = const \quad (10-2)$$

که با جاگذاری مقادیر M_0 داریم:

$$\bar{u}_m / u_0 = \sqrt{2C_1 b_0 / x}; \text{ or } : \bar{u}_m \propto 1/\sqrt{x} \quad (11-2)$$

همچنین:

$$b/x = C_2, \text{ or } : b/b_0 = C_2 x/b_0 \Rightarrow b \propto x \quad (12-2)$$

و بالاخره:

$$Q/\sqrt{M_0 x / \rho} = C_3 \Rightarrow Q/Q_0 = C_3 \sqrt{x/2b_0} \quad (13-2)$$

که $Q_0 = 2b_0 u_0$ می باشد.

توزیع سرعت در منطقه جریان توسعه یافته به وسیله تولمین و گوتلر مطالعه شده است. تحلیل تولمین در زیر آورده شده است :

برای شروع با بکاربردن فرضیه طول اختلاط پراتل، تولمین، τ_i را به صورت زیر بیان کرد:

$$\tau_i = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (14-2)$$

که در اینجا l طول اختلاط می باشد. بررسی های ابعادی نشان می دهد که در هر مقطع $l = \beta b$ است و

از آنجا که $b = C_2 x$ می باشد، پس l به صورت زیر بیان شده است:

$$l = \beta C_2 x \quad (15-2)$$

که β یک ثابت می باشد. در نتیجه $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_i}{\partial y}$ به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = 2(\beta C_2)^2 x^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \quad (۱۶-۲)$$

که می‌توان قرارداد کرد که $a^3 = 2(\beta C_2)^2$ که a یک ثابت می‌باشد.

از آنجا که توزیع سرعت می‌تواند به صورت $\bar{u}/\bar{u}_m = f(y/b)$ بیان شود، آن را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = f(y/ax) = f(\varphi) \quad (۱۷-۲)$$

که $\varphi = y/ax$ است و a بعداً به طور آزمایشی تعیین می‌شود. همانطور که نشان دادیم $\bar{u}_m \propto 1/\sqrt{x}$ است آن را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\bar{u}_m = n/\sqrt{x} \quad (۱۸-۲)$$

که n مستقل از x است. در نتیجه:

$$\bar{u} = \frac{n}{\sqrt{x}} f(\varphi) \quad (۱۹-۲)$$

به منظور بیان \bar{u} و \bar{v} در ترمهایی از یک متغیر، بهتر است که تابع جریانی^۱ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\bar{u} = \partial \psi / \partial y \quad (۲۰-۲)$$

$$\bar{v} = -\partial \psi / \partial x$$

$$\Rightarrow \psi = \int \bar{u} dy = \frac{n}{\sqrt{x}} \int f(\varphi) ax d\varphi \quad (۲۱-۲)$$

$$\Rightarrow \psi = an\sqrt{x}F \Rightarrow F = \int f d\varphi$$

^۱ Stream Function

با بکاربردن معادلات ۲-۲۰ و ۲-۲۱، عبارات \bar{u} و \bar{v} و $\partial\bar{u}/\partial x$ و $\partial\bar{v}/\partial y$ و $\partial\tau_t/\partial y$ را می‌توان در ترمهایی از F و مشتقاتش بیان کرد.

با جاگذاری آنها در معادله ناویراستوکس، داریم:

$$2F''F''' + FF'' + F'^2 = 0 \quad (22-2)$$

$$\text{or: } 2F''F''' + \frac{d}{d\varphi}(FF') = 0$$

که با انتگرال گیری داریم:

$$FF' + F'^2 = C \quad (23-2)$$

شرایط مرزی برای حل این معادله دیفرانسیلی غیر خطی عادی به صورت زیر است:

$$1) y = 0, \bar{u}/\bar{u}_m = 1 \rightarrow \varphi = 0, F' = 1, \text{or}, F'(0) = 1$$

$$2) y = \infty, \bar{u}/\bar{u}_m = 0 \rightarrow \varphi = \infty, F' = 0, \text{or}, F'(\infty) = 0$$

$$3) y = 0, \bar{v} = 0 \rightarrow \varphi = 0, F = 0, \text{or}, F(0) = 0$$

$$4) y = 0, \tau_t = 0 \rightarrow \varphi = 0, F'' = 0, \text{or}, F''(0) = 0$$

$$5) y = \infty, \tau_t = 0 \rightarrow \varphi = \infty, F'' = 0, \text{or}, F''(\infty) = 0$$

از این شرایط مرزی می‌توان دید که وقتی $\varphi = 0$ است، معادله ۲-۲۳ نتیجه می‌دهد که $C=0$ است،

پس معادله ۲-۲۳ تبدیل می‌شود به :

$$FF' + F'^2 = 0 \quad (24-2)$$

تولمین این معادله را به صورت عددی حل کرد و مقدار آزمایشی ضریب a را با بکاربردن داده‌های جمع‌آوری شده به وسیله ریچارد^۱ [۱۴] تعیین کرد.

^۱ Richardt

جزئیات حل گوتلر به وسیله راجاراتنام داده شده است. در اینجا دوباره σ یک ثابت است که لازم است که از آزمایشات تعیین شود. فرضیه انتقال ورتیسسته هم برای مطالعه توزیع سرعت در یک جت بکار برده شده است که به وسیله گلدستاین^۱ [۶] بحث شده است.

۲-۳- مطالعات آزمایشی

بسیاری محققان به بررسی جت های صفحه ای پرداخته اند که به منظور بدست آوردن اطلاعات مفید در مورد تعیین توزیع سرعت و قابلیت تخریب جریان می باشد. آزمایشات نشان داد که محل مبدا واقعی که جت شروع می شود با شروع از نازل منطبق نیست. در بعضی موارد محل مبدا واقعی جت در پشت نازل و در یک سری موارد هم در جلوی نازل بوده است. بعلاوه، مشخص شد که محل مبدا واقعی به مرحله توربلانسی در جریان در نازل حساس است. در نتیجه، برای اهداف خاصی، محل مبدا با نازل منطبق می باشد.

البرتسون فهمید که طول منطقه در حال توسعه به وسیله $x_0/b_0 = 10.4$ داده شده است. در این منطقه، آنها فرض کردند که در حوزه مخروطی سرعت ثابت است و در منطقه اختلاط، توزیع گوسی است. برای تغییرات دبی حجمی تخلیه و انرژی سینیتیک در منطقه جریان در حال توسعه آنها پیدا کردند که:

$$\begin{aligned} Q/Q_0 &= 1 + 0.04x/b_0 \\ E/E_0 &= 1 - 0.018x/b_0 \end{aligned} \quad (۳۱-۲)$$

$$. E_0 = b_0 \rho u_0^3 \text{ و } Q_0 = 2b_0 u_0 \text{ که}$$

^۱ Goldestain

در منطقه جریان در حال توسعه، ثابت در معادله $\bar{u}_m / u_0 \propto 1/\sqrt{x/b_0}$ برابر است با ۳,۲۲۴ که به وسیله البرتسون^۱ پیدا شده است، در حالی که ابرامویچ^۲ مقدار ۳,۷۸ را اعلام کرد. زیگنن^۳ ترجیح داد که معادله را به فرم زیر بیان کند:

$$\bar{u}_m / u_0 = C_1 / \sqrt{(x + C \cdot b_0) / b_0} \quad (۳۲-۲)$$

که C_1 از ۳,۱۲ تا ۳,۷۸ و C^* هم از ۰ تا ۲,۴ تغییر می کند. راجاراتنام توصیه کرد که مقادیر C_1 و C^* به ترتیب برابر ۳,۵ و ۰ باشند.

۲-۴- توزیع سرعت

محققان همچنین توزیع سرعت در منطقه جریان توسعه یافته را پیدا کردند. البرتسون فرض کرد که آن به صورت گوسی باشد و آن را به طور آزمایشی تأیید کرد. زیگنن توزیع را به فرم زیر بیان کرد:

$$\bar{u} / \bar{u}_m = e^{-a\lambda^2} \quad (۳۳-۲)$$

که $\lambda = y/x$ و a_1 از ۷۰,۷ تا ۰,۷۵ تغییر می کند. با جاگذاری $b = .1x$ و $a = 70.7$ داریم:

$$\bar{u} / \bar{u}_m = e^{-70.7(y/b)^2} \quad (۳۴-۲)$$

توزیعات سرعت بدست آمده به وسیله تولمین و گوتلر در یک فرم جدولی به صورت تغییرات \bar{u} / \bar{u}_m نسبت به y/b داده شد که وقتی $\bar{u} = 0.5\bar{u}_m$ می باشد $y = b$ است. آزمایشات نشان داد که مقدار a در آنالیز تولمین از ۰,۰۹ تا ۰,۱۲ تغییر می کند. اگر a به صورت ۰,۱۰ در نظر گرفته شود، مقادیر جدول زیر از \bar{u} / \bar{u}_m مطابق با تولمین می باشد:

¹ Albertson

² Abramovich

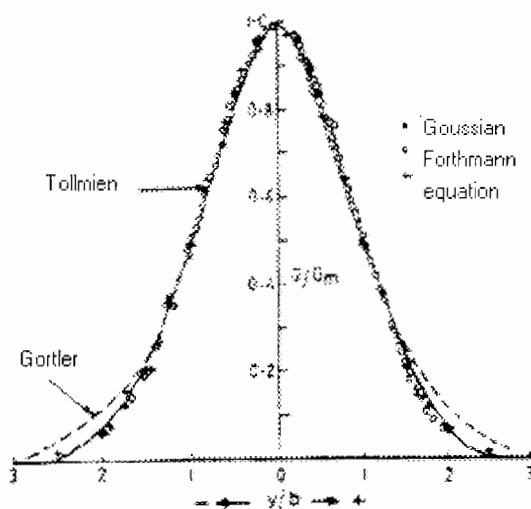
³ Zigenen

جدول ۱-۲: حل تولمین برای توزیع سرعت در جت دو بعدی

y/b	0.0	0.105	0.209	0.419	0.628	0.838	1.048	1.255
\bar{u}/\bar{u}_m	1.00	0.979	0.946	0.842	0.721	0.608	0.474	0.357
y/b	1.465	1.780	1.990	2.200	2.300	2.400	2.500	
\bar{u}/\bar{u}_m	0.249	0.125	0.067	0.030	0.020	0.009	0.000	

جدول ۲-۲: حل گوتلر برای توزیع سرعت در جت دو بعدی

y/b	0.0	0.114	0.227	0.341	0.455	0.568	0.682	0.795	
\bar{u}/\bar{u}_m	1.00	0.990	0.961	0.915	0.855	0.788	0.711	0.635	
y/b	0.909	1.022	1.136	1.362	1.590	2.045	2.270	2.500	2.840
\bar{u}/\bar{u}_m	0.558	0.486	0.420	0.302	0.218	0.102	0.070	0.048	0.021



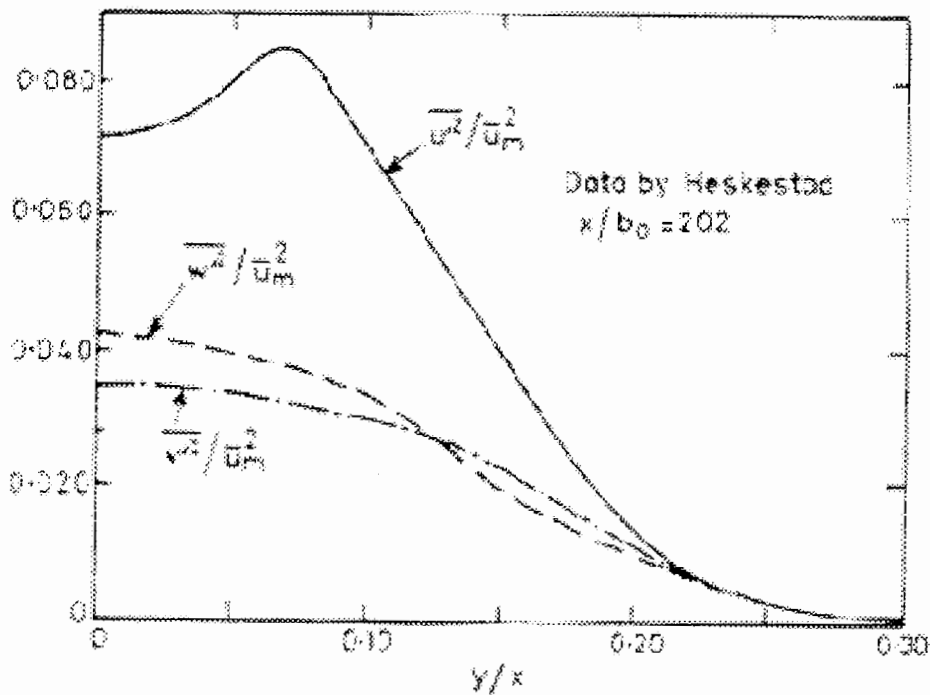
شکل ۱-۲: توزیع سرعت در منطقه جریان توسعه یافته (جت دو بعدی) [۶]

در حالت یکسان، مقدار σ در حل گوتلر برابر ۷,۷۶ پیدا شده بود. با این مقدار از σ ، حل گوتلر در جدول ۲-۲ جدول بندی شده است. شکل ۲-۱ توزیعات گوسی تولمین، گوتلر را در فرم بی بعد و فقط با داده های فورتمن نشان می دهد. به خوبی دیده می شود که توزیعات گوسی و تولمین در روی همه محدوده های y/b با هم منطبق هستند. در بخش مرکزی برای مقادیر y/b کمتر از ۱,۵، گوتلر توافق خوبی دارد، اما در محدوده خارج آن مقدار سرعت را بیشتر نشان می دهد. در منطقه جریان توسعه یافته تغییر تخلیه و تغییر انرژی سینیتیک به طور تحلیلی می تواند بدست آید. با ثوابت آزمایشی، روابط توسط البرتسون به صورت زیر در آمده اند:

$$\begin{aligned} Q/Q_0 &= 0.44\sqrt{x/b_0} & (2-35) \\ E/E_0 &= 2.64\sqrt{b_0/x} \end{aligned}$$

۲-۵- توربلانس در جت های دو بعدی

بعضی اندازه گیری های توربلانس جت دو بعدی به وسیله زیگنن و میلر و کامینگز و هسکستاد و گوتمارک و ویگنانسکی انجام شد. این مطالعات نشان می دهد که توزیع شدت توربلانس در سرتاسر جت، بعد از $x/b = 85$ تا ۹۰ مشابه است. شکل ۲-۲ تغییرات $\overline{u'^2}/\overline{u_m^2}$ ، $\overline{v'^2}/\overline{u_m^2}$ و $\overline{w'^2}/\overline{u_m^2}$ را با y/x به صورتی که توسط هسکستاد بدست آمده برای $x/b_0 = 202$ نشان می دهد.



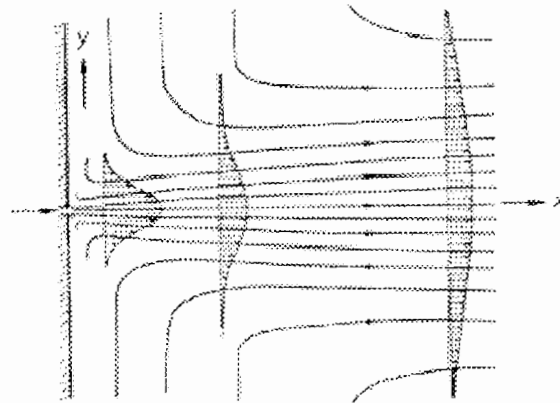
شکل ۲-۲: تغییر شدت توربلانسی در سرتاسر جت دو بعدی در محدوده کاملاً توسعه یافته [۶]

هسکستاد و گوتمارک و ویگننسکی همچنین ریز مقیاسهای پهلوئی و طولی توربلانس λ_r و λ_θ را تعیین کردند، که دارای مقادیری از ۶-۷ میلیمتر و ۴-۵ میلیمتر در نزدیک نازل بودند، و آنها در جهت جریان پایین دست به تدریج افزایش می یابند. مقیاس طول کولموگروف^۱ هم از ۰,۰۸ میلیمتر در $x/b_0 = 4.0$ تا ۰,۱۲ در $x/b_0 = 240$ افزایش یافت. برای x/b_0 بزرگتر از تقریباً ۷۰، محققان در یافتند که $\sqrt{u'^2} / \bar{u}_m = 0.22$ تا 0.25 است که به روشنی کوچکتر از مقادیر مطابق با مقادیر برای جت دایره ای است.

^۱ Kolmogorov

۲-۶- تحلیل جت های دو بعدی آرام [۱۶]

خروج یک جت از یک سوراخ مثالی از حرکت سیال در غیاب مرزهای صلب است که در آن می توان از تئوری لایه مرزی کمک گرفت. هدف، بحث در مورد یک جت دو بعدی آرام است، پس ما باید فرض کنیم که جت از یک شکاف بلند و باریک خارج می شود و با سیال محیط مخلوط می شود. این مسئله به وسیله شلیختینگ [۱۷] و بیکلی^۱ [۴] حل شده است. در عمل یک جریان جت به راحتی در هم می شود ولی در اینجا با فرض آرام ماندن جریان، جت را تحلیل می کنیم. جت مقداری از سیال محیط را (که به طور اولیه در حال سکون می باشد) به علت اصطکاک روی سطح خارجی اش با خودش حمل می کند. الگوی خطوط جریان در شکل ۲-۳ نشان داده شده است. سیستم مختصات ما هم دارای مبدائی منطبق با محل شکاف است و محورش در جهت محور جت است.



شکل ۲-۳: الگوی خطوط جریان برای یک جت دو بعدی آرام [۱۶]

^۱ Schlichting & Bickly

همانند جت درهم، گرادیان فشار در جهت x را می توان حذف کرد. پس مومنتوم کلی در جهت x که در اینجا با J نشان می دهیم در جهت x ثابت بوده و مستقل از فاصله از سوراخ میباشد، در نتیجه:

$$J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = const \quad (36-2)$$

همانند جریان درهم، سرعت u تابعی از y/b می باشد که b عرض جت است. همچنین b متناسب با x^q است. ما می توانیم تابع جریان را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\psi \approx x^p f(y/b) = x^p f(y/x^q) \quad (37-2)$$

دو مجهول p و q با توجه به شرایط زیر تعیین می شوند:

۱. فلاکس مومنتوم در جهت x مستقل از x است.

۲. ترم شتاب و اصطکاک در معادله از مرتبه یکسان هستند.

