

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل ترمو الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم چرخان از مواد ناهمگن FG تحت
فشار داخلی و خارجی

دانشجو:

مهدی بوژمهرانی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهنوی

تیر ۱۳۹۰

تقدیم به

او که همواره دعایش باعث سلامت و موفقیت من است.

مادر مهربانم

و او که حضورش انگیزه، و همواره حامی و مشوق من است.

همسر عزیزم

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که دریای بیکران علم و رحمت است. آفریدگار بی نیازی که به انسان قدرت تفکر و اندیشیدن و توانایی مهر ورزیدن ارزانی داشت. حال که مراحل انجام پروژه به اتمام رسیده است بر خود لازم می دانم که از همکاری، یاری و محبت کلیه کسانی که در انجام این تحقیق خصوصا از زحمات بی دریغ، تلاش های بی وقفه و راهنمایی های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر مهدی قناد در راستای انجام این پروژه در طول دو سال گذشته تشکر و قدردانی نمایم.

تعهد نامه

اینجانب مهدی بوژمهرانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل ترمو الاستیک استوانه های جدار ضخیم چرخان از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی و خارجی تحت راهنمایی دکتر مهدی قناد کهتویی متعهد می شوم :

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ : ۹۰/۴/۲۸

امضاء دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و این مطلب باشد به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد .

چکیده

پوسته^۱های استوانه‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. FGM^۲ها به دلیل مقاومت زیاد در برابر گزاردیان دمایی بالا و بارهای مکانیکی بالا، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد و ... توجه بسیاری از محققین را به خود جلب نمودند. در همین راستا، هدف از مطالعه حاضر، بررسی و مدل سازی تنش‌ها و جابه جایی‌های ایجاد شده در استوانه‌های جدار کلفت ناهمگن تحت بارگذاری‌های مرکب مکانیکی و حرارتی می‌باشد. این مطالعه در چهار حالت مختلف انجام شد.

در حالت اول، نتایج بارگذاری فشاری تنها بر استوانه جدار ضخیم توسط تئوری الاستیسیته مستوی مورد ارزیابی قرار گرفت. معادله حاکم بر سیستم در این حالت دارای سه جواب حقیقی، مضاعف و مختلط بود که مدل سازی عددی تنها برای ریشه حقیقی انجام شد که انطباق خوبی هم با نتایج تحلیلی داشت.

در حالت دوم، شرایط بارگذاری حرارتی بر استوانه جدار ضخیم توسط تئوری الاستیسیته مستوی تحلیل شد و نتایج به دست آمده نشان داد که قضیه برهم نهی در این شرایط برقرار می‌باشد و از حاصل جمع تحلیل تنش‌ها و جابجایی فشاری و حرارتی به صورت جداگانه، تحلیل تنش و جابجایی ترموالاستیک ارائه می‌شود.

در حالت سوم، شرایط بارگذاری فشاری و چرخشی بر استوانه جدار ضخیم توسط تئوری الاستیسیته مستوی ارزیابی شد که پس از حل معادله حاکم مشاهده گردید که جمع آثار در این حالت نیز برقرار می‌باشد.

در نهایت نیز بارگذاری فشاری، چرخشی و حرارتی بر استوانه جدار ضخیم اعمال شد و توسط تئوری الاستیسیته مستوی مورد تحلیل قرار گرفت. مطالعه بر روی معادله حاکم بر این سیستم نیز نشان داد که در این حالت نیز شرایط جمع آثار برقرار است.

واژگان کلیدی: استوانه‌ی جدار ضخیم، ترموالاستیک، المان محدود، استوانه‌ی چرخان، FGM

¹ - shell

² functionally graded materials

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

فهرست مطالب

فصل ۱: مروری بر روش های تحلیل پوسته ها

۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ دسته بندی پوسته ها
۴	۳-۱ تئوری پوسته های نازک
۵	۱-۳-۱ تئوری غشایی
۶	۲-۳-۱ تئوری خمشی
۸	۴-۱ تئوری پوسته های کلفت
۹	۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته ی خطی
۱۰	۵-۱ مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)
۱۱	۱-۵-۱ ویژگی های مواد FG
۱۳	۲-۵-۱ تاریخچه ی مواد FG
۱۴	۳-۵-۱ فرایندهای تولید مواد FG
۱۶	۴-۵-۱ مدل سازی ریاضی مواد FG
۱۸	۶-۱ پیشینه ی پژوهش
۲۱	۷-۱ جمع بندی

فصل ۲: تحلیل الاستیک پوسته های استوانه ای FGM

۲۳	۱-۲ مقدمه
۲۳	۲-۲ روابط اساسی
۲۵	۱-۲-۲ مسائل متقارن محوری
۲۷	۳-۲ تئوری الاستیسیته صفحه ای
۲۹	۱-۳-۲ شرایط انتهایی استوانه
۳۰	۲-۳-۲ استوانه های همگن
۳۰	۳-۳-۲ استوانه های ناهمگن
۳۱	۴-۲ حل الاستیک استوانه های ناهمگن

۳۱	۱-۴-۲ ریشه های حقیقی
۳۳	۲-۴-۲ ریشه های مضاعف
۳۴	۳-۴-۲ ریشه های مختلط
۳۷	۴-۴-۲ استوانه های تحت فشار داخلی
۳۷	۵-۴-۲ استوانه های تحت فشار خارجی
۳۸	۵-۲ حل عددی استوانه های ناهمگن
۳۹	۶-۲ بررسی نتایج
۴۵	۷-۲ نتیجه گیری

فصل ۳: تحلیل ترمو الاستیک پوسته های استوانه ای FGM

۴۸	۱-۳ مقدمه
۴۸	۲-۳ روابط اساسی
۵۰	۱-۲-۳ مسائل متقارن محوری
۵۲	۳-۳ تئوری الاستیسیته صفحه ای
۵۳	۱-۳-۳ شرایط انتهایی استوانه
۵۵	۲-۳-۳ استوانه های همگن
۵۵	۳-۳-۳ استوانه های ناهمگن
۵۶	۴-۳ حل ترمو الاستیک استوانه های ناهمگن
۵۶	۱-۴-۳ حل مسئله انتقال حرارت
۵۷	۲-۴-۳ ریشه های حقیقی
۶۱	۳-۴-۳ ریشه های مضاعف
۶۳	۴-۴-۳ ریشه های مختلط
۶۶	۵-۳ حل عددی استوانه های ناهمگن
۶۷	۶-۳ بررسی نتایج
۷۳	۷-۳ نتیجه گیری

فصل ۴: تحلیل الاستیک پوسته های استوانه ای چرخان FGM

۷۶	۱-۴ مقدمه
۷۶	۲-۴ روابط اساسی
۷۸	۱-۲-۴ مسائل متقارن محوری
۸۰	۳-۴ تئوری الاستیسیته صفحه ای

۸۲	۳-۴-۱ شرایط انتهایی استوانه
۸۳	۳-۴-۲ استوانه های همگن
۸۳	۳-۴-۳ استوانه های ناهمگن
۸۴	۴-۴ حل الاستیک استوانه های ناهمگن چرخان
۸۵	۴-۴-۱ ریشه های حقیقی
۸۷	۴-۴-۲ ریشه های مضاعف
۹۰	۴-۴-۳ ریشه های مختلط
۹۳	۴-۵ حل عددی استوانه های ناهمگن
۹۴	۴-۶ بررسی نتایج
۱۰۰	۴-۷ نتیجه گیری

فصل ۵: تحلیل ترموالاستیک پوسته های استوانه ای چرخان FGM

۱۰۲	۵-۱ مقدمه
۱۰۲	۵-۲ روابط اساسی
۱۰۴	۵-۲-۱ مسائل متقارن محوری
۱۰۵	۵-۳ تئوری الاستیسیته صفحه ای (لامه)
۱۰۷	۵-۳-۱ شرایط انتهایی استوانه
۱۰۸	۵-۳-۲ استوانه های همگن
۱۰۹	۵-۳-۳ استوانه های ناهمگن
۱۱۰	۵-۴ حل ترموالاستیک استوانه های ناهمگن چرخان
۱۱۰	۵-۴-۱ حل مسئله انتقال حرارت
۱۱۲	۵-۴-۲ ریشه های حقیقی
۱۱۵	۵-۴-۳ ریشه های مضاعف
۱۱۸	۵-۴-۴ ریشه های مختلط
۱۲۳	۵-۵ حل عددی استوانه های ناهمگن
۱۲۴	۵-۶ بررسی نتایج
۱۳۰	۵-۷ نتیجه گیری

فصل ۶: جمع بندی و نتیجه گیری

۱۳۲	۶-۱ مقدمه
-----	-----------

۱۳۲

۱۳۵

۱۳۶

۲-۶ جمع بندی و نتیجه گیری

۳-۶ پیشنهادها

مراجع

فهرست شکل ها

- شکل ۱-۱ نمای مقطع یک استخوان ۱۱
- شکل ۲-۱ مقایسه تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۳
- شکل ۳-۱ ساختار گروه های پروژه ساخت FGM در ژاپن ۱۴
- شکل ۴-۱ دسته بندی روش های گوناگون تولید مواد FG ۱۵
- شکل ۱-۲ نمایش یک المان از استوانه ضخیم ۲۳
- شکل ۲-۲ مدل مقطع طولی استوانه FGM با تقسیم به ۲۰ لایه ۳۹
- شکل ۳-۲ توزیع مدول الاستیک در لایه های شعاع استوانه ۴۰
- شکل ۴-۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی ۴۱
- شکل ۵-۲ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی ۴۱
- شکل ۶-۲ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی ۴۲
- شکل ۷-۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی ۴۲
- شکل ۸-۲ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی ۴۳
- شکل ۹-۲ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی ۴۳
- شکل ۱۰-۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی ۴۴
- شکل ۱۱-۲ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی ۴۴
- شکل ۱۲-۲ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی ۴۵
- شکل ۱-۳ نمایش یک المان از استوانه ضخیم ۵۶
- شکل ۲-۳ مدل مقطع طولی استوانه FGM با تقسیم به ۲۰ لایه ۶۷
- شکل ۳-۳ توزیع درجه حرارت در امتداد شعاع ۶۸
- شکل ۴-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی ۶۹
- شکل ۵-۳ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی ۶۹
- شکل ۶-۳ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی ۷۰
- شکل ۷-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار خارجی ۷۰
- شکل ۸-۳ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار خارجی ۷۱

- شکل ۳-۹ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار خارجی ۷۱
- شکل ۳-۱۰ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی و خارجی ۷۲
- شکل ۳-۱۱ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی و خارجی ۷۲
- شکل ۳-۱۲ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی و خارجی ۷۳
- شکل ۴-۱ مدل مقطع طولی استوانه FGM با تقسیم به ۲۰ لایه ۹۴
- شکل ۴-۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن فشار داخلی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۵
- شکل ۴-۳ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۶
- شکل ۴-۴ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۶
- شکل ۴-۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن فشار خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۷
- شکل ۴-۶ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۷
- شکل ۴-۷ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۸
- شکل ۴-۸ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن فشار داخلی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۸
- شکل ۴-۹ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۹
- شکل ۴-۱۰ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت ۹۹
- شکل ۵-۱ مدل مقطع طولی استوانه FGM با تقسیم به ۲۰ لایه ۱۲۳
- شکل ۵-۲ توزیع درجه حرارت در امتداد شعاع ۱۲۵
- شکل ۵-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت ۱۲۵

- ۱۲۶ شکل ۴-۵ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت
- ۱۲۶ شکل ۵-۵ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت
- ۱۲۷ شکل ۶-۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت
- ۱۲۷ شکل ۷-۵ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت
- ۱۲۸ شکل ۸-۵ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت
- ۱۲۸ شکل ۹-۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت
- ۱۲۹ شکل ۱۰-۵ توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت
- ۱۲۹ شکل ۱۱-۵ توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت

فهرست جداول

جدول ۱-۱ مطالعات انجام شده در خصوص استوانه های همگن و ناهمگن ۲۰

علائم و اختصارات

σ_r	تنش شعاعی
σ_θ	تنش مماسی
σ_z	تنش محوری
u_r	جابجایی شعاعی
u_θ	جابجایی مماسی
u_z	جابجایی محوری
E	مدول الاستیک
ν	نسبت پواسون
γ	کرنش برشی
τ	تنش برشی
μ, λ	ثابت های لامه
ε_r	کرنش شعاعی
ε_θ	کرنش مماسی
ε_z	کرنش محوری
p_i	فشار داخلی
p_o	فشار خارجی
T^*	دمای محیط
r	شعاع استوانه
r_i	شعاع داخلی
r_o	شعاع خارجی
R	نسبت شعاع به شعاع داخلی
k	نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی
ω	سرعت دورانی
δ_{ij}	دلتای کرونکر
B	نیروی حجمی
α	ضریب انبساط حجمی
ρ	چگالی
N_θ, N_z	نیروهای محوری بر واحد طول

Q_z	نیروی برشی بر واحد طول
M_z	لنگر خمشی بر واحد طول
h	ضخامت پوسته
I	ماتریس همانی
γ	کرنش برشی

فصل ۱

مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۱-۱ مقدمه

پوسته^۱ها یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسان‌ها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند، در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب کننده‌ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

پوسته‌ها به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آنها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی - تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌تری برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند. در این فصل، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و کلفت، مطالعات انجام شده در خصوص موضوع پایان نامه ارائه می‌شود.

۱-۲ دسته بندی پوسته‌ها [۲۹].

در این بخش، پوسته‌ها را از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته بندی می‌کنیم.

الف - از دیدگاه هندسی:

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۲: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

¹ - shell

² -shell of translation

پوسته‌ی حاصل از دوران^۱: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک^۲: پوسته‌ی ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی^۳ آن کوچک‌تر از $1/20$ باشد.

پوسته‌ی جدار کلفت^۴: پوسته‌ی ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگ‌تر از $1/20$ باشد.

ب- از دیدگاه مادی:

پوسته‌ی همگن^۵: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن^۶: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد^۷: خواص مکانیکی (E, \mathbf{u}) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد^۸: خواص مکانیکی (E, \mathbf{u}) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری:

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۹: جابجایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

¹ - shell of rotation

² - thin shell

³ - mid surface

⁴ - thick shell

⁵ - Homogenous shell

⁶ - Inhomogeneous shell

⁷ - Isotropic shell

⁸ - Anisotropic shell

⁹ - small deflection

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ^۱: جابجایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی باری، کوچک نیست (رفتار غیر خطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان^۲: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۳: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۱-۳ تئوری پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچکتر از $1/20$ می‌باشد. تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی- تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به دست می‌آورند. دقت نتایج تئوری‌های ارایه شده بستگی به درجه‌ی ساده سازی روابط الاستیسیته دارد.

اولین فرضیات را کیرشهف (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به کار گرفته شد. ارون (۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لوو-کیرشهف مشهور است. رایسنر (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات، تحلیل پوسته‌های متقارن محوری^۴ حاصل از دوران را ارائه نمود. فلوگه (۱۹۳۲) اولین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آنها تئوری پوسته‌ها نقدی (۱۹۵۷) تئوری غیر خطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که بکارگیری آنها

¹ -large deflection

² - elastic behavior

³ - plastic behavior

⁴ - Axisymmetric shells of revolution

مشکل می‌باشد. سندرز(۱۹۵۹) فرمول بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلف (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و بدین ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان بدین گونه تقسیم بندی کرد:

۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)^۱

۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)^۲

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشاء^۳ از دیدگاه مکانیکی، یک تار^۴ دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی^۵ آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است.

در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابجایی سطح میانی توصیف و مسایل در حالت تنش صفحه‌ای^۶ و کرنش صفحه‌ای^۷ با چشم پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۱].

معادلات برای پوسته‌ای استوانه‌ای با تقارن محوری (N_z و N_θ نیروهای محوری بر واحد طول):

$$\frac{dN_z}{dz} = -p_z$$

$$\frac{N_\theta}{R} = p_r \quad (1-1)$$

1 - Membrane theory

2 - bending theory

3 - membrane

4 - string

5 - bending stiffness

6 - plane stress

7 - plane strain

از معادلات بالا نتیجه می‌شود که تنش طولی در مخزن استوانه‌ای تحت فشار یکنواخت داخلی P، ثابت است و تنش محیطی (تنش بیشینه) برابر است با:

$$N_z = cte$$

$$N_\theta = P R \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} = \frac{P R}{h} \quad (2-1)$$

$$\sigma_z = \nu \sigma_\theta = \nu \frac{P R}{h}$$

و جا به جایی شعاعی استوانه:

$$u_r = (1-\nu^2) \frac{P R^2}{E h} \quad (3-1)$$

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق^۱ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۲ دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه مقدماتی تیرها توسط ناویر ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو با همین فرضیات، تئوری خمشی را صورت بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جا به جایی پوسته با جابه جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو-کیرشهف می‌نامند که عبارتند از:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک):

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک):

¹ -plate
² - beam

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

معادلات برای پوسته‌ی استوانه‌ای با تقارن محوری (N_z و N_θ نیروهای محوری بر واحد طول، Q_z نیروی برشی بر واحد طول و M_z لنگر خمشی بر واحد طول):

$$\begin{aligned} \frac{dN_z}{dx} &= -p_z \\ \frac{N_\theta}{R} + \frac{dQ_z}{dz} &= p_r \\ \frac{dM_z}{dz} &= Q_z \end{aligned} \quad (۴-۱)$$

از معادلات بالا نتیجه می‌شود که تنش طولی در مخزن استوانه‌ای تحت فشار یکنواخت داخلی P ، ثابت است و تنش محیطی (تنش بیشینه) برابر است با:

$$\begin{aligned} N_z &= cte \\ N_\theta &= \left(P - \frac{dQ_z}{dz}\right)R = \left(P - \frac{d^2M_z}{dz^2}\right)R \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} \end{aligned} \quad (۵-۱)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \nu \sigma_\theta = \nu \frac{N_\theta}{h} \\ M &= D \frac{d^2W}{dz^2}, \quad D = \frac{E h^3(z)}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (۶-۱)$$

D به سختی خمشی و w خیز شعاعی استوانه می‌باشد. با جایگذاری در رابطه‌ی (۵-۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(D(z) \frac{d^2w}{dz^2} \right) + \frac{E h(z)}{(1-\nu^2)R^2} w = P \quad (۷-۱)$$

معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن (۷-۱)، معادله‌ی اصلی پوسته‌های استوانه‌ای متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی است که برای استوانه‌های نازک با جدار ثابت و متغیر کاربرد دارد. اگر جدار ثابت باشد، معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + \frac{12}{R^2 h^2} w = \frac{P}{D} \quad (۸-۱)$$

حل خصوصی معادله (۸-۱)، همان حل تئوری غشایی است.

$$w_p = (1-\nu^2) \frac{P R^2}{E h} \quad (۹-۱)$$

و جابجایی شعاعی استوانه:

$$w = w_g + w_p$$

$$u_r = w = K (1-\nu^2) \frac{P R^2}{E h} \quad (۱۰-۱)$$

۴-۱ تئوری پوسته‌های کلفت

در پوسته‌های کلفت، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R بیشتر از $\frac{1}{20}$ می‌باشد. تئوری این دسته از پوسته‌ها نیز بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک نبودن ضخامت نسبت به ابعاد دیگر، نمی‌توان از تئوری‌های پوسته‌های نازک استفاده نمود و باید از تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده کرد ولیکن به دلیل پیچیدگی تحلیل با فرضیاتی می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی برای تحلیل استوانه‌ای کلفت بهره گرفت.

اولین بار لامه^۱ (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی)^۲، حل دقیق استوانه‌ای کلفت متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد [۲]. که تا کنون نیز در حل مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین^۳ (۱۹۳۰) روابط

^۱ - lame
^۲ - plane elasticity
^۳ - galerkin

پوسته های کلفت را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته‌ی به دست آورد. ولاسف^۱ (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های کلفت ارائه کرد. گرینس پن^۲ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی کلفت را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و کلفت مقایسه نمود[۳].

تئوری عمومی پوسته‌های کلفت را می‌توان بدین گونه تقسیم بندی کرد.

۱- تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

۲- تئوری الاستیسیته سه بعدی

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

به طور کلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله داریم که می‌تواند ۱۵ مجهول را به دست آورد، معادلات عبارتند از: ۳ معادله تعادل (تنش)، ۶ معادله سینماتیک (کرنش- جا به جایی) و ۶ معادله رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: ۶ مؤلفه تنش (تانسور متقارن تنش)، ۶ مؤلفه کرنش (تانسور متقارن کرنش) و ۳ مؤلفه جابه جایی (بردار جابه جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته ها را به طور کامل توصیف می کند و منجر به حل دقیق می‌شود و لیکن حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به کار گیری آنها امکان‌پذیر نیست. با فرضیات ساده شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها به کار برد.

در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، هم چنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود ولیکن برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جا به جایی هر نقطه از پوسته، جا به جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های کلفت مشهور است [۴].

معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی کلفت جدار ثابت عبارتست از:

¹ - Vlassov

² - Greenspon

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0 \quad \text{or} \quad r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0 \quad (11-1)$$

و جا به جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (12-1)$$

r شعاع استوانه، C_1 و C_2 ثابت‌های معادله هستند که با شرایط مرزی به دست می‌آیند.

۵-۱ مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) [۲۹]

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوا و فضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. از این رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها)^۱ در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری توأم مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالوژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

لخنیتسکی^۲ (۱۹۵۰) تئوری الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را فرمول بندی کرد و پس از وی دیگران، تئوری‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیت را ارائه دادند. وینسون^۳ (۱۹۷۴) تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیت به کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه انجام داد.

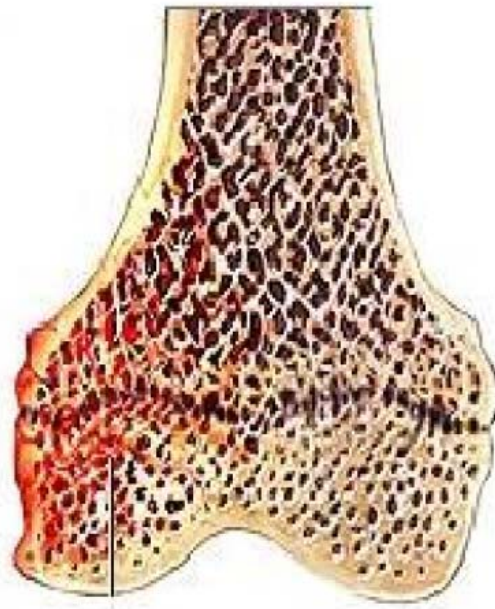
اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آنهاست که در نتیجه‌ی موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی ریزی شد. مواد با

¹ - composit materials

² - lekhnitski

³ - Vinson

تغییرات تابعی خواص یا مواد هدفمند (FGM) در ساختار ارگانیسیم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به عنوان مثال: استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG، ناهمگن هستند و لیکن آنها را همسانگرد در نظر می‌گیرند.



شکل (۱-۱) نمای مقطع یک استخوان [۲۹]

۱-۵-۱ ویژگی‌های مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای

ویژگی‌های به شرح زیر می‌باشند: [۵]

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا. درحقیقت اینگونه مواد با کاهش تنش‌های حرارتی، آثار منفی آنها را به نحو قابل توجهی کاهش می‌دهند. به کمک مواد FG می‌توان در نواحی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند، آنها را کنترل کرد.

۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا، به کمک مواد FG می‌توان استحکام مواد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان و حتی شکست^۱ تا حدود زیادی جلوگیری شود.

۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در برخی از نقاط جسم ایجاد می‌شود، مانند لبه‌های جسم و نزدیکی سوراخ‌ها و گشودگی‌ها. به کمک مواد FG می‌توان آثار تمرکز تنش را به نحو چشم‌گیری کاهش داد.

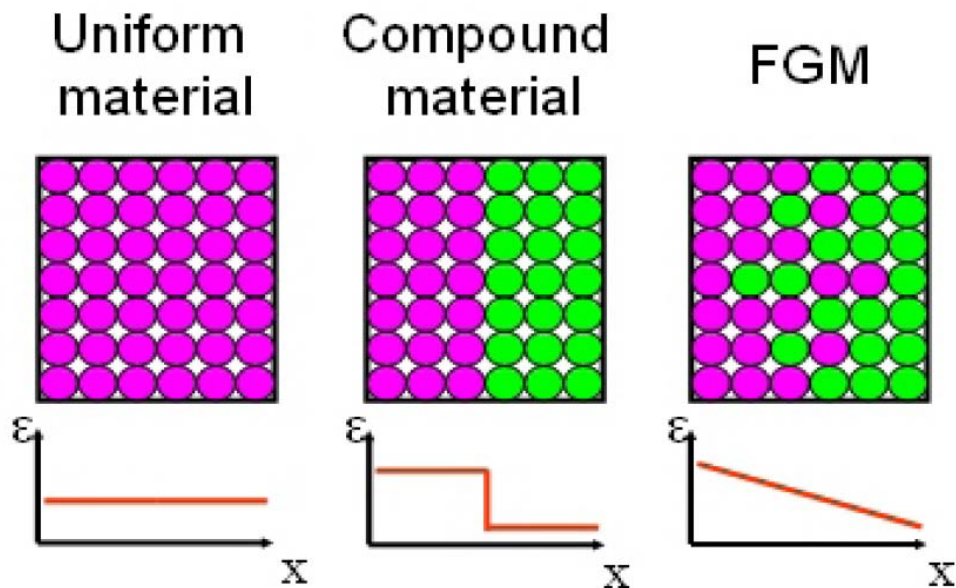
۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد هدفمند FG است.

۵- اگر پوشش ترد^۲ بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل (۱-۲) مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و FGM را نشان می‌دهد.

¹ - fracture

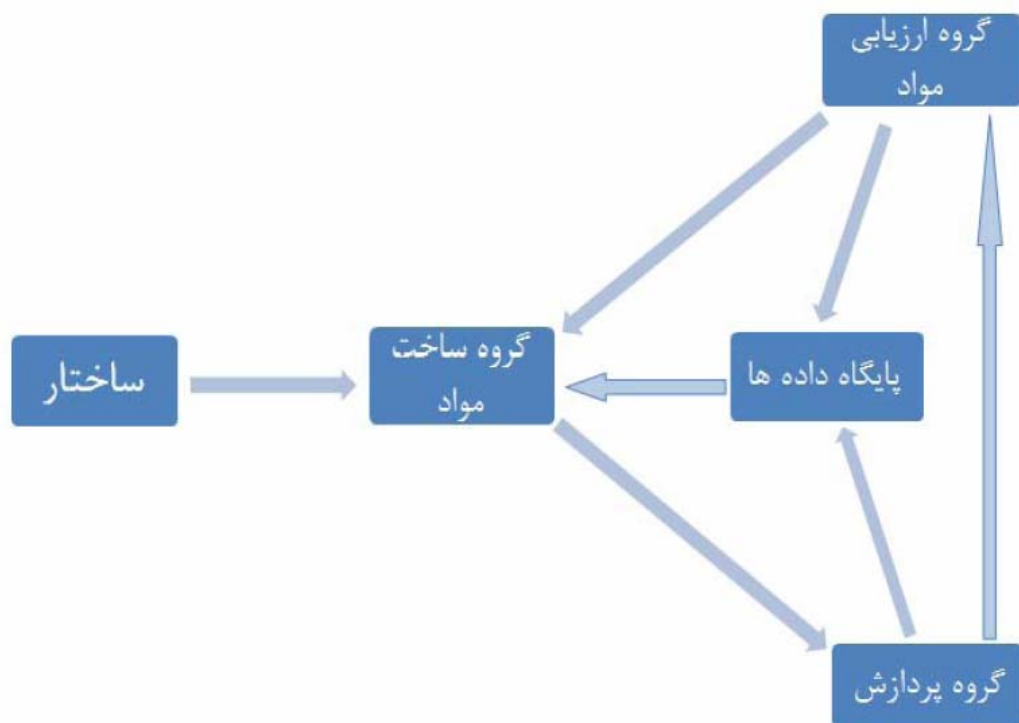
² -Brittle Coating



شکل (۱-۲) مقایسه تغییرات خواص در مواد مختلف [۵]

۱-۵-۲ تاریخچهی مواد FG

مفهوم اولیهی FGM توسط نینو Niino و همکارانش در ۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از ۱۹۸۶ مطالعات امکان سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد [۶ و ۷]. مرحلهی اول پروژهی ملی «فناوری گسترش FGM» طی سالهای ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در این پروژه، سه گروه: ساخت مواد، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد. در این صورت شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء می شود.

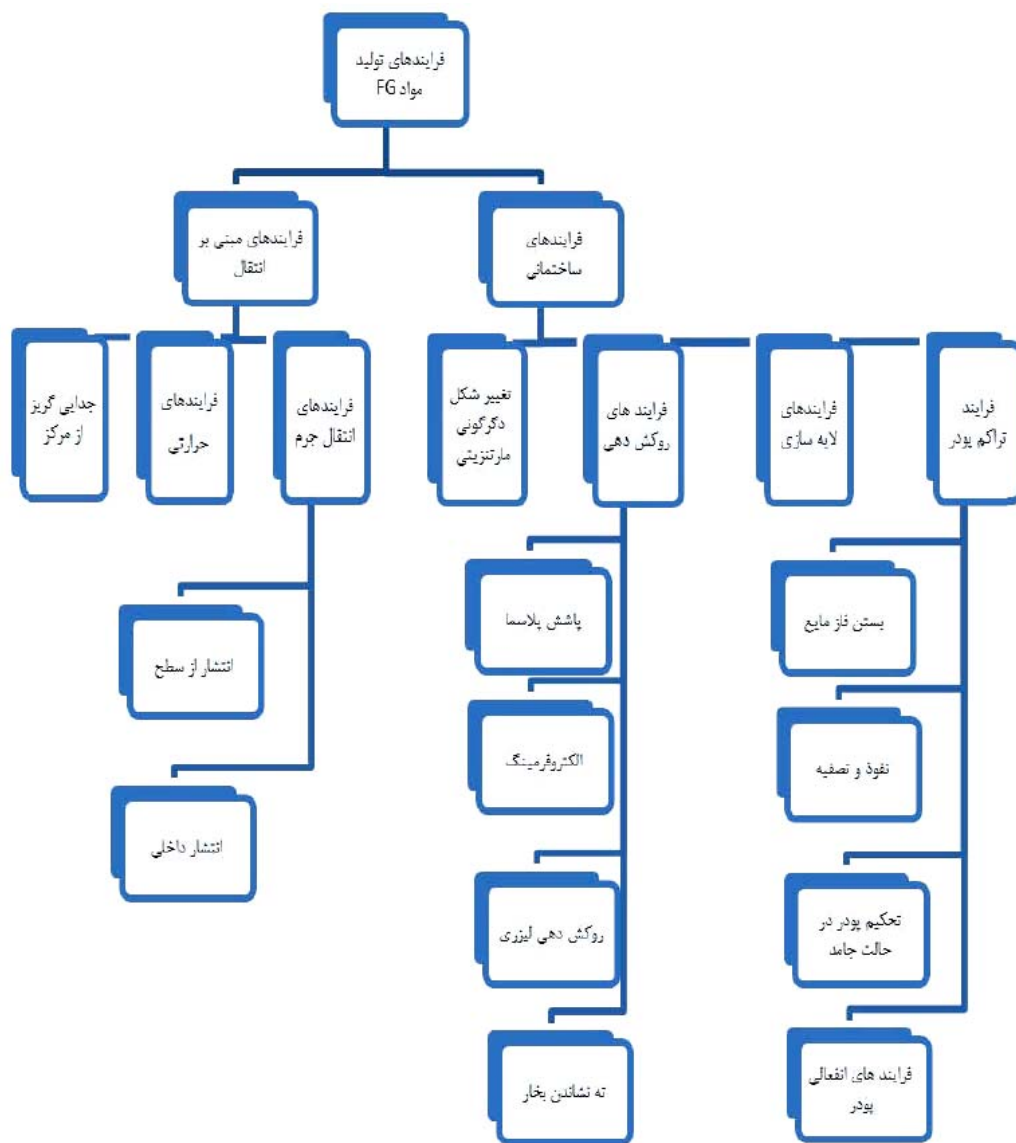


شکل (۱-۳) ساختار گروه های پروژه ساخت FGM در ژاپن [۷]

پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلیمتر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلیمتر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های او را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند. مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلیمتر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم کره به قطر ۵۰ میلیمتر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم جهانی FGM در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به ویژه تحلیل سازه‌های FGM فراگیر شد.

۱-۵-۳ فرایندهای تولید مواد FG

تا کنون فرایندهای تولید مواد FG در محدوده‌ی آزمایشگاه‌های تخصصی بوده و هنوز روش تولید نیمه صنعتی با صرفه‌ی اقتصادی ارائه نشده است. به طور کلی روش‌های تولید موجود را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم کرد [۵].



شکل (۱-۴) دسته بندی روش های گوناگون تولید مواد FG [۵]

گروه اول: فرایندهای تولید مواد FG به صورت لایه لایه، که به آن فرایندهای ساختمانی می‌گویند. این نوبی فرایندها، نتیجه‌ای از پیشرفت‌های شگرف انجام شده در زمینه‌ی اتوماسیون ساخت مواد پیشرفته می‌باشد. در فرایندهای ساختمانی، تغییرات تدریجی توسط انباشته شدن مواد با یک روش برنامه ریزی شده انجام می‌شود. با روش‌های ساخت در این گروه، مدل‌های مواد FG را می‌توان به هر شکل و یا هر گونه تغییرات دلخواهی سازگار کرد. به همین دلیل هیچ‌گونه محدودیتی در چگونگی تغییرات تدریجی وجود ندارد. این نکته موجب انعطاف‌پذیری در طراحی می‌شود. با وجود نکات مثبت فراوان این روش‌ها، تولید مواد

FG با آنها، بسیار پر هزینه، وقت گیر و دشوار است که با افزایش دقت‌ها، مشکلات آن چند برابر می‌شوند. در شکل (۴-۱) روش‌های این گروه نشان داده شده است.

گروم دوم: فرایندهای تولید مواد FG مبتنی بر پدیده‌ی انتقال برای ایجاد تغییرات تدریجی در یک جزء از مواد می‌باشند. این نوع فرایندها از جریان سیال، انتشار اتمی یا انتقال حرارت برای تولید تغییرات تدریجی در زیرساختارهای محلی یا ترکیب‌های موجود بهره می‌گیرند. جریان سیال و انتشار حالت جامد در طول فرایند جامدسازی، پاسخ‌گوی تفکیک کریستال‌ها در ساخت مواد آلیاژی می‌باشد. به این ترتیب به گونه‌ای دیگر، روش‌هایی برای ایجاد تغییرات تدریجی به دست می‌آیند. روش‌های تولید فرایند انتقال، انعطاف پذیری روش‌های تولید فرایندهای ساختمانی را ندارند ولی از لحاظ زمان و هزینه، بسیار مناسب‌تر از روش‌های گروه اول می‌باشند.

۴-۵-۱ مدل سازی ریاضی مواد FG

با توجه به اینکه مواد FG اساساً ناهمگن می‌باشند و خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آنها به صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند، می‌توان تغییر خواص را با یک تابع پیوسته‌ی ریاضی، مدل کرد و از آن در روش‌های تحلیلی و عددی بهره گرفت. روش مرسوم در مدل‌سازی خواص مکانیکی و حرارتی مواد FG، استفاده از یک تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته‌ی خواص در ماده می‌باشد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص، تغییرات مدول کشسانی^۱ (E)، ضریب هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و چگالی را در نظر می‌گیرند و تغییرات ضریب پواسون^۲ (ν) را لحاظ نمی‌کنند. دلیل آن، مقدار ضریب پواسون است که بسیار نزدیک به هم می‌باشد، به گونه‌ای که می‌توان از تغییرات ناچیز آن در جسم، چشم‌پوشی کرد، یعنی ماده را ناهمگن همسانگرد (FGM ایزوتروپ) در نظر گرفت.

آباتا و نودا (۱۹۹۴) Obata & Noda تابع توانی [۸]، هورگان و چان (۱۹۹۹) Horgan & chan تابع توانی [۹]، یانگ (۲۰۰۰) Yang تابع توانی [۱۰]، توتونچو (۲۰۰۱) Tutunkui تابع توانی [۱۱]، تارن (۲۰۰۱) Tarn تابع توانی [۱۲]، جباری و همکاران (۲۰۰۲) تابع توانی [۱۳]، ارسلان و آکیز (۲۰۰۶) Eraslan &

^۱ - EISTICITY Modulus, young's modulus

^۲ - poisson's ratio

Akis تابع نمایی [۱۴] و هونگ جون و ژیفای (۲۰۰۶) Hongjon & Zhifei تابع نمایی [۱۵] را در روش‌های تحلیلی به کار بردند.

خواص توانی ماده می‌تواند بصورت مقابل تعریف شود:

$$P(z) = P_a \left(\frac{z}{a} \right)^n \quad (۱۳-۱)$$

P_a خاصیت ماده (مکانیکی، حرارتی و ...) در یک لایه‌ی مشخص و n ثابت ناهمگنی است.

رایج‌ترین ماده FG، تلفیق فلز-سرامیک است که با افزودن برخی عناصر آلیاژی دیگر خواص دلخواه تأمین می‌شود. پراوین و ردی (۱۹۹۸) Praveen & Reddy رابطه‌ی ویژه‌ای برای یک ورق FGM با ضخامت ثابت H را ارائه کردند. ایشان تغییر خواص را در ورق به صورت زیر بیان نمودند [۱۶]:

$$P(z) = (P_c - P_m)V^n + P_m \quad (۱۴-۱)$$

P_m خواص فلز، P_c خواص سرامیک و V نسبت حجمی در جسم می‌باشد.

$$V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (۱۵-۱)$$

اگر $n=0$ باشد، ورق همگن سرامیک به دست می‌آید؛ اگر $z = -\frac{h}{2}$ باشد، خاصیت فلزی و اگر $z = \frac{h}{2}$

باشد، خاصیت سرامیک به دست می‌آید. این ماده در اجسامی که لبه‌ی بالایی آن در معرض گرادیان دمایی بالا و لبه‌ی پایینی آن تحت بارهای مکانیکی قرار دارند، بسیار مفید است.

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت کلی‌تر برای دو خاصیت به شکل زیر بیان نمود:

$$P(z) = (P_1 - P_2)V^n + P_2 \quad (۱۶-۱)$$

P_1, P_2 خواص در دو لایه‌ی مختلف می‌باشد. به عنوان مثال رابطه برای یک استوانه‌ی توخالی جدار ثابت،

مدول یانگ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} E(r) = (E_o - E_i)V^n + E_i \\ V = \frac{r/r_i - 1}{r_o/r_i - 1} \end{cases} \quad (17-1)$$

E_o, E_i به ترتیب، مدول یانگ ماده‌ی FG در شعاع داخلی و خارجی استوانه می‌باشد.

۱-۶ پیشینه‌ی پژوهش

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف، همانگونه که در بخش ۱-۴ بیان شد، دارای قدمت نسبتاً طولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن پیش برمی‌گردد، ولیکن تحلیل استوانه‌های ناهمگن مربوط به دهه‌ی اخیر است. در این بخش، مطالعات انجام شده بر روی استوانه‌های همگن و ناهمگن در راستای نیاز پایان نامه گزارش می‌شود.

در خصوص استوانه‌های همگن: برای اولین بار Lamé در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حل دقیق استوانه‌های کلفت متقارن محوری با جدار ثابت از مواد همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای را ارائه کرد [۲ و ۴]

Galerkin در ۱۹۳۰ روابط حاکم بر پوسته‌های کلفت را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. Vlassov در ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حل برای پوسته‌های کلفت ارائه کرد. Greesspon در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی کلفت را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و کلفت، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود. ایپکچی و همکاران در ۲۰۰۳ معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات^۱ حل کردند [۱۷].

در خصوص استوانه‌های ناهمگن: پس از اولین سمپوزیوم جهانی FGM در ۱۹۹۰ Fukui & Yamankha در ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار کلفت FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رانگ- کوتا حل کردند [۱۸]. Obata & Noda در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه‌ی توخالی FGM را در حالت کرنش

¹ - Perturbation Theory

صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به دست آوردند [۸]. Horgan & Chan در ۱۹۹۹ معادلات حاکم بر یک استوانه تو خالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را بدست آوردند [۹]. ایشان در ۱۹۹۹ با همین روش تنش‌ها را در یک دیسک دوآر FGM بررسی کردند [۱۹]. Tutunkui در ۲۰۰۱ حل دقیق مخازن استوانه‌ای و کروی جدار ثابت FGM با توزیع توانی مدول الاستیسیته‌ی تحت فشار یکنواخت داخلی را ارائه کرد. ایشان معادلات استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک تئوری لامه استخراج و توزیع تنش را به ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه به دست آورد. در مقاله‌ی ایشان، رابطه و نمودار تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه است که در برخی از پژوهش‌های پسین نیز استفاده شده است [۱۱]. جباری و همکاران در ۲۰۰۲ تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی تو خالی FGM تحت بارهای متقارن [۱۳] و در ۲۰۰۳ تحت بارهای نامتقارن حرارتی [۲۰] را به دست آوردند.

Hungiun & Zhifei در ۲۰۰۶ حل دقیق استوانه‌ی تو خالی FGM با تغییرات نمایی مدول یانگ در راستای شعاعی با لایه‌های همگن ارائه کردند [۱۵]. Zheif و همکاران در ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن تغییرات مدول کشسانی به صورت توانی و خطی، استوانه‌ی FGM را با روش چند لایه‌ای کردن، تحلیل و با نتایج Tuntukui مقایسه کردند و در نتیجه به اشتباه مقاله‌ی نامبرده پی بردند [۲۱]. Tutunkui در ۲۰۰۷ مشابه مقاله‌ی پیشین، تحلیل استوانه‌ی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای ولیکن با توزیع نمایی مدول یانگ، ارائه کرد [۲۲]. فناد و همکاران در ۲۰۰۸ حل عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه و اشتباه مقاله‌ی Tuntukui را نشان داده و آن را تصحیح کردند [۲۳]. زمانی نژاد و رحیمی در ۲۰۰۸ حل تحلیلی ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FG را در دوران بررسی و برای ریشه‌های حقیقی معادلات تنش‌ها در آن را به دست آوردند [۳۱]. رحیمی و عارفی نیز در سال ۲۰۱۰ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های FGM را تحت فشار داخلی با تئوری تغییر شکل برشی ارائه کردند [۳۲].

در جدول (۱-۱) برخی از مطالعات انجام شده درباره‌ی استوانه‌های همگن و ناهمگن به صورت فهرست گونه ارائه می‌شود.

