بِسمِ اللهِ الرَّحمن الرَّحيم

دانشکده : مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

کاربرد روش های جدید تحلیلی و عددی در مسایل انتقال حرارت غیر خطی

دانشجو : سید محمد حسینی امام

اساتید راهنما :

دکتر محمد جواد مغربی

دکتر داود دومیری گنجی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: شهریور ۸۸

تقدیم به

همسر مهربانم

که

سنگ صبورم بوده

و

هر کلامش

انرژی بخش زندگیم

تقدیر و تشکر و درود بی پایان خدمت اساتید معزّز علی الخصوص آقایان دکتر محمد جواد مغربی و دکتر داود دومیری گنجی که چنانچه لطف بی پایان آنها نبود این کار به نتیجه نمی انجامید.

همچنین تعهد و حسن برخورد مسئول محترم آموزش تحصیلات تکمیلی دانشگاه، سرکار خانم بابا محمدی که همکاری بی منت ایشان در ماه مبارک رمضان بزرگترین درس خدمت به همنوع را به من آموخت، هیچگاه ازذهنم پاک نشده وهمواره سپاسگزار لطف این انسان بزرگوار خواهم بود.

چکیده

بررسی بسیاری از پدیده ها از قبیل انتقال حرارت، انتقال جرم، مکانیک سیالات، فیزیک پلاسما، ترمو الاستیسیته و ...منجر به حل دستگاه معادلات غیر خطی می شود که برای حل آن می توان از روشهای تقریبی، تحلیلی و عددی استفاده نمود. با توجه به کوپل بودن و غیر خطی بودن این معادلات با درجه بالا حل عددی آنها در اکثر مواقع مشکل و پیچیده می باشد. با این وجود برخی از این مسائل با استفاده از روش های عددی حل می شده و برخی دیگر توسط روش های تحلیلی و نیمه تحلیلی حل می شوند. در این پایان نامه به بررسی روش های تحلیلی نوین در علوم مکانیک سیالات و انتقال حرارت از قبیل «روش پرتور بیشن، روش هموتوپی پرتوربیشن، روش حساب تغییرات تکراری و روش تجزیه آدومیان» پرداخته شده و پس از ارائه مثال هایی، مزایا وکاستی آنها بیان شده و به معرفی روش آنالیز هموتوپی پرداخته می شود.این روش با از میان برداشتن نواقص روش های پیشین به ارائه راهکار هایی نوین برای حل معادلات پیچیده حاکم بر دستگاه های معادلات غیر خطی می پردازد.در انتها با ذکر دو مساله کارایی این روش نشان داده شده است. نتایج نشان می دهد که جواب های بدست آمده از روش آنالیز هموتوپی با دقت بالایی با جواب های حقیقی و روش های عددی مطابقت دارد و محدوده همگرایی نسبت به روش های معرفی شده در پایان نامه به خوبی کنترل می گردد.

لیست مقالات مستخرج:

عنوان مقاله

Heat and Mass Transfer of a “Second- Grade” Viscoelastic Fluid above a Horizontal Moving Flat Plate

پذیرفته شده در شهریور۸۸ (September ۲۰۰۹) در

International Journal of Modern Physics B(IJMPB)
<ijmpb@wspc.sg>

فهرست مطالب

فهرست علائم

A	اپراتور غیر خطی
ADM	روش تجزیه آدومیان
A_n	چند جمله ای آدومیان
a	پارامتر نرخ پاشش- مکش
B	عملگر مرزی
c	گرمای ویژه
C_a	گرمای ویژه در دمای محیط
C_f	ضریب اصطکاک
D_e	عدد دبورای موضعی
$2d$	نسبت نرخ تغییر شکل
D	ثابت
Eg	ضریب قابلیت نشر سطوح
Ec	عدد اِکرت موضعی
$f(r)$	تابع تحلیلی معلوم
f	تابع جریان بدون بعد
f_w	پارامتر پاشش- کشش دیواره
g	شتاب ثقل زمین
$g(\eta)$	میدان دمای بی بعد
h	ضریب جابجایی حرارتی
H	هموتوپی تابع
HAM	روش آنالیز هموتوپی
HPM	روش هموتوپی پرتوربیشن
$H(t)$	تابع کمکی غیر صفر
k	نفوذ پذیری محیط متخلخل
K	عدد دبورای موضعی
L	قسمت خطی معادله
L^{-1}	عملگر معکوس مشتق
L_{ij}	اجزای تانسور گرادیان سرعت
N	قسمت غیر خطی معادله
N_1	اختلاف تنش های نرمال اول
N_2	اختلاف تنش های نرمال دوم
$O(..)$	مرتبه...

p	پارامتر بسط روش هموتوپی پرتوربیشن
PST	دمای سطح مشخص شده
PHF	شار حرارتی مشخص شده
$-pI$	بخش ایزوتروپیک تانسور تنش
q	پارامتر محاط کننده
q_w	شار حرارتی دیواره
R	بخش باقیمانده قسمت خطی معادله
Re_x	عدد رینولدز موضعی
s	پارامتر دمای دیواره
T_i	دمای اولیه
t	زمان
T_a	دمای محیط
T_s	دمای جذب موثر انتقال حرارت تشعشعی
T_b	دمای پایه فین
T	زمان مشخصه جریان
T_∞	دمای محیط
$Tw(x)$	درجه حرارت دیواره
$u_0(t)$	حدس اولیه
u	مولفه محور x سرعت
u_∞	سرعت در خارج لایه مرزی
v	مولفه محور y سرعت
V	حجم سیستم
VIM	روش حساب تغییرات تکراری
v_∞	مولفه عمودی سرعت در لبه لایه مرزی
Wi	عدد وایزنبرگ
$Z_0(x,t)$	حدس اولیه تابع آنالیز هموتوپی
α	ضریب پخش حرارتی
α_1	پارامتر معرّف ویسکوزیته در تانسور تنش کائوچی
α_2	پارامتر معرّف اختلاف تنش نرمال اول
α_3	پارامتر معرّف اختلاف تنش نرمال دوم
β	پارامتر ثابت
β	ضریب انبساط حرارتی
χ	تابع
ε	پارامتر پرتوربیشن بزرگ یا کوچک
δ	پارامتر ساختگی
ρ	چگالی

ρ_∞	دانسیته سیال
θ	پارامتر بدون بعد حرارتی
$\theta(\eta)$	پارامتر میدان دمای بدون بعد
τ	پارامتر بدون بعد زمان
$\tau_{(i)}$	مشتق زمانی همرفتی پادهمبسته تانسور تنش
τ_{ij}	مولفه های تانسور تنش
Γ	محدوده حل
λ	ضریب عمومی لاگرانژ
λ_i	زمان آسودگی از تنش
σ	ثابت استفان بولتزمن
σ	عدد پراندل
η	متغیر مستقل بدون بعد
η_0	ویسکوزیته در نرخ برش صفر
$\hbar$	پارامتر کمکی غیر صفر
$\Phi(x,t,p)$	تابع مجهول
μ	ویسکوزیته سیال
ψ	تابع جریان
ξ	تابع
ω	فرکانس مشخصه جریان
$\dot{\gamma}$	نرخ برش جریان
$\gamma_{(i)}$	مشتق زمانی پادهمبسته نرخ برش
∇	گرادیان
$\overset{*}{f}_m(\eta)$	جواب خصوصی مرتبه **m** تابع f
$\overset{*}{g}_m(\eta)$	جواب خصوصی مرتبه **m** تابع g
$\overset{*}{\theta}_m(\eta)$	جواب خصوصی مرتبه **m** تابع θ

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول(مقدمه):

معرفی برخی از روش های تحلیلی عددی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و غیر خطی

مقدمه:

علم مکانیک سیالات و انتقال حرارت به علت معادلات حاکم بر آنها همواره با روش‌های حل معادلات غیرخطی حاکم بر فیزیک مسائل آمیخته بوده است. ماهیت غیرخطی اینگونه مسائل و جذابیت حل تحلیلی آنها باعث گسترش روش‌های تحلیلی برای حل اینگونه مسائل شده است.

به علت ماهیت غیرخطی اینگونه مسائل، جواب دقیق برای آنها نادر می‌باشد و غالباً حل‌های تشابهی[۱] دارند که در اینگونه حل‌ها، معادلات مشتقات جزئی[۲] به معادلات دیفرانسیل معمولی[۳] تبدیل می‌شوند. البته بعد از این تبدیل نیز حل دقیق بسیاری از این مسائل ممکن نمی‌باشد و اغلب به وسیله روش‌های تقریبی و نیمه تحلیلی به حل اینگونه معادلات پرداخته می‌شود.

اگر چه امروزه با داشتن کامپیوترهای با عملکرد بالا و برخی نرم‌افزارهای محاسباتی با کیفیت نظیر *Maple* و *Mathematica* این امر آسانتر شده است. روش‌های عددی معمولاً می‌توانند در محیط‌های پیچیده جهت حل مسائل غیرخطی به کار گرفته شوند.

حلهای عددی نسبت به حل‌های تحلیلی دارای یک سری برتری بوده و معادلات غیرخطی را در محیط محاسباتی ساده حل می‌نمایند ولی روش‌های عددی فقط نقاط ناپیوسته از یک نمودار را نتیجه می‌دهند که اغلب با توجه به صرف هزینه و وقت می‌توان نمودار را کامل کرد.

از این گذشته از نتایج عددی مشکل می‌توان یک فهم کلی و لازم از معادلات غیرخطی داشت. همچنین مشکلات عددی در جاهایی که معادلات غیرخطی شامل جواب‌های منحصر به فرد[۴] باشد یا جواب‌های متعددی داشته باشند ظاهر می‌شود. حل‌های عددی و حل‌های تحلیلی برتری‌ها و

---

[۱] - *similarity solutions*

[۲] - *Partial differential equations*

[۳] - *Ordinary differential equations*

[۴] - *particular answers*

محدودیت‌های مربوط به خود را داشته و بنابراین لازم نیست که یکی را انجـام داده و دیگـری نادیـده گرفته شود. متدهای تحلیلی فراوانی برای حل معادلات غیرخطی وجود دارندکـه برخـی از آنهـا مـورد بررسی قرار می‌گیرند:

۱-۱- روش پرتوربیشن:

یکی از معروف‌ترین و قدیمی‌ترین روش‌های تحلیلی تقریبی و با دقت بالا روش پرتوربیشن[۱] می‌باشد و به طور وسیع در مسایل غیرخطی بکار گرفته شده اسـت[۳-۱]. توسـط روش پرتوربیشـن، بسـیاری از پدیده‌های مهم و مشخصه‌های آنها بیان می‌شود. یکی از نتایج جالب از تکنیکهـای پرتوربیشـن کشـف نهمین سیاره در سیستم‌های خورشیدی می‌باشد [۴]. اخیراً متدهای پرتوربیشن آسان به عنـوان یکـی از ده پیشرفت برتر تئوری و ریاضیات کاربردی در قرن بیستم در نظرگرفته شـده اسـت [۵]. بنـابراین غیرقابل تردید است که روش‌های پرتوربیشن نقش مهمی در دانش و شاخه‌های مهندسی دارند.

روش‌های پرتوربیشن بر اساس وجود پارامترهای کوچک و بزرگ یا متغیرهایی که مقـادیر پرتوربیشـن نامیده می‌شوند می‌باشد. این روش‌ها از مقـادیر پرتوربیشـن جهـت انتقـال یـک مسـأله غیرخطـی بـه زیرمجموعه‌ای نامتناهی از مسایل استفاده نموده و سپس مجموع جواب‌های چنـد معادلـه اول، جـواب نهایی را تقریب می‌زند. وجود مقادیر پرتوربیشن اساس این روش می‌باشد.

مقادیر پرتوربیشن بر اساس فیزیک مسأله مشخص می‌شود به عنوان مثال [۶]:

[۱] - *Perturbation Method*

جدول۱-۱: مقادیر پارامتر پرتوربیشن در تئوری های مختلف		
Janzen-Rayligh Expansion	**Mach number**	>>۱
Thin-airfoil Theory	**Thickness ratio**	<<۱
Lifting-line Theory	**Aspect ratio**	>>۱
Stoekes , Oseen flow	**Reynolds Number**	<<۱
Boundry-layer Theory	**Reynolds Number**	>>۱
Newton-Busemann Theory	**Mach Number>>۱**	(γ-۱)<<۱
Quasi-Steady Theory	**Reduced frequency**	<<۱
Free-molecule Theory	**Knudsen number**	>>۱

۱-۱-۱- اساس کار روش پرتوربیشن:

در این روش جواب معادله به صورت سری نامتناهی از توان‌های پارامتر پرتوربیشن در نظر گرفته می‌شود.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x) \qquad (۱-۱)$$

با توجه به دقت موردنظر تعداد متناهی از سری بالا را به عنوان جواب معادله در نظر می‌گیریم و با جایگزینی این جملات در معادله اصلی و بسط دادن معادله بر اساس پارامتر کوچک[۱] یا بزرگ ε، فاکتورگیری از معادله بر حسب ضرایب توان‌های برابر ε و مساوی صفر قرار دادن هر یک از این ضرایب، معادله دیفرانسیل غیرخطی را به مجموعه‌ای از معادلات خطی تبدیل می‌کنیم.

با حل این معادلات خطی و قرار دادن شروط مرزی در معادله حاصل از ضرایب ε°، ضرایب پارامتر پرتوربیشن در سری موردنظر بدست آمده و جواب معادله حاصل می‌شود. دقت شود که در حل معادلات، ضرایب ε^1، ε^2، ... شرایط مرزی صفر در نظر گرفته می‌شود.

بسط‌های حاصل از حل معادله به روش پرتوربیشن به دو دسته« منحصر به فرد»[۲] و «عادی»[۳] تقسیم می‌شوند [۷-۶] در بسط عادی، جواب بدست آمده در تمام محدوده حل معتبر می‌باشد ولی در بسط منحصر به فرد، بسط جواب در قسمتی از بازه حل دارای محدودیت‌های زیر می‌باشد:

۱- جواب معادله به ازای برخی از مقادیر متغیرهای مستقل[۴] بی‌نهایت شود.

۲- جواب معادله در بازه‌ای از محدوده‌ی حل گسسته شود.

۳- جواب معادله برخی از شرایط مرزی را ارضا نکند.

۴- جواب معادله شامل نقاط «تکین اساسی»باشد [۷].

۱- *small parameter*

۲- *Singular*

۳- *Regular*

۴- *Independent Variable*

۱-۱-۲- تشریح روش پرتوربیشن با ذکر دو مثال

مثال اول:

اولین مثال ارائه شده برای حل معادله با استفاده از این روش، سرمایش یک سیستم *Lumped* می‌باشد. حجم سیستم V و مساحت سطح آن برابر Aاست. دانسیته برابر ρ ، گرمای ویژه، cو دمای اولیه T_i در نظر گرفته شود. در زمان $t = 0$ سیستم در معرض یک محیط همرفتی[۱] با دمای T_a با یک ضریب جابجایی h قرار می‌گیرد و فرض می‌شود که گرمای ویژه c یک تابع خطی از دما به فرم زیر است[۷].

$$c = c_a[1 + \beta(T - T_a)] \quad (۲-۱)$$

که c_a گرمای ویژه در T_a و β یک ثابت است. معادله سرمایش[۲] و شرایط اولیه آن به صورت ذیل می باشد:

$$\rho V c dT/dt + hA(T - T_a) = 0 \quad (۳-۱)$$
$$t = 0 \rightarrow T = T_i$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد زیر[۷]:

$$\theta = \frac{T - T_a}{T_i - T_a} \quad (۴-۱)$$

$$\tau = \frac{t}{\rho V c/(hA)} \quad (۵-۱)$$

$$\varepsilon = \beta(T_i - T_a) \quad (۶-۱)$$

معادله (۱-۳) به شکل زیر در می‌آید.

۱ - *Convective*

۲ - *Cooling*

$$(1+\varepsilon\theta)\frac{d\theta}{d\tau}+\theta=0 \qquad (۱-۷)$$

$$\tau=0\rightarrow\theta=1 \qquad (۱-۸)$$

$$\theta=\theta_0+\varepsilon\theta_1+\varepsilon^2\theta_2+\ldots \qquad (۱-۹)$$

و با قرار دادن این سری در معادله (۱-۷) و انجام عملیات مقدماتی، معادلات زیر حاصل می شود.

$$[1+\varepsilon(\theta_0+\varepsilon\theta_1+\varepsilon^2\theta_2)](\frac{d\theta_0}{d\tau}+\varepsilon\ \frac{d\theta_1}{d\tau}+\varepsilon^2\frac{d\theta_2}{d\tau})+\theta_0+\varepsilon\theta_1+\varepsilon^2\theta_2=0 \qquad (۱-۱۰)$$
$$\tau=0\rightarrow\theta_0+\varepsilon\theta_1+\varepsilon^2\theta_2=1$$

$$\frac{d\theta_0}{d\tau}+\theta_0+\varepsilon(\frac{d\theta_1}{d\tau}+\theta_1+\theta_0\frac{d\theta_0}{d\tau})+\varepsilon^2(\frac{d\theta_2}{d\tau}+\theta_2+\theta_0\frac{d\theta_1}{d\tau}+\theta_1\frac{d\theta_0}{d\tau})=0 \qquad (۱-۱۱)$$

ضرایب توان‌های ε بطور جداگانه مساوی صفر قرار داده می‌شود.

$$\varepsilon^0\rightarrow\frac{d\theta_0}{d\tau}+\theta_0=0 \qquad (۱-۱۲)$$
$$\tau=0\rightarrow\theta_0=1$$

$$\varepsilon^1\rightarrow\frac{d\theta_1}{d\tau}+\theta_1+\theta_0\frac{d\theta_0}{d\tau}=0 \qquad (۱-۱۳)$$
$$\tau=0\rightarrow\theta_1=0$$

$$\varepsilon^2\rightarrow\frac{d\theta_0}{d\tau}+\theta_2+\theta_0\frac{d\theta_1}{d\tau}+\theta_1\frac{d\theta_0}{d\tau}=0 \qquad (۱-۱۴)$$
$$\tau=0\rightarrow\theta_2=0$$

با حل معادله (۱-۱۲) $\theta_\circ$ به فرم زیر در می‌آید.

$$\theta_0=e^{-\tau} \qquad (۱-۱۵)$$

و با جاگذاری در معادله (۱-۱۳) و حل آن فرم ذیل حاصل می گردد.

$$\frac{d\theta_1}{d\tau}+\theta_1-e^{-2\tau}=0 \qquad (۱۶-۱)$$

که از آنجا θ_1 به شکل زیر در می آید.

$$\theta_1=e^{-\tau}-e^{-2\tau} \qquad (۱۷-۱)$$

و به همین ترتیب برای θ_2 جواب زیر بدست می آید.

$$\frac{d\theta_2}{d\tau}+\theta_2-2e^{-2\tau}+3e^{-3\tau}=0 \qquad (۱۸-۱)$$

$$\theta_2=e^{-\tau}-2e^{-2\tau}+\frac{3}{2}e^{-3\tau} \qquad (۱۹-۱)$$

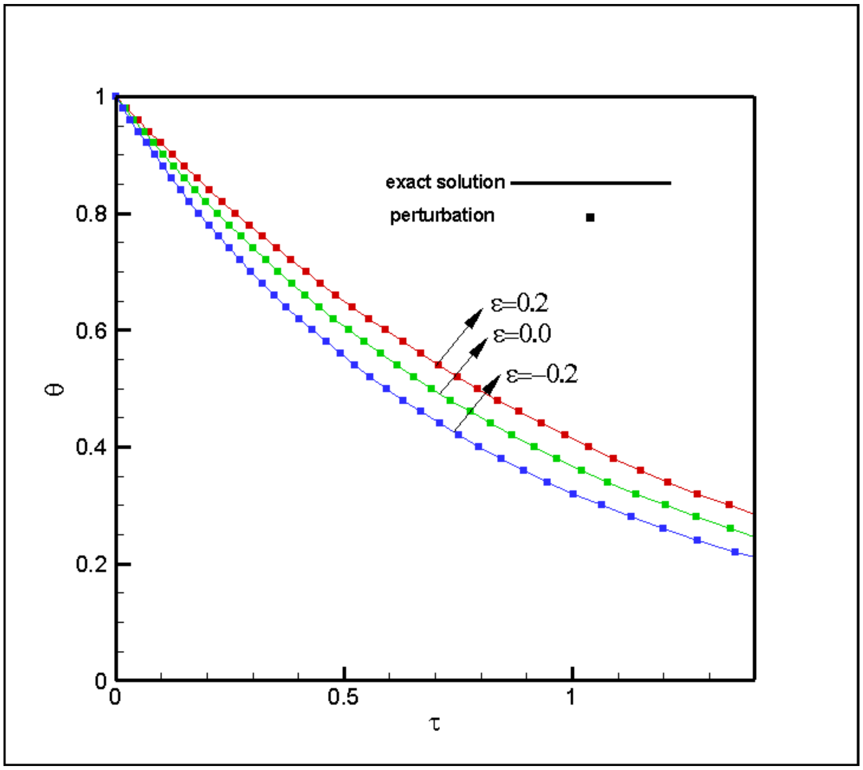
و جواب نهایی به فرم زیر در می‌آید.

$$\theta=e^{-\tau}+\varepsilon(e^{-\tau}-e^{-2\tau})+\varepsilon^2(e^{-\tau}-2e^{-2\tau}+\frac{3}{2}e^{-3\tau}) \qquad (۲۰-۱)$$

حل دقیق معادله (۱-۷) منجر به جوابی به صورت زیر می‌شود.

$$\ln\theta+\varepsilon(\theta-1)=-\tau \qquad (۲۱-۱)$$

نتایج حل دقیق و حل به روش پرتوربیشن بـه ازای $\varepsilon=0,+0.2,-0.2$ در شـکل (۱-۱) نمـایش داده شده است.



شکل ۱-۱: مقایسه جواب های ناشی از حل معادله به روش پرتوربیشن و مقایسه آن با حل دقیق معادله به ازای ε های مختلف.

مثال دوم:

مثال دوم بررسی معادله دیفرانسیلی به شکل زیر می باشد که شرایط مرزی آن نیز بیان گردیده است.

$$(x+\varepsilon y)\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (۱-۲۲)$$

$$x=1 \rightarrow y=1 \qquad (۱-۲۳)$$

با فرض اینکه جواب‌ها به فرم $y=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2$ باشد و با قرار دادن آن در معادله (۱-۲۲) و مرتب کردن عبارات نسبت به توان‌های ε معادلات ذیل حاصل می گردند.

$$\varepsilon^0 \to x\frac{dy_0}{dx} + y_0 = 0 \qquad (۲۴-۱)$$
$$x = 1 \to y_0 = 1$$

$$\varepsilon^1 \to x\frac{dy_1}{dx} + y_1 = -y_0\frac{dy_0}{dx} \qquad (۲۵-۱)$$
$$x = 1 \to y_1 = 0$$

$$\varepsilon^2 \to x\frac{dy_2}{dx} + y_2 = -y_0\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_0}{dx} \qquad (۲۶-۱)$$
$$x = 1 \to y_2 = 0$$

با حل معادلات فوق نتایج ذیل بدست می‌آید.

$$y_0 = \frac{1}{x} \qquad (۲۷-۱)$$

$$y_1 = \frac{x^2 - 1}{2x^3} \qquad (۲۸-۱)$$

$$y_2 = -\frac{x^2 - 1}{2x^5} \qquad (۲۹-۱)$$

و سری جواب‌های بدین گونه خواهد شد.

$$y = \frac{1}{x} + \varepsilon\frac{x^2 - 1}{2x^3} - \varepsilon^2\frac{x^2 - 1}{2x^5} \qquad (۳۰-۱)$$

نقص این جواب این است که در $x = 0$ یک نقطه منفرد وجود دارد و یکتایی در ترم‌های بعدی با افزایش توان x در مخرج کسرها افزایش می‌یابد. بنابراین جواب‌های بدست آمده از این روش در همسایگی $x = 0$ مأیوس کننده می‌باشد.

جهت بررسی بیشتر معادله (۱-۲۲) و یافتن پارامتر مناسب بسط، معادله به صورت زیر در نظر گرفته شود.

$$y\frac{dx}{dy}+x=-\varepsilon y \tag{۱-۳۱}$$

$$\frac{d}{dy}(xy)=-\varepsilon y \tag{۱-۳۲}$$

$$xy=1+\frac{1}{2}\varepsilon(1-y^2) \tag{۱-۳۳}$$

$$y^2+\frac{2}{\varepsilon}xy=\frac{2}{\varepsilon}+1 \tag{۱-۳۴}$$

$$y=-\frac{x}{\varepsilon}+(\frac{x^2}{\varepsilon^2}+\frac{2}{\varepsilon}+1)^{1/2} \tag{۱-۳۵}$$

در زمانی که $x\to 0$ میل می‌کند $y\to\left[(\frac{2}{\varepsilon})+1\right]^{1/2}$

حال فرض مسأله این‌گونه در نظر گرفته شود که فرم بسط پرتوربیشن به صورت زیر باشد.

$$y=y_0+\varepsilon^{-1}y_1+\varepsilon^{-2}y_2 \tag{۱-۳۶}$$

با قرار دادن این فرم جواب در معادله (۱-۳۰)، بسط و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توان‌های ε برای $\varepsilon^{-1},\varepsilon^{0},\varepsilon^{1}$ معادلات زیر مشاهده می شوند.

$$\varepsilon\to y_0\frac{dy_0}{dx}=0 \tag{۱-۳۷}$$
$$x=1\to y_0=1$$

$$\varepsilon^0\to y_0\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{dy_0}{dx}=-x\frac{dy_0}{dx}-y_0 \tag{۱-۳۸}$$
$$x=1\to y_1=0$$

$$\varepsilon^{-1}\to y_0\frac{dy_2}{dx}+y_2\frac{dy_0}{dx}=-x\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_1}{dx}-y_1 \tag{۱-۳۹}$$
$$x=1\to y_2=0$$

حل معادلات فوق نتایج زیر را بدست می‌دهد.

$$y_0 = 1$$
$$y_1 = 1 - x \qquad (۴۰-۱)$$
$$y_2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

$$y = 1 + \varepsilon^{-1}(1-x) + \varepsilon^{-2}\frac{1}{2}(x^2-1) \qquad (۴۱-۱)$$

که نقطه ناپیوستگی در آن مشاهده نمی‌شود.