با بررسی این دو شرط می توان دو معادله برای p و q به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} 2p - q &= 0 & (38-2) \\ 2p - 2q - 1 &= p - 3q \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$p = 1/3; q = 2/3 \quad (39-2)$$

نتیجتاً، می توان متغییر مستقل و تابع جریان را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{3v^{1/2}} \frac{y}{x^{2/3}}; & (40-2) \\ \psi &= v^{1/2} x^{1/3} f(\eta) \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن فاکتور های ثابت مناسب، مولفه های سرعت به وسیله عبارات زیر مشخص می شوند:

$$u = \frac{1}{3x^{1/3}} f'(\eta) \quad (41-2)$$

$$v = -\frac{1}{3} v^{1/3} x^{-2/3} (f - 2\eta f')$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله دیفرانسیل و معادل صفر قرار دادن ترم فشار با صفر، معادله دیفرانسیل زیر بدست می آید:

$$f'^2 + ff'' + f''' = 0 \quad (42-2)$$

که f تابعی از η می باشد.

با شرط مرزی:

$$y = 0 \rightarrow v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (43-2)$$

$$y = \infty \rightarrow u = 0$$

$$\Rightarrow \eta = 0 \rightarrow f = 0, f'' = 0$$

$$\Rightarrow \eta = \infty \rightarrow f' = 0$$

حل معادله ۴۲-۲ ساده است. با انتگرال گرفتن داریم:

$$ff' + f'' = 0 \quad (44-2)$$

چون در شرط مرزی در $\eta = 0$ ، $f, f'' = 0$ صفر می شوند پس ثابت انتگرال هم صفر می شود. معادله دیفرانسیل بالا را می توان به راحتی انتگرال گیری کرد اگر ترم اول فاکتور ۲ داشته باشد که می توان با فرض زیر به این مسئله نائل شد:

$$\xi = \alpha\eta; f = 2\alpha F(\xi) \quad (45-2)$$

که α یک ثابت آزاد است که بعدا تعیین می شود. پس معادله بالا تبدیل می شود به:

$$F'' + 2FF' = 0 \quad (46-2)$$

که علامت پریم نشانه دیفرانسیل نسبت به ξ است. شرایط مرزی برابر می شود با:

$$\xi = 0 \rightarrow F = 0; \xi = \infty \rightarrow F' = 0$$

با یکبار انتگرال گیری داریم:

$$F' + F^2 = 1 \quad (47-2)$$

که ثابت انتگرال معادل یک می شود که با توجه به شرط $F'(0) = 1$ بدست می آید. معادله ۴۷-۲ یک معادله دیفرانسیل از نوع ریکاتی است و جواب معادله برابر می شود با:

$$\xi = \int_0^F \frac{dF}{1-F} = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+F}{1-F} = \tanh^{-1} F \quad (48-2)$$

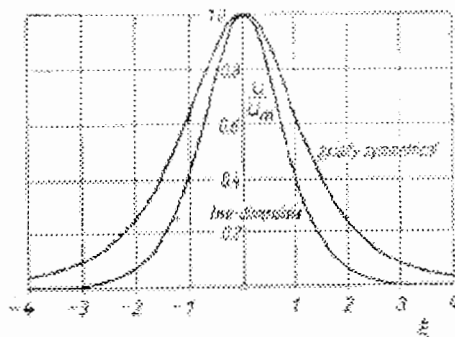
با معکوس کردن این معادله داریم:

$$F = \tanh \xi = \frac{1 - e^{-2\xi}}{1 + e^{-2\xi}}$$

از آنجا که $\frac{dF}{d\xi} = 1 - \tanh^2 \xi$ ، توزیع سرعت می تواند از معادله ۴۶-۲ بدست آید و برابر است با:

$$u = \frac{2}{3} \alpha^2 x^{-1/3} (1 - \tanh^2 \xi) \quad (49-2)$$

توزیع سرعت از معادله ۴۹-۲ در شکل ۴-۲ رسم شده است.



شکل ۴-۲: توزیع سرعت در یک جت دو بعدی و دایره ای [۱۶]

برای تعیین ثابت α با توجه به شرایط ۴۵-۲ می توان این ثابت را تعیین کرد که در آن مومنوم در جهت x ثابت فرض شده است. داریم:

$$J = \frac{4}{3} \rho \alpha^3 v^{1/2} \int_0^{\infty} (1 - \tanh^2 \xi)^2 d\xi = \frac{16}{9} \rho \alpha^3 v^{1/2} \quad (50-2)$$

ما باید فرض کنیم که فلاکس مومنوم J برای جت را داریم. با معرفی مومنوم سینیتیک ($J/\rho = K$)، از معادله ۵۴ داریم:

$$\alpha = 0.8255 \left(\frac{K}{v^{1/2}} \right)^{1/3} \quad (51-2)$$

و در نتیجه برای توزیع سرعت:

$$u = 0.4543 \left(\frac{K^2}{vx} \right)^{1/3} (1 - \tanh^2 \xi) \quad (52-2)$$

$$v = 0.5503 \left(\frac{Kv}{x^2} \right)^{1/3} (2\xi(1 - \tanh^2 \xi) - \tanh \xi)$$

$$\xi = 0.2752 \left(\frac{K}{v^2} \right)^{1/3} \frac{y}{x^{2/3}}$$

سرعت پیمایش در مرز جت برابر است با:

$$v_{\infty} = -0.550 \left(\frac{Kv}{x^2} \right)^{1/3} \quad (53-2)$$

و نرخ حجم تخلیه بر واحد ارتفاع شکاف برابر است با $Q = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u dy$ یا:

$$Q = 3.3019 (Kvx)^{1/3} \quad (54-2)$$

اندازه گیری های انجام شده به وسیله اندراده برای جت های دو بعدی آرام نشان داد که جت ها تا عدد رینولدز $Re=30$ آرام باقی می مانند که عدد رینولدز بر اساس سرعت خروجی از شکاف و عرض شکاف می باشد. [۱۶]

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل، شرایط مرزی و اولیه

معادلات دیفرانسیل، شرایط مرزی و اولیه

۱-۳- مقدمه

هدف ما در این پروژه، تنظیم برنامه ای کامپیوتری برای تحلیل عددی معادلات ناویراستوکس دو بعدی برای یک جت صفحه‌ای غیر قابل تراکم می‌باشد. البته این برنامه کامپیوتری برای هر جریان برش آزادی قابلیت استفاده دارد. دامنه محاسباتی جریان جت صفحه ای مطابق شکل ۱-۳ در جهت اصلی جریان x محدود به طول دامنه فیزیکی جریان می‌باشد و در جهت عمود به جریان y از هر دو طرف نامحدود^۱ در نظر گرفته می‌شود تا مرز محیط مادی در آن احساس نشود. در جهات x و y از طرح اختلاف محدود فشرده^۲ استفاده شده است. در جهت عمود به جریان y از روش "فشرده سازی"^۳ جهت متناظر نمودن دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی به طول واحد استفاده شده است [۱۱].

قبل از هر کاری ابتدا باید فرمول‌های ریاضی مناسب را برای جریان جت صفحه‌ای دو بعدی غیر قابل تراکم استخراج کرده و همه کمیت‌ها به وسیله مشخصه طول و مشخصه سرعت بی‌بعد شوند که در این ارتباط نیم‌عرض جت^۴ ورودی $b_{1/2}$ و سرعت ورودی U به عنوان مقیاس‌های بی‌بعد کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند. معادلات بقای جرم و ناویراستوکس به وسیله این دو

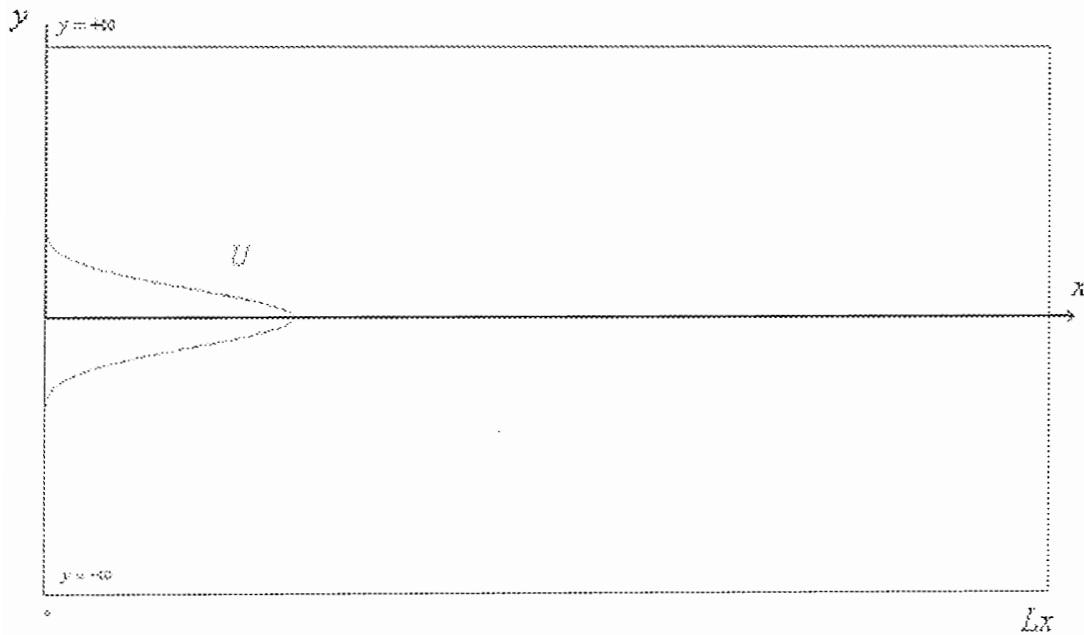
^۱ Double-Infinity

^۲ Compact Finite Difference Scheme

^۳ Mapping

^۴ Half Width Jet

مقیاس مشخصه بی بعد می شوند. عدد رینولدز بدست آمده طبق این بی بعد سازی برابر است با $R_v = \frac{U_0 l}{\nu}$ ، که ν لزجت سینماتیک سیال عامل می باشد.



شکل ۳-۱: شماتیکی از دامنه فیزیکی مسئله

۳-۲- معادله ناویراستوکس

پروفیل سرعت جت ورودی با یک جریان اولیه^۵ $U_0(y)$ مشخص شده است. جریان جت اجازه پیدا می کند که در جهت x توسعه یابد. در جهت y مجموعه از هر دو طرف نامحدود است. با توجه به قانون دوم نیوتن، معادلات مومنتم برای یک ذره سیال نیوتنی معرفی می شود. این معادلات به معادلات ناویراستوکس معروفند. با توجه به بقای جرم معادله پیوستگی برای جریان غیر قابل تراکم به صورت معادله ۳-۱ بدست می آید. در این تحقیق فرم چرخشی معادلات ناویر استوکس را به صورت مستقیم و بدون استفاده از هر گونه مدل سازی و یا ساده سازی به صورت

⁵ Initial Flow

عددی حل می‌کنیم. به همین علت به این روش که در این برنامه مورد استفاده قرار می‌گیرد "حل مستقیم عددی"^۶ گویند.

فرم کلی معادله ناوراستوکس به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (1-3)$$

با توجه به رابطه زیر:

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (2-3)$$

برای مورد $A = B = \vec{U} = (U, V, W)$ ، معادله ۲-۳ به صورت زیر در می‌آید:

$$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{U} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) \quad (3-3)$$

که $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. اگر معادله ۳-۳ در معادله ۱-۳ جایگزین گردد. معادله زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{H} - \nabla(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (4-3)$$

که $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3) = \vec{U} \times \vec{\omega}$ با گرفتن کرل از معادله ۴-۳ داریم:

$$\frac{\partial(\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \nabla \times \nabla(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\nabla \times \vec{U}) \quad (5-3)$$

که با توجه به اینکه $\nabla \times \nabla(\text{scalar}) = 0$ ، معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (6-3)$$

با گرفتن کرل از معادله ۶-۳، معادله زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \vec{U})) \quad (7-3)$$

با توجه به معادله پیوستگی ($\nabla \cdot \vec{U} = 0$) و به کار بردن رابطه زیر:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U} \quad (8-3)$$

⁶ Direct Numerical Simulation

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 U \quad (14-3)$$

این معادله برای پیشروی محاسبات در دامنه زمان مورد استفاده قرار می گیرد. دومین مولفه سرعت در جهت y هم به کمک معادله پیوستگی به راحتی بدست می آید.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (15-3)$$

۳-۳- شرایط مرزی

به دلیل اینکه معادلات ناویر استوکس و پیوستگی برای متغیرهای محاسباتی حل می شوند شرایط مرزی بر روی متغیرهای محاسباتی اعمال می شوند. معادله ۱۴-۳ یک معادله دیفرانسیل درجه چهار می باشد، در نتیجه نیاز به اعمال چهار شرط مرزی داریم. مقادیر u در مرز ورودی^۸ و مرز خروجی^۹ مجموعه محاسباتی مشخص می باشد. همچنین با توجه به معادله پیوستگی، $\frac{\partial u}{\partial x}$ هم در مرزهای ورودی و خروجی مجموعه محاسباتی معلوم می باشند. این شرایط مرزی به شرایط دریچلت^{۱۰} و نیومن^{۱۱} معروف می باشند.

در شبیه سازی، مولفه سرعت لحظه ای در جهت جریان اصلی در ورودی می تواند به صورت یک پروفیل سرعت گوسی به صورت e^{-y^2} مطابق نتایج آزمایشی زیگنر و آلبرتسون [۶] باشد و یا پروفیلی هیپربولیکی به صورت $\frac{1}{\cosh^2 y}$ مطابق نتایج تحلیلی شلیختینگ باشد [۱۶] که به همراه آن مقداری اغتشاشات به صورت نتایج عددی سلمانی [۲] منتج از حل عددی معادله

⁸ Inflow Boundary Condition

⁹ Outflow Boundary Condition

¹⁰ Dirichlit Boundary Condition

¹¹ Neumann Boundary Condition

۳-۴- شرط اولیه

شرط اولیه برای شبیه سازی جت دو بعدی همراه با اغتشاشات، نتیجه بدست آمده از جت دو بعدی در حالت پایدار زمانی می باشد که در آن شرط مرزی ورودی برابر با جریان اولیه می باشد و هیچگونه اغتشاش نداردیم.

در حالت پایدار زمانی یک پروفیل سرعت یکنواخت با توزیع هیپربولیکی برای تمام مقاطع مختلف x به عنوان شرط اولیه برای جریان جت انتخاب کرده ایم.

در جت پایدار زمانی در گره های مختلف بعد از گذشت زمانی، مقدار سرعت در آن دیگر تغییر نمی کند و مستقل از زمان و پایدار می گردد.

فصل چهارم

روش های عددی

روشهای عددی

۴-۱- مقدمه

همانطور که قبلا اشاره شد برای حل معادلات ناویر استوکس از روش عددی اختلاف محدود فشرده در دو جهت x و y استفاده می‌شود. در این فصل توضیحاتی به تفصیل در مورد این روش ارائه می‌شود.

الگوریتم کاری برای حل معادله ناویر استوکس با توجه به ۴ شرط مرزی و یک شرط اولیه در زیر توضیح داده شده است:

۱. با توجه به شرط اولیه مشخص برای u ، مقدار v محاسبه می‌شود.

۲. با توجه به اینکه $\omega = \nabla \times U$ است و برای حالت دو بعدی $\omega_2 = 0$ و $\omega_1 = 0$

است، مقدار $\omega_3 = \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ حساب می‌شود.

۳. مقدار $H = U \times \omega$ می‌باشد که برای حالت دو بعدی $H_3 = 0$ است

مقادیر $H_2 = -U \cdot \omega$ و $H_1 = V \cdot \omega$ محاسبه می‌شود.

۴. محاسبه ترم های غیر خطی در معادله که به صورت $\frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y}$ است.

۵. محاسبه ترم های لزجتی در معادله که به صورت $\frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 U$ است.

۶. بعد از محاسبه طرف راست معادله، با توجه به روش رانج کوتای مرتبه سوم

مقدار $\nabla^2 u$ محاسبه می‌شود.

۷. با مشخص شدن $\nabla^2 u$ ، مقدار u از آن استخراج می شود.

۸. تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام زمانی است که از u تولید شده در

مرحله قبل به عنوان شرط اولیه استفاده می شود.

برای حل معادله ۳-۱۰ و طبق الگوریتم بالا، ما باید قادر به انجام اعمال زیر باشیم:

۱- محاسبه مشتقات مادی

۲- انتگرال گیری از معادله پیوستگی به منظور بدست آوردن v از معادله ۳-۱۱.

۳- محاسبه ترم های غیر خطی

۴- حل معادله پواسون [۳] برای حالت دو بعدی

۵- پیشرفت زمانی (بدست آوردن داده های جدید که در اصل آنها به صورت شرط اولیه برای

زمان بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت).

۴-۲- محاسبه مشتقات مادی

مشتقات مادی با بکار بردن طرح اختلاف محدوده فشرده استاندارد ارائه شده توسط لیلی

[۸] محاسبه شده است. لیلی^۱ مشتق اول تابع $f(x)$ را به طور ضمنی^۲ مطابق معادله ۴-۱ بیان کرده است.

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \quad (۴-۱)$$

$$\frac{\alpha + 2}{3h}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12h}(f_{j+2} - f_{j-2})$$

که علامت پریم نمایانگر مشتق اول، j بیان کننده تعداد گره $(1 \leq j \leq J)$ و $\Delta x = Lx/Nx$ است

که $Nx = J - 1$ است.

^۱ S.K.Lele

^۲ Implicitly

اگر در معادله ۴-۱، $\alpha = 1/4$ یا $\alpha = 1/3$ قرار داده شود به طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم می‌رسیم. برای جلوگیری از ناهنجار بودن ماتریس طرف چپ معادله فوق، طرفین آن را در $1/\alpha$ ضرب می‌کنیم.

نتیجه به صورت زیر می‌شود:

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \quad (۲-۴)$$

$$\frac{1+2/\alpha}{3h} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4-1/\alpha}{12h} (f_{j+2} - f_{j-2})$$

در مرزها یعنی جایی که $j=1$ یا $j=J$ است یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2h} (-5f_1 + 4f_2 + f_3) \quad (۳-۴)$$

$$f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2h} (5f_J - 4f_{J-1} - f_{J-2}) \quad (۴-۴)$$

در همسایگی مرزها یعنی جایی که $j=2$ یا $j=J-1$ است از معادله ۴-۲ در حالتی که $\alpha = 1/4$ است استفاده می‌شود.

