بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مکانیک و مکاترونیک

گروه مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

بهبود روش ماتریس انتقال جهت کنترل برخط بازوی انعطاف‌پذیر ربات

نگارنده: مهدی غلامپور

استاد راهنما:

دکتر مهدی بامداد

شهریور ۱۳۹۷

شماره: ۱۳۱/ ۲۹۷/م
تاریخ: ۹۷/۷/۱۶

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **آقای مهدی غلامپور** با شماره دانشجویی **۹۳۱۲۶۶۴** رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **مکاترونیک** تحت عنوان **بهبود روش ماتریس انتقال جهت کنترل برخط بازوی انعطاف پذیر ربات** که در تاریخ **۹۷/۰۶/۲۰** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با امتیاز ...۱۴/۷... **درجه** ...متوسط...) ☑ **مردود** ☐

نوع تحقیق: نظری ■ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر مهدی بامداد	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	-	-	-
۳- استاد مشاور	-	-	-
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر حبیب احمدی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مجتبی واردی کولایی	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر مصطفی نظری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمدمحسن شاه‌مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

۳

تشکر و قدردانی

از همه کسانی که در راه علم آموزی من کوشیدند.

تعهد نامه

اینجانب مهدی غلامپور دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکاترونیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه با عنوان بهبود روش ماتریس انتقال در کنترل برخط بازوی منعطف ربات تحت راهنمائی دکتر مهدی بامداد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

چکیده

در گستره‌ی امروزی بکارگیری ربات‌ها، بررسی ارتعاشات بازوهای منعطف بکاررفته در این ربات‌ها به‌منظور کنترل برخط آنها اهمیت یافته‌اند. سیستم دینامیکی انعطاف‌پذیر پیشنهادی برای مدل‌سازی شامل یک تیر است که در تکیه‌گاه خود به یک موتور الکتریکی متصل است. با روشن‌نمودن موتور، تیر شروع به دوران نموده و به‌موجب آغاز ناگهانی شتاب‌دارحرکت، در آن ارتعاش ایجاد می‌گردد. از آنجا که روش‌های اجزا محدود غیرخطی و روش‌های عددی مستلزم بالا رفتن حجم محاسبات و کند شدن روند کنترل بازوی ربات می‌گردند، در این پایان نامه به معرفی روش ماتریس انتقال در راستای کنترل بازوی ربات پرداخته شده است. با فرض منعطف بودن تیر، سیستم به تعدادی لینک صلب با قابلیت دوران در حد فاصل هر دو لینک شبیه‌سازی گردیده است. روشهای هوبولت، فاکس ـ اویلر، نیومارک ـ بتا و ویلسون ـ تتا روش‌های کلاسیک و قدیمی در انتگرال‌گیری عددی هستند که به بررسی هر کدام پرداخته می‌شود. در این چهار روش کلاسیک برای خطی سازی مؤلفه‌های سرعت و شتاب و دیگر عبارت‌های غیرخطی از تقریب‌های متفاوتی استفاده شده است. روشی بهتر خواهد بود که باوجود کمتر بودن نسبی محاسبات، دقت قابل‌قبولی داشته باشد. در پایان روشی پیشنهادی ارائه گردیده است.