جدول ۱-۱ مطالعات انجام شده در خصوص استوانه‌های همگن و ناهمگن

سال	مؤلف	موضوع مقاله	جدار	جنس	تئوری حل
۱۸۵۲	Lame[۴, ۲]	حل دقیق استوانه‌ی کلفت	ثابت	ایزوتروپ	الاستیسیتی‌ی مستوی
۱۹۳۰	Galerkin	استخراج روابط پوسته‌های کلفت	ثابت	ایزوتروپ	الاستیسیتی‌ی سه بعدی
۱۹۴۹	Vlassov	تحلیل پوسته‌های کلفت متقارن محوری	ثابت	ایزوتروپ	الاستیسیتی‌ی خطی
۱۹۵۰	Lekhnitskii [۵]	فرمول بندی تئوری الاستیسیتی‌ی اجسام مرکب (کامپوزیت)	ثابت	آنایزوتروپ پ	الاستیسیتی‌ی سه بعدی
۱۹۷۰	Ross	تغییر شکل متقارن استوانه‌ی کلفت تحت فشار یکنواخت	ثابت	ایزوتروپ	روش تحلیلی-تقریبی
۱۹۹۲	Fukui[۱۸]	تحلیل الاستیک لوله جدار کلفت	ثابت	FGM	عددی رانگ-کوتا
۱۹۹۳	Simkins[۲۴]	اندازه گیری کرنش‌های لوله‌ی اسلحه	ثابت	ایزوتروپ	روش تجربی
۱۹۹۴	Obata & Noda[۸]	تنش‌های حرارتی پایدار در استوانه و کره‌ی توخالی	ثابت	FGM توانی	معادلات لامه
۱۹۹۹	Horgan & Chan[۹]	تحلیل تنش در استوانه‌ی توخالی و دیسک توپر دوار	ثابت	FGM خطی	معادلات لامه
۱۹۹۹	Horgan & Chan[۱۹]	تحلیل تنش در استوانه‌ی توخالی و دیسک توپر دوار	ثابت	FGM توانی	معادلات لامه
۲۰۰۱	Tarn[۱۸]	حل دقیق استوانه‌های ناهمسانگرد تحت بارهای مکانیکی و حرارتی	ثابت	FGM توانی	تئوری لخنیتسکی
۲۰۰۱	Tarn[۱۲]	حل دقیق استوانه‌های ناهمسانگرد تحت بارهای مکانیکی و حرارتی	ثابت	FGM توانی	تئوری لخنیتسکی
۲۰۰۱	Tutunkui[۱۱]	حل دقیق مخازن استوانه‌ای و کره‌ی	ثابت	FGM توانی	معادلات لامه و اوپلر-کوشی
۲۰۰۱	Kang & Leissa[۲۵]	استخراج معادلات حرکت سه بعدی	متغیر	ایزوتروپ	روش انرژی
۲۰۰۲	Jabberi & Eslami[۱۳]	تنش‌های مکانیکی و حرارتی در استوانه‌ی توخالی	ثابت	FGM توانی	معادلات لامه
۲۰۰۳	Jabberi & Eslami[۲۰]	حل عمومی استوانه تحت تنش‌های مکانیکی و حرارتی نامتقارن محوری	ثابت	FGM توانی	جداسازی متغیرها-سری فوریه
۲۰۰۳	Eipakchi & Rahimi[۱۷]	تحلیل استوانه‌ی جدار کلفت تحت فشار نایکنواخت داخلی	متغیر	ایزوتروپ	تغییر شکل برشی-تئوری اغتشاشات
۲۰۰۶	Dai[۲۶]	حل دقیق استوانه و کره تحت فشار در میدان مغناطیسی نایکنواخت	ثابت	FGM توانی	معادلات اوپلر-کوشی
۲۰۰۶	Eraslam & Akis[۱۴]	حل تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای محور و دیسک توپر دوار	ثابت	FGM نمایی	معادلات لامه

معادلات لامه-معیار ترسکا	FGM توانی	ثابت	حل الاستیک-پلاستیک لوله‌ی تحت فشار داخلی	Eraslam & Akis[۲۷]	۲۰۰۶
معادلات لامه	FGM نمایی	ثابت	تحلیل الاستیک استوانه‌ی توخالی ناهمگن	Hangjun & Zheifi[۱۵]	۲۰۰۶
چند لایه کردن جداره استوانه	FGM توانی	ثابت	حل دقیق استوانه‌های توخالی ناهمگن	Zhifei & Hangjun[۲۱]	۲۰۰۷
معادلات لامه	FGM نمایی	ثابت	تحلیل تنش در مخازن استوانه‌ای	Tutunkui [۲۲]	۲۰۰۷
الاستیسیته‌ی مستوی	FGM توانی	ثابت	حل عمومی استوانه‌های کلفت FGM تحت بار حرارتی همراه با دوران	Rahimi & Zamani Nejad [۳۱]	۲۰۰۸
الاستیسیته‌ی مستوی	FGM توانی	ثابت	حل کره‌ها، دیسک‌ها و استوانه‌های کلفت FGM متقارن محوری تحت فشار	Tutunkui & Temel[۳۰]	۲۰۰۹
تغییر شکل برشی	ایزوتروپ	ثابت	حل تحلیلی استوانه‌های کلفت متقارن محوری تحت فشار با انتهای بسته	Ghannad & Zamani Nejad [۲۸]	۲۰۱۰
تغییر شکل برشی	FGM توانی	ثابت	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های FGM تحت فشار داخلی	Arefi and Rahimi[۳۳]	۲۰۱۰

۷-۱ جمع بندی

برای تحلیل استوانه‌های کلفت همگن و ناهمگن با جدار ثابت، بارگذاری و شرایط انتهایی، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی استفاده کرد ولیکن برای تحلیل استوانه‌های کلفت همگن و ناهمگن با جدار متغیر و یا فشار یکنواخت، روش مناسب، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی است.

فصل ۲

تحلیل الاستیک پوسته های

استوانه ای FGM

۱-۲ مقدمه

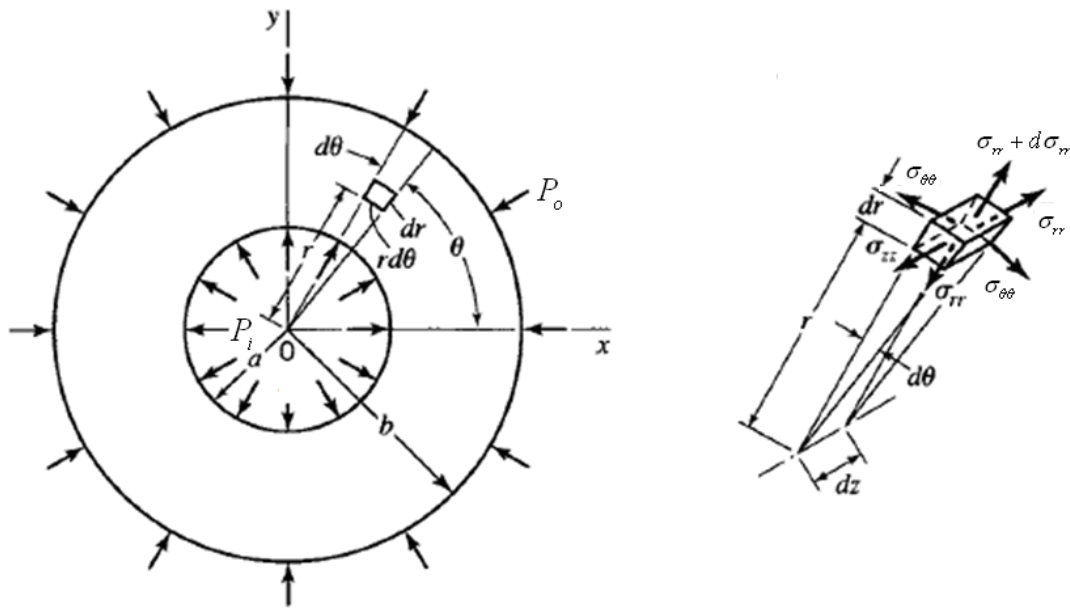
تحلیل استوانه های جدار ضخیم از اهمیت کاربردی ویژه ای در مخازن تحت فشار و لوله های توپ برخوردار است. از میان انواع پوسته ها، پوسته های استوانه ای جدار کلفت اهمیت ویژه تری دارند و همواره مهندسان و دانش پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی ضخامت و ماده این دسته از پوسته ها بوده اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر نیرو های وارد شده افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند. در این فصل روابط تحلیلی حاکم بر استوانه های همگن و ناهمگن FG را بدست می آوریم و نتایج عددی حاصل از آنها را با نتایج عددی توسط نرم افزار المان محدود Ansys در استوانه های تحت فشار داخلی و خارجی مقایسه می کنیم.

۲-۲ روابط اساسی [۲]

الف - معادلات تعادل

معادلات تعادل در حالت کلی به صورت زیر می باشد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{B} = \vec{0} \quad (1-2)$$



شکل (۱-۲) نمایش یک المان از استوانه ضخیم

با بسط دادن رابطه بالا در مختصات استوانه ای، ۳ معادله تعادل بصورت زیر نوشته می شوند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + B_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + B_z &= 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

ب- روابط رفتاری (تنش - کرنش)

روابط بین تنش و کرنش برای مواد الاستیک خطی ایزوتروپیک، به صورت زیر نوشته می شوند [۲] و [۴].

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\varepsilon} + \lambda e\tilde{I} \quad (3-2)$$

می توان نشان داد که رابطه زیر نیز برای تنش - کرنش صحیح است.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (4-2)$$

دلتای کرونگر^۱ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & i = j \end{cases} \quad (5-2)$$

که در این روابط μ و λ ثابت های لامه بصورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (6-2)$$

در مختصات استوانه ای، ۶ رابطه رفتاری به صورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r \\ \sigma_\theta &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \\ \tau_{r\theta} &= \mu\gamma_{r\theta}, \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}, \tau_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z} \end{aligned} \quad (7-2)$$

¹ Kronecker Delta

و نیز می توان نوشت

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)] \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}, \gamma_{rz} = \frac{1}{\mu} \tau_{rz}, \gamma_{\theta z} = \frac{1}{\mu} \tau_{\theta z}\end{aligned}\tag{۸-۲}$$

ج- روابط سینماتیک (تغییر مکان - کرنش)

در حالت کلی روابط سینماتیک برای تغییر شکل های بسیار کوچک به صورت زیر نشان داده می شوند.

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right)\tag{۹-۲}$$

۶ معادله سینماتیک برای حالت استوانه ای به صورت زیر ساده می شود.

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \gamma_{\theta z} &= \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{rz} &= \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)\end{aligned}\tag{۱۰-۲}$$

۲-۲-۱ مسائل متقارن محوری^۱

مسائل زیادی در مهندسی موجودند که متقارن محوری هستند. مانند مخازن تحت فشار، سیلندرهای مرکب، المانهای رآکتورهای هسته ای، مخازن رآکتورهای شیمیایی، لوله های مبدل

^۱ Axisymmetric

حرارتی، چرخ لنگرها، سازه های کروی توخالی یا توپر، دیسک های توربین ها و دیگر مصنوعات صنعتی که می توان نام برد.

مسئله متقارن محوری، مسئله ای است که در آن هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و نیز خواص مادی نسبت به محور مرکزی استوانه متقارن باشد و در نتیجه میدان تغییر شکل و تنش، تقارن محوری داشته باشد. به عنوان مثال استوانه جدار ضخیم که تحت فشار داخلی P_i و فشار خارجی P_o قرار دارد، نظیر مخازن تحت فشار و لوله های انتقال سیال. معمولاً مسائل متقارن محوری در دستگاه مختصات استوانه ای حل می شوند.

در مسائل متقارن محوری داریم

$$u_{\theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (11-2)$$

با فرض تقارن محوری ۶ معادله سینماتیک به ۴ معادله کاهش می یابد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{rz} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \gamma_{r\theta} = 0, \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (12-2)$$

و معادلات تعادل به صورت ۲ معادله زیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_{\theta}) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + B_z = 0 \end{cases} \quad (13-2)$$

معادلات رفتاری نیز به ۴ معادله کاهش می یابند.

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r \\ \sigma_{\theta} = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_{\theta} \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \\ \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}, \tau_{r\theta} = 0, \tau_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (14-2)$$

و یا می توان نوشت

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)] \\ \gamma_{rz} = \frac{1}{\mu} \tau_{rz}, \gamma_{r\theta} = 0, \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (15-2)$$

پس ۱۵ معادله کلی موجود در مختصات استوانه ای، ۳ معادله تعادل، ۶ معادله سینماتیک و ۶ معادله رفتاری به ۱۰ معادله کاهش می یابد.

۳-۲ تئوری الاستیسیته صفحه ای

در تئوری الاستیسیته مستوی (PET)^۱ فرض میشود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می ماند. تغییر شکل های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن میباشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی کند. تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر میکند، به عبارت دیگر، جابه جایی شعاعی فقط تابع شعاع $u_r(r)$ است. یعنی المان چرخش ندارد، لذا کرنش برشی γ_{rz} و تنش برشی τ_{rz} در نظر گرفته نمی شوند. این بدان معناست که محورهای استوانه ای، محورهای اصلی و تنش های عمودی، تنش های اصلی هستند.

تنش های اصلی

$$\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r \quad (16-2)$$

با توجه به معادلات تعادل و معادلات سازگاری، نتیجه می شود که تنش طولی σ_z و کرنش طولی ε_z دارای مقادیر ثابتند.

$$\gamma_{rz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{rz} = 0 \quad (17-2)$$

¹ Plane Elasticity Theory(PET)

و در این صورت ۱۰ رابطه قبل به ۸ رابطه کاهش می یابد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \quad (18-2)$$

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + B_z = 0 \end{cases} \quad (19-2)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r \\ \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \end{cases} \quad (20-2)$$

فرض شود V و R به صورت روابط بی بعد زیر تعریف شوند.

$$\begin{aligned} V &= \frac{u_r}{r_i} \\ R &= \frac{r}{r_i} \end{aligned} \quad (21-2)$$

که r_i شعاع داخلی استوانه می باشد، در این صورت روابط تنش-جابجایی در جمله های نرمال شده جابجایی شعاعی V ، بصورت رابطه زیر خواهد شد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{dV}{dR} \\ \varepsilon_\theta = \frac{V}{R} \end{cases} \quad (22-2)$$

روابط تنش-کرنش را بصورت رابطه ماتریسی زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \quad (23-2)$$

که ضرایب a و b تعریف شده در این رابطه بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} a &= A E(R) \\ b &= B E(R) \end{aligned} \quad (24-2)$$

و ضرایب A و B ثابت هایی هستند که با توجه به شرایط انتهایی استوانه بصورت زیر تعیین می گردند.

۲-۳-۱ شرایط انتهایی استوانه

(الف) تنش صفحه ای (استوانه با دو سر باز)

در حالت شرایط انتهایی استوانه به صورت تنش صفحه ای ضرایب A و B به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-\nu^2} \\ B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \end{cases} \quad (25-2)$$

(ب) کرنش صفحه ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)

در حالت شرایط انتهایی استوانه به صورت کرنش صفحه ای، خواهیم داشت

$$\begin{cases} A = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (26-2)$$

معادله تعادل برای مختصات استوانه ای متقارن محوری، با توجه به معادله تعادل (۲-۱۹)، بدون وجود نیروهای حجمی در ترم متغیر بی بعد R ، بصورت زیر خواهد بود

$$\frac{d\sigma_r}{dR} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{R} = 0 \quad (27-2)$$

حال توسط تعریف روابط (۲-۲۲) و (۲-۲۳) و استفاده از رابطه تعادل (۲-۲۷)، معادله دیفرانسیل برای مختصات استوانه ای متقارن محوری، بصورت زیر بدست می آید.

$$\frac{d^2V}{dR^2} + M(R) \frac{dV}{dR} + N(R)V = 0 \quad (28-2)$$

که در این رابطه، روابط ضرایب معادله دیفرانسیل بصورت زیر خواهد بود.

$$M(R) = \frac{1}{a} \frac{da}{dR} + \frac{1}{R}$$

$$N(R) = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{a} \frac{db}{dR} - \frac{1}{R} \right] \quad (29-2)$$

۲-۳-۲ استوانه های همگن

برای استوانه های همگن در روابط قبل، مدول الاستیسیته E و نیز نسبت پواسون ν ، ثابت می باشند. در اینجا با جایگذاری رابطه ثابت مدول الاستیسیته در معادله (۲۹-۲) و سپس (۲۸-۲) معادله دیفرانسیل حاصل به صورت رابطه (۳۱-۲) بدست می آید.

$$M(R) = \frac{1}{R}$$

$$N(R) = -\frac{1}{R^2} \quad (30-2)$$

$$R^2 V'' + R V' - V = 0 \quad (31-2)$$

که (')، مشتق نسبت به متغیر بی بعد R است.

۳-۳-۲ استوانه های ناهمگن

در مواد FG، مدول الاستیسیته E و ضریب پواسون ν ، توابعی از مختصات شعاعی بی بعد R است، که در اکثر تحلیل ها و بالاخص در این بررسی، بعلت تاثیرات جزئی ضریب پواسون، از تغییرات آن صرفنظر شده و ثابت در نظر گرفته می شود. رابطه توزیع مدول الاستیسیته را بصورت توزیع توانی از مختصات بی بعد R، که در رابطه (۳۲-۲) آورده شده است، در نظر می گیریم.

$$E(R) = E_i R^n \quad (32-2)$$

که E_i در این رابطه مدول الاستیسیته شعاع داخلی استوانه ترتیب و n ضریب توان در رابطه توزیع توانی مدول الاستیسیته می باشد.

حال توسط تعریف روابط (۲۹-۲) و (۳۰-۲)، معادله دیفرانسیل استوانه های ناهمگن بصورت رابطه (۳۱-۲) بدست می آید [۳۰].

$$M(R) = \frac{n+1}{R}$$

$$N(R) = \frac{n\beta-1}{R^2} \quad (33-2)$$

$$R^2 V'' + (n+1)RV' + (n\beta - 1)V = 0 \quad (34-2)$$

در رابطه حاصل $\beta = \frac{B}{A}$ می باشد، که در شرایط مختلف انتهایی استوانه بصورت زیر خواهد بود.

الف) تنش صفحه ای

$$\beta = \nu \quad (35-2)$$

ب) کرنش صفحه ای

$$\beta = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (36-2)$$

۲-۴ حل الاستیک استوانه های ناهمگن

اگر در معادله (۳۴-۲) عبارت $V = R^n$ جایگذاری شود معادله مشخصه^۱ آن، بصورت رابطه (۳۷-۲) حاصل می شود.

$$\eta^2 + n\eta + (n\beta - 1) = 0 \quad (37-2)$$

و ریشه های معادله مشخصه

$$\begin{cases} \eta_{1,2} = \frac{1}{2}(-n \pm \sqrt{\Delta}) \\ \Delta = n^2 - 4(n\beta - 1) \end{cases} \quad (38-2)$$

بر اساس مقادیر مختلف Δ ریشه های معادله مشخصه ممکن است، (۱) ریشه های حقیقی، (۲) ریشه های مضاعف و (۳) ریشه های مختلط باشند که در هر کدام از این حالت ها، شرایط انتهایی استوانه می تواند. الف- تنش صفحه ای و ب- کرنش صفحه ای باشد.

۲-۴-۱ ریشه های حقیقی

و در این حالت پاسخ معادله (۳۴-۲) بصورت رابطه (۳۹-۲) خواهد بود.

$$V(R) = B_1 R^{\eta_1} + B_2 R^{\eta_2} \quad (39-2)$$

و توسط روابط (۲-۲۲) و (۲-۲۳) تنش های شعاعی و مماسی، بصورت زیر بدست می آیند.

¹ Characteristic Equation

$$\begin{aligned}\sigma_r &= [(A\eta_2 + B)B_2 R^{\eta_2} + (A\eta_1 + B)B_1 R^{\eta_1}] E_i R^{n-1} \\ \sigma_\theta &= [(B\eta_2 + A)B_2 R^{\eta_2} + (B\eta_1 + A)B_1 R^{\eta_1}] E_i R^{n-1}\end{aligned}\quad (40-2)$$

شرایط مرزی در سطح داخل و خارج استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، بصورت رابطه (2-41) خواهد بود.

$$\begin{cases} R=1 & \sigma_r = -p_i \\ R=k & \sigma_r = -p_o \end{cases}\quad (41-2)$$

اگر تعریف های زیر را داشته باشیم در نتیجه ضرایب ثابت B_1 و B_2 بصورت رابطه (2-44) بدست می آیند.

$$X = p_i k^{\eta_2} - p_o k^{1-n} \quad (42-2)$$

$$Y = p_i k^{\eta_1} - p_o k^{1-n} \quad (43-2)$$

$$B_1 = \frac{X}{E_i (A\eta_1 + B)(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \quad (44-2)$$

$$B_2 = \frac{Y}{E_i (A\eta_2 + B)(k^{\eta_2} - k^{\eta_1})} \quad (44-2)$$

که در این رابطه $k = \frac{r_o}{r_i}$ ، نسبت شعاع خارجی به داخلی استوانه است. در این صورت با توجه به روابط (2-22) و (2-23)، روابط تنش و جابجایی شعاعی استوانه، بصورت بی بعد بدست می آید.

$$\sigma_r = \frac{R^{n-1}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} [R^{\eta_1} X - R^{\eta_2} Y] \quad (45-2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{n-1}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[R^{\eta_1} \frac{B\eta_1 + A}{A\eta_1 + B} X - R^{\eta_2} \frac{B\eta_2 + A}{A\eta_2 + B} Y \right] \quad (46-2)$$

$$u_r = \frac{r_i}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left[R^{\eta_1} \frac{X}{A\eta_1 + B} - R^{\eta_2} \frac{Y}{A\eta_2 + B} \right] \quad (47-2)$$

که از روابط مشخص است، σ_θ و u_r جابجایی شعاعی بی بعد، به A و B وابستگی مستقیم دارند و بر اساس شرایط گفته شده در روابط (2-25) و (2-26)، روابط تنش و جابجایی در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر به دست می آید.

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_{\theta} = \frac{R^{n-1}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[R^{\eta_1} \frac{v\eta_1 + 1}{\eta_1 + v} X - R^{\eta_2} \frac{v\eta_2 + 1}{\eta_2 + v} Y \right] \quad (48-2)$$

$$u_r = \frac{r_i (1-v^2)}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left[R^{\eta_1} \frac{X}{\eta_1 + v} - R^{\eta_2} \frac{Y}{\eta_2 + v} \right] \quad (49-2)$$

ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_{\theta} = \frac{R^{n-1}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[R^{\eta_1} \frac{v\eta_1 + (1-v)}{\eta_1(1-v) + v} X - R^{\eta_2} \frac{v\eta_2 + (1-v)}{\eta_2(1-v) + v} Y \right] \quad (50-2)$$

$$u_r = \frac{r_i (1+v)(1-2v)}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left[R^{\eta_1} \frac{X}{\eta_1(1-v) + 3v} - R^{\eta_2} \frac{Y}{\eta_2(1-v) + v} \right] \quad (51-2)$$

۲-۴-۲ ریشه های مضاعف

اگر در رابطه (۳۷-۲)، $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه های مضاعف می شود.

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta \quad \text{و} \quad \eta = -\frac{n}{2} \quad (52-2)$$

پاسخ معادله (۳۴-۲) در این حالت

$$V(R) = [B_1 + B_2 \ln R] R^m \quad (53-2)$$

در نتیجه با توجه به شرایط مرزی در رابطه (۴۱-۲) ضرایب ثابت B_1 و B_2 ، بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$B_1 = \frac{p_i [A + (A\eta + B) \ln k] - p_o A}{E_i \ln k (A\eta + B)^2} \quad (54-2)$$

$$B_2 = \frac{p_i - p_o}{E_i \ln k (A\eta + B)} \quad (54-2)$$

در این صورت با توجه به روابط (۲۲-۲) و (۲۳-۲)، روابط (۵۵-۲) الی (۵۷-۲) نشان دهنده تنش و کرنش در حالت ریشه های مضاعف معادله دیفرانسیل (۳۴-۲) می باشد.

$$\sigma_r = -\frac{R^{\eta+n-1} \left(\frac{p_o}{k^{\eta+n-1}} \ln R + p_i \ln \frac{k}{R} \right)}{\ln k} \quad (55-2)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{R^{\eta+n-1}}{\ln k} \left[\left(\frac{A + B\eta}{A\eta + B} \ln R + \frac{B^2 - A^2}{(A\eta + B)^2} \right) \frac{p_o}{k^{\eta+n-1}} + \left(\frac{A + B\eta}{A\eta + B} \ln \frac{k}{R} - \frac{B^2 - A^2}{(A\eta + B)^2} \right) p_i \right] \quad (56-2)$$

$$u_r = \frac{r_i R^\eta}{E_i \text{Ln } k} \left[\frac{A - (A\eta + B) \text{Ln } R}{(A\eta + B)^2} \frac{p_o}{k^{\eta+n-1}} - \frac{A + (A\eta + B) \text{Ln } \frac{k}{R}}{(A\eta + B)^2} p_i \right] \quad (57-2)$$

ملاحظه می شود که مشابه حالت قبل σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست. در حالیکه σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند و بر اساس شرایط گفته شده در روابط (2-25) و (2-26)، روابط تنش و جابجایی در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر به دست می آید.

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_\theta = -\frac{R^{\eta+n-1}}{\text{Ln } k} \left[\left(\frac{v\eta+1}{\eta+v} \text{Ln } R - \frac{1-v^2}{(\eta+v)^2} \right) \frac{p_o}{k^{\eta+n-1}} + \left(\frac{1-v^2}{(\eta+v)^2} + \frac{v\eta+1}{\eta+v} \text{Ln } \frac{k}{R} \right) p_i \right] \quad (58-2)$$

$$u_r = \frac{r_i R^\eta (1-v^2)}{E_i \text{Ln}(k)(\eta+v)} \left[\left(\frac{1}{\eta+v} - \text{Ln } R \right) \frac{p_o}{k^{\eta+n-1}} - \left(\frac{1}{\eta+v} + \text{Ln } \frac{k}{R} \right) p_i \right] \quad (59-2)$$

ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_\theta = -\frac{R^{\eta+n-1}}{\text{Ln } k} \left[\left(\frac{(1-v)+v\eta}{(1-v)\eta+v} \text{Ln } R - \frac{1-2v}{((1-v)\eta+v)^2} \right) \frac{p_o}{k^{\eta+n-1}} + \left(\frac{1-2v}{((1-v)\eta+v)^2} + \frac{(1-v)+v\eta}{(1-v)\eta+v} \text{Ln } \frac{k}{R} \right) p_i \right] \quad (60-2)$$

$$u_r = \frac{r_i R^\eta (1-2v)(1+v)}{E_i \text{Ln } k} \left[\left(\frac{1-v}{((1-v)\eta+v)^2} - \frac{\text{Ln } R}{(1-v)\eta+v} \right) \frac{p_o}{k^{\eta+n-1}} - \left(\frac{1-v}{((1-v)\eta+v)^2} + \frac{\text{Ln } \frac{k}{R}}{(1-v)\eta+v} \right) p_i \right] \quad (61-2)$$

۲-۴-۳ ریشه های مختلط

اگر در رابطه (۲-۳۷)، $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه های مختلط می شود.

$$\begin{cases} \eta_1 = x + iy \\ \eta_2 = x - iy \end{cases} \quad (۲-۶۲)$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{n}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \end{aligned} \quad (۲-۶۳)$$

و پاسخ معادله دیفرانسیل (۲-۳۴)، بصورت زیر خواهد بود.

$$V(R) = [B_1 \cos(yLn R) + B_2 \sin(yLn R)] R^x \quad (۲-۶۴)$$

در نتیجه با توجه به شرایط مرزی در رابطه (۲-۴۱) ضرایب ثابت B_1 و B_2 ، بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{[Ay \cos(yLn k) + (Ax + B) \sin(yLn k)] p_i - \frac{Ayp_o}{k^{n+x-1}}}{E_i D} \\ B_2 &= -\frac{((Ax + B) \sin(yLn k)) - Ay \sin(yLn k) p_i + \frac{(Ax + B)p_o}{k^{n+x-1}}}{E_i D} \end{aligned} \quad (۲-۶۵)$$

که در آن

$$D = \sin(yLn k) [A^2 y^2 + (Ax + B)^2] \quad (۲-۶۶)$$

در این صورت با توجه به روابط (۲-۲۲) و (۲-۲۳)، روابط (۲-۶۶) الی (۲-۶۸) نشان دهنده روابط تنش و کرنش می باشند.

$$\sigma_r = \frac{-R^{x+n-1} \left[\frac{p_o \sin(yLn(R))}{k^{x+n-1}} + [\cos(yLn(R)) \sin(yLn k) - \cos(yLn k) \sin(yLn(R))] p_i \right]}{\sin(yLn k)} \quad (۲-۶۷)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{R^{x+n-1}}{D} \left\{ \frac{P_o}{k^{x+n-1}} \left[(B^2 - A^2)y \cos(yLn R) \right. \right. \\ \left. \left. + ((B^2 + A^2)x + AB(y^2 + x^2 + 1)) \sin(yLn R) \right] - \left[(B^2 - A^2)y \cos(yLn \frac{k}{R}) \right. \right. \\ \left. \left. + ((B^2 + A^2)x + AB(y^2 + x^2 + 1)) \sin(yLn \frac{k}{R}) \right] p_i \right\} \quad (68-2)$$

$$u_r = \frac{r_i R^x}{E_i D} \left[\frac{P_o}{k^{x+n-1}} [Ay \cos(yLn R) - (Ax + B) \sin(yLn R)] \right. \\ \left. - [Ay \cos(yLn \frac{k}{R}) + (Ax + B) \sin(yLn \frac{k}{R})] p_i \right] \quad (69-2)$$

ملاحظه می شود که مشابه حالت قبل σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست. در حالیکه σ_{θ} و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند و بر اساس شرایط گفته شده در روابط (2-25) و (2-26)، روابط تنش و جابجایی در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر به دست می آید.

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_{\theta} = \frac{-R^{x+n-1}}{\sin(yLn k)(y^2 + (x + \nu)^2)} \left\{ -[(1 - \nu^2)y \cos(yLn R) \right. \\ \left. + ((1 + \nu^2)x + \nu(y^2 + x^2 + 1)) \sin(yLn R)] \frac{P_o}{k^{x+n-1}} \right. \\ \left. - \left[(1 - \nu^2)y \cos(yLn \frac{k}{R}) + [(1 + \nu^2)x + \nu(y^2 + x^2 + 1)] \sin(yLn \frac{k}{R}) \right] p_i \right\} \quad (70-2)$$

$$u_r = \frac{r_i R^x (1 - \nu^2)}{E_i \sin(yLn k)(y^2 + (x + \nu)^2)} \left\{ [-y \cos(yLn R) + (x + \nu) \sin(yLn R)] \frac{P_i}{k^{x+1}} \right. \\ \left. + \left[y \cos(yLn \frac{k}{R}) + (x + \nu) \sin(yLn \frac{k}{R}) \right] p_i \right\} \quad (71-2)$$

ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_{\theta} = \frac{-R^{z+n-1}}{\sin(yLn k)(y^2(1 - \nu)^2 + ((1 - \nu)x + \nu)^2)} \left\{ \frac{-P_o}{k^{m+n-1}} [(1 - 2\nu)y \cos(yLn R) \right. \\ \left. + ((-2\nu^2 + 2\nu - 1)x - \nu(1 - \nu)(y^2 + x^2 + 1)) \sin(yLn R)] \right. \\ \left. + \left[(1 - 2\nu)y \cos(yLn \frac{k}{R}) + [(2\nu^2 - 2\nu + 1)x - \nu(1 - \nu)(y^2 + x^2 + 1)] \sin(yLn \frac{k}{R}) \right] p_i \right\} \quad (72-2)$$

$$u_r = \frac{r_i R^x (1+\nu)(1-2\nu)}{E_i \sin(\gamma L n k) (\gamma^2 (1-\nu)^2 + ((1-\nu)x + \nu)^2)} \left[\frac{p_o}{k^{x+n-1}} [(1-\nu) \gamma \cos(\gamma L n R) - ((1-\nu)x + \nu) \sin(\gamma L n R)] - [(1-\nu) \gamma \cos(\gamma L n \frac{k}{R}) + ((1-\nu)x + \nu) \sin(\gamma L n \frac{k}{R})] p_i \right] \quad (73-2)$$

۲-۴-۴ استوانه های تحت فشار داخلی

در حالت استوانه های در معرض فشار داخلی، با قرار دادن فشار خارجی برابر صفر، روابط تنش و نیز جابجایی شعاعی در حالت ریشه های حقیقی معادله مشخصه بصورت زیر بدست می آید.

$$\sigma_r = \frac{R^{n-1} p_i}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} [k^{\eta_2} R^{\eta_1} - k^{\eta_1} R^{\eta_2}] \quad (74-2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{n-1} p_i}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{B\eta_1 + A}{A\eta_1 + B} k^{\eta_2} R^{\eta_1} - \frac{B\eta_2 + A}{A\eta_2 + B} k^{\eta_1} R^{\eta_2} \right] \quad (75-2)$$

$$u_r = \frac{r_i p_i}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left[\frac{k^{\eta_2} R^{\eta_1}}{A\eta_1 + B} - \frac{k^{\eta_1} R^{\eta_2}}{A\eta_2 + B} \right] \quad (76-2)$$

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_\theta = \frac{R^{n-1} p_i}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{\nu\eta_1 + 1}{\eta_1 + \nu} k^{\eta_2} R^{\eta_1} - \frac{\nu\eta_2 + 1}{\eta_2 + \nu} k^{\eta_1} R^{\eta_2} \right] \quad (77-2)$$

$$u_r = \frac{r_i p_i}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})(1-\nu^2)} \left[\frac{k^{\eta_2} R^{\eta_1}}{\eta_1 + \nu} - \frac{k^{\eta_1} R^{\eta_2}}{\eta_2 + \nu} \right] \quad (78-2)$$

ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_\theta = \frac{R^{n-1} p_i}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{\nu(\eta_1 - 1) + 1}{\eta_1 - \nu(\eta_1 - 1)} k^{\eta_2} R^{\eta_1} - \frac{\nu(\eta_2 - 1) + 1}{\eta_2 - \nu(\eta_2 - 1)} k^{\eta_1} R^{\eta_2} \right] \quad (79-2)$$

$$u_r = \frac{r_i p_i}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{k^{\eta_2} R^{\eta_1}}{\eta_1 - \nu(\eta_1 - 1)} - \frac{k^{\eta_1} R^{\eta_2}}{\eta_2 - \nu(\eta_2 - 1)} \right] \quad (80-2)$$

۲-۴-۵ استوانه های تحت فشار خارجی

در این حالت، با قرار دادن فشار داخلی برابر صفر، رابطه تنش و نیز جابجایی شعاعی بصورت زیر بدست می آید.

$$\sigma_r = \frac{p_o \left(\frac{R}{k}\right)^{n-1}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} [R^{\eta_2} - R^{\eta_1}] \quad (81-2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_o \left(\frac{R}{K}\right)^{n-1}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{B\eta_2 + A}{A\eta_2 + B} R^{\eta_2} - \frac{B\eta_1 + A}{A\eta_1 + B} R^{\eta_1} \right] \quad (82-2)$$

$$u_r = \frac{r_i p_o k^{1-n}}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left[\frac{R^{\eta_2}}{A\eta_2 + B} - \frac{R^{\eta_1}}{A\eta_1 + B} \right] \quad (83-2)$$

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_\theta = \frac{p_o \left(\frac{R}{K}\right)^{n-1}}{(1-\nu^2)(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left[\frac{\nu\eta_2 + 1}{\eta_2 + \nu} R^{\eta_2} - \frac{\nu\eta_1 + 1}{\eta_1 + \nu} R^{\eta_1} \right] \quad (84-2)$$

$$u_r = \frac{r_i p_o k^{1-n}}{E_i (1-\nu^2)(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left[\frac{R^{\eta_2}}{\eta_2 + \nu} - \frac{R^{\eta_1}}{\eta_1 + \nu} \right] \quad (85-2)$$

ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_\theta = \frac{p_o \left(\frac{R}{K}\right)^{n-1}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{\nu(\eta_2 - 1) + 1}{\eta_2 - \nu(\eta_2 - 1)} R^{\eta_2} - \frac{\nu(\eta_1 - 1) + 1}{\eta_1 - \nu(\eta_1 - 1)} R^{\eta_1} \right] \quad (86-2)$$

$$u_r = \frac{r_i p_o k^{1-n}}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{R^{\eta_2}}{\eta_2 - \nu(\eta_2 - 1)} - \frac{R^{\eta_1}}{\eta_1 - \nu(\eta_1 - 1)} \right] \quad (87-2)$$

۲-۵ حل عددی استوانه های ناهمگن

روش اجزای محدود، متکی به برنامه های نرم افزاری است که در قالب یک بسته ارائه می شود. یکی از این بسته ها که کاربرد فراوانی دارد و کاربران بسیاری از آن استفاده می کنند، Ansys است. در این پایان نامه از Ansys ۱۲ استفاده شده است.

در این فصل روابط تحلیلی حاکم بر استوانه های همگن و ناهمگن FG را بدست می آوریم و نتایج عددی حاصل از آنها را با نتایج عددی توسط نرم افزار المان محدود Ansys در استوانه های تحت فشار داخلی و خارجی مقایسه می کنیم.

برای المان بندی استوانه، المان solid از نوع 82 nod 82 plane با گزینه axisymmetric انتخاب شده است. مقطع این المان ۴ ضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره^۱ (۴ گره در رئوس و ۴ گره در وسط اضلاع) است که درجه آزادی هر گره، دو (یکی جابجایی در راستای شعاعی و دیگری جابجایی در

^۱ node

راستای محوری) می باشد. المان plane 8nod 82 برای مسائل تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سختی المان مذکور 16×16 می باشد. در مدل سازی، یک استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جدار ثابت بطول $L = 800mm$ مدل شده است، که برای ایجاد خواص ناهمگنی که در اینجا، به صورت شعاعی در نظر گرفته شده است، استوانه به ۲۰ لایه مساوی به ضخامت هر کدام یک میلیمتر تقسیم شده است (شکل ۲-۲) و بعد از بهینه سازی انجام گرفته در المان بندی مدل ایجاد شده، المان هایی به ابعاد 1×1 میلیمتر در مش بندی مدل در نظر گرفته شد. خواص مدول الاستیک، در هر لایه به لایه دیگر با تابع توانی، بصورت رابطه (۲-۳۲) تغییر می کنند. این لایه ها در محل اتصال بهم پیوسته اند و خواص در محل اتصال لایه ها حد میانگین چپ و راست در نظر گرفته می شود. سپس بارگذاری مورد نظر را، جهت شبیه سازی توزیع تنش و جابجایی شعاعی استوانه، به استوانه اعمال می کنیم. (این بارگذاری در شکل (۲-۱) نشان داده شده است).



شکل (۲-۲) مدل مقطع طولی استوانه FGM با تقسیم به ۲۰ لایه

سپس با شبیه سازی استوانه در حالت کرنش صفحه ای بارهای مکانیکی اعمالی را به مدل وارد کرده و سپس تنش ها و جابجایی شعاعی در استوانه را بدست می آوریم.

۲-۶ بررسی نتایج

برای مطالعه موردی و بررسی نمودارهای بدست آمده از نتایج عددی، یک استوانه جدار کلفت با مشخصات زیر را با توزیع متفاوت مدول الاستیسیته در امتداد جداره در نظر می گیریم. استوانه جدار ثابت بشعاع داخلی $r_i = 40mm$ و شعاع خارجی $r_o = 60mm$ و مدول الاستیسیته در سطح داخلی

استوانه $E_i = 200 \text{ GPa}$ با ضریب پواسون ثابت $\nu = 0.3$ تحت سه حالت بارگذاری زیر در نظر می گیریم.

۱- فشار یکنواخت داخلی $p_i = 8 \text{ MPa}$

۲- فشار یکنواخت داخلی $p_i = 8 \text{ MPa}$ و خارجی $p_o = 8 \text{ MPa}$

۳- فشار یکنواخت خارجی $p_o = 8 \text{ MPa}$

مدول الاستیک استوانه در راستای شعاع با تابع توانی $E(R) = E_i R^n$ تعریف که n در محدوده

$-2 \leq n \leq 2$ در نظر گرفته می شود. شکل (۲-۳)، توزیع مدول الاستیک را نسبت به شعاع استوانه

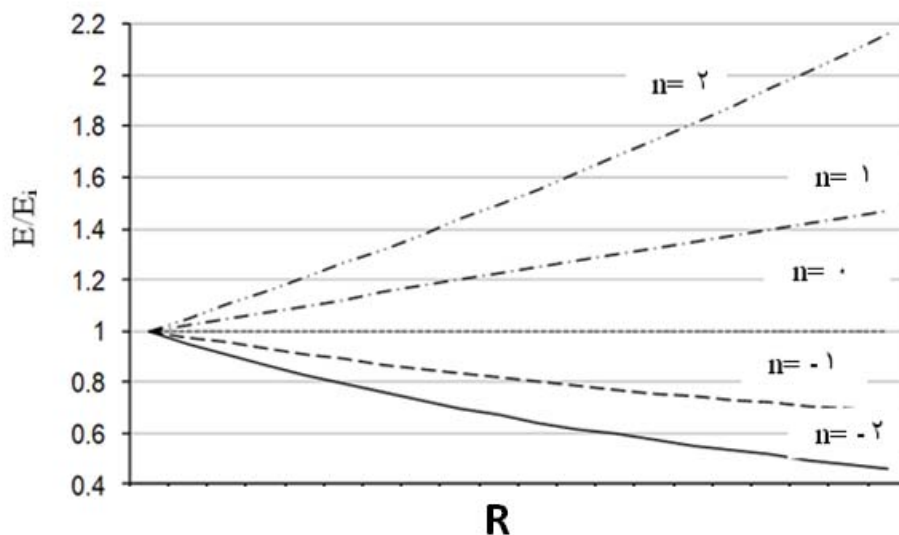
به ازای مقادیر صحیح n نشان می دهد. نسبت پواسون استوانه، ثابت و در این پایان نامه $\frac{E}{E_i} = R^n$

$\nu = 0.3$ در نظر گرفته شده است.

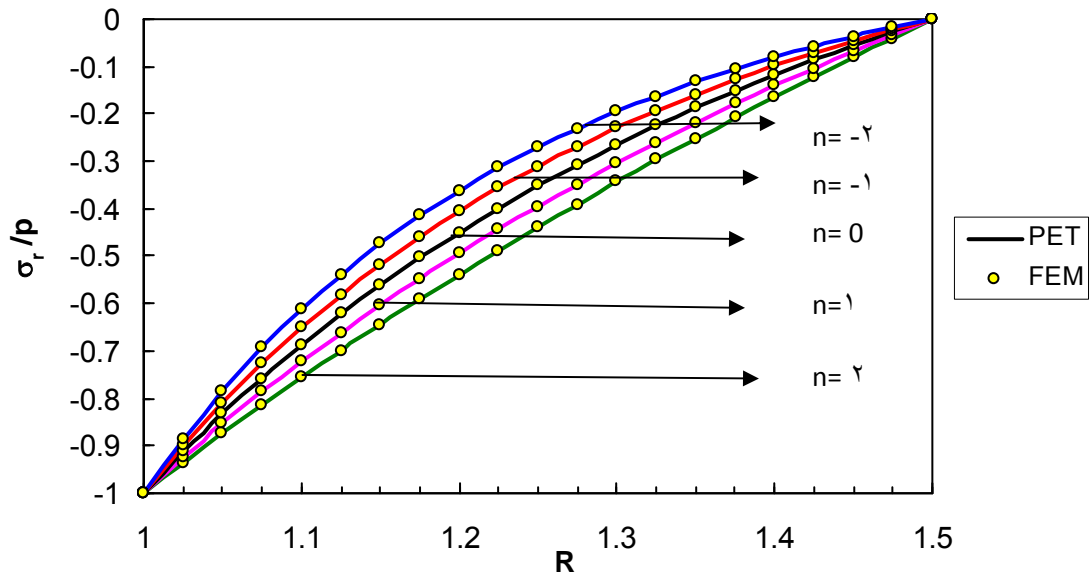
توزیع نرمال تنش ها و جابجایی (بی بعد) در شرایط انتهایی مختلف، تفاوت قابل ملاحظه ای با

یکدیگر ندارند. از این رو نمودارهای شکل های (۲-۴) تا (۲-۱۲) برای حالت کرنش صفحه ای در سه

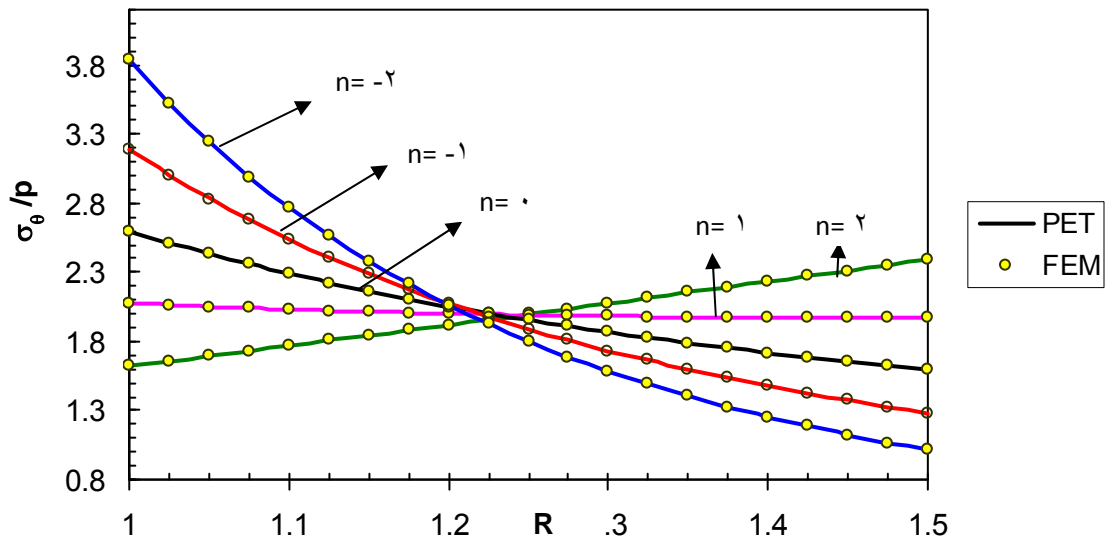
حالت بار گذاری گفته شده رسم شده اند.