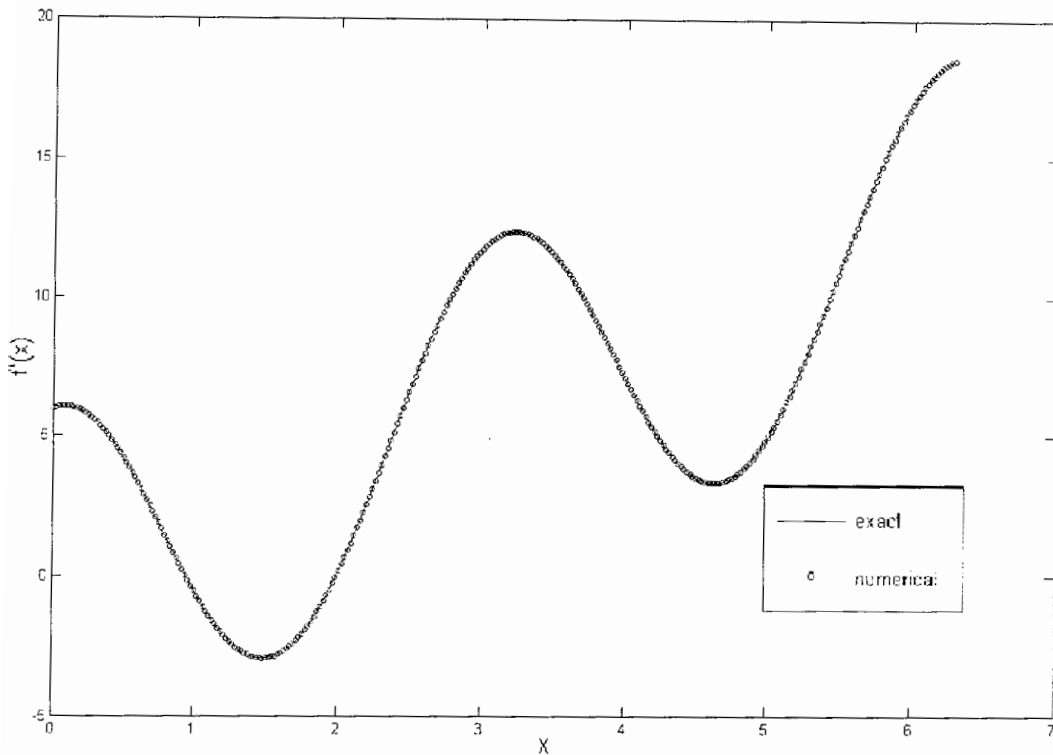
همانطور که توسط لیلی بحث شده است با قرار دادن $\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1)$ به جای α در معادله ۴-۲ برای گره های $j=3$ و $j=J-2$ می‌توان پایداری و بقای عددی معادله

را تضمین کرد. در شکل ۴-۱ می‌توانید میزان دقت آن را برای تابعی به فرم

$$y = 3 \sin(2x) + x^2$$

ملاحظه کنید.

انتظار داریم که طرحی با مرتبه خطای سوم در مرز و مرتبه خطای ششم در گره های مرکزی داشته باشیم. شکل ۴-۲ مرتبه دقت را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱: تقریب مشتق اول تابع $y = 3 \sin(2x) + x^2$

معادله ۴-۵ مشتق دوم تابع $f(x)$ را نشان می دهد که یک طرح اختلاف محدود فشرده

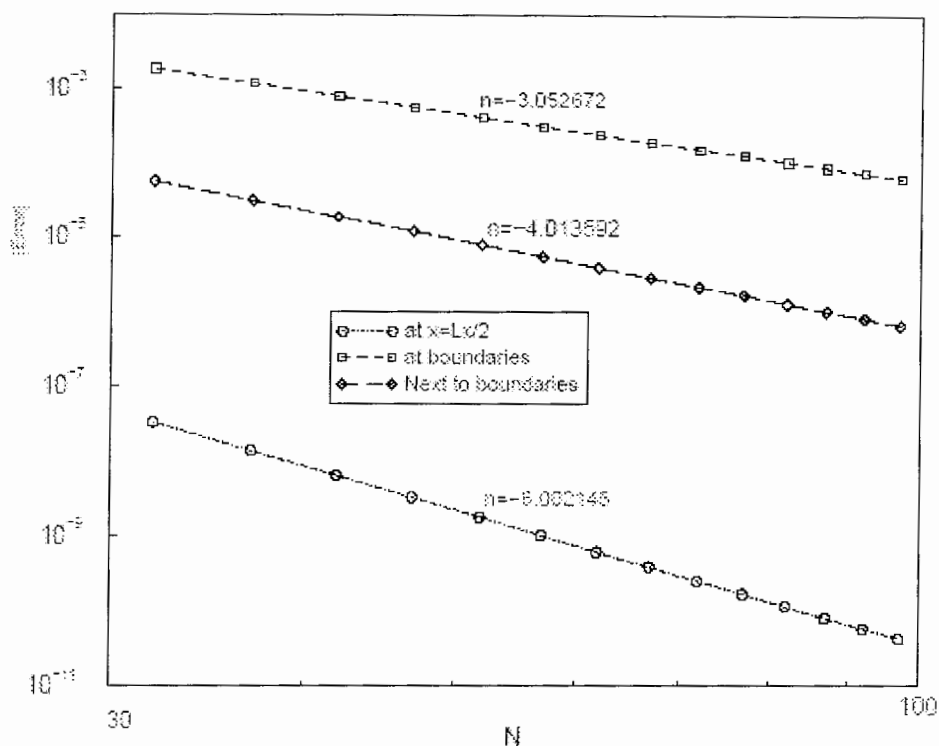
و با دقت مرتبه چهارم است.

$$\alpha f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \quad (4-5)$$

$$\frac{4(1-\alpha)}{3h^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{10\alpha - 1}{12h^2}(f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2})$$

که در آن $\alpha = 1/4$ است. در اینجا مسئله ناهنجاری هم مورد توجه قرار گرفته است و معادله در

$1/\alpha$ ضرب شده است.



شکل ۴-۲: مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [۱۰]

در مرزها از یک طرف مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f_1'' + 11f_2'' = \frac{1}{h^2}(13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4) \quad (۶-۴)$$

$$f_J'' + 11f_{J-1}'' = \frac{1}{h^2}(13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_{J-3}) \quad (۷-۴)$$

با مشتق گیری از معادله ۳-۴ معادله ۸-۴ تولید می شود.

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{1}{2h}(-5f_1' + 4f_2' + f_3') = \frac{-3}{h}f_1' + \frac{1}{2h}(f_1' + 4f_2' + f_3') \quad (۸-۴)$$

اگر ترم طرف راست معادله ۸-۴ را با معادله ۱-۴ در حالتی که $\alpha = 1/4$ جایگزین کنیم داریم:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{-3}{h} \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=0} - \frac{3}{2h^2}(f_1 - f_3) \quad (۹-۴)$$

روش مشابهی می توان برای گره J به کار برد.

$$f_j'' + 2f_{j-1}'' = \frac{3}{h} \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=Lx} - \frac{3}{2h^2} (f_j - f_{j-2}) \quad (10-4)$$

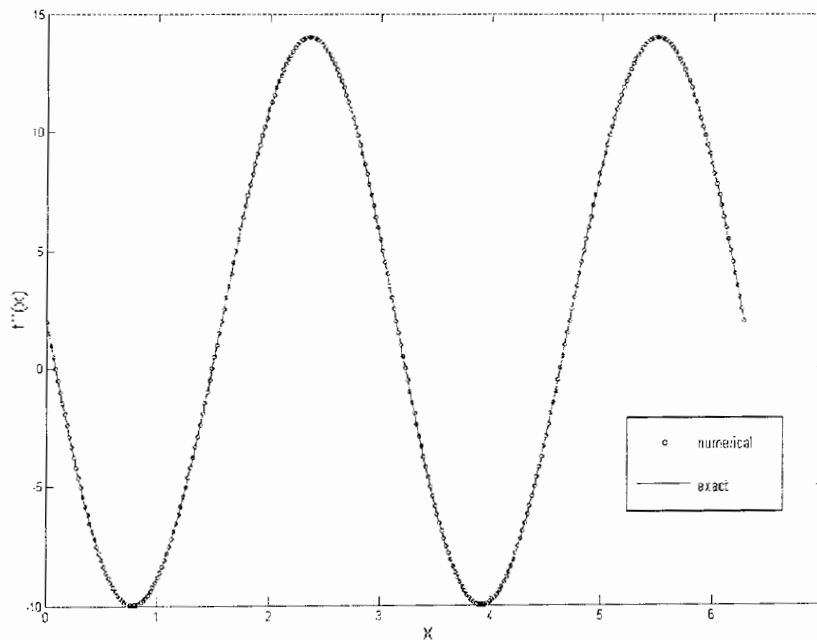
نزدیک مرزها یعنی جائیکه $j=2$ و $j=J-1$ است از طرح اختلاف محدوده فشرده

مرتبه دوم استفاده شده است که با جایگزینی $\alpha = 1/10$ در معادله ۴-۵ بدست می آید.

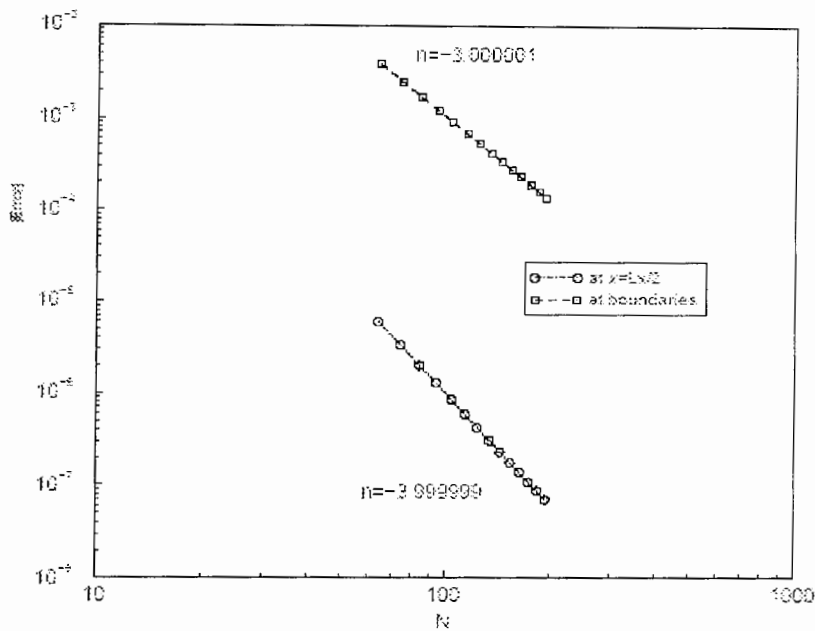
در شکل ۳-۴ مقایسه بین نتایج عددی مشتق دوم و مقدار حقیقی تابع

$y = 3 \sin(2x) + x^2$ را می توانید ملاحظه کنید. میزان خطا نیز در شکل ۴-۴ برای گره های

مرزی و گره های داخلی ترسیم شده است.



شکل ۳-۴: تقریب مشتق دوم تابع $y = 3 \sin(2x) + x^2$.



شکل ۴-۴: مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [۱۰]

برای محاسبه مشتقات چهارم هم می‌توان اپراتور مشتق دوم را دوبار اعمال کرد که در طرف راست معادله ناویر استوکس و در قسمت ترم های لزجی وجود دارد.

۴-۳- روش محدود کردن دامنه y

جریان جت جریانی آزاد و دور از مرزهای صلب می‌باشد و در نتیجه در جهت y نباید هیچگونه محدودیت مادی داشته باشیم. یعنی $-\infty \leq y \leq \infty$ می‌باشد. برای گنجاندن y در یک دامنه محاسباتی از یک تابع یک به یک مثلثاتی استفاده می‌کنیم که مختصات فیزیکی y تبدیل به مختصات محاسباتی $0 \leq \zeta \leq 1$ می‌شود. فواصل گره‌ها در مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت می‌باشند ولی در مجموعه فیزیکی این فواصل متساوی نیستند و در ناحیه ای بیشتر متمرکزند. رابطه مورد استفاده بین مکان گره‌های موجود در مجموعه محاسباتی و مجموعه فیزیکی به وسیله معادله ۴-۱۱ بیان شده است. [۱۱]

$$y = -\beta \cot(\pi\zeta) \quad (11-4)$$

که β پارامتر مربوط به کنترل میزان کشیدگی و انقباض است. برای مشتق گیری تابع f نسبت به ζ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dy} = \frac{1}{\pi\beta} \sin^2(\pi\zeta) \frac{df}{d\zeta} \quad (12-4)$$

با برابر قرار دادن $\lambda_1 = \frac{1}{\pi\beta} \sin^2(\pi\zeta)$ داریم:

$$\frac{df}{dy} = \lambda_1 \frac{df}{d\zeta} \quad (13-4)$$

برای محاسبه مشتق دوم نیز به صورتی مشابه عمل می کنیم:

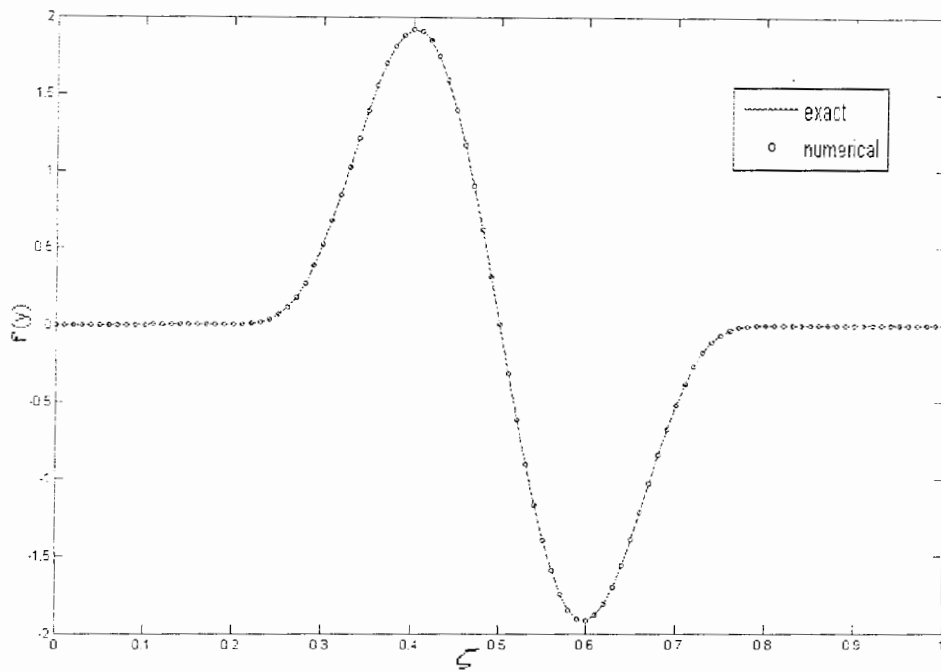
$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \lambda_2 \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \lambda_3 \frac{df}{d\zeta} \quad (14-4)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^2 \quad (14-4)$$

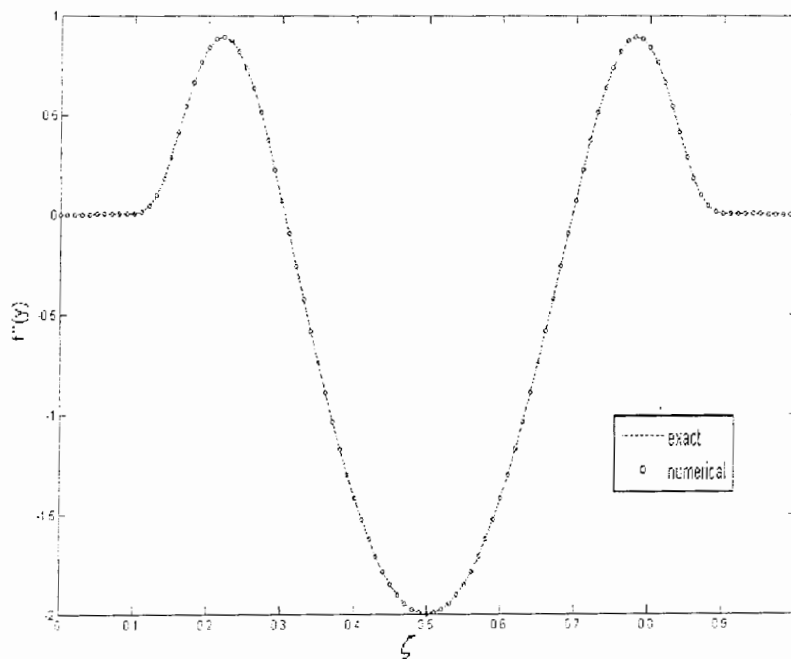
$$\lambda_3 = -\frac{2}{\pi\beta^2} \sin^3(\pi\zeta) \cos(\pi\zeta) \quad (15-4)$$

در شکل های ۴-۵ و ۴-۶ می توان نتیجه این روش مشتق گیری را با توجه به محدود کردن موجود

و $\beta = 1$ و $N_y = 100$ ملاحظه نمایید.



شکل ۴-۵: تقریب مشتق اول تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی در جهت y با $\gamma = 5, \beta = 1$.



شکل ۴-۶: تقریب مشتق دوم تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی در جهت y با $\gamma = \beta = 1$.

۴-۴- انتگرال گیری

با حل معادله ۳-۹ می توان $u(x, y, t)$ را بدست آورد. برای محاسبه سرعت در جهت

عرضی v از معادله پیوستگی بهره می گیریم. طبق معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (16-4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (17-4)$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده کنیم که ماتریس سمت راست معادله ۲-۴ دارای

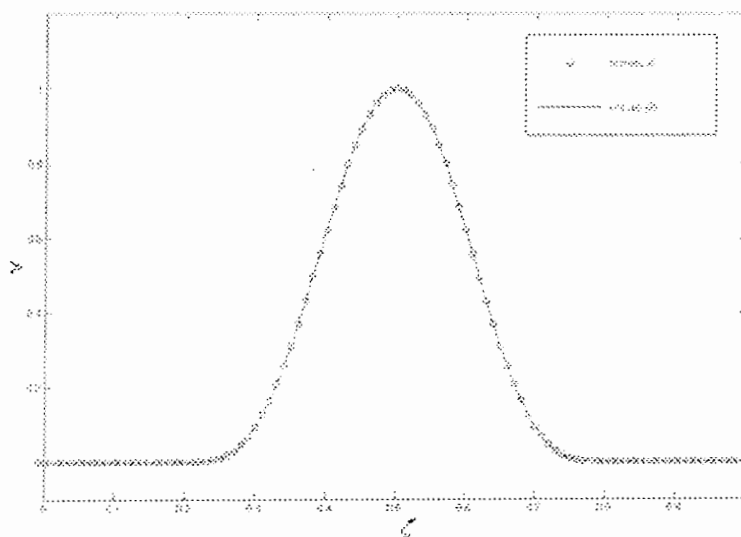
عناصر صفر بر روی قطر اصلی است و با این وضع نمی توان به انتگرال گیری پرداخت. جهت غلبه

بر این مشکل با مشتق گیری از دو طرف معادله بر حسب y معادله ۴-۱۸ بدست می آید.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (18-4)$$

با وجود دو شرط مرزی برای v به صورت $v = 0 \rightarrow y = \pm\infty$ این معادله حل می شود.

نتایج مربوط به انتگرال گیری در شکل ۴-۷ آمده است.



شکل ۴-۷: تقریب انتگرال تابع $f'(y) = -2ye^{-y^2}$ با شرایط مرزی $f(y(0)) = f(y(1)) = 0$ که

به صورت $f(y) = e^{-y^2}$ می باشد.