همانطور که مشاهده شد وجود مقادیر پرتوربیشن اساس این روش می‌باشند ولی این مقدار پرتوربیشن باعث محدودیت‌هایی برای این روش می‌شود.اولاً غیرممکن است که هر معادله غیرخطی شامل مقادیر پرتوربیشن باشد. این یک محدودیت آشکار برای این روش می‌باشد. ثانیاً تقریب‌های تحلیلی از معادلات غیرخطی هنگامی که ترم‌های غیرخطی زیاد و یا دارای رتبه‌ی بالا باشند دارای مشکل می‌شوند. بنابراین تقریب پرتوربیشن تنها برای معادلاتی با ترم‌های غیرخطی ضعیف معتبر است.

نیروی دراگ[۱] ناشی از جریان یکنواخت روی کره را که یک مسأله کلاسیک در مکانیک سیالات است را در نظر بگیرید. این مسأله بر اساس معادلات ناویراستوکس[۲] می‌باشد. از سال ۱۸۵۱ هنگامی که استوکس این مساله را در نظر گرفت بسیاری از دانشمندان مبادرت به حل آن با استفاده از تئوری‌های خطی مانند پرتوربیشن آسان[۳]، پرتوربیشن تطبیقی[۴] نمودند اما تمام این تئوری‌های قبلی تنها برای اعداد رینولدز پایین با نتایج آزمایشگاهی مطابق بودند.بنابراین همانگونه که وایت[۵] بیان نمود که تفکر استفاده از جریان خزشی در جهت بسط و گسترش آن به رینولدزهای بالا موفق نبوده است ممکن است تا حدی مربوط به این واقعیت باشد که تکنیک‌های پرتوربیشن با هیچ روشی همگرایی حل و

---

۱ - *Drag*
۲ - *Stockes*
۳ - *Straightforward Perturbation*
۴ - *Matching Perturbation*
۵ - *White*

همچنین نرخ تقریب‌های پرتوربیشن را کنترل نمی‌نمایند. بستگی روش‌های پرتوربیشن به مقادیر و پارامترهای کوچک می‌تواند با معرفی یک پارامتر کوچک ساختگی اجتناب شود. در سال ۱۸۹۲ لیاپونو[۱] معادله $\frac{dx}{dt}: A(t).x$ را در نظر گرفت، که یک ماتریس متناوب زمانی است. او یک پارامتر ساختگی (ε) را مطرح نمود و این پارامتر را این‌گونه در معادله قرار داد.

$$\frac{dx}{dt}: A(t).x.\varepsilon \qquad (۴۲-۱)$$

سپس بسطهای سری بر روی ε را محاسبه کرد. در بسیار از حالت‌ها او اثبات نمود که سری‌ها در $\varepsilon=1$ همگرا می‌شوند و بنابراین می‌توان $\varepsilon=1$ را در آخرین عبارت قرار داد. این روش پارامتری ساختگی لیاپونو[۲] نامیده می‌شود. این تفکر بعدها توسط کارمیشینتال[۳] در جهت پیشنهاد روشی به نام بسط δ [۸] بکار گرفته شد. وی یک پارامتر ساختگی دیگر بنام δ را معرفی کرد و آن را در معادله این گونه قرار داد.

$$x^5+x=1 \qquad (۴۳-۱)$$
$$x^{1+\delta}+x=1$$

وی آنگاه معادله را حول δ بسط داده و جواب‌ها را با استفاده از تقریب $Pade$ بدست آورد. و در نهایت δ را در برابر۴ در نظر گرفت. روش بسط δ [۴]با روش آقای لیاپونو یکسان می‌باشد. توجه شود هر دو روش یک ضریب ساختگی را معرفی می‌کنند. اگر چه مکان این دو پارامتر مختلف می‌باشد. علاوه بر این در قرار گرفتن δ در مکانهای مختلف شخص آزادی عمل دارد.

$$\delta x^5+x=1 \qquad (۴۴-۱)$$

۱- *Lyapunov*

۲- *Lyapunov artificial small parameter*

۳- *Karmishinetal*

۴- $\delta-$*Expansion*

همانطور که کارمیشینتال بیان کرد، تقریبی که از معادله‌ی بالا بدست می‌آید بسیار از مکان قرارگیری قبلی δ بدتر می‌باشد واضح است هر دو روش پارامتر ساختگی لیاپونو و بسط δ احتیاج به قانون های اصولی دارند تا مکان قرارگیری مناسب این پارامترها (ε یا δ) در معادله به خوبی مشخص شود. این دو روش هم مانند روش پرتوربیشن قادر به کنترل نمودن حل و نرخ سری‌های تقریب زده شده نمی‌باشند.

۱-۲- روش هموتوپی پرتوربیشن HPM

هی[1] روش هموتوپی پرتوربیشن[2] را برای اولین بار در حال ۱۹۹۸ ارائه نمود [۹] و برای یک سری معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی از جمله معادله دافینگ[3] از مرتبه غیرخطی درجه سوم مورد استفاده قرار داد و نشان داد که روش جدید بر روش پرتوربیشن کلاسیک مزیت دارد. تقریب‌های بدست آمده از این روش نه تنها برای مقادیر کوچک از پارامتر پرتوربیشن بلکه برای مقادیر بزرگ نیز دارای اعتبار است.

وی در سال ۲۰۰۰ روش هموتوپی پرتوربیشن را برای یکسری از معادلات غیرخطی ارتعاشی مورد استفاده قرار داد و مزایای این روش را نسبت به روش پرتوربیشن کلاسیک برشمرد [۱۰] پس از آن در سال ۲۰۰۴ این روش را برای تحلیل کمی نوسان‌سازهای غیرخطی دارای گسستگی به کار برد. وی در سال ۲۰۰۵ به کمک همکارانش از این روش برای تحلیل یک مدل دینامیکی غیرخطی جدید از ماشین نخ تابی استفاده کرد و در تحقیق خود زاویه بهینه همگرایی دو رشته نخ را در موقعیت تعادل ۹۰ درجه و رزونانس را در ۲۷۰ درجه بدست آورد [۱۱]. همچنین او در همین سال این روش را در حل معادلات موج غیرخطی نیز بکار برد [۱۲] وی در سال ۲۰۰۶ از این روش برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی با مرتبه غیرخطی درجه دوم و سوم که مربوط به نوسان‌سازهای

۱- *He*

۲- *Homotopy Perturbation Method*

۳- *Duffing*

غیرخطی هستند استفاده کرد؛ به گونه‌ای که حدس اولیه به شکل تابع بیضوی ژاکوبی[۱] در نظر گرفتـه شد. و نتیجه بدست آمده با حل عددی مقایسه گردید و مشاهده شد که با این حدس اولیـه الگـوریتم بسیار ساده شده و دارای دقت بسیار بالایی می‌باشد [۱۳] به جز او مولفان دیگری نیز از ایـن روش در حل معادلات غیرخطی استفاده کردند. به عنوان مثال سـیدی‌کـوی[۲] و همکـاران او در ۲۰۰۶ در حـل معادلات مربوط به حرکت لایه باریک از سیال غیرنیوتنی بـر روی یـک تسـمه متحـرک [۱۴] از ایـن روش اسـتفاده نمودنـد. همچنـین دومیـری گنجـی[۳] و همکـارانش در سـال ۲۰۰۶در حـل معـادلات غیرخطی تشعشع [۱۵] و در سال ۲۰۰۷ در حل معـادلات غیرخطـی در انتقـال حـرارت از ایـن روش استفاده نمودند [۱۶].

۱-۲-۱- اساس روش هموتوپی پرتوربیشن

همانطور که در بخش پرتوربیشن توضیح داده شد، روش پرتوربیشن در عـین سـادگی و کـارایی دارای معایبی می‌باشد. یکی از مهمترین معایب این روش، عدم وجود پارامتر بزرگ یا کوچـک در بسـیاری از مسایل می‌باشد. ثانیاً مشخص نمودن پارامتر کوچک در این روش نیاز به مهـارت کـافی دارد بطوریکـه انتخاب پارامتر کوچک مناسب جـواب ایـده‌آل بدسـت مـی دهـد در صـورتی کـه انتخـاب نامناسـب، جوابهایی کاملاً دوراز واقعیت را در پی خواهد داشت.

در این بخش به تشریح روش HPM که معایب ذکر شده را ندارد پرداخته خواهد شد[۱۷]:

معادله غیرخطی زیررا در نظر گرفته شود.

۱- *Jacoby*

۲- *Siddiqui*

۳- *D.D.Ganji*

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega \tag{۴۵-۱}$$

که دارای شرایط مرزی زیر است.

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, r \in \Gamma \tag{۴۶-۱}$$

که در آن A عملگر عمومی مشتق، B عملگر مرزی، $f(r)$ تابع تحلیلی معلوم، Γ محدوده حل می‌باشد.

عملگر A به دو قسمت خطی و غیرخطی L و N تقسیم می‌شود.

معادله (۱-۴۵) به صورت زیر در می‌آید.

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{۴۷-۱}$$

به کمک تکنیک هموتوپی[۱۹-۱۸] هموتپی $v(r,p) : \Omega \times [0,1] \to R$ ساخته می‌شود که معادله زیر را ارضا می‌کند.

$$H[v,p] = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, p \in [0,1], r \in \Omega \tag{۴۸-۱}$$

یا

$$H[v,p] = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, p \in [0,1], r \in \Omega \tag{۴۹-۱}$$

که در آن $p \in [0,1]$ یک پارامتر محاط کننده[۱] است، u_0 تقریب اولیه از معادله (۱-۴۸) می‌باشد که شرایط مرزی را ارضا می‌کند. از معادله (۱-۴۸) یا (۱-۴۹) نتیجه می‌شود.

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{۵۰-۱}$$

$$H(v,1) = A(v) - f(r) \tag{۵۱-۱}$$

۱- *embedding*

با میل نمودن مقدار p از ۰ به سمت ۱، $v(r,p)$ از $u_{\circ}(r)$ به $u(r)$ میل می‌کند. در توپولوژی[۱]، این فرایند «تغییر شکل[۲]» نامیده می‌شود و ترم‌های $L(v)-L(u_{\circ})$ و $A(v)-f(r)$ هموتوپیک[۳] نامیده می‌شوند[۱۷,۲۰].

در HPM پارامتر p بجای پارامتر کوچک در پرتوربیشن عمل می‌کند و جواب معادله (۱-۴۵)به صورت توانهایی از p در نظر گرفته می‌شود.

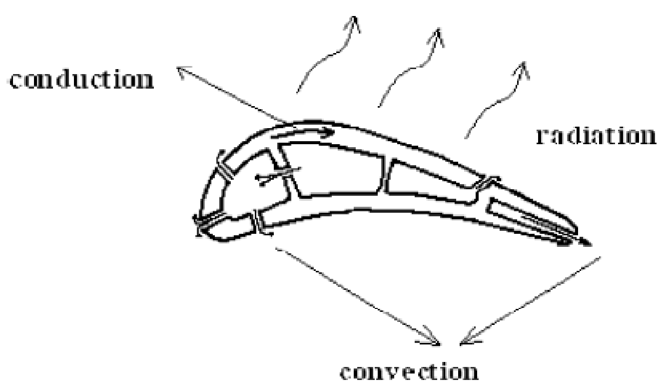
$$v=v_0+v_1p+v_2p^2+\ldots \qquad (۵۲-۱)$$

با میل نمودن $p\to 1$ سری فوق به سمت جواب معادله ۷ میل می‌کند.

$$u=\lim v_{p\to 1}=v_0+v_1+v_2+\ldots \qquad (۵۳-۱)$$

سری فوق در اکثر مواقع همگرا می‌باشد. با این وجود نرخ همگرایی به عملگر غیرخطی $A(v)$ بستگی دارد.

۱-۲-۲- تشریح روش هموتوپی پرتوربیشن با ذکر دو مثال



۱- *TOPOLOGY*

۲- *Deformation*

۳- *Homotopic*

شکل (۱-۲): سیستم ترکیبی جابجایی و تشعشع سرمایشLumped [۲۱]

مثال اول:

یک سیستم سرمایش *Lumped* با ترکیبی از جابجـایی و تشعشـع در شـکل (۱-۲) نشـان داده شـده است و معادله حرارت حاکم بر آن به شکل زیر است[۲۱].

$$(\frac{d\theta}{d\tau})+(\theta-\theta_a)+\varepsilon(\theta^4-\theta_s^4)=0 \tag{۵۴-۱}$$

با فرض $\theta_a=\theta_s=0$ و جداسازی قسمت‌های خطی و غیرخطی معادله به فرم ذیل در می آید.

$$[(\frac{d\theta}{d\tau})+\theta]+[\varepsilon\theta^4]=0 \tag{۵۵-۱}$$

فرم هموتپی تشکیل شده به شکل زیر است.

$$H(v,p)=L(v)-L(\theta_0)+pL(\theta_0)+p(\varepsilon v^4)=0 \tag{۵۶-۱}$$

$$\begin{aligned} L(v)&=dv/d\tau+v \\ L(\theta_0)&=d\theta_0/d\tau+\theta_0 \end{aligned} \tag{۵۷-۱}$$

بـا فـرض $\frac{d\theta_0}{d\tau}=\theta_\circ=0$ و جایگـذاری $v=v_\circ+pv_1+p^2v_2+\ldots$ در معادلـه $H(v,p)$ و پـس از جداسازی ضرایب توانهای p و مساوی صفر قرار دادن هر یک از آنها خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} HPM :=& \frac{d}{d\tau}v_0(\tau)+p\left(\frac{d}{d\tau}v_1(\tau)\right)+p^2\left(\frac{d}{d\tau}v_2(\tau)\right)+v_0(\tau) \\ &+p\,v_1(\tau)+p^2v_2(\tau)-\left(\frac{d}{d\tau}\theta_0(\tau)\right)-\theta_0(\tau) \\ &+p\left(\frac{d}{d\tau}\theta_0(\tau)+\theta_0(\tau)\right)+p\,\varepsilon\left(v_0(\tau)+p\,v_1(\tau)\right. \\ &\left.+p^2v_2(\tau)\right)^4 \end{aligned} \tag{۵۸-۱}$$

$$HPM := p^9 \varepsilon v_2(\tau)^4 + 4 p^8 \varepsilon v_1(\tau) v_2(\tau)^3 + \left(6 \varepsilon v_1(\tau)^2 v_2(\tau)^2 + 4 \varepsilon v_0(\tau) v_2(\tau)^3\right) p^7 + \left(4 \varepsilon v_1(\tau)^3 v_2(\tau) + 12 \varepsilon v_0(\tau) v_1(\tau) v_2(\tau)^2\right) p^6 + \left(6 \varepsilon v_0(\tau)^2 v_2(\tau)^2 + \varepsilon v_1(\tau)^4 + 12 \varepsilon v_0(\tau) v_1(\tau)^2 v_2(\tau)\right) p^5 + \left(4 \varepsilon v_0(\tau) v_1(\tau)^3 + 12 \varepsilon v_0(\tau)^2 v_1(\tau) v_2(\tau)\right) p^4 + \left(6 \varepsilon v_0(\tau)^2 v_1(\tau)^2 + 4 \varepsilon v_0(\tau)^3 v_2(\tau)\right) p^3 + \left(\frac{d}{d\tau} v_2(\tau) + v_2(\tau) + 4 \varepsilon v_0(\tau)^3 v_1(\tau)\right) p^2 + \left(\frac{d}{d\tau} \theta_0(\tau) + \theta_0(\tau) + \varepsilon v_0(\tau)^4 + \frac{d}{d\tau} v_1(\tau) + v_1(\tau)\right) p + \frac{d}{d\tau} v_0(\tau) - \left(\frac{d}{d\tau} \theta_0(\tau)\right) - \theta_0(\tau) + v_0(\tau) \tag{۵۹-۱}$$

$$p^0 \rightarrow \frac{dv_0}{d\tau} + v_0 = 0 \tag{۶۰-۱}$$
$$\tau = 0 \rightarrow v_0 = 1$$

$$p^1 \rightarrow \frac{dv_1}{d\tau} + v_1 + \varepsilon v_0^4 = 0 \tag{۶۱-۱}$$
$$\tau = 0 \rightarrow v_1 = 0$$

$$p^2 \rightarrow \frac{dv_2}{d\tau} + v_2 + 4\varepsilon v_0^3 v_1 = 0 \tag{۶۲-۱}$$
$$\tau = 0 \rightarrow v_2 = 0$$

حل این معادلات منجر به جواب‌های زیر خواهد شد.

$$v_0 = e^{-\tau} \tag{۶۳-۱}$$

$$v_1 = \frac{\varepsilon}{3}(e^{4\tau} - e^{-\tau}) \tag{۶۴-۱}$$

$$v_2 = \frac{2}{9}\varepsilon^2 (e^{-\tau} - 2e^{-4\tau} + e^{-7\tau}) \tag{۶۵-۱}$$

$$\theta = (v_0 + pv_1 + ...)_{p\to 1} = e^{-\tau} + \frac{1}{3}\varepsilon(e^{4\tau} - e^{-\tau}) + \frac{2}{9}\varepsilon^2(e^{-\tau} - 2e^{-4\tau} + e^{-7\tau}) \quad (۱-۶۶)$$

که جواب معادله می باشد.

مثال دوم:

مثال دوم حل معادله حاکم بر رسانش[۱] یک‌بعدی در یک قطعه به ضخامت L که از ماده‌ای ساخته شده است که درجه حرارت آن وابسته به ضریب انتقال حرارت k می‌باشد. فرض بر این است که دو طرف ماده در دماهای ثابت T_1, T_2 که $T_1 > T_2$ است، قرار دارند. معادله کنترل و شرایط مرزی حاکم بر آن به صورت زیر است[۲۰].

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(k\frac{dT}{dx}) = 0 \\ &x = 0 \to T = T_1 \\ &x = L \to T = T_2 \end{aligned} \quad (۱-۶۷)$$

چنانچه هدایت گرمایی با دما بنا به معادله زیر تغییر کند:

$$k = k_2[1 + \beta(T - T_2) \quad (۱-۶۸)$$

که k_2 ضریب هدایت حرارتی در دمای T_2 و β یک ثابت می‌باشد.

پارامترهای بی‌بعد زیر ساخته می شوند.

$$\theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \quad (۱-۶۹)$$

$$\varepsilon = \beta(T_1 - T_2) = \frac{k_1 - k_2}{k_2} \quad (۱-۷۰)$$

---

۱ - *Conduction*

$$X = \frac{x}{L} \tag{۷۱-۱}$$

معادله کنترل به شکل زیر در می‌آید[۲۰].

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dX}[(1+\varepsilon\theta)\frac{d\theta}{dX}] = 0 \\ &X = 0 \rightarrow \theta = 1 \\ &X = 1 \rightarrow \theta = 0 \end{aligned} \tag{۷۲-۱}$$

و فرم هموتوپی آن نیز به شکل زیر می باشد:

$$H[v,p] = L(v) - L(\theta_0) + pL(\theta_0) + p[\varepsilon\theta\frac{d^2\theta}{dX^2} + \varepsilon(\frac{d\theta}{dX})^2] = 0 \tag{۷۳-۱}$$

$$L(v) = \frac{d^2v}{dX^2} \tag{۷۴-۱}$$

$$L(\theta_0) = \frac{d^2\theta_0}{dX^2} \tag{۷۵-۱}$$

با فرض $\frac{d^2\theta_\circ}{dX^2} = 0$ و جاگذاری $v = v_\circ + v_1 p + v_2 p^2 + \dots$ در معادله (۱-۷۳) و جداسازی توانهای

p و معادل صفر قرار دادن آنها معادلات ذیل ظاهر می شوند.

$$\begin{aligned} &p^0 \rightarrow \frac{d^2v_0}{dX^2} = 0 \\ &X = 0 \rightarrow v_0 = 1 \\ &X = 1 \rightarrow v_0 = 0 \end{aligned} \tag{۷۶-۱}$$

$$\begin{aligned} &p^1 \rightarrow \frac{d^2v_1}{dX^2} + \varepsilon(v_0\frac{d^2v_0}{dX^2} + (\frac{dv_0}{dX})^2) = 0 \\ &X = 0 \rightarrow v_0 = 0 \\ &X = 1 \rightarrow v_0 = 0 \end{aligned} \tag{۷۷-۱}$$

$$\begin{aligned} &p^2 \rightarrow \frac{d^2v_2}{dX^2} + \varepsilon(v_0\frac{d^2v_1}{dX^2} + v_1\frac{d^2v_0}{dX^2} + 2\frac{dv_0}{dX}\frac{dv_1}{dX} = 0 \\ &X = 0 \rightarrow v_2 = 0 \\ &X = 1 \rightarrow v_2 = 0 \end{aligned} \tag{۷۸-۱}$$

وجواب های زیر بدست می‌آید.

$$v_0 = -X + 1 \tag{۷۹-۱}$$

$$v_1 = -\frac{\varepsilon}{2}X^2 + \frac{\varepsilon}{2}X \qquad (۸۰-۱)$$

$$v_2 = \varepsilon^2(-\frac{1}{2}X^3 + X^2) - \frac{\varepsilon^2}{2}X \qquad (۸۱-۱)$$

$$\theta = -X + 1 - \frac{\varepsilon}{2}X^2 + \frac{\varepsilon}{2}X + \varepsilon^2(-\frac{1}{2}X^3 + X^2) - \frac{\varepsilon^2}{2}X \qquad (۸۲-۱)$$

۱-۳- روش حساب تغییرات تکراری« VIM »

در سال ۱۹۷۸ اینوکوتی[۱] برای اولین بار روش عمومی ضرایب لاگرانژ[۲] را برای حل معادلات موجود در مکانیک محیط‌های پیوسته پیشنهاد کرد[۲۲]. مشخصه کلی این روش عبارت است از:

- حل مساله ریاضی با استفاده از فرض خطی‌سازی و به کارگیری تقریب اولیه در تابع آزمایشی صورت می‌گیرد.
- سپس تقریبی با دقت بالاتر در برخی نقاط خاص حاصل می‌گردد.

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$Lu + Nu = g(x) \qquad (۸۳-۱)$$

L یک عملگر خطی و N یک عملگر غیرخطی می‌باشند. با فرض اینکه $u_{\circ}(x)$ جواب قسمت خطی مسأله باشد «$Lu = 0$»، عبارتی برای اصلاح مقدار نقاط خاص- برای مثال $-x = 1-$ بدست می‌آید[۲۳-۲۲].

$$u_{cor}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda(Lu_0 + Nu_0 - g)dx \qquad (۸۴-۱)$$

که در آن λ ضریب عمومی لاگرانژ است که بصورت بهینه از طریق تئوری تغییرات[۱] مشخص می‌گردد[۲۳]. جمله دوم معادله سمت راست را تصحیح کننده[۲] می‌نامند.

۱- *Inokuti*

۲- *Lagrange*

روش حساب تغییرات تکراری[۳] برای اولین بار توسط هی در سال ۱۹۹۷ ارائه گردید [۲۴] و برای یک سری معادلات معمولی و معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی PDE غیرخطی از جمله معادله دیفرانسیل معمولی دافینگ از مرتبه غیرخطی درجه سوم مورد استفاده قرار گرفت. پس از آن در سال ۲۰۰۰ این روش را برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی با عوامل غیرخطی از نوع ضرایب کانولوشن[۴] به کار گرفت [۲۵] وی در همین سال از این روش در حل معادلات بلازیوس[۵] [۲۶] و معادله نفوذ جریان با مشتقات کسری در اجسام متخلخل[۶] [۲۷] نیز استفاده کرد. در سال ۲۰۰۰ با استفاده از روش VIM دینامیک سیستم غیرخطی یاتاقان غلطشی[۷] را مورد مطالعه قرار داد و جواب تحلیلی معادله مسیو[۸] را بدست آورد [۲۸]وی در همان سال این روش را برای سیستمهای معادلات دیفرانسیل معمولی مستقل به کار گرفت[۲۹]. وی در سال ۲۰۰۶ مفاهیم روش حساب تغییرات تکراری و کاربرد آن در نوسان‌سازهای غیرخطی به گونه‌ای سیستماتیک تشریح کرد [۳۰] به جز او ابوالوفا[۹] در سال ۲۰۰۵ در تحلیل سیال غیرخطی درون لوله [۳۱] و گنجی در سال ۲۰۰۷ در حل مسایل انتقال حرارت غیرخطی[۱۵] از این روش استفاده کردند.

۱-۳-۱- اساس روش حساب تغییرات تکراری

۱- *Varial theory*

۲- *Corrective*

۳- *Variational Iteration Method*

۴- *Convolution*

۵- *Blasius*

۶- *Porous*

۷- *Rotating*

۸- *Mesio*

۹- *Abolvafa*

هی در مقاله‌ای در سال ۱۹۹۹ به اصلاح روش بیان شده توسط اینوکوتی به صورت زیر پرداخت[۲۳].

$$u_{cor}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda(Lu_0 + Nu_0 - g)dx \qquad (۸۵-۱)$$

که $u_\circ(x)$ یک تقریب اولیه[۱] با مجهولات مشخص می‌باشد. برای هر $x_\circ$ دلخواه معادله (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت[۱۵,۲۳].

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda\{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\}d\xi \qquad (۸۶-۱)$$

معادله(۱-۸۶) یک تابع اصلاح[۲] نامیده می‌شود. روش اصلاح شده VIM دارای مزایایی مانند کارایی، سادگی کاربرد، دقت بالا برای بسیاری از معادلات غیرخطی و سرعت بالای همگرایی می‌باشد.