لغات کلیدی : بازوی انعطاف‌پذیر ربات، ماتریس انتقال، انتگرال‌گیری عددی

فهرست

فصل اول : مقدمه ۱

۱-۱- مقدمه‌ای بر تیر انعطاف‌پذیر ۲

۱-۲- سابقه ۴

۱-۳- روش تحقیق........ ۵

۱-۴- اهداف تحقیق ۶

۱-۵- نوآوری ۶

فصل دوم : روش ماتریس انتقال ۷

۲-۱- بردار حالت........ ۸

۲-۲- آشنایی با ماتریس انتقال ۸

۲-۳- خطی سازی و روش‌های عددی........ ۱۱

فصل سوم : روش ماتریس انتقال گسسته........ ۲۷

۳-۱- روش ماتریس انتقال گسسته برای یک سیستم یک درجه آزادی........ ۲۸

۳-۲- انتگرال‌گیری عددی و روش‌ها ۳۴

۳-۲-۱- روش صریح ۳۴

۳-۲-۲- روش ضمنی........ ۳۵

۳-۳- روش‌های انتگرال‌گیری عددی در روش ماتریس انتقال گسسته ۳۶

۳-۳-۱- روش فاکس _ اویلر[۱۲]........ ۳۶

۳-۳-۲ روش نیومارک بتا[۱۲]........ ۳۹

۳-۳-۳- روش ویلسون تتا[۱۲] ۴۲

۳-۳-۴- روش هوبولت[۱۲] ۴۴

۳-۳-۵- روش پیشنهادی[۱۳]........ ۴۷

فصل چهار : نتیجه گیری ۵۱

منابع ۵۸

فهرست شکل‌ها

شکل(۲-۱): تقسیم‌نمودن لینک به مجموعه‌ای از جرم و فنر ۸

شکل(۲-۲) : موقعیت مرکز جرم ۹

شکل(۲-۴) : سیستم یک درجه آزادی شامل جرم، فنرپیچشی و ممان اینرسی ۱۶

شکل (۲-۵) : شکل گسترش یافته‌ی سیستم یک درجه آزادی ۱۷

شکل (۲-۶) : یک سیستم دو درجه آزادی شامل جرم، فنر و دمپر با گشتاورهای خارجی ۲۰

شکل(۲-۷) : شکل گسترش‌یافته‌ی سیستم دو درجه آزادی ۲۰

شکل (۳-۱) : نمودار روش فاکس-اویلر ۳۸

شکل(۳-۲) : نمودار روش نیومارک بتا ۴۱

شکل(۳-۳): تعریف شتاب در روش ویلسون تتا ۴۲

شکل(۳-۴) : نمودار روش ویلسون تتا ۴۴

شکل(۳-۵) : نمودار روش هوبولت ۴۶

شکل(۳-۶) : نمودار روش نوین ۵۰

شکل (۴-۱): نمودار روش‌های کلاسیک در حالت دو درجه آزادی ۵۳

شکل (۴-۲): نمودار روش نوین در حالت دو درجه آزادی ۵۴

شکل(۴-۳) : نمودارهای حالت ده درجه آزادی ۵۷

فهرست جدول‌ها

جدول (۳-۱) : ضرایب روش فاکس اویلر ۳۷

جدول(۳-۲) : مقادیر اعمال شده در نمونه ۳۸

جدول(۳-۳) : ضرایب روش نیومارک بتا ۴۰

جدول (۳-۴) : ضرایب روش ویلسون تتا ۴۳

جدول (۳-۵) : ضرایب روش هوبولت در $i=1$ ۴۵

جدول(۳-۶) : ضرایب روش هوبولت در $i=2$ ۴۵

جدول (۳-۷) : ضرایب روش هوبولت در $i\geq 3$ ۴۶

جدول(۳-۸) : ضرایب روش پیشنهادی ۴۹

نمودار این روش بدین ترتیب به‌دست می‌آید : ۵۰

جدول(۴-۱): مقادیر اعمال شده در نمونه آزمایشی ۵۴

جدول(۴-۲): زمان انجام محاسبات و نسبت آنها در حالت دو و ده درجه آزادی ۵۵

فصل اول : مقدمه

۱-۱- مقدمه‌ای بر تیر انعطاف‌پذیر

امروزه تیرهای انعطاف‌پذیر در بسیاری از سازه‌ها مانند بازوهای ربات کاربرد گسترده‌ای یافته و بررسی ارتعاشات این‌سازه‌ها و کنترل آنها اهمیت بالایی پیدا نموده‌اند. مدل‌سازی‌تیرها با دامنه‌ی تغییرشکل زیاد بطورمعمول با روش‌های اجزاء محدود غیرخطی صورت می‌پذیرد. روش اجزاء محدود غیرخطی با وجود دقت بالا، حجم محاسبات را به‌شکل قابل‌توجهی افزایش می‌دهد. به موجب همین علت، استفاده از این روش در کنترل بلادرنگ ربات‌های انعطاف‌پذیر دشوار است. از طرفی در روش‌های عددی که جهت حل معادلات حرکت تیر با دامنه‌ی تغییر شکل زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند دقت، به‌نسبت شدیدی به تعداد و ابعاد گام زمانی در حل مسئله وابسته است. در روش‌های عددی با انتخاب دامنه‌ی به اندازه‌ی مناسب‌کوچک می‌توان پاسخ‌های قابل‌قبولی به‌دست آورد. با افزایش شمارگام‌ها، ابعاد ماتریس‌های موجود در روش‌های عددی نیز افزوده گردیده که این موضوع خود به افزایش حجم محاسبات می‌انجامد. در روش ماتریس انتقال[1] تثبیت درجه ماتریس و انعطاف‌پذیری در مدل‌سازی، آن را بر روش اجزاء محدود برتری می‌دهد. از روش ماتریس انتقال در سیستم‌های با دینامیک دورانی، تحلیل زنجیره دنده‌ها و نیز سیستم‌های انشعابی و زنجیره‌ای استفاده می‌گردد. از سوی دیگر این روش تنها در مورد سیستم‌های خطی و برای تخمین فرکانس‌های طبیعی و تحلیل پاسخ حالت مانا با تحریک هارمونیک قابل اجرا است. در ادامه با بکارگیری روش ماتریس انتقال گسسته[2]، غیر از بهره‌گیری از مزیت‌های روش ماتریس انتقال کلاسیک می‌توان از محدودیت تعداد ورودی‌ها نیز رها گردید.

با ثابت بودن ابعاد ماتریس انتقال در روش گسسته ، افزایش تعداد گام تأثیر محسوسی در حجم محاسبات نخواهد داشت.

1 _ Tranfer Matrix Method

2 _ Descrete Time Transfer Matrix Method

بنابراین با بکارگیری از آن پاسخ تیر به ورودی‌های مختلف قابل محاسبه خواهد بود و می‌توان از آن به‌خوبی جهت کنترل بلادرنگ ربات‌های انعطاف‌پذیر استفاده نمود.

روش ماتریس انتقال گسسته در حالت کلی دارای دو منشأ خطا است:

۱. خطای ناشی از خطی‌سازی مؤلفه‌های شتاب و سرعت

۲. خطای حاصل از خطی‌سازی ترم‌های غیرخطی در معادلات

در این پایان‌نامه به مدل‌سازی تیر انعطاف‌پذیر با تغییر شکل زیاد پرداخته شده و سپس با تغییراتی در روش ماتریس انتقال در کاهش هرچه بیشتر خطا کوشش می‌شود. بنابراین در این پایان‌نامه دو فعالیت اصلی صورت می‌پذیرد؛ یک، بررسی روش‌های عددی مرسوم در روش ماتریس انتقال گسسته که عبارتند از چهار روش فاکس- اویلر[۳]، ویلسون تتا[۴]، نیومارک بتا[۵] و هوبولت[۶] که با بررسی این روش‌ها و معایب آنها به ارائه‌ی روشی نوین به‌منظور کاهش خطای ناشی از خطی‌سازی پرداخته می‌شود. مورد دوم، استفاده از تقریب‌های مناسب جهت خطی‌سازی‌ترم‌های غیرخطی در ماتریس انتقال است. از آنجا که در تیر با تغییر شکل زیاد ترم‌های غیرخطی سرعت و شتاب در پاسخ ظاهرمی‌گردند، برای استفاده از روش ماتریس انتقال باید این ترم‌ها به‌گونه‌ای در هر گام زمانی خطی‌سازی گردند. در فعالیت دوم به بررسی روش‌های خطی‌سازی این ترم‌ها جهت افزایش دقت پرداخته خواهد شد.

---

3 _ Fox _ Euler
4 – Wilson θ
5 _ Newmark β
6 _ Hoboult

۱-۲- سابقه

کومـار و سـانکار ، اولـین مقالـه‌ی مـاتریس انتقـال بـا بعـدزمانی گسسـته را در سـال ۱۹۸۵ ارائـه نمودنـد[۱]. در سـال ۱۹۸۵ دو تـن از دانشـمندان مقالـه‌ای بـا عنـوان " یـک روش جدیـد از ماتریس انتقال برای تحلیـل سیسـتم‌هـای دینـامیکی بـزرگ" منتشـر کردنـد. در آن مقالـه ایـن دو بـا تعریـف شـتاب و سـرعت اجـزاء سیسـتم براسـاس مقـدار جابجـایی آنهـا، راهکـاری بـه‌منظـور خطـی‌سـازی معادلـات کـه لازمـه روش مـاتریس انتقـال اسـت، ارائـه نمودنـد. آنهـا در مقالـه‌شـان توضیح داده‌انـد کـه بـا افـزایش درجـه آزادی در سیسـتم انـدازه‌ی مـاتریس‌هـا نیـز افـزوده شـده و به پیـروی از آن محاسـبات مربـوط بـه آنهـا. در ادامـه دکتـر رایـان کـراوس در کـارخـود یـک تیـر دینامیکی را به اجزایـی تقسـیم کـرد کـه بـین هـر یـک از آنهـا یـک فنـر فـرض شـده اسـت. او در ابتدا از سیستمی یک درجـه آزادی شـامل یـک فنـر و یـک لینـک اسـتفاده نمـود. مـاتریس انتقـال را بـرای فنـر و لینـک نوشـت و پـس از ضـرب ماتریسـی، بـردار حالـت انتهـای لینـک را بـه‌دسـت آورد. کـراوس در سـال ۲۰۰۶ رسـاله‌ی دکتـرای خـود را بـه‌بررسـی روش کنترلـی سـازه‌هـای انعطـاف‌پـذیر اختصـاص داد[۲]. کـراوس در سـال ۲۰۱۱یـک‌مـدل‌سـازی کارآمـد محاسـباتی بـر پایـه‌ی روش مـاتریس انتقـال ارائـه نمـود[۳]. در ۲۰۱۳ کـراوس و اوکاشـا نتـایج تحلیلـی و تجربـی کنتـرل‌یـک ربـات انعطـاف‌پـذیر را بررسـی مقایسـه‌ای نمودنـد. آنهـا بـه معرفـی‌روش مـاتریس‌انتقـال و بکـارگیری آن بـرای یـک سیسـتم دو درجـه آزادی‌جـرم و فنـر پرداختنـد و در ادامه *روش‌مـاتریس‌انتقـال‌گسسـته* را شـرح داده و بـرای یـک لینـک سـاده دو درجـه آزادی شـامل دو فنـر بکـار مـی‌گیرنـد. نتـایج تجربـی را بـه‌کمـک حسـگر شـتاب‌سـنج سـنجیده و بـا نتـایج روش‌هـای خـود مقایسـه مـی‌نماینـد[۴]. هـورنر و پیلکـی در ۱۹۷۸ روش‌مـاتریس‌انتقـال‌ریکـاتی را به‌عنوان یک روش‌جدید برای تحلیل‌اعضای‌سازه‌ای ارائه کردند[۵].