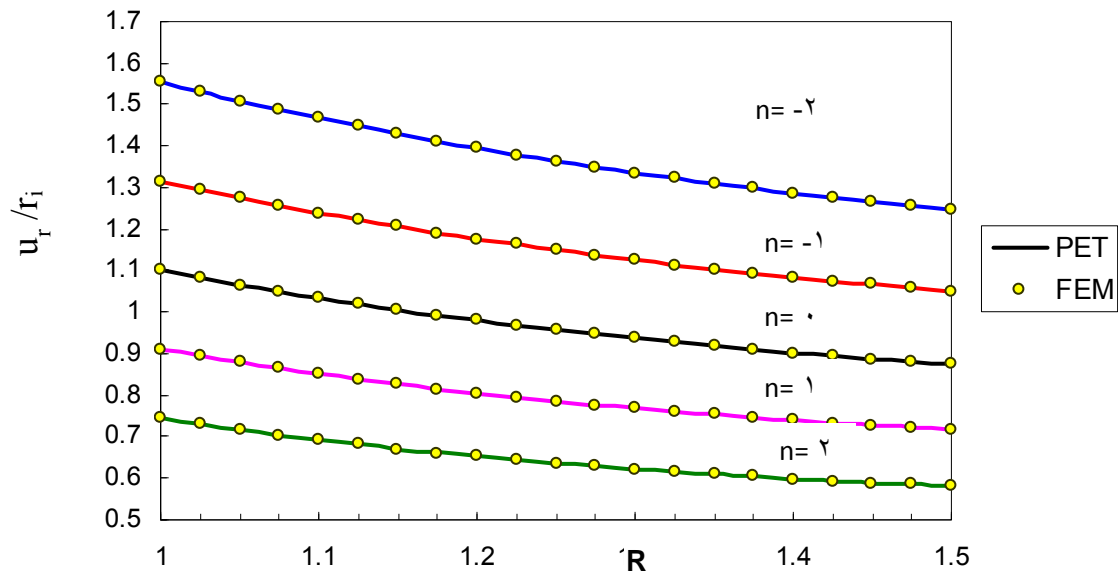
شکل (۲-۳) توزیع مدول الاستیک در لایه های شعاع استوانه



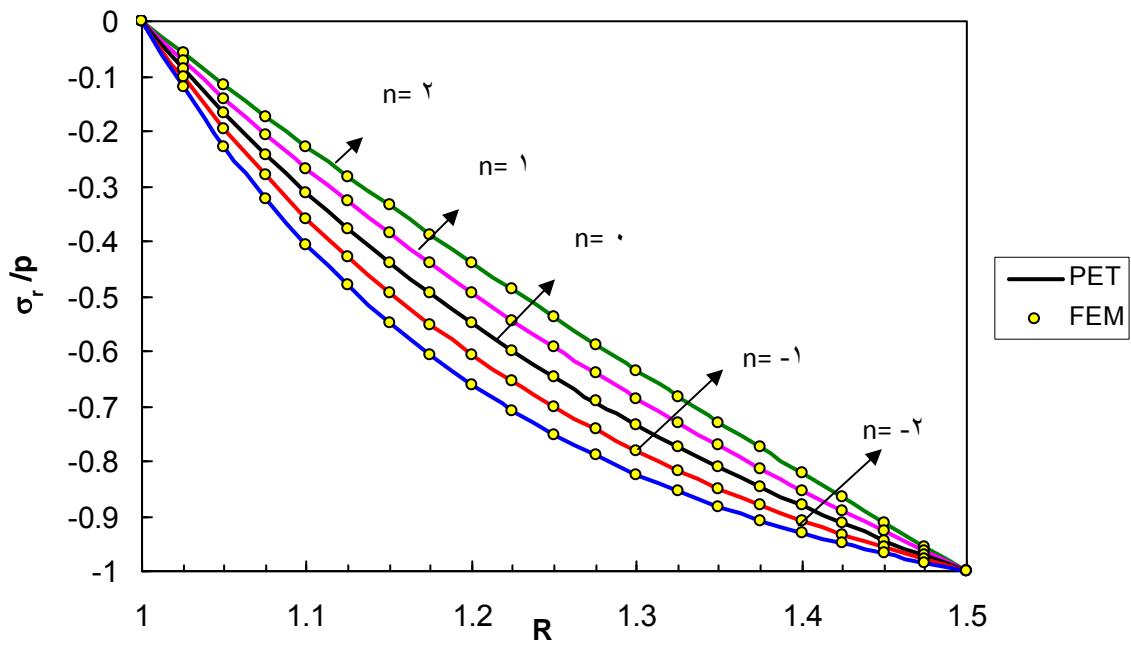
شکل (۲-۴) توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی



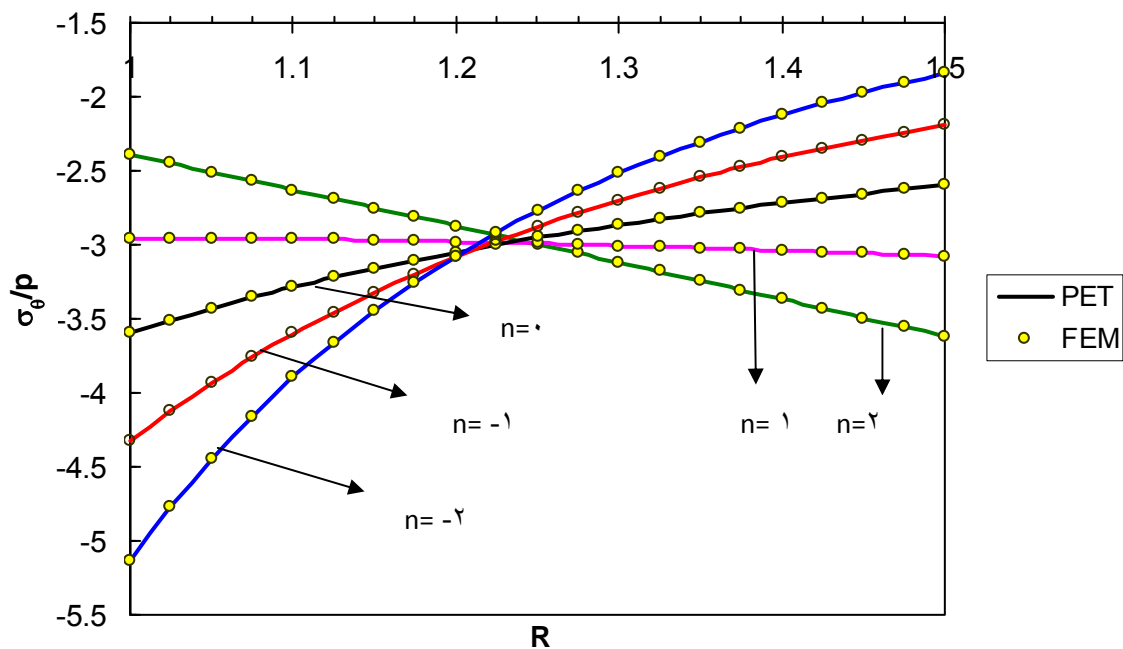
شکل (۲-۵) توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی



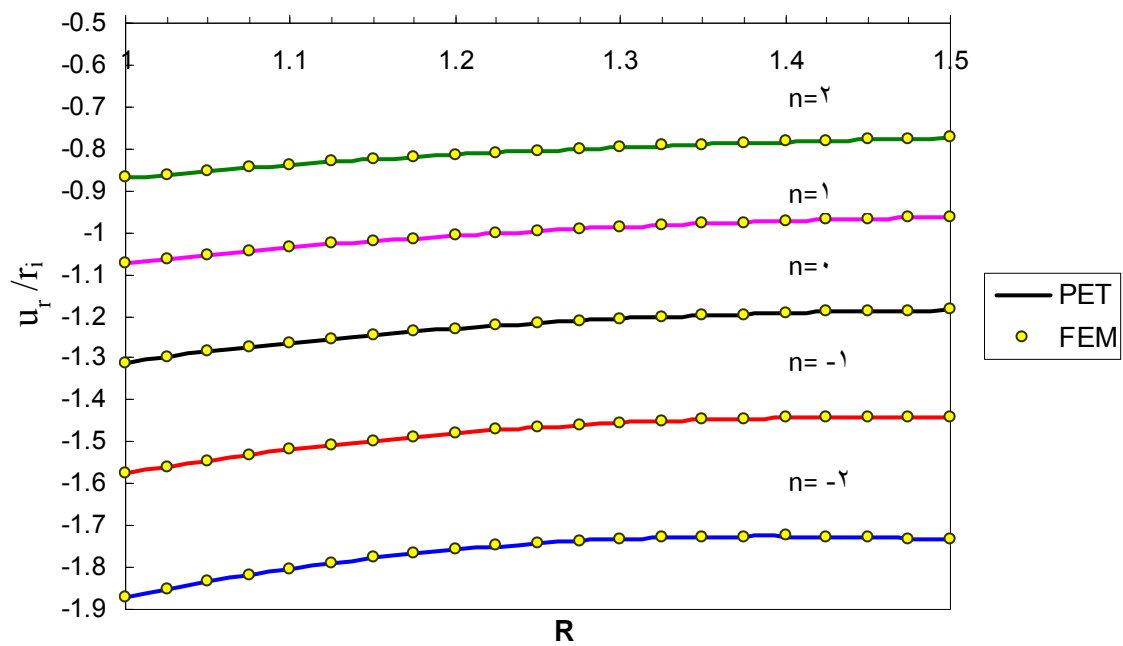
شکل (۶-۲) توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی



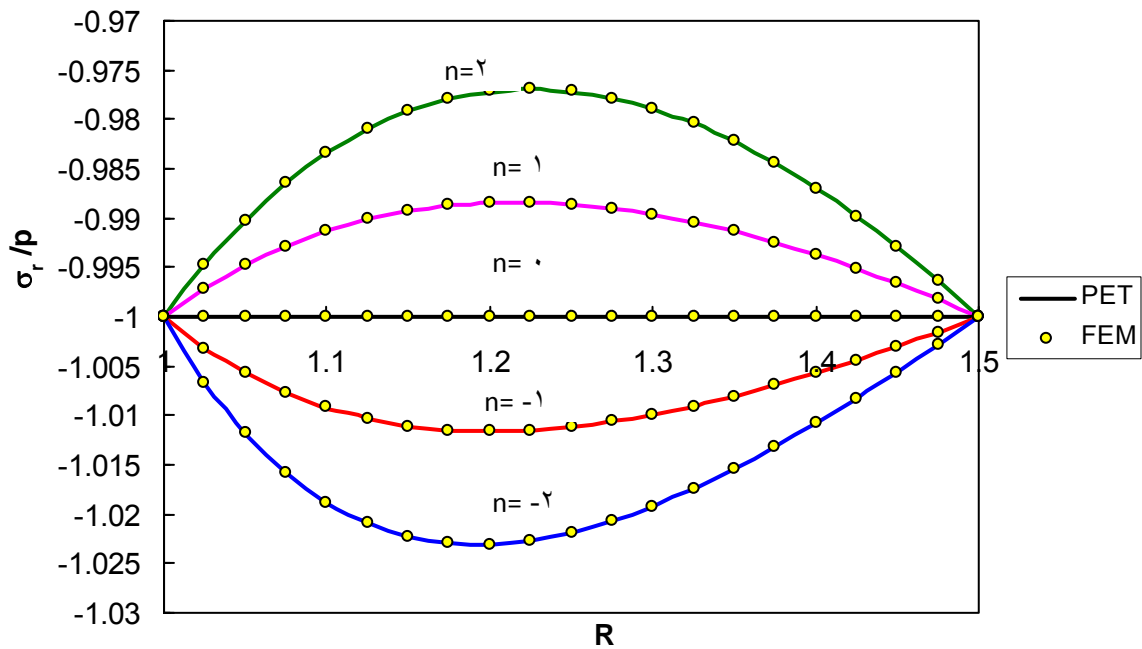
شکل (۷-۲) توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی



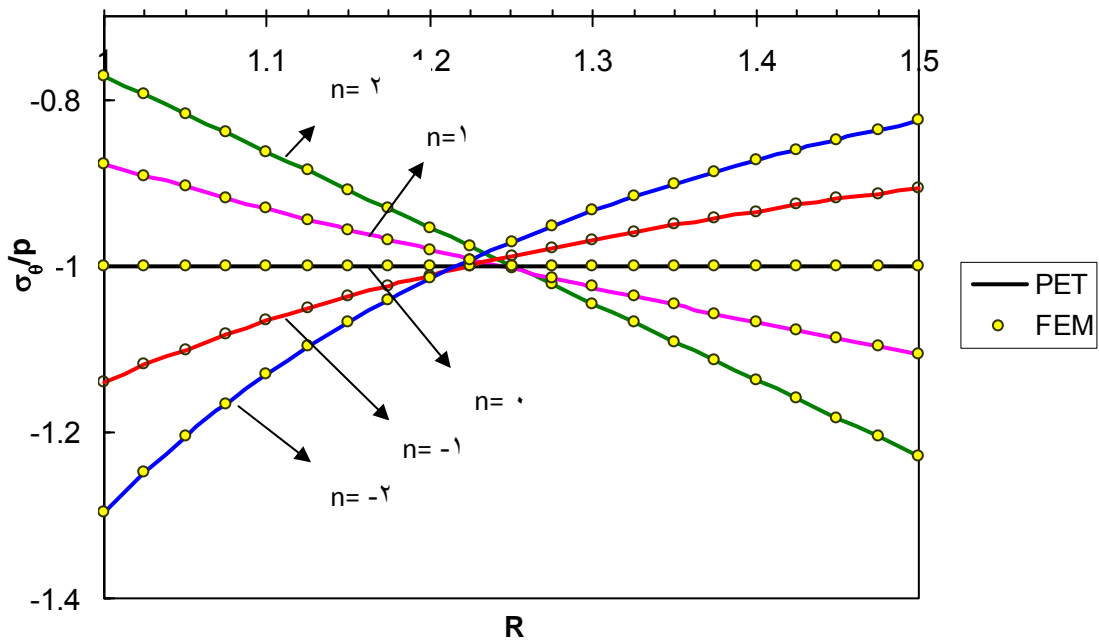
شکل (۸-۲) توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی



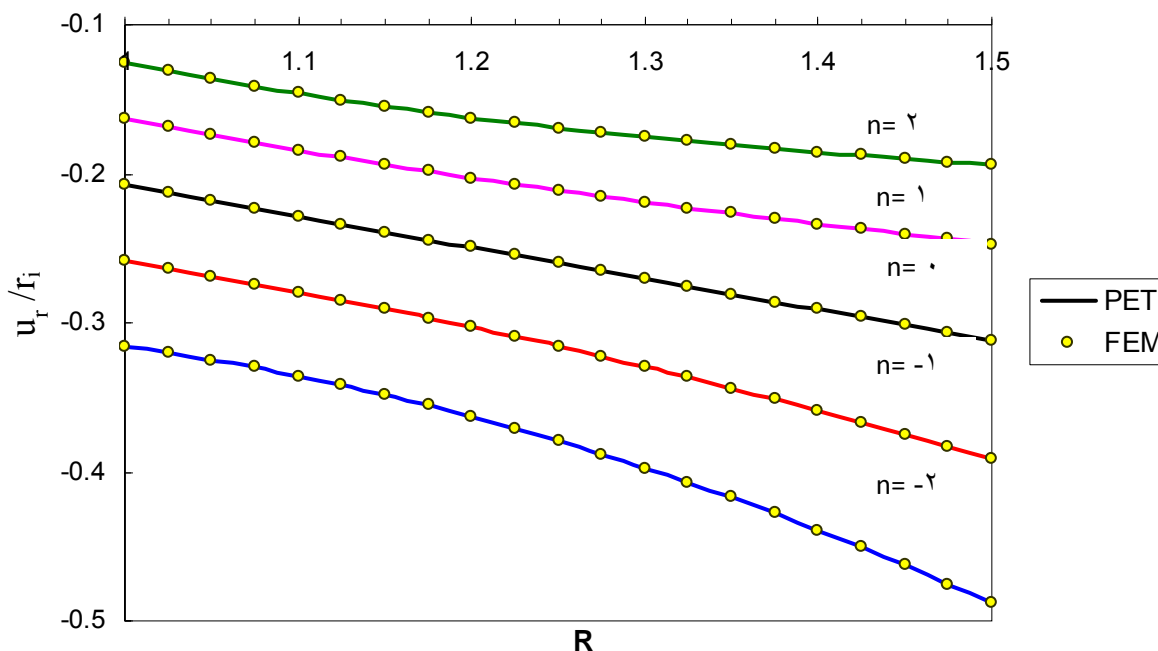
شکل (۹-۲) توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی



شکل (۲-۱۰) توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی



شکل (۲-۱۱) توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی



شکل (۲-۱۲) توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

۷-۲ نتیجه گیری

در شکل های ۲-۴، ۲-۷ و ۲-۱۰ تنش شعاعی در استوانه به ترتیب تحت بار فشاری داخلی، بار فشاری خارجی و بار فشاری داخلی و خارجی، در امتداد شعاع استوانه نشان داده شده است. دیده می شود که در صورت وجود بار فشار داخلی با افزایش ضریب توان در روابط ضریب الاستیسیته، مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد در صورتی که در حالت بارگذاری دوم که بار مکانیکی اعمالی به صورت بار فشاری خارجی بر استوانه وارد می شود، با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی کاهش یافته و در بارگذاری فشاری داخلی و خارجی استوانه نیز مانند بارگذاری فشاری خارجی با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی کاهش می یابد. تنش مماسی استوانه جدار ضخیم در شکل های ۲-۵، ۲-۸ و ۲-۱۱ نشان داده شده اند. در حالت بار فشاری داخلی تنش مماسی بصورت کششی اعمال می شود و تقریباً تا اواسط ضخامت استوانه با افزایش ضریب توان تنش مماسی کاهش یافته و از آن به بعد تا شعاع خارجی استوانه افزایش می یابد و در صورتی که در حالت دوم بارگذاری (بار فشاری خارجی) تنش مماسی به صورت فشاری وارد می شود و مشابه حالت قبل تا اواسط ضخامت استوانه با افزایش ضریب توان تنش مماسی کاهش یافته و از آن به بعد تا شعاع خارجی استوانه افزایش می یابد و در حالت سوم بارگذاری (بار فشاری داخلی و خارجی) تنش مماسی مشابه حالت بار فشاری خارجی خواهد بود و فقط مقدار آن کوچکتر می باشد.

جابجایی شعاعی استوانه جدار ضخیم بصورت بی بعد تحت بار گذاری های مورد بحث در شکل های ۲-۶، ۲-۹ و ۲-۱۲ نشان داده شده اند. همان طور که دیده می شود در بارگذاری فشاری داخلی، جابجایی شعاعی با افزایش ضریب توان کاهش می یابد و تمام جابجایی ها در بازه مثبت واقع هستند در حالی که در صورت اعمال بار فشاری خارجی جابجایی ها در بازه منفی قرار می گیرند و با افزایش ضریب توان، از میزان جابجایی کاسته می شود و در حالت سوم بارگذاری مشابه بارگذاری حالت قبل جابجایی هادر بازه منفی واقع می شوند، و با افزایش ضریب توان، جابجایی شعاعی کاهش می یابد.

فصل ۳

تحلیل ترمو الاستیک پوسته های

استوانه ای FGM

۳-۱ مقدمه

طراحی مواد FG در ابتدا به منظور کاربرد های حرارتی آنها در شرایط ویژه بود و مقاومت منحصر به فرد استوانه های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، دانشمندان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند. در همین راستا فصل حاضر، به تحلیل ترموالاستیک استوانه های جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی پرداخته و در ادامه، با محاسبه روابط تحلیلی ارائه شده و مقایسه آنها با نتایج عددی یکی از نرم افزار های المان محدود (Ansys) به صورت زیر پرداخته خواهد شد.

۱- استوانه ای تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی

۲- استوانه ای تحت بار حرارتی داخلی و فشار خارجی

۳- استوانه ای تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی و خارجی

در نهایت، با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده، توزیع جابجایی های شعاعی و رفتار تنش های شعاعی و محیطی برای استوانه ارائه شده است. در انتها، نتایج حاصله با یکدیگر مقایسه و جمع بندی خواهد شد.

۳-۲ روابط اساسی [۲]

الف- معادلات تعادل در مختصات استوانه ای

معادله تعادل در حالت کلی به صورت زیر می باشد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{B} = \vec{0} \quad (1-3)$$

که با بسط دادن این رابطه در مختصات استوانه ای، معادلات تعادل در مختصات استوانه ای بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + B_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + B_z &= 0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

ب- روابط رفتاری (تنش - کرنش)

رابطه بین تنش و کرنش، برای مواد ارتجاعی خطی ایزوتروپیک، در حالت ترموالاستیک به صورت زیر نوشته می شود [۴].

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\delta_{ij} \quad (۳-۳)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} + \alpha T\delta_{ij} \quad (۴-۳)$$

که در این روابط T و α به ترتیب نشان دهنده درجه حرارت و ضریب انبساط حرارتی و μ و λ ثابت های لامه، بصورت زیر می باشند.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۵-۳)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

در صورت نوشتن روابط تنش-کرنش در مختصات استوانه ای داریم.

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta}, \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}, \tau_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z} \end{cases} \quad (۶-۳)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)] + \alpha T \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{\mu}\tau_{r\theta}, \gamma_{rz} = \frac{1}{\mu}\tau_{rz}, \gamma_{\theta z} = \frac{1}{\mu}\tau_{\theta z} \end{cases} \quad (۷-۳)$$

ج- روابط سینماتیک (تغییر مکان - کرنش)

در حالت ترموالاستیک، روابط کلی سینماتیک به صورت زیر نشان داده می شود.

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T) \quad (۸-۳)$$

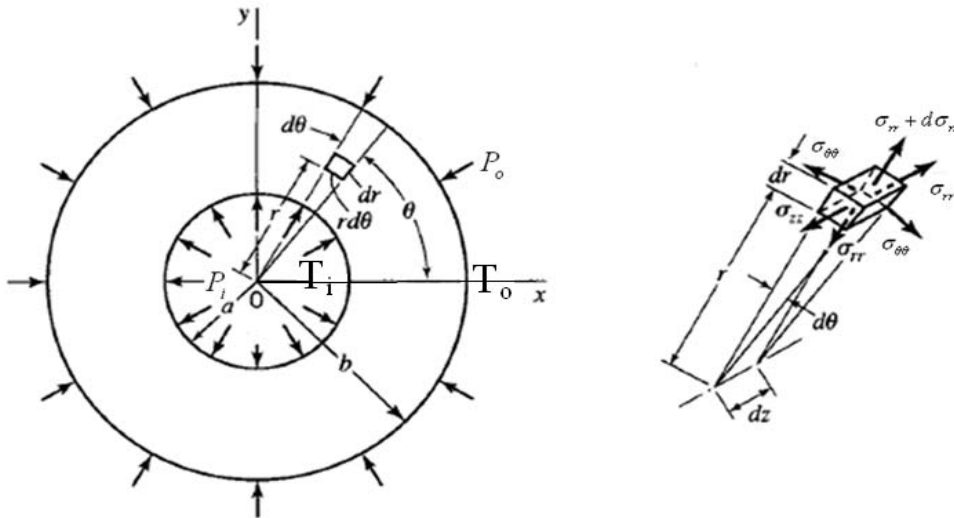
۶ معادله سینماتیک برای حالت استوانه ای به صورت زیر ساده می شوند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \gamma_{\theta z} &= \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{rz} &= \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (9-3)$$

۱-۲-۳ مسائل متقارن محوری^۱

مسئله متقارن محوری، مسئله ای است که در آن هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و نیز خواص مادی متقارن باشند و در نتیجه میدان تغییر شکل و تنش، تقارن محوری داشته باشد. در اینجا نیز می توان با فرض توزیع بار حرارتی در راستای شعاعی و متقارن در راستای مماسی، به صورت شکل ۱-۳، مسئله را متقارن محوری در نظر بگیریم، پس در این صورت خواهیم داشت.

$$u_\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (10-3)$$



شکل (۱-۳) نمایش یک المان از استوانه ضخیم

¹ Axisymmetric

با فرض تقارن محوری ۶ معادله سینماتیک به ۴ معادله کاهش می یابد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{rz} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \gamma_{r\theta} = 0, \gamma_{\theta z} = 0 \end{array} \right. \quad (11-3)$$

و معادلات تعادل به صورت ۲ معادله زیر به دست می آیند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + B_z = 0 \end{array} \right. \quad (12-3)$$

معادلات رفتاری نیز به ۴ معادله کاهش می یابند

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta}, \tau_{rz} = 0, \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right. \quad (13-3)$$

و یا می توان نوشت

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)] + \alpha T \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{\mu}\tau_{r\theta}, \gamma_{rz} = 0, \gamma_{\theta z} = 0 \end{array} \right. \quad (14-3)$$

پس ۱۵ معادله کلی موجود در مختصات استوانه ای، ۳ معادله تعادل، ۶ معادله سینماتیک و ۶ معادله رفتاری به ۱۰ معادله کاهش می یابد.

۳-۳ تئوری الاستیسیته صفحه ای

در تئوری الاستیسیته صفحه ای (PET)^۱ فرض میشود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می ماند. تغییر شکل های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن میباشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی کند. تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر میکند، به عبارت دیگر، جابه جایی شعاعی فقط تابع شعاع $u_r(r)$ است. یعنی المان چرخش ندارد، لذا کرنش برشی γ_{rz} و تنش برشی τ_{rz} در نظر گرفته نمی شوند. این بدان معناست که محورهای استوانه ای، محورهای اصلی و تنش های عمودی، تنش های اصلی هستند.

تنش های اصلی

$$\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r \quad (15-3)$$

با توجه به معادلات تعادل و معادلات سازگاری، نتیجه می شود که تنش طولی σ_z و کرنش طولی ε_z دارای مقادیر ثابتند.

$$\gamma_{rz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{rz} = 0 \quad (16-3)$$

و در این صورت ۱۰ رابطه قبل به ۸ رابطه کاهش می یابد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \quad (17-3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + B_z = 0 \end{cases} \quad (18-3)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \end{cases} \quad (19-3)$$

¹ Plane Elasticity Theory(PET)

فرض می شود V و R به صورت روابط بی بعد زیر تعریف شوند.

$$V = \frac{u_r}{r_i} \quad (20-3)$$

$$R = \frac{r}{r_i}$$

که r_i شعاع داخلی استوانه می باشد، در این صورت روابط تنش-جابجایی در ترم های نرمال شده جابجایی شعاعی V ، بصورت رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{dV}{dR} \\ \varepsilon_\theta = \frac{V}{R} \end{cases} \quad (21-3)$$

روابط تنش-کرنش را نیز بصورت رابطه ماتریسی زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ -\alpha T \end{bmatrix} \quad (22-3)$$

که ضرایب a ، b و c تعریف شده در این رابطه بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} a &= A E (R) \\ b &= B E (R) \\ c &= C E (R) \alpha (R) \end{aligned} \quad (23-3)$$

ضرایب A و B ثابت هایی هستند که با توجه به شرایط انتهایی استوانه بصورت زیر تعیین می گردند.

۳-۳-۱ شرایط انتهایی استوانه

الف) تنش صفحه ای (استوانه با دو سر باز)

در حالت شرایط انتهایی استوانه به صورت تنش صفحه ای ضرایب A ، B و C به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-\nu^2} \\ B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \\ C = \frac{1}{1-\nu} \end{cases} \quad (24-3)$$

ب) کرنش صفحه ای (استوانه با دو سر بسته و مقید) در حالت شرایط انتهایی استوانه به صورت کرنش صفحه ای، خواهیم داشت.

$$\begin{cases} A = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C = \frac{1}{1-2\nu} \end{cases} \quad (25-3)$$

معادله تعادل برای مختصات استوانه ای متقارن محوری، با توجه به رابطه (۳-۱۸)، بدون وجود نیروهای حجمی در ترم متغیر بی بعد R ، بصورت معادله زیر خواهد بود.

$$\frac{d\sigma_r}{dR} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{R} = 0 \quad (26-3)$$

حال توسط تعریف روابط (۳-۲۱) و (۳-۲۲) و استفاده از رابطه تعادل (۳-۲۶)، معادله دیفرانسیل برای مختصات استوانه ای متقارن محوری، بصورت رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{dV}{dR} + M(R) \frac{dV}{dR} + N(R)V = Q(R) \quad (27-3)$$

که در این رابطه، ضرایب معادله دیفرانسیل بالا، بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} M(R) &= \frac{1}{a} \frac{da}{dR} + \frac{1}{R} \\ N(R) &= \frac{1}{R} \left[\frac{1}{a} \frac{db}{dR} - \frac{1}{R} \right] \\ Q(R) &= \frac{1}{a} \left[T \frac{dc}{dR} + c \frac{dT}{dR} \right] \end{aligned} \quad (28-3)$$

۳-۳-۲ استوانه های همگن

برای استوانه های همگن در رابطه (۳-۲۳)، مدول الاستیسیته E، ضریب انبساط حرارتی α و نیز نسبت پواسون ν ، ثابت می باشند. در اینجا با جایگذاری ثابت های مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در آن رابطه و سپس رابطه (۳-۲۸) معادله دیفرانسیل حاصل به صورت رابطه (۳-۳۰) بدست می آید.

$$M(R) = \frac{1}{R}$$

$$N(R) = -\frac{1}{R^2} \quad (۳-۲۹)$$

$$Q(R) = \frac{C \alpha dT}{A dR}$$

$$R^2 V'' + R V' - V = \frac{C \alpha dT}{A dR} \quad (۳-۳۰)$$

که (۱)، مشتق نسبت به متغیر بی بعد R است.

۳-۳-۳ استوانه های ناهمگن

در مواد FG، مدول الاستیسیته E ضریب انبساط حرارتی و ثابت پواسون ν ، توابعی از مختصات شعاعی بی بعد R است، که در اکثر تحلیل ها و بالاخص در این بررسی، بعلت تاثیرات جزئی ثابت پواسون، از تغییرات آن صرفنظر می شود و ثابت در نظر گرفته می شود. رابطه توزیع مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی را بصورت توزیع توانی از مختصات بی بعد R، که در رابطه (۳-۳۱) آورده شده است، در نظر می گیریم.

$$E(R) = E_i R^n$$

$$\alpha(R) = \alpha_i R^m \quad (۳-۳۱)$$

که در این رابطه E_i مدول الاستیسیته و α_i ضریب انبساط حرارتی در شعاع داخلی استوانه می باشند و n و m به ترتیب ضرایب توان در روابط توزیع توانی مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی می باشند. حال توسط تعریف روابط (۳-۲۳) و (۳-۲۸)، ضرایب معادله دیفرانسیل، بصورت رابطه (۳-۳۲) و در نتیجه معادله دیفرانسیل استوانه های ناهمگن بصورت رابطه (۳-۳۳) بدست می آید.

$$M(R) = \frac{n+1}{R}$$

$$N(R) = \frac{n\beta-1}{R^2} \quad (۳-۳۲)$$

$$Q(R) = \frac{C \alpha_i}{A} R^m \left[\frac{dT}{dR} + \frac{(m+n)}{R} T \right]$$

$$R^2 V'' + (n+1)RV' + (n\frac{B}{A} - 1)V = \frac{C\alpha_i}{A} R^{m+2} \left[\frac{dT}{dR} + (m+n)\frac{T}{R} \right] \quad (33-3)$$

۳-۴ حل ترموالاستیک استوانه های نا همگن

۳-۴-۱ حل مسئله انتقال حرارت

معادله انتقال حرارت در شرایط یکنواخت، برای مسئله یک بعدی بطور شعاعی، در مختصات قطبی برای یک استوانه تو خالی بصورت رابطه (۳۴-۳) بدست می آید. بطور کلی معادله بدست آمده و شرایط مرزی حرارتی بصورت زیر خواهد بود. که در این رابطه $K(R)$ ، ضریب جابجایی حرارتی است.

$$\frac{1}{R} [R K(R) T'(R)]' = 0 \quad (34-3)$$

$$\begin{aligned} r = r_i & \implies R = 1 & T = T_i \\ r = r_o & \implies R = k & T = T_o \end{aligned} \quad (35-3)$$

در این روابط، T_o و T_i بترتیب شعاع های داخلی و خارجی استوانه تو خالی اند. با فرض ثابت بودن ضریب جابجایی حرارتی در رابطه (۳۴-۳) با دو بار انتگرالگیری از رابطه بالا داریم.

$$T(R) = C_1 + C_2 \ln R - T^* \quad (36-3)$$

T^* دمای هوای محیط می باشد، که در تحلیل های عددی آنرا برابر $25^0 C$ در نظر میگیریم و C_1 و C_2 توسط شرایط مرزی (۳۵-۳) بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} C_1 &= T_i \\ C_2 &= \frac{T_o - T_i}{\ln k} \end{aligned} \quad (37-3)$$

با جایگذاری ثابت ها داریم

$$T(R) = (T_i - T^*) + \frac{T_o - T_i}{\ln(k)} \ln R \quad (38-3)$$

با قرار دادن رابطه توزیع دما در معادله (۳۳-۳)، معادله دیفرانسیل حاصل بصورت زیر بدست می آید [۱۳].

$$V'' + \frac{(n+1)}{R} V' + \frac{(n\frac{B}{A} - 1)}{R^2} V = \frac{C\alpha_i}{A} [(n+m)R^{(m-1)}T(R) + R^m \frac{dT(R)}{dR}] \quad (39-3)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل (۳-۳۹) دارای دو حل عمومی و خصوصی بصورت زیر خواهد بود.

$$V(R) = V_g(R) + V_p(R) \quad (40-3)$$

حال برای یافتن جواب خصوصی معادله (۳-۳۹)، حل خصوصی آن را بصورت زیر فرض می کنیم.

$$V_p(R) = [D_1 + D_2 \ln R] R^{m+1} \quad (41-3)$$

با جایگزینی رابطه (۳-۴۱) در رابطه (۳-۳۹) و مساوی قرار دادن ضرایب توانها خواهیم داشت.

$$D_1 = \left[\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{QA+nB} - \frac{(UA-nB)C_2}{(QA+nB)^2} \right] C \alpha_i$$

$$D_2 = \frac{(n+m)C \alpha_i C_2}{QA+nB} \quad (42-3)$$

$$Q = m^2 + (n+2)m + n$$

$$U = (2m+n+1)n + m^2$$

اگر فرض شود حل عمومی معادله همگن آن، بفرم زیر باشد.

$$V_g(R) = B R^n \quad (43-3)$$

با جایگزینی این رابطه در رابطه (۳-۳۹) معادله مشخصه آن، بصورت رابطه زیر بدست می آید.

$$\eta^2 + n\eta + (\beta n - 1) = 0 \quad (44-3)$$

با حل رابطه معادله مشخصه (۳-۴۴) ریشه های آن به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} \eta_{1,2} = \frac{1}{2}(-n \pm \sqrt{\Delta}) \\ \Delta = n^2 - 4n\beta + 4 \end{cases} \quad (45-3)$$

ریشه های حاصل، ممکن است دارای سه حالت الف) ریشه های حقیقی، ب) ریشه های مضاعف و ج) ریشه های مختلط باشند. حل کامل معادله (۳-۳۹)، در سه حالت مختلف ریشه های حقیقی، مضاعف و مختلط، بصورت زیر خواهد بود.

۳-۴-۲ ریشه های حقیقی

برای حالت ریشه های حقیقی داریم

$$V_g = (B_1 R^{\eta_1} + B_2 R^{\eta_2}) \quad (۴۶-۳)$$

بطو کلی حل کامل برای تابع $V(R)$ ، مجموع حل عمومی و خصوصی بصورت زیر است

$$V(R) = B_1 R^{\eta_1} + B_2 R^{\eta_2} + [D_1 + D_2 \ln R] R^{m+1} \quad (۴۷-۳)$$

با جایگزینی رابطه (۴۷-۳) در رابطه (۳-۲۱) و (۳-۲۲)، تنش ها بصورت روابط زیر بدست می آیند

$$\sigma_r = [(A\eta_1 + B)B_1 R^{\eta_1} + (A\eta_2 + B)B_2 R^{\eta_2} + (X \ln R + Y) R^{m+1}] E_i R^{(n-1)} \quad (۴۸-۳)$$

$$\sigma_\theta = [(B\eta_1 + A)B_1 R^{\eta_1} + (B\eta_2 + A)B_2 R^{\eta_2} + (Z \ln R + P) R^{m+1}] E_i R^{(n-1)} \quad (۴۹-۳)$$

که در این روابط داریم

$$\begin{aligned} X &= ((m+1)A+B)D_2 - C\alpha_i C_2 \\ Y &= ((m+1)A+B)D_1 + AD_2 - C\alpha_i (T_i - T^*) \\ Z &= ((m+1)B+A)D_2 - C\alpha_i C_2 \\ P &= ((m+1)B+A)D_1 + BD_2 - C\alpha_i (T_i - T^*) \end{aligned} \quad (۵۰-۳)$$

شرایط مرزی در سطح داخل و خارج استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، بصورت رابطه (۳-۵۱) خواهد بود.

$$\begin{aligned} r=a &\implies R=1 & \sigma_r &= -p_i \\ r=b &\implies R=k & \sigma_r &= -p_o \end{aligned} \quad (۵۱-۳)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه بدست آمده (۳-۴۸) ضرایب B_1 و B_2 بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{k^{\eta_2} (E_i Y + p_i) - E_i k^{m+1} (X \ln k + Y) - p_o k^{1-n}}{(A\eta_1 + B) E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \\ B_2 &= \frac{E_i k^{m+1} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} (E_i Y + p_i) + p_o k^{1-n}}{(A\eta_2 + B) (k^{\eta_1} - k^{\eta_2}) E_i} \end{aligned} \quad (۵۲-۳)$$

با قرار دادن ضرایب B_1 و B_2 در معادلات (۳-۴۷)، (۳-۴۸) و (۳-۴۹) روابط تنش و جابجایی شعاعی بصورت تابعی از متغیر بی بعد R بدست می آید.

$$\sigma_r = \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] + \left\{ \left[\frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \right] + (X \ln R + Y) R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} \quad (53-3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{A + B \eta_1}{A \eta_1 + B} \left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \frac{A + B \eta_2}{A \eta_2 + B} \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] + \left\{ \left[\frac{B \eta_1 + A}{A \eta_1 + B} \frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{B \eta_2 + A}{A \eta_2 + B} \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \right] + (Z \ln R + P) R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} \quad (54-3)$$

$$u_r = \frac{r_i}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left\{ \frac{\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1}}{(A \eta_1 + B) E_i} - \frac{\left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2}}{(A \eta_2 + B) E_i} + R^{\eta_1} \frac{k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)}{(A \eta_1 + B)} + R^{\eta_2} \frac{k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y}{(A \eta_2 + B)} \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1} \quad (55-3)$$

روابط تنش و جابجایی در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر خواهد بود.