مساله مهم در استفاده از این روش تعیین ترم اولیه $u_\circ(t)$ است. زیرا این ترم به صورت اختیاری انتخاب می‌گردد و باید در شرایط مرزی داده شده معادله صدق کند. بهترین حالت برای این انتخاب، انتخاب یک تابع از درجه مناسب با ثوابت معین است که با توجه به بالاترین درجه معادله دیفرانسیل تعیین می‌شود[۱۵].

پیدا نمودن λ یکی از مسایل مهم در این روش می‌باشد. محاسبه λ که افزاینده لاگرانژ نام دارد تأثیر زیادی در سرعت همگرایی جواب‌های معادله داشته و اولین بار توسط هی [۲۳] تکمیل شده و توسط دهقان[۳] [۳۲] و دومیری گنجی [۱۵]توسعه داده شد. در روش اصلاح شده‌ای که توسط گنجی [۳۳-۲۰] ارائه شده بدون نیاز به حل دستی، ضریب λ محاسبه شده و در فرمول VIM قرار می‌گیرد.

---

[۱] - *Initial approximation*

[۲] - *Correction function*

[۳] - *Dehghan*

در جدول(۱-۱) برای برخی از معادلات مقدار λ محاسبه شده نمایش داده می‌شود. همچنین در مقاله ای [۳۴] کُد محاسبه این ضریب نوشته شده است.

جدول(۱-۱): مقایسه بدست آمده افزاینده لاگرانژ از کد نوشته شده[۳۴] و منابع دیگر

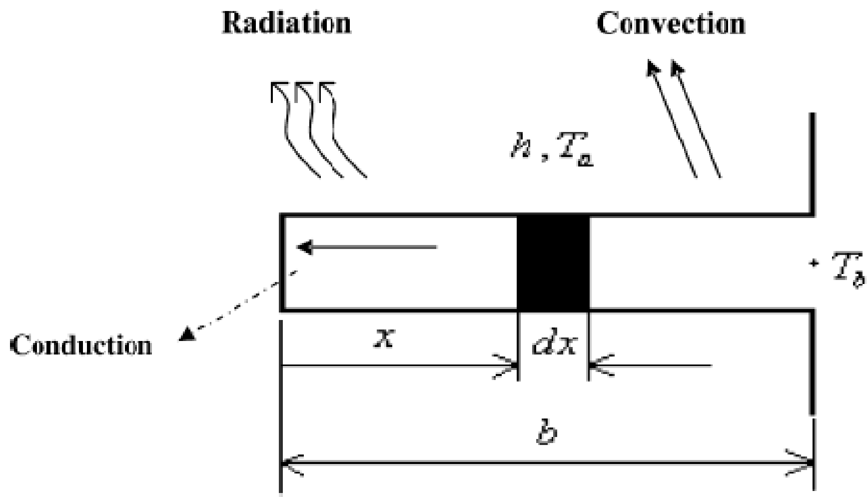
Table 2. Comparisons between λ 's obtained using the program and λ 's calculated in different published articles.

No.	equation	Linear part of equation	λ in article	λ obtain from program	Ref
1	$y''+\omega^2 y=f(t)$	$y''+\omega^2 y-f(t)$	$\lambda=\frac{1}{\omega}\sin\omega(\tau-t)$	$\lambda=-\frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega}$	[1]
2	$y''+\omega^2\tilde{y}=0$	y''	$\lambda=\tau-t$	$\lambda=\tau-t$	[1]
3	$T''+T+x=0$	$T''+T+x$	$\lambda=\sin(s-x)$	$\lambda=-\sin(x-s)$	[2]
4	$[1+\varepsilon u]u'+u=0$	$u'+u$	$\lambda=-e^{(\tau-t)}$	$\lambda=-e^{(-t+\tau)}$	[10]
5	$u_t+i\,u_{xx}=0$	u_t	$\lambda=-1$	$\lambda=-1$	[8]
6	$i\,u_t+u_{xx}+2\|u\|^2u=0$	$i\,u_t$	$\lambda=i$	$\lambda=-\frac{1}{i}$	[8]
7	$u'''+\frac{1}{2}uu''=0$	u'''	$\lambda=-\frac{1}{2}(\zeta-x)^2$	$\lambda=-\frac{1}{2}(x-\zeta)^2$	[9]
8	$x'-\tilde{x}(a-by)=0$	x'	$\lambda_1=-1$	$\lambda_1=-1$	[11]
	$y'+\tilde{y}(c-dx)=0$	y'	$\lambda_2=-1$	$\lambda_2=-1$	

۱-۳-۲- تشریح روش حساب تغییرات تکراری با ذکر مثال

مثالی که با آن به بررسی الگوریتم روش VIM پرداخته شود به شرح زیر می‌باشد.انتقال حرارت یک‌بعدی در یک فین مستقیم به طول L و مقطع عرضی A و محیط p را در نظر بگیرید. سطح فین گرما را از دو طریق رسانش و تشعشع[۱] منتقل می‌کند. (شکل(۱-۳) را ببینید).

۱- *Radiation*



شکل(۱-۳): انتقال حرارت در یک فین مستقیم[۳۵]

دمای هوای اطراف T_a، دمای جذب موثر[۱] برای انتقال حرارت تشعشعی T_s است. همچنین دمای پایه فین T_b می‌باشد و انتقال حرارتی از نوک فین وجود ندارد. همچنین فرض شده است که ضریب انتقال حرارت جابجایی h و ضریب قابلیت نشر سطح[۲] E_g ثابت‌اند. در حالی که ضریب رسانش k می‌تواند تغییر کند. معادله انرژی و شرایط مرزی برای فین به صورت زیر است[۳۵].

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)-\frac{hp}{A}(T-T_a)-\frac{E_g\sigma}{A}(T^4-T_s^4)=0\\
&x=0\rightarrow\frac{dT}{dx}=0\\
&x=L\rightarrow T=T_b
\end{aligned} \qquad (۸۷-۱)$$

k یک تابع خطی از درجه حرارت به شکل زیر است.

$$k=k_a(1+\beta(T-T_a)) \qquad (۸۸-۱)$$

۱- *Effective Sink Temprature*

۲- *Emissivity coefficient of surfase*

بی‌بعدسازی و تغییر پارامترها به طریق ذیل می باشد.

$$\theta = \frac{T}{T_b} \quad (۸۹-۱)$$

$$\theta_a = \frac{T_a}{T_b} \quad (۹۰-۱)$$

$$\theta_s = \frac{T_s}{T_b} \quad (۹۱-۱)$$

$$X = \frac{x}{L} \quad (۹۲-۱)$$

$$N^2 = \frac{hpL^2}{k_a A} \quad (۹۳-۱)$$

$$\varepsilon_1 = \beta T_b \quad (۹۴-۱)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{E_g \sigma T_b^3 p L^3}{k_a A} \quad (۹۵-۱)$$

و بدین‌گونه معادله (۱-۸۷) به فرم زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dX}\{[1+\varepsilon_1(\theta-\theta_a)]\frac{d\theta}{dX}\} - N^2(\theta-\theta_a) - \varepsilon_2(\theta^4-\theta_s^4) = 0 \\ &X = 0 \rightarrow \frac{d\theta}{dX} = 0 \\ &X = 1 \rightarrow \theta = 1 \end{aligned} \quad (۹۶-۱)$$

با فرض $\theta_a = \theta_s = 0$ داریم.

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} - N^2\theta + \varepsilon_1(\frac{d\theta}{dX})^2 + \varepsilon_1\theta\frac{d^2\theta}{dX^2} - \varepsilon_2\theta^4 = 0 \quad (۹۷-۱)$$

مطابق روش VIM، تابع تصحیح معادله قبل به فرم زیر ساخته می‌شود.

$$\theta_{n+1}(x) = \theta_n(x) + \int_0^x \lambda(\theta_n''(t) - N^2\theta_n(t) + \varepsilon_1(\theta_n'(t))^2 + \varepsilon_1(\theta_n(t)\theta_n''(t)) - \varepsilon_2\theta_n^4(t))dt \qquad (۹۸-۱)$$

که λ افزاینده لاگرانژ عمومی است. با استفاده از روش توضیح داده شده[۳۴]، با حل معادلات زیر به λ دست می‌یابیم.

$$\begin{aligned} &\lambda''(t) - N^2\lambda(t) = 0 \\ &1 - \lambda'(t)_{t=x} = 0 \\ &\lambda(t)_{t=x} = 0 \end{aligned} \qquad (۹۹-۱)$$

و λ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{N(x-t)} - e^{N(t-x)}}{N}\right] \qquad (۱۰۰-۱)$$

با جاگذاری λ بدست آمده در معادله (۱-۹۸) و در نظر گرفتن این نکته که $\theta_n(x)$ بایستی شرایط مرزی را ارضا کنند ضریب دیگری به نام c_n معرفی می‌گردد که باید در هر موضوع آشفتگی معین گردد.

$$\theta_{n+1}(x) = C_n\left(\begin{aligned} &\theta_n(x) - \int_0^x \frac{1}{2}\frac{e^{N(x-t)} - e^{N(t-x)}}{N}\{\theta_n''(t) - N^2\theta_n(t) + \varepsilon_1(\theta_n'(t))^2 \\ &+ \varepsilon_1(\theta_n(t)\theta_n''(t)) - \varepsilon_2\theta_n^4(t)\}dt \end{aligned}\right) \qquad (۱۰۱-۱)$$

حدس اولیه دلخواهی که شرایط اولیه را ارضا کند به شکل زیر است.

$$\theta_0(x) = \mathrm{sec}h(N)\cosh(Nx) \qquad (۱۰۲-۱)$$

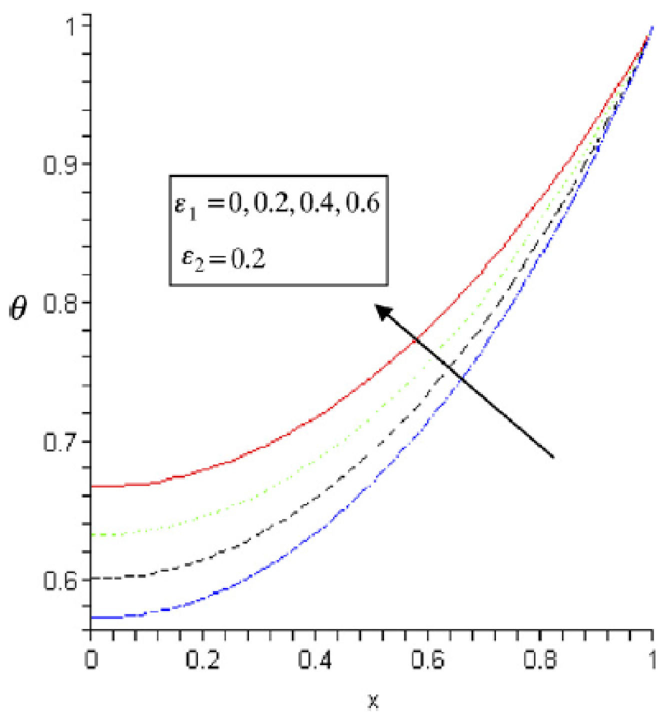
و با استفاده از تکنیک VIM برای $\theta_n(x)$ جواب ذیل حاصل می گردد.

$$\theta_1(x) = C_0\left(\begin{aligned} &\theta_0(x) - \int_0^x \frac{1}{2}\frac{e^{N(x-t)} - e^{N(t-x)}}{N}\{\theta_0''(t) - N^2\theta_0(t) + \varepsilon_1(\theta_0'(t))^2 \\ &+ \varepsilon_1(\theta_0(t)\theta_0''(t)) - \varepsilon_2\theta_0^4(t)\}dt \end{aligned}\right) \qquad (۱۰۳-۱)$$

با قرار دادن مقدار $\theta(x)$ در معادله فوق معادله (۱-۱۰۴) به شکل زیر بدست می آید.

$$\theta_1(x) = C\left(\operatorname{sech}(N)\cosh(Nx) + \frac{1}{240(N^2\cosh^4(N)}\left(\begin{array}{l} 40e^{(5Nx)}\varepsilon_1 N^2\cosh^2(N) - 24e^{(3Nx)}\varepsilon_2 + 40e^{(3Nx)}\varepsilon_1 N^2\cosh^2(N) - \\ 24e^{(5Nx)}\varepsilon_2 - 120\varepsilon_1 N^2\cosh^2(N)e^{(4Nx)} - 120\varepsilon_2 e^{(2Nx)} + \\ 20\varepsilon_1 N^2 e^{(6Nx)}\cosh^2(N) - 90\varepsilon_2 e^{(4Nx)} + 20\varepsilon_1 N^2 e^{(2Nx)} \\ \cosh^2(N) - 20\varepsilon_2 e^{(6Nx)} - \varepsilon_2 e^{(8Nx)} - \varepsilon_2)e^{(-4Nx)} \end{array}\right)\right)$$

شکل (۱-۴) پخش حرارت را در فین به ازای N=۱ نشان می‌دهد:



شکل(۱-۴):تابع پخش حرارت در فین به ازای پارامتر های کوچک مختلف

۱-۴- روش تجزیه آدومیان

روش تجزیه آدومیان[۱] توسط ج . آدومیان[۲] در دهه ۸۰ میلادی برای حل مسایل مختلف از جمله مسایل غیرخطی ارائه شد. صورت بهینه شده روش آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیلی خطی منحصر به فرد و غیر منحصر به فرد[۳] به کار گرفته شده است[۳۵].

۱-۴-۱- اساس روش تجزیه آدومیان:

معادله‌ای به فرم کلی $F_u = g(t)$ را در نظر بگیرید که F معادلـه دیفرانسـیل غیرخطـی معمـولی بـا ترم‌های خطی و غیرخطی می‌باشد. قسمت خطی معادله با Lu نمـایش داده مـی شـود کـه L اپراتـور خطی مسأله می‌باشد. انتخاب L به گونه‌ای باید باشد که این اپراتور به راحتی وارون‌پذیر[۴] باشـد. حـال قسمت خطی مسأله با $Lu + Ru$ نمایش داده شده که L بالاترین مرتبه مشتق موجود در ترم خطـی می‌باشد. با انتخاب بالاترین مرتبه مشتق به عنوان اپراتور، وارون این عملگر (L^{-1}) به صورت انتگـرال هم مرتبه با بالاترین مرتبه مشتق حاصل می‌شود. ترم‌های باقیمانـده از قسـمت خطـی مسـأله بـا R نمایش داده می شود. ترمهای غیرخطی مسأله با Nu نمایش داده می‌شوند. بنابراین فرم کلـی معادلـه به صورت زیر است.

$$Lu + Ru + Nu = g \qquad (۱۰۵-۱)$$

از معادله فوق می توان نوشت .

۱- *Adomian Decomposition Method*

۲- *G.Adomian*

۳- *Non – Singular*

۴- *invertible*

$$Lu = g - Ru - Nu \qquad (۱-۱۰۶)$$

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \qquad (۱-۱۰۷)$$

برای مسایل مقدار اولیه، اپراتور L^{-1} برای $L=\frac{d^n}{dt^n}$ به صورت انتگرال مرتبه $n-th\ Order$ از ۰ تا t می‌باشد. برای مثال برای اپراتور $L=\frac{d^2}{dt^2}$ می توان نوشت.

$$L^{-1}Lu = u - u(0) - tu'(0) \qquad (۱-۱۰۸)$$

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \qquad (۱-۱۰۹)$$

در مورد مسایل مقدار مرزی عملگر مشابهی به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید L^{-1} یک انتگرال نامحدود باشد. $u = A + Bt$ همان $u(\circ)$ می‌باشد که مقادیر $A\ \&\ B$ باید از شرایط مرزی بدست آیند. فرم کلی جواب به صورت $u=\sum_{n=\circ}^{\infty}u_n$ می‌باشد. در نهایت با فـرض اینکـه Nu یک عبارت تحلیلی است می‌توان Nu را به صورت $N_u=\sum_{n=\circ}^{\infty}A_n(u_\circ,u_1,...,u_\circ)$ در نظر گرفت که A_n همان چند جمله‌ای آدومیان[۱] برای عبارت غیرخطی خاص می‌باشند. این جملات فقط بـه مقـادیر $u_\circ$ تا u_n بستگی دارند و یک سری با همگرایی سریع را تشکیل می‌دهند. A_n به صورت زیـر تعریـف می‌شود[۳۶].

۱- $Adomian's\ \ polynomials$

$$A_0 = f(u_0)$$
$$A_1 = u_1(\frac{d}{du_0} f(u_0))$$
$$A_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^2} f(u_0)\right) \tag{۱۱۰-۱}$$
$$A_3 = u_3\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + u_1 u_2\left(\frac{d^2}{du_0^2} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^3}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^3} f(u_0)\right)$$

.

.

.

و فرم کلی چند جمله‌ای آدومیان به صورت $A_n = \sum_{v=1}^{\circ} C(v,n) f^{(v)}(u_\circ)$ می‌باشد.

در حالت خطی که $f(u) = u$ می‌باشد، A_n به u_n تبدیل می‌شود برای مثال اگر $f(u) = u^2$ باشد آنگاه $A_\circ = u_\circ^2$ و $A_1 = 2u_\circ u_1$ و $A_2 = u_1^2 - 2u_\circ u_2$ و $A_3 = 2u_1 u_2 + 2u_\circ u_3$ ... است. نکته قابل توجه این است که در عبارت‌های بالا مجموع زیرنویس‌های هر یک از ترم‌های جملات آدومیان A_n برابر n می‌باشد. امروزه ثابت شده است که مجموع $\sum_{n=\circ}^{\infty} A_n$ بر N_u برابر مجموع سری عمومی تیلور[۱] حول نقطه $u_\circ(x)$ می‌باشد که $\sum_{n=\circ}^{\infty} u_n$ برابر با سری عمومی تیلور حول نقطه $u_\circ$ است. این سری‌ها با سرعت $\frac{1}{(mn)!}$ به سمت صفر میل می‌کنند که m بالاترین ترم خطی معادله می‌باشد. جواب یک معادله غیرخطی که به روش آدومیان حل می‌شود به فرم زیر است[۳۷-۳۶].

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} R \sum_{N=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{۱۱۱-۱}$$

بسط معادله بالا به صورت زیر است.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = u_0 - L^{-1} R \sum_{N=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{۱۱۲-۱}$$

۱ - *Taylor*

که نتایج زیر را بدست می دهد.

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \qquad (۱-۱۱۳)$$

$$u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \qquad (۱-۱۱۴)$$

از آنجا که A_0 فقط بستگی به u_0 دارد[۳۶] ترم‌های دیگر به راحتی حاصل می‌شوند. A_1 به u_0 و u_1 بستگی دارد. و A_2 به u_0, u_1, u_2 و ... بسته به دقت مورد نظر می‌توان سری آدومیان را تا تعداد جملات دلخواه برای حل مورد نظر تولید کرد. همگرایی این سری بوسیله یرس شارلوت[۱] به اثبات رسیده است[۳۶].

برای اینکه نشان داده شود که سری حاصل از چند جمله‌ای‌های آدومیان یک فرم عمومی از سری تیلور را تشکیل می‌دهند، معادله (۱-۱۱۵) بکار می رود.

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \begin{pmatrix} f(u_0) + u_1 f^{(1)}(u_0) + (u_1{}^2/2!) f^{(2)}(u_0) + \\ u_2 f^{(1)}(u_0) + u_3 f^{(1)}(u_0) + \\ u_1 u_2 f^{(2)}(u_0) + (u_1{}^3/3!) f^{(3)}(u_0) + \ldots \end{pmatrix} \qquad (۱-۱۱۵)$$

که می‌تواند به صورت زیر مرتب شود.

$$\begin{aligned} & f(u) = f(u_0) + (u_1 + u_2 + \ldots) f^{(1)}(u_0) + [(u_1{}^2/2!) + u_1 u_2 + \ldots] f^{(2)}(u_0) + \ldots = \\ & f(u_0) + [(u-u_0)/1!] f^{(1)}(u_0) + [(u-u_0)^2/2!] f^{(2)}(u_0) + \ldots = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} [(u-u_0)^n/n!] f^{(n)}(u_0) \end{aligned} \qquad (۱-۱۱۶)$$

که عبارت بالا سری تیلور حول نقطه موردنظر می‌باشد،

فرمول چگونگی بدست آوردن جملات سری آدومیان توضیح داده شد، به عنوان مثال سری آدومیان برای چند تابع دلخواه به صورت زیر است[۳۷-۳۶].

$$Nu = u^3$$

---

[۱] - *Yres cherruault*

$$A_0 := u_0^3$$

$$A_1 := 3\,u_0^2\,u_1$$

$$A_2 := 3\,u_0\,u_1^2 + 3\,u_0^2\,u_2$$

$$A_3 := u_1^3 + 6\,u_0\,u_1\,u_2 + 3\,u_0^2\,u_3$$

$$A_4 := 3\,u_1^2\,u_2 + 3\,u_0\,u_2^2 + 6\,u_0\,u_1\,u_3 + 3\,u_0^2\,u_4$$

$$A_5 := 3\,u_1\,u_2^2 + 3\,u_1^2\,u_3 + 6\,u_0\,u_2\,u_3 + 6\,u_0\,u_1\,u_4 + 3\,u_0^2\,u_5$$

(۱۱۷-۱)

$$Nu = u^5$$

$$A_0 := u_0^5$$

$$A_1 := 5\,u_0^4\,u_1$$

$$A_2 := 10\,u_0^3\,u_1^2 + 5\,u_0^4\,u_2$$

$$A_3 := 10\,u_0^2\,u_1^3 + 20\,u_0^3\,u_1\,u_2 + 5\,u_0^4\,u_3$$

$$A_4 := 5\,u_0\,u_1^4 + 30\,u_0^2\,u_1^2\,u_2 + 10\,u_0^3\,u_2^2 + 20\,u_0^3\,u_1\,u_3 + 5\,u_0^4\,u_4$$

$$A_5 := u_1^5 + 20\,u_0\,u_1^3\,u_2 + 30\,u_0^2\,u_1\,u_2^2 + 30\,u_0^2\,u_1^2\,u_3 + 20\,u_0^3\,u_2\,u_3 + 20\,u_0^3\,u_1\,u_4 + 5\,u_0^4\,u_5$$

....

ذکر این نکته در اینجا ضروری است که روش آدومیان یکی از قویترین روش‌های تحلیلی موجود بـرای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد که علاوه بر حل معادلات دیفرانسیل چند بعدی «معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی» را نیز دارا می‌باشد. روش آدومیـان دارای فـرم‌هـای بهینـه شـده‌ای نیـز

می‌باشد که در این بحث به آن پرداخته نشده است. از جمله قابلیت‌های دیگر این روش قابلیت حل مسائل با شرایط مرزی نیومان[1] و نیز شرط مرزی انتگرالی می‌باشد.