روش‌ماتریس‌انتقال در سال‌های اخیر نیز جهت‌تحلیل‌پاسخ‌تیر با تغییرشکل‌زیاد، مورد کنکاش قرار گرفته است. بین هی و همکاران وی در سال ۲۰۰۷ روش‌ماتریس‌انتقال‌ریکاتی را به‌منظور شبیه‌سازی دینامیکی‌تیرالاستیک با تغییرشکل‌زیاد استفاده نمودند[۶]. در ادامه وانگ و همکاران او در سال ۲۰۱۲ از این روش برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی کابل یک یدک‌کش زیرآبی بهره گرفتند[۷]. روش‌ماتریس‌انتقال‌گسسته، نیازمند به روش‌های عددی در انتگرال‌گیری است. بدین منظور هورنر و پیلکی از روشهای فاکس_اویلر ، ویلسون تتا، نیومارک بتا و هوبولت استفاده کرده و توانستند ضرایب‌ماتریس‌انتقال‌گسسته را ارائه نمایند[۵]. در سال‌های اخیر روش‌های انتگرال‌گیری جدیدتری ارائه‌شده‌است که می‌توان از آنها جهت استفاده در روش‌ماتریس‌انتقال‌گسسته بهره جست. زای و همکارانش با تغییراتی در روش‌نیومارک، به روشی جدید جهت تحلیل سیستم‌های خطی و غیرخطی دست‌یافتند[۹,۸]. زو روشی نسبتا ساده ارائه نمود و نشان داد که روش فوق نسبت به روش نیومارک خطای دوره‌ای کمتری دارد[۱۰]. در ادامه رضایی و صفرزاده روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی را ترکیب‌نموده، به روشی جدید نائل‌آمدند[۱۱]. روش‌ماتریس‌انتقال برای بررسی‌تغییرشکل زیاد در تیر، نیازمند خطی‌سازی پارامترهای مختلفی است. این خطی‌سازی در برخی موارد موجب افزایش‌چشمگیرخطا در نتایج می‌گردد.

۱-۳- روش تحقیق

- بررسی روش‌های مختلف انتگرال‌گیری عددی
- انتخاب روش‌های انتگرال‌گیری عددی مناسب جهت استفاده در روش ماتریس انتقال
- بررسی منشأ خطای خطی‌سازی در روش ماتریس انتقال
- انتخاب روش تقریبی مناسب برای خطی‌سازی ترم‌های غیرخطی ماتریس انتقال

۱-۴- اهداف تحقیق

- انتخاب روش‌های انتگرال‌گیری عددی مناسب جهت استفاده در روش ماتریس انتقال
- انتخاب تقریب مناسب جهت خطی‌سازی ترم‌های غیرخطی ماتریس انتقال

۱-۵- نوآوری

- ارائه‌ی روش عددی مناسب جهت خطی‌سازی ترم‌های غیرخطی ظاهرشده در اثر تغییرشکل بزرگ در روش ماتریس انتقال

فصل دوم : روش ماتریس انتقال

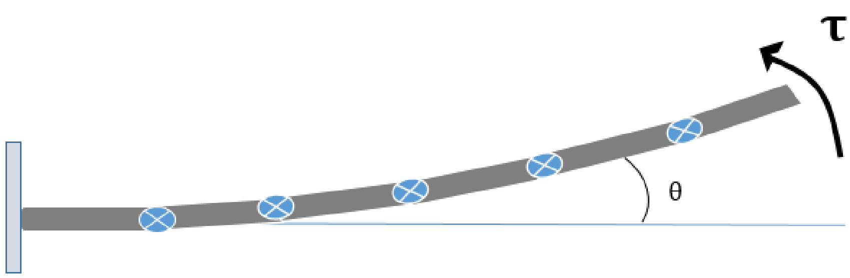
۲-۱- بردار حالت[۷]

سیستم دو درجه آزادی ساده جرم و فنری را درنظر بگیرید. بردارحالت در یک نقطه از سیستم الاستیک یک بردارستونی شامل‌جابجایی و نیروی‌وارده می‌باشد. جابجایی باید در بالا و نیرو در پایین ستون قرار گیرد. برای مثال در مورد یک سیستم ساده‌ی‌جرم و فنر بردار حالت را می‌توان به‌شکل $\begin{bmatrix} X \\ f \end{bmatrix}$ نوشت یا در سیستم دارای یک محور بدون‌جرم و یک دیسک که با مقدار زاویه‌ی محور و مقدار گشتاور وارده توصیف می‌گردد، بردار حالت، $\begin{bmatrix} \Phi \\ T \end{bmatrix}$خواهد بود.

برای داشتن پاسخ صحیح‌تر دریک تیرمستقیم عوامل‌جابجایی‌انحراف، ω و شیب، ψ و نیز عوامل نیرو شامل مومنتوم M و نیروی برشی V در بردار حالت ظاهر می گردند. در نتیجه بردار حالت به‌شکل $\begin{bmatrix} \omega \\ \psi \\ M \\ V \end{bmatrix}$ در می‌آید.

۲-۲- آشنایی با ماتریس انتقال

در دسته‌ی گسترده‌ای از سیستم‌های مکانیکی معمول، پس از تعیین بردارهای حالت، روش ماتریس انتقال قابل پیاده‌سازی است. در این روش، سیستم مکانیکی مانند تیری به‌شکل زیر، به‌تعدادی المان که هر کدام لینک صلب درنظر گرفته می شوند با اتصال فنری پیچشی، تقسیم می‌گردد:



شکل(۲-۱): تقسیم‌نمودن لینک به مجموعه‌ای از جرم و فنر

7- State vector

سختی پیچشی هر لینک را که در حقیقت لینکی غیرصلب است، به فنرپیچشی فرض‌شده در بین لینک‌ها واگذار شده و با این فرض لینک‌ها را صلب در نظر گرفته می‌شوند.

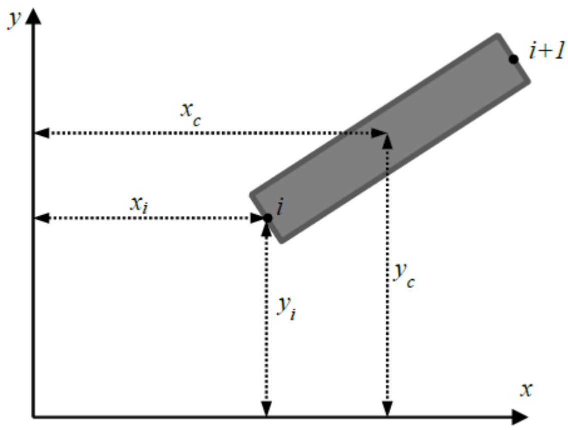
برای المان اول مقدار سختی پیچشی برابر است:

$$k_1 = \frac{8}{9}\frac{EI}{l} \qquad (۱-۲)$$

و برای المان دوم و پس از آن :

$$k_2 = \frac{48n-72}{42n-71}\frac{EI}{l}$$
$$k_n = \frac{EI}{l} \qquad (۲-۲)$$

در مدل‌غیرخطی تغییر زاویه‌ی المان‌ها زیاد بوده و در نتیجه برخلاف مدل‌خطی که حرکت المان‌ها یک حرکت تک بعدی در جهت تغییرشکل است، در اینجا دوران المان‌ها یک دوران دو بعدی خواهد بود. در شکل (۲-۲) نمایی از المان صلب برای مدل غیرخطی قابل مشاهده است:



شکل(۲-۲) : موقعیت مرکز جرم

با فرض قرارگیری مرکز جرم در وسط المان، با استفاده از شکل (۲-۲) موقعیت مرکز جرم خواهد شد:

$$x_c = x_i + \frac{l}{2}\cos\theta \qquad (۳-۲)$$

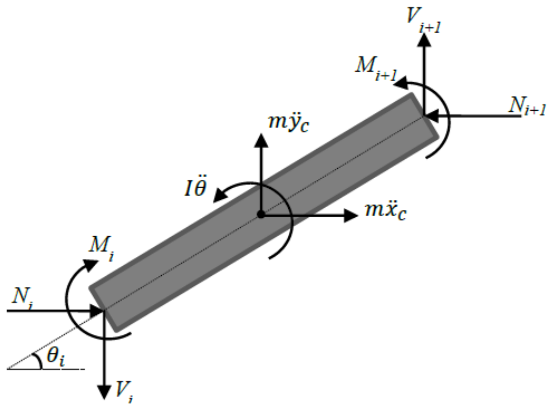
$$y_c = y_i + \frac{l}{2}\sin\theta \qquad (۴-۲)$$