الف) تنش صفحه ای

$$X = \frac{[m+1+\nu] C_2 (n+m) - C_2}{Q+n\nu} \alpha_i$$

$$Y = \frac{[m+1+\nu] \left(\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{Q+n\nu} + \frac{(-U+n\nu) C_2}{(Q+n\nu)^2} \right) + \frac{C_2 (n+m)}{Q+n\nu} - (T_i - T^*)}{1-2\nu} \alpha_i \quad (56-3)$$

$$Z = \frac{[(m+1)\nu+1] C_2 (n+m) - C_2}{Q+n\nu} \alpha_i$$

$$P = \frac{[(m+1)\nu+1] \left(\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{Q+n\nu} + \frac{(-U+n\nu) C_2}{(Q+n\nu)^2} \right) + \frac{\nu C_2 (n+m)}{Q+n\nu} - (T_i - T^*)}{1-2\nu} \alpha_i$$

$$\sigma_r = \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] + \left\{ \left[\frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \right] + (X \ln R + Y) R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} \quad (57-3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{\nu\eta_1 + 1}{\eta_1 + \nu} \left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \frac{\nu\eta_2 + 1}{\eta_2 + \nu} \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right]$$

$$+ \left\{ \frac{\nu\eta_1 + 1}{\eta_1 + \nu} \frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{\nu\eta_2 + 1}{\eta_2 + \nu} \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \right\} \quad (58-3)$$

$$+ (Z \ln R + P) R^{m+1} \} E_i R^{n-1}$$

$$u_r = \frac{r_i (1 - \nu^2)}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left\{ \frac{\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1}}{(\eta_1 + \nu) E_i} - \frac{\left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2}}{(\eta_2 + \nu) E_i} \right. \quad (59-3)$$

$$\left. + R^{\eta_1} \frac{k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)}{(\eta_1 + \nu)} + R^{\eta_2} \frac{k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y}{(\eta_2 + \nu)} \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1}$$

(ب) کرنش صفحه ای

$$X = \frac{[(m+1)(1-\nu)+\nu]C_2(n+m) - C_2}{Q(1-\nu)+n\nu} \alpha_i$$

$$Y = \frac{[(m+1)(1-\nu)+\nu] \left(\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{Q(1-\nu)+n\nu} + \frac{(-U(1-\nu)+n\nu)C_2}{(Q(1-\nu)+n\nu)^2} \right) + \frac{(1-\nu)C_2(n+m)}{Q(1-\nu)+n\nu} - (T_i - T^*)}{1-2\nu} \alpha_i \quad (60-3)$$

$$Z = \frac{[(m+1)\nu+(1-\nu)]C_2(n+m) - C_2}{Q(1-\nu)+n\nu} \alpha_i$$

$$P = \frac{[(m+1)\nu+(1-\nu)] \left(\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{Q(1-\nu)+n\nu} + \frac{(-U(1-\nu)+n\nu)C_2}{(Q(1-\nu)+n\nu)^2} \right) + \frac{\nu C_2(n+m)}{Q(1-\nu)+n\nu} - (T_i - T^*)}{1-2\nu} \alpha_i$$

$$\sigma_r = \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right]$$

$$+ \left\{ \frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \right\} \quad (61-3)$$

$$+ (X \ln R + Y) R^{m+1} \} E_i R^{n-1}$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{A + B\eta_1}{A\eta_1 + B} \left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \frac{A + B\eta_2}{A\eta_2 + B} \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right]$$

$$+ \left\{ \frac{\nu\eta_1 + (1-\nu)}{(1-\nu)\eta_1 + \nu} \frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{\nu\eta_2 + (1-\nu)}{(1-\nu)\eta_2 + \nu} \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \right\} \quad (62-3)$$

$$+ (Z \ln R + P) R^{m+1} \} E_i R^{n-1}$$

$$u_r = \frac{r_i (1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left\{ \frac{\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1}}{(A\eta_1 + B) E_i} - \frac{\left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2}}{(A\eta_2 + B) E_i} \right. \quad (63-3)$$

$$\left. + R^{\eta_1} \frac{k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)}{(1-\nu)\eta_1 + \nu} + R^{\eta_2} \frac{k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y}{(1-\nu)\eta_2 + \nu} \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1}$$

۳-۴-۳ ریشه های مضاعف

در حالت ریشه های مضاعف $\eta = -\frac{n}{\gamma}$ ، و در این حالت، پاسخ معادله همگن (۳-۳۹) بصورت رابطه زیر خواهد بود.

$$V_g(R) = (B_1 + B_2 \ln R)R^\eta \quad (۳-۶۴)$$

حل کامل برای تابع $V(R)$ در حالت ریشه های مضاعف، بصورت زیر است.

$$V(R) = (B_1 + B_2 \ln R)R^\eta + [D_1 + D_2 \ln R]R^{m+1} \quad (۳-۶۵)$$

با جایگزینی رابطه (۳-۶۵) در رابطه (۳-۲۱) و (۳-۲۲)، تنش ها بصورت رابطه زیر بدست می آید.

$$\sigma_r = \left\{ [(A\eta + B)B_1 + ((A\eta + B) \ln R + A)B_2]R^\eta + (X \ln R + Y)R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} \quad (۳-۶۶)$$

$$\sigma_\theta = \left\{ (B\eta + A)B_1 + ((B\eta + A) \ln R + B)B_2 \right\} R^\eta + (Z \ln R + P)R^{m+1} \left\} E_i R^{n-1} \quad (۳-۶۷)$$

شرایط مرزی در سطح داخل و خارج استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، مشابه رابطه (۳-۵۱) خواهد بود.

$$\begin{aligned} r = a &\implies R = 1 & \sigma_r &= -p_i \\ r = b &\implies R = k & \sigma_r &= -p_o \end{aligned} \quad (۳-۶۸)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه بدست آمده، ضرایب B_1 و B_2 بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{A [k^{m+1} (X \ln k + Y) E_i + p_o k^{1-n}] - k^\eta [(A\eta + B) \ln k + A] (Y E_i + p_i)}{k^\eta \ln k (A\eta + B)^2 E_i} \\ B_2 &= \frac{k^\eta (Y E_i + p_i) - k^{m+1} (X \ln k + Y) E_i - p_o k^{1-n}}{k^\eta \ln k (A\eta + B) E_i} \end{aligned} \quad (۳-۶۹)$$

با قرار دادن ضرایب بدست آمده در روابط (۳-۶۵)، (۳-۶۶) و (۳-۶۷) روابط تنش و جابجایی بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{R^{(m+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-m-n)} P_o \ln R \right] \\ &- \left[\frac{Y k^\eta \ln \frac{k}{R} + \ln R (X \ln k + Y) k^{m+1}}{k^\eta \ln k} R^\eta - (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \end{aligned} \quad (۳-۷۰)$$

$$\sigma_{\theta} = \left[\frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{B^2 - A^2}{(A\eta + B)^2} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \frac{A + B\eta}{A\eta + B} \left[P_i \ln \frac{k}{r} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln \bar{r} \right] \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\left[\frac{A^2 - B^2}{(A\eta + B)^2} - \frac{(B\eta + A) \ln R}{A\eta + B} \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{A^2 - B^2}{(A\eta + B)^2} + \frac{(B\eta + A) \ln \frac{k}{R}}{A\eta + B} \right] Y k^{\eta}}{k^{\eta} \ln k} R \right. \right. \\ \left. \left. + (Z \ln R + P) R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} \right] \quad (71-3)$$

$$u_r = \frac{r_i R^{\eta}}{E_i (A\eta + B) \ln k} \left\{ -\frac{A}{A\eta + B} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} \\ + \frac{r_i \left(\frac{R}{k}\right)^{\eta}}{(A\eta + B) \ln k} \left\{ \left[\frac{A}{A\eta + B} - \ln R \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{A}{A\eta + B} + \ln \frac{k}{R} \right] Y k^{\eta} \right\} \quad (72-3) \\ + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1}$$

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_r = -\frac{R^{(m+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-m-n)} P_o \ln R \right] \\ - \left[\frac{Y k^{\eta} \ln \frac{k}{R} + \ln R (X \ln k + Y) k^{m+1}}{k^{\eta} \ln k} R^{\eta} - (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \quad (73-3)$$

$$\sigma_{\theta} = \left[\frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{1-v^2}{(\eta+v)^2} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \frac{1+v\eta}{\eta+v} \left[P_i \ln \frac{k}{r} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln \bar{r} \right] \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\left[\frac{1-v^2}{(\eta+v)^2} - \frac{(v\eta+1) \ln R}{\eta+v} \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{1-v^2}{(\eta+v)^2} + \frac{(v\eta+1) \ln \frac{k}{R}}{\eta+v} \right] Y k^{\eta}}{k^{\eta} \ln k} R \right. \right. \\ \left. \left. + (Z \ln R + P) R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} \right] \quad (74-3)$$

$$u_r = \frac{r_i R^{\eta}}{E_i (A\eta + B) \ln k} \left\{ -\frac{1}{\eta+v} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} \\ + \frac{r_i \left(\frac{R}{k}\right)^{\eta}}{(\eta+v) \ln k} \left\{ \left[\frac{1}{\eta+v} - \ln R \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{1}{\eta+v} + \ln \frac{k}{R} \right] Y k^{\eta} \right\} \quad (75-3) \\ + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1}$$

(ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_r = -\frac{R^{(m+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-m-n)} P_o \ln R \right]$$

$$- \left[\frac{Y k^\eta \ln \frac{k}{R} + \ln R (X \ln k + Y) k^{m+1}}{k^\eta \ln k} R^\eta - (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \quad (76-3)$$

$$\sigma_\theta = \left[\frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{1-2\nu}{((\eta-1)\nu-\eta)^2} \left[k^{(1-\eta-n)} P_o - P_i \right] - \frac{(\eta-1)\nu-1}{(\eta-1)\nu-\eta} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} \right]$$

$$+ \left[\frac{\left[\frac{1-2\nu}{((1-\nu)\eta+\nu)^2} - \frac{(\nu\eta+(1-\nu)) \ln R}{(1-\nu)\eta+\nu} \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{1-2\nu}{((1-\nu)\eta+\nu)^2} + \frac{(\nu\eta+(1-\nu)) \ln \frac{k}{R}}{(1-\nu)\eta+\nu} \right] Y k^\eta}{k^\eta \ln k} R \right] \quad (77-3)$$

$$+(Z \ln R + P) R^{m+1} \left. \right\} E_i R^{n-1}$$

$$u_r = \frac{r_i R^\eta}{E_i (A\eta + B) \ln k} \left\{ -\frac{(1-\nu)}{(1-\nu)\eta+\nu} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\}$$

$$+ \frac{r_i \left(\frac{R}{k}\right)^\eta}{(A\eta + B) \ln k} \left\{ \left[\frac{1-\nu}{(1-\nu)\eta+\nu} - \ln R \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{1-\nu}{(1-\nu)\eta+\nu} + \ln \frac{k}{R} \right] Y k^\eta \right\} \quad (78-3)$$

$$+(D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1}$$

۳-۴-۴ ریشه های مختلط

در این حالت در معادله مشخصه (۳-۴۴)، $\Delta < 0$ و پاسخ معادله همگن (۳-۳۹) بصورت رابطه زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \eta_1 = x + iy \\ \eta_2 = x - iy \end{cases} \quad (79-3)$$

$$x = -\frac{n}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (80-3)$$

$$V_g(R) = [B_1 \cos(y \ln R) + B_2 \sin(y \ln R)] R^x \quad (81-3)$$

حل کامل برای تابع $V(R)$ در حالت ریشه های مختلط، بصورت زیر خواهد بود.

$$V(R) = [B_1 \cos(y \ln R) + B_2 \sin(y \ln R)] R^x + [D_1 + D_2 \ln R] R^{m+1} \quad (82-3)$$

با جایگزینی رابطه (۳-۸۲) در رابطه (۳-۲۱) و (۳-۲۲)، تنش ها بصورت روابط زیر بدست می آیند.

$$\sigma_r = \{[(Ax+B)\cos(y \ln R) - A y \sin(y \ln R)]B_1 + [(Ax+B)\sin(y \ln R) + A y \cos(y \ln R)]B_2\} R^x + (X \ln R + Y) R^{m+1} \} E_i R^{n-1} \quad (83-3)$$

$$\sigma_\theta = \{[(Bx+A)\cos(y \ln R) - B y \sin(y \ln R)]B_1 + [(Bx+A)\sin(y \ln R) + B y \cos(y \ln R)]B_2\} R^x + (Z \ln R + P) R^{m+1} \} E_i R^{n-1} \quad (84-3)$$

با توجه به شرایط مرزی تعریف شده، بصورت رابطه (3-51) و اعمال شرایط مرزی، در رابطه بدست آمده (3-83) ضرایب B_1 و B_2 بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$B_1 = \frac{A y [E_i k^{m+1} (X \ln k + Y) + p_o k^{1-n}] - [(Ax+B)\sin(y \ln k) + A y \cos(y \ln k)](E_i Y + p_i) k^x}{E_i D \sin(y \ln(k)) k^x}$$

$$B_2 = \frac{[(Ax+B)\cos(y \ln k) - A y \sin(y \ln k)](E_i Y + p_i) k^x - (Ax+B)[E_i k^{m+1} (X \ln k + Y) + p_o k]}{E_i D \sin(y \ln(k)) k^x} \quad (85-3)$$

$$D = ((Ax+B)^2 + A^2 y^2)$$

با قرار دادن ضرایب بدست آمده روابط تنش و کرنش به صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_r = -\frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right]$$

$$+ \left[\frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) \sin(y \ln R) + k^x Y \sin(y \ln \frac{k}{R})}{k^x \sin(y \ln k)} R^x + (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \quad (86-3)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{R^{z+n-1}}{D \sin(y \ln k)} \left\{ \left[(A^2 + B^2)x + AB(x^2 + y^2 + 1) \right] \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right.$$

$$\left. + (A^2 - B^2)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\}$$

$$+ \frac{E_i R^{m-1}}{D k^x \sin(y \ln k)} \left[k^{m+1} (X \ln k + Y) [y(A^2 - B^2) \cos(y \ln R) - ((A^2 + B^2)x + (x^2 + y^2 + 1)AB) \sin(y \ln R)] \right] \quad (87-3)$$

$$-k^x Y \left[((A^2 + B^2)x + (x^2 + y^2 + 1)AB) \sin(y \ln \frac{k}{R}) + y(A^2 - B^2) \cos(y \ln \frac{k}{R}) \right] R^x$$

$$+ (Z \ln R + P) E_i R^{m+n}$$

$$u_r = -\frac{r_i R^x}{E_i D \sin(y \ln k)} \left\{ (Ax+B) \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right.$$

$$\left. + Ay \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) R^{m+1}$$

$$+ \left. \frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) [A y \cos(y \ln R) - (Ax+B) \sin(y \ln R)] - [(Ax+B) \sin(y \ln \frac{k}{R}) + A y \cos(y \ln \frac{k}{R})] Y k^x}{D k^x \sin(y \ln k)} R^x \right\} \quad (88-3)$$

از روابط بدست آمده مشخص است، در این حالت تنش شعاعی و مماسی و جابجایی شعاعی، به شرایط انتهایی و مرزی استوانه وابسته است و بر اساس متغیرهای داده شده، روابط تنش در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر بدست می آید.

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_r = -\frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + \left[\frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) \sin(y \ln R) + k^{xY} \sin(y \ln \frac{k}{R})}{k^x \sin(y \ln k)} R^x + (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \quad (89-3)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{R^{z+n-1}}{[(x+\nu)^2 + y^2] \sin(y \ln k)} \left\{ \left[(1+\nu^2)x + \nu(x^2 + y^2 + 1) \right] \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + (1-\nu^2)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} + \frac{E_i R^{n-1}}{[(x+\nu)^2 + y^2] k^x \sin(y \ln k)} \left[k^{m+1} (X \ln k + Y) [y(1-\nu^2) \cos(y \ln R) - ((1+\nu^2)x + (x^2 + y^2 + 1)\nu) \sin(y \ln R)] - k^{xY} [(1+\nu^2)x + (x^2 + y^2 + 1)\nu] \sin(y \ln \frac{k}{R}) + y(1-\nu^2) \cos(y \ln \frac{k}{R}) \right] R^x + (Z \ln R + P) E_i R^{m+n}$$

$$u_r = -\frac{r_i R^x}{E_i [(x+\nu)^2 + y^2] \sin(y \ln k)} \left\{ (x+\nu) \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) R^{m+1} + \frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) [y \cos(y \ln R) - (x+\nu) \sin(y \ln R)] - [(x+\nu) \sin(y \ln \frac{k}{R}) + y \cos(y \ln \frac{k}{R})] Y k^x}{[(x+\nu)^2 + y^2] k^x \sin(y \ln k)} R^x \left. \right\} r_i \quad (91-3)$$

(ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_r = -\frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + \left[\frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) \sin(y \ln R) + k^x Y \sin(y \ln \frac{k}{R})}{k^x \sin(y \ln k)} R^x + (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \quad (92-3)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{R^{z+n-1}}{[(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2 \sin(y \ln k)} \left\{ \left[\left((1-\nu)^2 + \nu^2 \right) x + \nu(1-\nu)(x^2 + y^2 + 1) \right] \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + \left((1-\nu)^2 - \nu^2 \right) y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} + \frac{E_i R^{n-1}}{[(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2} \left\{ k^{m+1} (X \ln k + Y) \left[y \left((1-\nu)^2 - \nu^2 \right) \cos(y \ln R) - \left((1-\nu)^2 + \nu^2 \right) x + (x^2 + y^2 + 1) \nu(1-\nu) \right] \sin(y \ln R) \right. \\ \left. - k^x Y \left[\left((1-\nu)^2 + \nu^2 \right) x + (x^2 + y^2 + 1) \nu(1-\nu) \right] \sin(y \ln \frac{k}{R}) + y \left((1-\nu)^2 - \nu^2 \right) \cos(y \ln \frac{k}{R}) \right] \right\} R^x + (Z \ln R + P) E_i R^{m+n} \quad (93-3)$$

$$u_r = -\frac{r_i R^x}{E_i [(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2 \sin(y \ln k)} \left\{ (1-\nu)x + \nu \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + (1-\nu)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) R^{m+1} + \frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) [(1-\nu)y \cos(y \ln R) - ((1-\nu)x + \nu) \sin(y \ln R)] - [(1-\nu)x + \nu] \sin(y \ln \frac{k}{R}) + (1-\nu)y \cos(y \ln \frac{k}{R})}{[(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2} k^x \sin(y \ln k) R^x \left. \right\} r_i \quad (94-3)$$

۳-۵ حل عددی استوانه های ناهمگن

برای المان بندی استوانه، المان solid از نوع 82 nod 82 plane با گزینه axisymmetric انتخاب شده است. این المان ۴ ضلعی که در فصل قبل مورد بررسی قرار گرفت برای مسائل تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سختی المان مذکور ۱۶×۱۶ می باشد. المان در نظر گرفته شده برای تحلیل توزیع حرارت در جداره استوانه المان solid از نوع 77 node 77 plane با گزینه axisymmetric انتخاب شده است. در مدل سازی، یک استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جدار ثابت بطول $L = 800 \text{ mm}$ مدل شده است، که برای ایجاد خواص ناهمگنی

که در اینجا، به صورت شعاعی در نظر گرفته شده است، استوانه به ۲۰ لایه مساوی از مواد همگن به ضخامت هر کدام یک میلیمتر تقسیم شده است (شکل ۳-۲) و بعد از بهینه سازی انجام گرفته در المان بندی مدل ایجاد شده المان هایی به ابعاد 1×1 میلیمتر در مش بندی مدل در نظر گرفته شد. خواص مدول الاستیک و ضریب انبساط حرارتی در هر لایه ثابت در نظر گرفته شده است و خواص هر لایه به لایه دیگر با تابع توانی، بصورت رابطه (۳-۳۱) تغییر می کنند. سپس بارگذاری مورد نظر را، جهت شبیه سازی توزیع تنش و جابجایی شعاعی استوانه، به استوانه اعمال می کنیم.



شکل (۳-۲) مدل مقطع طولی استوانه *FGM* با تقسیم به ۲۰ لایه

با شبیه سازی استوانه در حالت کرنش صفحه ای ابتدا با اعمال بار حرارتی به مدل و شبیه سازی آن، توزیع درجه حرارت را در جداره استوانه بدست آورده و سپس بارهای مکانیکی اعمالی را به مدل وارد کرده و تنش ها و جابجایی های شعاعی در استوانه را بدست می آوریم.

۳-۶ بررسی نتایج

برای مطالعه موردی و بررسی نمودارهای بدست آمده از نتایج عددی و تحلیلی، یک استوانه جدار کلفت تو خالی بشعاع داخلی $r_i = 40\text{mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60\text{mm}$ در نظر می گیریم. نسبت پواسون برابر ۰.۳ و مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی، در سطح داخلی استوانه بترتیب برابر با $E_i = 200\text{Gpa}$ ، $\alpha_i = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ می باشند. برای ساده سازی تحلیل، ضرایب توان در روابط (۳-۳۱) را برای E و α یکسان در نظر می گیریم و استوانه توخالی را تحت سه حالت بارگذاری زیر در نظر می گیریم.

۴- فشار یکنواخت داخلی $p_i = 8.0 \text{ MPa}$ ، دمای سطح داخل $T_i = 125^\circ\text{C}$ و سطح خارج

$$T_o = 25^\circ\text{C} \text{ برابر دمای محیط}$$

۵- فشار یکنواخت خارجی $p_o = 8.0 \text{ MPa}$ ، دمای سطح داخل $T_i = 125^\circ\text{C}$ و سطح خارج

$$T_o = 25^\circ\text{C} \text{ برابر دمای محیط}$$

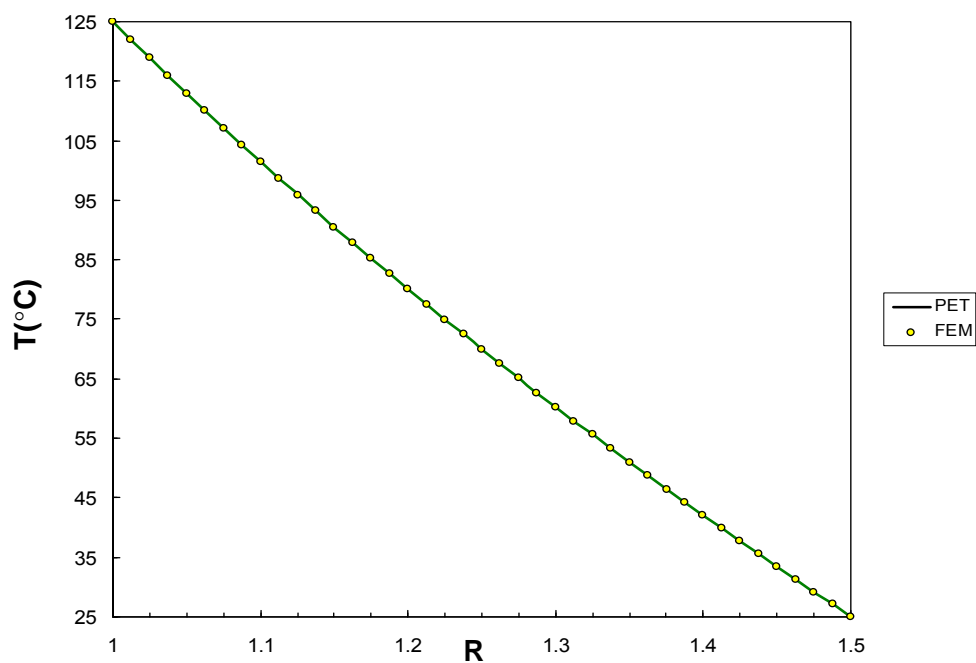
۶- فشار یکنواخت داخلی و خارجی $p_i = p_o = 8.0 \text{ MPa}$ ، دمای سطح داخل

$$T_i = 125^\circ\text{C} \text{ و سطح خارج برابر دمای محیط } T_o = 25^\circ\text{C}$$

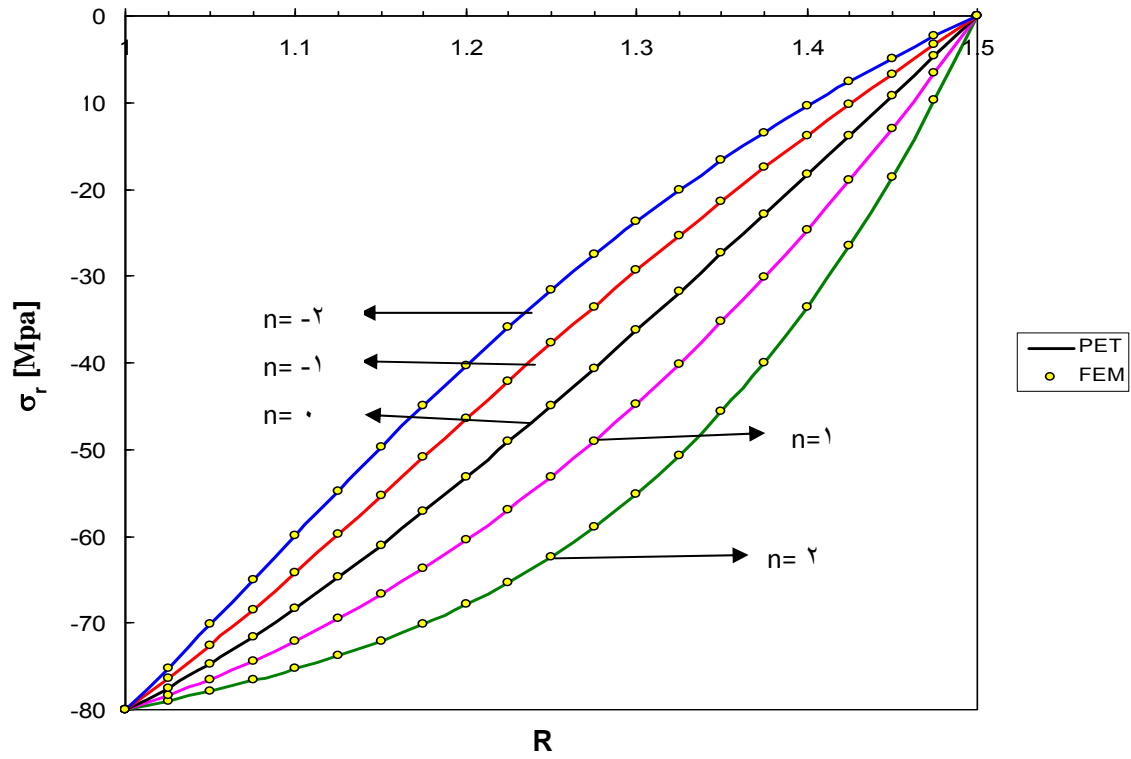
شکل شماره (۳-۳) نمودار توزیع درجه حرارت در راستای شعاع استوانه می باشد. نمودار های

اشکال (۳-۴) تا (۳-۱۲) برای حالت کرنش صفحه ای در حالت بارگذاری تحت بار حرارتی توام با فشار

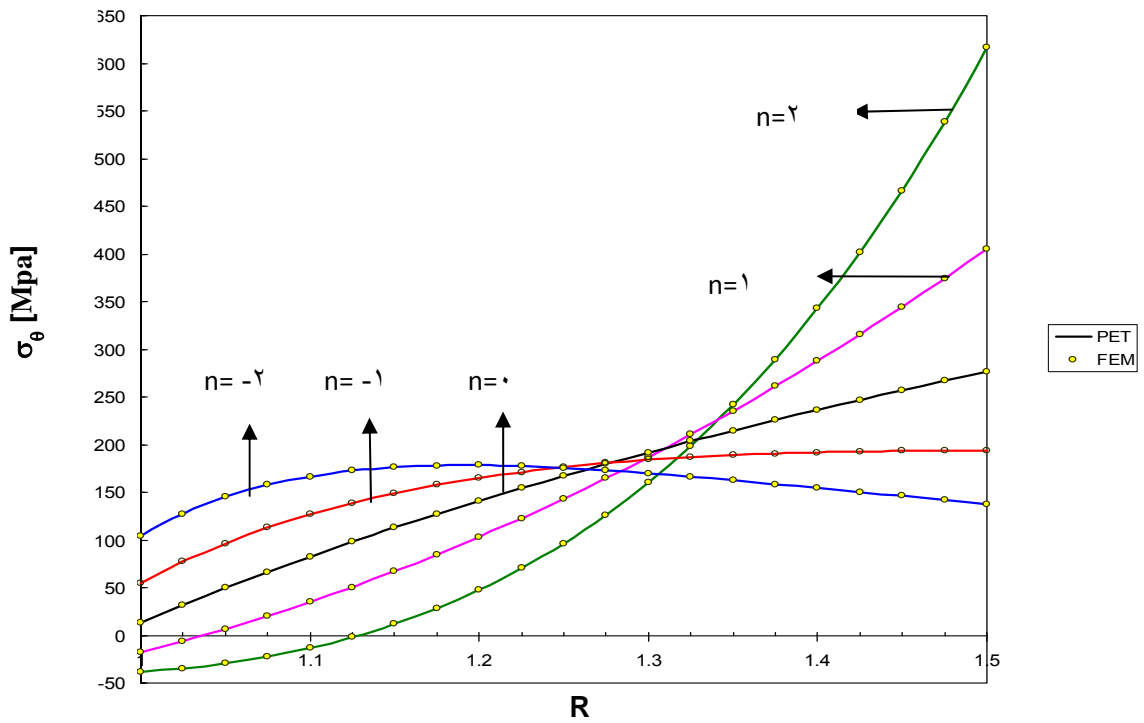
بصورت ۳ حالت ذکر شده در بالا رسم شده اند.



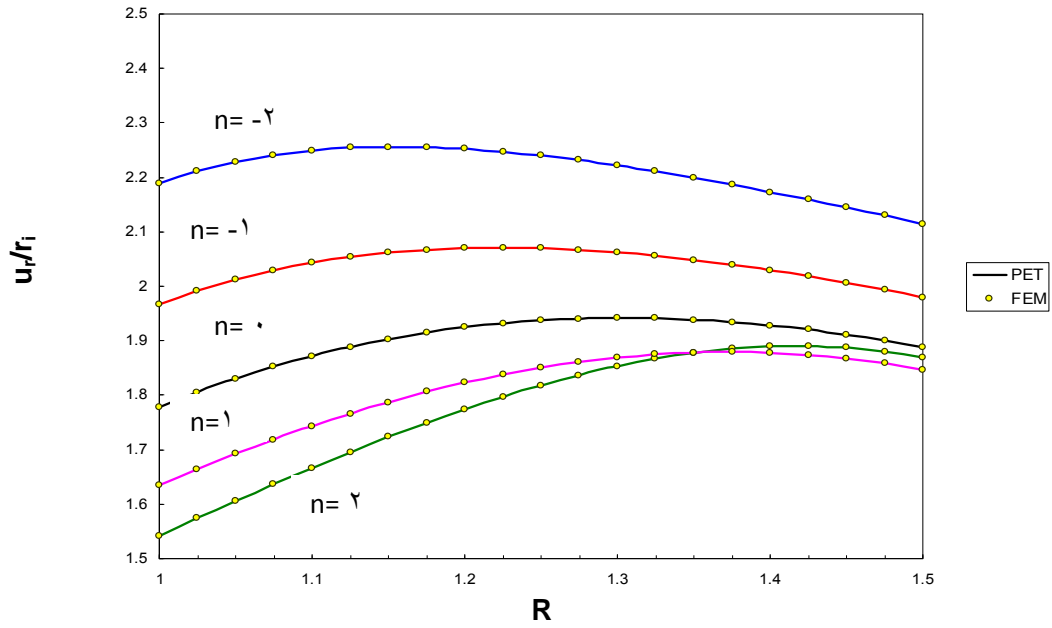
شکل (۳-۳) توزیع درجه حرارت در امتداد شعاع



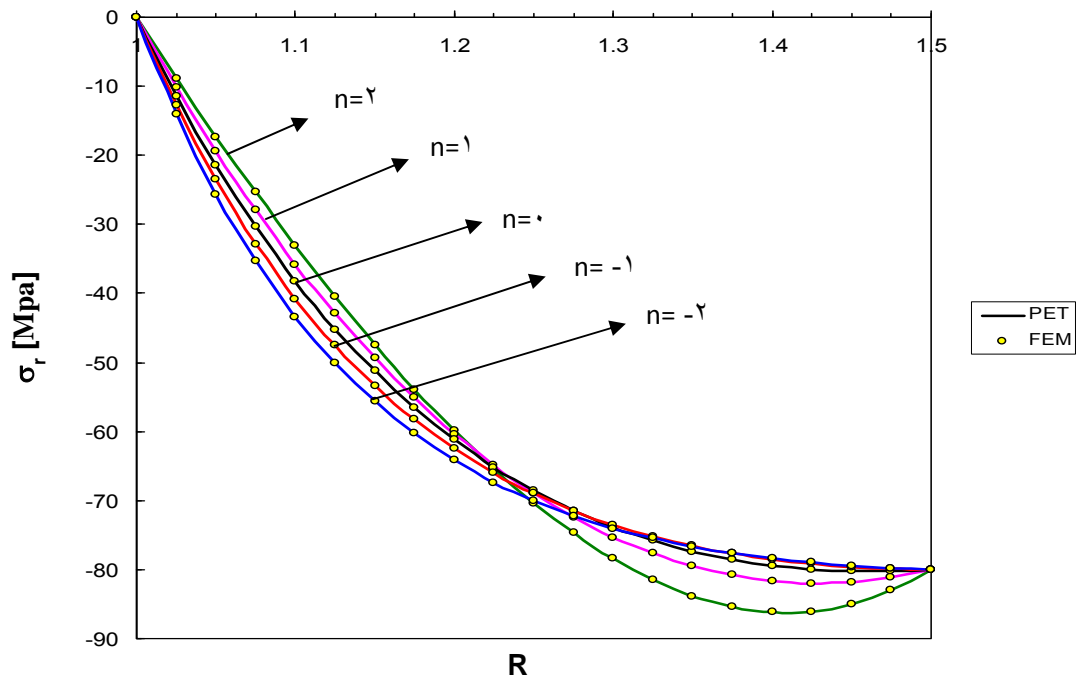
شکل (۴-۳) توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی



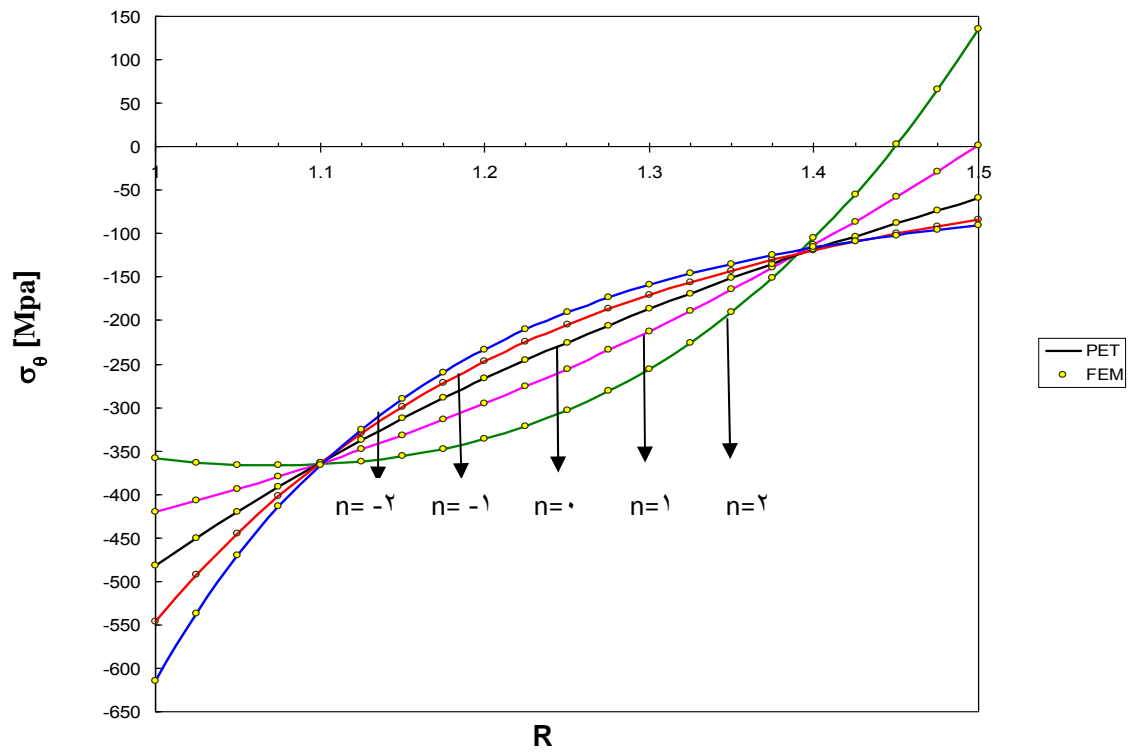
شکل (۵-۳) توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی



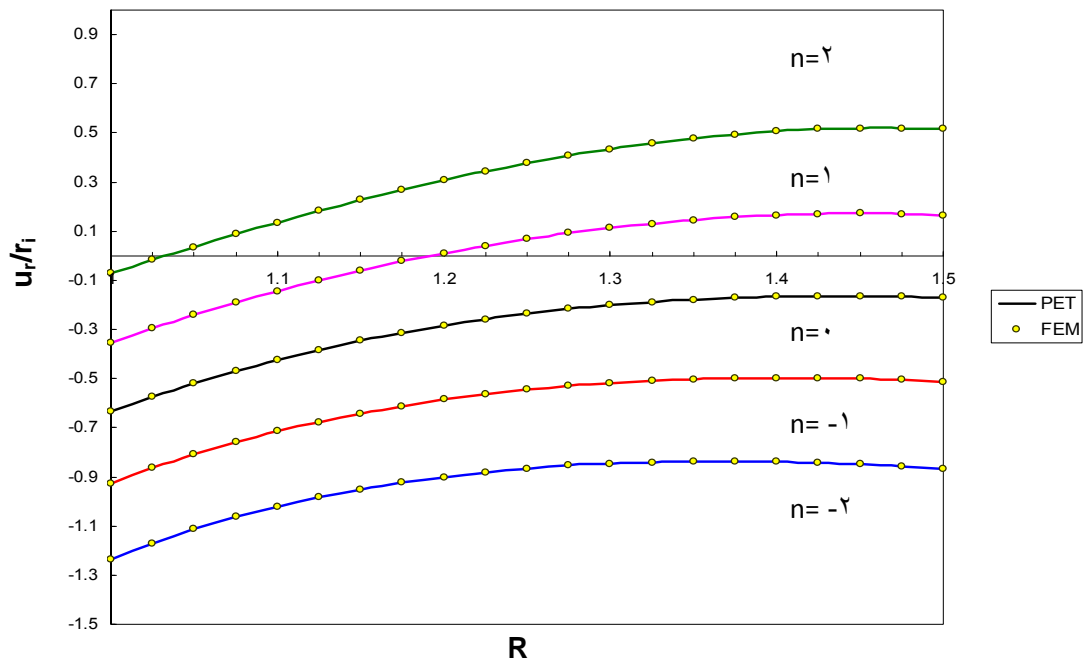
شکل (۳-۶) توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی



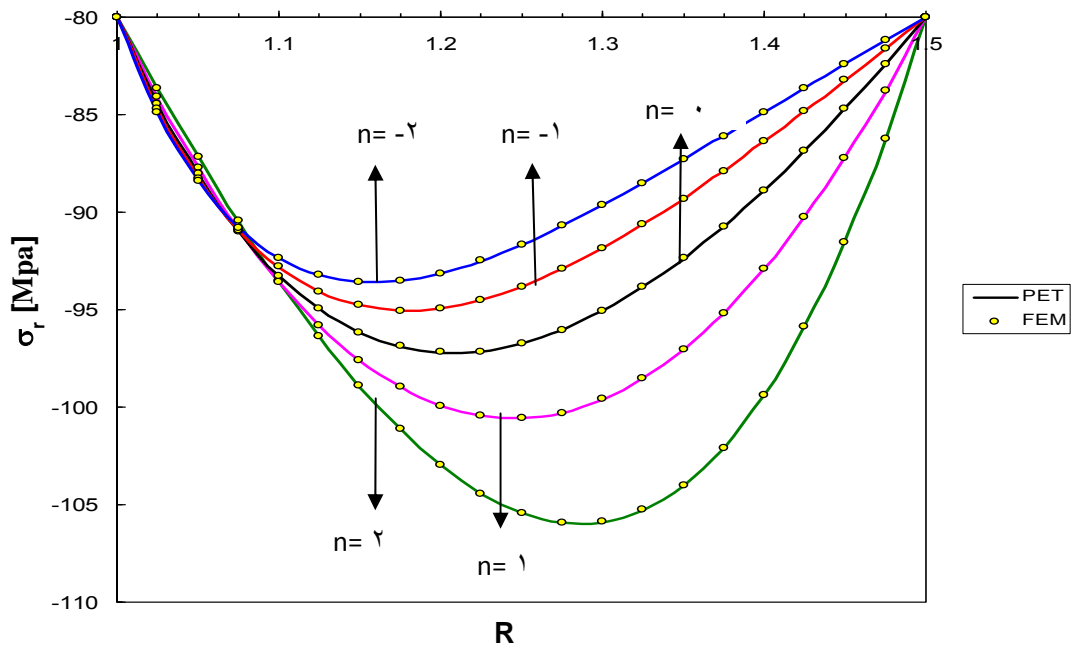
شکل (۳-۷) توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار خارجی



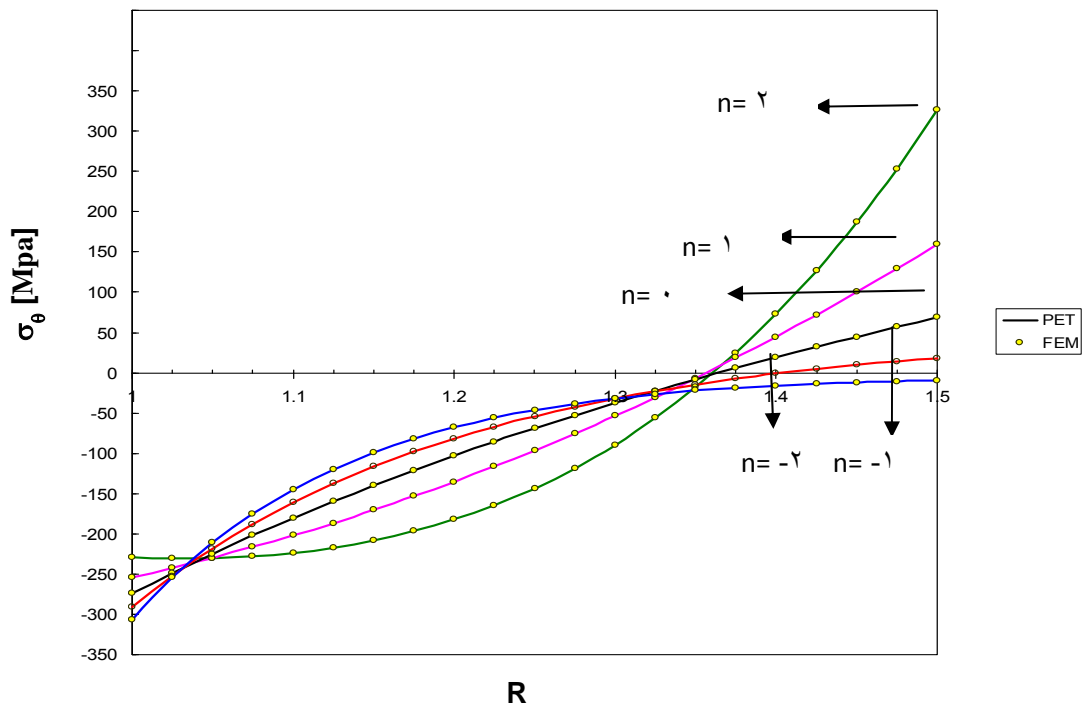
شکل (۸-۳) توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار خارجی



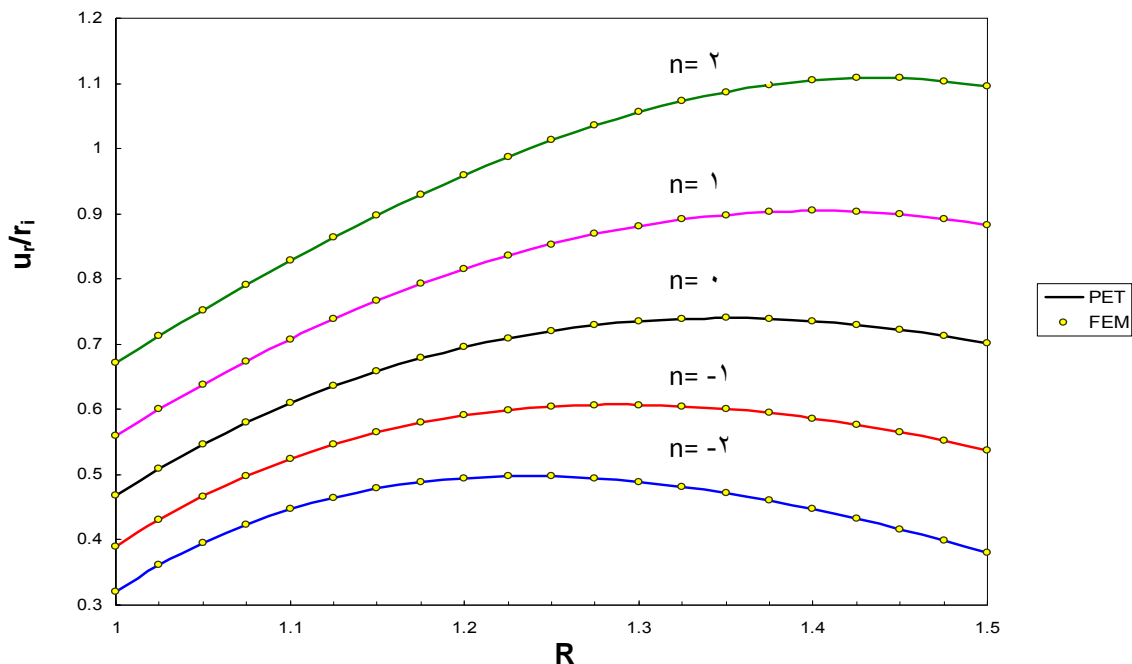
شکل (۹-۳) توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار خارجی



شکل (۳-۱۰) توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی و خارجی



شکل (۳-۱۱) توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی و خارجی



شکل (۳-۱۲) توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی و فشار داخلی و خارجی

۷-۳ نتیجه گیری

در شکل های ۳-۴، ۳-۷ و ۳-۱۰ تنش شعاعی در استوانه تحت حرارت داخلی و نیز به ترتیب تحت بار فشاری داخلی، بار فشاری خارجی و بار فشاری داخلی و خارجی، در امتداد شعاع استوانه نشان داده شده است. دیده می شود که در صورت وجود بار فشار داخلی با افزایش ضریب توان در روابط ضریب الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی، مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد در صورتی که در حالت بارگذاری دوم که بار مکانیکی اعمالی به صورت بار فشاری خارجی بر استوانه وارد می شود، بطور تقریبی تا وسط استوانه، با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی کاهش می یابد و از وسط شعاع استوانه تا انتها با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد و در بارگذاری فشاری داخلی و خارجی استوانه این مقدار به یک سوم شعاع استوانه کاهش می یابد. که تا یک سوم شعاع استوانه با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی کاهش می یابد و از آن به بعد تا انتها با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد. تنش مماسی استوانه جدار ضخیم در شکل های ۳-۵، ۳-۸ و ۳-۱۱ نشان داده شده اند. در حالت بار فشاری داخلی در اکثر شرایط تنش مماسی بصورت کششی اعمال می شود در صورتی که در حالت دوم بارگذاری (بار فشاری خارجی) تنش مماسی به صورت فشاری وارد می شود و در حالت سوم بارگذاری (بار فشاری داخلی و خارجی) در بخشی از ضخامت داخلی استوانه بصورت فشاری و از آن شعاع تا شعاع خارجی استوانه بصورت کششی وارد می شود.