۱-۴-۲- تشریح روش تجزیه آدومیان باذکر مثال

حل معادله فالکنر- اسکن[2] برای یک گوه(شکل (۱-۵):

فرض کنید معادله‌ی بی‌بعد شده‌ای به صورت زیر موجود است[۳۷].

$$\begin{aligned} &f''' + ff'' + \beta\left(1 - f'^2\right) = 0 \\ &\eta = 0 \rightarrow f = 0, f' = 0 \\ &\eta \rightarrow \infty : f' \rightarrow 1 \end{aligned} \qquad (۱۱۸-۱)$$

مطابق روش آدومیان، بالاترین مرتبه مشتق قسمت خطی معادله بصورت زیر است.

$$L = \frac{d^3 f}{d\eta^3} \qquad (۱۱۹-۱)$$

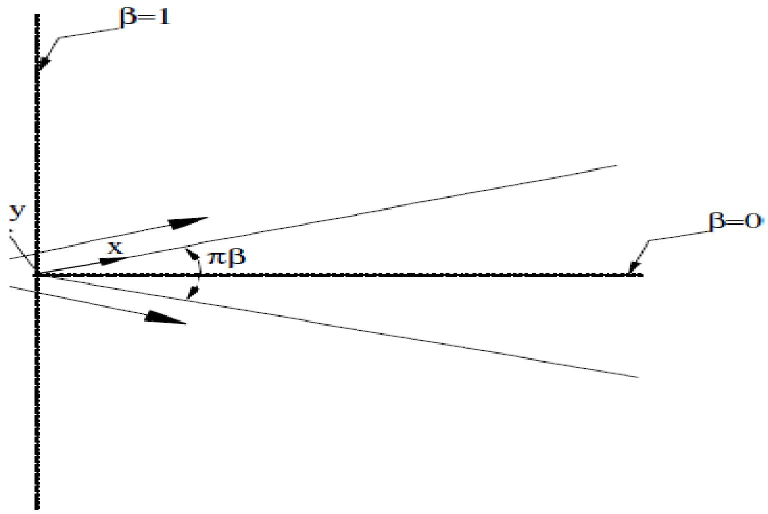
و با توجه به توضیحات بکار رفته در الگوریتم این روش می توان نوشت.

$$Lf = -ff'' - \beta(1 - f'^2) \qquad (۱۲۰-۱)$$

$$L^{-1}Lf = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \frac{d^3 f}{d\eta^3} d\eta = f(\eta) - f(0) - \eta f'(0) - \frac{1}{2}\eta^2 f''(0) \qquad (۱۲۱-۱)$$

۱- *Neumann*

۲- *Falkner – Skan*



شکل (۱-۵): شکل مربوط به مثال روش آدومیان[۳۶]

$$f(\eta)=f(0)+\eta f'(0)+\frac{1}{2}\eta^{2}f''(0)+L^{-1}(-ff''-\beta(1-f'^{2})) \qquad (۱۲۲-۱)$$

با فرض این که $f''(0)=\alpha$ و توجه به این که دو ترم اول سمت راست معادله فوق بنا به شرایط مرزی مساله صفراست می توان نوشت.

$$f(\eta)=\frac{1}{2}\alpha\eta^{2}+L^{-1}(-ff''-\beta(1-f'^{2})) \qquad (۱۲۳-۱)$$

آدومیان بیان نمود :

$$f(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n}(\eta) \qquad (۱۲۴-۱)$$

همچنین بنا به الگوریتم روش ترم غیرخطی معادله که شامل $(-ff''-\beta(1-f'^{2})$ می‌باشد می‌تواند به صورت سری به شکل $N f(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}$ نوشته شود. چند جمله‌ای‌های آدومیان از فرمول‌های (۱-۱۱۰) بدست می‌آید که برای این مثال به فرم زیر می‌باشد[۳۶].

$$A_0 = -f_0 f_0'' - \beta(1 - f_0'^2)$$

$$A_1 = -f_0 f_0'' - f_0 f_1'' - 2\beta f_0' f_1'$$

$$A_2 = -f_2 f_0'' - f_1 f_1'' - f_0 f_2'' - \beta f_1'^2 - 2\beta f_0' f_2' \qquad (۱۲۵-۱)$$

$$A_3 = -f_3 f_0'' - f_2 f_1'' - f_1 f_2'' - f_0 f_3'' - 2\beta f_1' f_2' - 2\beta f_0' f_3'$$

$$A_4 = f_4 f_0'' - f_3 f_1'' - f_2 f_2'' - f_1 f_3'' - f_0 f_4'' - \beta f_2'^2 - 2\beta f_1' f_3' - 2\beta f_0' f_4'$$

با تعریف $f_\circ = \frac{1}{2}\alpha\eta^2 - \frac{1}{6}\beta\eta^3$ و از آنجایی که دو سمت معادله (۱-۱۱۲) در صورتی با هـم برابرنـد که جملات متناظر سری‌های دو سمت با هم مساوی باشند، لذا رابطه زیر صادق است.

$$f_{n+1}(\eta) = L^{-1}(A_n) \qquad n = 0,1,2,... \qquad (۱۲۶-۱)$$

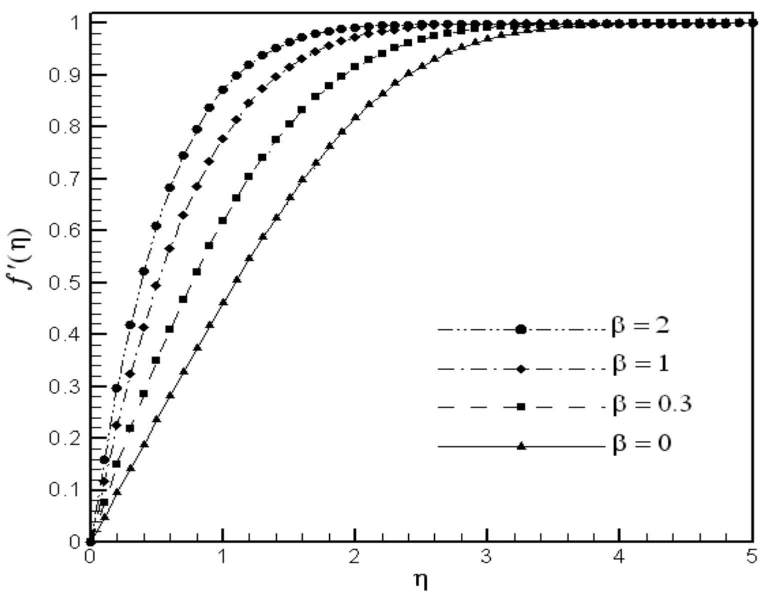
با جاگذاری A_n از معادلات (۱-۱۲۵) در معادله (۱-۱۲۶) جواب های زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{2}\alpha\eta^2 - \frac{1}{6}\beta\eta^3 \\
f_1 &= \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{180}\beta^2 - \frac{1}{120}\beta^3\right)\eta^7 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{30}\alpha\beta + \frac{1}{20}\alpha\beta^2\right)\eta^6 + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{24}\alpha^2 - \frac{1}{12}\alpha^2\beta\right)\eta^5 + \frac{1}{6}\beta\eta^3 \\
f_2 &= -\frac{1}{155925}\eta^{11}\beta^3 - \frac{19}{1247400}\eta^{11}\beta^4 - \frac{1}{118800}\eta^{11}\beta^5 + \frac{1}{14175}\eta^{10}\alpha\beta^2 + \frac{19}{113400}\eta^{10}\alpha\beta^3 \\
&\quad + \frac{1}{10800}\eta^{10}\alpha\beta^4 - \frac{1}{4032}\eta^9\alpha^2\beta - \frac{113}{181440}\eta^9\alpha^2\beta^2 - \frac{11}{30240}\eta^9\alpha^2\beta^3 + \frac{11}{40320}\eta^8\alpha^3 + \frac{1}{1260}\eta^8\alpha^3\beta \\
&\quad + \frac{1}{2016}\eta^8\alpha^3\beta^2 + \frac{1}{630}\eta^7\beta^2 + \frac{1}{420}\eta^7\beta^3 - \frac{1}{180}\eta^6\alpha\beta - \frac{1}{120}\eta^6\alpha\beta^2 \\
&\cdots .
\end{aligned} \qquad (۱۲۷-۱)$$

و جواب نهایی به فرم زیر است.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\eta) = f_0 + f_1 + ... \qquad (۱۲۸-۱)$$

در شکل (۱-۶) نمودار تغییرات f' به ازای تغییرات η رسم شده است.



شکل(۱-۶): نمودار تغییرات f' به ازای تغییرات ηبرای β های مختلف

بجز محدودیت انتخاب پارامتر کوچک یا بزرگ در روش پرتوربیشن، مباحث مربوط به بازه همگرایی و نیز کنترل همگرایی جواب های بدست آمده از روش های فوق الذکر، از معایب مهم این متد ها می باشد که نیاز به اصلاح و بهینه سازی دارند. همچنین ارضاء شرایط مرزی بی نهایت با تکنیک های توضیح داده شده نیازمند استفاده از تکنیک های دیگری اضافه بر روش های یاد شده است.یکی از این تکنیک ها، تکنیک *Pade* می باشد که در این پایان نامه به آن پرداخته نشده است.

بررسی مثال نشان داده شده برای تشریح روش آدومیان [۳۷] مشخص می کند که محدوده همگرایی جواب ها در این مثال کوچک بوده و اثری از همگرایی پارامتر بدون بعد $\frac{u}{U}$ به ازای $\eta > 3$ نمی باشد که نشان از محدوده کوچک جواب صحیح دارد. همچنین در فصل بعدی پس از معرفی روش جدیدی در حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی، با ذکر مثالی به مقایسه آن با روش HPM پرداخته و نشان می دهد که بازه همگرایی جواب ها در روش هموتوپی پرتوربیشن کوچک است.

فصل دوم :

روش آنالیز هموتپی

۲-۱- مقدمه ای بر روش آنالیز هموتپی

با وجود کارایی بسیار روش های توضیح داده شده در فصل اول، این روشها ما را در جهت همگرایی حل و نرخ سریهای تقریبی یاری نمی رساند. بطور خلاصه روشهای پرتوربیشن و روشهایی غیر از آن مانند بسط δ، روش پارامتر کوچک ساختگی و روش آدمیان نمی توانند راهی برای تنظیم و کنترل همگرایی حل، افزایش محیط همگرایی و تعداد سریهای تقریبی ارائه دهند. کارایی تقریب معادلات غیرخطی به طور کافی بررسی نشده و لازم است روشهای تحلیلی جدیدی توسعه داده شوندکه دارای مشخصه های زیر باشند :

۱- برای مسائلی با قسمتهای غیرخطی بالا معتبر باشند، حتی اگر این معادلات شامل پارامترهای کوچک و بزرگ نباشد.

۲- راهی مناسب جهت کنترل نمودن همگرایی حل و تعداد سریهای تقریب زده شده ارائه دهند.

۳- این امکان را فراهم آورند که شخص در انتخاب توابع پایه لازم، ضروری و مناسب آزاد باشد.

یک نوع از روشهای تحلیلی، بنام روش آنالیز هموتپی[۱] [۴۲-۳۸] بر اساس هموتپی [۴۳] پیشنهاد شد. ایده هموتپی بسیار آسان و سرراست می باشد. برای مثال ، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$A[u(t)] = 0 \qquad (۲-۱)$$

A اپراتور غیرخطی می باشد، t اشاره به زمان دارد و $u(t)$ متغیر نامعلوم می باشد.فرض کنید $u_0(t)$ معرف حدس اولیه $u(t)$ و L معرف اپراتور خطی کمکی با این خصوصیت باشد که :

$$L(f) = 0 \qquad (۲-۲)$$

---

۱ - *Homotopy Analysis Method*

سپس می توان فرم هموتپی را ساخت:

$$H[\phi(t;q);q]=(1-q)L[\phi(t;q)-u_0(t)]+qA[\phi(t;q)] \qquad (۳-۲)$$

$q\in[0,1]$ یک پارامتر محاط کننده و $\phi(t;q)$ تابعی بر حسب t و q می باشد، هنگامی که $q=0$ و $q=1$ می باشد روابط زیر بر قرار خواهد بود:

$$H[\phi(t;q);q]\Big|_{q=0}=L[\phi(t;0)-u_0(t)] \qquad (۴-۲)$$

و

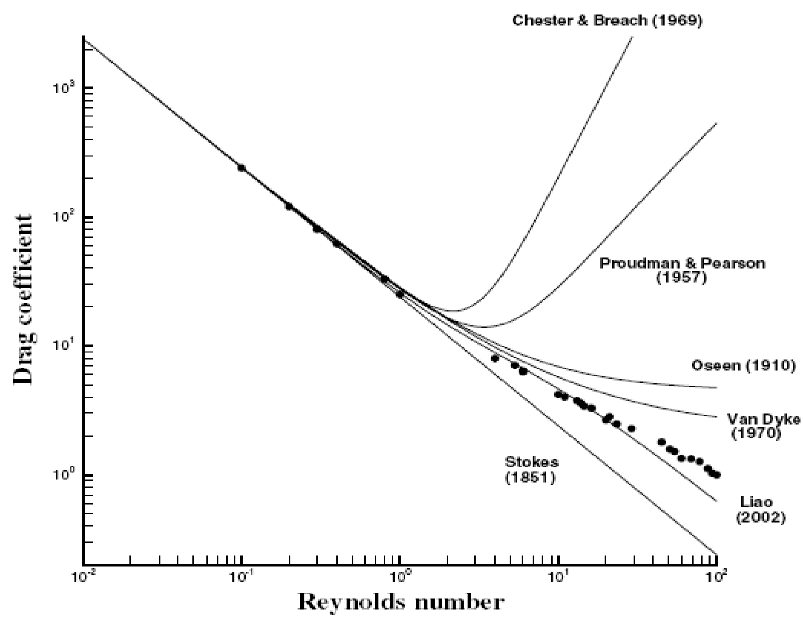
$$H[\phi(t;q);q]\Big|_{q=1}=A[\phi(t;1)] \qquad (۵-۲)$$

با توجه به معادله (۲-۴) واضح می باشد که $\phi(t;0)=u_0(t)$ حل معادله $H[\phi(t;q);q]\Big|_{q=0}=0$ و $\phi(t;1)=u(t)$ حل معادله $H[\phi(t;q);q]\Big|_{q=1}=0$ می باشد.بنابراین هنگامی که پارامتر q از صفر به یک تغییر می کند جواب از حدس اولیه به حل معادله (۲-۱) یعنی $u(t)$ ختم می شود. به عبارت دیگر این تغییرات پیوسته از $u_0(t)$ به $u(t)$ تغییر شکل نامیده می شود.

بر اساس ایده هموتپی بعضی از روشهای عددی مثلاً روش پیوسته و روش پیوسته هموتپی [۴۵-۴۴] توسعه داده شدند. در واقع ، در روش پارامتر کوچک فرضی و روش بسط δ اگر پارامتر فرضی ε یا δ با پارامتر محاط کننده (q) جایگزین گردد می توانند توسط هموتپی تشریح شوند. اگرچه راه حل سنتی ذکر شده در بالا برای ساختن هموتپی شاید از نقطه نظر روشهای عددی کافی باشد، ولی از دیدگاه تحلیلی به اندازه کافی مناسب نیست. به این دلیل که در انتخاب اپراتور دلخواه L و حدس اولیه آزاد هستیم ولی در هدایت این انتخابها قانونی وجود ندارد. مهمتر این که، روش قدیمی برای

ساخت هموتپی نمی تواند یک روش مناسب جهت تشخیص ناحیه همگرایی و تعداد سریهای به کار برده شده جهت تخمین حل مناسب را ارائه دهد.

در این فصل ایده اصلی روش آنالیز هموتپی بر اساس نظر لیائو[1] شرح داده شده [۴] و جهت نشان دادن درستی این روش چهار مسئله ارائه گردیده است. این روش نشان میدهد که محاسبه درگ روی یک کره در جریان یکنواخت با اطلاعات تجربی در یک ناحیه بزرگتر از همه روشهای تئوری قبلی که در صد و پنجاه سال اخیر بدست آمده است مطابقت خیلی خوبی دارد ، شکل (۲-۱).



شکل ۲-۱- مقایسه روش آنالیز هموتپی با روش های تئوری قبلی
جهت محاسبه ضریب درگ روی یک کره[۴]

---

[1] - *Liao*

بطور خلاصه روش هموتپی آنالیز بر اساس جزئیات هموتپی می باشد ولی بجای استفاده از هموتپی قدیمی، لیائو پارامتر کمکی غیرصفر $(\hbar)$ و تابع کمکی $H(t)$ غیرصفر برای ساختن هموتپی جدید به فرم زیر را معرفی می کند.

$$\widetilde{H}\left[\Phi;q,\hbar,H\right]=(1-q)\,L\left[\Phi(t;q,\hbar,H)-u_0(t)\right]+q\,\hbar\,H(t)\,A\left[\Phi(t;q,\hbar,H)\right] \qquad (۶-۲)$$

که بسیار نسبت به معادله (۲-۳) عمومی تر می باشد ، به این دلیل که معادله (۲-۳) تنها یک حالت خاص از رابطه(۲-۶) ، هنگامی که $\hbar=-1$ و $H(t)=1$ است می باشد یعنی :

$$\widetilde{H}\left[\Phi;q,\hbar,H\right]=H\left[\Phi;q,-1,1\right] \qquad (۷-۲)$$

بطور مشابه، هنگامی که q از صفر به یک افزایش پیدا می کند، $\left[\Phi(t;q,\hbar,H)\right]$ از حدس اولیه $u_0(t)$ به سمت جواب دقیق $u(t)$ تغییر می کند، بهرحال $\left[\Phi(t;q,\hbar,H)\right]$ از معادله $\widetilde{H}\left[\Phi(t;q,\hbar,H)\right]=0$ نه تنها بستگی به q دارد بلکه به پارامتر کمکی $\hbar$ و تابع کمکی $H(t)$ نیز بستگی خواهد داشت. بنابراین در $q=1$ حل هنوز به پارامتر $\hbar$ و تابع کمکی $H(t)$ بستگی دارد. بنابراین بر خلاف معادله قدیمی هموتپی ، این روش می تواند یک خانواده از سریهای تقریبی فراهم آورد که ناحیه همگرایی آن بستگی خواهد داشت به پارامتر کمکی $H(t)$ که با استفاده از این دو پارامتر ناحیه همگرایی و تعداد سریهای تقریبی می تواند انتخاب شود.

روش آنالیز هموتپی برای معادلات غیرخطی معمولی و جزئی، عمومی تر و معتبرتر می باشد . این روش در بسیاری از مسائل مهندسی از قبیل نوسان[۱] [۴۶] ، جریانهای لایه مرزی [۴۷] ، انتقال حرارت [۴۸] ، جریانهای ویسکوز در محیط متخلخل [۴۹] ، جریانهای مغناطیسی غیرنیوتنی [۵۰]، موجهای غیرخطی آب [۵۱] و خیلی از مسائل دیگر[۵۲-۶۴] به کار گرفته شده است.

۱- *osccilation*

۲-۲- روش آنالیز هموتوپی

معادله غیر خطی زیر را در نظر بگیرید. بطوری که:

$$N[Z(x,t)] = 0 \qquad (۸-۲)$$

x,t اشاره به متغیر مستقل دارند و $Z(x,t)$ نشان دهنده تابع مجهول می باشد. لیائو با توجه به روش هموتپی فرم مرتبه صفر را این گونه تعریف نمود:

$$(1-p)\,L[\Phi(x,t;p) - Z_0(x,t)] = p\,\hbar\, H(x,t)\, N[\Phi(x,t;p)] \qquad (۹-۲)$$

p پارامتر بسط، $\hbar$ پارامتر کمکی، H تابع کمکی، L اپراتور خطی، $Z_0(x,t)$ حدس اولیه و $\Phi(x,t;p)$ تابع مجهول می باشد. در این روش شخص در انتخاب پارامترها و توابع کمکی دلخواه آزاد است. وقتی p از صفر به یک تغییر می کند، جواب از حدس اولیه بسمت حل دقیق تغییر می نماید.بطوری که:

$$\Phi(x,t;1) = Z(x,t) \text{ و } \Phi(x,t,0) = Z_0(x,t) \qquad (۱۰-۲)$$

اگر $\Phi(x,t;p)$ بسط تیلور داده شود، با توجه به p رابطه زیر بدست می آید :

$$\Phi(x,t;p) = Z_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(x,t)\, p^m \qquad (۱۱-۲)$$

$$Z_m(x,t) = \frac{1}{m!} \left.\frac{\partial^m \Phi(x,t;p)}{\partial p^m}\right|_{p=0} \qquad (۱۲-۲)$$

اگر اپراتور خطی دلخواه ،حدس اولیه و پارامتر کمکی $\hbar$ بنحوی انتخاب گردند که سری تیلور در $p=1$ همگرا شود، آنگاه رابطه زیر برقرار خواهد شد :

$$Z(x,t) = Z_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(x,t) \qquad (۱۳-۲)$$

اگر $\hbar=-1$ انتخاب شود آنگاه معادله(۲-۹) بفرم معادله هموتپی پرتوربیشن تبدیل می شـود. در روش هموتپی پرتوربیشن معادلات بر اساس p بسط داده می شوند.

بردار $\vec{Z}_n$ بشکل زیر تعریف می شود:

$$Z_n=\{Z_0(x,t),\vec{Z_1}(x,t),....Z_n(x,t)\} \qquad (۱۴-۲)$$

اگر از معادله (۲-۹) m بار با توجه به p مشتق گرفته شود و سپس p مساوی صفر قـرار داده شـود و نهایتا بر $m!$ تقسیم شود ، فرم مرتبه m بدست می آید، بطوری که:

$$L[Z_m(x,t)-\chi_m Z_{m-1}(x,t)]=\hbar H(x,t)R_m(\vec{Z}_{m-1}) \qquad (۱۵-۲)$$

$$R_m(\vec{Z}_{m-1})=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}N[\Phi(x,t;p)]}{\partial p^{m-1}} \qquad (۱۶-۲)$$

$$\chi_m=\begin{cases}0 & m\le 1\\ 1 & m>1\end{cases} \qquad (۱۷-۲)$$

معادله تغییر شکل مرتبه m برای $m\ge 1$ صادق بوده و با توجه به شرایط مرزی مسئله قابـل حـل مـی باشد.

۲-۳- بعضی از قوانین اصلی:

همانطور که در بالا گفته شد در انتخاب اپراتور خطی دلخواه (L) و حدس اولیه $V_0(t)$ و تابع کمکی $H(t)$ جهت ساختن فرم تغییر شکل مرتبه صفر آزاد هستیم ولی از نقطه نظر عملی این آزادی بنظر زیاد بوده و لازم است که در جهت هدایت مسئله تعدادی قوانین اصولی وجود داشته باشد. وجود حل تحلیلی جهت بیان حل مسئله توسط توابع پایه مناسب امکان پذیر است. مشخص است که یک تابع حقیقی مانند $f(x)$ می تواند توسط تعداد زیادی توابع پایه تقریب زده شود و بنابراین می تواند موثرتر باشد. نوع توابع پایه جهت موثر بودن در حل مسئله غیرخطی مهم است. خوشبختانه با آزاد بودن در انتخاب متغیرهای ذکر شده حل های زیادی از $V(t)$ حاصل می شود. در بسیاری از موارد با آنالیز کردن فیزیک مسئله و یا حدس اولیه مسئله و یا شرایط مرزی و یا نوع غیرخطی آن می توان فهمید چه نوع توابع پایه جهت حل مسئله مناسب می باشند، برای مثال فرض کنید:

$$\{e_k(t) \mid k = 0,1,2,....\} \qquad (۱۸-۲)$$

$e_k(t)$ به یک دستگاه از توابع پایه برای مسئله داده شده اشاره دارد. می توان حل را به فرم یک سری بیان کرد:

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ e_k(t) \qquad (۱۹-۲)$$

C_n یک ضریب می باشد، در زمانیکه یک دستگاه از توابع پایه مشخص می شود، تابع کمکی $H(t)$ ، حدس اولیه $V_0(t)$ و اپراتور خطی L باید بگونه ای انتخاب شوند که تمامی حل های بدست آمده از فرم تغییر شکل مرتبه بالا بتوانند بوسیله این نوع تابع پایه بیان شوند. این شرط یک قانون اصلی جهت

انتخاب تابع کمکی $H(t)$ ، حدس اولیه $V_0(t)$و اپراتور خطی *(L)* فراهم می آورد که قانون بیان حل نامیده می شود.[1]

۲-۴- کنترل ناحیه همگرایی:

بسیار مهم می باشد که سریهای جواب در یک ناحیه بـه انـدازه کـافی، همگـرا شـوند. بطـور عـام نـرخ سریهای تقریب زده شده و ناحیه همگرایی توسط توابع پایـه مشـخص مـی شـوند. بـر خـلاف روشـهای تحلیلی قبلی در این جا در انتخاب توابع پایه آزادی عمل وجود دارد، بنـابراین مـی تـوان سـریهای حـل همگرا شده در یک ناحیه ای که دارای معنای فیزیکی باشد را بدست آورد. دیده شده اسـت کـه پـارامتر کمکی $\hbar$ اغلب در ناحیه همگرایی تأثیر می گذارد بنابراین با انتخاب درست $\hbar$ می تـوان نـرخ سـریهای تقریبی و ناحیه همگرایی را تشخیص داد. فرض کنید جواب با استفاده از پـارامتر $\hbar$ بدسـت آورده شـده است. سوال این است که چگونه میتوان تشخیص داد مقدار مناسب $\hbar$ برای همگرا شدن حـل در ناحیـه بیشتر چیست؟

بسیاری از مسائل غیرخطی شامل کمیتهای فیزیکی از قبیل فرکانس نوسان کننده ها، ضریب اصـطکاک سطح در جریان ویسکوز و غیره... می باشند، به این دلیل که حل های بیان شده با روش هموتپی حتمـاً دارای ضریب کمکی $\hbar$ می باشند، این کمیتهای فیزیکی نیز شامل $\hbar$ می باشند .بنابراین با توجه به $\hbar$ بـه عنوان متغیر مستقل، کشیدن شکلهای این نوع از کمیتها بر حسب $\hbar$ آسان می باشد. فرض شود که :

$$\gamma = \ddot{u}(r,t)\Big|_{r=0,t=0} \qquad (۲۰-۲)$$

[1].*Rule of solution expression*

اشاره داشته باشد به یک کمیتی که معنای فیزیکی مهمی دارد. در این جا (') اشـاره بـه مشـتق نسـبی زمان دارد. بنابراین γ تابعی است بر حسب $\hbar$ و بنابراین می تواند توسط شکل $\gamma - \hbar$ کشیده شود.
تمامی حل های γ توسط مقادیر مختلف $\hbar$ به یک مقدار واحد همگرا می شوند و بنابراین یک خط افقی در شکل $\gamma - \hbar$ ایجاد می شود که به یک ناحیه از $\hbar$ که با $R_\hbar$ نمایش داده مـی شـود اشـاره دارد. بـرای اختصار این نمودار ($\hbar$ - *Curve*) نامیده می شود و ناحیه مربوطه که مقادیر مناسب $\hbar$ در آن قـرار دارنـد را (ناحیه درست $\hbar$)[1] می نامند. بنابراین اگر هر مقداری از ($\hbar$ قرار گرفتـه شـده در ناحیـه R_h) انتخـاب شود ،حل همگرا شده است. مطمئناً اگر کمیتهای فیزیکی دیگری نیز وجود داشته باشد می توان مقادیر ($\hbar$-*Curve*) را رسم نمود. بنابراین ($\hbar$ - *Curve*) یـک راه راحـت جهـت نشـان دادن تـأثیر $\hbar$ بـر ناحیـه همگرایی و نرخ سریهای تقریبی را نشان می دهد و با انتخاب درست $\hbar$ حل خاتمه می یابد.

۲-۵-تشریح روش آنالیز هموتپی با ذکر مثال:

۲-۵-۱-پخش حرارتی در یک پره:

پره ای را در نظر بگیرید که هدایت حرارتی آن وابسته به دما باشد.دمای پایه پره T_b ، دمای محیط T_a ، A سطح مقطع ، p محیط پره ، b طول پره و انتهای پره عایق می باشد. معادله انـرژی بـرای ایـن پـره بصورت زیر می باشد :

$$A\frac{d}{dx}[k(T)\frac{dT}{dx}] - ph(T - T_a) = 0 \qquad (۲-۲۱)$$

هدایت حرارتی پره تابعی از دما می باشد ، بطوری که:

$$k(T) = k_a[1 + \lambda(T - Ta)] \qquad (۲-۲۲)$$

k_a هدایت حرارتی در دمای محیطی T_a و λ پارامتر تغییر هدایت حرارتی نسبت به دما می باشد.جهـت بی بعد سازی مسئله از پارامترهای زیر استفاده می شود.