با مشتق‌گیری، رابطه شتاب در مرکز جرم بدین شکل به‌دست می‌آید:

$$\ddot{x}_c = \ddot{x}_i - \frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{۵-۲}$$

$$\ddot{y}_c = \ddot{y}_i + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{۶-۲}$$

در شکل (۲-۳) نیروها و گشتاورهای وارد بر المان iام نمایش داده شده است:



شکل(۲-۳) : دیاگرام آزاد المان iام

با تعیین شتاب زاویه‌ای مرکز جرم میتوان با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله نیرو را در جهت x و y نوشت:

$$N_{i+1} = N_i - m\ddot{x}_c \tag{۷-۲}$$

$$V_{i+1} = V_i + m\ddot{y}_c \tag{۸-۲}$$

همچنین با گشتاورگیری حول نقطه i+1، می‌توان عبارت زیر را برای گشتاور نوشت:

$$M_{i+1} = M_i - N_i l\sin\theta - V_i l\cos\theta + \bar{I}\ddot{\theta} + m\ddot{x}_c\frac{l}{2}\sin\theta - m\ddot{y}_c\frac{l}{2}\cos\theta \tag{۹-۲}$$

حال عبارت‌های به‌دست آمده برای شتاب در روابط نیرو و گشتاور جای‌گذاری می‌گردند:

$$N_{i+1} = N_i - m(\ddot{x}_i - \frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta) \tag{۱۰-۲}$$

$$V_{i+1} = V_i + m(\ddot{y}_i + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{۱۱-۲}$$

$$M_{i+1}=M_i-N_il\sin\theta-V_il\cos\theta+\bar{I}\,\ddot{\theta}+m\frac{l}{2}\sin\theta(\ddot{x}_i-\frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta-\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta)$$
$$-m\frac{l}{2}\cos\theta(\ddot{y}_i+\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta) \qquad (۱۲-۲)$$

اگرچه با استفاده از این معادله‌ها، رابطه بین نیرو و گشتاور بین دو نقطه‌ی متوالی i وi+1 به‌دست‌آمد، اما وجود عبارت‌هایی مانند $\ddot{x}_i$ ، $\ddot{\theta}$ ، $\dot{\theta}^2$ ، $\cos\theta$ و... در استفاده از روش اختلال ایجاد می‌نماید.

در روش ماتریس انتقال کلاسیک رابطه‌ی بین سطرهای بردارحالت باید رابطه‌ای خطی باشد. پس نیاز است که با استفاده از روابط موجود در روش‌های عددی، عبارت‌های مذکورخطی‌سازی گردند.

۲-۳- خطی سازی و روش‌های عددی

با استفاده از روش‌ماتریس‌انتقال‌گسسته می‌توان مشتق اول و دوم عوامل موجود در ماتریس‌انتقال را به‌شکل خطی و به‌صورت تابعی از خود عامل نمایش داد.

برای این منظور روابطزیر مفروضند :

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}(t_i)&=E\theta(t_i)+F\\
\dot{\theta}(t_i)&=C\theta(t_i)+D\\
\ddot{x}(t_i)&=Hx(t_i)+G\\
\dot{x}(t_i)&=Rx(t_i)+S\\
\ddot{y}(t_i)&=Py(t_i)+Q\\
\dot{y}(t_i)&=wy(t_i)+Y
\end{aligned} \qquad (۱۳-۲)$$

برای برطرف‌کردن مشکل‌وجود توابع مثلثاتی در ماتریس‌انتقال، توابع مثلثاتی را در زمان t_i با استفاده از بسط‌تیلور، بر حسب‌زمان t_{i-1} نمایش داده می‌شوند. در این حالت توابع مثلثاتی در زمان t_i نقش یک عدد ثابت را داشته و بنابراین در ستون نهایی ماتریس‌انتقال قرار می‌گیرند.

توابع مثلثاتی به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\sin\theta(t_i)&=\sin\left[\theta(t_i)+\Delta T\right]=\bar{s}+o\left(\Delta T^2\right)\\
\cos\theta(t_i)&=\cos\left[\theta(t_i)+\Delta T\right]=\bar{c}+o\left(\Delta T^2\right)
\end{aligned} \qquad (۱۴-۲)$$

که در آنها:

$$\bar{s}=\sin\theta(t_{i-1})\left\{1-\frac{1}{2}\left[\dot{\theta}(t_{i-1})\Delta T\right]^2\right\}+\cos\theta(t_{i-1})\left\{\dot{\theta}(t_{i-1})\Delta T+\frac{1}{2}\ddot{\theta}(t_{i-1})\Delta T^2\right\}$$
$$\bar{c}=\cos\theta(t_{i-1})\left\{1-\frac{1}{2}\left[\dot{\theta}(t_{i-1})\Delta T^2\right]\right\}-\sin\theta(t_{i-1})\Delta T+\frac{1}{2}\ddot{\theta}(t_{i-1})\Delta T^2 \quad (۱۵-۲)$$

عبارت دیگری که موجب اختلال می‌شود، $\dot{\theta}^2$ است. برای خطی‌سازی این عبارت نیز از رابطه‌ی زیر کمک گرفته می‌شود:

$$a(t_i)b(t_i)=a(t_{i-1})b(t)+a(t_i)b(t_{i-1})-a(t_{i-1})b(t_{i-1})+\dot{a}(t_{i-1})\dot{b}(t_{i-1})\Delta T^2 \quad (۱۶ -۲)$$

که $a(t)$ و $b(t)$ دو تابع دلخواه هستند.

با استفاده از رابطه بالا می‌توان $\dot{\theta}^2$ را به‌شکل زیر نمایش داد:

$$\dot{\theta}^2(t_i)=2\dot{\theta}(t_{i-1})\dot{\theta}(t_i)-\dot{\theta}^2(t_{i-1})+\ddot{\theta}^2(t_{i-1})\Delta T^2=A\dot{\theta}(t_i)-B \quad (۱۷-۲)$$

$$\dot{\theta}(t_i)=C(\theta_i)+D \quad (۱۸-۲)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی بالا $\dot{\theta}^2$ را می‌توان به‌شکل‌تابعی خطی از $\dot{\theta}$ نمایش داد. همچنین با توجه به رابطه‌ی در نظرگرفته شده برای $\dot{\theta}$ می‌توان نوشت:

$$\dot{\theta}^2(t_i)=AC\theta(t_i)+(AD-B) \quad (۱۹-۲)$$

حال با بهره‌گیری از روابط بیان شده، معادلات خطی‌سازی می‌شوند. برای نیروی‌طولی می‌توان نوشت:

$$N_{i+1}=N_i-m\left[Hx_i+G-\frac{l}{2}\bar{s}\left(E\theta_i+F\right)-\frac{l}{2}\bar{c}[AC\theta_i+(AD-B)]\right] \quad (۲۰-۲)$$

با ساده‌سازی:

$$N_{i+1}=(-mH)x_i+\left[m\frac{l}{2}\bar{s}E+m\frac{l}{2}\bar{c}AC\right]\theta_i+N_i+\left[m\frac{l}{2}\bar{s}F+m\frac{l}{2}\bar{c}\left(AD-B\right)-mG\right] \quad (۲۱-۲)$$

همچنین برای نیرویعرضی نیز بطور مشابه:

$$V_{i+1}=\left(mP\right)y_i+\left[m\frac{l}{2}\overline{c}E-m\frac{l}{2}\overline{s}AC\right]\theta_i+V_i+\left[m\frac{l}{2}\overline{c}F-m\frac{l}{2}\overline{s}\left(AD-B\right)+mQ\right] \quad (۲-۲۲)$$