جابجایی شعاعی استوانه جدار ضخیم بصورت عبارت بی بعد تحت بار گذاری های مورد بحث نیز در شکل های ۳-۶، ۳-۹ و ۳-۱۲ نشان داده شده اند. همان طور که دیده می شود در بارگذاری حرارتی توام با بار فشاری داخلی جابجایی شعاعی با افزایش ضریب توان، کاهش می یابد و تمام جابجایی ها در بازه مثبت واقع هستند در حالی که در صورت اعمال بار فشاری خارجی جابجایی شعاعی برای ضریب های توان متفاوت هم در بازه مثبت و هم در بازه منفی قرار می گیرند و با افزایش ضریب توان، از میزان جابجایی منفی آن کاسته و به جابجایی مثبت خواهد رسید و در حالت سوم بارگذاری مانند بارگذاری حالت اول جابجایی ها دوباره در بازه مثبت واقع می شوند، ولی در این حالت متفاوت با حالت بارگذاری فشاری داخلی با افزایش ضریب توان، جابجایی شعاعی افزایش می یابد.

فصل ۴

تحلیل الاستیک پوسته‌های

استوانه‌ای چرخان FGM

۱-۴ مقدمه

استوانه های دوار دارای کاربردهای بسیار وسیعی در صنعت می باشند. لذا بررسی و تحلیل تنش در آنها در شرایط مختلف کاری از اهمیت بسزایی برخوردار است. اکثر سازه هایی که مواد FG در آنها استفاده می شوند و نیاز به مقاومت بالا در شرایط کاری هستند از قبیل سازه های هوافضایی، موشک ها، سازه های دوار واقع در رآکتورهای اتمی و ... بجز نیروهای مکانیکی دارای دوران نیز می باشند و از اینرو تحلیل و بررسی این بارگذاری در مورد این مواد حایز اهمیت است. در اکثر شافتهای استوانه ای تو خالی یا توپر، تاثیر دوران عامل مهم ایجاد تنش در استوانه می باشد

در این فصل، به تحلیل الاستیک استوانه های چرخان تحت فشار داخلی و خارجی پرداخته و بدست آوردن روابط تحلیلی و نتایج عددی توسط یکی از نرم افزار های المان محدود (Ansys) در استوانه های جدار ضخیم در ۳ بخش بارگذاری، به صورت زیر می پردازیم.

- ۱- استوانه های چرخان با سرعت دورانی ثابت تحت فشار داخلی
- ۲- استوانه های چرخان با سرعت دورانی ثابت تحت فشار خارجی
- ۳- استوانه های چرخان با سرعت دورانی ثابت تحت فشار داخلی و خارجی

سپس با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده، توزیع جابجایی های شعاعی و همچنین تنش های شعاعی و محیطی، برای استوانه بدست آمده است. و در انتها نتایج حاصل را با هم مقایسه و جمع بندی می کنیم.

۲-۴ روابط اساسی [۲]

الف- معادلات تعادل در مختصات استوانه ای
معادله تعادل در حالت کلی به صورت زیر می باشد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{B} = \vec{0} \quad (1-4)$$

با بسط دادن رابطه بالا در مختصات استوانه ای، ۳ معادله تعادل بصورت زیر نوشته می شوند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + B_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + B_z &= 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

ب- روابط رفتاری (تنش - کرنش)

روابط بین تنش و کرنش برای مواد الاستیک خطی ایزوتروپیک، به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\varepsilon} + \lambda e\tilde{I} \quad (3-4)$$

می توان نشان داد که رابطه زیر نیز برای تنش - کرنش صحیح است.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (4-4)$$

دلتای کرونگر¹ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & i = j \end{cases} \quad (5-4)$$

که در این روابط μ و λ ثابت های لامه بصورت زیر می باشند.

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (6-4)$$

در مختصات استوانه ای، ۶ رابطه رفتاری به صورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r \\ \sigma_\theta &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \\ \tau_{r\theta} &= \mu\gamma_{r\theta}, \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}, \tau_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z} \end{aligned} \quad (7-4)$$

و نیز می توان نوشت.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)] \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{\mu}\tau_{r\theta}, \gamma_{rz} = \frac{1}{\mu}\tau_{rz}, \gamma_{\theta z} = \frac{1}{\mu}\tau_{\theta z} \end{aligned} \quad (8-4)$$

¹ Kronecker Delta

ج- روابط سینماتیک (تغییر مکان - کرنش)

در حالت کلی روابط سینماتیک برای تغییر شکل های بسیار کوچک به صورت زیر نشان داده می شوند.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla} \bar{u} + (\bar{\nabla} \bar{u})^T \right) \quad (9-4)$$

۶ معادله سینماتیک برای حالت استوانه ای به صورت زیر ساده می شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \gamma_{\theta z} &= \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{rz} &= \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (10-4)$$

۴-۲-۱ مسائل متقارن محوری^۱

مسائل زیادی در مهندسی هستند که متقارن محوری هستند. مانند مخازن تحت فشار، سیلندرهای مرکب، المانهای رآکتورهای هسته ای، مخازن رآکتورهای شیمیایی، لوله های مبدل حرارتی، چرخ لنگرها، سازه های کروی توخالی یا توپر، دیسک های توربین ها و دیگر مصنوعات صنعتی که می توان نام برد.

مسئله متقارن محوری، مسئله ای است که در آن هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و نیز خواص مادی نسبت به محور مرکزی استوانه متقارن باشد و در نتیجه میدان تغییر شکل و تنش، تقارن محوری داشته باشد. به عنوان مثال استوانه جدار ضخیم که تحت فشار داخلی P_i و فشار خارجی P_o قرار دارد، نظیر مخازن تحت فشار و لوله های انتقال سیال. معمولاً مسائل متقارن محوری در دستگاه مختصات استوانه ای حل می شوند.

در مسائل متقارن محوری داریم

¹ Axisymmetric

$$u_{\theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (11-4)$$

با فرض تقارن محوری ۶ معادله سینماتیک به ۴ معادله کاهش می یابد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{rz} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \gamma_{r\theta} = 0, \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (12-4)$$

و معادلات تعادل به صورت ۲ معادله زیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_{\theta}) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + B_z = 0 \end{cases} \quad (13-4)$$

در معادلات رفتاری نیز به ۴ معادله کاهش می یابند.

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r \\ \sigma_{\theta} = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_{\theta} \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \\ \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}, \tau_{r\theta} = 0, \tau_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (14-4)$$

و یا می توان نوشت

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_{\theta} + \sigma_z)] \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E}[\sigma_{\theta} - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_{\theta} + \sigma_r)] \\ \gamma_{rz} = \frac{1}{\mu}\tau_{rz}, \gamma_{r\theta} = 0, \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (15-4)$$

پس ۱۵ معادله کلی موجود در مختصات استوانه ای، ۳ معادله تعادل، ۶ معادله سینماتیک و ۶ معادله رفتاری به ۱۰ معادله کاهش می یابد.

۳-۴ تئوری الاستیسیته صفحه ای

در تئوری الاستیسیته مستوی (PET)^۱ فرض میشود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می مانند. تغییر شکل های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن می باشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی کند. تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می کند، به عبارت دیگر، جابه جایی شعاعی فقط تابع شعاع $u_r(r)$ است. یعنی المان چرخش ندارد، لذا کرنش برشی γ_{rz} و تنش برش τ_{rz} در نظر گرفته نمی شوند. این بدان معناست که محورهای استوانه ای، محورهای اصلی و تنش های عمودی، تنش های اصلی هستند.

تنش های اصلی

$$\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r \quad (۱۶-۴)$$

با توجه به معادلات تعادل و معادلات سازگاری، نتیجه می شود که تنش طولی σ_z و کرنش طولی ϵ_z دارای مقادیر ثابتند.

$$\gamma_{rz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{rz} = 0 \quad (۱۷-۴)$$

و در این صورت ۱۰ رابطه قبل به ۸ رابطه کاهش می یابد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right. \quad (۱۸-۴)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + B_z = 0 \end{array} \right. \quad (۱۹-۴)$$

^۱ Plane Elasticity Theory(PET)

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r \\ \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \end{cases} \quad (20-4)$$

در رابطه تعادل (۱۹-۴) $B_r = \rho r \omega^2$ ، نیروی گریز از مرکز وارده بر استوانه (و به عنوان نیروی بدنی استوانه) در راستای شعاعی می باشد که ω سرعت زاویه ای دوران استوانه و ρ چگالی استوانه است. فرض شود V و R به صورت روابط بی بعد زیر تعریف شوند.

$$\begin{aligned} V &= \frac{u_r}{r_i} \\ R &= \frac{r}{r_i} \end{aligned} \quad (21-4)$$

که r_i شعاع داخلی استوانه می باشد، در این صورت روابط تنش-جابجایی در ترم های نرمال شده جابجایی شعاعی V ، بصورت رابطه زیر خواهد شد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{dV}{dR} \\ \varepsilon_\theta = \frac{V}{R} \end{cases} \quad (22-4)$$

روابط تنش-کرنش را بصورت رابطه ماتریسی زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \quad (23-4)$$

که ضرایب a و b تعریف شده در این رابطه بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} a &= A E(R) \\ b &= B E(R) \end{aligned} \quad (24-4)$$

و ضرایب A و B ثابت هایی هستند که با توجه به شرایط انتهایی استوانه بصورت زیر تعیین می گردند.

۴-۳-۱ شرایط انتهایی استوانه

(الف) تنش صفحه ای (استوانه با دو سر باز)

در حالت شرایط انتهایی استوانه به صورت تنش صفحه ای ضرایب A و B به صورت زیر خواهد بود .

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-\nu^2} \\ B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \end{cases} \quad (۲۵-۴)$$

(ب) کرنش صفحه ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)

در حالت شرایط انتهایی استوانه به صورت کرنش صفحه ای، خواهیم داشت

$$\begin{cases} A = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (۲۶-۴)$$

معادله تعادل برای مختصات استوانه ای متقارن محوری، با توجه به رابطه (۴-۱۹)، بدون وجود نیروهای حجمی در ترم متغیر بی بعد R، بصورت معادله زیر خواهد بود.

$$\frac{d\sigma_r}{dR} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{R} = -\rho R r_i^2 \omega^2 \quad (۲۷-۴)$$

حال توسط تعریف روابط (۴-۲۲) و (۴-۲۳) و استفاده از رابطه تعادل (۴-۲۷)، معادله دیفرانسیل برای مختصات استوانه ای متقارن محوری، بصورت رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{dV}{dR} + M(R) \frac{dV}{dR} + N(R)V = Q(R) \quad (۲۸-۴)$$

که در این رابطه، ضرایب معادله دیفرانسیل بالا، بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} M(R) &= \frac{1}{a} \frac{da}{dR} + \frac{1}{R} \\ N(R) &= \frac{1}{R} \left[\frac{1}{a} \frac{db}{dR} - \frac{1}{R} \right] \\ Q(R) &= \frac{-\rho_i R^{p+1} r_i^2 \omega^2}{a(R) E(R)} \end{aligned} \quad (۲۹-۴)$$

۲-۳-۴ استوانه های همگن

برای استوانه های همگن در رابطه (۲۶-۴)، مدول الاستیسیته E، چگالی ρ و نیز نسبت پواسون ν ، ثابت می باشند. در اینجا با جایگذاری ثابت های مدول الاستیسیته و چگالی در رابطه (۲۷-۴) و سپس (۲۹-۴) معادله دیفرانسیل به صورت رابطه (۳۱-۴) بدست می آید.

$$M(R) = \frac{1}{R}$$

$$N(R) = -\frac{1}{R^2} \quad (30-4)$$

$$Q(R) = \frac{-\rho R^3 r_i^2 \omega^2}{A E}$$

$$R^2 V'' + R V' - V = \frac{-\rho_i R^{p+3} r_i^2 \omega^2}{A E_i} \quad (31-4)$$

که (۱)، مشتق نسبت به متغیر بی بعد R است.

۳-۳-۴ استوانه های ناهمگن

در مواد FG، مدول الاستیسیته E و نسبت پواسون ν ، توابعی از مختصات شعاعی بی بعد R است، که در اکثر تحلیل ها و بالاخص در این بررسی، بعلاوه تاثیرات جزئی نسبت پواسون، از تغییرات آن صرف نظر می شود و ثابت در نظر گرفته می شود. رابطه توزیع مدول الاستیسیته و چگالی ρ را بصورت توزیع توانی از مختصات بی بعد R، که در رابطه (۳۲-۴) آورده شده است، در نظر می گیریم.

$$E(R) = E_i R^n$$

$$\rho(R) = \rho_i R^p \quad (32-4)$$

که در این رابطه E_0 مدول الاستیسیته و ρ_0 اندازه چگالی در شعاع داخلی استوانه می باشند. در نتیجه با جایگذاری روابط در نظر گرفته شده برای مدول الاستیسیته و چگالی، در روابط (۲۷-۴) الی (۲۹-۴) معادله دیفرانسیل استوانه های ناهمگن بصورت رابطه (۳۴-۴) بدست می آید.

$$M(R) = \frac{n+1}{R}$$

$$N(R) = \frac{n\beta-1}{R^2} \quad (33-4)$$

$$Q(R) = \frac{-R^{p-n+1} W}{A E_i}$$

$$R^2 V'' + (n+1) R V' + (n\beta-1) V = -\frac{\rho_i R^{p-n+1} r_i^2 \omega^2}{A E_0} \quad (34-4)$$

۴-۴ حل الاستیک استوانه های نا همگن چرخان

با توجه به روابط بدست آمده، معادله دیفرانسیل حاصل بصورت زیر بدست می آید.

$$R^3 V'' + R(n+1)V' + (n\beta - 1)V = -\frac{W R^{p-n+1}}{A E_0} \quad (۳۵-۴)$$

که در این رابطه $W = \rho_i r_i^2 \omega^2$ می باشد.

پاسخ معادله دیفرانسیل (۳۵-۴) دارای دو حل عمومی (معادله همگن) و خصوصی بصورت زیر خواهد بود.

$$V(R) = V_g(R) + V_p(R) \quad (۳۶-۴)$$

برای یافتن جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (۳۵-۴)، حل خصوصی آن را بصورت زیر فرض می کنیم.

$$V_p(R) = D_1 R^{p-n+3} \quad (۳۷-۴)$$

با جایگزینی رابطه (۳۷-۴) در رابطه (۳۵-۴) خواهیم داشت.

$$D_1 R^{p-n+3} [(-3-p+\beta)n + p^2 + 6p + 8] = -\frac{W R^{p-n+3}}{A E_i} \quad (۳۸-۴)$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب توانها

$$D_1 = -\frac{W}{E_i [FA - nB]} \quad (۳۹-۴)$$

$$F = (3+p)n - 6p - p^2 - 8$$

حال برای یافتن حل عمومی معادله همگن فرض می شود حل عمومی بفرم زیر باشد.

$$V_g(R) = B R^\eta \quad (۴۰-۴)$$

با جایگزینی این رابطه در رابطه همگن (۳۸-۴) معادله مشخصه آن، بصورت رابطه زیر بدست می آید.

$$\eta^2 + n\eta + (\beta n - 1) = 0 \quad (۴۱-۴)$$

با حل رابطه معادله مشخصه (۴-۴۴) ریشه های آن به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} \eta_{r,r} = \frac{1}{r}(-n \pm \sqrt{\Delta}) \\ \Delta = n^2 - 4n\beta + 4 \end{cases} \quad (4-42)$$

ریشه های حاصل ممکن است دارای سه حالت الف) ریشه های حقیقی، ب) ریشه های مضاعف و ج) ریشه های مختلط باشند. حال حل کامل معادله (۴-۳۵)، در سه حالت مختلف ریشه های حقیقی، مضاعف و مختلط، بصورت زیر خواهد بود.

۴-۴-۱ ریشه های حقیقی

در حالت ریشه های حقیقی $\Delta > 0$ خواهد بود و معادله مشخصه (۴-۴۱) دارای دو ریشه خواهد بود و داریم

$$V_g = (B_1 R^{\eta_1} + B_2 R^{\eta_2}) \quad (4-43)$$

بطو کلی حل کامل برای تابع $V(R)$ ، مجموع حل عمومی و خصوصی بصورت زیر است.

$$V(R) = D_1 R^{p-n+3} + B_1 R^{\eta_1} + B_2 R^{\eta_2} \quad (4-44)$$

با جایگزینی رابطه (۴-۴۴) در رابطه (۴-۲۲) و (۴-۲۳)، تنش ها بصورت روابط زیر بدست می آیند.

$$\sigma_r = [(A\eta_1 + B)B_1 R^{\eta_1} + (A\eta_2 + B)B_2 R^{\eta_2}] E_i R^{n-1} + D_1 ((p-n+3)A + B) E_i R^{p+2} \quad (4-45)$$

$$\sigma_\theta = [(B\eta_1 + A)B_1 R^{\eta_1} + (B\eta_2 + A)B_2 R^{\eta_2}] E_i R^{n-1} + D_1 ((p-n+3)B + A) E_i R^{p+2} \quad (4-46)$$

شرایط مرزی در سطح داخل و خارج استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، بصورت رابطه (۴-۵۰) خواهد بود.

$$\begin{aligned} r = r_i & \implies R = 1 & \sigma_r &= -p_i \\ r = r_o & \implies R = k & \sigma_r &= -p_o \end{aligned} \quad (4-47)$$

با اعمال شرایط مرزی، به رابطه بدست آمده (۴-۴۵)، ضرایب B_1 و B_2 بصورت زیر بدست می آیند.

$$B_1 = \frac{((n-p-3)A-B)(k^{p-n+3}-k^{\eta_2})W + k^{\eta_2}p_i - p_o k^{1-n}}{(AF-Bn)(A\eta_1+B)E_i(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})}$$

$$B_2 = \frac{((n-p-3)A-B)(k^{\eta_1}-k^{p-n+3})W - k^{\eta_1}p_i + p_o k^{1-n}}{(AF-Bn)(A\eta_2+B)E_i(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} \quad (48-4)$$

با جایگذاری ضرایب B_1 و B_2 در روابط قبل خواهیم داشت.

$$\sigma_r = \left[\frac{(k^{3+p}-k^{n+\eta_2})R^{\eta_1} + (k^{n+\eta_1}-k^{3+p})R^{\eta_2}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})k^n} - R^{3-n+p} \right] \frac{(n-p-3)A-B}{AF-Bn} W R^{n-1}$$

$$+ \left[\frac{R^{\eta_2}-R^{\eta_1}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})k^{(n-1)}} p_o + \frac{k^{\eta_2}R^{\eta_1}-k^{\eta_1}R^{\eta_2}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} p_i \right] R^{(n-1)} \quad (49-4)$$

$$\sigma_\theta = \left[\frac{(p-n+3)A-B}{AF-Bn} \left[\frac{B\eta_1+A}{A\eta_1+B} \frac{k^{3-n+p}+k^{\eta_2}}{k^{\eta_1}-k^{\eta_2}} R^{\eta_1} + \frac{B\eta_2+A}{A\eta_2+B} \frac{k^{\eta_1}-k^{3-n+p}}{k^{\eta_1}-k^{\eta_2}} R^{\eta_2} \right] + \frac{(3-n+p)B+A}{AF-Bn} R^{p-n+3} \right] W R^{n-1}$$

$$+ \left[\frac{B\eta_2+A}{A\eta_2+B} \frac{R^{\eta_2}-B\eta_1+A}{A\eta_1+B} R^{\eta_1} - \frac{B\eta_1+A}{A\eta_1+B} \frac{R^{\eta_1}k^{\eta_2}-B\eta_2+A}{A\eta_2+B} R^{\eta_2}k^{\eta_1} \right] p_o \left(\frac{R}{k}\right)^{n-1} + \left[\frac{B\eta_1+A}{A\eta_1+B} \frac{R^{\eta_1}k^{\eta_2}-B\eta_2+A}{A\eta_2+B} R^{\eta_2}k^{\eta_1} \right] p_i R^{(n-1)} \quad (50-4)$$

$$u_r = \left\{ \left[\frac{(p-n+3)A-B}{AF-Bn} \left(\frac{(k^{3-n+p}+k^{\eta_2})R^{\eta_1}}{(A\eta_1+B)E_i(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} - \frac{(k^{3-n+p}+k^{\eta_1})R^{\eta_2}}{(A\eta_2+B)E_i(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} \right) + \frac{R^{(3-n+p)}}{(AF-Bn)E_i} \right] W \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{R^{\eta_2}}{A\eta_2+B} - \frac{R^{\eta_1}}{A\eta_1+B} \right) k^{1-n} p_o + \left(\frac{k^{\eta_2}R^{\eta_1}}{A\eta_1+B} - \frac{k^{\eta_1}R^{\eta_2}}{A\eta_2+B} \right) k^{1-n} p_i}{E_i(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} \right\} r_i \quad (51-4)$$

روابط تنش و جابجایی در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر خواهد

شد.

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_r = \left[\frac{(n-p-3)-\nu}{F-n\nu} \left(\frac{(k^{(3+p)}-k^{(n+\eta_2)})R^{(n+\eta_1-1)}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})k^n} + \frac{(k^{(n+\eta_1)}-k^{(3+p)})R^{(n+\eta_2-1)}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})k^n} - R^{(2+p)} \right) \right] W$$

$$+ \frac{R^{\eta_2}-R^{\eta_1}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})k^{(n-1)}} p_o R^{(n-1)} + \frac{k^{\eta_2}R^{\eta_1}-k^{\eta_1}R^{\eta_2}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} p_i R^{(n-1)} \quad (52-4)$$

$$\sigma_\theta = \left\{ \frac{(n-p-3)-\nu}{F-n\nu} \left(\frac{\nu\eta_1+1}{\eta_1+\nu} \frac{(k^{(3+p)}+k^{(n+\eta_2)})R^{\eta_1}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})k^n} - \frac{\nu\eta_2+1}{\eta_2+\nu} \frac{(k^{(3+p)}+k^{(n+\eta_1)})R^{\eta_2}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})k^n} \right) R^{(n-1)} \right.$$

$$\left. + \frac{((n-p-3)\nu-1)R^{(2+p)}}{F-n\nu} \right\} W + \left[\frac{\nu\eta_2+1}{\eta_2+\nu} \frac{R^{\eta_2}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} - \frac{\nu\eta_1+1}{\eta_1+\nu} \frac{R^{\eta_1}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} \right] p_o \left(\frac{R}{k}\right)^{n-1}$$

$$+ \left[\frac{\nu\eta_1+1}{\eta_1+\nu} \frac{R^{\eta_1}k^{\eta_2}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} - \frac{\nu\eta_2+1}{\eta_2+\nu} \frac{R^{\eta_2}k^{\eta_1}}{(k^{\eta_1}-k^{\eta_2})} \right] p_i R^{(n-1)} \quad (53-4)$$

$$u_r = \left\{ \left[\frac{(n-p-3)-\nu}{(F-n\nu)E_i} \left(\frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_2)})R^{\eta_1}}{(\eta_1+\nu)(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} - \frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_1)})R^{\eta_2}}{(\eta_2+\nu)(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} \right) + \frac{R^{(3-n+p)}}{(F-n\nu)E_i} \right] W \right. \\ \left. + \left[\frac{R^{\eta_2} - R^{\eta_1}}{\eta_2 + \nu - \eta_1 + \nu} k \right] p_o + \left[\frac{\left(\frac{k^{\eta_2} R^{\eta_1}}{\eta_1 + \nu} - \frac{k^{\eta_1} R^{\eta_2}}{\eta_2 + \nu} \right) k}{E_0 (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \right] p_i \right\} (1-\nu^2)r_i \quad (54-4)$$

(ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_r = \left[\frac{(n-p-2)\nu + (3-n+p)}{F(\nu-1) + n\nu} \left(\frac{(k^{(3+p)} - k^{(n+\eta_2)})R^{(n+\eta_1-1)}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} + \frac{(k^{(n+\eta_1)} - k^{(3+p)})R^{(n+\eta_2-1)}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} - R^{(2+p)} \right) \right] W \\ + \frac{R^{\eta_2} - R^{\eta_1}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^{(n-1)}} p_o R^{(n-1)} + \frac{k^{\eta_2} R^{\eta_1} - k^{\eta_1} R^{\eta_2}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} p_i R^{(n-1)} \quad (55-4)$$

$$\sigma_\theta = \left[\frac{(n-p-2)\nu + (3-n+p)}{F(\nu-1) + n\nu} \left(\frac{(-1-(\eta_1-1)\nu)(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_2)})R^{\eta_1}}{\eta_1(\nu-1)-\nu(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} - \frac{(-1-(\eta_2-1)\nu)(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_1)})R^{\eta_2}}{\eta_2(\nu-1)-\nu(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} \right) R^{(n-1)} \right. \\ \left. + \frac{(1+(2-n+p)\nu)R^{(2+p)}}{F(\nu-1) + n\nu} \right] W + \left[\frac{(-1-(\eta_2-1)\nu)R^{\eta_2}}{\eta_2(\nu-1)-\nu(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} - \frac{(-1-(\eta_1-1)\nu)R^{\eta_1}}{\eta_1(\nu-1)-\nu(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \right] p_o \left(\frac{R}{k} \right)^{n-1} \\ + \left[\frac{(-1-(\eta_1-1)\nu)R^{\eta_1}k^{\eta_2}}{\eta_1(\nu-1)-\nu(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} - \frac{(-1-(\eta_2-1)\nu)R^{\eta_2}k^{\eta_1}}{\eta_2(\nu-1)-\nu(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \right] p_i R^{(n-1)} \quad (56-4)$$

$$u_r = \left\{ \left[\frac{(n-p-2)\nu + (3-n+p)}{F(\nu-1) + n\nu} \left(\frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_2)})R^{\eta_1}}{((\nu-1)\eta_1 - \nu)E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} - \frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_1)})R^{\eta_2}}{((\nu-1)\eta_2 - \nu)E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R^{(3-n+p)}}{(F(\nu-1) + n\nu)E_i} \right] W + \left[\frac{\left(\frac{R^{\eta_2}}{(\nu-1)\eta_2 - \nu} - \frac{R^{\eta_1}}{(\nu-1)\eta_1 - \nu} \right) k}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})k^n} \right] p_o \right. \\ \left. + \left[\frac{\left(\frac{k^{\eta_2} R^{\eta_1}}{(\nu-1)\eta_1 - \nu} - \frac{k^{\eta_1} R^{\eta_2}}{(\nu-1)\eta_2 - \nu} \right) k}{E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \right] p_i \right\} (2\nu^2 + \nu - 1)r_i \quad (57-4)$$

۲-۴-۴ ریشه های مضاعف

در حالت ریشه های مضاعف $\eta = -\frac{n}{\nu}$ و در این حالت، پاسخ معادله همگن (۳۵-۴) بصورت رابطه (۵۸-۴) خواهد بود

$$V_g(R) = (B_1 + B_2 \ln(R))R^\eta \quad (58-4)$$

حل کامل برای تابع $V(R)$ در حالت ریشه های مضاعف، بصورت زیر است.

$$V(R) = D_1 R^{p-n+3} + (B_1 + B_2 \ln(R))R^\eta \quad (59-4)$$

با جایگزینی رابطه (۴-۵۹) در رابطه (۴-۲۲) و (۴-۲۳)، تنش های مماسی و شعاعی بصورت روابط زیر بدست می آیند.

$$\sigma_r = E_i R^{n+\eta-1} [(A\eta+B)(B_1+B_2 \ln R) + A B_2] + D_1 ((3-n+p)A+B) E_i R^{p+2} \quad (۴-۶۰)$$

$$\sigma_\theta = E_i R^{n+\eta-1} [(B\eta+A)(B_1+B_2 \ln R) + B B_2] + D_1 ((3-n+p)B+A) E_i R^{p+2} \quad (۴-۶۱)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه بدست آمده (۴-۶۰)، ضرایب B_1 و B_2 بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$B_1 = \frac{((n-p-3)A-B)[(A\eta+B) \ln k + A] k^{n+\eta-1} - k^{p+2} A}{k^{(n+\eta-1)} \ln k (A\eta+B)^2 (FA-nB) E_i} W + \frac{A p_o - [(A\eta+B) \ln k + A] k^{n+\eta-1} P_i}{k^{(n+\eta-1)} \ln k (A\eta+B)^2 E_i} \quad (۴-۶۲)$$

$$B_2 = \frac{((n-p-3)A-B)(k^{p+2} - k^{n+\eta-1})}{k^{(n+\eta-1)} \ln k (A\eta+B)(FA-nB) E_i} W + \frac{p_o + k^{n+\eta-1} P_i}{k^{(n+\eta-1)} \ln k (A\eta+B) E_i}$$

با قرار دادن ضرایب B_1 و B_2 در روابط مربوط داریم.

$$\sigma_r = \frac{A(n-p-3)-B}{FA-nB} \left[\frac{(\ln \frac{k}{R} R^\eta - \ln k R^{3-n+p}) k^\eta + R^\eta \ln R k^{3-n+p}}{k^\eta \ln k} \right] W R^{n-1} - \frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \quad (۴-۶۳)$$

$$\sigma_\theta = \left[\frac{A(n-p-3)-B}{FA-nB} \left[\frac{B\eta+A}{A\eta+B} \left(\ln \frac{k}{R} k^\eta + \ln R k^{p-n+3} \right) + \frac{A^2-B^2}{(A\eta+B)^2} (k^\eta - k^{p-n+3}) \right] R^{n+\eta-1} + \frac{B(n-p-3)-A}{FA-nB} R^{p+2} \right] W + \frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{B^2-A^2}{(A\eta+B)^2} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \frac{A+B\eta}{A\eta+B} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} \quad (۴-۶۴)$$

$$u_r = \left[\frac{A(n-p-3)-B}{FA-nB} \frac{[(B\eta+A) \ln \frac{k}{R} + A] k^\eta + ((A\eta+B) \ln R - A) k^{p-n+3}}{E_i k^\eta \ln k (A\eta+B)^2} R^\eta + \frac{R^{3-n+p}}{E_i (FA-nB)} W r_i - \frac{r_i R^\eta}{E_i (A\eta+B) \ln k} \left\{ \frac{A}{A\eta+B} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] + \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} \right] \quad (۴-۶۵)$$

با توجه به معادلات بدست آمده در روابط (۴-۶۳)، (۴-۶۴) و (۴-۶۵) روابط تنش و جابجایی در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر خواهد شد.

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_r = \frac{(n-p-3-\nu)}{F-n\nu} \left[\frac{(\ln \frac{k}{R} R^{(n+\eta-1)} - \ln k R^{(2+p)}) k^{(n+\eta-1)} + R^{n+\eta-1} \ln R k^{(2+p)}}{k^{n+\eta-1} \ln k} \right] W \quad (66-4)$$

$$-\frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right]$$

$$\sigma_\theta = \left[\frac{n-p-3-\nu}{F-n\nu} \left[\frac{(\nu\eta+1) (\ln \frac{k}{R} k^\eta + \ln R k^{p-n+3}) + \frac{1-\nu^2}{(\nu+\eta)^2} (k^\eta - k^{p-n+3})}{k^\eta \ln k} \right] R^{n+\eta-1} + \frac{(n-3-p)\nu-1}{F-n\nu} R^{p+2} \right] W$$

$$+ \frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{1-\nu^2}{(\nu+\eta)^2} [P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o] - \frac{\nu\eta+1}{\eta+\nu} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} \quad (67-4)$$

$$u_r = \frac{1-\nu^2}{E_i (F-n\nu)} \left[(n-p-3-\nu) \frac{[(\nu\eta+1) \ln \frac{k}{R} + 1] k^{n+\eta-1} + [(\eta+\nu) \ln R - 1] k^{2+p}}{k^{n+\eta-1} \ln k (\nu+\eta)^2} R^\eta + R^{3-n+p} \right] W r_i$$

$$- \left[\frac{(\eta+\nu) \ln R + 1}{k^{(n+\eta-1)} \ln k (\eta+\nu)^2 E_i} P_o + \frac{(\eta+\nu) \ln \frac{k}{R} + 1}{\ln k (\eta+\nu)^2 E_i} P_i \right] (1-\nu^2) r_i R^\eta \quad (68-4)$$

ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_r = \frac{(n-p-2)\nu + p-n+3}{F(\nu-1) + n\nu} \left[\frac{(\ln \frac{k}{R} R^{(n+\eta-1)} - \ln k R^{(2+p)}) k^{n+\eta-1} + R^{n+\eta-1} \ln R k^{(2+p)}}{k^{n+\eta-1} \ln k} \right] W \quad (69-4)$$

$$-\frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right]$$

$$\sigma_\theta = \left\{ \frac{(n-p-2)\nu + (p-n+3)}{F(\nu-1) + n\nu} \left[\frac{((1-\eta)\nu-1) (\ln \frac{k}{R} k^\eta + \ln R k^{p-n+3})}{(\eta-1)\nu-\eta} + \frac{(1-2\nu)(k^\eta - k^{p-n+3})}{((\eta-1)\nu-\eta)^2} \right] R^{n+\eta-1} + \frac{(1+(2-n+p)\nu)}{F(\nu-1) + n\nu} R^{p+2} \right\} W$$

$$+ \frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{1-2\nu}{((\eta-1)\nu-\eta)^2} [k^{(1-\eta-n)} P_o - P_i] - \frac{(1-\eta)\nu-1}{(\eta-1)\nu-\eta} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} \quad (70-4)$$

$$u_r = \left[\frac{((n-p-2)\nu + p-n+3) \left(\frac{((\eta-1)\nu-\eta) \ln \frac{k}{R} - (1-\nu)k^\eta + ((\eta-1)\nu-\eta) \ln R - (1-\nu)k^{p-n+3}}{k^{n+\eta-1} \ln k ((\eta-1)\nu-\eta)^2} R^\eta + R^{3-n+p} \right) \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i (F(\nu-1) + n\nu)} W r_i}{\frac{r_i R^\eta (1+\nu)(1-2\nu)}{E_i ((\eta-1)\nu-\eta) \ln k} \left\{ \frac{1-\nu}{(\eta-1)\nu-\eta} [k^{(1-\eta-n)} P_o - P_i] + \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\}} \right] \quad (71-4)$$

۳-۴-۴ ریشه های مختلط

که در این حالت در معادله مشخصه (۴۱-۴)، $\Delta < 0$ و پاسخ معادله همگن (۴۱-۴) بصورت رابطه زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \eta_1 = x + iy \\ \eta_2 = x - iy \end{cases} \quad (۷۲-۴)$$

$$x = -\frac{n}{2} \quad (۷۳-۴)$$

$$y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (۷۳-۴)$$

$$V_g(R) = [B_1 \cos(y \ln R) + B_2 \sin(y \ln R)]R^x \quad (۷۴-۴)$$

حل کامل برای تابع $V(R)$ در حالت ریشه های مختلط، بصورت زیر خواهد بود.

$$V(R) = D_1 R^{p-n+3} + [B_1 \cos(y \ln R) + B_2 \sin(y \ln R)]R^x \quad (۷۵-۴)$$

با جایگزینی رابطه (۷۵-۴) در رابطه (۲۲-۴) و (۲۳-۴)، تنش ها بصورت روابط زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_r = E_i R^{n+x-1} [& ((Ax+B)\cos(y \ln R) - A\sin(y \ln R))B_1 + ((Ax+B)\sin(y \ln R) + A\cos(y \ln R))B_2] \\ & + E_i R^{p+2} [D_1((3-n+p)A + B)] \end{aligned} \quad (۷۶-۴)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = E_0 R^{n+x-1} [& ((Bx+A)\cos(y \ln R) - B\sin(y \ln R))B_1 + ((Bx+A)\sin(y \ln R) + B\cos(y \ln R))B_2] \\ & + E_i R^{p+2} [D_1((3-n+p)B + A)] \end{aligned} \quad (۷۷-۴)$$

و با توجه به شرایط مرزی در سطح داخل و خارج استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، ضرایب B_1 و B_2 بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} B_1 = & \frac{((n-p-3)A - B)[((Ax+B)\sin(y \ln k) + A\cos(y \ln k))k^x - k^{p-n+3}yA]_W}{E_i [(Ax+B)^2 + A^2 y^2] k^x \sin(y \ln k) (FA - nB)} \\ & + \frac{yA p_0 k^{1-n} - k^x ((Ax+B)\sin(y \ln k) + A\cos(y \ln k)) p_i}{E_i [(Ax+B)^2 + A^2 y^2] k^x \sin(y \ln k)} \\ B_2 = & \frac{((n-p-3)A - B)[(Ax+B)k^{p-n+3} - ((Ax+B)\cos(y \ln k) + A\sin(y \ln k))k^x]_W}{E_i [(Ax+B)^2 + A^2 y^2] k^x \sin(y \ln k) (FA - nB)} \\ & + \frac{(Ax+B)p_0 k^{1-n} - k^x ((Ax+B)\cos(y \ln k) + A\sin(y \ln k)) p_i}{E_i [(Ax+B)^2 + A^2 y^2] k^x \sin(y \ln k)} \end{aligned} \quad (۷۸-۴)$$

با قرار دادن ضرایب B_1 و B_2 بدست آمده در روابط تنش و جابجایی داریم.

$$\sigma_r = \frac{A(n-p-3)-B}{FA-nB} \left[\frac{(\sin(y \ln \frac{k}{R})k^x + \sin(y \ln R)k^{p-n+3})}{k^x \sin(y \ln k)} R^{n+x-1} - R^{p+2} \right] W - \frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \quad (79-4)$$

$$\sigma_\theta = \left\{ \frac{A(n-p-3)-B}{FA-nB} \frac{[(A^2+B^2)x+AB(x^2+y^2+1)](\sin(y \ln \frac{k}{R})k^x + \sin(y \ln R)k^{p-n+3})}{[(Ax+B)^2+A^2y^2]k^x \sin(y \ln k)} + \frac{(A^2-B^2)y[\cos(y \ln \frac{k}{R})k^x - k^{p-n+3} \cos(y \ln R)]}{[(Ax+B)^2+A^2y^2]k^x \sin(y \ln k)} R^{n+x-1} + \frac{B(p-n+3)+A}{FA-nB} R^{p+2} \right\} W \quad (80-4)$$

$$- \frac{R^{(x+n-1)}}{((Ax+B)^2+A^2y^2) \sin(y \ln k)} \left\{ [(A^2+B^2)x+AB(x^2+y^2+1)] \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + (A^2-B^2)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\}$$

$$u_r = \left\{ \frac{A(n-p-3)-B}{FA-nB} \frac{[Ays \sin(y \ln(k)) - (Ax+B) \cos(y \ln(k))]k^x + (Ax+B)k^{p-n+3} \sin(y \ln R)}{E_i D k^x \sin(y \ln(k))} + \frac{[(Ax+B) \sin(y \ln k) + Ay \cos(y \ln k)]k^x - Ay k^{p-n+3} \cos(y \ln R)}{E_i D k^x \sin(y \ln k)} \right\} R^x + \frac{R^{p-n+3}}{E_i (FA-nB)} W r_i - \frac{r R^x}{E_i D \sin(y \ln k)} \left\{ (Ax+B) \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + Ay \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} \quad (81-4)$$

با توجه به معادلات بدست آمده در روابط (79-4)، (80-4) و (81-4) روابط تنش و جابجایی در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر خواهد شد.

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_r = \frac{(n-p-3-\nu)}{F-n\nu} \left[\frac{(\sin(y \ln \frac{k}{R})k^{n+x-1} + \sin(y \ln R)k^{2+p})}{k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} R^{n+x-1} - R^{p+2} \right] W - \frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \quad (82-4)$$

$$\sigma_{\theta} = \left[\frac{(n-p-3-\nu)}{F-n\nu} \left(\frac{[(\nu^2+1)x + \nu(x^2+y^2+1)](\sin(y \ln \frac{k}{R})k^{n+x-1} + \sin(y \ln R)k^{p+2})}{((x+\nu)^2+y^2)k^{(n+x-1)} \sin(y \ln k)} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(1-\nu^2)y [\cos(y \ln \frac{k}{R}) - k^{(p+2)} \cos(y \ln R)]}{((x+\nu)^2+y^2)k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} R^{(n+x-1)} + \frac{1+(p-n+3)\nu}{F-n\nu} R^{p+2} \right] W \quad (13-4)$$

$$- \frac{R^{(x+n-1)}}{((x+\nu)^2+y^2) \sin(y \ln k)} \left\{ \left[(\nu^2+1)x + \nu(x^2+y^2+1) \right] \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \\ \left. + (1-\nu^2)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\}$$

$$u_r = \left[\frac{(n-p-3-\nu)}{F-n\nu} \left(\frac{[(y \sin(y \ln k) - (x+\nu) \cos(y \ln k))]k^{n+x-1} + (x+\nu)k^{p+2} \sin(y \ln R)}{E_i [(x+\nu)^2+y^2] k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[(x+\nu) \sin(y \ln k) + y \cos(y \ln k)]k^{n+x-1} - yk^{p+2} \cos(y \ln R)}{E_i [(x+\nu)^2+y^2] k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} R^x + \frac{R^{3-n+p}}{E_i (F-n\nu)} (1-\nu^2) W r_i \right] \right. \\ \left. - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)r R^x}{E_i [(x+\nu)^2+y^2] \sin(y \ln k)} \left\{ (x+\nu) \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} \quad (14-4)$$

(ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_r = \frac{(n-p-2)\nu + (3-n+p)}{F(\nu-1) + n\nu} \left[\frac{(\sin(y \ln(\frac{k}{R}))k^{(n+x-1)} + \sin(y \ln(R))k^{(2+p)})}{k^{(n+x-1)} \sin(y \ln(k))} R^{(n+x-1)} - R^{p+2} \right] W \quad (15-4)$$

$$- \frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right]$$

$$\sigma_{\theta} = \left[\frac{(n-p-2)\nu + (3-n+p)}{F(\nu-1) + n\nu} \left(\frac{[(x-1)^2+y^2]\nu(1-\nu)+x [\sin(y \ln \frac{k}{R})k^{n+x-1} + \sin(y \ln R)k^{p+2}]}{[(x^2+y^2)(\nu^2-2\nu+1)+2x\nu(1-\nu)+\nu^2] k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(1-2\nu)y [\cos(y \ln \frac{k}{R}) - k^{p+2} \cos(y \ln R)]}{[(x^2+y^2)(\nu^2-2\nu+1)+2x\nu(1-\nu)+\nu^2] k^{(n+x-1)} \sin(y \ln(k))} R^{n+x-1} + \frac{(n-p-2)\nu-1}{F(\nu-1) + n\nu} R^{p+2} \right] W \quad (16-4)$$

$$- \frac{R^{(x+n-1)}}{[(x^2+y^2)(\nu^2-2\nu+1)+2x\nu(1-\nu)+\nu^2] \sin(y \ln k)} \left\{ \left[((x-1)^2+y^2)\nu(1-\nu)+x \right] \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \\ \left. + (1-2\nu)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
u_r = & \left[\frac{((n-p-2)v+p-n+3) \left(\frac{((1-v)y \sin(y \ln k) - (x(1-v)-v) \cos(y \ln k)) k^{n+x-1} + (x(1-v)-v) k^{p+2} \sin(y \ln R)}{[(x^2+y^2)(v^2-2v+1)+2xv(1-v)+v^2] k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} \right)}{[(x^2+y^2)(v^2-2v+1)+2xv(1-v)+v^2] k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} \right. \\
& + \left. \frac{((1-v)y \cos(y \ln k) - (x(1-v)-v) \sin(y \ln k)) k^{n+x-1} - (1-v)y k^{p+2} \cos(y \ln R)}{[(x^2+y^2)(v^2-2v+1)+2xv(1-v)+v^2] k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} R^x + R^{3-n+p} \right] \frac{(1+v)(1-2v)}{E_i(F(v-1)+nv)} W r_i \\
& - \frac{(1+v)(1-2v) r_i R^x}{E_i[(x^2+y^2)(v^2-2v+1)+2xv(1-v)+v^2] \sin(y \ln k)} \left\{ (x(1-v)-v) \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \\
& \left. + (1-v)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} \quad (A7-4)
\end{aligned}$$

۴-۵ حل عددی استوانه های ناهمگن

برای المان بندی استوانه، المان solid از نوع 82 nod 82 با گزینه axisymmetric انتخاب شده است. این المان ۴ ضلعی که در فصل ۲ توضیح داده شده، برای مسائل تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سختی المان مذکور ۱۶×۱۶ می باشد. در مدل سازی، یک استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جدار ثابت بطول $L = 800mm$ مدل شده است، که برای ایجاد خواص ناهمگنی که در اینجا، به صورت شعاعی در نظر گرفته شده است، استوانه به ۲۰ لایه مساوی از مواد همگن به ضخامت هر کدام یک میلیمتر تقسیم شده است (شکل ۴-۱) و بعد از بهینه سازی انجام گرفته در المان بندی مدل ایجاد شده، المان هایی به ابعاد ۱×۱ میلیمتر در مش بندی مدل در نظر گرفته شد. خواص مواد در هر لایه ثابت در نظر گرفته شده است و خواص در هر لایه نسبت به لایه دیگر با تابع توانی، بصورت رابطه (۴-۳۲) تغییر می کنند. سپس بارگذاری مورد نظر را، جهت شبیه سازی توزیع تنش و جابجایی شعاعی، به استوانه اعمال می کنیم.