---

[1] - *Valid region of* $\hbar$

$$\theta = \frac{T - Ta}{Tb - Ta} \quad , \quad \xi = \frac{x}{b}$$
$$\psi = (\frac{hpb^2}{k_a \ A})^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \beta = \lambda(Ta - Tb) \qquad (۲-۲۳)$$

فرم بی بعد شده مسئله این گونه خواهد بود:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \beta\theta\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \beta\ (\frac{d\theta}{d\xi})^2 - \psi^2\theta = 0 \qquad (۲-۲۴)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d\theta}{d\xi} = 0 & at & \xi = 0 \\ \theta = 1 & at & \xi = 1 \end{array}\right\} \qquad (۲-۲۵)$$

برای شروع ، ابتدا باید توابع پایه مناسب انتخاب شوند . با توجه به شرایط مرزی اپراتـور خطـی اینگونـه تعریف می شود:

$$\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ \xi^n \qquad (۲-۲۶)$$

$$L[\phi(\xi,p)] = \frac{d^2\phi(\xi,p)}{d\xi^2} \qquad (۲-۲۷)$$

$$L(c_1\xi + c_2) = 0 \qquad (۲-۲۸)$$

حدس اولیه با توجه به قسمت خطی انتخاب می گردد.

$$\theta_0(\xi) = c = 1 \qquad (۲-۲۹)$$

اپراتور غیر خطی با توجه به معادله اصلی مشخص می شود.

$$N[\phi(\xi,p)] = \frac{d^2\phi(\xi,p)}{d\xi^2} + \beta\phi(\xi,p)\ \frac{d^2\phi(\xi,p)}{d\xi^2} + \beta\ (\frac{d\phi(\xi,p)}{d\xi})^2 - \psi^2\phi(\xi,p) \qquad (۲-۳۰)$$

فرم مرتبه های بالا با توجه به تعریف R_m ساخته می شوند.

$$R_m(\vec{\theta}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} \left[\underbrace{\frac{d^2\phi(\xi,p)}{d\xi^2}}_{a} + \underbrace{\beta\phi\frac{d^2\phi(\xi,p)}{d\xi^2}}_{b} + \underbrace{\beta\left(\frac{d\phi(\xi,p)^2}{d\xi}\right)}_{c} - \underbrace{\psi^2\phi(\xi,p)}_{d} \right] \Bigg|_{p=0} \qquad (۲-۳۱)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\,a\,|_{p=0}\;=\theta''_{m-1}\\
&\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\,b\,|_{p=0}\;=\beta\sum_{n=\circ}^{m-1}\;\theta_n.\theta''_{m-1-n}\\
&\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\,c\,|_{p=0}\;=\beta\sum_{n=\circ}^{m-1}\;\theta'_n.\theta'_{m-1-n}\\
&\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\,d\,|_{p=0}\;=\;-\psi^2\,\theta_{m-1}
\end{aligned}
\qquad (۳۲-۲)
$$

$$
R_m(\vec{\theta}_{m-1})=\theta''_{m-1}+\beta\sum_{n=0}^{m-1}\;\theta_n\;\theta''_{m-1-n}+\beta\sum_{n=0}^{m-1}\;\theta'_n\;\theta'_{m-1-n}-\psi^2\,\theta_{m-1}
\qquad (۳۳-۲)
$$

فرم مرتبه m بصورت زیر می باشد:

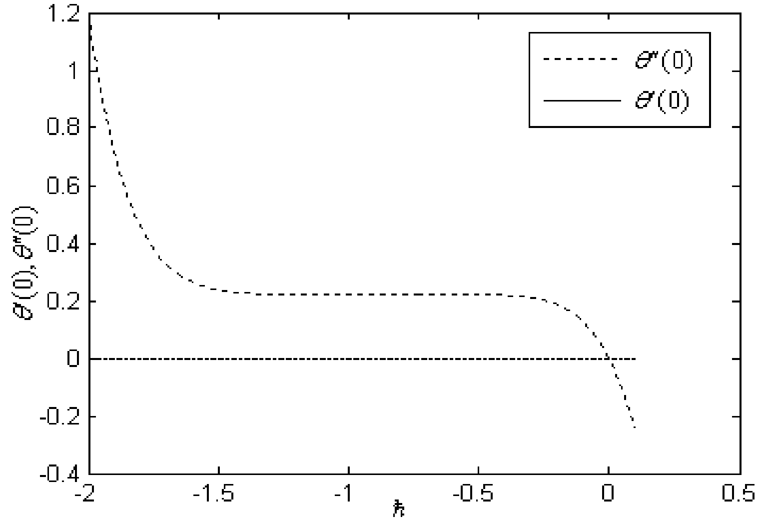
$$
\theta_{m-1}(\xi)=\theta_m(\xi)\chi_m+\hbar\int_\circ^\xi\;[\int_\circ^\xi H(\xi)R_m(\vec{\theta}_{m-1})d\xi]d\xi+c_1\xi+c_2
\qquad (۳۴-۲)
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_1(\xi)=\hbar\,\int_0^\xi\,[\int_0^\xi\;\;(\beta\theta_0(\xi)\,\theta_0{}''(\xi)+\beta\theta_0'{}^2(\xi)+\theta_0{}''(\xi)-\psi^2\theta_0(\xi)d\xi]d\xi+c_1\xi+c_2\\
&\theta_2(\xi)=\theta_1(\xi)+\hbar\int_0^\xi\;\;[(\beta\theta_0(\xi)\,\theta_1{}''(\xi)+\beta\theta''_0(\xi)\theta_1(\xi)\\
&+2\beta\;\theta_0{}'(\xi)\theta_1{}'(\xi)+\theta_1{}''(\xi)-\psi^2\theta_1(\xi)\,d\xi]\,d\xi+c_3\xi+c\xi
\end{aligned}
\qquad (۳۵-۲)
$$

اکنون با اعمال شرایط مرزی برای $m\geq 1$ روابط زیر حاصل می شوند:

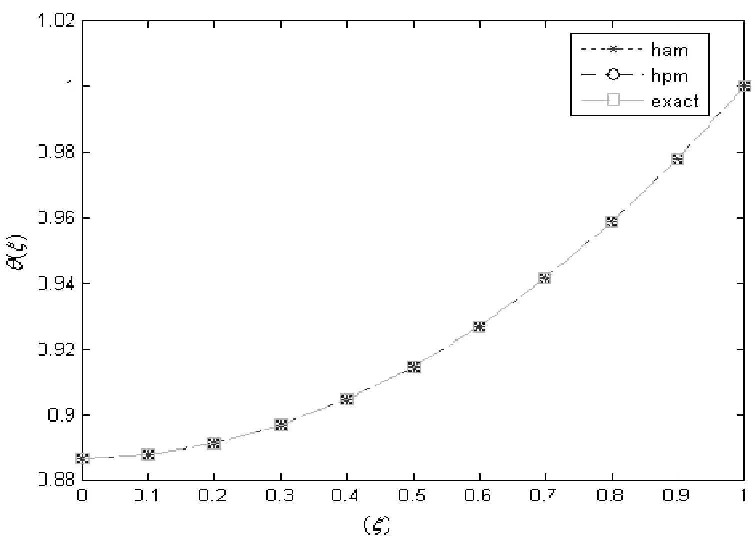
$$
\begin{aligned}
&\theta_0(\xi)=1\\
&\theta_1(\xi)=-\frac{1}{2}\,\hbar\psi^2\xi^2+\frac{1}{2}\hbar\psi^2\\
&\theta_2(\xi)=-\frac{1}{2}\hbar\psi^2\xi^2+\frac{1}{2}\hbar\psi^2+h\left\{\frac{1}{24}\psi^4\xi^4+\frac{1}{2}(-\beta\hbar\psi^2-\hbar\psi^2-\frac{1}{2}\psi^4\hbar)\xi^2\right\}\\
&+\frac{5}{24}\psi^4\hbar^2+\frac{1}{2}\beta\hbar^2\psi^2+\frac{1}{2}\hbar^2\psi^2
\end{aligned}
\qquad (۳۶-۲)
$$

بدیهی است پارامتر کمکی هنوز مجهول است. در شکل (۲-۲) می توان مقدار درست $\hbar$ را انتخاب نمود و بعد از قراردادن آن در جواب نهایی حل خاتمه می یابد. شکل (۲-۳) دقت جواب را در مقایسه با حل دقیق نشان می دهد.



شکل (۲-۲):نمودار پارامتر کمکی در مرحله هفتم از حل بازاء

$(\beta = 0, \psi = 0,5)$



شکل(۲-۳): مقایسه روش هموتپی آنالیز با جواب دقیق بازاء

$(\beta = 0\ ,\ \psi = 0.5, \hbar = -0.9)$

۲-۵-۲- سرمایش جسمی با حرارت مخصوص متغیر:

جسمی با حجم V ، سطح مقطع A، دانسیته ρ در شرایط اولیه دمایی T_iو دمـای محیطـی T_aرا در نظر بگیرید. اگر رابطه بین حرارت مخصوص و دما رابطه ای خطی باشد.

$$c = c_a[1+\beta(T-Ta)] \qquad (۳۷-۲)$$

با توجه به ضریب انتقال حرارت جابجایی h ،معادله انرژی بصورت زیر برقرار می شود:

$$\rho VC\ \frac{dT}{dt} + h\,A(T-T_a) = 0 \qquad , \qquad T(0) = T_i \qquad (۳۸-۲)$$

جهت بی بعد سازی مسئله از پارامترهای زیر استفاده می شود.

$$\theta = \frac{T-Ta}{Ti-Ta} \qquad , \qquad \tau = \frac{t}{pvc_a/hA} \qquad , \qquad \varepsilon = \beta(T-Ta) \qquad (۳۹-۲)$$

فرم بی بعد شده مسئله این گونه خواهد بود:

$$(1+\varepsilon\theta)\frac{d\theta}{d\tau} + \theta = 0 \qquad , \qquad \theta(0) = 1 \qquad (۴۰-۲)$$

$$L[\phi(\tau,p)] = \frac{d\phi(\tau,p)}{d\tau} + \phi(\tau,p) \qquad (۴۱-۲)$$

$$L(c_1 e^{-\tau}) = 0 \qquad (۴۲-۲)$$

حدس اولیه با توجه به قسمت خطی انتخاب می گردد.

$$u_0(\tau) = e^{-\tau} \qquad (۴۳-۲)$$

اپراتور غیر خطی با توجه به معادله اصلی مشخص می شود.

$$N[\phi(\tau,P)] = \frac{d\phi(\tau,p)}{d\tau} + \phi(\tau,P) + \varepsilon\,\phi(\tau,p)\ \frac{d\phi(\tau,P)}{d\tau} \qquad (۴۴-۲)$$

فرم مرتبه های بالا با توجه به تعریف R_m ساخته می شوند.

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial^{m-1}}\left[\underbrace{\frac{d\phi(\tau,p)}{d\tau}}_{a} + \underbrace{\phi(\tau,p)}_{b} + \underbrace{\varepsilon\phi(\tau,p)\frac{d\phi(\tau,p)}{d\tau}}_{c}\right] \qquad (۴۵-۲)$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\ a\Big|_{p=0} = \theta'_{m-1}$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\ b\Big|_{p=0} = \theta_{m-1} \qquad (۴۶-۲)$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\ c\Big|_{p=0}=\varepsilon\sum_{n=0}^{m-1}\theta_n\,\theta'_{m-1-n}$$

$$R_m(\vec{u}_{m-1})=\theta'_{m-1}+\theta_{m-1}+\varepsilon\sum_{n=0}^{m-1}\ \theta_n\ \theta'_{m-1-n} \qquad (۴۷-۲)$$

برای $m\geq 1$ فرم عمومی بصورت زیر می باشد :

$$\big(\theta'_m(\tau)+\theta(\tau)\big)=(\theta'_{m-1}(\tau)+\theta_{m-1}(\tau))\,\chi_m+\hbar H(\tau)\,R_m\,(\vec{\theta}_{m-1}(\tau)) \qquad (۴۸-۲)$$

اکنون با اعمال شرایط مرزی برای $m\geq 1$ روابط زیر حاصل می شود.

$$\theta_1(\tau)+\theta'_1(\tau)=\hbar\left\{\theta_0(\tau)\,e^{-\tau}+\theta'_0(\tau)\,e^{-\tau}-\varepsilon(\,e^{-\tau}\,)^3\right\} \qquad (۴۹-۲)$$

$$\theta_1(\tau)+\theta'_1(\tau)=-\hbar\varepsilon(e^{-\tau})^3 \qquad (۵۰-۲)$$

$$\theta_1(\tau)=(\frac{1}{2}\hbar\varepsilon\,e^{-2\tau}+c_1)\,e^{-\tau} \qquad (۵۱-۲)$$

$$c_1=-\frac{1}{2}\hbar\varepsilon \qquad (۵۲-۲)$$

$$\theta_1(\tau)=(\frac{1}{2}\hbar\varepsilon\,e^{-2\tau}-\frac{1}{2}\hbar\varepsilon)\,e^{-\tau} \qquad (۵۳-۲)$$

$$\theta_2(\tau)+\theta'_2(\tau)=\theta_1(\tau)+\theta'_1(\tau)+\left\{\hbar\theta_1(\tau)e^{-\tau}+\hbar\theta'_1(\tau)e^{-\tau}-2\hbar^2\varepsilon^2(e^{-5\tau})+\hbar^2\varepsilon^2(e^{-3\tau})\right\} \qquad (۵۴-۲)$$

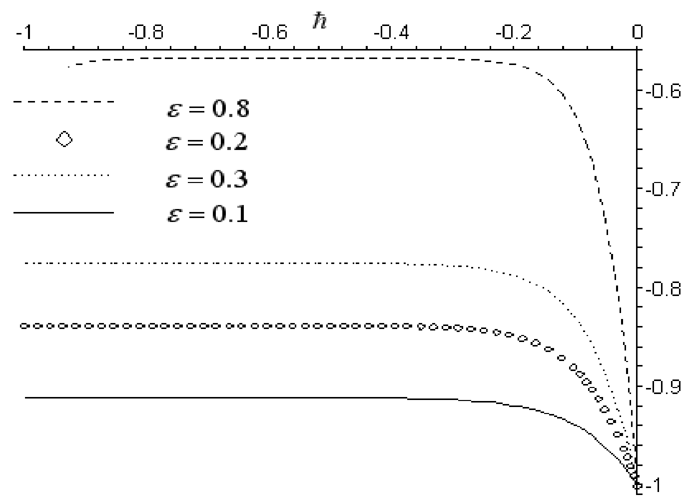
$$\theta_2(\tau)=\{-\hbar\varepsilon\,\{\frac{1}{2}\hbar\varepsilon\,e^{-2\tau}-\frac{1}{2}\varepsilon\hbar e^{-4\tau}-\frac{1}{2}e^{-2\tau}-\frac{1}{3}\hbar e^{-3\tau}\}+c_2\}e^{-\tau} \qquad (۵۵-۲)$$

$$c_2=-\frac{1}{2}\hbar\varepsilon-\frac{1}{3}\hbar^2\varepsilon \qquad (۵۶-۲)$$

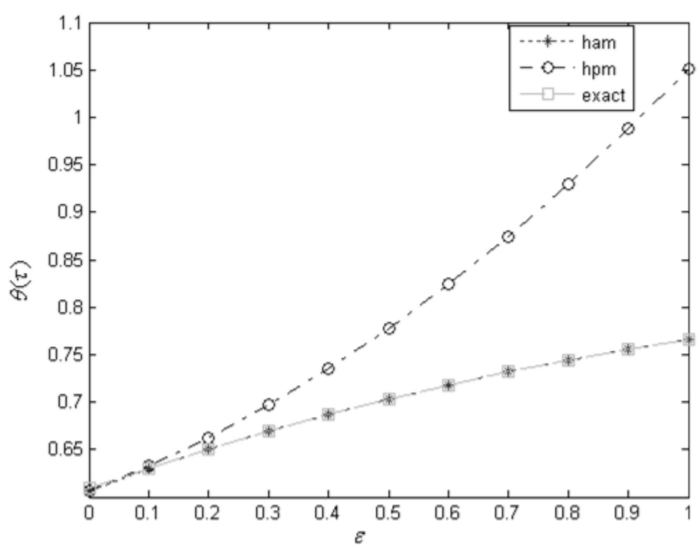
$$\theta_2(\tau)=\quad\left\{-\hbar\varepsilon\,(\frac{1}{2}\hbar\varepsilon\,e^{-2\tau}-\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\hbar e^{-4\tau}-\frac{1}{2}e^{-2\tau}-\frac{1}{3}\hbar\,e^{-3\tau})-\frac{1}{2}\hbar\varepsilon-\frac{1}{3}\hbar^2\varepsilon\right\}\,e^{-\tau} \qquad (۵۷-۲)$$

$$\theta(\tau)=\theta_0(\tau)+\theta_1(\tau)+\theta_2(\tau)+\theta_3(\tau)+\ldots \qquad (۵۸-۲)$$

بدیهی است پارامتر کمکی هنوز مجهول است . در شکل (۲-۴) مـی تـوان مقـدار درسـت $\hbar$ را انتخـاب نمود و بعد از قراردادن آن در جواب نهایی حل خاتمه می یابد. شکل (۲-۵) دقت جـواب را در مقایسـه با حل دقیق نشان می دهد.



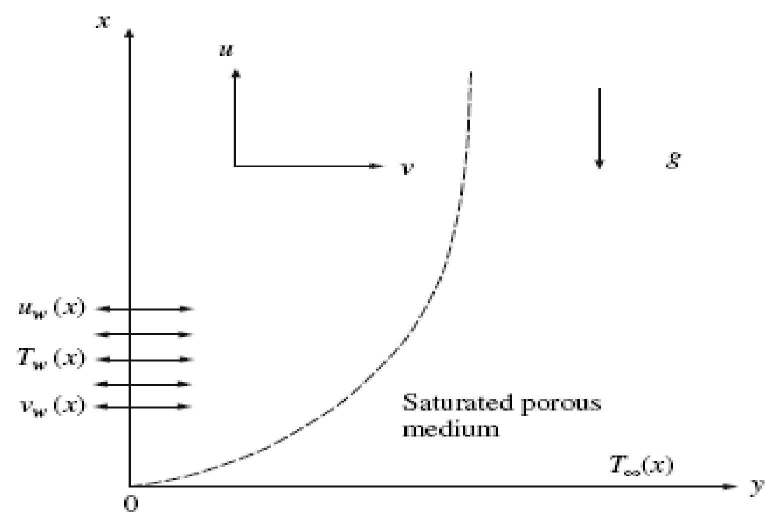
شکل(۲-۴): نموداردما بر حسب پارامتر کمکی در مرحله دهم از حل بازاء $(\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.2, \varepsilon = 0.3, \varepsilon = 0.8)$



شکل(۲-۵):مقایسه روش آنالیز هموتپی با جواب دقیق بازای $(\tau = 0.5)$و $(\hbar = -0.6)$

فصل سوم:
حل مساله

۳-۱- حل سری لایه مرزی جابجایی آزاد روی یک صفحه عمودی گرم شده همراه باشار جرمی جانبی در یک محیط متخلخل اشباع شده



شکل(۳-۱): جریان لایه مرزی ناشی از جابجایی آزاد در یک محیط متخلخل [۶۹]

جریان لایه مرزی در محیط متخلخل یک پدیده مهم در سیستم‌های ژئوفیزیک[۱] و فرایندهای صنعتی است[۶۵]. حیطه کاربرد آن شامل جریان آب‌های زیرزمینی، عایق‌های حرارتی، سیستم ذخیره انرژی‌های صنعتی و کشاورزی ومخازن نفتی می‌باشد. بررسی‌های تفصیلی زیادی در خصوص وجوه مختلف جریان‌های جابجایی انجام گرفته که اکثر آنها در حوزه جریان‌های جابجایی آزاد[۲] از سطوح عمودی تحت حرارت می‌باشد که در یک محیط متخلخل قرار گرفته‌اند[۶۰].

۱- *geophysics*

۲- *naturalconvection*

فعالیت‌های ابتدایی بوسیله چنگ و مینکوویچ[1] [۶۸] روی جابجایی آزاد حول یک صفحه صاف عمودی در محیط متخلخل اشباع شده[2] با خواص ایزوتروپیک[3] که دمای مشخصه دیواره، تابعی توانی از ارتفاع است صورت گرفته است.

در این قسمت، مسأله لایه مرزی جابجایی آزاد روی یک صفحه عمودی تحت حرارت با شار جرمی جانبی[4] که در یک محیط متخلخل اشباع قرار دارد بررسی شده است. هدف از این کار بررسی صحت حل تشابهی به وسیله روش HAM می‌باشد. چندین دمای دیواره جهت توضیح دادن اثر پارامتر مکش-پاشش[5] روی جریان و انتقال حرارت موردتوجه قرار گرفته است. همچنین تأثیر پارامتر λ روی یک سطح غیر قابل نفوذ نیز بررسی شده است و با نتایج حاصل از حل عددی مقایسه گردیده است.

۳-۱-۱- تحلیل مسأله

یک جریان لایه مرزی جابجایی آزاد دوبعدی پایدار[6] که به وسیله یک دیوار عمودی تحت حرارت با شار جرمی جانبی در یک محیط متخلخل اشباع شده، ایجاد گردیده را در نظر بگیرید. (شکل۳-۱)

معادلات حاکم به شرح ذیل می‌باشند[۶۸].

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (۳-۱)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\rho_{\infty}k\beta g}{\mu}\frac{\partial T}{\partial y}=0 \quad (۳-۲)$$

۱- *Cheng & Minkowycz*
۲- *Saturated*
۳- *Isotropic*
۴- *Lateral mass flux*
۵- *Injection – Suction*
۶- *Steady*

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad (۳-۳)$$

و شرایط مرزی حاکم بر مسأله نیز به فرم ذیل می باشد.

$$T(x,0)=T_w(x), v(x,0)=v_w(x) \quad (۴-۳)$$

$$T(x,\infty)=T_\infty, u(x,0)=0 \quad (۵-۳)$$

که در آن پارامتر های ذیل تعریف می شود:

xمحور مختصات موازی صفحه عمودی

u: مولفه سرعت در راستای x

y: محور مختصات عمود بر صفحه

v: مولفه سرعت در راستای y

T: درجه حرارت

k: نفوذپذیری[۱] محیط متخلخل

g: شتاب جاذبه زمین

α: ضریب پخش حرارتی[۲]

β: ضریب انبساط حرارتی

ρ_∞: دانسیته[۳] سیال

μ: ویسکوزیته[۴] سیال

T_∞: دمای محیط

$T_w(x)$: درجه حرارت دیواره

kکه معرّف نفوذپذیری یک محیط متخلخل است برای یک جریان دائم یک جهته در یک محیط یکنواخت به صورت $u=\frac{-k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$ تعریف می‌شود. این ضریب مستقل از نوع سیال می‌باشد و به هندسه محیط متخلخل بستگی دارد. α که معرّف ضریب پخش حرارتی است با فرمول $\alpha=\frac{k}{\rho c_p}$ تعریف

۱- *permeability*

۲- *Termal Expansion coefficient*

۳- *Density*

۴- *Viscosity*

می‌گردد و نشان‌دهنده نسبت رسانش گرمایی به ظرفیت حرارتی ماده است. نرخ توزیع انرژی گرمایی در طول ماده با افزایش α زیاد می‌شود.

لایه‌های سیال در طول صفحه گرم می‌شوند و توسعه می‌یابند. بعلت اختلاف نسبی دما $T_w(x) > T_\infty$، سیال تحت یک نیروی شناوری رو به بالا قرار گرفته که منجر به یک حرکت جابجایی می‌شود. در جابجایی آزاد صفحه عمودی ناشی از تفاوت دمای دیوار و محیط، شار حرارتی و ضخامت لایه مرزی حرارتی با ارتفاع x تغییر می‌کند. حلهای تشابهی می‌توانند برای شرایط دمای دیواره‌ی بینهایت نیز بسط داده شوند مشروط بر اینکه آنها از قانون توانی، قانون نمایی یا خطی تبعیت کند. در معادله کنترل فرض می‌شود که مدل مورد استفاده مدل دارسی- بوسینسک[1][۶۵] برای سیالات ویسکوز غیرقابل تراکم[2] با شرایط مرزی $T_w(x) = T_\infty + Ax^\lambda$ و شار جرمی جانبی $v_w = ax^{\frac{(\lambda-1)}{2}}$ میباشد که در آن A ثابت تناسب مثبت برای سطح عمودی تحت حرارت، a نرخ پاشش- مکش است. $a > 0$ برای پاشش و $a < 0$ برای مکش کاربرد دارد[۶۵]. تابع جریان[3] ψ به شکل زیر تعریف می‌گردد[۶۹-۶۸].

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{۶-۳}$$

تبدیل‌های تشابهی زیر توسط معادلات زیر انجام می‌گیرد[۶۹-۶۸].

$$\psi = [\frac{\alpha \rho_\infty k \beta g}{\mu}(T_w - T_\infty)]^{1/2} f(\eta) \tag{۷-۳}$$

$$u = [\frac{\rho_\infty k \beta g}{\mu}(T_w - T_\infty)] f'(\eta)) \tag{۸-۳}$$

$$v = [\frac{\rho_\infty k \beta \alpha g}{4x\mu}(T_w - T_\infty)]^{1/2} \chi(\eta) \tag{۹-۳}$$

۱- $Darcy - Boussinesq$

۲- *Incompressible*

۳- *Stream function*

$$\chi = (1 - \lambda)\eta \mathrm{f}(\eta) - (1 + \lambda)\mathrm{f}(\eta) \qquad (۱۰-۳)$$

$$T = T_\infty + (T_W + T_\infty)\theta(\eta) \qquad (۱۱-۳)$$

$$\theta = \frac{T - T\infty}{T_w - T\infty} \qquad (۱۲-۳)$$

$$\eta = [\frac{\rho_\infty k\beta\alpha g}{ax\mu}(T_w - T_\infty)]y \qquad (۱۳-۳)$$

معادلات کنترل به فرم بی‌بعد شده زیر تبدیل می‌گردد.

$$f'' - \theta' = 0 \qquad (۱۴-۳)$$

$$\theta'' + \frac{1+\lambda}{2} f\theta' - \lambda f'\theta = 0 \qquad (۱۵-۳)$$

که شرایط مرزی زیر را دارایند.

$$f(0) = f_w, f'(\infty) = 0$$

(۱۶-۳)

$$\theta(0) = 1, \theta(\infty) = 0$$

$f(\eta)$ تابع جریان بی‌بعد، $\theta(\eta)$؛ میدان دما و مشتقات بر حسب η لحاظ شده است.

f_w، پارامتر پاشش- مکش که قدرت نرخ انتقال جرم را اندازه گرفته و شار جرمی جانبی طی دیوار را کنترل می‌نماید، از معادله زیر بدست می‌آید[۶۹].

$$f_w = -\frac{2a}{1+\lambda}(\frac{\mu}{\rho_\infty gk\alpha\beta A})^{1/2} \qquad (۱۷-۳)$$

که در آن $f_w > 0$ برای مکش و $f_w < 0$ برای پاشش سیال می‌باشد.