و برای گشتاورخمشی خواهد شد:

$$\begin{gathered}M_{i+1}=\left[m\frac{l}{2}\overline{s}H\right]x_i+\left[-m\frac{l}{2}\overline{c}P\right]y_i+M_i+\left(-l\overline{s}\right)N_i+\left(-l\overline{c}\right)V_i+\\ \left[\overline{I}F+m\frac{l}{2}\overline{s}G-m\frac{l^2}{4}F\left(\overline{s}^2+\overline{c}^2\right)-m\frac{l}{2}\overline{c}Q\right]\left[\overline{I}E-m\frac{l^2}{4}E\left(\overline{s}^2+\overline{c}^2\right)\right]\theta_i\end{gathered} \quad (۲-۲۳)$$

برای مدل غیرخطی می‌توان بردارحالت را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$Z=\left[x,y,\theta,M,N,V,1\right]^T \quad (۲-۲۴)$$

بااستفاده از روابط به‌دست آمده، می‌شود رابطه‌ی بین نیرو و جابجایی، بین دو نقطه‌ی i و i+1 را به‌صورت رابطه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned}x_{i+1}&=x_i+l\overline{c}\\ y_{i+1}&=y_i+l\overline{s}\\ \theta_{i+1}&=\theta_i\end{aligned} \quad (۲-۲۵)$$

$$\begin{gathered}M_{i+1}=\left[m\frac{l}{2}\overline{s}H\right]x_i+\left[-m\frac{l}{2}\overline{c}P\right]y_i+\left[\overline{I}E-m\frac{l^2}{4}E\left(\overline{s}^2+\overline{c}^2\right)\right]\theta_i\\ +M_i+\left(-l\overline{s}\right)N_i+\left(-l\overline{c}\right)V_i+\left[\overline{I}F+m\frac{l}{2}\overline{s}G-m\frac{l^2}{4}F\left(\overline{s}^2+\overline{c}^2\right)-m\frac{l}{2}\overline{c}Q\right]\end{gathered} \quad (۲-۲۶)$$

$$N_{i+1}=\left(-mH\right)x_i+\left[m\frac{l}{2}\overline{s}E-m\frac{l}{2}\overline{c}AC\right]\theta_i+N_i+\left[m\frac{l}{2}\overline{s}F+m\frac{l}{2}\overline{c}\left(AD-B\right)-mG\right] \quad (۲-۲۷)$$

$$V_{i+1}=\left(mP\right)y_i+\left[m\frac{l}{2}\overline{c}E-m\frac{l}{2}\overline{s}AC\right]\theta_i+V_i+\left[m\frac{l}{2}\overline{c}F-m\frac{l}{2}\overline{s}\left(AD-B\right)+mQ\right] \quad (۲-۲۸)$$

که با توجه به رابطه‌ی بالا ماتریس انتقال نهایی به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ M \\ N \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l\overline{s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m\frac{l}{2}\overline{s}H & -m\frac{l}{2}\overline{c}P & u_{43} & 1 & -l\overline{s} & -l\overline{c} & u_{47} \\ -mH & 0 & u_{53} & 0 & 1 & 0 & u_{57} \\ 0 & mP & u_{63} & 0 & 0 & 1 & u_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ M \\ N \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_{i} \tag{۲-۲۹}$$

که ضرایب آن بدین ترتیب می‌باشند:

$$u_{43} = \overline{I}E - m\frac{l^2}{4}E\left(\overline{s}^2 + \overline{c}^2\right)$$

$$u_{47} = \overline{I}F + m\frac{l}{2}\overline{s}G - m\frac{l^2}{4}F\left(\overline{s}^2 + \overline{c}^2\right) - m\frac{l}{2}\overline{c}Q \tag{۲-۳۰}$$

$$u_{53} = m\frac{l}{2}\overline{s}E + m\frac{l}{2}\overline{c}AC$$

$$u_{57} = m\frac{l}{2}\overline{s}F + m\frac{l}{2}\overline{c}\left(AD - B\right) - mG$$

$$u_{63} = m\frac{l}{2}\overline{c}E - m\frac{l}{2}\overline{s}AC \tag{۲-۳۱}$$

$$u_{67} = m\frac{l}{2}\overline{c}F - m\frac{l}{2}\overline{s}\left(AD - B\right) + mQ$$

برای فنر، در صورتی که تعداد المان‌های صلب به اندازه‌ی کافی زیاد باشد، می‌توان رابطه‌ی بین نیرو و زاویه‌ی بین دو نقطه‌ی i و i+1 را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$x_{i+1} = x_i,\;\; y_{i+1} = y_i,\;\; M_{i+1} = M_i,\;\; N_{i+1} = N_i$$
$$V_{i+1} = V_i,\;\; \theta_{i+1} = \theta_i + \frac{1}{k_i}M_i \tag{۲-۳۲}$$

و در نهایت ماتریس انتقال فنر به‌صورت زیر حاصل می‌آید:

$$U_{TSD}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&\dfrac{1}{k_i}&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad (۳۳-۲)$$

در صورتی که فرض‌شود درانتهای تیر نیروی عمودی F(t) وارد می‌شود، در این حالت ماتریس انتقال بین دو نقطه یک در تکیه‌گاه تیر و نقطهn در انتهای تیر خواهدشد:

$$Z_n=U_\tau U_{m_n}U_{sd_n}U_{m_{n-1}}U_{sd_{n-1}}\ldots U_{m_1}U_{sd}Z_1 \qquad (۳۴-۲)$$

که در عبارت بالا U_m ماتریس انتقال المان صلب، U_τ ماتریس انتقال نیروی خارجی و U_{sd} ماتریس انتقال فنر پیچشی می‌باشد. در صورتی که تکیه‌گاه تیر(و یا تکیه‌گاه موتور دورانی)گیردار درنظرگرفته شود، در این حالت گشتاور خمشی، نیروی طولی و نیروی عمودی در انتهای تیر صفر خواهد بود.

از سوی دیگر جابجایی و شیب در تکیه‌گاه برابر با صفر بوده و بنابراین شرایط مرزی به‌صورت رابطه (۳۴-۲) به‌دست می‌آید:

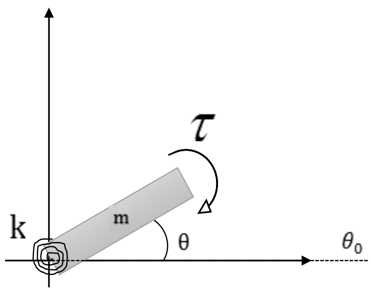
$$\begin{bmatrix}x\\y\\\theta\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}_{i+1}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}&u_{15}&u_{16}&u_{17}\\u_{21}&u_{22}&u_{23}&u_{24}&u_{25}&u_{26}&u_{27}\\u_{31}&u_{32}&u_{33}&u_{34}&u_{35}&u_{36}&u_{37}\\u_{41}&u_{42}&u_{43}&u_{44}&u_{45}&u_{46}&u_{47}\\u_{51}&u_{52}&u_{53}&u_{54}&u_{55}&u_{56}&u_{57}\\u_{61}&u_{62}&u_{63}&u_{64}&u_{65}&u_{66}&u_{67}\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\M\\N\\V\\1\end{bmatrix}_i \qquad (۳۵-۲)$$

$$
\begin{aligned}
-x_n + u_{14}M_1 + u_{15}N_1 + u_{16}V_1 &= -u_{17}\\
-y_n + u_{24}M_1 + u_{25}N_1 + u_{26}V_1 &= -u_{27}\\
-\theta_n + u_{34}M_1 + u_{35}N_1 + u_{36}V_1 &= -u_{37}\\
u_{44}M_1 + u_{45}N_1 + u_{46}V_1 &= -u_{47}\\
u_{54}M_1 + u_{55}N_1 + u_{56}V_1 &= -u_{57}\\
u_{64}M_1 + u_{65}N_1 + u_{66}V_1 &= -u_{67}\\
1&=1
\end{aligned}
$$