۴-۵- پیشروی در زمان:

طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده به وسیله رای^۱ [۲۲] بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به کار برده می شود. برای پیشروی زمانی معادله ای به صورت معادله ۴-۱۹، مطابق با جدول ۴-۱ می توان فرایند را انجام داد.

جدول ۴-۱: طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم.

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1 \Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R' = R(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$R'' = R(u'')$
$t^{n+1} = t^n + \Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \quad (۴-۱۹)$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt ، طرف راست معادله باید در سه مرحله زمانی محاسبه گردد. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه $(c_i + d_i) \Delta t$ جلو می رود و u به وسیله یک ترکیب خطی از R در مرحله زمانی حال و R در مرحله زمانی گذشته محاسبه می گردد. بعد از گذشت مرحله سوم، زمان به اندازه Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است.

برای محاسبه ضرایب با معادل قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با طرح می توان اقدام نمود.

داریم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

^۱ A.Wray

$$c_1^2 c_2 + c_3 (c_1 + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2}))^2 + c_1^2 d_3 = 1/3$$

$$c_1 c_2 + c_3 (\frac{d_2}{c_2} (1 + \frac{d_3}{c_3}) + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2})) = 1/2$$

$$c_1 c_2 c_3 = 1/6$$

برای حل $d_1 = 0$ قرار می‌دهیم. نتیجه به صورت زیر است:

$$c_1 = 8/15 \quad d_1 = 0$$

$$c_2 = 5/12 \quad d_2 = -17/60$$

$$c_3 = 3/4 \quad d_3 = -5/12$$

تست زیر برای تعیین دقت طرح مذکور انجام شده است. $u(t) = e^{-t}$ همراه با شرط اولیه

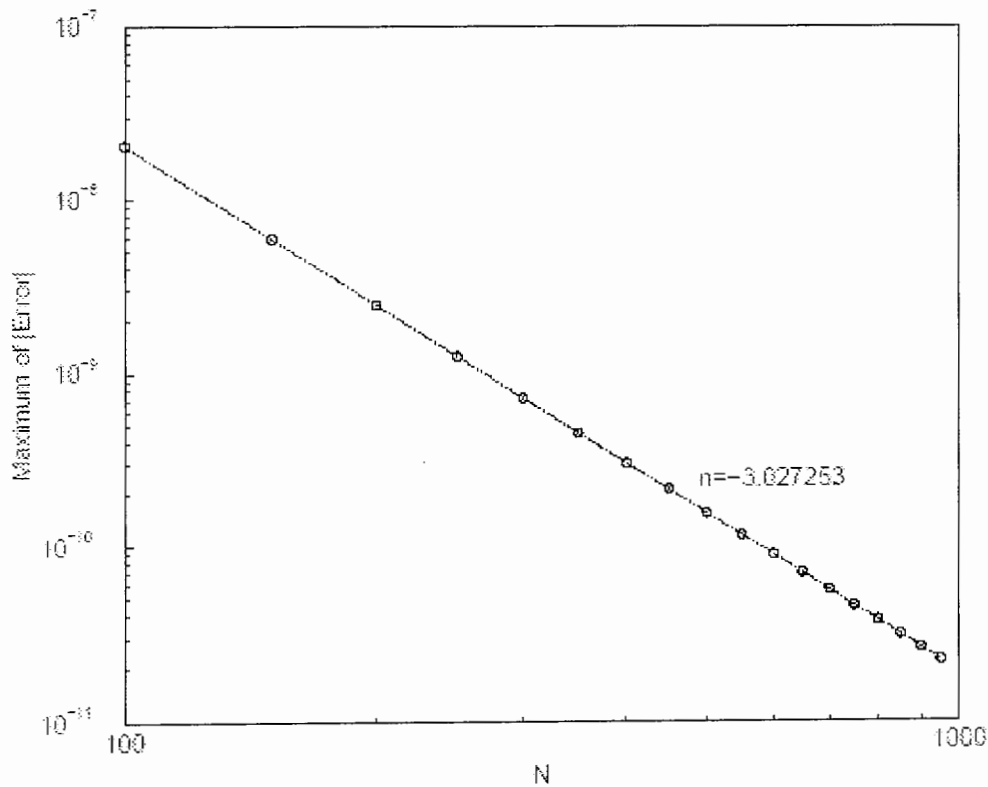
$$u(0) = 1$$

یک حل تحلیلی برای معادله ۲۰-۴ است.

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \quad (20-4)$$

ماکزیمم خطا بین نتایج عددی و حل واقعی در شکل ۸-۴ رسم شده است که به روشنی

نشان دهنده صحیح بودن دقت مرتبه سوم این طرح می‌باشد.



شکل ۴-۸: مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$. [۱۰]

۴-۶- حل معادله پواسون

بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر استوکس و پیشروی در زمان، مقدار $\nabla^2 u$ بدست می آید.

پس داریم:

$$\nabla^2 u = C \quad (۴-۲۱)$$

که C معلوم می باشد و مقدار u مجهول است. با بسط معادله داریم:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C \quad (۴-۲۲)$$

با جایگزین کردن اپراتور های مشتقات دوم در جهات x و y معادله زیر بدست می آید:

$$(D2X.u^T)^T + D2Y.u = C \quad (23-4)$$

توجه کنید که برای اعمال اپراتور مشتق دوم در جهت X باید تابع مفعول را ترانسپوز کرده و در ماتریس اپراتور $D2X$ ضرب کرده و در نهایت از نتیجه ضرب دو ماتریس، یک ترانسپوز گرفته شود.

با توجه به اینکه:

$$(ST)^T = T^T S^T \quad (24-4)$$

پس معادله ۲۳-۴ به معادله زیر تبدیل می شود.

$$u.D2X^T + D2Y.u = C \quad (25-4)$$

بارتلز [۳] چگونگی روش حل معادله ماتریسی $AX + XB = C$ را ارائه کرده است که در اینجا $A = D2Y$ و $B = D2X^T$ و $X = u$ است و در نهایت u بدست می آید.

۴-۷-۷- ارزیابی کد و شبیه سازی عددی:

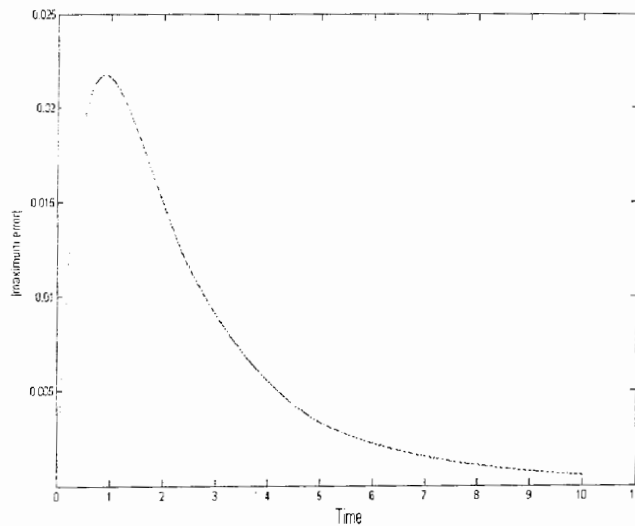
به منظور تست و ارزیابی صحت برنامه نوشته شده، در حالتی که مود های مختلف کد فعال هستند، نتایج را با بعضی از حل های دقیق معادله ناویر استوکس در حالات خاص تست و مقایسه می کنیم.

۴-۷-۱- معادله نفوذ وابسته به زمان

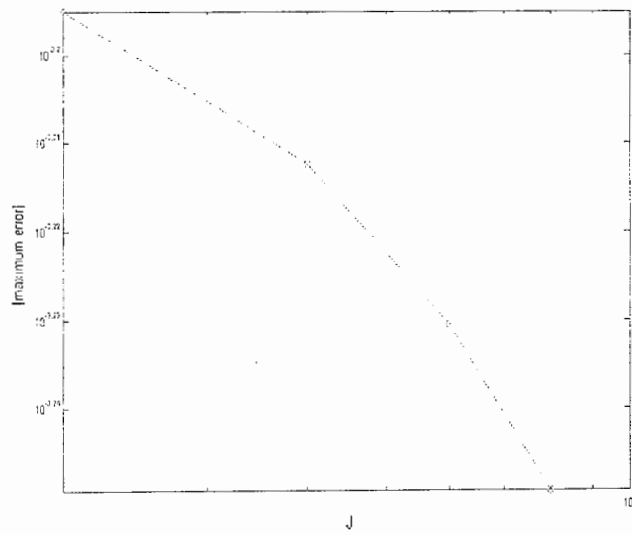
حل معادله ناویر استوکس (۳-۹) با توجه به پیشرفت در زمانی در برنامه عددی با حل واقعی معادله نفوذ تست شده است. معادله نفوذ مربوط به حالتی است که $H = 0$ است. یک حل خاص برای معادله نفوذ به صورت زیر است: [۱۰]

$$u(x, y, t) = \cos(x) \times \frac{y-1}{\left(1 + \frac{4t}{\text{Re}}\right)^{1.5}} \times \exp(-2t / \text{Re}) \times \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{\left(1 + \frac{4t}{\text{Re}}\right)}\right) \quad (۴-۲۶)$$

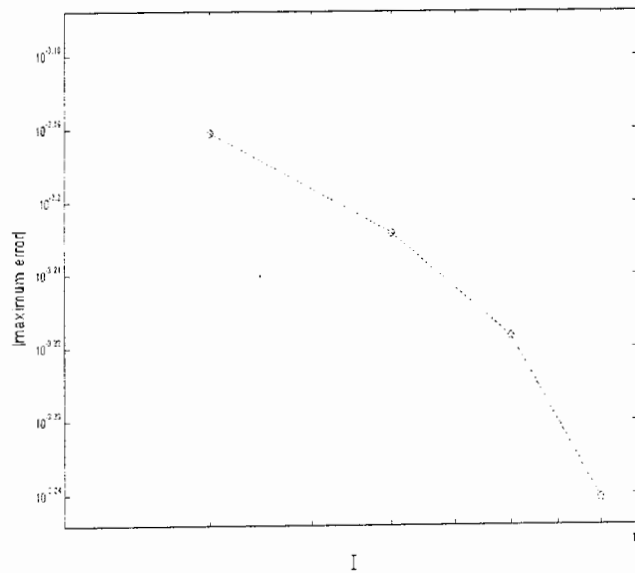
برای انجام این تست بایستی از این معادله برای تولید شرط مرزی و شرط اولیه استفاده نمود. در نتیجه شرط مرزی خروجی جابجایی و تشکیل ترم‌های غیر خطی در این تست نمی‌توانند ارزیابی شوند. ولی حل معادله پواسون و کیفیت پیشرفت در زمان ارزیابی می‌شوند. توجه کنید که u شرط پایداری را ارضاء می‌کند و حل می‌تواند برای شبیه سازی جریان جت کاملاً لزج مورد استفاده قرار گیرد. پارامترها در این تست به صورت $L_x = 2\pi/3$ و $\beta = 4$ و $\text{Re} = 10$ و $t = 20$ و $N_x = 45$ و $N_y = 40$ می‌باشند. شکل ۴-۹ دقت حل وابسته به زمان برای u را نشان می‌دهد. شکل‌های ۴-۹-۱ و ۴-۹-۲ هم مقدار ماکزیمم خطا به صورت تابعی از تعداد گره‌ها در جهات x و y را ترسیم کرده است.



شکل ۴-۹: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان



شکل ۴-۹-۱: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت X



شکل ۴-۹-۲: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y

۴-۷-۲- گردابه های استوارت

استوارت^۱ حل دو بعدی وابسته به زمان معادله ناویر استوکس غیر لزج^۲ را برای گروه لایه های اختلاطی معرفی کرد. حل به صورت تابع جریان ψ است که مولفه های سرعت $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ و

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ است. [۱۰]}$$

$$\psi(x, y, t) = cy + \ln(a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)) \quad (۲۷-۴)$$

در اینجا $b = \sqrt{a^2 - 1}$. به راحتی می توان نشان داد که معادله بالا، معادله جابجایی را ارضاء می کند که c برابر سرعت جابجایی موج است. در نتیجه حل استوارت می تواند برای ارزیابی صحت شرط مرزی خروجی جابجایی مورد استفاده قرار گیرد. در این تست تشکیل ترم لزج تست نمی شود ولی برای ارزیابی تشکیل ترم های غیرخطی و پیشروی محاسبات در زمان مناسب است.

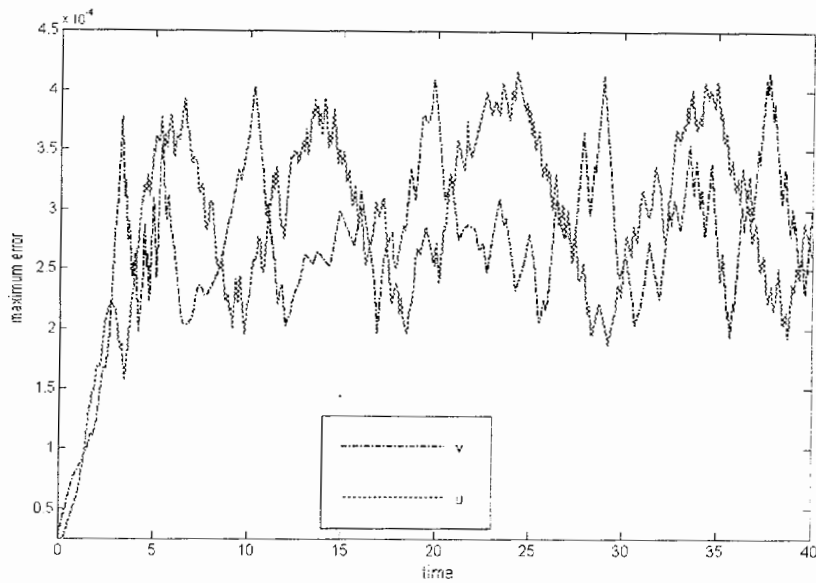
به این نکته توجه کنید که مولفه سرعت در جهت جریان نمی تواند حل پایداری داشته باشد. برای رفع این مشکل $\tanh(y - y_0)$ را به آن اضافه و کسر می کنیم. قسمت پایدار آن یعنی $a \sinh(y - y_0) / (a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)) - \tanh(y - y_0)$ را به صورت شرط اولیه و شرط مرزی ورودی در نظر می گیریم. باقیمانده عبارت به عنوان جریان اولیه محسوب می شود.

پارامترها به صورت $L_x = 2\pi$ و $\beta = 3$ و $Re = 10^9$ در نظر گرفته می شود تا جریان بصورت موثر ایده ال باقی بماند. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن $Re = 10^9$ جمله غیر خطی در مقایسه با جمله لزجی کاملاً غالب خواهد بود.

شکل ۴-۱۰ دقت حل وابسته به زمان را برای u و v نشان می دهد.

^۱ Stewart

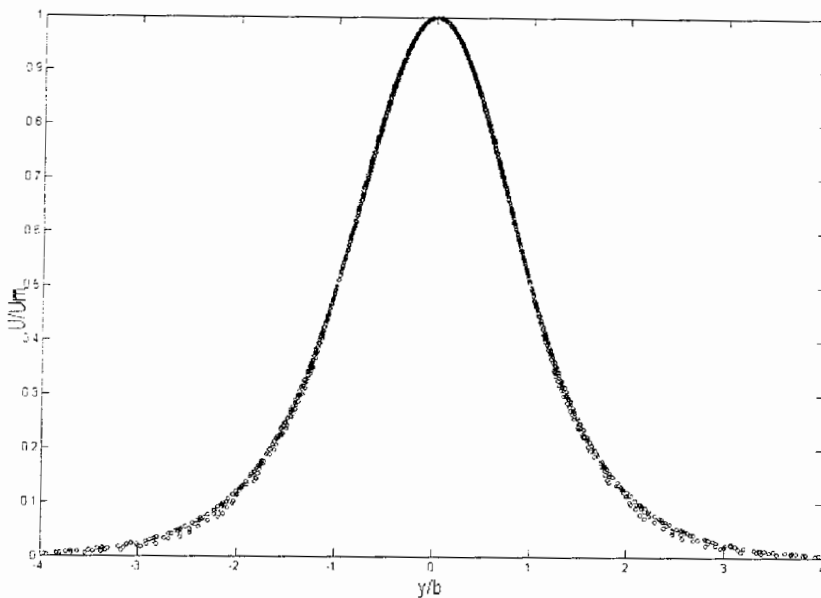
^۲ In viscid



شکل ۴-۱۰: ماکزیمم خطا در v و u برای تست گردابه های استوارت به صورت تابعی از زمان

۴-۷-۳- حل معادله لایه مرزی

شلیختینگ [۱۷] معادله لایه مرزی را برای یک جت دو بعدی خروجی از یک شکاف بسیار باریک را به صورت تحلیلی انجام داد. ایشان پروفیل سرعت جت با سرعت کم را در حالتی که پروفیل سرعت با سرعت مرکزی و بعد عرضی جریان با نیم عرض جت بی بعد شوند را بدست آورد. ما در این مرحله جریان جت را برای $Re=1$ حل می کنیم. با بی بعد کردن پروفیل ها با نیم عرض جت و سرعت خط مرکزی به بررسی خود تشابهی می پردازیم. نتایج در شکل ۴-۱۱ نمایش داده شده است که برای پارامترهای $Re=1$ و $\beta=4$ و $N_x=80$ و $N_y=70$ و $\Delta t=0.001$ می باشد.

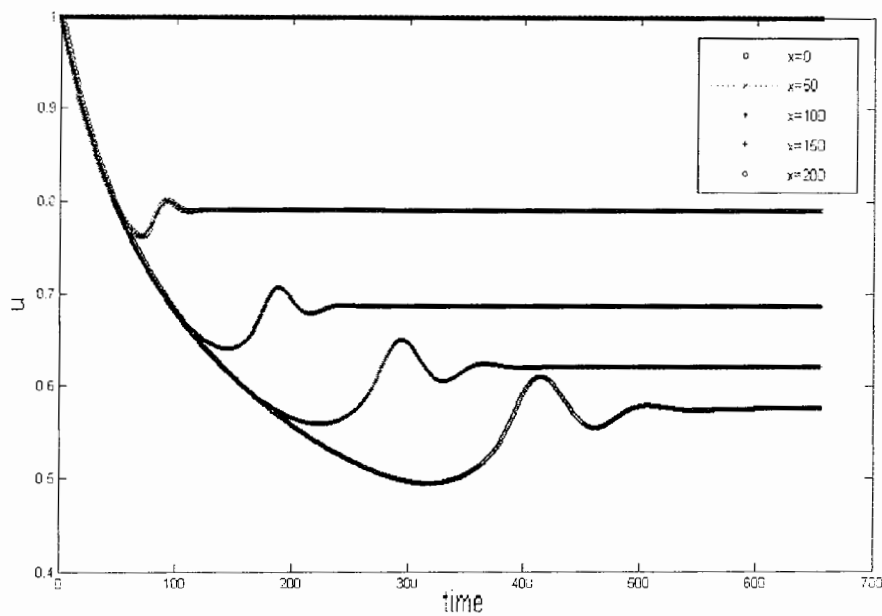


شکل ۴-۱۱: توزیع سرعت در جریان جت با سرعت پائین در دستگاه مختصات خود تشابه برای ایستگاههای مختلف جریان.