بنابراین واضح است که $f_w \neq 0$ معرف سطح نفوذپذیر و $f_w = 0$ نمایانگر سطوح نفوذناپذیر می‌باشد.

از معادله $f''-\theta'=0$ نتایج زیر حاصل می‌گردد.

$$f''(\eta)=\theta'(\eta) \tag{۱۸-۳}$$

$$f'(\eta)=\theta(\eta) \tag{۱۹-۳}$$

و معادله کنترلی به شکل زیر حاصل می گردد.

$$f'''+\frac{1+\lambda}{2}ff'-\lambda f'^2=0 \tag{۲۰-۳}$$

که شرایط مرزی زیر را دربر دارد[۶۹].

$$f(0)=f_w, f'(0)=1, f'(\infty)=0 \tag{۲۱-۳}$$

بسته به طبیعت پارامتر با نفوذ λ روی دمای مشخصه دیوار $T_w(x)=T_\infty+Ax^\lambda$ و شار جرمی جانبی $v_w=ax^{\frac{(\lambda-1)}{2}}$ موارد ذیل را در نظر می‌گیری[۶۹].

الف) $\lambda=1$:

معرّف شار جرمی یکنواخت $(v_w=a)$ می‌باشد و دمای دیوار به صورت خطی نسبت به x تغییر می‌کند.

ب) $\lambda=-\frac{1}{2}$:

معرّف لایه مرزی ناشی از مکش می‌باشد. طی این مقدار برای λ، حل تشابهی فقط برای $f_w>0$ وجود دارد.

ج) $\lambda=0$:

معرّف صفحه هم دما($T_w(x)=Contant$)می‌باشد و نشان می‌دهد که معادله

$f'''+\frac{۱+\lambda}{۲}ff''-\lambda f'^{۲}=۰,$ به صورت $f'''+\frac{ff''}{2}=0$ که همان معادله بلازیوس است تبدیل می‌شود.

همچنین مقادیر جواب به ازای $\lambda=-\frac{1}{3}$ جهت نشـان دادن تـأثیرات واضـح f_w روی سـطوح نفوذپـذیر نشان داده شده است. همچنین توجه شود که نمونه‌های خاص $\lambda=1$ و $\lambda=-\frac{1}{3}$ جواب‌های صـریح بـه شکل ذیل دارند.

$$
\begin{aligned}
&f(\eta)=f_w+\frac{1}{H}[1-e^{-H\eta}]\\
&\theta(\eta)=e^{-H\eta}\\
&H=[f_w+\left(f_w^4+4\right)^{1/2}]/2
\end{aligned}
\tag{۲۲-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(\eta)=\left(f_w^2+6\right)^{1/2}\frac{\left(\left(f_w^2+6\right)^{1/2}\tanh\ \xi+f_w\right)}{f_w\tanh\ \xi+\left(f_w^2+6\right)^{1/2}}\\
&\theta(\eta)=\left(f_w^2+6\right)\left[f_w\sinh\ \xi+\left(f_w^2+6\right)^{1/2}\cosh\ \xi\,]^{-2}\right]\\
&\xi=\left(f_w^2+6\right)^{1/2}\eta/6
\end{aligned}
\tag{۲۳-۳}
$$

۳-۱-۲- حل مسأله با روش *HAM*

ثابت شد که معادله کنترل و شروط مرزی آن به فرم زیر است.

$$
\begin{aligned}
&f'''+\frac{1+\lambda}{2}ff'-\lambda f'^2=0\\
&f(0)=f_w,f'(0)=1,f'(\infty)=0
\end{aligned}
$$

با توجه به وجود شرایط بی‌نهایت در مسأله، فرم تابع بی‌نهایت به شکل زیر است.

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{m,n}^{k} \eta^{k} \exp(-n\eta), \qquad (۲۴-۳)$$

تابع بیان حل کمک می‌کند تا حدس اولیه انتخاب شود و لزومی ندارد که حتماً از فرم فوق جهت حدس جواب اولیه استفاده شود.

اپراتور خطی و حدس اولیه برای معادله کنترل (۳-۲۰) این گونه معرفی می‌شود.

$$f_0(\eta) = 1 + f_w - e^{-\eta} \qquad (۲۵-۳)$$

$$L\ (f) = f''' - f', \qquad (۲۶-۳)$$

$$L\ (c_1 + c_2 e^{\eta} + c_3 e^{-\eta}) = 0, \qquad (۲۷-۳)$$

که ضرایب c_3, c_2, c_1 مجهولند و باید با توجه به شرایط مرزی در هر مرتبه مشخص شوند.

معادلات تغییر شکل مرتبه صفر

اکنون می‌توان با توجه به اپراتور خطی و حدس اولیه فرم اولیه هموتوپی را ساخت.

$$(1-p)L\ \left[f(\eta;p) - f_0(\eta)\right] = p\hbar\ N\ \left[f(\eta;p)\right] \qquad (۲۸-۳)$$

$$f(0;p) = f_w \qquad (۲۹-۳)$$

$$f'(0;p) = 1 \qquad (۳۰-۳)$$

$$f'(\infty;p) = 0 \qquad (۳۱-۳)$$

$$N\ [f(\eta;p)] = \frac{\partial^3 f(\eta;p)}{\partial \eta^3} + \frac{1+\lambda}{2} f(\eta;p) \frac{\partial^2 f(\eta;p)}{\partial \eta^2} - \lambda \left(\frac{\partial f(\eta;p)}{\partial \eta} \right)^2 \qquad (۳۲-۳)$$

برای $p=0$ و $p=1$ روابط زیر برقرار خواهد بود.

$$f(\eta;0) = f_0(\eta) \qquad (۳۲-۳)$$

$$f(\eta;1) = f(\eta) \qquad (۳۳-۳)$$

هنگامی که p از صفر به یک تغییر کند حل مسأله از حدس اولیه به حل نهایی منجـر خواهدشـد. اگـر $p=1$ شود فرم جواب‌ها مشخص می‌شود.

$$f(\eta;p) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) p^m \qquad (۳۴-۳)$$

$$f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m (f(\eta;p))}{\partial p^m} \qquad (۳۵-۳)$$

فرم مرتبه m هموتوپی برای مسأله

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) \qquad (۳۶-۳)$$

$$L\ [f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = \hbar\ \ R_m^f(\eta) \qquad (۳۷-۳)$$

$$f_m(0) = f'_m(0) = f'_m(\infty) = 0 \qquad (۳۸-۳)$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \le 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases} \qquad (۳۹-۳)$$

$$R_m^f = f'''_{m-1} + \frac{1+\lambda}{2} \sum_{n=0}^{m-1} f_{m-1-n} f''_n - \lambda \sum_{n=0}^{m-1} f'_{m-1-n} f'_n, \qquad (۴۰-۳)$$

فرم عمومی جواب‌ها این گونه خواهد بود.

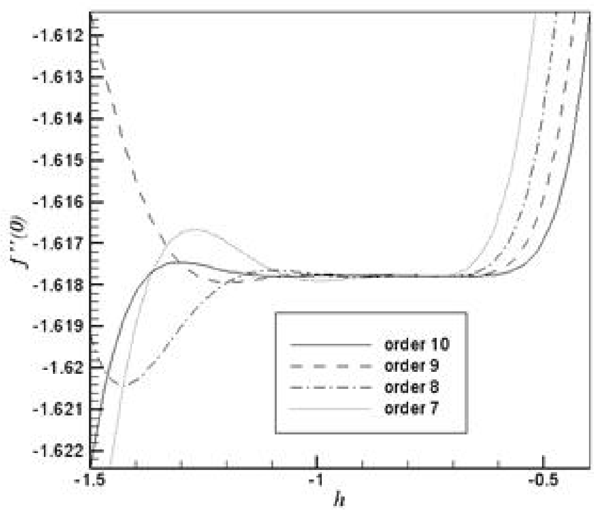
$$f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1^m + C_2^m e^{\eta} + C_3^m e^{-\eta} \qquad (۴۱-۳)$$

به طوریکه c_3, c_2, c_1 ضرایب ثابتی هستند که با توجه به شرایط مرزی انتخاب می‌شوند.

۳-۱-۳- بررسی همگرایی:

مطابق نظر لیائو برای بررسی همگرایی[۱] حل و تعداد سری‌های لازم جهت همگرایی، نمودار پارامتر کمکی را باید ترسیم کرد.

شکل (۳-۲) این نمودار را بر اساس $f''(0)$ و به ازای مقادیر $f_w = 1$ و $\lambda = 1$ و برای چند مرتبه[۲] رسم شده و محدوده همگرایی مشخص شده است.



شکل (۳-۲): .نمودار مربوط به همگرایی حل برای $\lambda = 1, f_w = 1$.

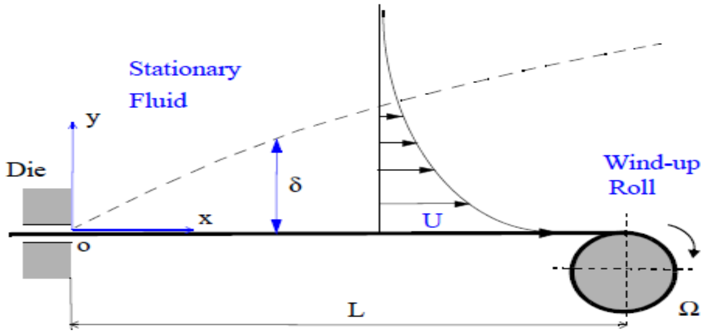
نتایج حل معادله حاکم بر مسأله در فصل چهارم بیان شده است و تفاسیر فیزیکی که صحت حل مسأله را مشخص می کند نیز ارائه گردیده است.

---

۱ - *Convergence*

۲ - *Order*

۳-۲- بررسی تحلیلی جریان وانتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک بر روی یک صفحه صاف متحرک نیمه بی نهایت افقی



شکل(۳-۳): حرکت صفحه صاف متحرک نیمه بی نهایت با سرعت ثابت.

۳-۲-۱- سیال ویسکوالاستیک

مواد ویسکو الاستیک[۱] موادی هستند که به طور توامان خواص ویسکوز و الاستیک[۲] را دارا می‌باشند. از آنجایی که در سیالات، تنش تابعی از نرخ برش[۳] و در جامدات تابعی از خودبرش میباشد لذا این مواد به طور همزمان دارای خواص جامد و سیال می‌باشند. دو مشخصه زمانی مهم که در این نوع سیالات نقش اساسی دارند شامل زمان آسودگی از تنش[۴] و زمان رهایی از تغییر شکل[۵] می‌باشد. زمان آسودگی از تنش به بازه زمانی گفته می‌شود که پس از قطع تنش برشی وارد بر سیال صرف می‌شود تا از این تنش رها گردد. برای سیالات نیوتنی این زمان صفر است. همچنین اگر در جریان کوئت[۶] حرکت صفحه بالایی به طور ناگهانی قطع گردد برخلاف سیالات نیوتنی، صفحه بالایی مقداری به عقب برمی‌گردد که به زمان حرکت به سمت عقب تا توقف کامل صفحه زمان رهایی از تغییر شکل می‌گویند. بازگشت صفحه بالایی به عقب ناشی از خاصیت الاستیک سیال است اما این بازگشت به دلیل وجود خاصیت ویسکوز،

۱- *Viscoelastic*

۲- *Elasticity*

۳- *Shear rate*

۴- *Relaxation time*

۵- *Retrdation time*

۶- *Couette*

نسبت به جامدات الاستیک کندتر است که از این پدیده به عنوان، حافظه جهت دار[۱] تغییر شکل‌های مواد ویسکوالاستیک نام می‌برند[۷۰].

در جریان کوئت یک سیال معمولی تنش‌های نرمال همواره ثابت و مساوی فشار استاتیکی می‌باشد ولی در یک سیال ویسکوالاستیک اختلافی بین تنش‌های نرمال مشاهده می‌شود که ناشی از رفتار الاستیک ماده است. اختلاف تنش‌های نرمال به شکل ذیل قابل بیان هستند.

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \qquad (۳-۴۲)$$

$$N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \qquad (۳-۴۳)$$

مطابق بررسی‌های انجام شده در اکثر مواد N_1 بزرگتر از N_2 می‌باشد. همچنین از نظر جهت N_1 دارای علامت مثبت و N_2 اغلب منفی می‌باشد. معمولا در مسائل مطروحه N_2 اندازه گیری نشده و از نظر بزرگی، مقدارش 10% مقدار N_1 لحاظ می‌گردد. وجود اختلاف تنش‌های نرمال باعث بوجود آمدن رفتارهای متفاوتی در سیالات ویسکوالاستیک می‌گردد[۲۱,۷۰].

دو پارامتر مهم بی‌بعد در بررسی جریان یک سیال ویسکوالاستیک عددهای دبورا[۲] و وایزنبرگ[۳] می‌باشد. عدد دبورا D_e به عنوان نسبت زمان آسودگی از تنش به زمان مشخصه سیال تعریف می‌گردد؛ برای یک زمان مشخصه معین (نسبت مقیاس طولی به مقیاس سرعت معین) عدد دبورا در گازها و مایعات نیوتنی عددی بسیار کوچک و در جامدات الاستیک عددی بسیار بزرگ است.

همچنین عدد وایزنبرگ بر اساس نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی ناشی از ویسکوزیته تعریف می‌گردد. بالا بودن عدد وایزنبرگ به معنای غیرنیوتنی بودن آن است. بدیهی است که اگر اعداد وایزنبرگ و دبورا برای یک ماده مشخص مقداری کوچک داشته باشند، ماده شانس جاری شدن پیدا

۱- *Directional memory*

۲- *Deborah number*

۳- *Weissenberg number*

می‌کند. معمولا از دیاگرام پیپکین[۱] جهت مشخص نمودن وضعیت ویسکوالاستیک ماده استفاده می‌گردد که شرح آن از موضوع بحث خارج است. فرمول‌های دو پارامتر بی‌بعد یاد شده به صورت ذیل است.

$$De = \lambda\omega = \frac{\lambda}{T} \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

$$Wi = \lambda \dot{\gamma}$$

که λ: مقیاس زمان مشخصه یک ماده ویسکوالاستیک که همان زمان آسودگی از تنش است.

T: زمان مشخصه جریان که معمولاً به صورت $\frac{x}{u}$ در نظر گرفته می‌شود.

ω: فرکانس مشخصه جریان و $\dot{r}$ نرخ برش جریان می‌باشد.

جهت شبیه‌سازی و تحلیل ریاضی جریان سیالات ویسکوالاستیک مدل‌های مختلفی ارائه گردیده است. برخی مدل‌های معروف جهت شبیه‌سازی یاد شده از قبیل ماکسول[۲]، کلوین-وُیت[۳]، برگرز[۴]، دلتر ولچرت[5] «ماکسول توسعه یافته» و خانواده مدل‌های اولدروید[۶] می‌باشد. در میان مدل‌های اولدروید دو مدل اولدروید A و B نسبتاً کاربردی‌ترند. در مدل A ثابت تنش نرمال دوم قرینه ثابت تنش نرمال اول لحاظ می‌شود که با نتایج تجربی سازگاری کمتری دارد در حالی که در مدل B ثابت نرمال تنش اول وجود داشته ولی ثابت تنش نرمال دوم صفر فرض می‌گردد. مطابق توضیحات ارائه شده این مدل کارآمدتر می‌باشد. فرمول این مدل مطابق شکل ذیل است[۷۲].

$$\tau + \lambda_1 \tau(1) = -\eta_0\left(\gamma(1) + \lambda_2 \gamma(2)\right) \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

۱- *Pipkin's diagram*

۲- *Maxwell*

۳- *Kelvin–Voigt*

۴- *Burgers*

۵- *Dleter velchert*

۶- *Oldroyd*

که $\tau_{(i)}$ مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته تانسور تنش[۱] و $\gamma_{(i)}$: مشتق زمانی پاد همبسته نرخ برش[۲]، λ_i زمان آسودگی از تنش و $\eta_\circ$ ویسکوزیته در نرخ برش صفر می‌باشند.

در مدل اولدروئید B چنانچه $\lambda_1 = 0$ یعنی ترم مربوط به زمان آسودگی از تنش صفر فرض گردد به مدل سیال مرتبه دور می‌رسیم که $\tau = -\eta_0\left(\gamma(1) + \lambda_2\gamma(2)\right)$ می‌باشد[۷۰].

$$\gamma(1) = \nabla V + (\nabla V)^T$$
$$\gamma(2) = \frac{D\gamma(1)}{Dt} - \left\{(\nabla V)^T.\gamma(1) + \gamma(1).(\nabla V)\right\} \qquad (۴۶\text{-}۳)$$

در این بخش به حل تشابهی موضعی برای جریان سیال ویسکوالاستیک مرتبه دو[۳] برروی یک صفحه متحرک با استفاده از روش HAM پرداخته شده و نتایج با متدهای عددی انجام گرفته مقایسه می‌گردد.

۳-۲-۲- تحلیل جریان

مطابق شکل (۳-۳) سیال ویسکوالاستیک مرتبه دوم همگن[۴] و تراکم ناپذیر و در حال سکون روی یک صفحه متحرک با سرعت ثابت U وجود دارد. تاثیرات رفتار غیرنیوتنی سیال با عدد دبورا K کنترل می‌گردد.

تاثیرات الاستیسیته سیال روی مشخصات جریان تابع بدون بعد و مشتقات تابع در یک محدوده نسبتاً وسیع از k مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرعت در یک نقطه با افزایش الاستیسیته سیال کاهش پیدا کرده و نیز مقدار سیالی که کشیده می‌شود تقلیل می‌یابد. فرض مسأله این است که دمای سطح تغییر با قانون توانی دارد. انتقال حرارت در دو حالت بررسی شده است:

۱- *Contrava riant convected time derivative of the stress tensor*

۲- *Contravariant convected time derivative of the shear rate*

۳- *Second grade*

۴- *Homogenise*

A) سطح در دمای معینی باشد PST[۱]

B) سطح در معرض شار حرارتی معینی باشد PHF[۲]

همانگونه قبلاً بیان شد مدل سیال مرتبه دوم بـه صـورت $\tau = -\eta_{\circ}(\gamma_{(1)} + \lambda\gamma_{(2)})$ نشـان داده مـی‌شـود.

تانسور تنش کائوچی[۳] وابسته به میدان تغییر شکل[۴] به صورت زیر نمایش داده می‌شود[۷۳]:

$$T = -pI + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \qquad (۴۷-۳)$$

کـه pI - بخـش ایزوتروپیـک تانسـور تـنش، $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ مـدول‌هـای مـواد و A_3, A_2, A_1 تانسـورهای سینماتیک هستند که تعاریف آنها به شرح ذیل است[۷۰]:

$$\begin{aligned} A_1 &= \nabla V + (\nabla V)^T \\ A_2 &= \frac{DA_1}{Dt} + A_1(\nabla V) + (\nabla V)^T A_1 \\ A_3 &= A_1^2 \end{aligned} \qquad (۴۸-۳)$$

که ∇V تانسور گرادیان سرعت است.

۱- *Prescribed surface temprature*

۲- *Prescribed heat flux*

۳- *Cauchy stress*

۴- *deformation field*

بر پایه واکنش سیال مرتبه دو به جریان برشی پایدار α_1 در واقع ضریب ویسکوزیته μ است. α_3,α_2 اختلاف تنشهای نرمال اول و دوم N_2, N_1 را نشان می‌دهند که بنا به داده‌های تجربی ما در این مسأله $\alpha_3 = 0$ قرار می‌دهیم.

بجای تانسور سینماتیکی A_1 از نسبت نرخ تغییر شکل $2d$ استفاده شده است[۷۲].

$$\tau_{ij} = 2\mu(d_{ij} - \lambda \frac{\delta d_{ij}}{\delta t}) \tag{۴۹-۳}$$

که μ ویسکوزیته و $\lambda = \frac{\alpha_2}{2\alpha_1}$ می‌باشد [۷۴]

$$\frac{\delta d_{ij}}{\delta t} = \frac{D}{Dt} d_{ij} + L_{ki} d_{kj} + L_{kj} d_{ik} \tag{۵۰-۳}$$

L_{ij} اجزای تانسور گرادیان سرعت‌اند $(\frac{\partial u_i}{\partial x_j})$.

حال با فرض سیال غیرقابل تراکم، جریان خطی و دوبعدی، معادلات مومنتم[۱] در راستای x , y به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{aligned} \tag{۵۱-۳}$$

تقریب های شرایط مرزی به صورت ذیل است.

$$\begin{aligned} x &= O(1), u = O(1) \\ y &= O(\delta), v = O(\delta) \end{aligned} \tag{۵۲-۳}$$

۱- *Momentum*

ترم‌های $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$ ترم‌های الاستیک این معادلـه و در تـرم $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$ تـرم‌هـای ویسـکوز ایـن معادله هستند.

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau_{xx}}{\rho} = O(1)\\
&\frac{\tau_{xy}}{\rho} = O(\delta)\\
&\frac{\tau_{yy}}{\rho} = O(\delta^2)
\end{aligned} \tag{۵۳-۳}$$

بنابراین معادلات مومنتم به شکل زیر تبدیل می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\\
&\frac{\partial p}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{۵۴-۳}$$

برای یک سیال تراکم‌ناپذیر که تغییرات فشار در جهت جریان وجود ندارد معادله‌های فوق به شـکل زیـر در می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0\\
&\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{۵۵-۳}$$

با استفاده از تعریف تنش τ_{ij} برای سیال مرتبه دوم:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda\nu\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + 2v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right] \tag{۵۶-۳}$$

و تعریف تابع جریان به فرم $u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\ ,\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ به فرم زیر است.

$$(\frac{\partial\psi}{\partial y})(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x})-(\frac{\partial\psi}{\partial x})(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2})=(-\frac{\partial\psi}{\partial x})(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3})+\lambda(\frac{\partial\psi}{\partial x}[(\frac{\partial\psi}{\partial y})(\frac{\partial^4\psi}{\partial y^3\partial x})$$
$$-2(\frac{\partial\psi}{\partial x})(\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4})-(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y})(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3})-(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2})(\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2})] \quad (۵۷-۳)$$

همچنین تابع جریان به فرم زیر بی‌بعد می‌گردد.

$$f\left(\eta\right)=\frac{\psi}{\sqrt{x\,\upsilon U}} \quad (۵۸-۳)$$

که v ویسکوزیته سینماتیکی[۱] جریان است.

f تابع جریان بدون بعد و η متغیر تشابهی تعریف شده به فرم زیر است:

$$\eta=\frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x} \quad (۵۹-۳)$$

و مولفه‌های سرعت به شکل ذیل می باشند.

$$u=Uf\,',$$
$$\upsilon=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\upsilon U}{x}}\left(\eta f\,'-f\,\right). \quad (۶۰-۳)$$

با استفاده از تعاریف فوق معادله مومنتم به شکل بی‌بعد زیر در آمده که یک معادله دیفرانسیل معمـولی می‌باشد.

$$-\frac{1}{2}ff\,''=f\,'''+\frac{K}{2}(2ff\,''-f\,''^2+ff^{\,iv}) \quad (۶۱-۳)$$

۱- *Kinematic*

فصل چهارم:

نتایج و نمودار ها

۴-۱- نتایج حل مسأ له اول:

در این بخش، نتایج بدست آمده از حل سری لایه مرزی جابجایی آزاد روی یک صفحه عمودی گرم شده همراه با شار جرمی جانبی که در یک محیط متخلخل اشباع شده قرار گرفته است بررسی می گردد.

معادله مشخصه حاکم بر شرایط مسأله و شر ایط مرزی آن به شکل زیر است.

$$f''' + \frac{1+\lambda}{2} ff' - \lambda f'^2 = 0$$

$$f(0) = f_w, f'(0) = 1, f'(\infty) = 0$$

جداول (۴-۱) و (۴-۲) و (۴-۳) مقادیر مختلف $f''(0) = \theta'(0)$ را برای مقادیر λ مساوی با $0, -1/2, -1/3$ مورد بررسی قرار داده است. همچنین جدول (۴-۴) مقادیر مختلف $f''(0) = \theta'(0)$ را $\lambda = 0$ و $f_w = 1$ به ازای مقادیر η مختلف نمایش می‌دهد.