در پایان جابجایی و شیب انتهای تیر و گشتاور خمشی و نیرو در تکیه‌گاه بدین ترتیب به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ \theta_n \\ M_1 \\ N_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & u_{14} & u_{15} & u_{16} \\ 0 & -1 & 0 & u_{24} & u_{25} & u_{26} \\ 0 & 0 & -1 & u_{34} & u_{35} & u_{36} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} & u_{46} \\ 0 & 0 & 0 & u_{54} & u_{55} & u_{56} \\ 0 & 0 & 0 & u_{64} & u_{65} & u_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -u_{17} \\ -u_{27} \\ -u_{37} \\ -u_{47} \\ -u_{57} \\ -u_{67} \end{bmatrix}
$$

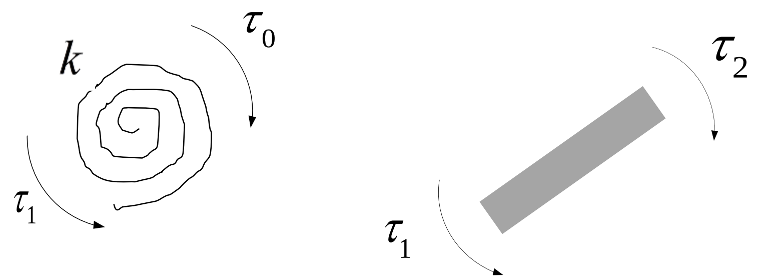
در این پایان نامه نتایج براساس بردار حالتی شامل τ و θ بررسی گردیده‌اند:



شکل(۲-۴) : سیستم یک درجه آزادی شامل جرم، فنرپیچشی و ممان اینرسی

هر جزء سیستم مانند شکل (۲-۴) شامل یک لینک که با فنر پیچشی به پایه متصل است،

درنظرگرفته می‌شود.



شکل (۲-۵) : شکل گسترش یافته‌ی سیستم یک درجه آزادی

معادله‌ی کلی تعادل:

$$I\ddot{\theta}+C\dot{\theta}+K\theta=\tau \quad (۲-۳۶)$$

و معادله‌ی تعادل گشتاورها در فنر:

$$\tau_0=\tau_1 \quad (۲-۳۷)$$

$$\tau_0=k(\theta_1-\theta_0) \quad (۲-۳۸)$$

$$\theta_1=\frac{\tau_0}{k}+\theta_0 \quad (۲-۳۹)$$

اگر معادله‌های(۲-۳۸) و (۲-۳۹) به شکل ماتریسی نوشته شوند، خواهند شد:

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \tau_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_0\\ \tau_0\end{bmatrix} \quad (۲-۴۰)$$

$$u_s=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad (۲-۴۱)$$

که U_S ماتریس انتقال فنر است که بردار حالت انتقال از نقطه‌ی صفر به نقطه‌ی یک می‌باشد.

لینک به‌عنوان یک بدنه‌ی صلب منظور می‌گردد. پس برای قسمت دوم سیستم می‌توان نوشت:

$$\theta_1=\theta_2 \quad (۲-۴۲)$$

$$\tau_2-\tau_1=I\ddot{\theta}_1 \quad (۲-۴۳)$$

بااستفاده از تبدیل لاپلاس:

$$\tau_2 - \tau_1 = Is^2\theta_1 \tag{۴۴-۲}$$

$$\tau_2 = \tau_1 + Is^2\theta_1 \tag{۴۵-۲}$$

نمایش ماتریسی معادله‌های(۲-۴۲) و (۲-۴۵) به‌قرار زیرخواهد شد:

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Is^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} \tag{۴۶-۲}$$

$$U_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Is^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{۴۷-۲}$$

که U_m ماتریس انتقال جرم است.

قرار دادن θ_1 و τ_1 :

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Is^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \tau_0 \end{bmatrix} \tag{۴۸-۲}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ Is^2 & \frac{Is^2}{k}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \tau_0 \end{bmatrix} \tag{۴۹-۲}$$

درصورت منظورکردن یک پاسخ آزاد سیستم:

$$\theta_0 = 0 \tag{۵۰-۲}$$

$$\tau_2 = 0 \tag{۵۱-۲}$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ Is^2 & \frac{Is^2}{k}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_0 \end{bmatrix} \tag{۵۲-۲}$$

که ستون اول آن نتیجه می‌دهد:

$$\theta_2 = \frac{\tau_0}{k} \tag{۵۳-۲}$$

و ستون دوم:

$$\left(\frac{Is^2}{k}+1\right)\tau_0=0 \qquad (۵۴-۲)$$

پاسخ غیر بدیهی معادله (۲-۵۴) :

$$\left(\frac{Is^2}{k}+1\right)=0 \qquad (۵۵-۲)$$

قسمت موهومی پاسخ همان فرکانس طبیعی است.

$$s=\pm j\sqrt{\frac{k}{I}} \qquad (۵۶-۲)$$

در حالت پاسخ اجباری سیستم که در آن $\tau_2=T\neq 0$ و $\theta_0=0$ معادله‌ی (۲-۴۸) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix}\theta_2\\ T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k}\\ Is^2 & \frac{Is^2}{k}+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \tau_0\end{bmatrix} \qquad (۵۷-۲)$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\theta_2=\frac{I_0}{k} \qquad (۵۸-۲)$$

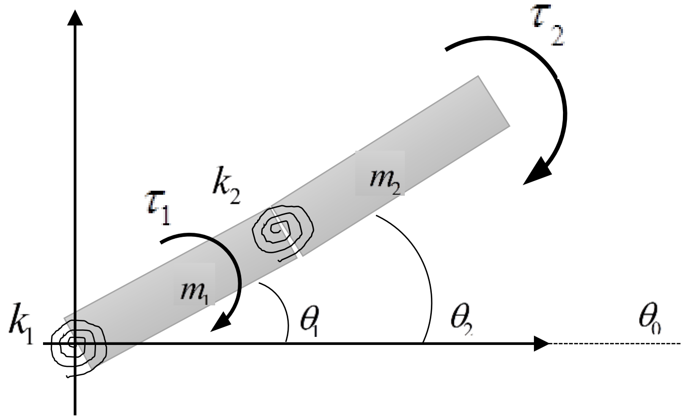
$$T=\left(\frac{Is^2}{k}+1\right)\tau_0 \qquad (۵۹-۲)$$

با تقسیم این دو برهم تابع انتقال سیستم به‌دست می‌آید :

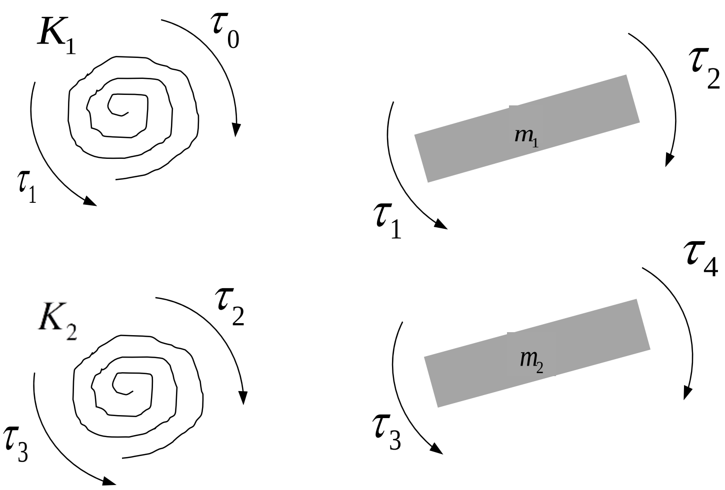
$$\frac{\theta_2}{T}=\left(\frac{1}{Is^2+k}\right) \qquad (۶۰-۲)$$

اگرچه تبدیل لاپلاس راه آسان‌تری برای رسیدن به تابع انتقال در چنین سیستمی است ، اما در سیستم‌های پیچیده این روش کمک زیادی می‌کند.