۴-۷- جریان جت دو بعدی آرام

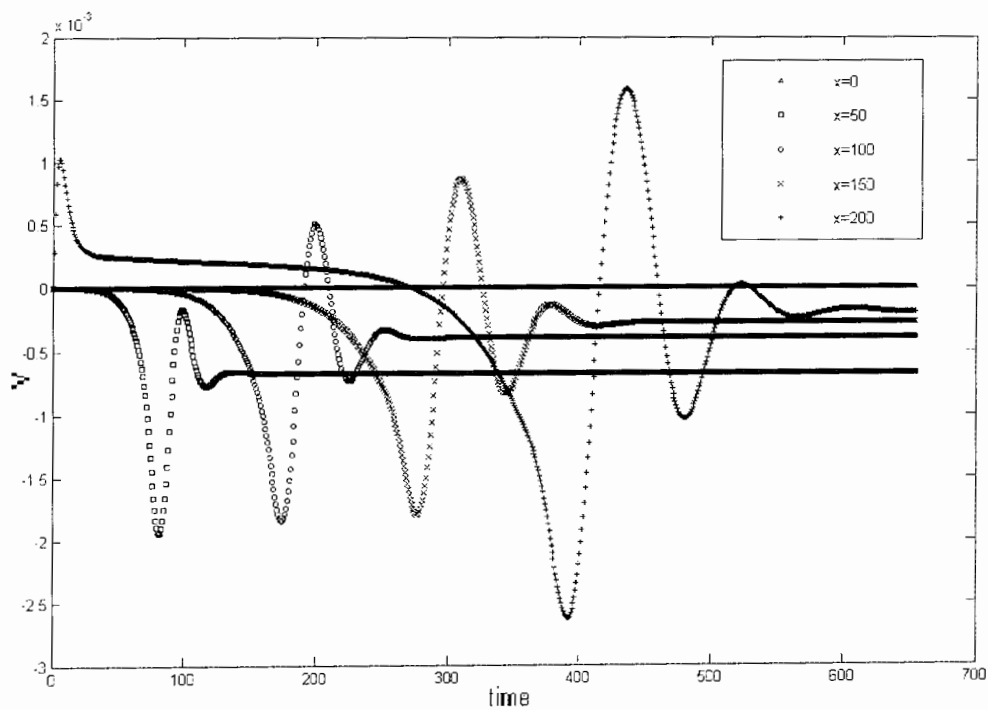
برای شبیه سازی جریان جت، بدون اغتشاشات ورودی انتظار داریم که سرعت لحظه ای در هر نقطه ای از دامنه به یک حالت پایدار برسد. این موضوع کاملاً و به وضوح در شکل های ۴-۱۲ و ۴-۱۳ نشان داده شده است که تاریخچه ای از سرعت های u و v در مکان های معادل و متساوی در جهت جریان نمایش داده شده است. پارامتر های مورد استفاده در این شبیه سازی عبارتند از $Re = 300$ و $\beta = 8$ و $N_x = 240$ و $N_y = 100$ و $\Delta t = 0.1\Delta x$ و $Lx = 200$.

همانطور که در فصل اول گفته شد طبق نتایج تئوری جریان جت خود تشابه است. در شکل ۴-۱۴ پروفیل سرعت جت را در حالت خود تشابه ملاحظه می کنید که y با b (نیم عرض جت) و u با u_m (سرعت خط مرکزی) بی بعد شده اند.



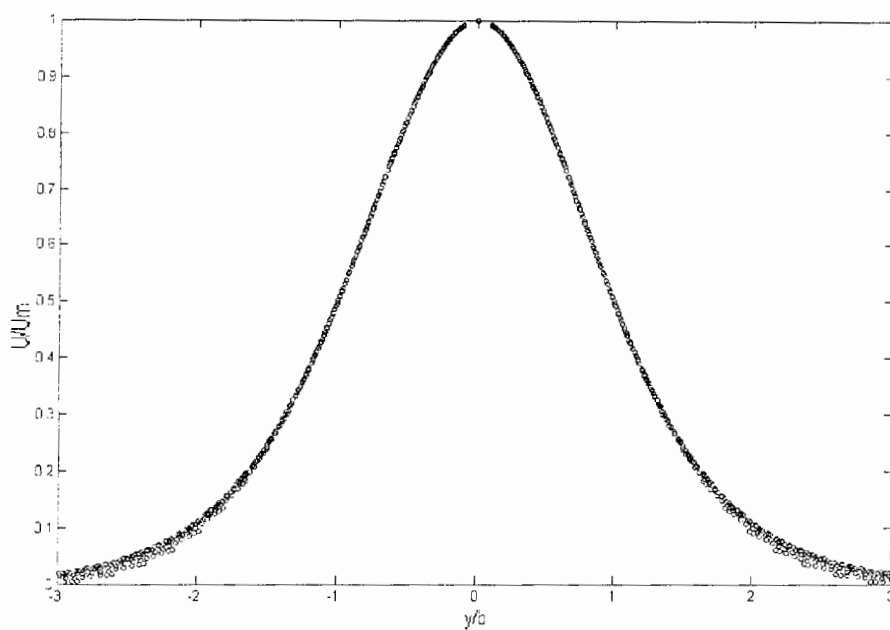
شکل ۴-۱۲: گذر زمانی u در Δ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جت دوبعدی بدون

اغتشاش ورودی



شکل ۴-۱۳: گذر زمانی v در Δ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جت دوبعدی بدون

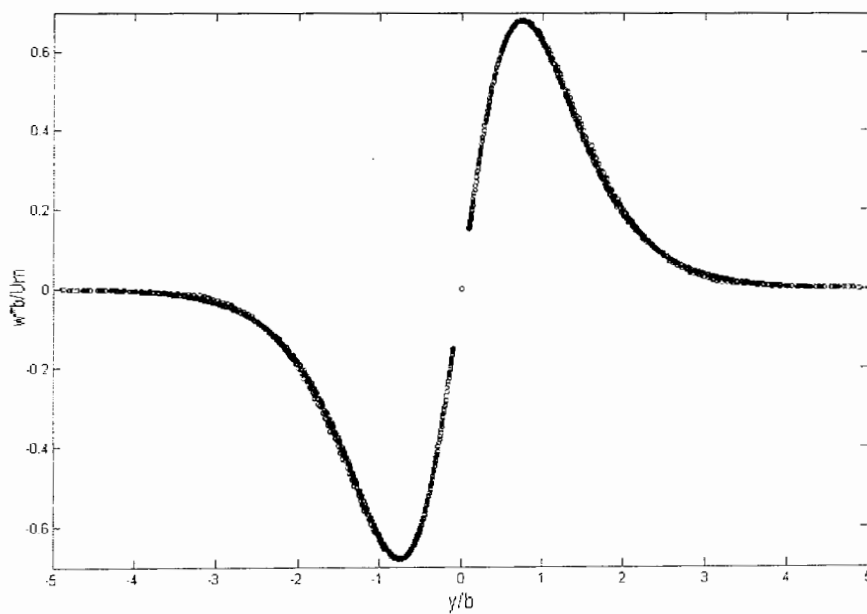
اغتشاش ورودی



شکل ۴-۱۴: پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جت دوبعدی بدون اغتشاش

ورودی

در شکل ۴-۱۵ هم می توان خود تشابهی گردابه های جت را دید که ω با b/u_0 بی بعد شده است.



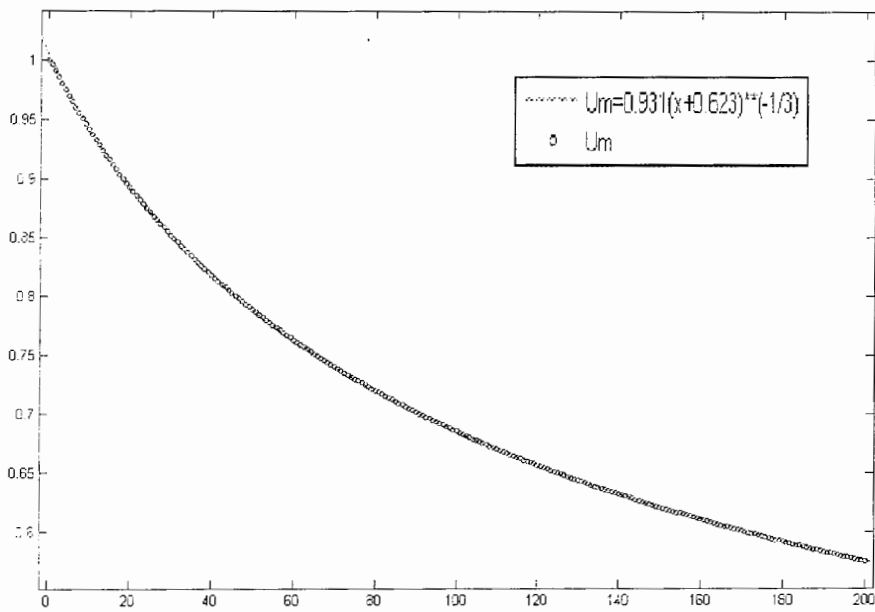
شکل ۴-۱۵: پروفیل گردابه w در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جت دوبعدی بدون اغتشاش ورودی

طبق نتایج تئوری سرعت خط مرکزی در جریان جت دو بعدی آرام متناسب با $x^{-1/3}$

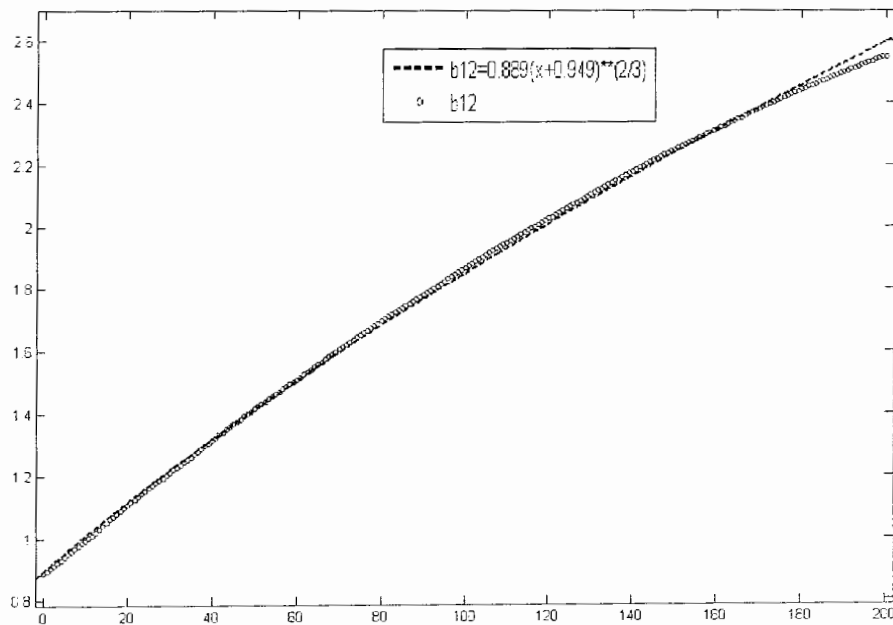
است. در نمودار ۴-۱۶ می توان این وابستگی را بخوبی مشاهده کرد. [۱۶]

همچنین نیم عرض جت یعنی b هم متناسب با $x^{2/3}$ است که شکل ۳-۱۷ تصدیق بر

این موضوع است [۱۶].



شکل ۴-۱۶: نمایش سرعت خط مرکزی U_m در جهت x .



شکل ۴-۱۷: نمایش نیم عرض جت b در جهت x .

فصل پنجم

جریان جت مغشوش

جریان جت مغشوش

۵-۱- مقدمه

در این بخش یک جت دو بعدی را در حالتی توسعه می دهیم که یک اغتشاش در ورودی قرار می دهیم. این اغتشاش در اصل تابع ویژه سرعت در جهت y منتج از حل معادله اورساملفیلد و تحلیل پایداری خطی جریان جت می باشد. این تحلیل توسط سلمانی [۲] انجام شده است. توجه کنید که این اغتشاشات فقط در y به کار برده می شود. لازم به ذکر است چنانچه اغتشاشاتی برای u نیز به کار رود، در این صورت بایستی این پروفیل برای u توزیعی پادمتقارن داشته باشد. همانطور که مغربی [۱۰] بحث کرده است. این موضوع مربوط به شرط حل شدن^۱ می باشد که برای جزئیات به مرجع [۱۰] رجوع شود.

۵-۲- اغتشاشات ورودی

در حل معادله پایداری دومود ناپایدار وجود دارد که یکی بسیار بزرگتر از دیگری است که طبق آن مود ناپایدار مولفه های اغتشاش u و v بدست آمده اند. سرعت لحظه ای در شبیه سازی همراه با اغتشاشات باید به صورت آماری ساکن^۲ برسد و در این حالت سرعت متوسط مستقل از زمان است. گذر زمانی u و v در ۴ فاصله مساوی در جهت طول L_x در شکل های ۵-۱ و ۵-۲ و

¹ Solvability Condition

² Statistically Steady

۳-۵ و ۴-۵ نشان داده‌اند. با توجه این شکل‌ها می‌توان ملاحظه کرد که مولفه‌های سرعت u و v به یک حالت پایدار ایستایی رسیده‌اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد.

۳-۵- بررسی خود تشابهی و توزیعات تنش رینولدز

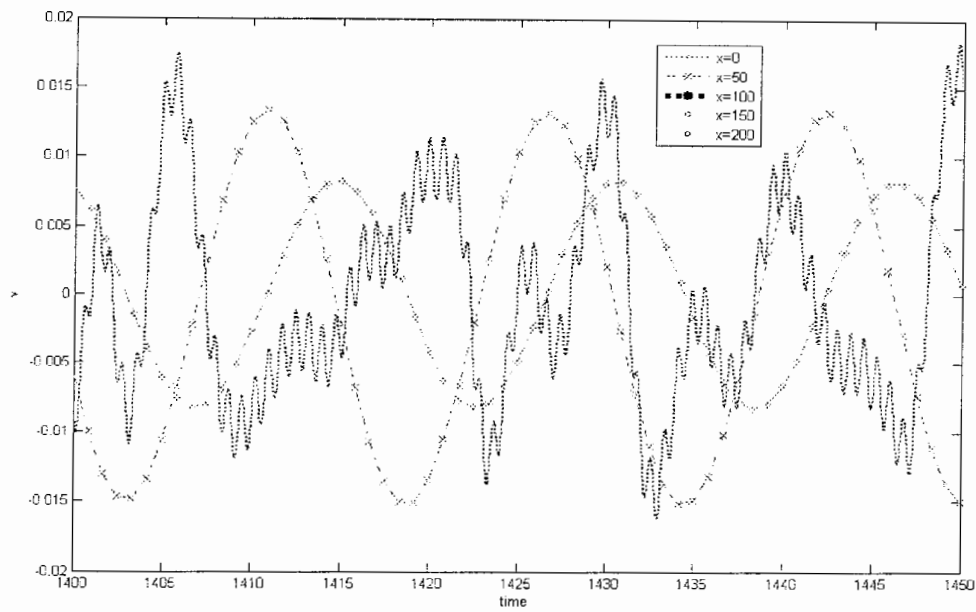
شکل ۵-۵ نتایج شبیه‌سازی را برای سرعت متوسط در جهت جریان اصلی در مختصات خود تشابهی نشان می‌دهد. در این شکل به خوبی می‌توان پدیده خود تشابهی را برای سرعت متوسط مشاهده کرد.

در شکل ۵-۶ پروفیل گردابه را در مختصات خود تشابه ملاحظه می‌کنید. همانطور که در شکل دیده می‌شود در بعضی مقاطع در جهت x این تشابه کامل نیست که ناشی از دقیق نبودن سرعت در مرز خروجی می‌باشد.

در شکل ۵-۷ هم چگونگی پیشرفت نیم عرض جت و سرعت خط مرکزی با توجه به جهت جریان ترسیم شده است. بر اساس شکل می‌توان نتیجه گرفت که سرعت خط مرکزی رابطه مستقیمی با x دارد.

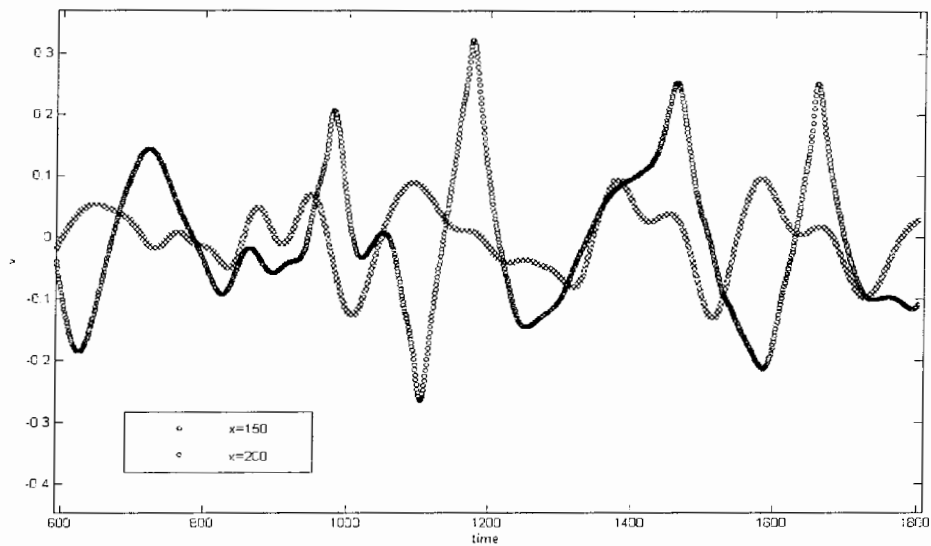
در شکل‌های ۵-۸ و ۵-۹ و ۵-۱۰ توزیعات شدت تنش‌های رینولدز نمایش داده شده است که هر چه از مرز ورودی دور می‌شویم، این شدت‌ها بیشتر می‌گردند.

در شکل‌های ۵-۱۱ و ۵-۱۲ و ۵-۱۳ توزیعات تنش‌های رینولدز را نیز می‌توان ملاحظه کرد.