شکل (۴-۱) مدل مقطع طولی استوانه FGM با تقسیم به ۲۰ لایه

در اینجا پس از شبیه سازی مدل، با شبیه سازی استوانه در حالت کرنش صفحه ای ابتدا بارهای مکانیکی اعمالی را به مدل وارد کرده و سپس تنش ها و کرنش های شعاعی و تنش های مماسی در استوانه را بدست می آوریم.

۴-۶ بررسی نتایج

برای مطالعه موردی و بررسی نمودارهای بدست آمده از نتایج عددی و تحلیلی، یک استوانه جدار کلفت تو خالی بشعاع داخلی $r_i = 40\text{mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60\text{mm}$ در نظر می گیریم. ضریب پواسون برابر ۰.۳ و مدول الاستیسیته و چگالی در سطح داخلی استوانه به ترتیب برابر با $E_i = 200\text{GPa}$ ، $\rho_i = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ می باشند. برای ساده سازی تحلیل، ضرایب توان در روابط (۴-۳۲) را برای E و ρ یکسان در نظر می گیریم و استوانه توخالی را تحت سه حالت بارگذاری زیر در نظر می گیریم.

۷- فشار یکنواخت داخلی $p_i = 8\text{MPa}$ و دوران با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

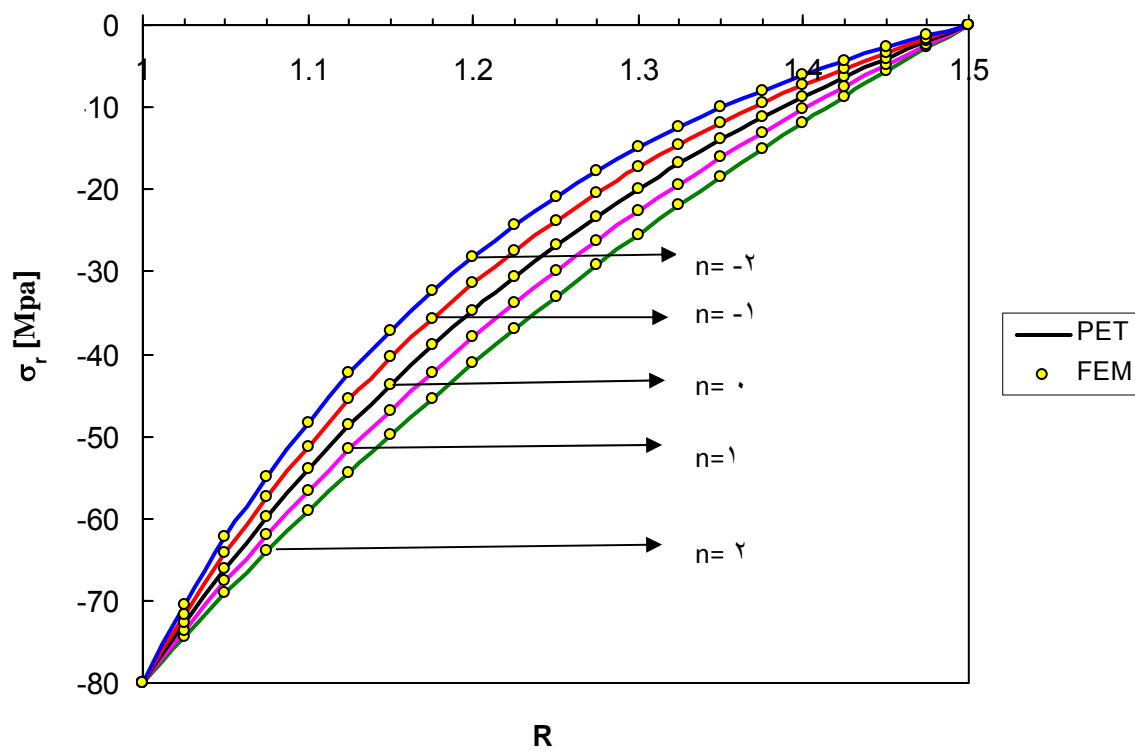
۸- فشار یکنواخت خارجی $p_o = 8\text{MPa}$ و دوران با سرعت زاویه ای

$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ ثابت}$$

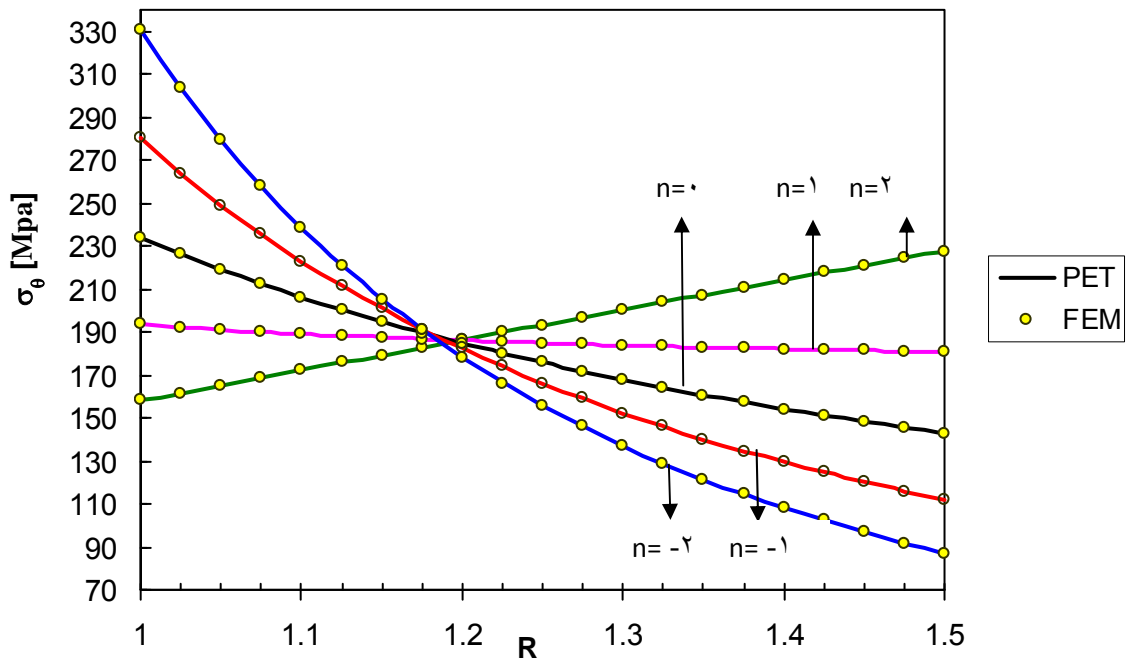
۹- فشار یکنواخت داخلی و خارجی $p_i = p_o = 8\text{MPa}$ و دوران با سرعت زاویه ای

$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ ثابت}$$

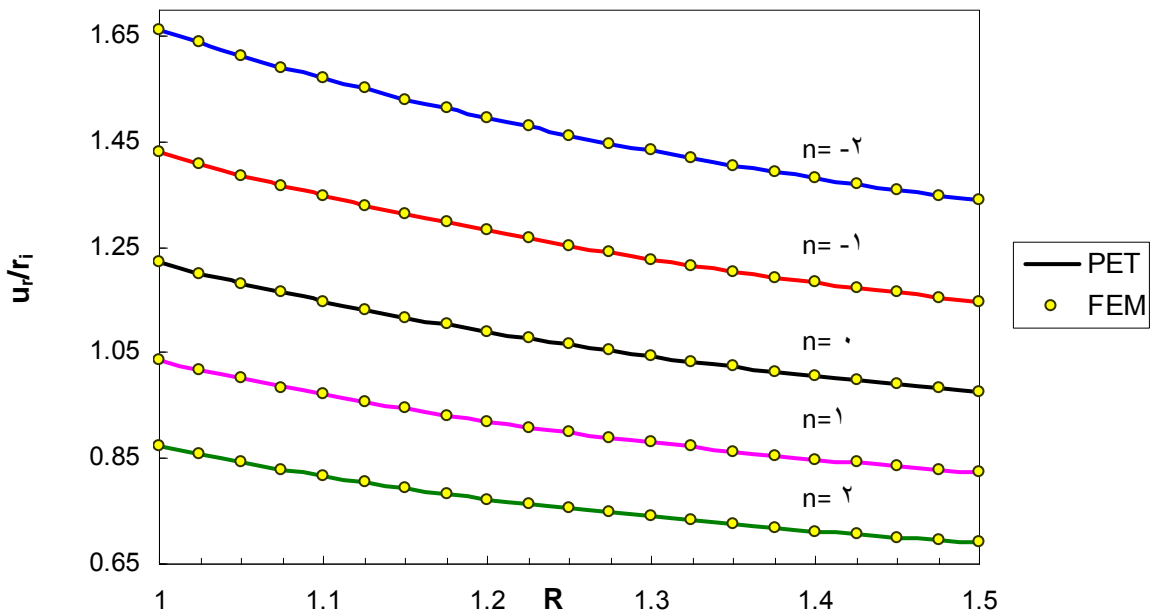
توزیع نرمال تنش ها و جابجایی در شرایط انتهایی مختلف، تفاوت قابل ملاحظه ای با یکدیگر ندارند. از این رو نمودارهای اشکال (۲-۴) تا (۱۰-۴) برای حالت کرنش صفحه ای در سه حالت بار گذاری گفته شده رسم شده اند.



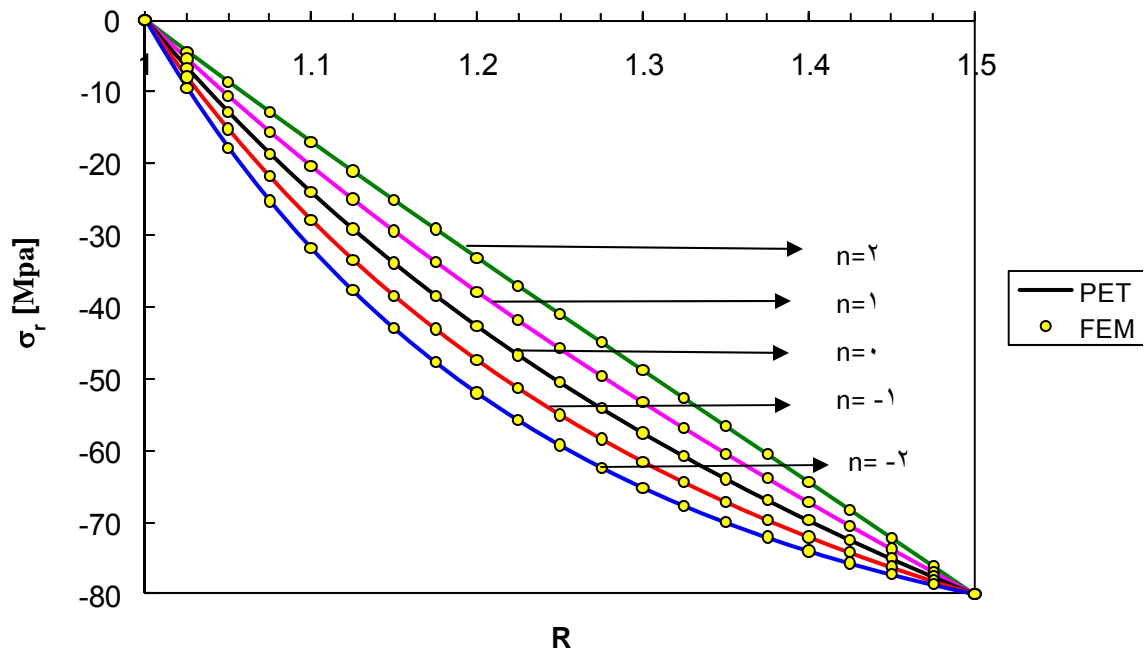
شکل (۲-۴) : توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن فشار داخلی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت



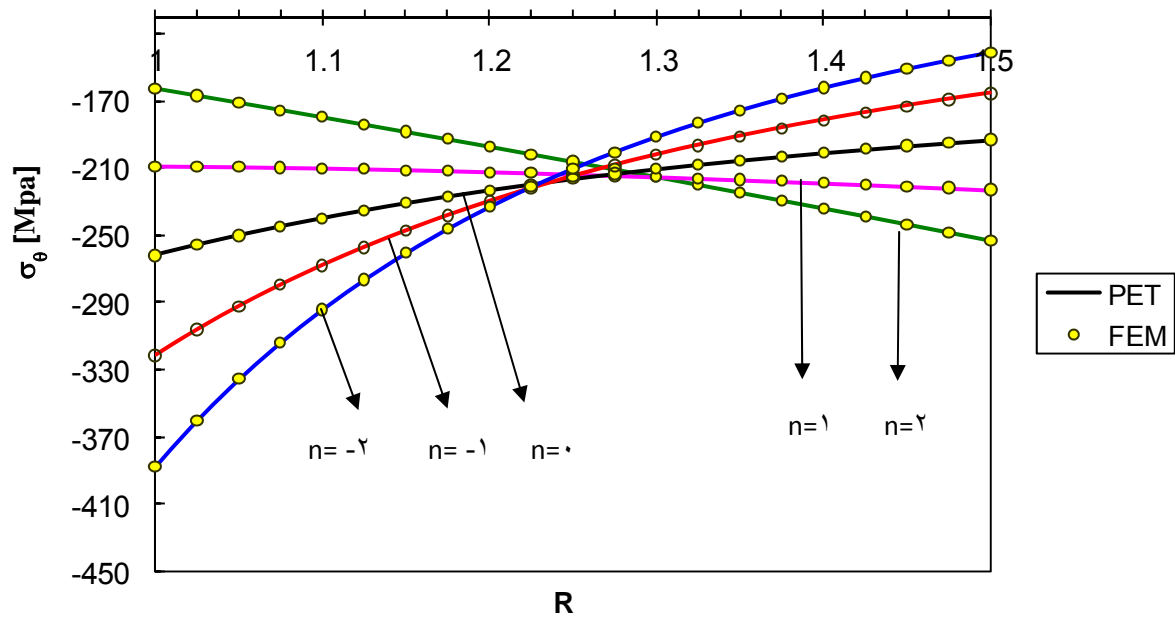
شکل (۳-۴) : توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت



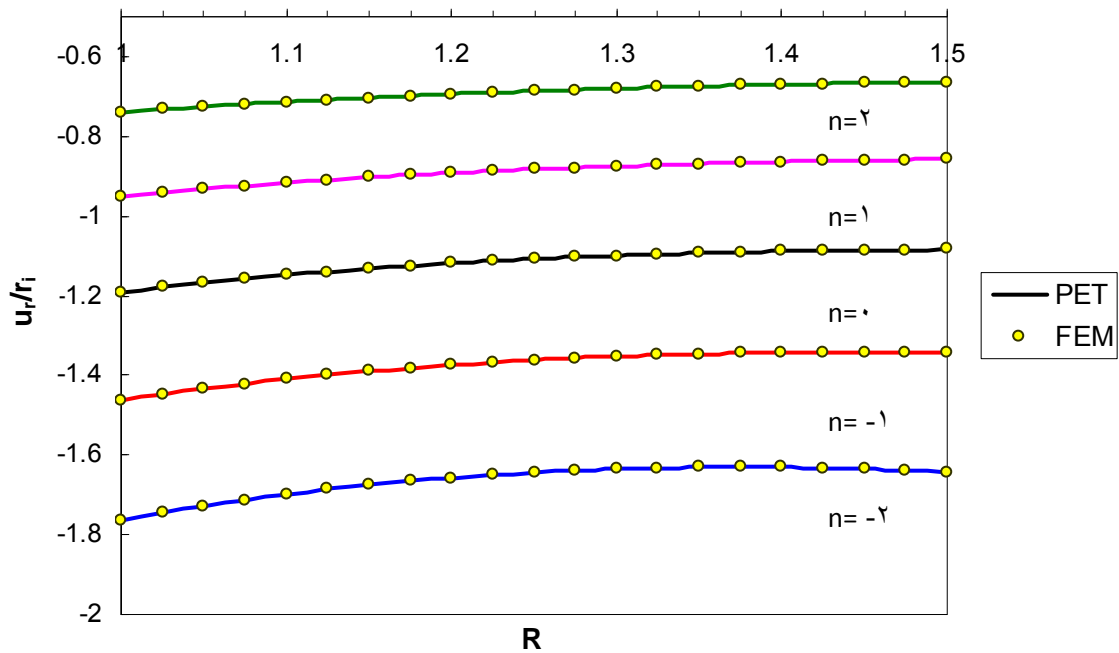
شکل (۴-۴) : توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت



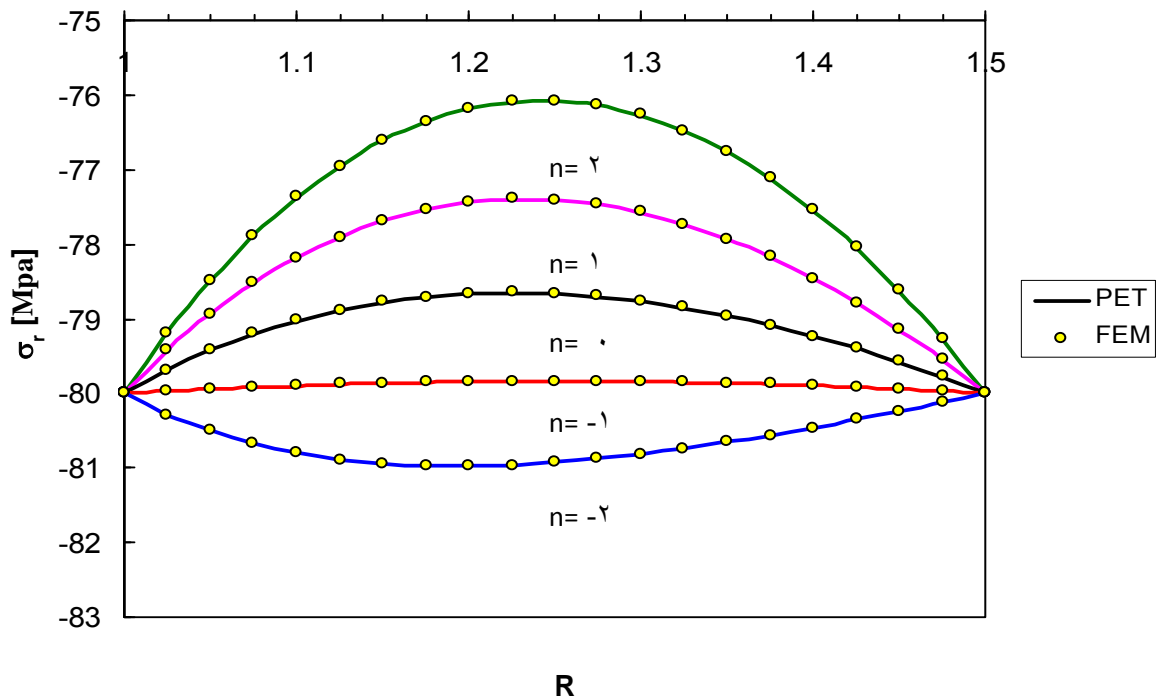
شکل (۴-۵) : توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت



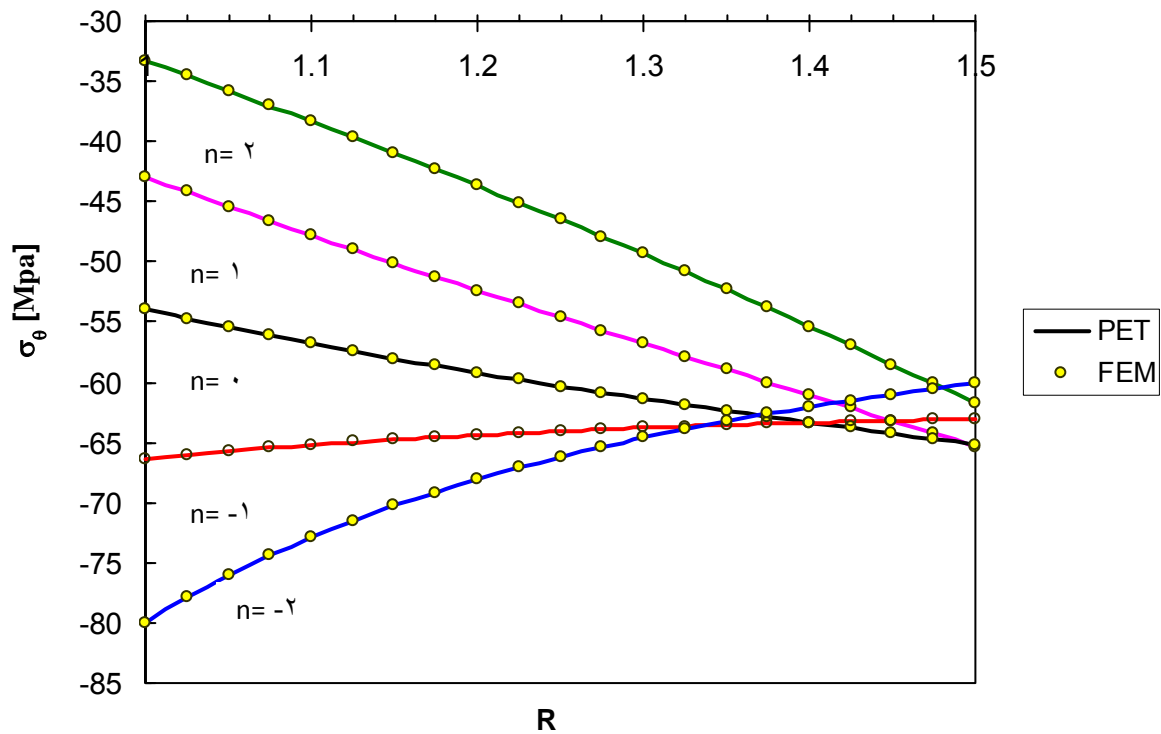
شکل (۴-۶) : توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت



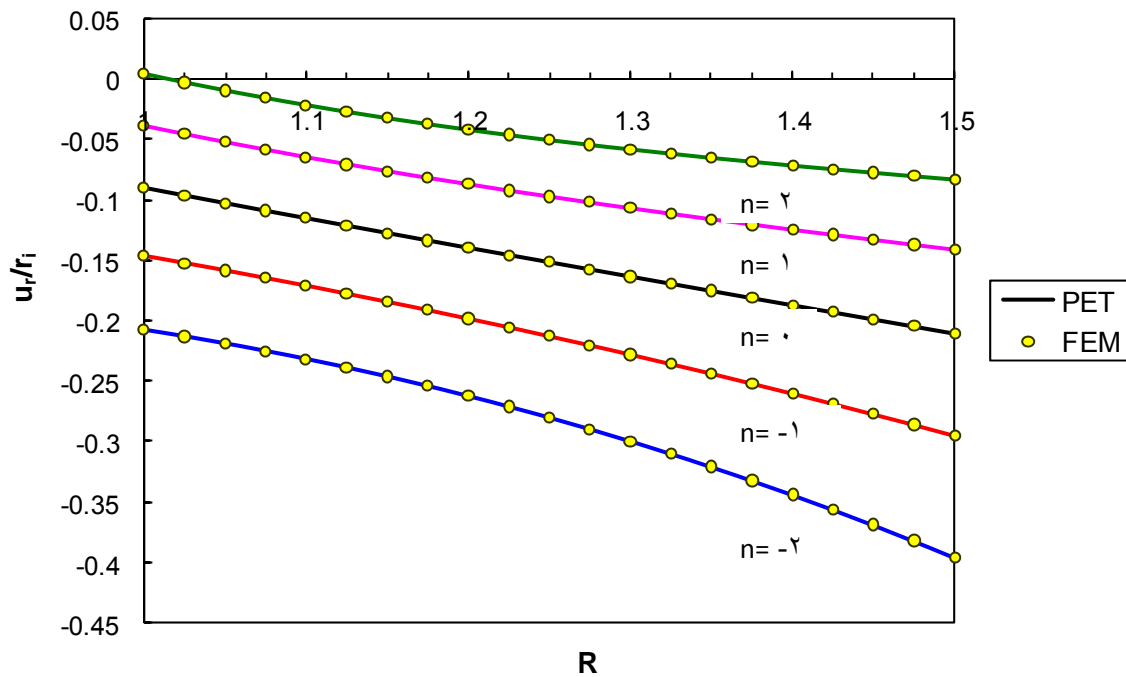
شکل (۷-۴) : توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت



شکل (۸-۴) : توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت



شکل (۴-۹): توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت



شکل (۴-۱۰): توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت

۴-۷ نتیجه گیری

در شکل های ۲-۴، ۴-۵ و ۴-۸ تنش شعاعی در استوانه تحت دوران و نیز به ترتیب تحت بار فشاری داخلی، بار فشاری خارجی و بار فشاری داخلی و خارجی، در امتداد شعاع استوانه نشان داده شده است. دیده می شود که در صورت وجود بار فشار داخلی با افزایش ضریب توان در روابط ضریب الاستیسیته و چگالی، مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد در صورتی که در حالت بارگذاری دوم که بار مکانیکی اعمالی به صورت بار فشاری خارجی بر استوانه وارد می شود، با افزایش ضریب توان تنش شعاعی کاهش می یابد و در حالت بارگذاری فشار داخلی و خارجی استوانه، با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی کاهش می یابد. تنش مماسی استوانه جدار ضخیم در شکل های ۴-۳، ۴-۶ و ۴-۹ نشان داده شده اند. در حالت بار فشاری داخلی تنش مماسی بصورت کششی اعمال می شود و بطور تقریبی تا اواسط ضخامت داخلی استوانه با افزایش ضریب توان مقدار تنش مماسی کاهش می یابد و از آن شعاع تا شعاع خارجی استوانه با افزایش ضریب توان مقدار تنش مماسی افزایش می یابد در صورتی که در حالت دوم بارگذاری (بار فشاری خارجی) تنش مماسی به صورت فشاری وارد می شود و مشابه حالت بار فشار داخلی در نصف ضخامت داخلی استوانه با افزایش ضریب توان مقدار تنش مماسی کاهش و از آن شعاع تا شعاع خارجی استوانه با افزایش ضریب توان مقدار تنش مماسی افزایش می یابد و در حالت سوم بارگذاری (بار فشاری داخلی و خارجی) با افزایش ضریب توان از مقدار تنش مماسی کاسته می شود ولی این گونه احساس می شود که در بخشی از ضخامت بیرونی استوانه این رون کاهش ادامه نخواهد داشت.

جابجایی شعاعی استوانه جدار ضخیم FGM بصورت عبارتی بی بعد، در شکل های ۴-۴، ۴-۷ و ۴-۱۰ نشان داده شده اند. همان طور که دیده می شود در بارگذاری دورانی و بار فشار داخلی جابجایی شعاعی با افزایش ضریب توان، کاهش می یابد و تمام جابجایی ها در بازه مثبت قرار خواهند داشت، در حالی که در صورت اعمال بار فشاری خارجی جابجایی های شعاعی در بازه منفی قرار می گیرند و مشابه حالت قبل با افزایش ضریب توان، از میزان جابجایی کاسته می شود و در حالت سوم بارگذاری جابجایی شعاعی برای ضریب های توان متفاوت، هم در بازه مثبت و هم در بازه منفی قرار می گیرند و با افزایش ضریب توان، از میزان جابجایی منفی آن کاسته و به جابجایی مثبت بدل خواهد شد.

فصل ۵

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های

استوانه‌ای چرخان FGM

۱-۵ مقدمه

مقاومت منحصر به فرد استوانه های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، دانشمندان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند. کاربرد های گسترده این استوانه ها در رآکتورها، ژنراتورها و سانتریفوژها که توجه به نیروی گریز از مرکز در آنها ضروری به نظر می رسد، باعث شده تا تحلیل این استوانه ها تحت تاثیر فشار، حرارت و دوران مورد بررسی قرار گیرد.

در همین راستا، فصل حاضر به تحلیل ترموالاستیک استوانه ها تحت فشار داخلی و خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت پرداخته است. در ادامه، با محاسبه روابط تحلیلی ارائه شده و مقایسه آنها با نتایج عددی یکی از نرم افزار های المان محدود (Ansys) به صورت زیر پرداخته خواهد شد.

۱- استوانه تحت بار حرارتی داخلی، فشار داخلی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت

۲- استوانه تحت بار حرارتی داخلی، فشار خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت

۳- استوانه تحت بار حرارتی داخلی، فشار داخلی، خارجی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت

در نهایت، با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده، توزیع جابجایی های شعاعی و رفتار تنش های شعاعی و محیطی برای استوانه ارائه شده است. در انتها، نتایج حاصله با یکدیگر مقایسه و جمع بندی خواهد شد.

۲-۵ روابط اساسی [۲]

الف- معادلات تعادل در مختصات استوانه ای

معادله تعادل در حالت کلی به صورت زیر می باشد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{B} = \vec{0} \quad (1-5)$$

که با بسط دادن این رابطه در مختصات استوانه ای، معادلات تعادل در مختصات استوانه ای بصورت زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + B_\theta = 0 \quad (2-5)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + B_z = 0$$

ب- روابط رفتاری (تنش - کرنش)

رابطه بین تنش و کرنش، برای مواد ارتجاعی خطی ایزوتروپیک، در حالت ترموالاستیک به صورت زیر نوشته می شود [۴].

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\delta_{ij} \quad (۳-۵)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} + \alpha T\delta_{ij} \quad (۴-۵)$$

که در این روابط μ و λ ثابت های لامه، بصورت زیر می باشند.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۵-۵)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

در صورت نوشتن روابط تنش-کرنش در مختصات استوانه ای داریم

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta}, \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}, \tau_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z} \end{cases} \quad (۶-۵)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)] + \alpha T \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{\mu}\tau_{r\theta}, \gamma_{rz} = \frac{1}{\mu}\tau_{rz}, \gamma_{\theta z} = \frac{1}{\mu}\tau_{\theta z} \end{cases} \quad (۷-۵)$$

ج- روابط سینماتیک (تغییر مکان - کرنش)

در حالت ترموالاستیک، روابط کلی سینماتیک به صورت زیر نشان داده می شود.

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T) \quad (۸-۵)$$

۶ معادله سینماتیک برای حالت استوانه ای به صورت زیر ساده می شوند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \gamma_{\theta z} &= \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{rz} &= \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)\end{aligned}\quad (9-5)$$

۵-۲-۱ مسائل متقارن محوری^۱

مسئله متقارن محوری، مسئله ای است که در آن هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و نیز خواص متقارن باشد و در نتیجه میدان تغییر شکل و تنش، تقارن محوری داشته باشد. در اینجا نیز می توان با فرض توزیع بار حرارتی در راستای شعاعی و متقارن در راستای مماسی مسئله را متقارن محوری در نظر بگیریم، پس در این صورت خواهیم داشت

$$u_\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (10-5)$$

با فرض تقارن محوری ۶ معادلات سینماتیک، به ۴ معادله کاهش می یابد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{rz} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \gamma_{r\theta} = 0, \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (11-5)$$

¹ Axisymmetric

و معادلات تعادل و رفتاری نیز به صورت زیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + B_z = 0 \end{cases} \quad (12-5)$$

در معادلات رفتاری نیز به ۴ معادله کاهش می یابند.

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta}, \tau_{rz} = 0, \tau_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (13-5)$$

و یا می توان نوشت

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)] + \alpha T \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{\mu}\tau_{r\theta}, \gamma_{rz} = 0, \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (14-5)$$

پس ۱۵ معادله کلی موجود در مختصات استوانه ای، ۳ معادله تعادل، ۶ معادله سینماتیک و ۶ معادله رفتاری به ۱۰ معادله کاهش می یابد.

۳-۵ تئوری الاستیسیته صفحه ای

در تئوری الاستیسیته صفحه ای (PET)^۱ فرض میشود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می ماند. تغییر شکل های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن میباشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی کند. تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر میکنند، به عبارت دیگر، جابه جایی شعاعی فقط تابع شعاع $u_r(r)$ است. یعنی المان چرخش ندارد، لذا کرنش برشی ε_{rz} و تنش برش t_{rz}

¹ Plane Elasticity Theory(PET)

در نظر گرفته نمی شوند. این بدان معناست که محورهای استوانه ای، محورهای اصلی و تنش های عمودی، تنش های اصلی هستند.

$$\sigma_{\theta} > \sigma_z > \sigma_r \quad \text{تنش های اصلی} \quad (15-5)$$

با توجه به معادلات تعادل و معادلات سازگاری، نتیجه می شود که تنش طولی σ_z و کرنش طولی ε_z دارای مقادیر ثابتند.

$$\gamma_{rz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{rz} = 0 \quad (16-5)$$

و در این صورت ۱۰ رابطه قبل به ۸ رابطه کاهش می یابد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \quad (17-5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_{\theta}) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + B_z = 0 \end{cases} \quad (18-5)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_{\theta} = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_{\theta} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \end{cases} \quad (19-5)$$

در رابطه تعادل (۱۸-۵) $B_r = \rho r \omega^2$ ، نیروی گریز از مرکز وارده بر استوانه در راستای شعاعی می باشد که ω سرعت زاویه ای دوران استوانه و ρ چگالی استوانه است. فرض می شود V و R به صورت روابط بی بعد زیر تعریف شوند

$$\begin{aligned} V &= \frac{u_r}{r_i} \\ R &= \frac{r}{r_i} \end{aligned} \quad (20-5)$$

r_i در این رابطه شعاع داخلی استوانه می باشد، در این صورت روابط تنش-جابجایی در ترم های نرمال شده جابجایی شعاعی V ، بصورت رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{dV}{dR} \\ \varepsilon_\theta = \frac{V}{R} \end{cases} \quad (21-5)$$

روابط تنش-کرنش را نیز بصورت رابطه ماتریسی زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ -\alpha T \end{bmatrix} \quad (22-5)$$

که ضرایب a ، b و c تعریف شده در این رابطه بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} a &= A E(R) \\ b &= B E(R) \\ c &= C E(R) \alpha(R) \end{aligned} \quad (23-5)$$

ضرایب A ، B و C ثابت هایی هستند که با توجه به شرایط انتهایی استوانه بصورت زیر تعیین می گردند.

۵-۳-۱ شرایط انتهایی استوانه

الف) تنش صفحه ای (استوانه با دو سر باز)

در حالت شرایط انتهایی استوانه به صورت تنش صفحه ای ضرایب A ، B و C به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-\nu^2} \\ B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \\ C = \frac{1}{1-\nu} \end{cases} \quad (24-5)$$

ب) کرنش صفحه ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)

در حالت شرایط انتهایی استوانه به صورت کرنش صفحه ای، خواهیم داشت.

$$\begin{cases} A = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C = \frac{1}{1-2\nu} \end{cases} \quad (25-5)$$

معادله تعادل برای مختصات استوانه ای متقارن محوری، با توجه به رابطه (۱۸-۵)، بدون وجود نیروهای حجمی در ترم متغیر بی بعد R، بصورت معادله زیر خواهد بود.

$$\frac{d\sigma_r}{dR} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{R} = -\rho R r_i^2 \omega^2 \quad (26-5)$$

حال توسط تعریف روابط (۲۱-۵) و (۲۲-۵) و استفاده از رابطه تعادل (۲۶-۵)، معادله دیفرانسیل برای مختصات استوانه ای متقارن محوری، بصورت رابطه زیر بدست می آید

$$\frac{dV}{dR} + M(R) \frac{dV}{dR} + N(R)V = Q(R) \quad (27-5)$$

که در این رابطه، ضرایب معادله دیفرانسیل بالا، بصورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} M(R) &= \frac{1}{a} \frac{da}{dR} + \frac{1}{R} \\ N(R) &= \frac{1}{R} \left[\frac{1}{a} \frac{db}{dR} - \frac{1}{R} \right] \\ Q(R) &= \frac{1}{a} \left[T \frac{dc}{dR} + c \frac{dT}{dR} \right] - \frac{\rho_i R^{p+1} r_i^2 \omega^2}{a(R) E(R)} \end{aligned} \quad (28-5)$$

۵-۳-۲ استوانه های همگن

برای استوانه های همگن در رابطه (۲۳-۵)، مدول الاستیسیته E، ضریب انبساط حرارتی α ، چگالی ρ و نیز نسبت پواسون ν ، ثابت می باشند. در اینجا با جایگذاری ثابت های مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب انبساط حرارتی در رابطه (۲۳-۵) و سپس (۲۸-۵) معادله دیفرانسیل حاصل به صورت رابطه (۳۰-۵) بدست می آید.

$$M(R) = \frac{1}{R}$$

$$N(R) = -\frac{1}{R^2} \quad (29-5)$$

$$Q(R) = \frac{C \alpha}{A} \frac{dT}{dR} - \frac{\rho R^3 r_i^2 \omega^2}{A E}$$

$$R^2 V'' + R V' - V = \frac{C \alpha}{A} \frac{dT}{dR} - \frac{\rho R^3 r_i^2 \omega^2}{A E} \quad (30-5)$$

که (۱)، مشتق نسبت به متغیر بی بعد R است.

۳-۳-۵ استوانه های ناهمگن

در مواد FG، مدول الاستیسیته E، ضریب انبساط حرارتی α ، چگالی ρ و نسبت پواسون ν ، توابعی از مختصات شعاعی بی بعد R است، که در اکثر تحلیل ها و بالاخص در این بررسی، بعلت تاثیرات جزئی نسبت پواسون، از تغییرات آن صرف نظر می شود و ثابت در نظر گرفته می شود. رابطه توزیع مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب انبساط حرارتی را بصورت توزیع توانی از مختصات بی بعد R، که در رابطه (۳۱-۵) آورده شده است، در نظر می گیریم.

$$E(R) = E_i R^n$$

$$\alpha(R) = \alpha_i R^m \quad (31-5)$$

$$\rho(R) = \rho_i R^p$$

که در این رابطه E_i مدول الاستیسیته، ρ_i چگالی و α_i ضریب انبساط حرارتی در شعاع داخلی استوانه می باشند. حال توسط تعریف روابط (۲۳-۵) و (۲۸-۵)، ضرایب معادله دیفرانسیل، بصورت رابطه (۳۲-۵) و در نتیجه معادله دیفرانسیل استوانه های ناهمگن بصورت رابطه (۳۳-۵) بدست می آید.

$$M(R) = \frac{n+1}{R}$$

$$N(R) = \frac{n\beta-1}{R^2} \quad (32-5)$$

$$Q(R) = \frac{C \alpha_i}{A} R^m \left[\frac{dT}{dR} + \frac{(m+n)T}{R} \right]$$

$$R^2 V'' + (n+1)R V' + (n\beta-1)V = \frac{C \alpha_i}{A} R^{m+2} \left[\frac{dT}{dR} + \frac{(m+n)T}{R} \right] - \frac{\rho_i R^{-n+p+1} r_i^2 \omega^2}{A E_0} \quad (33-5)$$

۴-۵ حل ترموالاستیک استوانه های نا همگن چرخان

۱-۴-۵ حل مسئله انتقال حرارت

معادله انتقال حرارت در شرایط یکنواخت، برای مسئله یک بعدی بطور شعاعی، در مختصات قطبی برای یک استوانه تو خالی بصورت رابطه (۳۴-۵) بدست می آید. بطور کلی معادله بدست آمده و شرایط مرزی حرارتی بصورت زیر خواهد بود. که در این رابطه $K(R)$ ضریب جابجایی حرارتی است.

$$\frac{1}{R} [R K(R) T'(R)]' = 0 \quad (34-5)$$

$$\begin{aligned} r = r_i & \implies R = 1 & T = T_i \\ r = r_o & \implies R = k & T = T_o \end{aligned} \quad (35-5)$$

در این روابط، T_o و T_i بترتیب شعاع های داخلی و خارجی استوانه تو خالی اند. با فرض ثابت بودن ضریب جابجایی حرارتی در رابطه (۳-۳۴) با دو بار انتگرالگیری از رابطه بالا داریم.

$$T(R) = C_1 + C_2 \ln R - T^* \quad (36-5)$$

T^* دمای هوای محیط می باشد، که در تحلیل های عددی آنرا برابر 25^0 C در نظر میگیریم و C_2 توسط شرایط مرزی (۳-۳۵) بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} C_1 &= T_i \\ C_2 &= \frac{T_o - T_i}{\ln k} \end{aligned} \quad (37-5)$$

با جایگذاری ثابت ها داریم

$$T(R) = (T_i - T^*) + \frac{T_o - T_i}{\ln(k)} \ln R \quad (38-5)$$

با قرار دادن رابطه توزیع دما در معادله (۵-۳۳)، معادله دیفرانسیل حاصل بصورت زیر بدست می آید [۳۱].

$$R^2 V'' + (n+1) R V' + (n\beta - 1) V = \frac{C \alpha_i}{A} R^{m+2} \left[\frac{dT}{dR} + (m+n) \frac{T}{R} \right] - \frac{W R^{p-n+1}}{A E_0} \quad (39-5)$$

در این رابطه $W = \rho_i r_i^2 \omega^2$ می باشد.