جدول(۴-۱): مقادیر $f''(0) = \theta'(0)$ برای مقادیر مختلف پارامتر مکش برای $\lambda = 1$

f_w	*HAM*	*Shooting Method*	*ADM[۱۹]*
-۱	-۰.۶۱۸۱۴	-۰.۶۱۸۵۵	-۰.۶۱۸۰۳
-۰.۸	-۰.۶۷۷۱۵	-۰.۶۷۷۶۳	-۰.۶۷۷۰۳
-۰.۴	-۰.۸۱۹۸۹	-۰.۸۲۰۴۷	-۰.۸۱۹۸۰
۰.۰	-۰.۹۹۹۹۹	-۰.۹۹۹۹۹	-۱.۰۰۰۰۰
۱.۰	-۱.۶۱۷۷۶	-۱.۶۱۸۱	-۱.۶۱۸۰۳

جدول(۴-۲): مقادیر $f''(0)=\theta'(0)$ برای مقادیر مختلف پارامتر مکش برای

$\lambda=-1/3$

f_w	*HAM*	*Shooting Method*	*ADM[۱۹]*
۰.۰	۰.۰۰۴۱۰	-۰.۰۰۰۹۰	۰.۰۰۰۰۰
۱.۰	-۰.۳۳۳۱۶	-۰.۳۳۲۸	-۰.۳۳۳۳۴
۲.۰	-۰.۶۶۶۱۴	-۰.۶۶۶۰۳	-۰.۶۶۶۰۲
۳.۰	-۰.۹۶۵۶۸	-۰.۹۶۵۷۲	-۰.۹۶۵۷۷
۵.۰	-۱.۶۶۴۶۷	-۱.۶۶۶۶۶	-۱.۶۶۶۶۱

جدول(۴-۳): مقادیر $f''(0)=\theta'(0)$ برای مقادیر مختلف پارامتر مکش برای

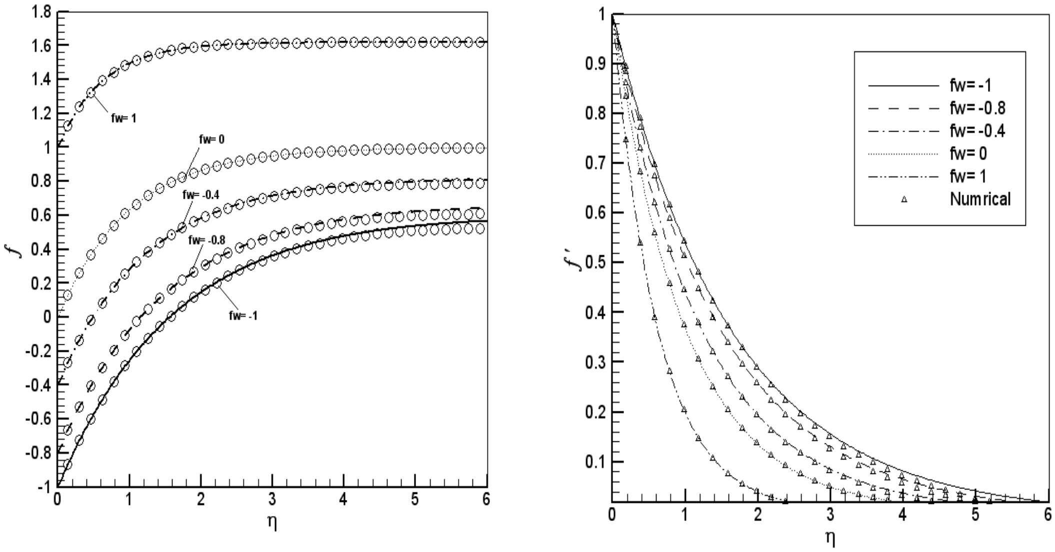
$\lambda=-1/2$

f_w	*HAM*	*Shooting Method*	*ADM[۱۹]*
۱.۰	۰.۲۳۷۴۹	۰.۲۰۰۰۱	۰.۲۱۷۵۴
۳.۰	-۰.۵۸۳۳۶	-۰.۵۸۷۷۶	-۰.۵۹۷۲۸
۵.۰	-۱.۱۴۹۱۰	-۱.۱۵۰۶۱	-۱.۱۵۹۹۹
۱۰.۰	-۲.۴۴۴۴۶	-۲.۴۵۱۱۰	-۲.۴۶۵۲۱

جدول(۴-۴): مقادیر $f''(0)=\theta'(0)$ برای $\lambda=0$ و $f_w=1$ به ازای مقادیر مختلف پارامتر η

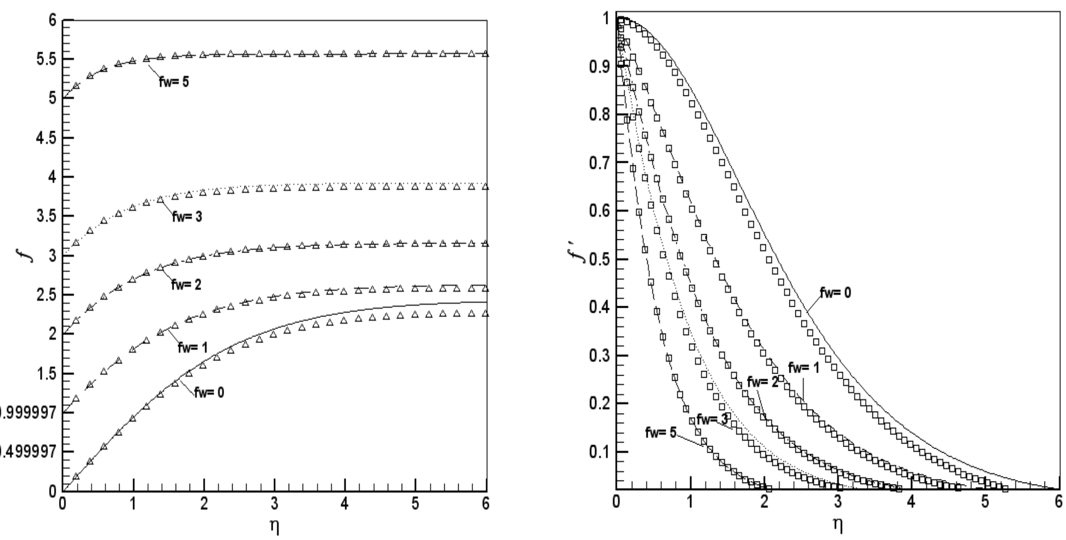
η	*HAM*	*Shooting Method*	*ADM[۱۹]*
۸.۰	-۰.۷۸۶۴۰	-۰.۷۸۶۵۷	-۰.۷۸۶۵۹
۹.۰	-۰.۷۸۶۳۹	-۰.۷۸۶۵۶	-۰.۷۸۶۴۶
۱۰.۰	-۰.۷۸۶۳۷	-۰.۷۸۶۴۲	-۰.۷۸۶۴۲
۱۱.۰	-۰.۷۸۶۳۵	-۰.۷۸۶۴۰	-۰.۷۸۶۴۱

تاثیر پارامتر مکش بر روی تابع جریان، سرعت و دما به ازای مقادیر مختلف λ ، f_w در نمودارهای (۴-۱)، (۴-۲)، (۴-۳)و (۴-۴) مشخص شده است. و در شکل (۴-۵) برای حالت $f_w=0$ یعنی معرف سطح غیرقابل نفوذ تاثیر پارامتر λ نمایان است.



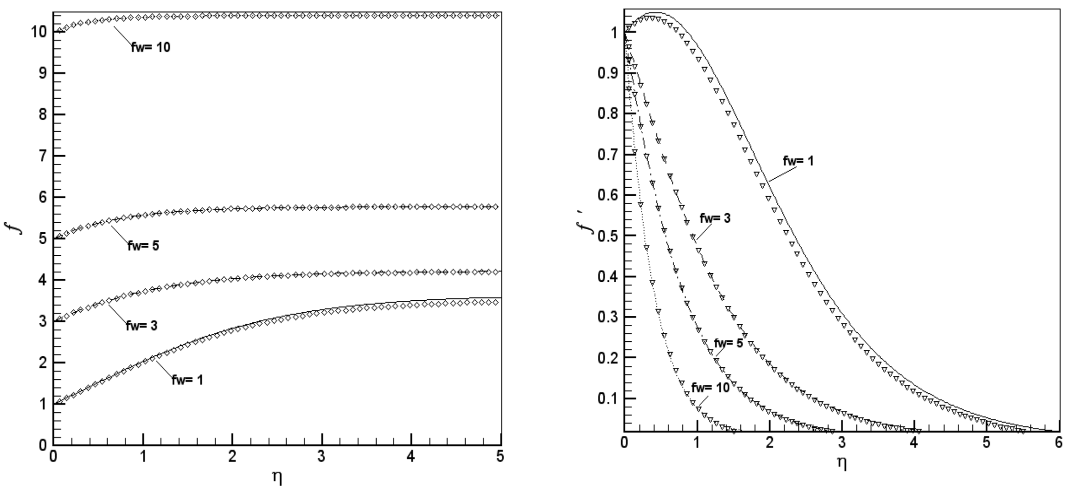
(ب) (الف)

شکل (۴-۱): تاثیر پارامتر مکش بر روی تابع جریان(الف)، سرعت و دما(ب) برای $\lambda = 1$



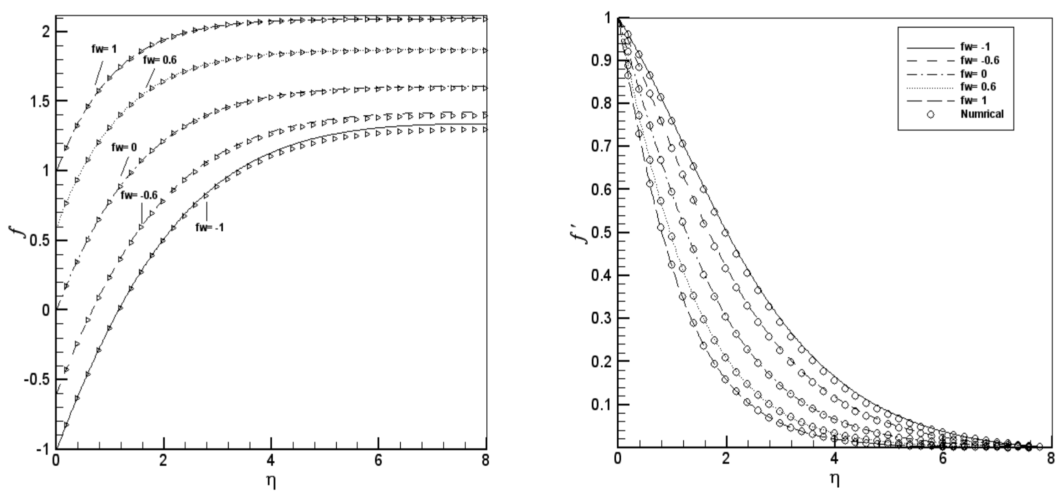
(ب) (الف)

شکل (۴-۲):تاثیر پارامتر مکش بر روی تابع جریان(الف)، سرعت و دما(ب) برای $\lambda = -1/3$.



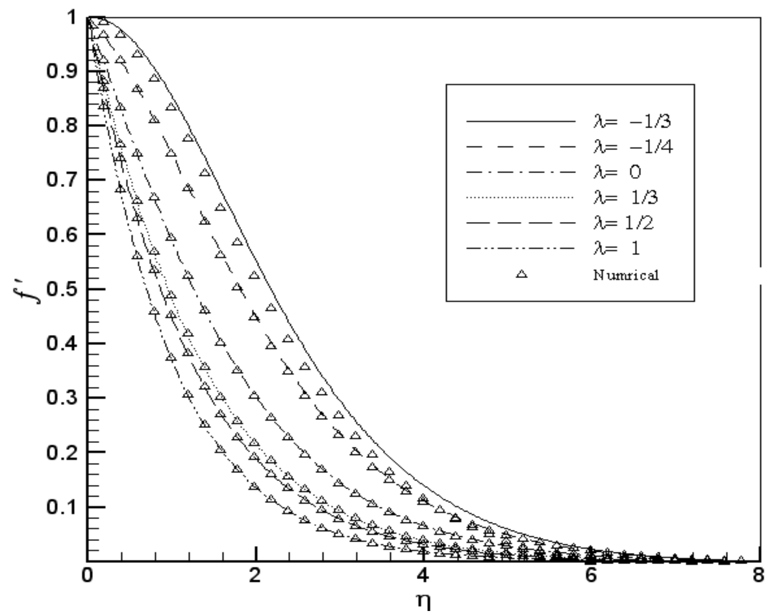
(الف) (ب)

شکل (۴-۳): تاثیر پارامتر مکش بر روی تابع جریان(الف)، سرعت و دما(ب) برای $\lambda = -1/2$



(الف) (ب)

شکل (۴-۴): تاثیر پارامتر مکش بر روی تابع جریان(الف)، سرعت و دما(ب) برای $\lambda = 0$



شکل (۴-۵): تاثیر پارامتر λ بر روی تابع سرعت و دما برای $f_w = 0$

با توجه به نمودارها و جداول فوق توجه به نکات ذیل ضروری است:

علامت منفی $\theta'(0)$ تعیین کننده جهت جریان از دیواره به سمت سیال(انتقال حرارت مستقیم) و در صورت مثبت بودن، انتقال حرارت از سیال به سمت دیواره(معکوس) می باشد. در حالتی که $\theta'(0) = 0$ هیچ گونه انتقال حرارتی وجود نداشته و در اصطلاح، سطح آدیاباتیک می باشد. با افزایش پارامتر مکش-پاشش از مقادیر منفی به مقادیر مثبت، شار حرارتی روی دیواره $\theta'(0)$ افزایش می‌یابد. پدیده مکش باعث کاهش ضخامت لایه مرزی می‌گردد ولی پدیده پاشش ضخامت لایه مرزی را افزایش می‌دهد از آنجایی که به ازای $f_w < 0$ پدیده پاشش و $f_w > 0$ برای پدیده مکش مواجهیم توجه به نمودارها صحّت حل را تصدیق می‌کند. در $\eta = \infty$ سرعت صفر می‌شود $(f' \to 0)$ این امر بدلیل وجود جابجایی طبیعی (آزاد) می‌باشد که در آن سرعت در خارج لایه مرزی صفر است.

تاثیر پارامتر λ روی ضخامت لایه مرزی حرارتی نیز در نوع خود جالب می‌باشد:

به ازای λهای مثبت با توجه به فرمول $T_w = T_\infty + Ax^\lambda$ و $A > 0$ ،در قبال افزایش λ، اختلاف دمای $T_w - T_\infty$ و گرادیان آن زیاد شده و در نتیجه ضخامت لایه مرزی کاهش می یابد. به ازای $\lambda\rangle 0$ نیز

تحلیل مشابهی قابل ارائه می‌باشد بدین صورت که هر چه مقدار $|\lambda|$ بزرگتر شود ضخامت لایه مرزی افزایش می‌یابد که ناشی از کاهش گرادیان دما می‌باشد. به ازای λهای مثبت نسبت به λهای منفی نیز با توجه به فرمول $T_w = T_\infty + Ax^\lambda$ اختلاف دما و گرادیان آن بیشتر و در نتیجه ضخامت لایه مرزی پایین‌تر است.

۴-۲- نتایج مسأله دوم

نتایج بررسی تحلیلی جریان وانتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک مرتبه دوم بر روی یک صفحه صاف متحرک نیمه بی نهایت افقی در این قسمت نشان داده شده است.

معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت این مسأله به شکل ذیل می باشند:

معادله حاکم بر جریان سیال به صورت ذیل است.

$$-\frac{1}{2}ff'' = f''' + \frac{K}{2}(2f'f''' - f''^2 + ff^{iv})$$

$$f(0)=0$$
$$f'(0)=1$$
$$f'(\infty)=0$$

معادله انتقال حرارت در حالت PST به شکل زیر نشان داده شده است.

$$\theta'' + \frac{\sigma}{2}f\theta' - 2\sigma f'\theta + \sigma Ecf''^2 = 0$$

$$\theta(0)=1,\ \theta(\infty)\to 0.$$

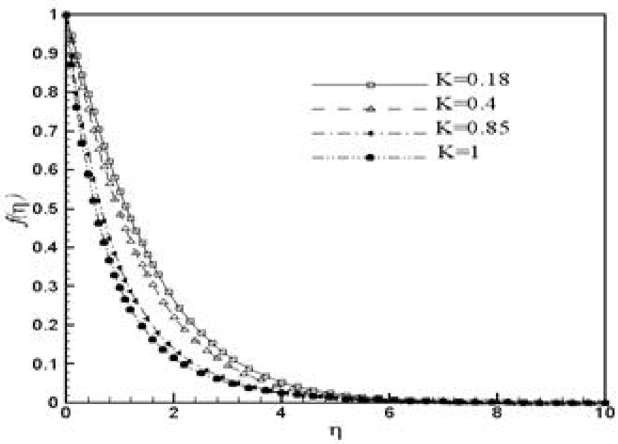
معادله انتقال حرارت در حالت PHF نیز به فرم زیر نمایش داده می شود.

$$g'' + \frac{\sigma}{2}fg' + \sigma Ef''^2 = 0,$$

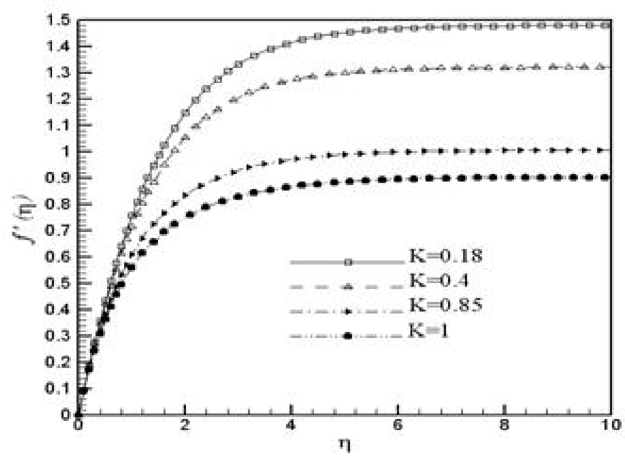
$g'(0)=-1,\ g(\infty)=0,$

در نمودارهای (۴-۶) ، (۴-۷) به تاثیر افزایش عدد دبورا روی جریان و ضخامت لایه مرزی و همچنین روی پروفیل سرعت پرداخته شده است.

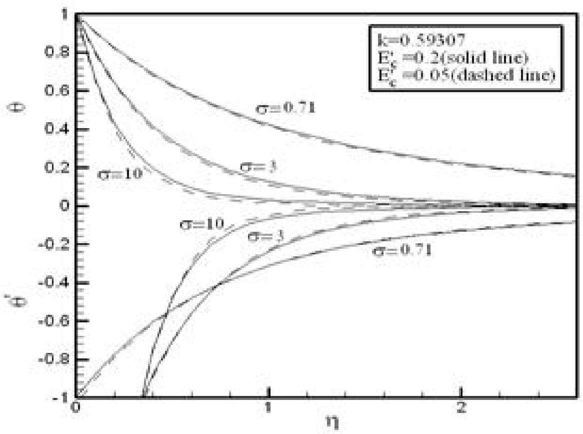
از جواب‌های بدست آمده برای معادله مربوط به حالت PST نمودار (۴-۸) را که منحنی تغییرات θ و θ' بر حسب η می‌باشد رسم شده و تاثیرات افزایش عددهای پراندل و اکرت روی میدان دما و شار حرارتی و ضخامت لایه مرزی حرارتی بررسی شده است. همچنین در نمودار (۴-۹) تأثیر افزایش عدد دبورا و الاستیسیته سیال روی پارامترهای بالا در حالت PST بررسی گشته است. در نمودار (۴-۱۰) نیز تاثیر تغییرات عددهای پراندل و اکرت روی میدان دما، شار حرارتی و ضخامت لایه مرزی حرارتی در حالت PHF بررسی شده و در شکل (۴- ۱۱) تاثیر مقادیر مختلف Kروی پارامترهای نام برده در حالت PHF نمایش داده شده است. همچنین در جدول (۴-۵) جواب‌های بدست آمده f تابع جریان به ازای مقادیر مختلف kبا نتایج عددی حاصل [۷۸] مقایسه شده است. جداول(۴-۶) و (۴-۷) نتایج بدست آمده $-\theta'(0)$ و $g(0)$ را به ازای مقادیر مختلف K، σ با نتایج حاصل از حل عددی مقایسه نموده است.



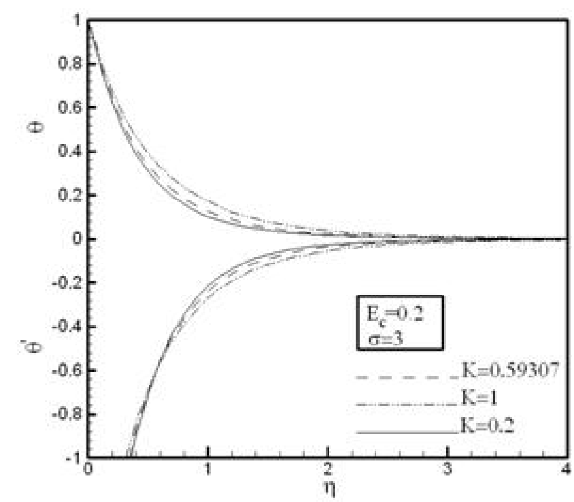
شکل(۴-۶) : تاثیر تغییرعدد دبورا روی تابع جریان



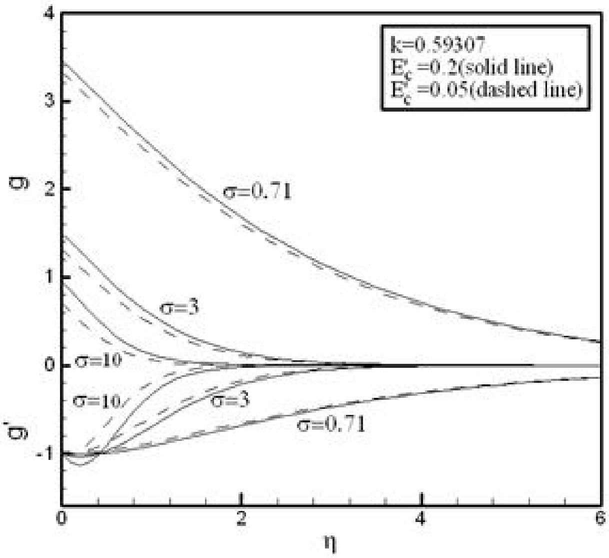
شکل(۴-۷): تاثیر تغییرات عدد دبورا روی ضخامت لایه مرزی



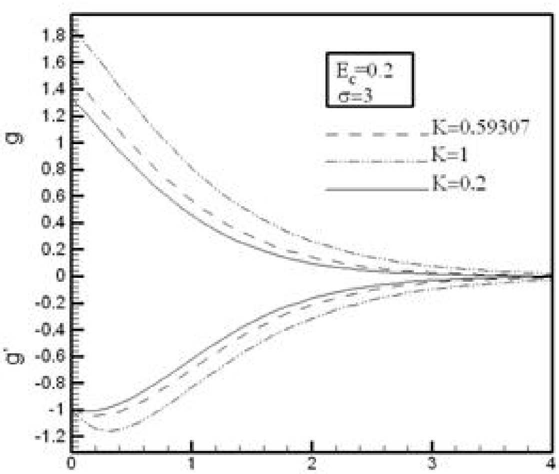
شکل (۴-۸): منحنی تغییرات θ و θ' بر حسب η و تاثیرات افزایش عددهای پراندل و اکرت روی میدان دما و شار حرارتی و ضخامت لایه مرزی حرارتی در حالت PST



شکل (۴-۹): تأثیر افزایش عدد دبورا و الاستیسیته سیال روی میدان دما و شار حرارتی و ضخامت لایه مرزی حرارتی در حالت PST



شکل (۴-۱۰): تاثیر تغییرات عددهای پراندل و اکرت روی میدان دما و شار حرارتی و ضخامت لایه مرزی حرارتی در حالت PHF



شکل(۴-۱۱): تاثیر مقادیر مختلف K روی میدان دما، شار حرارتی وضخامت لایه مرزی در حالت PHF

جدول (۴-۵): مقایسه جواب‌های بدست آمده f تابع جریان به ازای مقادیر مختلف از طریق روش HAM و حل عددی انجام شده

K	HAM	[۷۸]	K	HAM	[۷۸]
۰.۱۸	۰.۵۳۶۱۷	۰.۵۳۳۱۵	۰.۸۵	۱.۱۴۹۴۴	۱.۱۴۹۱۶
۰.۲	۰.۵۴۴۵۳	۰.۵۴۶۵۲	۰.۸۶۵	۱.۱۷۲۹۸	۱.۱۷۱۵۳
۰.۴	۰.۶۷۹۱۴	۰.۶۷۹۰۷	۰.۸۷۳۵	۱.۱۸۴۳۷	۱.۱۸۴۴۶
۰.۵۹۳۰۷	۰.۸۴۵۱۴	۰.۸۴۳۰۷	۰.۹۵	۱.۳۰۹۱۰	۱.۳۰۹۸۶
۰.۷۵	۱.۰۱۳۲۹	۱.۰۱۴۶۷	۱	۱.۴۰۳۶۱	۱.۴۰۲۳۸

جدول(۴-۶): مقایسه نتایج بدست آمده $-\theta'(\circ)$ از طریق روش HAM با حل عددی به ازای مقادیر مختلف K, E_c

K	E_c	$-\theta'(0)$					
		$\sigma = 0.71$		$\sigma = 3$		$\sigma = 10$	
		HAM	[۷۸]	HAM	[۷۸]	HAM	[۷۸]
۰.۵۹۳۰۷	۰.۲	۰.۹۹۷۵	۰.۹۹۰۸	۲.۲۷۳۸۲	۲.۲۷۰۱۱	۴.۲۵۲۸۰	۴.۲۸۴۷۹
	۰.۰۵	۱.۰۲۷۹	۱.۰۳۲۲	۲.۳۵۸۲۵	۲.۳۵۸۳۷	۴.۴۵۸۳۲	۴.۴۷۹۲۳
	۰.۰	۱.۰۳۸۱	۱.۰۳۷۱	۲.۳۸۷۷۱	۲.۳۸۷۷۹	۴.۵۰۸۰۰	۴.۵۴۴۰۱
۰.۲	۰.۲	۱.۰۷۹۸۷	۱.۰۷۸۱	۲.۳۹۱۹۵	۲.۳۸۷۹۵	۴.۴۶۲۰۸	۴.۴۷۱۶۶
۰.۵۹۳۰۷	۰.۲	۰.۹۹۷۵	۰.۹۹۰۸	۲.۲۷۳۸۲	۲.۲۷۰۱۱	۴.۲۵۲۸۰	۴.۲۸۴۷۹
۱.۰		۰.۸۵۶۳	۰.۸۵۳۰	۲.۰۲۶۵۰	۲.۰۲۴۷۹	۳.۸۹۸۶۲	۳.۸۴۲۷۷

جدول(۴-۷): مقایسه نتایج بدست آمده $g(0)$ از طریق روش HAM با حل عددی به ازای مقادیر مختلف K, E_c'

K	E_c'	$g(0)$					
		$\sigma = 0.71$		$\sigma = 3$		$\sigma = 10$	
		HAM	[۷۸]	HAM	[۷۸]	HAM	[۷۸]
۰.۵۹۳۰	۰.۲	۳.۴۶۶۷۹	۳.۵۳۰۵۸	۱.۵۰۱۶۹	۱.۵۰۱۷۹	۰.۹۵۲۹۴	۰.۹۵۲۷
	۰.۰۵	۳.۳۳۵۴۳	۳.۳۹۴۹۴	۱.۳۱۹۷۶	۱.۳۲۰۱۴	۰.۷۰۶۲۴	۰.۷۰۶۳
	۰.۰	۳.۲۹۲۲۸	۳.۳۵۰۶۷	۱.۲۵۹۱۲	۱.۲۵۹۵۹	۰.۶۲۴۰۳	۰.۶۲۴۴
۰.۲	۰.۲	۳.۰۶۲۴۰	۳.۲۰۳۴۳	۱.۳۳۵۴۷	۱.۳۴۰۱۸	۰.۸۰۵۵۸	۰.۸۱۲۳۳
۰.۵۹۳۰		۳.۴۶۶۷۹	۳.۵۳۰۵۸	۱.۵۰۱۶۹	۱.۵۰۱۷۹	۰.۹۵۲۹۴	۰.۹۵۲۷
۱.۰		۴.۱۸۹۰۸	۴.۳۸۵۸۶	۱.۸۶۶۳۰	۱.۸۶۶۵۶	۱.۲۷۸۴۵	۱.۲۸۸۹

نتایج حل معادلات حاکم بر جریان این مسأله مشخص می کند که K «وجود الاستیسیته در جریان» یک شتاب به سیال وارد می‌کند یعنی نسبت $\frac{u}{U}$ سریعتر به سمت صفر میل می‌کند. دلیل این امر افزایش تنش‌های الاستیک در سیال است که ماهیتی کششی دارند و به سیال شتاب می‌دهند.