سیستمی دو درجه آزادی مفروض است :



شکل (۲-۶) : یک سیستم دو درجه آزادی شامل جرم، فنر و دمپر با گشتاورهای خارجی



شکل(۲-۷) : شکل گسترش‌یافته‌ی سیستم دو درجه آزادی

از آنجا که فنر و دمپر بدون جرم فرض می‌شوند:

$$\tau_0 = \tau_1 \tag{۲-۶۱}$$

$$\tau_1 = k_1\left(\theta_1 - \theta_0\right) + c_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0) \tag{۲-۶۲}$$

بااستفاده از تبدیل لاپلاس:

$$\tau_1 = k_1\left(\theta_1 - \theta_0\right) + c_1 s(\theta_1 - \theta_0) \tag{۲-۶۳}$$

اگر این معادله برای θ_1 حل شود نتیجه می‌شود:

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{\tau_1}{k_1 + c_1 s} \qquad (۶۴-۲)$$

مجموع معادله‌های (۲-۶۱) و (۲-۶۴) :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k_1 + c_1 s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \tau_0 \end{bmatrix} \qquad (۶۵-۲)$$

$$U_{s_1 d_1} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k_1 + c_1 s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۶۶-۲)$$

$U_{s_1 d_1}$ ماتریس انتقال فنر s_1 و دمپر d_1 می‌باشد. در قسمت دوم جرم m_1 صلب در نظرگرفته می‌شود پس:

$$\theta_1 = \theta_2 \qquad (۶۷-۲)$$

$$\tau_2 - \tau_1 = I_1 \ddot{\theta}_1 \qquad (۶۸-۲)$$

تبدیل لاپلاس آن:

$$\tau_2 - \tau_1 = I_1 s^2 \theta_1 \qquad (۶۹-۲)$$

$$\tau_2 = \tau_1 + I_1 s^2 \theta_1 \qquad (۷۰-۲)$$

حال معادله‌های(۲-۶۷) و (۲-۷۰) در شکل ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I_1 s^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} \qquad (۷۱-۲)$$

$$U_{m_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I_1 s^2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۷۲-۲)$$

U_{m_1}ماتریس انتقال جرم m_1 است.

هنگامی که نیروی خارجی در آخرین المان اعمال نگردیده باشد ، ماتریس‌های انتقال الحاقی می‌توانند نقش گشتاورهای وارده، ممنتوم و جابجایی‌ها را در ماتریس‌های روش ماتریس انتقال ایفا نمایند.

به‌معنای دیگر یک سطر و یک ستون باید به ماتریس انتقال افزوده گردد. همه درایه‌های افزوده صفرمی‌باشند غیر از آخرین درایه روی قطر اصلی که مقداری برابر یک می‌گیرد.

یک ماتریس انتقال الحاقی جرم به شکل زیر تشکیل می‌گردد:

$$U_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Is^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۷۳-۲}$$

و نیز یک ماتریس انتقال الحاقی برای فنر- دمپر:

$$U_{sd} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k+cs} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۷۴-۲}$$

و ماتریس انتقال الحاقی نیرو:

$$U_{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۷۵-۲}$$

هنگام استفاده از ماتریس‌های الحاقی بردار حالت باید به‌شکل زیر باشد:

$$Z = \begin{bmatrix} \theta \\ \tau \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۷۶-۲}$$

حالا ماتریس‌های الحاقی برای همه‌ی اجزاء قابل نوشتن است.

ماتریس انتقال الحاقی فنر_دمپر برای فنر_ دمپر اول:

$$U_{s_1d_1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k_1+c_1s} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۷۷-۲}$$

و ماتریس انتقال الحاقی جرمی برای m_1 خواهد شد:

$$U_{m_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ I_1 s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۷۸}$$

ماتریس انتقال الحاقی گشتاور برای τ_1 نیز می‌شود:

$$U_{\tau_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -T_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۷۹}$$

و ماتریس انتقال الحاقی فنر- دمپر برای فنر- دمپر دوم:

$$U_{s_2 d_2} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k_2 + c_2 s} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۸۰}$$

و برای m_2 نیز :

$$U_{m_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ I_2 s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۸۱}$$

اینک ماتریس انتقال کل سیستم با ضرب همه‌ی ماتریس‌های انتقال قابل محاسبه است.

با فرض $\tau_2 = 0$:

$$U_{sys} = U_{m_2} U_{s_2 d_2} U_{\tau_1} U_{m_1} U_{s_1 d_1} \tag{۲-۸۲}$$

شکل بردار حالت پایه:

$$Z_{base} = \begin{bmatrix} \theta_{base} \\ \tau_{base} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۸۳}$$

و بردار حالت نهایی:

$$Z_{end} = \begin{bmatrix} \theta_{end} \\ \tau_{end} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۸۴-۲}$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\tau_{end} = 0 \tag{۸۵-۲}$$

$$\theta_{base} = 0 \tag{۸۶-۲}$$

بردارهای حالت پایه و نهایی به شکل زیر در می‌آیند:

$$Z_{base} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{base} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۸۷-۲}$$

$$Z_{end} = \begin{bmatrix} \theta_{end} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۸۸-۲}$$

با در اختیار داشتن U_{sys} داریم:

$$Z_{end} = U_{sys} Z_{base} \tag{۸۹-۲}$$

U_{sys}را می توان اینگونه نوشت:

$$U_{sys} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{12} & U_{22} & U_{23} \\ U_{13} & U_{23} & U_{33} \end{bmatrix} \tag{۹۰-۲}$$

با جایگزاری Z_{base} ، Z_{end} و U_{sys} در معادله‌ی (۲-۸۹):

$$\begin{bmatrix} \theta_{end} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{base} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۹۱-۲}$$

θ_{end}و τ_{base} مجهولند. از خط دوم معادله‌ی (۲-۹۱):

$$U_{22}\tau_{base}+U_{23}=0 \quad (۲-۹۲)$$

$$\tau_{base}=\frac{-U_{23}}{U_{22}} \quad (۲-۹۳)$$

بردار حالت پایه می‌شود:

$$Z_{base}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{-U_{23}}{U_{22}}\\ 1\end{bmatrix} \quad (۲-۹۴)$$

با دانستن z_{base} ، بردار حالت هر نقطه در سیستم قابل محاسبه است. به‌عنوان مثال بردار حالت برای نقطه‌ی دو می‌شود:

$$Z_2=Z_{m_1}=U_{m_1}U_{s_1d_1}Z_{base} \quad (۲-۹۵)$$

همچنین بردار حالت نقطه‌ی سه:

$$Z_3=U_{s_2d_2}U_{m_1}U_{s_1d_1}Z_{base} \quad (۲-۹۶)$$

معادله‌های(۲-۸۸) و (۲-۹۴) را می‌توان برای به‌دست آوردن تابع انتقال $\frac{\theta_1}{\tau}$ و $\frac{\theta_2}{\tau}$ استفاده نمود.

از معادله‌ی (۲-۹۴) به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \tau_1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ I_1s^2&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{k_1+c_1s}&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{-U_{23}}{U_{22}}\\ 1\end{bmatrix} \quad (۲-۹۷)$$

از معادله‌ی (۲-۹۷)، $\frac{\theta_1}{\tau}$ برابر می‌گردد با:

$$\frac{\theta_1}{T}=\frac{I_2s^2+c_2s+k_2}{P} \qquad (۲-۹۸)$$

و از معادله‌ی (۲-۹۴) نیز:

$$\frac{\theta_2}{T}=\frac{c_2Ts+Tk_2}{P} \qquad (۲-۹۹)$$

که P در آن برابر است با :

$$\mathrm{P}=\left(I_1I_2\right)s^4+\left(c_2I_1+c_2I_2+c_1I_2\right)s^3+\left(k_2I_2+k_1I_2+k_2I_1+c_1c_2\right)s^2+\left(k_2c_1+k_1c_2\right)s+k_1k_2$$

برای سیستم‌هایی با درجه‌ی آزادی کم، این روش قابل اعتماد نیست اما با افزایش درجه‌ی آزادی سیستم، مدل‌سازی و دست‌یابی به ماتریس‌های انتقال می‌تواند بسیار آسان‌تر باشد.