پاسخ معادله دیفرانسیل (۵-۳۹) دارای دو حل عمومی و خصوصی بصورت زیر خواهد بود.

$$V(R) = V_g(R) + V_p(R) \quad (40-5)$$

حال برای یافتن جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (39-5)، حل خصوصی آن را بصورت زیر فرض می کنیم.

$$V_p(R) = [D_1 + D_2 \ln R] R^{m+1} + D_3 R^{p-n+3} \quad (41-5)$$

با جایگزینی رابطه (41-5) در رابطه (39-5) و مساوی قرار دادن ضرایب توانها خواهیم داشت.

$$D_1 = \left[\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{QA+nB} - \frac{(UA-nB)C_2}{(QA+nB)^2} \right] C \alpha_i$$

$$D_2 = \frac{(n+m)C \alpha_i C_2}{QA+nB}$$

$$D_3 = -\frac{W}{E_i [FA - nB]} \quad (42-5)$$

$$Q = m^2 + (n+2)m + n$$

$$U = m^2 + n^2 + n(2m+1)$$

$$F = (3+p)n - 6p - p^2 - 8$$

فرض شود حل عمومی معادله همگن (39-5)، بفرم زیر باشد.

$$V_g(R) = B R^n \quad (43-5)$$

با جایگزینی این رابطه در رابطه (39-5) معادله مشخصه آن، بصورت رابطه زیر بدست می آید.

$$\eta^2 + n\eta + (\beta n - 1) = 0 \quad (44-5)$$

با حل رابطه معادله مشخصه (44-5) ریشه های آن به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} \eta_{1,2} = \frac{1}{2}(-n \pm \sqrt{\Delta}) \\ \Delta = n^2 - 4n\beta + 4 \end{cases} \quad (45-5)$$

ریشه های حاصل، ممکن است دارای سه حالت الف) ریشه های حقیقی، ب) ریشه های مضاعف و ج) ریشه های مختلط باشند. حل کامل معادله (39-5)، در سه حالت مختلف ریشه های حقیقی، مضاعف و مختلط، بصورت زیر خواهد بود.

۵-۴-۲ ریشه های حقیقی

برای حالت ریشه های حقیقی

$$V_g = (B_1 R^{\eta_1} + B_2 R^{\eta_2}) \quad (۴۶-۵)$$

بطو کلی حل کامل برای تابع $V(R)$ ، مجموع حل عمومی و خصوصی بصورت زیر است.

$$V(R) = B_1 R^{\eta_1} + B_2 R^{\eta_2} + [D_1 + D_2 \ln R] R^{m+1} + D_3 R^{p-n+3} \quad (۴۷-۵)$$

با جایگزینی رابطه (۴۷-۵) در رابطه (۲۱-۵) و (۲۲-۵)، تنش ها بصورت روابط زیر بدست می آیند.

$$\sigma_r = [(A\eta_1 + B)B_1 R^{\eta_1} + (A\eta_2 + B)B_2 R^{\eta_2} + (X \ln R + Y) R^{m+1}] E_i R^{(n-1)} + K E_i R^{p+2} \quad (۴۸-۵)$$

$$\sigma_\theta = [(B\eta_1 + A)B_1 R^{\eta_1} + (B\eta_2 + A)B_2 R^{\eta_2} + (Z \ln R + P) R^{m+1}] E_i R^{n-1} + L E_i R^{p+2} \quad (۴۹-۵)$$

که در این روابط

$$\begin{aligned} X &= ((m+1)A+B)D_2 - C\alpha_i C_2 \\ Y &= ((m+1)A+B)D_1 + AD_2 - C\alpha_i (T_i - T^*) \\ Z &= ((m+1)B+A)D_2 - C\alpha_i C_2 \\ P &= ((m+1)B+A)D_1 + BD_2 - C\alpha_i (T_i - T^*) \end{aligned} \quad (۵۰-۵)$$

شرایط مرزی در سطح داخل و خارج استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، بصورت رابطه (۵۱-۵) خواهد بود.

$$\begin{aligned} r=a &\implies R=1 & \sigma_r &= -p_i \\ r=b &\implies R=k & \sigma_r &= -p_o \end{aligned} \quad (۵۱-۵)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه بدست آمده (۵۱-۵) ضرایب B_1 و B_2 بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{k^{\eta_2} (E_i Y + p_i) - E_i k^{m+1} (X \ln k + Y) - p_o k^{1-n} + \frac{((n-p-3)A-B)(k^{p-n+3} - k^{\eta_2})W}{(AF-Bn)}}{(A\eta_1 + B)E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \\ B_2 &= \frac{E_i k^{m+1} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} (E_i Y + p_i) + p_o k^{1-n} + \frac{((n-p-3)A-B)(k^{\eta_1} - k^{p-n+3})W}{(AF-Bn)}}{(A\eta_2 + B)(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})E_i} \end{aligned} \quad (۵۲-۵)$$

با قرار دادن ضرایب B_1 و B_2 در معادلات (۴۷-۵)، (۴۸-۵) و (۴۹-۵) روابط تنش و جابجایی شعاعی بصورت تابعی از متغیر بی بعد R بدست می آید.

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] + [(X \ln R + Y) R^{m+1} \\ & + \left(\frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \right)] E_i R^{n-1} \\ & + \left[\frac{(k^{3+p} - k^{n+\eta_2}) R^{\eta_1} + (k^{n+\eta_1} - k^{3+p}) R^{\eta_2}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2}) k^n} - R^{3-n+p} \right] \frac{(n-p-3)A - B}{AF - nB} W R^{n-1} \end{aligned} \quad (53-5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{A + B\eta_1}{A\eta_1 + B} \left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \frac{A + B\eta_2}{A\eta_2 + B} \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] \\ & + \left(\frac{B\eta_1 + A}{A\eta_1 + B} \frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{B\eta_2 + A}{A\eta_2 + B} \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \right) \\ & + (Z \ln R + P) R^{m+1} E_i R^{n-1} \\ & + \left[\frac{(p-n)A - B}{AF - Bn} \left(\frac{B\eta_1 + A}{A\eta_1 + B} \frac{k^{3-n+p} + k^{\eta_2}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} R^{\eta_1} + \frac{B\eta_2 + A}{A\eta_2 + B} \frac{k^{\eta_1} - k^{3-n+p}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} R^{\eta_2} \right) - \frac{(n-p-3)B - A}{AF - Bn} R^{p-n+3} \right] W R^{n-1} \end{aligned} \quad (54-5)$$

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{r_i}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \left[\frac{\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1}}{(A\eta_1 + B) E_i} - \frac{\left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2}}{(A\eta_2 + B) E_i} \right. \\ & \left. + R^{\eta_1} \frac{k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)}{(A\eta_1 + B)} + R^{\eta_2} \frac{k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y}{(A\eta_2 + B)} \right] + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1} \\ & + \left[\frac{A(p-n+3) - B}{AF - nB} \left(\frac{(k^{3-n+p} + k^{\eta_2}) R^{\eta_1}}{(A\eta_1 + B) E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} - \frac{(k^{3-n+p} + k^{\eta_1}) R^{\eta_2}}{(A\eta_2 + B) E_i (k^{\eta_1} - k^{\eta_2})} \right) + \frac{R^{(3-n+p)}}{(AF - Bn) E_i} \right] W r_i \end{aligned} \quad (55-5)$$

روابط تنش و جابجایی در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر خواهد بود.

الف) تنش صفحه ای

$$\begin{aligned} X = & \frac{[m+1+\nu] C_2(n+m) - C_2}{Q+n\nu} \frac{1-2\nu}{1-2\nu} \alpha_i \\ Y = & \frac{[m+1+\nu] \left(\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{Q+n\nu} + \frac{(-U+n\nu)C_2}{(Q+n\nu)^2} \right) + \frac{C_2(n+m)}{Q+n\nu} - (T_i - T^*)}{1-2\nu} \alpha_i \\ Z = & \frac{[(m+1)\nu + 1] C_2(n+m) - C_2}{Q+n\nu} \frac{1-2\nu}{1-2\nu} \alpha_i \\ P = & \frac{[(m+1)\nu + 1] \left(\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{Q+n\nu} + \frac{(-U+n\nu)C_2}{(Q+n\nu)^2} \right) + \frac{\nu C_2(n+m)}{Q+n\nu} - (T_i - T^*)}{1-2\nu} \alpha_i \end{aligned} \quad (56-5)$$

$$\sigma_r = \frac{R^{(n-1)}}{k^\eta - k^{\eta_2}} \left[\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^\eta - \left(k^\eta P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] + \{ (X \ln R + Y) R^{m+1} + \frac{R^\eta [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^\eta - k^{\eta_2}} + \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_2} Y]}{k^\eta - k^{\eta_2}} \} E_i R^{n-1} \quad (57-5)$$

$$+ \left[\frac{(n-p-3)-\nu}{F-n\nu} \left(\frac{(k^{(3+p)} - k^{(n+\eta_2)}) R^{(n+\eta-1)}}{(k^\eta - k^{\eta_2}) k^n} + \frac{(k^{(n+\eta)} - k^{(3+p)}) R^{(n+\eta_2-1)}}{(k^\eta - k^{\eta_2}) k^n} - R^{2+p} \right) \right] W$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{(n-1)}}{k^\eta - k^{\eta_2}} \left[\frac{A+B\eta_1}{A\eta_1+B} \left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^\eta - \frac{A+B\eta_2}{A\eta_2+B} \left(k^\eta P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] + \left\{ \frac{\nu\eta_1+1}{\eta_1+\nu} \frac{R^\eta [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^\eta - k^{\eta_2}} + \frac{\nu\eta_2+1}{\eta_2+\nu} \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_2} Y]}{k^\eta - k^{\eta_2}} \right. \\ \left. + (Z \ln R + P) R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} + \left\{ \frac{(n-p-3)-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\nu\eta_1+1}{\eta_1+\nu} \frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_2)}) R^\eta}{(k^\eta - k^{\eta_2}) k^n} - \frac{\nu\eta_2+1}{\eta_2+\nu} \frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta)}) R^{\eta_2}}{(k^\eta - k^{\eta_2}) k^n} \right) R^{n-1} \right. \\ \left. + \frac{((n-p-3)\nu-1) R^{(2+p)}}{1-2\nu} \right\} W \quad (58-5)$$

$$u_r = \frac{r_i (1-\nu^2)}{(k^\eta - k^{\eta_2})} \left\{ \frac{\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^\eta}{(\eta_1 + \nu) E_i} - \frac{\left(k^\eta P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2}}{(\eta_2 + \nu) E_i} \right. \\ \left. + R^\eta \frac{k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)}{(\eta_1 + \nu)} + R^{\eta_2} \frac{k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_2} Y}{(\eta_2 + \nu)} \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1} \quad (59-5) \\ + \left[\frac{(n-p-3)-\nu}{(1-2\nu) E_i} \left(\frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_2)}) R^\eta}{(\eta_1 + \nu) (k^\eta - k^{\eta_2}) k^n} - \frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta)}) R^{\eta_2}}{(\eta_2 + \nu) (k^\eta - k^{\eta_2}) k^n} \right) + \frac{R^{(3-n+p)}}{(1-2\nu) E_i} \right] W$$

ب) کرنش صفحه ای

$$X = \frac{[(m+1)(1-\nu)+\nu]C_2(n+m)}{Q(1-\nu)+n\nu} - C_2 \quad \alpha_i \\ Y = \frac{[(m+1)(1-\nu)+\nu] \left[\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{Q(1-\nu)+n\nu} + \frac{(-U(1-\nu)+n\nu)C_2}{(Q(1-\nu)+n\nu)^2} \right] + \frac{(1-\nu)C_2(n+m)}{Q(1-\nu)+n\nu} - (T_i - T^*)}{1-2\nu} \quad \alpha_i \\ Z = \frac{[(m+1)\nu+(1-\nu)]C_2(n+m)}{Q(1-\nu)+n\nu} - C_2 \quad \alpha_i \\ P = \frac{[(m+1)\nu+(1-\nu)] \left[\frac{(n+m)(T_i - T^*)}{Q(1-\nu)+n\nu} + \frac{(-U(1-\nu)+n\nu)C_2}{(Q(1-\nu)+n\nu)^2} \right] + \frac{\nu C_2(n+m)}{Q(1-\nu)+n\nu} - (T_i - T^*)}{1-2\nu} \quad \alpha_i \quad (60-5)$$

$$\sigma_r = \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] + \{ (X \ln R + Y) R^{m+1} + \frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \} E_i R^{n-1} \quad (61-5)$$

$$+ \left[\frac{(n-p-2)\nu + (3-n+p)}{F(\nu-1) + n\nu} \left(\frac{(k^{(3+p)} - k^{(n+\eta_2)}) R^{(n+\eta_1-1)}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2}) k^n} + \frac{(k^{(n+\eta_1)} - k^{(3+p)}) R^{(n+\eta_2-1)}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2}) k^n} - R^{(2+p)} \right) \right] W$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{(n-1)}}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \left[\frac{A+B\eta_1}{A\eta_1+B} \left(k^{\eta_2} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_1} - \frac{A+B\eta_2}{A\eta_2+B} \left(k^{\eta_1} P_i - k^{(1-n)} P_o \right) R^{\eta_2} \right] + \{ (Z \ln R + P) R^{m+1} + \frac{\nu\eta_1 + (1-\nu)}{(1-\nu)\eta_1 + \nu} \frac{R^{\eta_1} [k^{\eta_2} Y - k^{(m+1)} (X \ln k + Y)]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} + \frac{\nu\eta_2 + (1-\nu)}{(1-\nu)\eta_2 + \nu} \frac{R^{\eta_2} [k^{(m+1)} (X \ln k + Y) - k^{\eta_1} Y]}{k^{\eta_1} - k^{\eta_2}} \} E_i R^{n-1}$$

$$+ \left[\frac{(n-p-2)\nu + (3-n+p)}{F(\nu-1) + n\nu} \left(\frac{(-1-(\eta_1-1)\nu)}{\eta_1(\nu-1)-\nu} \frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_2)}) R^{\eta_1}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2}) k^n} - \frac{(-1-(\eta_2-1)\nu)}{\eta_2(\nu-1)-\nu} \frac{(k^{(3+p)} + k^{(n+\eta_1)}) R^{\eta_2}}{(k^{\eta_1} - k^{\eta_2}) k^n} \right) R^{(n-1)} \right] \quad (62-5)$$

$$+ \left[\frac{(1+(2-n+p)) R^{(2+p)}}{F(\nu-1) + n\nu} \right] W$$

۳-۴-۵ ریشه های مضاعف

در حالت ریشه های مضاعف $\eta = -\frac{n}{p}$ ، و در این حالت، پاسخ معادله همگن (۳۹-۵) بصورت رابطه زیر خواهد بود

$$V_g(R) = (B_1 + B_2 \ln R) R^\eta \quad (63-5)$$

حل کامل برای تابع $V(R)$ در حالت ریشه های مضاعف، بصورت زیر است.

$$V(R) = (B_1 + B_2 \ln R) R^\eta + [D_1 + D_2 \ln R] R^{m+1} + D_3 R^{p-n+3} \quad (64-5)$$

با جایگزینی رابطه (۶۱-۵) در رابطه (۲۱-۵) و (۲۲-۵)، تنش ها بصورت رابطه زیر بدست می آید.

$$\sigma_r = \{ [(A\eta + B)B_1 + ((A\eta + B) \ln R + A)B_2] R^\eta + (X \ln R + Y) R^{m+1} \} E_i R^{n-1} + K E_i R^{p+2} \quad (65-5)$$

$$\sigma_\theta = \{ (B\eta + A)B_1 + ((B\eta + A) \ln R + B)B_2 \} R^\eta + (Z \ln R + P) R^{m+1} \} E_i R^{n-1} + L E_i R^{p+2} \quad (66-5)$$

شرایط مرزی در سطح داخل و خارج استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، بصورت رابطه (۵۱-۵) خواهد بود.

$$\begin{aligned} r = a & \implies R = 1 & \sigma_r &= -p_i \\ r = b & \implies R = k & \sigma_r &= -p_o \end{aligned} \quad (67-5)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه بدست آمده، ضرایب B_1 و B_2 بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$B_1 = \frac{A [k^{m+1} (X \ln k + Y) E_i + p_o k^{1-n}] - k^\eta [(A\eta + B) \ln k + A] (Y E_i + p_i)}{k^\eta \ln k (A\eta + B)^2 E_i} + \frac{((n-p-3)A - B) [(A\eta + B) \ln k + A] [k^{n+\eta-1} - k^{p+2} A]}{k^{(n+\eta-1)} \ln k (A\eta + B)^2 (FA - nB) E_i} W \quad (68-5)$$

$$B_2 = \frac{k^\eta (Y E_i + p_i) - k^{m+1} (X \ln k + Y) E_i - p_o k^{1-n}}{k^\eta \ln k (A\eta + B) E_i} + \frac{((n-p-3)A - B) (k^{p+2} - k^{n+\eta-1})}{k^{(n+\eta-1)} \ln k (A\eta + B) (FA - nB) E_i} W$$

با قرار دادن ضرایب بدست آمده در روابط (5-64)، (5-65) و (5-66) روابط تنش و جابجایی بصورت زیر بدست می آیند.

$$\sigma_r = -\frac{R^{(m+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-m-n)} P_o \ln R \right] - \left[\frac{Y k^\eta \ln \frac{k}{R} + \ln R (X \ln k + Y) k^{m+1}}{k^\eta \ln k} R^\eta - (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{(n-1)} \quad (69-5)$$

$$+ \frac{A(n-p-3) - B}{FA - nB} \left[\frac{(\ln \frac{k}{R} R^\eta - \ln k R^{3-n+p}) k^\eta + R^\eta \ln R k^{3-n+p}}{k^\eta \ln k} \right] W R^{n-1}$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{B^2 - A^2}{(A\eta + B)^2} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \frac{A + B\eta}{A\eta + B} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} + \left[\frac{A^2 - B^2}{(A\eta + B)^2} - \frac{(B\eta + A) \ln R}{A\eta + B} \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{A^2 - B^2}{(A\eta + B)^2} + \frac{(B\eta + A) \ln \frac{k}{R}}{A\eta + B} \right] Y k^\eta R^\eta + (Z \ln R + P) R^{m+1} E_i R^{n-1} \quad (70-5)$$

$$+ \left[\frac{A(n-p-3) - B}{FA - nB} \left[\frac{B\eta + A}{A\eta + B} \left(\ln \frac{k}{R} k^\eta + \ln R k^{p-n+3} \right) + \frac{A^2 - B^2}{(A\eta + B)^2} (k^\eta - k^{p-n+3}) \right] R^{n+\eta-1} - \frac{B(n-p-3) - A}{FA - nB} R^{p+2} \right] W$$

$$u_r = \frac{r_i R^\eta}{E_i (A\eta + B) \ln k} \left\{ -\frac{A}{A\eta + B} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} + \frac{r_i \left(\frac{R}{k} \right)^\eta}{(A\eta + B) \ln k} \left\{ \left[\frac{A}{A\eta + B} - \ln R \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{A}{A\eta + B} + \ln \frac{k}{R} \right] Y k^\eta \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1} + \left[\frac{A(n-p-3) - B}{FA - nB} \left[\frac{(B\eta + A) \ln \frac{k}{R} + A}{E_i k^\eta \ln k (A\eta + B)^2} k^\eta + ((A\eta + B) \ln R - A) k^{p-n+3} \right] R^\eta + \frac{R^{3-n+p}}{E_i (FA - nB)} \right] W r_i \quad (71-5)$$

الف) تنش صفحه ای

$$\sigma_r = -\frac{R^{(m+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-m-n)} P_o \ln R \right]$$

$$- \left[\frac{Y k^\eta \ln \frac{k}{R} + \ln R (X \ln k + Y) k^{m+1}}{k^\eta \ln k} R^\eta - (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \quad (72-5)$$

$$+ \frac{n-p-3-\nu}{1-2\nu} \left[\frac{(\ln \frac{k}{R} R^{(n+\eta-1)} - \ln k R^{(2+p)}) k^{(n+\eta-1)} + R^{n+\eta-1} \ln R k^{(2+p)}}{k^{n+\eta-1} \ln k} \right] W$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{1-\nu^2}{(\eta+\nu)^2} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \frac{1+\nu\eta}{\eta+\nu} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln \bar{r} \right] \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{\left[\frac{1-\nu^2}{(\eta+\nu)^2} - \frac{(\nu\eta+1) \ln R}{\eta+\nu} \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{1-\nu^2}{(\eta+\nu)^2} + \frac{(\nu\eta+1) \ln \frac{k}{R}}{\eta+\nu} \right] Y k^\eta}{k^\eta \ln k} R + (Z \ln R + P) R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} \quad (73-5)$$

$$+ \left\{ \frac{n-p-3-\nu}{1-2\nu} \left[\frac{(\nu\eta+1) \left(\ln \frac{k}{R} k^\eta + \ln R k^{p-n+3} \right) + \frac{1-\nu^2}{(\nu+\eta)^2} (k^\eta - k^{p-n+3})}{k^\eta \ln(k)} R^{n+\eta-1} + \frac{(n-p-3)\nu-1}{1-2\nu} R^{p+2} \right] \right\} W$$

$$u_r = \frac{r_i R^\eta}{E_i (A\eta + B) \ln k} \left\{ -\frac{1}{\eta+\nu} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\}$$

$$+ \frac{r_i \left(\frac{R}{k} \right)^\eta}{(\eta+\nu) \ln k} \left\{ \left[\frac{1}{\eta+\nu} - \ln R \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{1}{\eta+\nu} + \ln \frac{k}{R} \right] Y k^\eta \right\} \quad (74-5)$$

$$+ (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1}$$

$$+ \frac{1-\nu^2}{E_i (1-2\nu)} [(n-p-3-\nu) \frac{[(\nu\eta+1) \ln \frac{k}{R} + 1] k^{n+\eta-1} + [(\eta+\nu) \ln R - 1] k^{2+p}}{k^{n+\eta-1} \ln k (\nu+\eta)^2} R^\eta + R^{3-n+p}] W r_i$$

ب) کرنش صفحه ای

$$\sigma_r = -\frac{R^{(m+n-1)}}{\ln k} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-m-n)} P_o \ln R \right]$$

$$- \left[\frac{Y k^\eta \ln \frac{k}{R} + \ln R (X \ln k + Y) k^{m+1}}{k^\eta \ln k} R^\eta - (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \quad (75-5)$$

$$+ \frac{(n-p-2)\nu + p - n + 3}{F(\nu-1) + n\nu} \left[\frac{(\ln \frac{k}{R} R^{(n+\eta-1)} - \ln k R^{(2+p)}) k^{n+\eta-1} + R^{n+\eta-1} \ln R k^{(2+p)}}{k^{n+\eta-1} \ln k} \right] W$$

$$\sigma_o = \frac{R^{(\eta+n-1)}}{\ln k} \left\{ \frac{1-2\nu}{((\eta-1)\nu-\eta)^2} \left[k^{(1-\eta-n)} P_o - P_i \right] - \frac{(\eta-1)\nu-1}{(\eta-1)\nu-\eta} \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} + \left\{ (Z \ln R + P) R^{m+1} \right. \\ \left. + \frac{\left[\frac{1-2\nu}{((1-\nu)\eta+\nu)^2} - \frac{(\nu\eta+(1-\nu)) \ln R}{(1-\nu)\eta+\nu} \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{1-2\nu}{((1-\nu)\eta+\nu)^2} + \frac{(\nu\eta+(1-\nu)) \ln \frac{k}{R}}{(1-\nu)\eta+\nu} \right] Y k^\eta}{k^\eta \ln k} R \right\} E_i R^{n-1} \quad (76-5)$$

$$+ \left[\frac{(n-p-2)\nu+p-n+3}{F(\nu-1)+n\nu} \left[\frac{((\eta-1)\nu-1) \left(\ln \frac{k}{R} k^\eta + \ln R k^{p-n+3} \right) + \frac{(\eta-1)\nu-1}{((\eta-1)\nu-\eta)^2} (k^\eta - k^{p-n+3})}{k^\eta \ln k} \right] R^{n+\eta-1} + \frac{1+(2+p-n)\nu}{F(\nu-1)+n\nu} R^{p+2} \right] W$$

$$u_r = \frac{r_i R^\eta}{E_i (A\eta + B) \ln k} \left\{ \frac{(1-\nu)}{(1-\nu)\eta+\nu} \left[P_i - k^{(1-\eta-n)} P_o \right] - \left[P_i \ln \frac{k}{R} + k^{(1-\eta-n)} P_o \ln R \right] \right\} a \\ + \frac{r_i \left(\frac{R}{k} \right)^\eta}{(A\eta + B) \ln k} \left\{ \left[\frac{1-\nu}{(1-\nu)\eta+\nu} - \ln R \right] (X \ln k + Y) k^{m+1} - \left[\frac{1-\nu}{(1-\nu)\eta+\nu} + \ln \frac{k}{R} \right] Y k^\eta \right\} \\ + (D_1 + D_2 \ln R) r_i R^{m+1} \\ + \left[\frac{((\eta-1)\nu-\eta) \ln \frac{k}{R} - (1-\nu) k^\eta + ((\eta-1)\nu-\eta) \ln R - (1-\nu) k^{p-n+3}}{k^{n+\eta-1} \ln k ((\eta-1)\nu-\eta)^2} R \right] (77-5) \\ + R^{3-n+p} \left] \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i (F(\nu-1)+n\nu)} W r_i \right.$$

۴-۴-۵ ریشه های مختلط

در این حالت در معادله مشخصه (۴۴-۵)، $\Delta < 0$ و پاسخ معادله همگن (۳۹-۵) بصورت رابطه زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \eta_1 = x + iy \\ \eta_2 = x - iy \end{cases} \quad (78-5)$$

$$x = -\frac{n}{2} \quad (79-5)$$

$$y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$V_g(R) = [B_1 \cos(y \ln R) + B_2 \sin(y \ln R)] R^x \quad (80-5)$$

حل کامل برای تابع $V(R)$ در حالت ریشه های مختلط، بصورت زیر خواهد بود.

$$V(R) = [B_1 \cos(y \ln R) + B_2 \sin(y \ln R)]R^x + [D_1 + D_2 \ln R]R^{m+1} + D_3 R^{p-n+3} \quad (۸۱-۵)$$

با جایگزینی رابطه (۷۶-۵) در رابطه (۲۱-۵) و (۲۲-۵)، تنش ها بصورت روابط زیر بدست می آیند.

$$\sigma_r = \left\{ [((Ax+B)\cos(y \ln R) - A\sin(y \ln R))B_1 + ((Ax+B)\sin(y \ln R) + A\cos(y \ln R))B_2]R^x + (X \ln R + Y)R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} + E_i R^{p+2} [D_3((3-n+p)A + B)] \quad (۸۲-۵)$$

$$\sigma_\theta = \left\{ [((Bx+A)\cos(y \ln R) - B\sin(y \ln R))B_1 + ((Bx+A)\sin(y \ln R) + B\cos(y \ln R))B_2]R^x + (Z \ln R + P)R^{m+1} \right\} E_i R^{n-1} + E_i R^{p+2} [D_3((3-n+p)B + A)] \quad (۸۳-۵)$$

با توجه به شرایط مرزی تعریف شده، بصورت رابطه (۵۱-۵) و اعمال شرایط مرزی، در رابطه بدست آمده (۷۶-۵) ضرایب B_1 و B_2 بصورت رابطه زیر بدست می آیند.

$$B_1 = \frac{A y [E_i k^{m+1} (X \ln k + Y) + p_o k^{1-n}] - [(Ax + B)\sin(y \ln k) + A\cos(y \ln k)](E_i Y + p_i)k^x}{E_i D \sin(y \ln(k))k^x} + \frac{((n-p-3)A - B)[((Ax + B)\sin(y \ln k) + A\cos(y \ln k))k^x - k^{p-n+3}yA]}{E_i D k^x \sin(y \ln k)(FA - nB)} W$$

$$B_2 = \frac{[(Ax + B)\cos(y \ln k) - Ay \sin(y \ln k)](E_i Y + p_i)k^x - (Ax + B)[E_i k^{m+1} (X \ln k + Y) + p_o k^{1-n}]}{E_i D \sin(y \ln(k))k^x} + \frac{((n-p-3)A - B)[(Ax + B)k^{p-n+3} - ((Ax + B)\cos(y \ln k) + A\sin(y \ln k))k^x]}{E_i D k^x \sin(y \ln k)(FA - nB)} W$$

$$D = ((Ax + B)^2 + A^2 y^2)$$

با قرار دادن ضرایب بدست آمده روابط تنش و کرنش به صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_r = -\frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] + \left[\frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) \sin(y \ln R) + k^x Y \sin(y \ln \frac{k}{R})}{k^x \sin(y \ln k)} R^x + (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} + \frac{A(n-p-3) - B}{FA - nB} \left[\frac{(\sin(y \ln \frac{k}{R})k^x + \sin(y \ln R)k^{p-n+3})}{k^x \sin(y \ln k)} R^{n+x-1} - R^{p+2} \right] W \quad (۸۵-۵)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} = & -\frac{R^{(z+n-1)}}{D \sin(y \ln k)} \left\{ \left[(A^2 + B^2)x + AB(x^2 + y^2 + 1) \right] \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \\
& + \left. (A^2 - B^2)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} \\
& + \frac{E_i R^{n-1}}{D k^x \sin(y \ln k)} \left\{ \left[(A^2 + B^2)x + (x^2 + y^2 + 1)AB \right] \left[\sin(y \ln R) k^{m+1} (X \ln k + Y) - \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) k^x Y \right] \right. \\
& + \left. y(A^2 - B^2) \left[k^{m+1} (X \ln k + Y) \cos(y \ln R) - k^x Y \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) \right] \right\} R^x \\
& + (Z \ln R + P) E_i R^{m+n} + \frac{A(n-p-3) - B}{FA - nB} \left(\frac{[(A^2 + B^2)x + AB(x^2 + y^2 + 1)] \left[\sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) k^x + \sin(y \ln R) k^{p-n+3} \right] + \sin(y \ln R) k^{p-n+3}}{[(Ax + B)^2 + A^2 y^2] k^x \sin(y \ln k)} \right. \\
& \left. + \frac{(A^2 - B^2)y \left[\cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) k^x - k^{p-n+3} \cos(y \ln R) \right]}{[(Ax + B)^2 + A^2 y^2] k^x \sin(y \ln k)} R^{n+x-1} - \frac{B(n-p+3) - A}{FA - nB} R^{p+2} \right) W
\end{aligned} \tag{۸۶-۵}$$

$$\begin{aligned}
u_r = & -\frac{r_i R^x}{E_i D \sin(y \ln k)} \left\{ (Ax + B) \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \\
& + \left. Ay \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) R^{m+1} \\
& + \frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) [A y \cos(y \ln R) - (Ax + B) \sin(y \ln R)] - [(Ax + B) \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + A y \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right)] Y k^x}{D k^x \sin(y \ln k)} R^x \left. \right\} r_i
\end{aligned} \tag{۸۷-۵}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A(n-p-3) - B}{FA - nB} \left[\frac{[A y \sin(y \ln k) - (Ax + B) \cos(y \ln k)] k^x + (Ax + B) k^{p-n+3} \sin(y \ln R)}{E_i D k^x \sin(y \ln k)} \right. \\
& \left. + \frac{[(Ax + B) \sin(y \ln k) + A y \cos(y \ln k)] k^x - A y k^{p-n+3} \cos(y \ln R)}{E_i D k^x \sin(y \ln k)} R^x + \frac{R^{p-n+3}}{E_i (FA - nB)} \right] W r_i
\end{aligned}$$

روابط تنش در شرایط مختلف تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر بدست می آید.

الف) تنش صفحه ای

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & -\frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \\
& + \left[\frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) \sin(y \ln R) + k^x Y \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right)}{k^x \sin(y \ln k)} R^x + (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \\
& + \frac{(n-p-3-\nu)}{F-n\nu} \left[\frac{(\sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) k^{n+x-1} + \sin(y \ln R) k^{2+p})}{k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} R^{n+x-1} - R^{p+2} \right] W
\end{aligned} \tag{۸۸-۵}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} = & -\frac{R^{z+n-1}}{[(x+\nu)^2+y^2]\sin(y \ln k)} \left\{ \left[(1+\nu^2)x+\nu(x^2+y^2+1) \right] \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \\
& \left. + (1-\nu^2)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} \\
& + \frac{E_i R^{n-1}}{[(x+\nu)^2+y^2]k^x \sin(y \ln k)} \left[k^{m+1}(X \ln k + Y) [y(1-\nu^2)\cos(y \ln R) - ((1+\nu^2)x + (x^2+y^2+1)\nu)\sin(y \ln R)] \right. \\
& \left. - k^x Y [((1+\nu^2)x + (x^2+y^2+1)\nu)\sin(y \ln \frac{k}{R}) + y(1-\nu^2)\cos(y \ln \frac{k}{R})] \right] R^x + (Z \ln R + P) E_i R^{m+n} \\
& + \left[\frac{n-p-3-\nu}{F-n\nu} \left(\frac{[(\nu^2+1)x+\nu(x^2+y^2+1)](\sin(y \ln \frac{k}{R})k^{n+x-1} + \sin(y \ln R)k^{p+2})}{((x+\nu)^2+y^2)k^{(n+x-1)} \sin(y \ln k)} \right) \right. \\
& \left. \frac{(1-\nu^2)y[\cos(y \ln \frac{k}{R}) - k^{(p+2)}\cos(y \ln R)]}{((x+\nu)^2+y^2)k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} R^{(n+x-1)} + \frac{1+(p-n+3)\nu}{F-n\nu} R^{p+2} \right] W
\end{aligned} \tag{۸۹-۵}$$

$$\begin{aligned}
u_r = & -\frac{r_i R^x}{E_i [(x+\nu)^2+y^2]\sin(y \ln k)} \left\{ (x+\nu) \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \\
& \left. + y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) R^{m+1} \\
& + \frac{k^{m+1}(X \ln k + Y) [y \cos(y \ln R) - (x+\nu)\sin(y \ln R)] - [(x+\nu)\sin(y \ln \frac{k}{R}) + y \cos(y \ln \frac{k}{R})] Y k^x}{[(x+\nu)^2+y^2]k^x \sin(y \ln k)} R^x \left. \right\} r_i \\
& + \left[\frac{(n-p-3-\nu)}{F-n\nu} \left(\frac{[y \sin(y \ln k) - (x+\nu)\cos(y \ln k)]k^{n+x-1} + (x+\nu)k^{p+2} \sin(y \ln R)}{E_i [(x+\nu)^2+y^2]k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} \right) \right. \\
& \left. + \frac{[(x+\nu)\sin(y \ln k) + y \cos(y \ln k)]k^{n+x-1} - yk^{p+2} \cos(y \ln R)}{E_i [(x+\nu)^2+y^2]k^{n+x-1} \sin(y \ln k)} R^x + \frac{R^{3-n+p}}{E_i (F-n\nu)} (1-\nu^2) W \right] r_i
\end{aligned} \tag{۹۰-۵}$$

(ب) کرنش صفحه ای

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & -\frac{R^{(x+n-1)}}{\sin(y \ln k)} \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \\
& + \left[\frac{k^{m+1}(X \ln k + Y) \sin(y \ln R) + k^x Y \sin(y \ln \frac{k}{R})}{k^x \sin(y \ln k)} R^x + (X \ln R + Y) R^{m+1} \right] E_i R^{n-1} \\
& + \frac{(n-p-2)\nu + (3-n+p)}{F(\nu-1) + n\nu} \left[\frac{(\sin(y \ln \frac{k}{R}))k^{(n+x-1)} + \sin(y \ln R)k^{(2+p)}}{k^{(n+x-1)} \sin(y \ln k)} R^{(n+x-1)} - R^{p+2} \right] W
\end{aligned} \tag{۹۱-۵}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = & \frac{R^{z-m-1}}{[(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2} \sin(y \ln k) \left\{ \left[(1-\nu)^2 + \nu^2 \right] x + \nu(1-\nu)(x^2 + y^2 + 1) \right\} \\
& \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \\
& + \left\{ (1-\nu)^2 - \nu^2 \right\} y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \left. \vphantom{\frac{R^{z-m-1}}{[(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2}} \right\} \\
& + \frac{E_i R^{n-1}}{[(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2} \left\{ \right. \\
& k^{m+1} (X \ln k + Y) \left[y((1-\nu)^2 - \nu^2) \cos(y \ln R) - ((1-\nu)^2 + \nu^2)x + (x^2 + y^2 + 1)\nu(1-\nu) \right] \sin(y \ln R) \left. \vphantom{\frac{R^{z-m-1}}{[(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2}} \right\} \\
& - k^x Y \left\{ \left[((1-\nu)^2 + \nu^2)x + (x^2 + y^2 + 1)\nu(1-\nu) \right] \sin(y \ln \frac{k}{R}) + y((1-\nu)^2 - \nu^2) \cos(y \ln \frac{k}{R}) \right\} R^x \\
& + (Z \ln R + P) E_i R^{m+n} + \left[\frac{(n-p-3)\nu + (p-n+3)}{F(\nu-1) + n\nu} \left(\frac{[(x-1)^2 + y^2]\nu(1-\nu) + x}{[(x^2 + y^2)(\nu^2 - 2\nu + 1) + 2x\nu(1-\nu) + \nu^2]} k^{n+x-1} \sin(y \ln k) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(1-\nu)y \left[\cos(y \ln \frac{k}{R}) - k^{p+2} \cos(y \ln R) \right]}{[(x^2 + y^2)(\nu^2 - 2\nu + 1) + 2x\nu(1-\nu) + \nu^2]} k^{(n+x-1)} \sin(y \ln k) \right) R^{n+x-1} + \frac{(n-p-2)\nu - 1}{F(\nu-1) + n\nu} R^{p+2} \right] W \\
u_r = & \frac{r_i R^x}{E_i [(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2} \sin(y \ln k) \left\{ (1-\nu)x + \nu \left[P_i \sin\left(y \ln \frac{k}{R}\right) + k^{(1-x-n)} P_o \sin(y \ln R) \right] \right. \\
& \left. + (1-\nu)y \left[P_i \cos\left(y \ln \frac{k}{R}\right) - k^{(1-x-n)} P_o \cos(y \ln R) \right] \right\} + (D_1 + D_2 \ln R) R^{m+1} \\
& + \frac{k^{m+1} (X \ln k + Y) \left\{ (1-\nu)y \cos(y \ln R) - ((1-\nu)x + \nu) \sin(y \ln R) \right\} - \left\{ ((1-\nu)x + \nu) \sin(y \ln \frac{k}{R}) + (1-\nu)y \cos(y \ln \frac{k}{R}) \right\} Y k^x}{[(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2} k^x \sin(y \ln k) R^x \left. \vphantom{\frac{r_i R^x}{E_i [(1-\nu)x + \nu]^2 + (1-\nu)^2 y^2}} \right\} r_i \\
& + \left[\frac{((n-p-2)\nu + p - n + 3) \left(\frac{[(1-\nu)y \sin(y \ln k) - (x(1-\nu) - \nu) \cos(y \ln k)] k^{n+x-1} + (x(1-\nu) - \nu) k^{p+2} \sin(y \ln R)}{[(x^2 + y^2)(\nu^2 - 2\nu + 1) + 2x\nu(1-\nu) + \nu^2]} k^{n+x-1} \sin(y \ln k) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{[(1-\nu)y \cos(y \ln k) - (x(1-\nu) - \nu) \sin(y \ln k)] k^{n+x-1} - (1-\nu)y k^{p+2} \cos(y \ln R)}{[(x^2 + y^2)(\nu^2 - 2\nu + 1) + 2x\nu(1-\nu) + \nu^2]} k^{n+x-1} \sin(y \ln k) \right) R^x + R^{3-n+p} \right] \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i (F(\nu-1) + n\nu)} W r_i
\end{aligned} \tag{92-5}$$

۵-۵ حل عددی استوانه های ناهمگن

برای المان بندی استوانه، المان solid از نوع 82 8nod plane با گزینه axisymmetric انتخاب شده است. این المان ۴ ضلعی که در فصل ۲ بررسی شده است، برای مسائل تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سختی المان مذکور ۱۶×۱۶ می باشد. المان در نظر گرفته شده برای تحلیل توزیع حرارت در جداره استوانه مشابه فصل ۲ المان solid از نوع 77 8node plane با گزینه axisymmetric انتخاب شده است. در مدل سازی، یک استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جدار ثابت بطول $L = 800\text{mm}$ مدل شده است، که برای ایجاد خواص ناهمگنی که در اینجا، به صورت شعاعی در نظر گرفته شده است، استوانه ای را به ۲۰ لایه مساوی از مواد همگن به ضخامت هر کدام یک میلیمتر تقسیم شده است و بعد از بهینه سازی انجام گرفته در المان بندی مدل ایجاد شده المان هایی به ابعاد 1×1 میلیمتر در مش بندی مدل در نظر گرفته شد. خواص مدول الاستیک، ضریب انبساط حرارتی و چگالی در هر لایه ثابت در نظر گرفته شده است و خواص هر لایه به لایه دیگر با تابع توانی، بصورت رابطه (۵-۳۱) تغییر می کنند. سپس بارگذاری مورد نظر را، جهت شبیه سازی توزیع تنش و جابجایی شعاعی استوانه، به استوانه اعمال می کنیم.



شکل (۵-۱) مدل مقطع طولی استوانه FGM با تقسیم به ۲۰ لایه

در اینجا پس از شبیه سازی مدل، با شبیه سازی استوانه در حالت کرنش صفحه ای ابتدا با اعمال بار حرارتی به مدل و شبیه سازی آن، توزیع درجه حرارت را در جداره استوانه بدست آورده و پس از اعمال بارهای مکانیکی به مدل تنش ها و کرنش های شعاعی و مماسی و جابجایی شعاعی در استوانه را بدست می آوریم.

۵-۶ بررسی نتایج

برای مطالعه موردی و بررسی نمودارهای بدست آمده از نتایج عددی و تحلیلی، یک استوانه جدار کلفت تو خالی بشعاع داخلی $r_i = 40\text{mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60\text{mm}$ در نظر می گیریم. نسبت پواسون برابر ۰.۳ و مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و چگالی در سطح داخلی استوانه بترتیب برابر با $E_i = 200\text{Gpa}$ ، $\alpha_i = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ و $\rho_i = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ می باشند. برای ساده سازی تحلیل عددی و نتایج تحلیلی اندازه ضرایب توان در روابط (۵-۳۵) را برای E ، α و ρ یکسان در نظر می گیریم و استوانه تو خالی را تحت سه حالت بارگذاری زیر در نظر می گیریم.