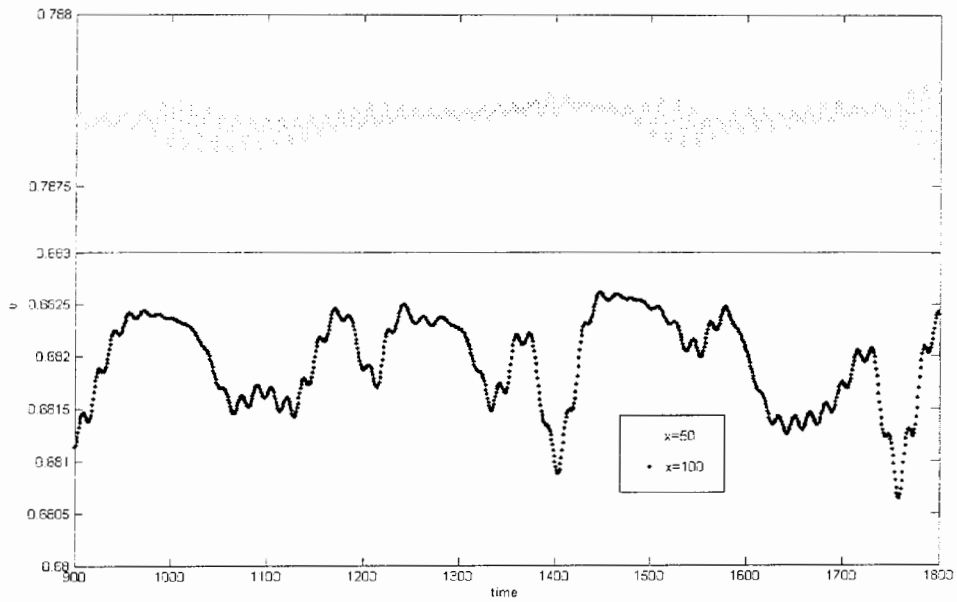
شکل ۵-۱: گذر زمانی ν در Δ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با

اغتشاش ورودی



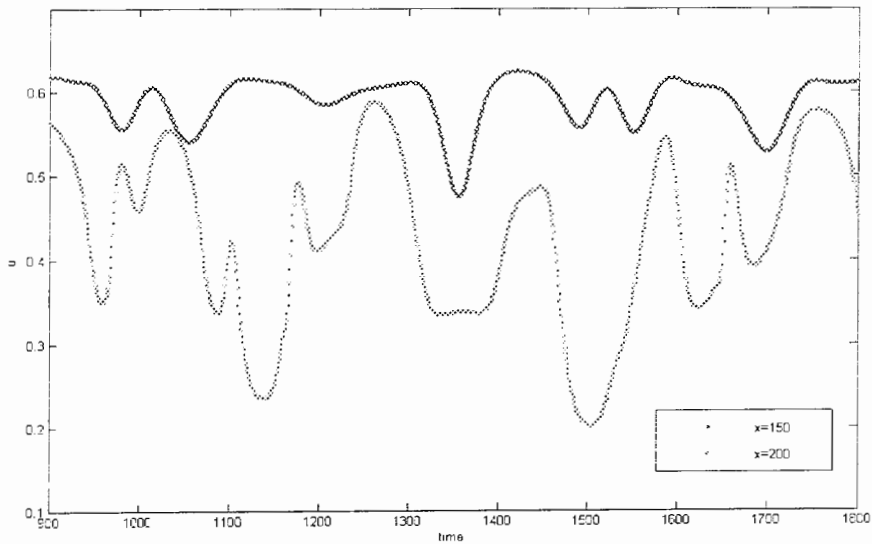
شکل ۵-۲: گذر زمانی ν در Δ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با

اغتشاش ورودی



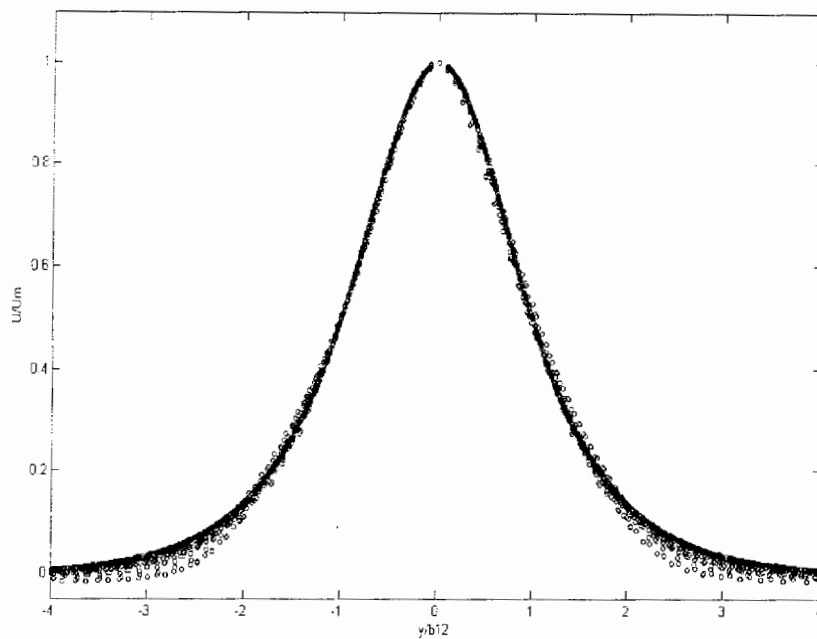
شکل ۳-۵: گذر زمانی u در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با

اغتشاش ورودی



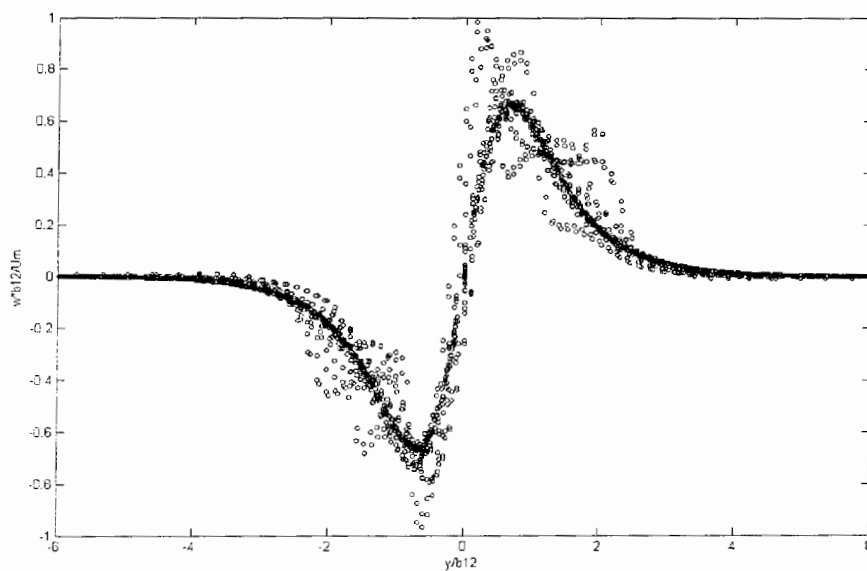
شکل ۴-۵: گذر زمانی u در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با

اغتشاش ورودی



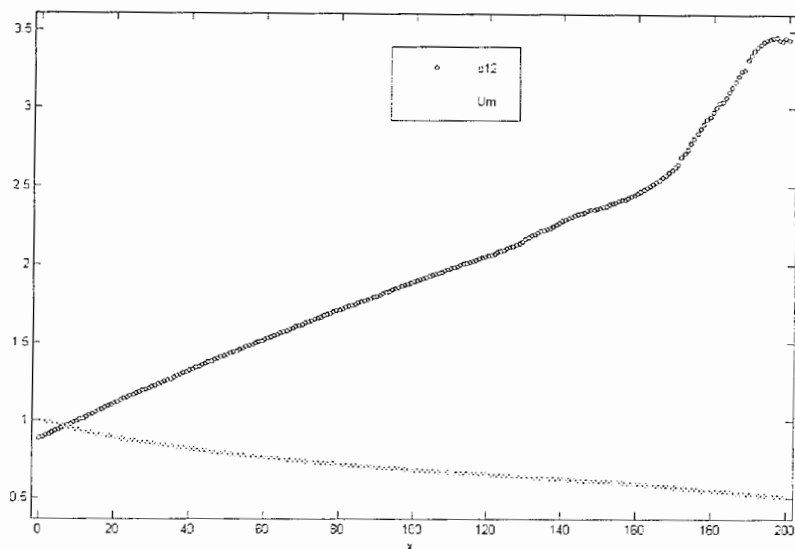
شکل ۵-۵: پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش

ورودی

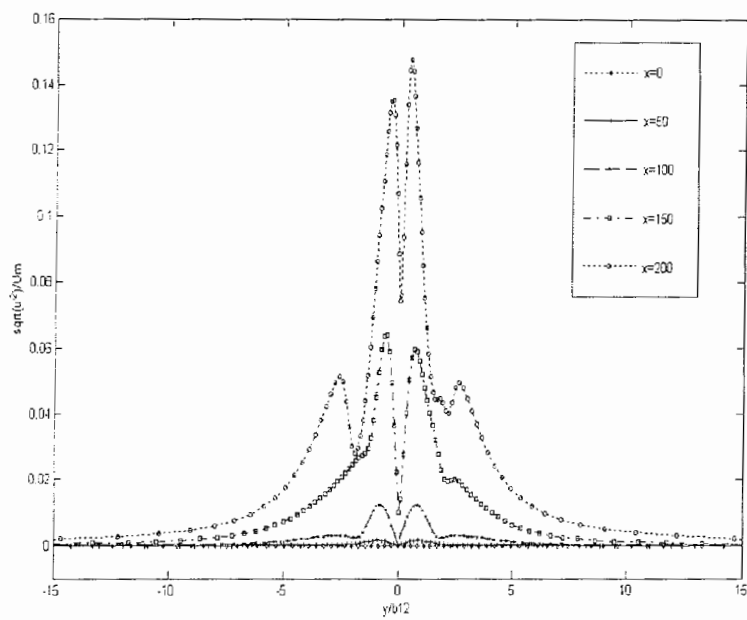


شکل ۵-۶: پروفیل گردابه w در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش

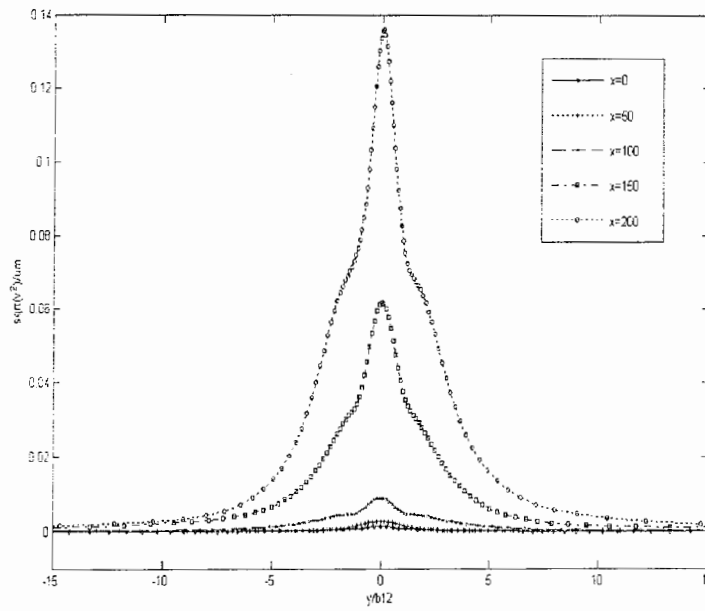
ورودی



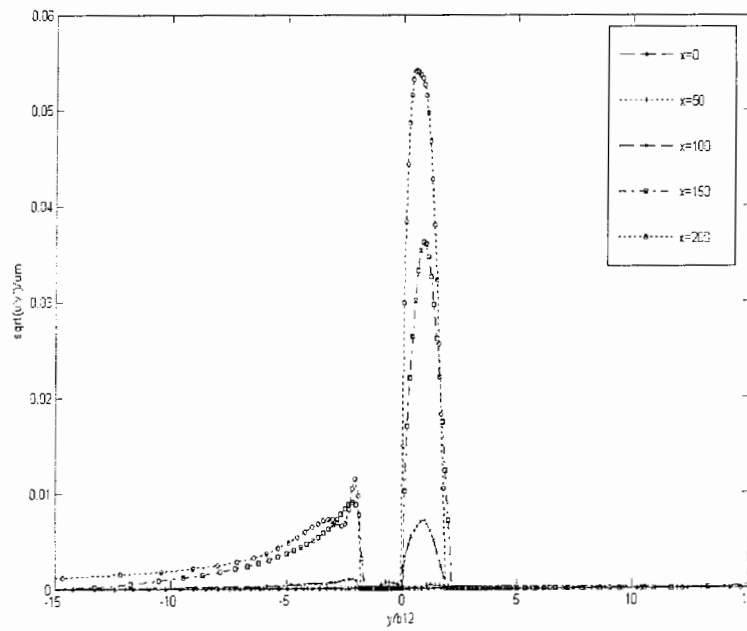
شکل ۷-۵: نمایش سرعت خط مرکزی u_m و نیم عرض جت در جهت x .



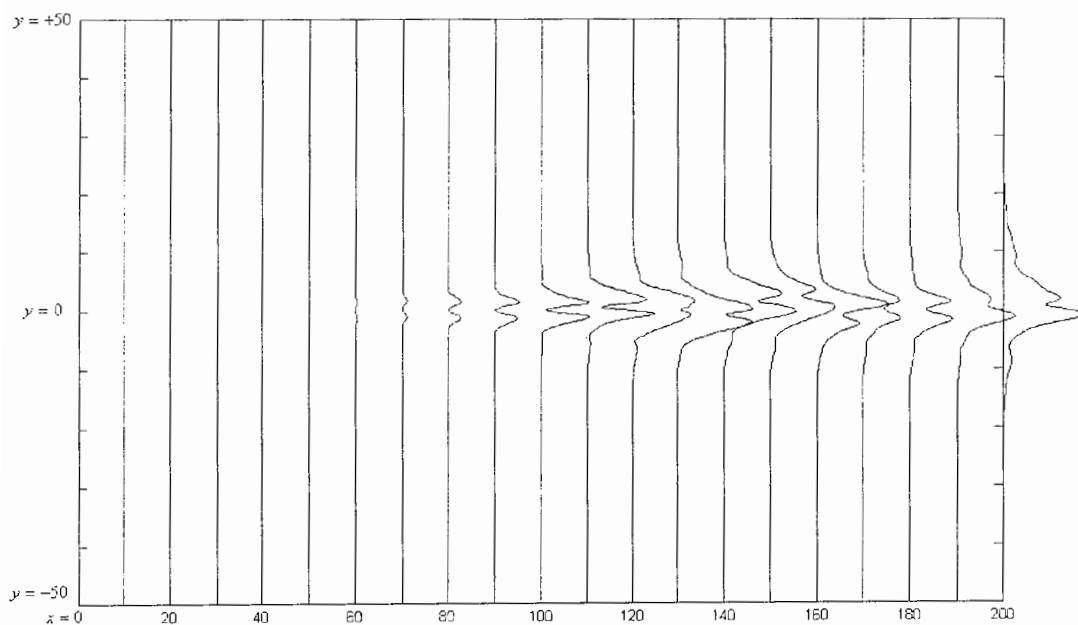
شکل ۸-۵: نمایش $\sqrt{u'^2} / \bar{u}_m$ به $y/b12$.



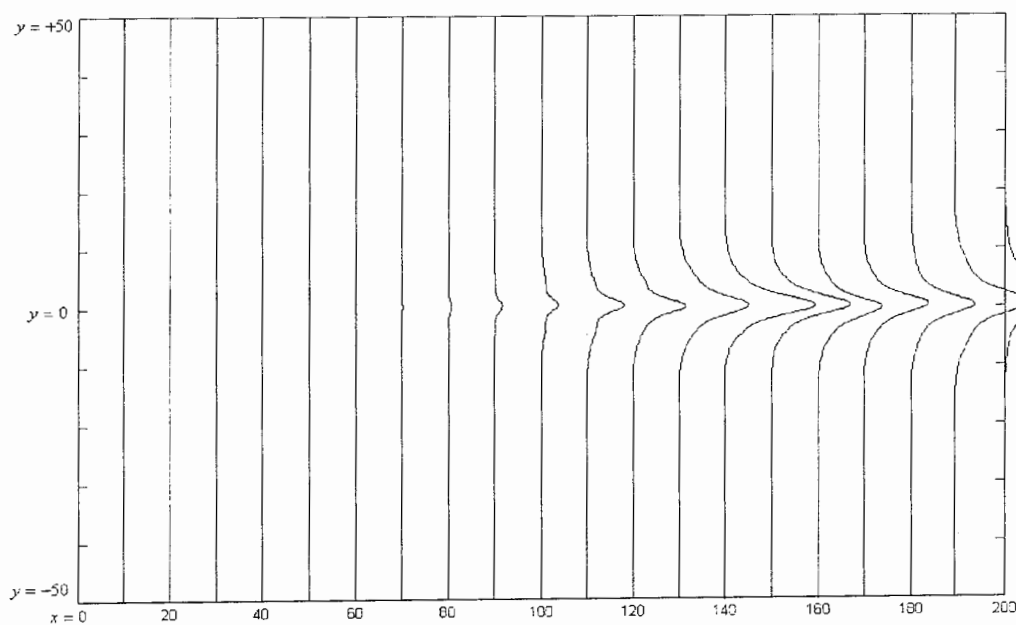
شکل ۵-۹: نمایش $\sqrt{v'^2}/\bar{u}_m$ به $y/b12$.



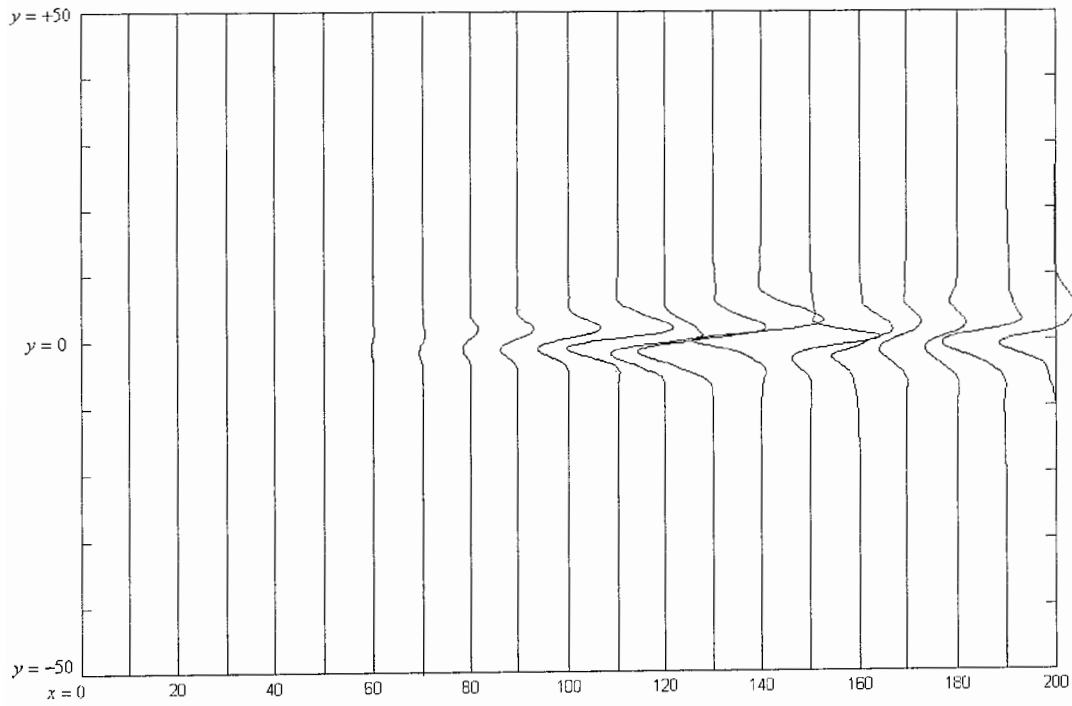
شکل ۵-۱۰: نمایش $\sqrt{u'v'}/\bar{u}_m$ به $y/b12$.