همچنین افزایش Kباعث محدود شدن اثرات الاستیک به ناحیه نازکی نزدیک دیواره می‌گردد و ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد. افزایش عدد دبورا به ازای مقادیر کوچک آن به علت انحراف کم رفتار سیال از مشخصه‌های سیال نیوتنی زیاد نیست. در این حالت تنش نرمال تولید شده در جریان که

تمایل به کاهش ضخامت لایه مرزی دارند خیلی بزرگ نیستند و تاثیرات λ می‌توانند بر آنها مسلط گردد. با افزایش K تنش‌های عمودی بزرگ و بزرگتر شده در حالی که اثرات λ در همان حالت باقی می‌ماند. بنابراین قابل پیش‌بینی است که در K های بزرگ تقلیل نسبتاً زیادی در ضخامت لایه مرزی بوجود آید.

در سیالات غیرخطی امکان تشکیل لایه مرزی در $\mathrm{Re}_x = 0$ نیز وجود دارد. در حالی که برای سیالات نیوتنی، لایه مرزی یک ناحیه نازک است که در آن غلظت گردابه[۱] مشاهده می شود. در سیالات غیرنیوتنی به علت اثرات الاستیک یا اثرات اینرسی[۲] وجود یک لایه مرزی امکان دارد مشروط بر این که عدد بی‌بعد مشخصه این اثرات Re یا D_e به سمت مقدار بحرانی مشخص میل کند. برای یک سیال مرتبه دو بدلیل این که مشابه سیالات نیوتنی ویسکوزیته آنها ثابت است، آثار اینرسی بحرانی وجود ندارد ولی بدلیل وجود رفتار الاستیک و داده‌های تجربی مشخص است برای K یک مقدار بحرانی در نزدیکی عدد *1* وجود دارد[۷۶].

همچنین c_f تابعی از عدد دبورای موضعی می‌باشد یعنی تنش برشی دیوار، مقیاسی از الاستیسیته سیال است و با افزایش K ، c_f زیاد می‌شود در محل K بحرانی یک شیب زیاد در صعود c_f ایجاد می‌شود که با یافته‌های ذکر شده در خصوص ضخامت لایه مرزی سازگار است. و نیز v_∞ که معرف مقدار سیالی است که به وسیله سطح کشیده می‌شود با افزایش K کاهش می‌یابد[۷۷].

۱- *Vorticity*

۲- *Inertia*

با بررسی نتایج معادلات انتقال حرارت حاکم بر این مسأله واضح است که با افـزایش عـدد پرانـدل (σ) کاهشی در دما اتفاق خواهد افتاد در حالی که برای هر دو حالت در نظر گرفته شده افزایش عـدد اکـرت منجر به افزایش دما خواهد شد.

رفتار θ و θ' نیز در هر دو شرایط، بررسی شده و مشخص گشت کـه افـزایش K ، عـدد دبـورا، باعـث افزایش دمای سیال می‌گردد که این افزایش دما برای اعداد دبورای بزرگتر بیشتر به چشم می‌آید. بـرای نمونه در حالت PST صرف‌نظر از σ و برای $E_c = cte$، با افزایش K، گرادیان دمـای دیـوار $(-\theta'(0))$ کاهش می‌یابد و حتی ممکن است منفی شود. به عبارت دیگر پروفیل دمای $\theta(\eta)$ در نزدیکـی دیـواره، یک جهش حرارتی دارد یعنی دمای سیال در نزدیکی دیوار از دمای لبه لایه مرزی تجاوز مـی‌کنـد. ایـن جهش دمایی زمانی واضح است که هر دو پارامتر بی‌بعد σ, K مقدار بزرگی داشـته باشـند. دلیـل بـروز چنین پدیده‌ای به شرح زیر است.

برای مقادیر کوچک K جریان حرارتی از سطح به سیال زمانی که $T_w > T_\infty$ می‌باشد اتفاق مـی‌افتـد در حالی که برای مقادیر بزرگ K حـرارت تولیـد شـده کـافی ناشـی از ترکیـب اثـرات اتـلاف[1] ویسـکوز و الاستیسیته سیال حتی زمانی که $T_w > T_\infty$ نیز شود هم از سیال به سطح منتقل می‌گردد.

[1]- *Dissipation*

منابع:

[۱] Von Dyke, M. Perturbation Methods in Fluid Mechanis, The Porabolic press, Stanford, California, (۱۹۷۵).

[۲] Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley & Sons, New York, (۱۹۸۱)

[۳] Nayfeh, A.H. Problems in Perturbation. John wiely & sons, New York, (۱۹۸۵)

[٤] Liao, SJ. Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method, Boca Raton: Chapman & Hall CRC Press: (۲۰۰۳)

[۵] Dai, S.Q.et al. Top ۱۰ Progress of Theoretical and Applied Mechanics in the ۲۰th century. Advauces in Mechanics, ۳۱(۳) (۲۰۰۱) ۳۲۲-۳۲٦

[٦] Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Van Dyke, Milton-New York, ۱۹٦٤

[۷] Perturbation Methods in Heat Transfer. A Aziz, TY Na - Washington, DC,۱۹۸٤

[۸] Karmishin, A.V; Zhukov, A.T. and kolosov, V.G. Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin-Walled Structures. Mashinostroyenie, Moscow, (۱۹۹۰)

[۹] Jihuan He, An Approximate Solution Technique Depending on an Artificial Parameter, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume ۳, Issue ۲, June ۱۹۹۸, ۹۲-۹۷

[۱۰] Ji-Huan He, A Coupling Method of a Homotopy Technique and a Perturbation Technique for Non-Linear Problems, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume ۳۵, Issue ۱, January ۲۰۰۰, ۳۷-٤۳

[۱۱] Ji-Huan He, Yan-Ping Yu, Jian-Yong Yu, Wei-Ru Li, Shan-Yuan Wang, Ning Pan, A Nonlinear Dynamic Model for Two-Strand Yarn SpinningTextile Research Journal, Vol. ۷۵, No. ۲, ۱۸۱-۱۸٤ (۲۰۰۵),

[۱۲] Ji-Huan He, Application of Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Wave Equations, Chaos, Solitons & Fractals, Volume ۲٦, Issue ۳, November ۲۰۰۵, ٦۹۵-۷۰۰

[۱۳] Ji-Huan He, The Homotopy Perturbation Method for Nonlinear Oscillators with Discontinuities, Applied Mathematics and Computation, Volume ۱۵۱, Issue ۱, ۳۰ March ۲۰۰٤, ۲۸۷-۲۹۲

[۱٤] A.M. Siddiqui, M. Ahmed, Q.K. Ghori, Thin film Flow of non-Newtonian fluids on a moving belt, Chaos, Solitons & Fractals, Volume ۳۳, Issue ۳, August ۲۰۰۷, ۱۰۰٦-۱۰۱٦

[۱۵] D.D. Ganji, M.J. Hosseini, J. Shayegh, Some nonlinear heat transfer equations solved by three approximate methods, International Communications in Heat and Mass Transfer, Volume ۳٤, Issue ۸, October ۲۰۰۷,۱۰۰۳-۱۰۱٦

[١٦] D.D. Ganji, A. Rajabi, Assessment of Homotopy–Perturbation and Perturbation Methods in Heat Radiation Equations, International Communications in Heat and Mass Transfer, Volume ٣٣, Issue ٣, (٢٠٠٦)٣٩١-٤٠٠

[١٧] D.D. Ganji, The Application of He's Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Equations Arising in Heat Transfer, Physics Letters A, Volume ٣٥٥, Issues ٤-٥(٢٠٠٦) ٣٣٧-٣٤١

[١٨] S.J. Liao, An Approximate Solution Technique not depending on Small Parameters: A Special Example, Int. J. Non-Linear Mechanics, ٣٠ (٣) (١٩٩٥) ٣٧١-٣٨٠

[١٩] S.J. Liao, Boundary element method for general nonlinear differential operators, Engineering Analysis with Boundary Element ٢٠(٢) (١٩٩٧) ٩١-٩٩.

[٢٠] M. Rafei, D.D. Ganji, H.R. Mohammadi Daniali, H. Pashaei, Application of Homotopy Perturbation Method to the RLW and Generalized Modified Boussinesq Equations, Physics Letters A, Volume ٣٦٤, Issue ١, (٢٠٠٧) ١-٦

[٢١] A. Rajabi, D.D. Ganji, H. Taherian, Application of Homotopy Perturbation Method in Nonlinear Heat Conduction and Convection Equations, Physics Letters A, Volume ٣٦٠, Issues ٤-٥(٢٠٠٧) ٥٧٠-٥٧٣

[٢٢] M. Inokuti et al., General use of the Lagrange Multiplier in Non-Linear Mathematical Physics, in: S. Nemat-Nasser (Ed.), Variational Method in the Mechanics of Solids, Pergamon Press, Oxford, ١٩٧٨, pp. ١٥٦-١٦٢.

[٢٣] Ji-Huan He, Variational Iteration Method – A Kind of Non-Linear Analytical Technique: some examples, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume ٣٤, Issue ٤,(١٩٩٩) ٦٩٩-٧٠٨

[٢٤] Jihuan He, A new Approach to Nonlinear Partial Differential Equations, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume ٢, Issue ٤, (١٩٩٧)٢٣٠-٢٣٥

[٢٥] Ji-Huan He, Approximate Solution of Nonlinear Differential Equations with Convolution Product Nonlinearities, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume ١٦٧, Issues ١-٢,(١٩٩٨)٦٩-٧٣

[٢٦] Jihuan He, Approximate Analytical Solution of Blasius' Equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume ٣, Issue ٤,(١٩٩٨)٢٦٠-٢٦٣

[٢٧] Ji-Huan He, Approximate Analytical Solution for Seepage Flow with Fractional Derivatives in Porous Media, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume ١٦٧, Issues ١-٢,(١٩٩٨)٥٧-٦٨

[٢٨] Ji-Huan He, Exact Resonances of Nonlinear Vibration of Rotor-Bearings System without Small Parameter, Mechanics Research Communications, Volume ٢٧, Issue ٤, July(٢٠٠٠)٤٥١-٤٥٦

[٢٩] Ji-Huan He, Variational Iteration Method for Autonomous Ordinary Differential Systems, Applied Mathematics and Computation, Volume ١١٤, Issues ٢-٣, ١١ (٢٠٠٠)١١٥-١٢٣

[٣٠] Ji-Huan He, Variational Iteration Method—Some Recent Results and New Interpretations, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume ٢٠٧, Issue ١,(٢٠٠٧)٣-١٧

[٣١] Essam M. Abulwafa, M.A. Abdou, Aber A. Mahmoud, Nonlinear Fluid Flows in Pipe-Like Domain Problem using Variational-Iteration Method, Chaos, Solitons & Fractals, Volume ٣٢, Issue ٤,(٢٠٠٧)١٣٨٤-١٣٩٧

[٣٢] Mehdi Dehghan, Mehdi Tatari, Identifying an Unknown Function in a Parabolic Equation with Overspecified data via He’s Variational Iteration Method, Chaos, Solitons & Fractals, Volume ٣٦, Issue ١,(٢٠٠٨)١٥٧-١٦٦

[٣٣] Hafez Tari, D.D. Ganji, H. Babazadeh, The Application of He's Variational Iteration Method to Nonlinear Equations Arising in Heat Transfer, Physics Letters A, Volume ٣٦٣, Issue ٣,(٢٠٠٧)٢١٣-٢١٧

[٣٤] P Karimi, N Eshghi, D D Ganji١, M Rostamian, H M Daniali, A Modified Method to Identification of Lagrange Multipliers, ٢٠٠٧ International Symposium on Nonlinear Dynamics (٢٠٠٧ ISND)

[٣٥] Mo. Miansari, D.D. Ganji, Me. Miansari, Application of He's Variational Iteration Method to Nonlinear Heat Transfer Equations, Physics Letters A, Volume ٣٧٢, Issue ٦, (٢٠٠٨)٧٧٩-٧٨٥

[٣٦]George Adomian, Solving Frontier Problems in Physics: The Composition Method, Kluwer, Dordrecht, ٢٠٠٤

[٣٧] Ebrahim Alizadeh, Mousa Farhadi, Kurosh Sedighi, H.R. Ebrahimi-Kebria, Akbar Ghafourian, Solution of the Falkner–Skan Equation for Wedge by Adomian Decomposition Method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume ١٤, Issue ٣,(٢٠٠٩)٧٢٤-٧٣٣

[٣٨] Liao, S.J. The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Nonlinear Problems, (PhD) thesis, shanghai jiao Tang University, (١٩٩٢) [٣٩] Liao, S.J. A Kind of Linearity- Invariance under Homotopy and some Simple Applications of it in Mechanics, Technical Report (٥٢٠), Institute of shipbuilding, university of Hamburg, Jan, (١٩٩٢)

[٤٠] Liao, S.J; A kind of Approximate Solution Technique which Does not Depend upon Small Parameters (II): An Application in Fluid Mechanics. Int.J. of Now-linear Mech, ٣٢ (١٩٩٧) ٨١٥-٨٢٢

[٤١] Liao, S.J. An Explicit Totally Analytic Approximation of Blasius Viscous Flow Problems, Int.J. Of Non-linear Mech, ٣٤(٤) (١٩٩٩) ٧٥٩-٧٧٨ (reprinted with permission from Elsevier)

[٤٢] Lia,S.J. A New Analytic Algorithm of Lane-Emden Equation, Applied Mathematices and Computation, ١٤٢(١) (٢٠٠٣) ١-١٦

[٤٣] Hilton, P.J. An Introduction to Homotopy Theory, Cambridge University Press, (١٩٥٣)

[٤٤] Grigolyuk, E.I; Shaliashilin, V.I. Problems of Nonlinear Deformation: the Continuation Method Applied to Nonlinear problems in solid Mechanics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Hardbound, (١٩٩١)

[٤٥] Alexander, J.C; Yorke, J.A. The Homotopy Continuation Method: Numerically Implement able Topological Procedures, Trans.AM. Math Soc, ٢٤٢ (١٩٧٨) ٢٧١-٢٨٤

[٤٦] Liao, SJ. An Analytic Approximate Approach for Free Oscillations of Self- Excited Systems, Int.J. Nonlinear Mech, ٣٩(٢) (٢٠٠٤) ٢٧١- ٢٨٠

[٤٧] Liao, SJ. A Uniformly Valid Analytic Solution of ٢D Viscous Flow Past a Semi-Infinite Flat Plate, J. of Fluid Mech, ٣٨٥ (١٩٩٩)١٠١-١٢٨

[٤٨] Liao, S.J; Campo, A. Analytic Solutions of the Temperature Distribution in Blasius Viscous Flow Problems,J. Of Fluid Mech, ٤٥٣ (٢٠٠٢) ٤١١-٤٢٥

[٤٩] Ayub, M; Rasheed, A; Hayat, T. Exact Flow of a Third Grade Fluid Past a Porous Plate Using Homotopy Ananlysis Method, Int. J. Engineering Science, ٤١ (٢٠٠٣) ٢٠٩١-٢١٠٩

[٥٠] Liao, S.J. On the Analytic Solution of Magneto Hydrodynamic Flow of Non- New tanion Fluids Over a Stretching Sheet. J. of Fluid Mech, ٤٨٨ (٢٠٠٣) ١٨٩-٢١٢

[٥١] Liao, S.J. Application of Process Analysis Method to the Solution of ٢D Nonlinear Progressive Gravity Wares, J. of ship Res, ٣٦ (١) (١٩٩٢) ٣٠-٣٧

[٥٢] Hayat, T; Abbas, Z; Sajid,M; Asghar,S. The Influence of Thermal Radiation on MHD Flow of a Second Grade Fluid, In. J. Heat mass Transfer, ٥٠ (٢٠٠٧) ٩٣١-٩٤١

[٥٣] Abbas,Z; Sajid,M; Hayat,T. MHD Boundary Layer Flow of an Upper- Convected Maxwell Fluid in a Porous Channel, The Com. Fluid. Dynamic, ٢٠ (٢٠٠٦) ٢٢٩-٢٣٨

[٥٤] Liao, S.J. Series Solutions of Unsteady Boundary- Layer Flows over a Stretching Flat Plate, Stud. App. Math. ١٧ (٢٠٠٦) ٢٣٩-٢٦٤

[٥٥] Ali,A; Mehmood,A. Homotopy Analysis of Unsteady- Boundary layer Flow Adjacent to Permeable Stretching Surface in a Porous Medium, Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, ١٣ (٢) (٢٠٠٨) ٣٤٠-٣٤٩

[٥٦] Domairry,G; Mohsenzadeh,A; Famouri,M. The Application of Homotopy Analysiy Method to Solve Nonlinear Differential Equation Governing Jeffery-Hamel Flow, Comm, Nonline. Sc. Num. Sim. ١٤ (١) (٢٠٠٩) ٨٥-٩٥

[٥٧] Domairry,G; Nadim,N. Assessment of Homotopy Analysis Method and Homotopy Perturbation Method in Non- Linear Heat Transfer Equation, Int, Commun. Heat mass Transfer, ٣٣ (١) (٢٠٠٨) ٩٣-١٠٢

[٥٨] Ziabakhsh,Z; Domairry,G. Solution of the Laminar Viscous Flow in a Semi Porous Channel in the Presence of a Uniform Magnetic Field by Using the Homotopy Analysis Method, Comm. Non Sci, Num. Sim, ١٤ (٤) (٢٠٠٩) ١٢٨٤-١٢٩٤

[٥٩] Domairry,G; Bararnia,H; Ziabakhsh,Z. Analytical Study of Heat Transfer Flow for a Third grade Fluid Between Parallel Plates and Stokes Problems. JP.J. Heat mass transfer, ٢ (٢) (٢٠٠٨) ١٨٩-٢٠٤

[٦٠] Bararnia,H; Ghotobi, Abdoul R; Domairry,G. On the Analytical Solution for MHD Natural Convection flow in Porous Medium, Comm. Nonlinear Sci Numer. Simulat, (٢٠٠٨)

[٦١] Ghotbi, Abdoul R; Bararnia.H; Domairry,G; barari,A. Investigation of a Powerful Analytical Method in to Natural Convection boundary layer flow, Comm. Nonlinear, Sci, Numer, Simulat, ١٤ (٢٠٠٩) ٢٢٢٢-٢٢٢٨

[٦٢] Barania,H; Gorji,M; Domairry,G; Ghotbi, Abdoul R. An Analytical Study of Boundary Layer Flow on a Continuous Stretching Surface Acta, Appl. Math, DoI, (٢٠٠٨) (١٠.١٠٠٧١s ١٠٤٤٠-٠٠٨-٩٢٨٦-٣)

[٦٣] Rezania,A; Ghorbali,A; Domairry,G; Bararnia,H. Consideration of Transient Heat Conduction, in a Semi- Infinite Medium using Homotopy Analysis Method. App. Math. Mech. (English Edition) ٢٩(١٢) (٢٠٠٨) ١٦١٧-١٦٢٣

[٦٤] Barania,H; Gorgi,M; Domairry,G and Rezania. An Approximation of the Analytical Solution of some Nonlinear Heat Transfer Equations: A Survey by using Homotopy

Analysis Method. Numerical Method for Partial Differential Equations (John wiley) (inpress)
[٦٥] Seripah Awang Kechil,Ishak Hashim, Series Solutions of Boundary-Layer Flows in Porous Media with Lateral Mass Flux, Heat and Mass Transfer, Volume ٤٤, Number ١٠ (٢٠٠٨)١١٧٩-١١٨٦

[٦٦] Mohamed E. Ali, The Effect of Lateral Mass Flux on the Natural Convection Boundary Layers Induced by a Heated Vertical Plate Embedded in a Saturated Porous Medium with Internal Heat Generation, International Journal of Thermal Sciences, Volume ٤٦, Issue ٢, (٢٠٠٧)١٥٧-١٦٣
[٦٧] Cheng, P. (١٩٧٧), "The Influence of Lateral Mass Flux on Free Convection Boundary Layers in a Saturated Porous Medium", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. ٢٠ pp.٢٠١-٦.
[٦٨] Cheng, Ping; Minkowycz, W. J., Free Convection about a Vertical Flat Plate Embedded in a Porous Medium with Application to Heat Transfer from a Dike, Journal of Geophysical Research, Volume ٨٢, Issue B١٤, p. ٢٠٤٠-٢٠٤٤

[٦٩] Magyari, E.; Keller, B., Exact Analytic Solutions for Free Convection Boundary Layers on a Heated Vertical Plate with Lateral Mass Flux Embedded in a Saturated Porous Medium, Heat and Mass Transfer, Volume ٣٦, Issue ٢, pp. ١٠٩-١١٦ (٢٠٠٠

[٧٠] RB Bird, RC Armstrong, O Hassager, Dynamics of polymeric Liquid- John Wiley& Sons, New York, ١٩٨٧ - osti.gov
[٧١] R. L. Fosdick and K. R. Rajagopal, Anomalous Features in the Model of “Second order Fluids”, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume ٧٠, Number ٢ / June, ١٩٧٩
[٧٢] Beard, D. W.; Walters, K.; Oldroyd, J. G., Elastico-Viscous Boundary-Layer Flows In Two-Dimensional Flow Near a Stagnation Point, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. ٦٠, issue ٠٣, p. ٦٦٧
[٧٣] RS Rivlin, JL Ericksen, Stress-Deformation Relations for Isotropic Materials, J. Rat. Mech. Anal, ١٩٥٥
[٧٤] Rr.g.larson,Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions,Butterworths Publishing Co.,Boston,USA,١٩٨٨
[٧٥]J. Harris, Rheology and Non-Newtonian Flow, Longman, London, ١٩٧٧.

[٧٦] Kayvan Sadeghy, Mehdi Sharifi, Local Similarity Solution for the Flow of a "Second-Grade" Viscoelastic Fluid above a Moving Plate, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume ٣٩, Issue ٨,(٢٠٠٤)١٢٦٥-١٢٧٣

[٧٧] Kayvan Sadeghy, Amir-Hosain Najafi, Meghdad Saffaripour, Sakiadis Flow of an Upper-Convected Maxwell Fluid, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume ٤٠, Issue ٩,(٢٠٠٥)١٢٢٠-١٢٢٨

[٧٨] Rafael Cortell, Analysing Flow and Heat Transfer of a Viscoelastic Fluid over a Semi-Infinite Horizontal Moving Flat Plate, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume ٤٣, Issue ٨,(٢٠٠٨)٧٧٢-٧٧٨

Abstract

Study of many phenomena such as heat transfer,mass transfer,fluid mechanics and plasma physics leads to the system of non-linear equations which can be solved either by an approximate,analytical or numerical method.

In most cases owing to the non-linearity and the coupling of high orders equations their numerical solution is difficult and comple. However, some of these problems are solved by numerical methods and in some cases the analytical and semi-analytical methods are employed.

In this thesis, some modern analytical methods like *Perturbation, Homotopy Perturbation, Variational iteration and Adomian decomposition* are studied. The methods are applied in few cases of engineering sciences such as fluid mechanics and heat transfer. The analytical methods are explained with some examples which are preceded with advantage and disadvantages. *Homotpy analysis* which remove the shortage of previous methods offer new solutions for the complex non-linear governing equations.

Finally, the performance of method is investigated by introducing two problems.The results derived from *Homotopy analysis method* are exactly similar to the *Numericals* as well as *Exact solutions.* The convergence area is well controllable in relation to the methods introduced in this thesis.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Application of New Analytical and Numerical Methods to Nonlinear Heat-transfer Problems

Seyed Mohammad Hosseini Emam

Supervisors:
Dr.Mohammad Javad Maghrebi
Dr.Davood Domairy Ganji

September ۲۰۰۹