۱۰- فشار یکنواخت داخلی $p_i = 80\text{MPa}$ ، دمای سطح داخل $T_i = 125^\circ\text{C}$ و سطح خارج

$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ برابر دمای محیط } T_o = 25^\circ\text{C} \text{ و دوران با سرعت زاویه ای ثابت}$$

۱۱- فشار یکنواخت خارجی $p_o = 80\text{MPa}$ ، دمای سطح داخل $T_i = 125^\circ\text{C}$ و سطح خارج

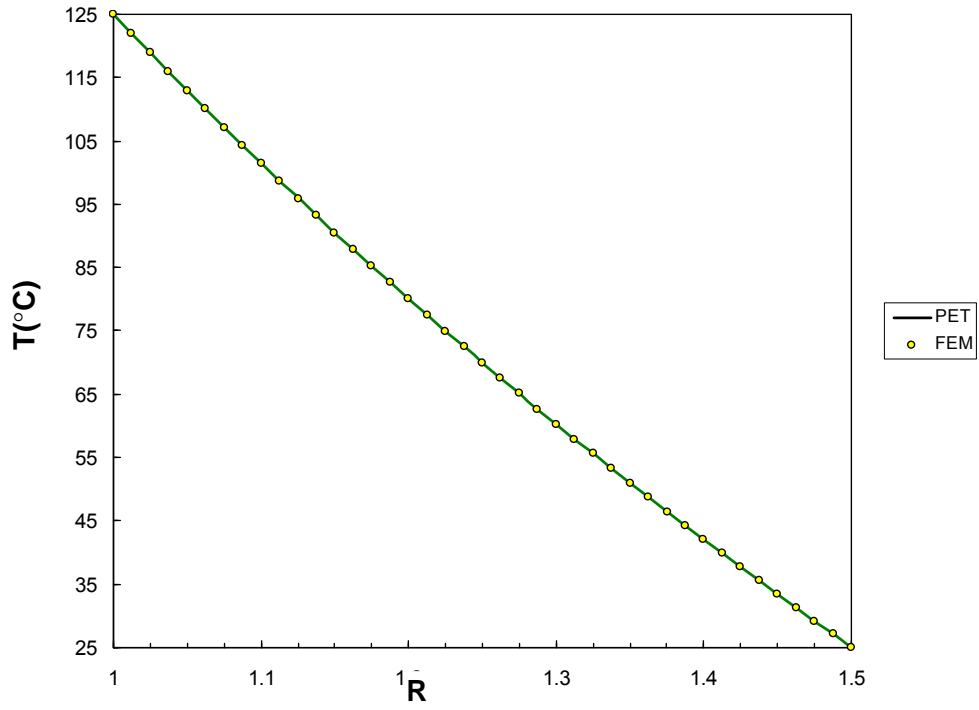
$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ برابر دمای محیط } T_o = 25^\circ\text{C} \text{ و دوران با سرعت زاویه ای ثابت}$$

۱۲- فشار یکنواخت داخلی و خارجی $p_i = p_o = 80\text{MPa}$ ، دمای سطح داخل

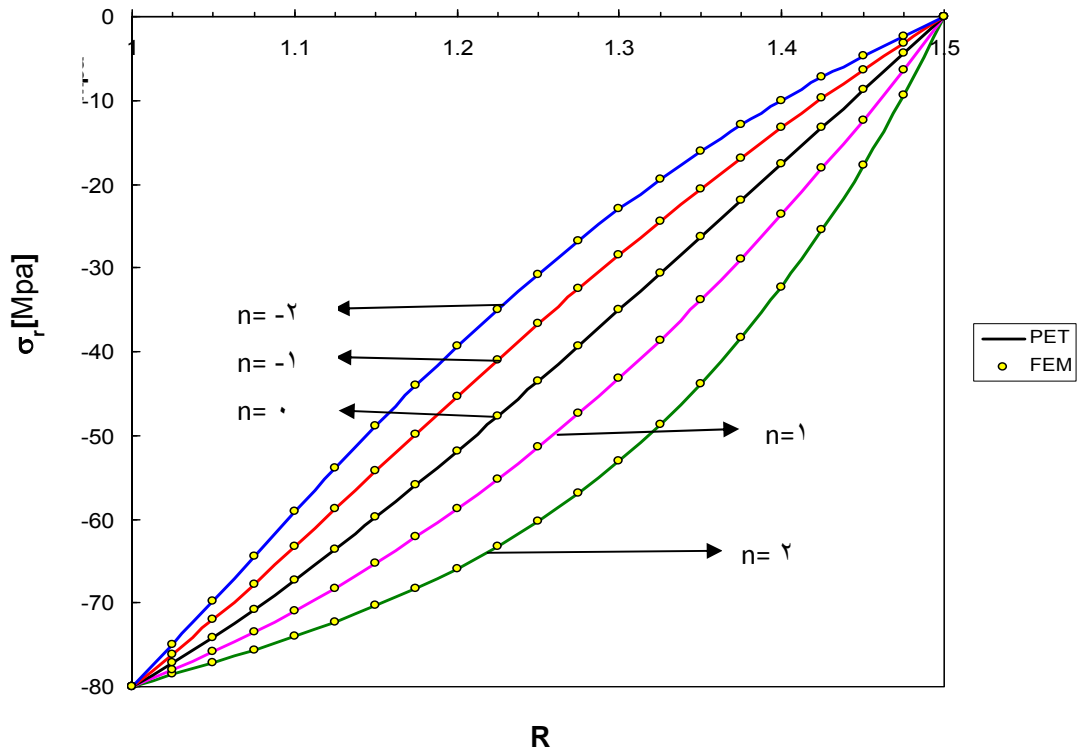
$T_i = 125^\circ\text{C}$ و سطح خارج برابر دمای محیط $T_o = 25^\circ\text{C}$ و دوران با سرعت زاویه ای ثابت

$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

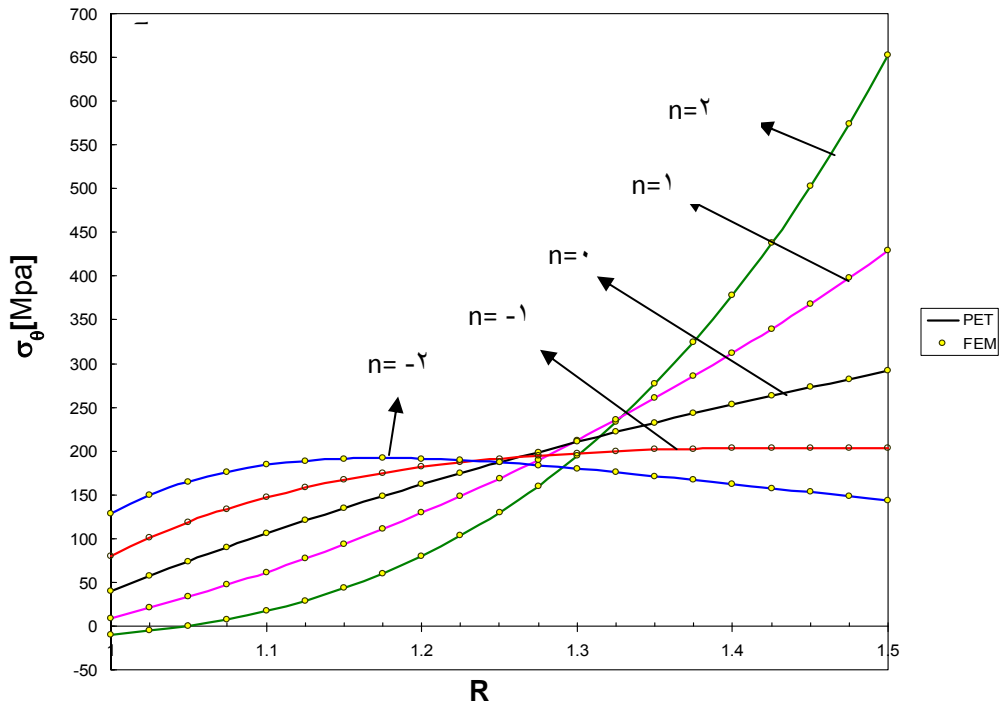
در شکل شماره (۵-۲) نمودار توزیع درجه حرارت در راستای شعاع استوانه در حالت یکنواخت نشان داده شده است. نمودارهای اشکال (۵-۳) تا (۵-۱۱) برای حالت کرنش صفحه ای در حالت بارگذاری تحت بار حرارتی توام با فشار و دوران، بصورت ۳ حالت ذکر شده در بالا رسم شده اند.



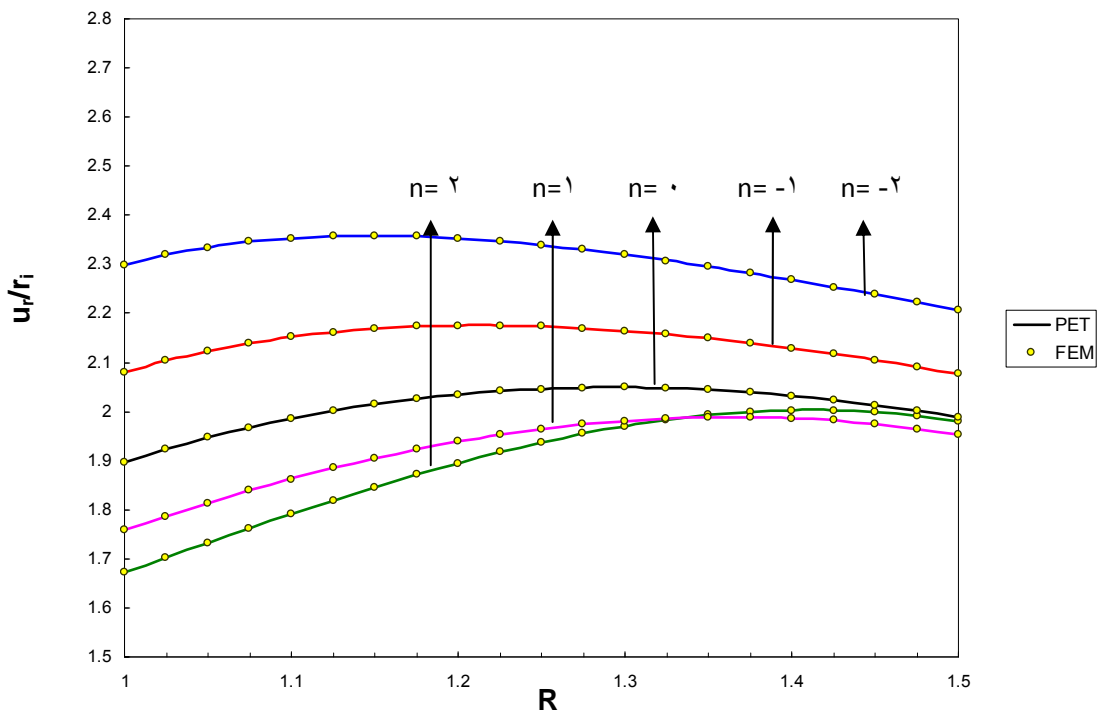
شکل (۵-۲) توزیع درجه حرارت در امتداد شعاع



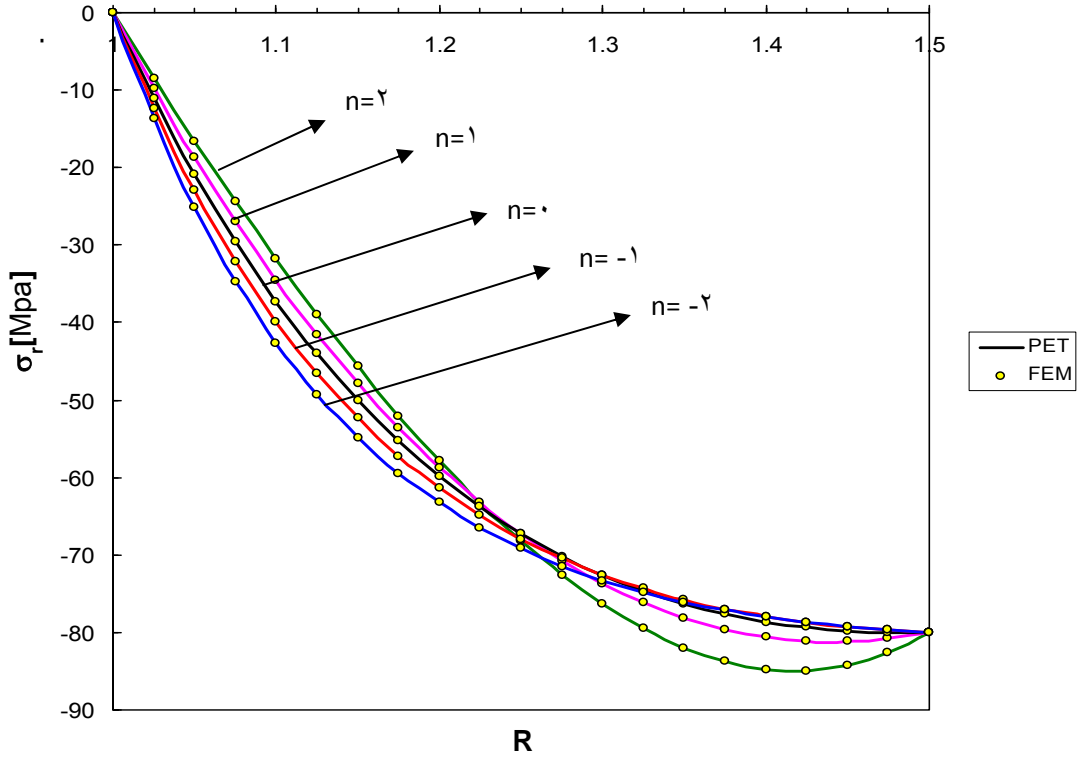
شکل (۵-۳): توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت



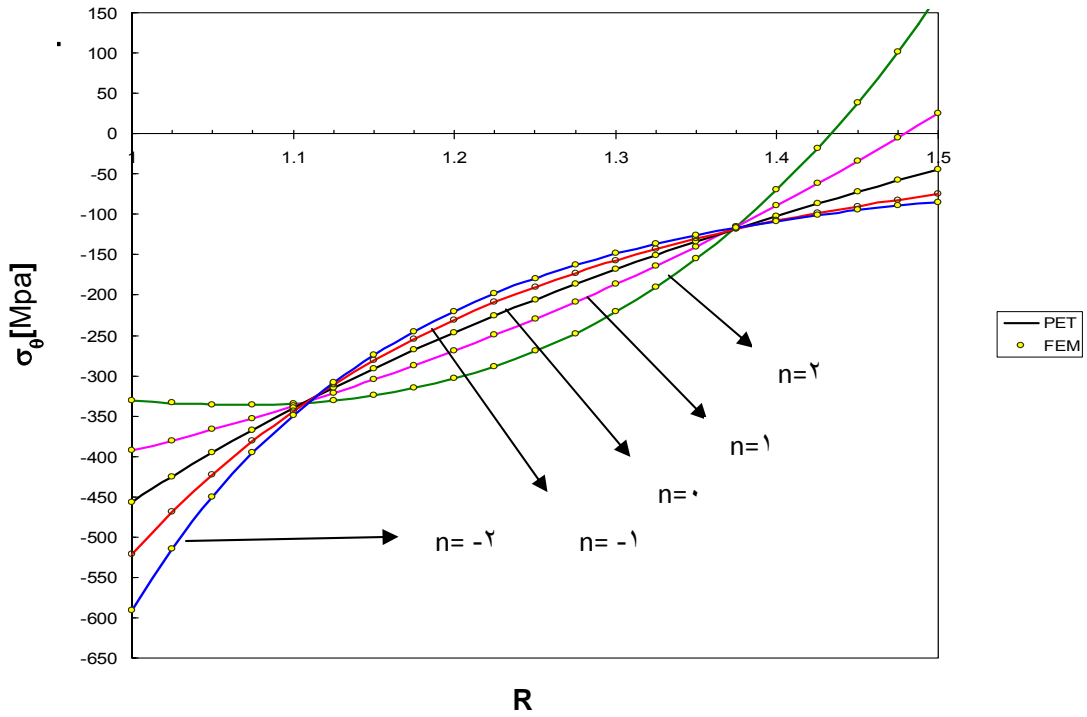
شکل (۴-۵): توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت



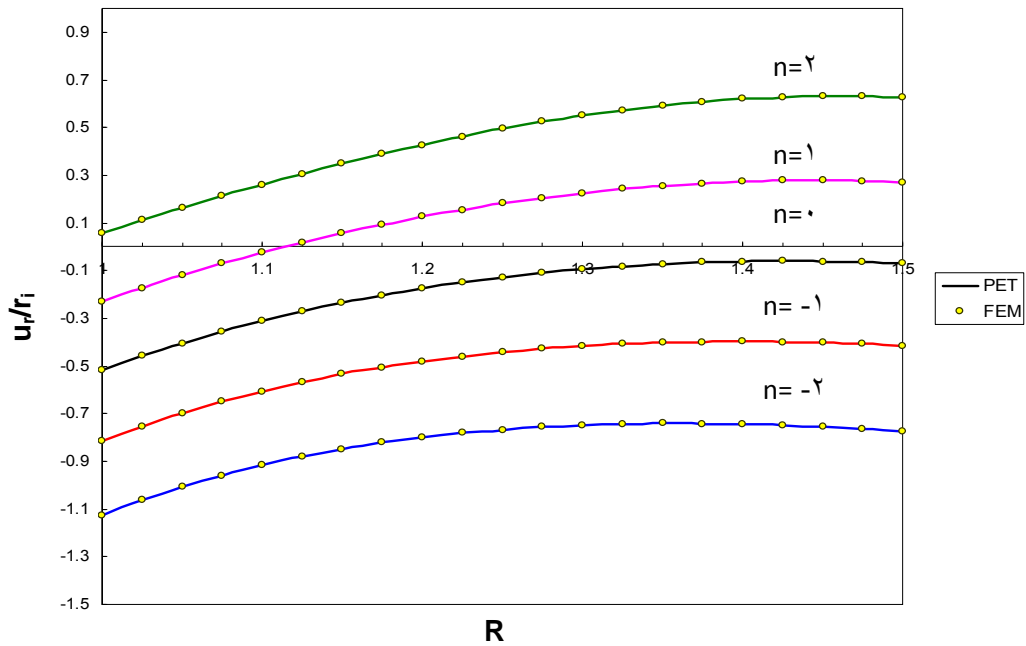
شکل (۵-۵): توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخلی و دوران با سرعت ثابت



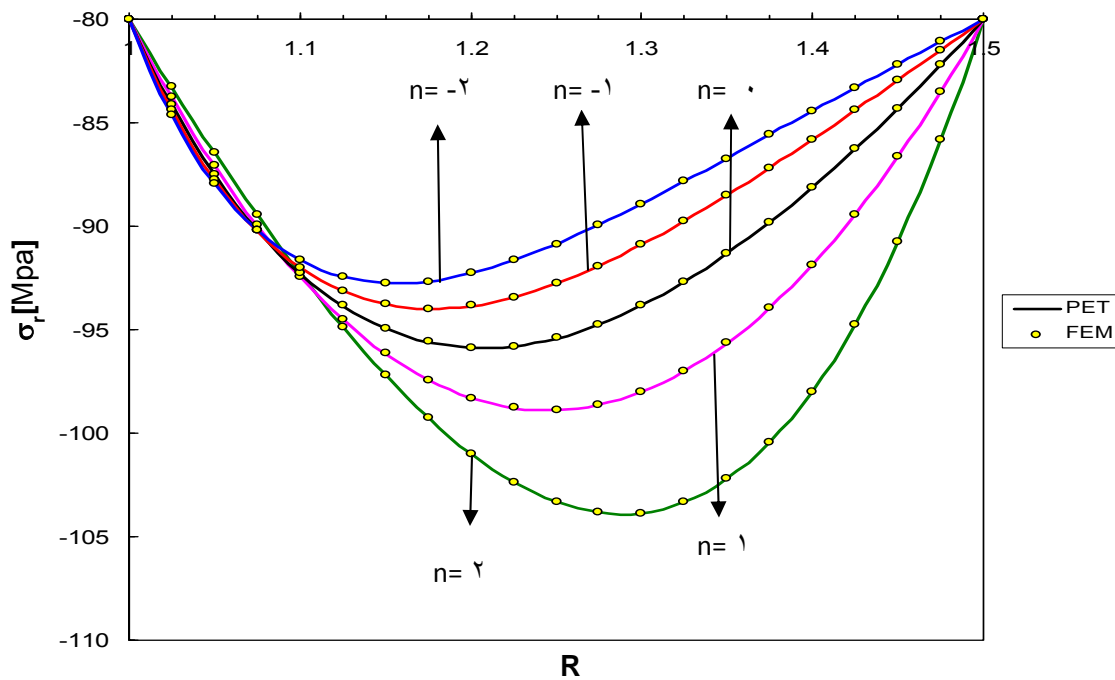
شکل (۵-۶): توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار خارجی و دوران با سرعت ثابت



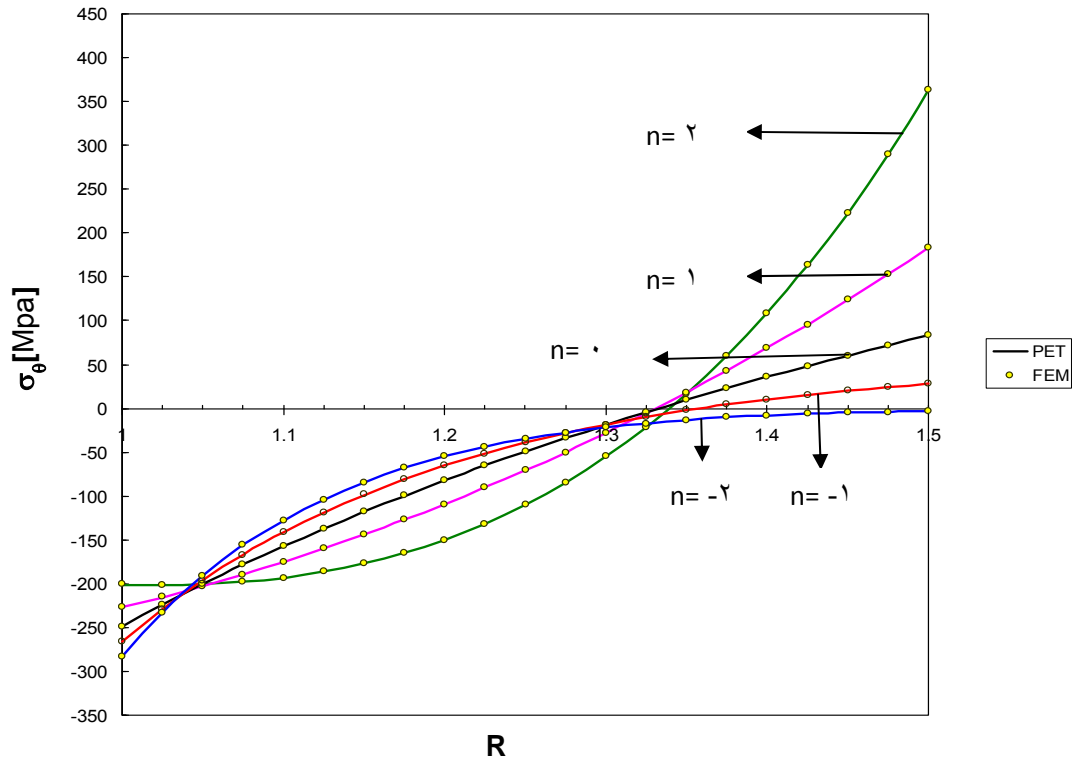
شکل (۵-۷): توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار خارجی و دوران با سرعت ثابت



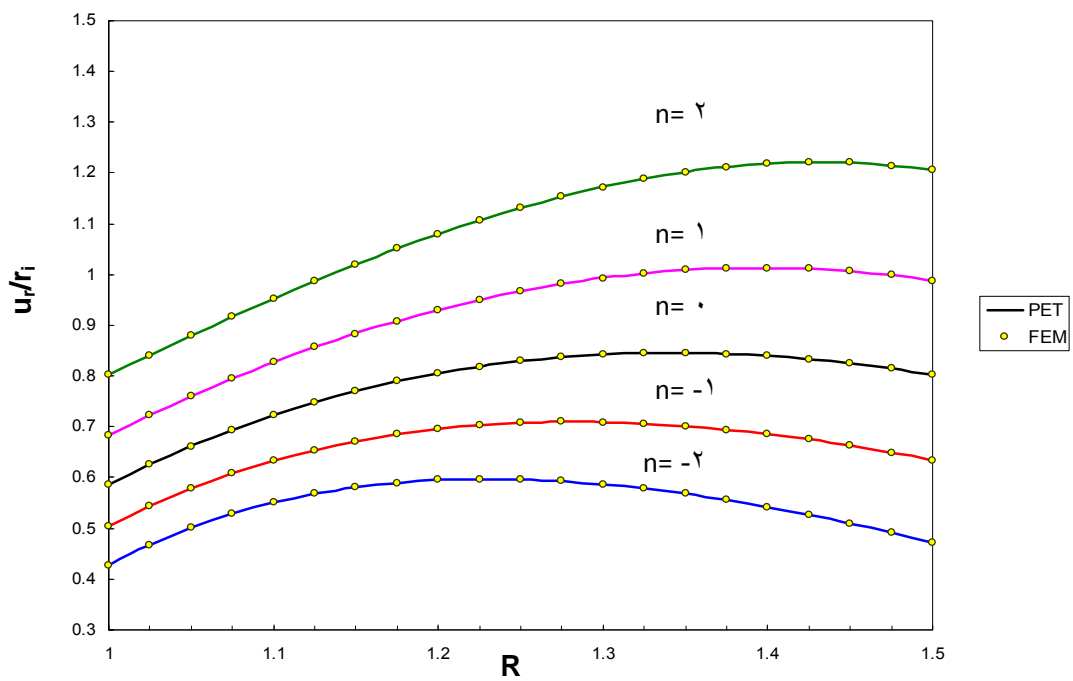
شکل (۵-۸): توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی، فشار خارجی و دوران با سرعت ثابت



شکل (۵-۹): توزیع تنش شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی، فشار داخل و خارج و دوران با سرعت ثابت



شکل (۵-۱۰): توزیع تنش مماسی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخل و خارج و دوران با سرعت ثابت



شکل (۵-۱۱): توزیع جابجایی شعاعی در استوانه ناهمگن تحت بار حرارتی داخلی ، فشار داخل و خارج و دوران با سرعت ثابت

۷-۵ نتیجه گیری

در شکل های ۳-۵، ۵-۶ و ۵-۹ تنش شعاعی در استوانه تحت حرارت داخلی، دوران با سرعت زاویه ای ثابت و نیز به ترتیب تحت بار فشاری داخلی، بار فشاری خارجی و بار فشاری داخلی و خارجی، در امتداد شعاع استوانه نشان داده شده است. دیده می شود که در صورت وجود بار فشار داخلی با افزایش ضریب توان در روابط خواص مواد، مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد در صورتی که در حالت بارگذاری دوم که بار مکانیکی اعمالی به صورت بار فشاری خارجی بر استوانه وارد می شود، بطور تقریبی تا اواسط ضخامت استوانه، با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی کاهش می یابد و از آن شعاع تا جداره خارجی استوانه با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد و در بارگذاری فشاری داخلی و خارجی استوانه این مقدار به تقریب یک پنجم ضخامت استوانه کاهش می یابد. بطوری که تا یک پنجم ضخامت استوانه با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی کاهش می یابد و از آن به بعد تا انتها با افزایش ضریب توان مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد. تنش مماسی استوانه جدار ضخیم در شکل های ۴-۵، ۵-۷ و ۵-۱۰ نشان داده شده اند. در حالت بار فشاری داخلی در اکثر شرایط تنش مماسی بصورت کششی اعمال می شود و به طور تقریبی تا اواسط ضخامت با افزایش ضریب توان تنش مماسی کاهش می یابد و از آن شعاع تا جداره بیرونی استوانه با افزایش ضریب توان تنش مماسی افزایش می یابد در صورتی که در حالت دوم بارگذاری (بار فشاری خارجی) تنش مماسی در اکثر موارد به صورت فشاری وارد می شود و در یک پنجم ابتدایی و انتهایی ضخامت استوانه با تغییرات ضریب توان در خواص مواد، تغییرات تنش در یک جهت هستند ولی در ضخامت ما بین این دو، جهت تغییرات بالعکس می باشد و با افزایش ضریب توان اندازه تنش مماسی افزایش می یابد و در حالت سوم بارگذاری (بار فشاری داخلی و خارجی) در یک سوم ضخامت بیرونی استوانه تنش مماسی کششی و تا شعاع داخلی استوانه تنش مماسی بصورت فشاری است. در این حالت نیز در یک سوم انتهایی و یک دهم ابتدایی ضخامت استوانه با تغییرات ضریب توان در خواص مواد، تغییرات تنش در یک جهت هستند ولی در ضخامت ما بین این دو تغییرات تنش برعکس تغییرات تنش در آنها می باشد و با افزایش ضریب توان اندازه تنش مماسی افزایش می یابد. جابجایی شعاعی استوانه جدار ضخیم FGM، تحت بار گذاری های مورد بحث نیز در شکل های ۵-۵، ۵-۸ و ۵-۱۱ نشان داده شده اند. به نظر می رسد در بارگذاری دورانی و حرارتی توام با بار فشاری داخلی تمام جابجایی ها در بازه مثبت واقع می شوند و جابجایی شعاعی با افزایش ضریب توان، در بخش عمده ای از ضخامت داخلی استوانه کاهش می یابد در حالی که از آن ضخامت تا جداره بیرونی استوانه با افزایش ضریب توان تا صفر، این روند ادامه دارد ولی با ادامه افزایش ضریب توان به نظر می رسد که این روند عمومی حفظ نخواهد شد. در حالی که در صورت اعمال بار فشاری خارجی جابجایی شعاعی برای ضریب های توان متفاوت هم در بازه مثبت و هم در بازه منفی قرار می گیرند و با افزایش ضریب توان، از میزان جابجایی منفی آن کاسته و به جابجایی مثبت

خواهد رسید و در حالت سوم بارگذاری مانند بارگذاری حالت اول جابجایی‌ها دوباره در بازه مثبت واقع می‌شوند، ولی در این حالت متفاوت با حالت بارگذاری فشاری داخلی با افزایش ضریب توان، جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد و این روند در همه جا رعایت می‌شود.

فصل ۶

جمع بندی و نتیجه گیری

۶-۱ مقدمه

استوانه های کلفت متقارن محوری، به دلیل مقاومت بالا در برابر فشارهای داخلی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و به طور کلی مقاومت مطلوب مکانیکی و حرارتی، کاربرد فراوانی در صنعت پیدا کرده اند. دست یابی به روش های مختلف تحلیل این گروه از پوسته ها با تغییرات در هندسه، ماده و بارگذاری های متنوع، مورد علاقه ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران بوده و همچنان می باشد. در این رساله، روش های مختلف تحلیل استوانه های جدار کلفت متقارن محوری از مواد ناهمگن با ضخامت ثابت، تحت فشار داخلی و خارجی، بار حرارتی و دوران با سرعت زاویه ای ثابت، بررسی و راه حل های تحلیلی و عددی برای آنها ارایه شده است. در این فصل، کارهای انجام شده، جمع بندی و نتیجه گیری و پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار نیز ارایه می شود.

۶-۲ جمع بندی و نتیجه گیری

به طور کلی در تحلیل پوسته های جدار کلفت متقارن محوری، ۱۰ مجهول (۴ مؤلفه ی تنش، ۴ مؤلفه ی کرنش و ۲ مؤلفه ی جابه جایی) و ۱۰ معادله (۲ معادله ی تعادل، ۴ معادله ی سینماتیک و ۴ معادله ی رفتاری) داریم که حل همزمان آنها ناشدنی می باشد. در موقعیتی که تنش برشی و کرنش برشی صفر شود، تعداد مجهولات به ۸ می رسد (۳ مؤلفه ی تنش، ۳ مؤلفه ی کرنش و ۲ مؤلفه ی جابه جایی) که ۸ معادله (۲ معادله ی تعادل، ۳ معادله ی سینماتیک و ۳ معادله ی جابه جایی) برای حل استوانه های کلفت متقارن محوری نیاز است. عموماً این وضعیت، الاستیسیته ی دو بعدی است که الاستیسیته ی مستوی نامیده می شود.

حالت اول: تحلیل الاستیک پوسته های استوانه ای FGM

اگر فشار یکنواخت و شرایط مرزی به گونه ای باشد که استوانه در وضعیت های تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای قرار گیرد، مسأله در حوزه ی الاستیسیته ی دو بعدی تحلیل می شود. روش تحلیل، تئوری الاستیسیته ی مستوی (PET) با استفاده از معادله ی لامه است. در این حالت معادله حاکم بر استوانه های کلفت از مواد ناهمگن، یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب متغیر از نوع اوپلر-کوشی بر حسب عبارت بی بعد جابه جایی شعاعی است (رابطه ۲-۳۴).

رابطه ذکر شده دارای ریشه های حقیقی، ریشه های مضاعف و ریشه های مختلط است. برای حالت ریشه های حقیقی نتایج حل تحلیلی با حل عددی کاملاً منطبق بود. برای ریشه های مضاعف و مختلط، به دلیل آنکه قابلیت مدل سازی وجود ندارد تنها راه حل تحلیلی ارائه شده است.

حالت دوم: تحلیل ترموالاستیک پوسته های استوانه ای FGM

در این حالت از تحلیل، اگر فشار و حرارت یکنواخت و شرایط مرزی به گونه ای باشد که استوانه در وضعیت های تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای قرار گیرد، مسأله در حوزه ی الاستیسیته دو بعدی تحلیل خواهد شد. روش تحلیل در این حالت نیز، تئوری الاستیسیته مستوی (PET) با

استفاده از معادله لانه می باشد. معادله حاکم بر سیستم در این حالت معادله (۳-۳۹) می باشد. این معادله دارای ریشه های حقیقی، ریشه های مضاعف و ریشه های مختلط است. در این حالت، ریشه حقیقی با استفاده از دو روش تحلیلی و عددی محاسبه شد که انطباق خوبی با هم داشتند. برای ریشه های مضاعف و مختلط نیز تنها حل تحلیل ارائه گردید. نتایج این بررسی نشان داد که قضیه جمع آثار برقرار می باشد (بدان معنی که نتایج حاصل از جمع تحلیل ناشی از بارهای مکانیکی و حرارتی به صورت جداگانه با نتایج حاصل از تحلیل ترموالاستیک مطابق است).

حالت سوم: تحلیل الاستیک پوسته های استوانه ای چرخان FGM

مشابه شرایط بیان شده، این مسأله نیز در حوزه الاستیسیته دو بعدی تحلیل می شود. روش تحلیل، تئوری الاستیسیته مستوی (PET) با استفاده از معادله ی لانه خواهد بود که معادله حاکم بر سیستم معادله (۴-۳۴) خواهد بود.

ریشه های حقیقی، مضاعف و مختلط برای این معادله به دست آمد که روش حل آن به تفصیل در فصل (۴) بیان شده است. در این معادله نیز نتایج ریشه حقیقی حاصل از روش های تحلیلی و عددی با یکدیگر مطابق بوده است. این بررسی نشان داد که نتایج حاصل از جمع تحلیل بارگذاری فشاری و چرخشی به صورت جداگانه با نتایج حاصل از تحلیل توأم برابر است.

حالت چهارم: تحلیل ترموالاستیک پوسته های استوانه ای چرخان FGM

مشابه حالات قبل، از آنجا که فشار یکنواخت و شرایط مرزی به گونه ای است که استوانه در شرایط تنش و کرنش صفحه ای قرار می گیرد، مسأله در حوزه ی الاستیسیته ی دو بعدی بیان می شود. روش تحلیل، تئوری الاستیسیته ی مستوی (PET) با استفاده از معادله ی لانه است خواهد بود که معادله ی حاکم بر آن به صورت معادله (۵-۳۳) بیان می شود.

معادله ی بالا دارای ریشه های حقیقی، ریشه های مضاعف و ریشه های مختلط است که روش حل آن به تفصیل در فصل (۵) بیان شده است. در این شرایط به دلیل عدم قابلیت مدل سازی ریشه های مضاعف و مختلط، تنها به حل عددی ریشه های حقیقی پرداخته شد. نتایج بررسی های انجام شده نشان داد که از جمع تحلیل های بارگذاری فشاری، حرارتی و چرخشی به صورت جداگانه تحلیل ترموالاستیکی چرخشی حاصل خواهد شد (یعنی جمع آثار در این حالت نیز برقرار است).

نتایج انجام شده در سه حوزه بارگذاری فشاری، حرارتی و دورانی نشان می دهد که بر حسب بار اعمالی فشاری (داخلی، خارجی یا داخلی و خارجی) با انتخاب ضریب توان در روابط توزیع خواص مواد می توان تنش مماسی را که دارای مقادیر تنش بالاتری است بهبود بخشید. به این صورت که در هنگام وجود بار فشاری داخلی اگر $n = -2$ باشد (یعنی مقدار خواص از لایه داخل به خارج کاهش یابد) تنش مماسی دارای مقادیر کمتری خواهد بود و در هنگام اعمال بار فشاری خارجی اگر $n = 2$ باشد (یعنی مقدار خواص از لایه داخل به خارج افزایش یابد) تنش مماسی دارای مقادیر

کمتری خواهد بود. این در حالی است که در هنگام اعمال بار فشاری داخلی و خارجی، حداکثر مقدار تنش مماسی در ضرایب توان n مختلف دارای مقادیر تقریباً یکسانی هستند.

۳-۶ پیشنهادها

با توجه به شرایط و تحلیل های انجام شده جهت تکمیل این بررسی ها و تعمیم شرایط مختلف پیشنهادات زیر ارائه می گردد:

- انتقال حرارت در این پایان نامه به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است، با در نظر گرفتن انتقال حرارت در حالت گذرا می توان نتایج واقع بینانه تری ارائه داد.
- با در نظر گرفتن مقطع استوانه (که در اینجا دایره در نظر گرفته شده است)، به صورت بیضی یا مقاطع دلخواه دیگر، بررسی های جامع تری روی این موضوع قابل انجام است.
- بررسی های انجام شده در حالت استاتیکی بوده، این بررسی ها با در نظر گرفتن حالت دینامیکی نتایج کامل تری را ارائه خواهد نمود.
- شرایط جداره متغیر برای استوانه نیز قابل بررسی است.
- با بررسی حالت گذرا برای بار فشاری در استوانه یعنی بار متغیر در طول استوانه مانند حالتی از بار اعمالی ایجاد شده در لوله های توپ و خمپاره اندازه ها، می تواند یک بررسی واقعی و کاربردی در این زمینه باشد.

مراجع

- [۱] یوگورال ای. سی. (۱۳۷۵) تنش در ورق ها و پوسته ها، ترجمه ی غلامحسین رحیمی، ج اول، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران.
- [2] Timoshenko S.P. & Goodier J.N.(1983); **Theory of Elasticity**, 3rd ed., McGraw- Hill, New York.
- [3] Greenspon J.E.(1960); **Vibration of a thick-walled cylindrical shell**, comparison of the exact theory with approximate theories, J. Acoustical Sci. America; 32(5), 571-578.
- [4] Timoshenko S.P.(1976); **Strength of Materials: Part II(Advanced Theory and Problems)**, 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- [5] Lekhnitskii S.G.(1981); **Theory of Elasticity of An Anisotropic Body**, Mir Pub., Moscow.
- [6] Koizumi M. & Niino M.(1995); **Overview of FGM research in Japan**, MRS Bulletin, 20, 19-21.
- [7] Koizumi M.(1997); **FGM activities in Japan, Composites: Part B(Engineering)**, 28B, 1-4.
- [8] Obata Y. & Noda N.(1994); **Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material**, J. Thermal Stresses, 17, 471-487.
- [9] Horgan C.O. & Chan A.M.(1999); **The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials**, J. Elasticity, 55, 43-59.13 9
- [10] Yang Y.Y.(2000); **Time-dependet stress analysis in functionally graded materials**, Int. J. Solids and Struc., 37, 7593-7608.
- [11] Tutunkui N. & Ozturk M.(2001); **Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels**, J. Composites: Part B(Engineering), 32B, 683-686.

- [12] Tarn J.Q.(2001); **Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads**, Int. J. Solids and Struc., 38, 9189-8206.
- [13] Jabbari M. & Sohrabpour S. & Eslami M.R.(2002); **Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads**, Int. J. Pressure Vessel and Piping, 79, 493-497.
- [14] Eraslan A.N. & Akis T.(2006); **On the plain strain and plane stress solution of functionally graded solid shaft and solid disk problems**, Acta Mechanica, 181, 43-63.
- [15] Hongjun X. & Zhifei S. & Taotao Z.(2006); **Elastic analysis of heterogeneous elastic hollow cylinders**, J. Composite Struc., 79, 140-147.
- [16] Praveen G.N. & Reddy J.N.(1998); **Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded Ceramic-Metal plates**, Int. J. Solids and Struc. 35, 4457-4476.
- [17] Eipakchi, H.R., Rahimi, G.H., Khadem, S.E. (2003). **Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to nonuniform internal pressure. -Structural Engineering and Mechanics**, v.16, No.6, p.731-748.
- [18] Fukui Y. & Yamanakha N.(1992); **Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded materials subjected to internal pressure**, JSME, Ser. I, 35(4), 891-900.
- [19] Horgan C.O. & Chan A.M.(1999); **The stress response of functionally graded isotropic linearly rotating disks**, J. Elasticity, 55, 219-230.
- [20] Jabbari M. & Sohrabpour S. & Eslami M.R.(2003); **General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads**, J. Appl. Mech., 70, 111-118.
- [21] Zhifei S. & Taotao Z. & Hongjun X.(2007); **Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders**, J. Composite Struc., 79, 140-147.

[22] Tutunkui N.(2007); **Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially varying properties**, J. Eng. Struc., 29, 2032-2035.

[۲۳] قناد مهدی و رحیمی غلامحسین و اسماعیل زاده خادم سیامک(۱۳۸۷): **حل عمومی استوانه های جدار کلفت ناهمگن FG بر مبنای تئوری الاستیسیته مستوی**، مجله فنی مهندسی مدرّس.

[24] Simkins T.E. & Pflagl G.A. & Stilson E.G.(1993); **Dynamic strains in a 60 mm gun tubes: An experimental study**; J. Sound and Vibrations, 168(3), 549-557.

[25] Kang J.H. & Leissa A.W.(2001); **Three-Dimensional field equations of motion and energy functionals for thick shells of revolution with arbitrary curvature and variable thickness**, J. Appl. Mech., 68, 953-954.

[26] Dai H.L. & Fu Y.M. & Dong Z.M.(2006); **Exact solutions for functionally graded pressure vessels in a uniform magnetic field**, Int. J. Solids and Struc., 43, 5570-5580.

[27] Eraslan A.N. & Akis T.(2006); **Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube**, Int. J. Pressure Vessels & Piping, 83, 635-644.

[28] Ghannad M., Zamani Nejad M. (2010). **Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends**, ISSN. MECHANIKA Nr.5 (85) 1392 – 1207.

[۲۹] قناد مهدی، (۱۳۸۷)؛ **تحلیل الاستیک استوانه های جدار ضخیم با ضخامت متغیر از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی**، رساله دکتری، دانشگاه تربیت مدرّس.

[30] Tutunkui N., Temel B. (2009) **A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres**, Composite Struc 91 pp 385–390

[31] Rahimi G.H., Zamani nejad M.(2008). **Exact solutions for Thermal Stresses in a Rotating Thick-Walled Cylinder of Functionally Graded Materials**, j. Applied Sciences 8 (18) pp 3267-3272.

[32] Arefi M. and Rahimi G.H. (2010) **Thermo elastic analysis of a functionally graded cylinder under internal pressure using first order shear deformation theory**, Scientific Research and Essays Vol. 5(12), pp. 1442-1454, 18 June.

Abstract

Cylindrical cortexes are of the most frequent and significant types of structures found in surrounding environment. Generally, cortexes are limber material usually considered as the most mature structure for their quality in behavior and resistance against the loading and twist. Functional graded material (FGM) gained the significant attention of scientist for their high strength against the high temperature gradient and mechanical loading as well as decreasing the stress concentration on solid material. Hence, the aim of this study is to investigate and modeling the associated stress and displacement of thick wall heterogeneous cylinder under compound mechanical and thermal loading. This study was carried out in four different statuses.

- In the first, obtained results of compression loading have lonely studied for the thick wall cylinder using elasticity theory. Governing equation in this state had three possible roots: real, imaginary and binary. Comparison of the numerical modeling results with that of the analytical shows that there is an acceptable agreement between the outcomes of these two methods.

- In the second status, thermal loading condition has been analysis using elasticity theory for giving more information about this condition. Obtained results implied that overlaying concept governs the whole condition. In addition, if the associated results of stress analysis, compression and thermal displacements has summed together, stress analysis and displacement of thermo-elastic condition will be obtained.

- In the third, compression and rotation loading condition was analysis on the thick wall cylinder using elasticity theory. Solving the governing equation results in finding that sum theory is completely true in this condition either.

- Lastly, compression, rotation and thermal loading condition applied on the thick wall cylinder and elasticity theory used for dealing with the outcomes. Regarding to what we have reached, sum theory comes true in this condition as same as the others.



Shahrood
University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Master of Science thesis

**Thermo-elastic analysis of rotating thick wall cylinder made by
FG material under internal and external pressure**

By:
Mehdi Buzhmehrani

Supervisor:
Dr. Mehdi Ghannad

July 2011