شکل ۵-۱۱: توزیع تنش رینولدز $\overline{u'^2}$ در دامنه فیزیکی



شکل ۵-۱۲: توزیع تنش رینولدز $\overline{v'^2}$ در دامنه فیزیکی



شکل ۵-۱۳: توزیع تنش رینولدز $\overline{u'v'}$ در دامنه فیزیکی

مراجع

مراجع:

۱- جرالده، وتیلی (ترجمه علی محمد پورپاک). محاسبات عددی: آنالیز عددی کاربردی برای رشته های مهندسی و علوم همراه با ۱۰۰ برنامه کامپیوتری به زبانهای C و pascal و fortran و basic شامل ۳۰۰ مساله با جواب. جهاد دانشگاهی. ۱۳۸۰.

۲- ا. سلمانی ماهینی. تحلیل پایداری جت. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود. شاهرود. ایران. ۱۳۸۴.

۳- ایروینگ اچ شیمز (ترجمه مهندس علیرضا انتظاری). مکانیک سیالات. انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج. ۱۳۷۲.

۴- ک. ا. هافمن (ترجمه دکتر احمد رضا عظیمیان). دینامیک محاسباتی برای مهندسان. مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.

۵- د. هانسلمن. بروس لیتل فیلد (ترجمه امیر هوشنگ غیوری). راهنمای جامع مطلب ۶. انتشارات کتاب پایتخت.

1- A.R. Ansari, "Shishkin Meshes and their Applications", Department of Mathematics, Gulf University for Science & Technology, Hawally 32093, P.O. Box 7207, Kuwait.

2- A.R. Ansari, A.F. Hegarty, G.I. Shishkin, "Parameter-uniform numerical methods for a laminar jet problem, International Journal for Numerical Methods in Fluids 43 (2003), 937-951.

3- R.H. Bartles & G.W. Stewart, Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$ [F4], Communications of the ACM, Vol 15, Number 9, 1972.

4- W. Bickley, The Plane Jet, Phil. Mag. Ser.7, 23, 727-731, 1939.

5- Chiang C. Mei, Two Dimensional Laminar Jet, Lecture Notes on Fluid Dynamics.

6- R.J. Garde, Turbulent Flow, New Age International Limited, 2000.

- 7- H. Gortler, Berechnung von Aufgaben der Freien Turbulenz auf Grund eines Neuen Ansatzes, ZAMM 22, 244-254, 1942.
- 8- S.K. Lele, Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution, Journal of Computational Physics, 103, 16-12, 1992.
- 9- Monica de miera torrecilla, Introduction to Numerical Simulation of Fluid Flows, Petersburg, 2004.
- 10- M.J. Maghrebi, A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Planar Wake, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, 1999.
- 11- M.J. Maghrebi, Orr Sommerfeld Solver Using Mapped Finite Difference Scheme for Plane Wake Flow, Department of Mechanical Engineering Shahrood University of Technology, Shahrood, IR. IRAN. 2004.
- 12- J. Mathieu, J. Scott, An Introduction to Turbulent Flow, Cambridge University Press. 2000.
- 13- P. L. Morgan, D. Auld, S. W. Armfield, A comparison of Eulerian and Lagrangian schemes for the simulation of an incompressible planar jet, ANZIAM J. 45 (E), pp C310-C325, 2004.
- 14- H. Richardt, Gesetzmäßigkeiten der Freien Turbulenz, VDI, Forschungsheft 414, 1942, 2nd ed. 1951.
- 15- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, Numerical Recipes in C The Art of Scientific Computing, Second Edition, Cambridge university press, 1992.
- 16- H. Schlichting, Boundary Layer Theory, Mc Graw Hill, 1979.
- 17- H. Schlichting, Laminar Strahlenausbreitung, ZAMM 13, 260-263, 1933.
- 18- D.A. Spley, turbulent boundary layer, 2004.
- 19- W. Tollmien, Berechnung Turbulente Ausbreitungsvorgänge, ZAMM 6, 468-478, 1926.
- 20- K. Takahashi, and T. Tsukiji, Numerical analysis of a laminar jet using a streamline coordinate system. Transactions of the CSME, Vol 9, pp. 165-170, 1985.
- 21- T. Tsukiji, and K. Takahashi, Numerical analysis of an axisymmetric jet using a streamline coordinate system. JSME Intl. J., Vol. 30, pp. 1406-1413, 1987.

- 22- A. Wray & M.Y. Hussaini, Numerical Experiments in Boundary Layer Stability, Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 392, pp 373-389. 1984.
- 23- R. V. Wilson, A. O. Demuren, Numerical simulation of turbulent jets with rectangular cross-section, Department of Mechanical Engineering, Old Dominion University, Norfolk, Virginia 23529, USA, 2000.
- 24- G. Zarbi, and K. Takahashi, Prediction of the laminar two-dimensional jet flow through a convergent channel. JSME Intl. J., Series II, Vol. 24, pp. 115-121, 1991.
- 25- A. Agrawal, A. K. Prasad, Integral Solution for the Mean Flow Profiles of Turbulent Jets, Plumes, and Wakes, Journal of Fluids Engineering, Vol. 125, 813-822, 2003.

ضمائم

الف - تحلیل خطا :

به منظور تعیین مرتبه دقت یک طرح عددی برای ارزیابی یک تابع، بسط سری تیلور مورد استفاده قرار می گیرد. اجازه بدهید خطای عددی در یک نقطه خاص از یک مجموعه را به صورت اختلاف بین مقدار حقیقی و مقدار تقریبی تابع در آن نقطه تعریف کنیم. در تقریب های عددی با استفاده از سری محدودی از جملات بسط سری تیلور برای تحلیل استفاده می شود. اولین ترم بریده شده از بسط در تقریب عددی می توان تخمین خیلی خوبی برای خطا باشد که می تواند مرتبه دقت را نشان دهد. اگر

$$E(x_i) \cong \frac{(L/N)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) \quad (\text{الف-1})$$

که $E(x_i)$ ، خطا در ارزیابی $f(x_i)$ در x_i است و L و N برابر طول و تعداد قطعات در مجموعه می باشند.

با گرفتن لگاریتم از هر دو طرف معادله الف-1 به معادله الف-2 می رسیم.

$$\log(E_{\max}) \cong C - n \log(N) \quad (\text{الف-2})$$

که C یک ثابت است. معادله الف-2 به وضوح نشان می دهد که شیب خط در نمودار $\log(E_{\max})$ بر روی $\log N$ برابر $-n$ می باشد که برابر مرتبه خطای تقریب می باشد.

ب- کد محاسب جریان جت

```

%@@@this program writed with MATLAB software for calculate important
terms of free get flow:
clc
clear all
digits(128)
%@@@constant parameters:
LX=50;(length of domain in x-direct)
LY=1; (length of domain in y-direct-mapped)
eps=1e-40;(very small number)
NX=100;(number of spice in x-direct)
NY=70; (number of spice in y-direct)
GAMA=1;(constant parameter in inlet velocity profile)
GAMA2=1; (constant parameter in inlet velocity profile)
BETA=4;(mapping parameter)
RE=300;(Reynolds number)
DX=LX/NX;
DY=LY/NY;
I=NY+1;(number of grid in x-direct)
J=NX+1;(number of grid in y-direct)
t0=0;(initial time)
DT=.1*DX;(spice time)
time=300;(final time)
speed=.25;(parameter of "c" in convective equation)
c=[8/15,5/12,3/4];(constant parameters in rk3)
d=[0,-17/60,-5/12]; (constant parameters in rk3)
DIRECTX=0:DX:LX;
DIRECTY=0:DY:LY;
W1=5/12;
W2=43/54;
W3=28/27;
%@@@A1X(calculate matrix A in equation  $AF = BF$ ):
A1X=zeros(J);

```

```

A1X(1,1)=-W1*5/2;A1X(1,2)=W1*2;A1X(1,3)=W1*.5;A1X(1,4)=0;
A1X(J,J)=W1*5/2;A1X(J,J-1)=W1*-2;A1X(J,J-2)=-W1*.5;A1X(J,J-3)=0;
A1X(2,1)=-W2*3/4;A1X(2,2)=0;A1X(2,3)=W2*3/4;
A1X(J-1,J)=W2*3/4;A1X(J-1,J-1)=0;A1X(J-1,J-2)=-W2*3/4;
A1X(3,1)=-W3*3/112;A1X(3,2)=-
W3*87/112;A1X(3,3)=0;A1X(3,4)=W3*87/112;A1X(3,5)=W3*3/112;
A1X(J-2,J)=W3*3/112;A1X(J-2,J-1)=W3*87/112;A1X(J-2,J-2)=0;A1X(J-2,J-
3)=-W3*87/112;A1X(J-2,J-4)=-W3*3/112;
for j=4:J-3
    A1X(j,j)=0;A1X(j,j-1)=-7/9;A1X(j,j+1)=7/9;A1X(j,j-2)=-1/36;A1X(j,j+2)=1/36;
end;
A1X=(1/(DX)).*A1X;
%@@@B1X(calculate matrix B in equation  $AF = BF^n$ ):
B1X=zeros(J);
B1X(1,1)=W1*1;B1X(1,2)=W1*2;
B1X(J,J)=W1*1;B1X(J,J-1)=W1*2;
B1X(2,1)=W2*1/4;B1X(2,2)=W2*1;B1X(2,3)=W2*1/4;
B1X(J-1,J)=W2*1/4;B1X(J-1,J-1)=W2*1;B1X(J-1,J-2)=W2*1/4;
B1X(3,2)=W3*37/112;B1X(3,3)=W3*1;B1X(3,4)=W3*37/112;
B1X(J-2,J-1)=W3*37/112;B1X(J-2,J-2)=W3*1;B1X(J-2,J-3)=W3*37/112;
for j=4:J-3
    B1X(j,j)=1;B1X(j,j-1)=1/3;B1X(j,j+1)=1/3;
end;
%@@@A1Y(calculate matrix A in equation  $AF = BF^n$ ):
A1Y=zeros(I);
A1Y(1,1)=-W1*5/2;A1Y(1,2)=W1*2;A1Y(1,3)=W1*.5;A1Y(1,4)=0;
A1Y(I,I)=W1*5/2;A1Y(I,I-1)=W1*-2;A1Y(I,I-2)=-W1*.5;A1Y(I,I-3)=0;
A1Y(2,1)=-W2*3/4;A1Y(2,2)=0;A1Y(2,3)=W2*3/4;
A1Y(I-1,I)=W2*3/4;A1Y(I-1,I-1)=0;A1Y(I-1,I-2)=-W2*3/4;
A1Y(3,1)=-W3*3/112;A1Y(3,2)=-
W3*87/112;A1Y(3,3)=0;A1Y(3,4)=W3*87/112;A1Y(3,5)=W3*3/112;

```

```

A1Y(I-2,I)=W3*3/112;A1Y(I-2,I-1)=W3*87/112;A1Y(I-2,I-2)=0;A1Y(I-2,I-3)=-
W3*87/112;A1Y(I-2,I-4)=-W3*3/112;
for i=4:I-3
    A1Y(i,i)=0;A1Y(i,i-1)=-7/9;A1Y(i,i+1)=7/9;A1Y(i,i-2)=-1/36;A1Y(i,i+2)=1/36;
end;
A1Y=(1/(DY)).*A1Y;
%@@@B1Y( calculate matrix B in equation  $AF = BF^n$  ):
B1Y=zeros(I);
B1Y(1,1)=W1*1;B1Y(1,2)=W1*2;
B1Y(I,I)=W1*1;B1Y(I,I-1)=W1*2;
B1Y(2,1)=W2*1/4;B1Y(2,2)=W2*1;B1Y(2,3)=W2*1/4;
B1Y(I-1,I)=W2*1/4;B1Y(I-1,I-1)=W2*1;B1Y(I-1,I-2)=W2*1/4;
B1Y(3,2)=W3*37/112;B1Y(3,3)=W3*1;B1Y(3,4)=W3*37/112;
B1Y(I-2,I-1)=W3*37/112;B1Y(I-2,I-2)=W3*1;B1Y(I-2,I-3)=W3*37/112;
for i=4:I-3
    B1Y(i,i)=1;B1Y(i,i-1)=1/3;B1Y(i,i+1)=1/3;
end;
%@@@A2X( calculate matrix A in equation  $AF = BF^n$  ):
A2X=zeros(J);
A2X(1,1)=13;A2X(1,2)=-27;A2X(1,3)=15;A2X(1,4)=-1;A2X(J,J)=13;A2X(J,J-
1)=-27;A2X(J,J-2)=15;A2X(J,J-3)=-1;
A2X(2,1)=12;A2X(2,2)=-24;A2X(2,3)=12;A2X(J-1,J)=12;A2X(J-1,J-1)=-
24;A2X(J-1,J-2)=12;
for j=3:J-2
    A2X(j,j)=-9;A2X(j,j-1)=4;A2X(j,j+1)=4;A2X(j,j-2)=1/2;A2X(j,j+2)=1/2;
end;
A2Xu=A2X;
A2Xu(1,1)=-3/2;
A2Xu(1,2)=0;
A2Xu(1,3)=3/2;
A2Xu(1,4)=0;
%
```

```

A2Xu(J,J)=-3/2;
A2Xu(J,J-1)=0;
A2Xu(J,J-2)=3/2;
A2Xu(J,J-3)=0;
%
A2Xu=((1/DX)^2).*A2Xu;
%
A2X=((1/DX)^2).*A2X;
%@@@B2X( calculate matrix B in equation  $AF = BF''$  ):
B2X=zeros(J);
B2X(1,1)=1;B2X(1,2)=11;B2X(J,J)=1;B2X(J,J-1)=11;
B2X(2,1)=1;B2X(2,2)=10;B2X(2,3)=1;B2X(J-1,J)=1;B2X(J-1,J-1)=10;B2X(J-1,J-
2)=1;
for j=3:J-2
    B2X(j,j)=4;B2X(j,j-1)=1;B2X(j,j+1)=1;
end;
%
B2Xu=B2X;
B2Xu(1,2)=2;
B2Xu(J,J-1)=2;
%@@@A2Y( calculate matrix A in equation  $AF = BF''$  ):
A2Y=zeros(I);
A2Y(1,1)=13;A2Y(1,2)=-27;A2Y(1,3)=15;A2Y(1,4)=-1;A2Y(I,I)=13;A2Y(I,I-1)=-
27;A2Y(I,I-2)=15;A2Y(I,I-3)=-1;
A2Y(2,1)=12;A2Y(2,2)=-24;A2Y(2,3)=12;A2Y(I-1,I)=12;A2Y(I-1,I-1)=-
24;A2Y(I-1,I-2)=12;
for i=3:I-2
    A2Y(i,i)=-9;A2Y(i,i-1)=4;A2Y(i,i+1)=4;A2Y(i,i-2)=1/2;A2Y(i,i+2)=1/2;
end;
A2Y=((1/DY)^2).*A2Y;
%@@@B2Y( calculate matrix B in equation  $AF = BF''$  ):
B2Y=zeros(I);

```

```

B2Y(1,1)=1;B2Y(1,2)=11;B2Y(I,I)=1;B2Y(I,I-1)=11;
B2Y(2,1)=1;B2Y(2,2)=10;B2Y(2,3)=1;B2Y(I-1,I)=1;B2Y(I-1,I-1)=10;B2Y(I-1,I-
2)=1;
for i=3:I-2
    B2Y(i,i)=4;B2Y(i,i-1)=1;B2Y(i,i+1)=1;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%AA1Y
AA1Y=zeros(I);
AA1Y(1,1)=-17/6;AA1Y(1,2)=3/2;AA1Y(1,3)=3/2;AA1Y(1,4)=-1/6;
AA1Y(I,I)=17/6;AA1Y(I,I-1)=-3/2;AA1Y(I,I-2)=-3/2;AA1Y(I,I-3)=1/6;
AA1Y(2,1)=-3;AA1Y(2,2)=0;AA1Y(2,3)=3;
AA1Y(I-1,I)=3;AA1Y(I-1,I-1)=0;AA1Y(I-1,I-2)=-3;
AA1Y(3,1)=-5/16;AA1Y(3,2)=-.5;AA1Y(3,3)=0;AA1Y(3,4)=.5;AA1Y(3,5)=5/16;
AA1Y(I-2,I)=5/16;AA1Y(I-2,I-1)=.5;AA1Y(I-2,I-2)=0;AA1Y(I-2,I-3)=-
.5;AA1Y(I-2,I-4)=-5/16;
for i=4:I-3
    AA1Y(i,i)=0;AA1Y(i,i-1)=-75/36;AA1Y(i,i+1)=75/36;AA1Y(i,i-2)=-
2/15;AA1Y(i,i+2)=2/15;AA1Y(i,i-3)=1/180;AA1Y(i,i+3)=-1/180;
end;
AA1Y=(1/(DY)).*AA1Y;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%B1Y
BB1Y=zeros(I);
BB1Y(1,1)=1;BB1Y(1,2)=3;
BB1Y(I,I)=1;BB1Y(I,I-1)=3;
BB1Y(2,1)=1;BB1Y(2,2)=4;BB1Y(2,3)=1;
BB1Y(I-1,I)=1;BB1Y(I-1,I-1)=4;BB1Y(I-1,I-2)=1;
BB1Y(3,2)=1;BB1Y(3,3)=1/4;BB1Y(3,4)=1;
BB1Y(I-2,I-1)=1;BB1Y(I-2,I-2)=1/4;BB1Y(I-2,I-3)=1;
for i=4:I-3
    BB1Y(i,i)=8/3;BB1Y(i,i-1)=1;BB1Y(i,i+1)=1;

```

```

end;
%%%%%%%%%%%%%%AA2Y
AA2Y=zeros(I);
AA2Y(1,1)=13;AA2Y(1,2)=-27;AA2Y(1,3)=15;AA2Y(1,4)=-1;
AA2Y(I,I)=13;AA2Y(I,I-1)=-27;AA2Y(I,I-2)=15;AA2Y(I,I-3)=-1;
AA2Y(2,1)=12;AA2Y(2,2)=-24;AA2Y(2,3)=12;
AA2Y(I-1,I)=12;AA2Y(I-1,I-1)=-24;AA2Y(I-1,I-2)=12;
AA2Y(3,3)=-51/4;AA2Y(3,2)=6;AA2Y(3,4)=6;AA2Y(3,1)=3/8;AA2Y(3,5)=3/8;
AA2Y(I-2,I-2)=-51/4;AA2Y(I-2,I-1)=6;AA2Y(I-2,I-3)=6;AA2Y(I-
2,I)=3/8;AA2Y(I-2,I-4)=3/8;
for i=4:I-3
    AA2Y(i,i)=(1065/1798)*(-2)+(1038/899)*(-.5)+(79/1798)*(-2/9);
    AA2Y(i,i-1)=(1065/1798);AA2Y(i,i+1)=(1065/1798);
    AA2Y(i,i-2)=(1038/899)/4;AA2Y(i,i+2)=(1038/899)/4;
    AA2Y(i,i-3)=(79/1798)/9;AA2Y(i,i+3)=(79/1798)/9;
end;
AA2Y=((1/DY)^2).*AA2Y;
%%%%%%%%%%%%%%B2Y
BB2Y=zeros(I);
BB2Y(1,1)=1;BB2Y(1,2)=11;
BB2Y(I,I)=1;BB2Y(I,I-1)=11;
BB2Y(2,1)=1;BB2Y(2,2)=10;BB2Y(2,3)=1;
BB2Y(I-1,I)=1;BB2Y(I-1,I-1)=10;BB2Y(I-1,I-2)=1;
BB2Y(3,2)=1;BB2Y(3,3)=11/2;BB2Y(3,4)=1;
BB2Y(I-2,I-1)=1;BB2Y(I-2,I-2)=11/2;BB2Y(I-2,I-3)=1;
for i=4:I-3
    BB2Y(i,i)=1;BB2Y(i,i-1)=(334/899);BB2Y(i,i-
2)=(43/1798);BB2Y(i,i+1)=(334/899);BB2Y(i,i+2)=(43/1798);
end;
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%

```



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A1X(2,:)=4*A1X(2,:);A1X(J-1,:)=4*A1X(J-1,:);
A1X(3,:)=(112/37)*A1X(3,:);A1X(J-2,:)=(112/37)*A1X(J-2,:);
for j=4:J-3
    A1X(j,:)=3*A1X(j,:);
end;
B1X(2,:)=4*B1X(2,:);B1X(J-1,:)=4*B1X(J-1,:);
B1X(3,:)=(112/37)*B1X(3,:);B1X(J-2,:)=(112/37)*B1X(J-2,:);
for j=4:J-3
    B1X(j,:)=3*B1X(j,:);
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A1Y(2,:)=4*A1Y(2,:);A1Y(I-1,:)=4*A1Y(I-1,:);
A1Y(3,:)=(112/37)*A1Y(3,:);A1Y(I-2,:)=(112/37)*A1Y(I-2,:);
for i=4:I-3
    A1Y(i,:)=3*A1Y(i,:);
end;
B1Y(2,:)=4*B1Y(2,:);B1Y(I-1,:)=4*B1Y(I-1,:);
B1Y(3,:)=(112/37)*B1Y(3,:);B1Y(I-2,:)=(112/37)*B1Y(I-2,:);
for i=4:I-3
    B1Y(i,:)=3*B1Y(i,:);
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%@@@ LAN1(parameter  $\lambda_1$ )
LAN1=zeros(I);
for i=1:I
    LAN1(i,i)=(1/(pi*BETA))*((sin(pi*(i-1)*DY))^2);
end;
%@@@ LAN2(parameter  $\lambda_2$ )

```

```

LAN2=LAN1.^2;
%@@@ LAN3(parameter  $\lambda_3$ )
LAN3=zeros(I);
for i=1:I
    LAN3(i,i)=(2/(pi*(BETA^2)))*((sin(pi*(i-1)*DY))^3)*cos(pi*(i-1)*DY);
end;LAN3;
%@@@ D1Y(operator first derivate in y-direct)
D1Y=LAN1*(B1Y^-1)*A1Y;
%@@@ D2Y(operator second derivate in y-direct)
D2Y=(LAN2*(B2Y^-1)*A2Y)+(LAN3*(B1Y^-1)*A1Y);
DDD2Y=(LAN2*(BB2Y^-1)*AA2Y)+(LAN3*(BB1Y^-1)*AA1Y);
%@@@ D1X(operator first derivate in x-direct)
D1X=(B1X^-1)*A1X;
%@@@ D2X(operator second derivate in x-direct)
D2X=(B2X^-1)*A2X;
%@@@calculateor of base flow & initial flow:
U0=zeros(I,J);
for i=1:I
    for j=1:J
        %    U0(i,j)=exp(-GAMA*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))^2);
        U0(i,j)=GAMA*(1-(tanh(GAMA2*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))))^2);
    end;
end;
%@@@
U01Y=zeros(I,J);
U01Y=D1Y*U0;
%
U01X=zeros(I,J);
%
U02X=zeros(I,J);
%
U04X=zeros(I,J);

```

```

%
U02Y=zeros(I,J);
U02Y=D2Y*U0;
%
U04Y=zeros(I,J);
U04Y=D2Y*U02Y;
%
U042X2Y=zeros(I,J);
%@@@
U=zeros(I,J);
for i=1:I
    for j=1:J
%    U(i,j)=exp(-GAMA*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))^2);
        U(i,j)=GAMA*(1-(tanh(GAMA2*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))))^2);
    end;
end;
u=U-U0;
%@@@ calculate boundary condition u(initional):
inflowu(:,1,1)=u(:,1);
outflowu(:,1,1)=u(:,J);
%@@@ calculate boundary condition v(initional)
for i=1:I
    for j=1:J
        V_bc(i,j)=0;
    end;
end;
v_bc=V_bc;
inflowv(:,1,1)=v_bc(:,1);
outflowv(:,1,1)=v_bc(:,J);
%@@@ calculate boundary condition du/dx:
inflowv1Y=zeros(I,J);
inflowv1Y=D1Y*inflowv(:,1,1);

```

```

inflowdu(:,1,1)=-inflowv1Y;
%
outflowv1Y=zeros(I,J);
outflowv1Y=D1Y*outflowv(:,1,1);
outflowdu(:,1,1)=-outflowv1Y;
%@@@ calculate initial gradU
u2X=(D2X*u)';
u2Y=D2Y*u;
gradu(:,1)=u2X+u2Y;
%@@@ advancing in time:
t(1)=t0;
NT=0;
while t(1)<time
%
for sub=1:3
%
t(sub+1)=t(sub)+(c(sub)+d(sub)).*DT;
%@@@ du/dx:
u1X=(D1X*u)';
u1X(:,1)=inflowdu(:,1,sub);
u1X(:,J)=outflowdu(:,1,sub);
%@@@ calculate v from integration u:
Q2=-D1Y*(u1X);
Q2(1,:)=[];
Q2(I-1,:)=[];
%
DD2Y=DDD2Y;
DD2Y(:,1)=[];
DD2Y(:,I-1)=[];
DD2Y(1,:)=[];
DD2Y(I-1,:)=[];
v_int=linsolve(DD2Y,Q2);

```

```

v=[zeros(J,1),v_int',zeros(J,1)]';
v(:,1)=inflowv(:,1,sub);
v(:,J)=outflowv(:,1,sub);
%@@@ calculate U&V
U=u+U0;
V=v;
%@@@ calculate vorticity w:
V1X=(D1X*V)';
u1Y=D1Y*u;
U1Y=u1Y+U01Y;
w=(V1X-U1Y);
%@@@ calculate H1 & H2 terms:
H1=V.*w;
H2=(-U).*w;
%@@@ calculate non-linear term:
H12Y=zeros(I,J);
H12Y=D2Y*H1;
%
H21X=(D1X*H2)';
H22XY=D1Y*((D1X*H2)');
%@@@ calculate viscous term:
u2X=zeros(I,J);u2X=u2X';
AA2Xu=zeros(I,J);
ZER=zeros(I,J-2);
AA2Xu=[(-3/DX).*inflowdu(:,1,sub),ZER,(3/DX).*outflowdu(:,1,sub)]';
u2X=(B2Xu^-1)*(AA2Xu+(A2Xu*u'));
u2X=u2X';
D2Xu=(B2Xu^-1)*A2Xu;
U2X=U02X+u2X;
%
u2Y=D2Y*u;
U2Y=u2Y+U02Y;

```

```

%
u4X=(D2X*u2X)';
U4X=u4X+U04X;
%
u4Y=D2Y*u2Y;
U4Y=u4Y+U04Y;
%
u4X2Y2=(D2X*u2Y)';
U4X2Y2=u4X2Y2+U042X2Y;
%@@@ calculate right hand side of navier stoks equation:
RHS=H12Y-H22XY+(1/RE).*(U4Y+U4X+(2.*U4X2Y2));
RHSu(:,sub)=RHS;
%@@@set bc,s boundary condition u:
for i=1:I
    for j=1:J
%    U_bc(i,j)=exp(-GAMA*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))^2);
        U_bc(i,j)=GAMA*(1-(tanh(GAMA2*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))))^2);
    end;
end;
u_bc=U_bc-U0;
%
inflowu(:,1,sub+1)=u_bc(:,1);
%@@@ set boundary condition v
for i=1:I
    for j=1:J
        V_bc(i,j)=0;
    end;
end;
v_bc=V_bc;
inflowv(:,1,sub+1)=v_bc(:,1);
%@@@calculate boundary condition in outflow for u (convection equation):
tt(1)=t(sub);

```

```

dtt=t(sub+1)-t(sub);
u_1=u;
%
u_11X=zeros(I,J);u_11X=u_11X';
u_11X=D1X*u_1';
u_11X=u_11X';
%
RR1=-speed*u_11X;
tt(2)=tt(1)+dtt*(c(1)+d(1));
u_2=u_1+c(1)*dtt*RR1;
%
u_21X=zeros(I,J);u_21X=u_21X';
u_21X=D1X*u_2';
u_21X=u_21X';
%
RR2=-speed*u_21X;
tt(3)=tt(2)+dtt*(c(2)+d(2));
u_3=u_2+(c(2)*RR2+d(2)*RR1).*dtt;
%
u_31X=zeros(I,J);u_31X=u_31X';
u_31X=D1X*u_3';
u_31X=u_31X';
%
RR3=-speed*u_31X;
tt(4)=tt(3)+dtt.*(c(3)+d(3));
u_4=u_3+(c(3)*RR3+d(3)*RR2).*dtt;
%
outflowu(:,1,sub+1)=u_4(:,J);
%@@@calculate boundary condition in outflow for v (convection equation):
ttt(1)=t(sub);
dttt=t(sub+1)-t(sub);
v_1=v;

```

```

%
v_11X=zeros(I,J);v_11X=v_11X';
v_11X=D1X*v_1';
v_11X=v_11X';
%
RRR1=-speed*v_11X;
ttt(2)=ttt(1)+dttt*(c(1)+d(1));
v_2=v_1+c(1)*dttt*RRR1;
%
v_21X=zeros(I,J);v_21X=v_21X';
v_21X=D1X*v_2';
v_21X=v_21X';
%
RRR2=-speed*v_21X;
ttt(3)=ttt(2)+dttt*(c(2)+d(2));
v_3=v_2+(c(2)*RRR2+d(2)*RRR1)*dttt;
%
v_31X=zeros(I,J);v_31X=v_31X';
v_31X=D1X*v_3';
v_31X=v_31X';
%
RRR3=-speed*v_31X;
ttt(4)=ttt(3)+dttt*(c(3)+d(3));
v_4=v_3+(c(3)*RRR3+d(3)*RRR2)*dttt;
%
outflowv(:,1,sub+1)=v_4(:,J);
%@@@ calculate boundary condition du/dx for next time:
inflowv1Y=zeros(I,J);
inflowv1Y=D1Y*inflowv(:,1,sub+1);
inflowdu(:,1,sub+1)=-inflowv1Y;
%
outflowv1Y=zeros(I,J);

```



```

outflowv1Y=D1Y*outflowv(:,1,sub+1);
outflowdu(:,1,sub+1)=-outflowv1Y;
%
u1X_SBC(:,:,sub+1)=outflowdu(:,1,sub+1);
%
%@@@ calculate new  $\nabla^2 u$  with rk3-equations:
if sub==1
    gradu(:,:,sub+1)=gradu(:,:,sub)+(c(sub)*RHSu(:,:,sub)).*DT;
else
    gradu(:,:,sub+1)=gradu(:,:,sub)+(c(sub)*RHSu(:,:,sub)+d(sub)*RHSu(:,:,sub-
1)).*DT;
end;
%@@@AA2Xu
AA2Xu=[(-3/DX).*inflowdu(:,1,sub+1),ZER,(3/DX).*outflowdu(:,1,sub+1)]';
%
C=gradu(:,:,sub+1)-(B2Xu^-1*AA2Xu)';
%@@@ solution of poissin equation(sylvester) and calculate new u:
A=D2Y;
B=D2Xu';
%@@@remedy equation with boundary condition u:
for i=1:I
    for j=2:J-1
        s1=inflowu(i,1,sub+1)*B(1,j)+outflowu(i,1,sub+1)*B(J,j);
        C(i,j)=C(i,j)-s1;
    end;
end;
%
B(:,1)=[];
B(:,J-1)=[];
B(1,:)=[];
B(J-1,:)=[];
C(:,1)=[];

```

```

C(:,J-1)=[];
%@@@ solution of poisson eq:
u_int=lyap(A,B,-C);
%
u=[inflowu(:,1,sub+1),u_int,outflowu(:,1,sub+1)];
%
u(1,:)=0;
u(I,:)=0;
end;%(end of for continu while)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
TIME=t(sub+1)%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%@@@ updating:
t(1)=t(sub+1);
gradu(:,,1)=gradu(:,,sub+1);
inflowu(:,1,1)=inflowu(:,1,sub+1);
inflowv(:,1,1)=inflowv(:,1,sub+1);
outflowu(:,1,1)=outflowu(:,1,sub+1);
outflowv(:,1,1)=outflowv(:,1,sub+1);
inflowdu(:,1,1)=inflowdu(:,1,sub+1);
outflowdu(:,1,1)=outflowdu(:,1,sub+1);
%
NT=NT+1;
T(NT,1)=t(1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
UX0(NT,1)=U((I-1)/2,1);
UX20(NT,1)=U((I-1)/2,20);
UX40(NT,1)=U((I-1)/2,40);
UX60(NT,1)=U((I-1)/2,60);
UX80(NT,1)=U((I-1)/2,80);
UX101(NT,1)=U((I-1)/2,101);
%#####
% UX0(NT,1)=U((I-1)/2+1,1);

```



```

% subplot(2,3,1),plot(DIRECTX,outflowv(:,1,1)),title('outflowv')
% pause(.0001)
%

% % % % % % % %
subplot(2,3,2),plot(T,UX100,'.R',T,UX201,'.G',T,UX50,'.K',T,UX150,'.b');%,T,
UX250,'.c',T,UX301,'.B');%,T,UX350,'.K',T,UX401,'.R')
% % % % % % % % pause(.001)
% % % % % % % %

subplot(2,3,3),plot(T,VX100,'.R',T,VX201,'.G',T,VX50,'.K',T,VX150,'.b');%,T,
VX250,'.c',T,VX301,'.B');%,T,VX350,'.K',T,VX401,'.R')
% subplot(2,3,2),semilogy(T,UX0,'.R');
% subplot(2,3,4),semilogy(T,VX0,'.R');
% % % % % % % % pause(.001)
subplot(2,3,2),plot(T,UX20,'.R',T,UX40,'.G',T,UX60,'.Y',T,UX80,'.B',T,UX101,'
.K');%,T,UX600,'.R',T,UX700,'.b'),T,VX301,'.B',T,UX301,'.B'
% pause(.001)
subplot(2,3,3),plot(T,VX20,'.R',T,VX40,'.G',T,VX60,'.y',T,VX80,'.B',T,VX101,'
K');%,T,UX600,'.R',T,UX700,'.b')
pause(.001)
% subplot(2,2,1),surf(DIRECTX,DIRECTY,H21X)
% subplot(2,2,3),surf(DIRECTX,DIRECTY,H12Y)
% subplot(2,2,2),surf(DIRECTX,DIRECTY,H22XY)
%

subplot(2,3,4),mesh(DIRECTX,DIRECTY,U)
subplot(2,3,5),mesh(DIRECTX,DIRECTY,V)
% subplot(3,3,7),quiver(DIRECTX,DIRECTY,U,V)
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%#####
end;%(end of while)
%%%%%%%%%%%%%%#####
#####

```

```

% figure
% plot(T,UX50,'.R',T,UX100,'.G',T,UX150,'.K',T,UX201,'.b');
% figure
% plot(T,VX50,'.R',T,VX100,'.G',T,VX150,'.K',T,VX201,'.b');
% %
% for j=1:J
%   Um=U(((I-1)/2)+1,j);
%   Um2=Um*.5;
%   for i=1:(I-1)/2
%     if U(i,j)>=Um2
%       SATR=i;
%       break;
%     end;
%   end;
%   if U(i,j)==Um2
%     b12(j)=-BETA.*cot(pi.*(SATR-1).*DY);
%   else
%     b2=-BETA.*cot(pi.*(SATR-1).*DY);
%     b1=-BETA.*cot(pi.*(SATR-2).*DY);
%     U2=U(SATR,j);
%     U1=U(SATR-1,j);
%     b=((b2-b1)/(U2-U1))*(Um2-U1)+b1;
%     b12(j)=-b;
%   end;
% end;
% figure
% plot(DIRECTX,b12,'.r');
%
% % %%%
% for j=1:J
%   Um(j)=U(((I-1)/2)+1,j);
%   m=15;

```


Abstract:

Jet flow with desired physical conditions thought lots of applications in industrial and scientific scope has been the most important subjects in fluid mechanic and from appearance of fluid mechanic theory; many researchers have attended this subject.

The jet flow is produced when a new fluid with high momentum is injected into a stationary fluid with homogeneous density. In the other words, the jet is produced by exit of a flow from nuzzle into fluid surround.

Orifice geometry of jets introduce in two kind of planar and circular. Through special geometry of circular jets, the researchers have had more attention on this kind. Therefore, there isn't enough information about planar jet and in this thesis we attempt to study planar jets.

In this study, we attempted to analyze two dimensional incompressible jet flows by direct numerical simulation method without any modeling or simplification assumption and study self similarity of velocity profile and vorticity. Also relation between velocity of centerline and half width line far from away jet input was studied.