همانگونه که پیش ازاین گفته شد، روش ماتریس انتقال محدودیت‌هایی دارد. این روش تنها می‌تواند سیستم‌های خطی را مدل‌کند و خروجی آن نیز در قلمرو فرکانسی است.

در اینجا انتگرال‌گیری عددی برای غلبه بر این محدودیت‌ها به‌کمک می‌آید. با ترکیب روش ماتریس انتقال و روش انتگرال‌گیری عددی، سیستم‌های غیرخطی و یا با خروجی در قلمرو زمان، قابل تحلیل خواهند بود.

در فصل بعد این روش ترکیبی، روش ماتریس انتقال گسسته، معرفی می‌گردد.

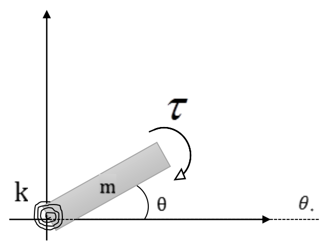
فصل سوم : روش ماتریس انتقال گسسته

همانطور که پیش از این گفته شد ترکیب روش‌های ماتریس انتقال کلاسیک و روش انتگرال‌گیری عددی به روش ماتریس انتقال گسسته شناخته شده که مزایای هر دو روش را داراست. مرتبه‌ی ماتریس‌ها در   روش ماتریس انتقال گسسته مانند روش کلاسیک، کم است و به موجب آن محاسبات کمتر و رسیدن به پاسخ سریع‌تر است. اضافه بر آن روش ماتریس انتقال گسسته می‌تواند سیستم‌های غیرخطی را نیز مدل‌سازی نماید و خروجی آن در قلمرو زمان بوده که قابل استفاده در روش انتگرال‌گیری عددی است. با این‌حال این روش، حساسیت به گام‌های زمانی را از روش عددی به ارث برده است. باید گام‌های زمانی   به‌گونه‌ای انتخاب شوند که کمترین اثر را در خروجی داشته باشند. در بخش‌های آتی سیستم‌های یک و دو درجه آزادی با این روش توضیح داده شده‌اند.

۳-۱- روش ماتریس انتقال گسسته برای یک سیستم یک درجه آزادی

بردار حالت در روش ماتریس انتقال گسسته دقیقاً مانند حالت معمول آن است. در مثال‌های آینده بردارحالت بر پایه دو عامل دوران و مقدار گشتاور وارده تشکیل شده است.

در شکل (۳-۱) سیستمی یک درجه آزادی شامل جرم، فنری پیچشی و دمپری پنهان قابل مشاهده است. این سیستم به سه قسمت فنر- دمپر ، جرم و گشتاور تقسیم می‌شود. همچنین در آن سه گره θ_0 و θ_1 برای فنر و θ_2 برای جرم تعریف شده است.



شکل(۳-۱) : لینک یک درجه آزادی با فنر پیچشی

پس از ترکیب روش ماتریس انتقال کلاسیک با روش‌های انتگرال‌گیری عددی ، عبارت‌های سرعت و شتاب زاویه‌ای بر اساس جابجایی تعریف شدند.

در این رویه دیگر به تبدیل لاپلاس که روش ماتریس انتقال را محدود به سیستم‌های خطی می‌نمود، نیازی نیست.

معادله خطی‌سازی را به‌شکل زیرتعریف می‌شوند:

$$\ddot{\theta}_n(t_i) = A_n(t_i)\theta_n(t_i) + B_n(t_i) \quad (۱-۳)$$

$$\dot{\theta}_n(t_i) = D_n(t_i)\theta_n(t_i) + E_n(t_i) \quad (۲-۳)$$

این معادلات خطی هستند و براساس جابجایی نوشته شده‌اند. همانگونه که در گذشته بیان شد در روش ماتریس انتقال، یک سیستم به تعدادی زیرسیستم تقسیم می‌گردد.

هر زیرسیستم می‌تواند به یک سیستم جرم-فنر-دمپر مدل شود. هر زیرسیستم یک جایگاه[۸] نامیده می‌شود. زیرنویس n بیانگر شماره زیرسیستم در ترتیب آنهاست.

برای مثال در شکل(۳-۱) تنها یک جایگاه وجود دارد چون سیستم یک درجه آزادی است پس nمربوط به آن برابر یک خواهد بود. به‌همین ترتیب در سیستمی با دو درجه آزادی n خواهد شد یک و دو و زیرنویس i نیز نشان‌دهنده ترتیب گام زمانی مرتبط است. به‌عنوان مثال اگر پاسخ سیستم طی یک ثانیه را با گام‌های ۰/۱ ثانیه مطلوب باشد، i به ترتیب از یک تا ده می‌گردد. اضافه براین ایستگاه nام شامل m_n ،k_n و c_n خواهد بود. $\dot{\theta}_n$ و $\ddot{\theta}_n$ نیز بیانگر سرعت و شتاب زاویه‌ای m_n هستند. D_n A_n ،B_n ، و E_nضرایبی هستند که در روش‌های مختلف انتگرال‌گیری عددی متفاوتند و باید محاسبه گردند.

A_n که ضریب θ_n است با معکوس مربع زمان رابطه دارد و مقدارش برای همه گام‌ها ثابت است.

به‌عنوان مثال این ضریب در روش نیومارک مساوی است با :

$$A_n = \frac{1}{\beta \Delta T^2} \quad (۳-۳)$$

10- Station

اما ضریب B_n بسته به این‌که چه روش انتگرال‌گیری عددی به‌کار رفته باشد تابعی از عوامل مختلف مثل دوران ، سرعت و شتاب زاویه‌ای، در همان گام زمانی یا گام‌های قبلی است.

B_n معمولاً متناسب است با معکوس زمان به توان دو . مثلاً در روش نیومارک برابر است با :

$$B_n = \frac{-1}{\beta \Delta T^2}\left[x(t_{i-1}) + \Delta T \dot{x}(t_{i-1}) + (0.5-\beta)\Delta T^2 \ddot{x}(t_{i-1})\right] \qquad (۳-۴)$$

D_n که ضریب θ_n در معادله (۳-۲) است با توان دوم معکوس گام زمانی متناسب بوده و در هرگام ثابت فرض می‌گردد.

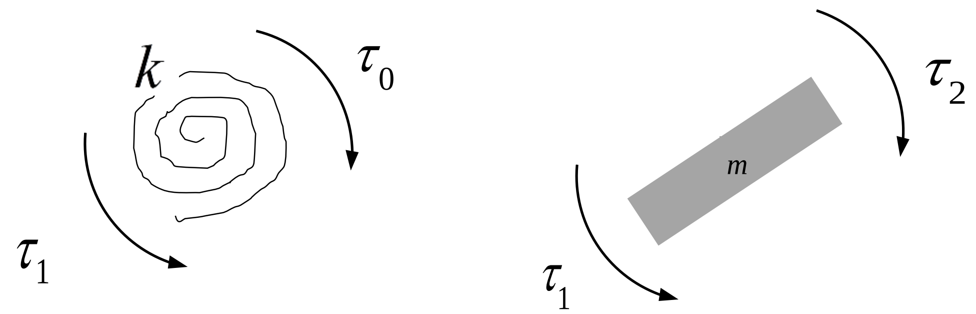
D_n در روش نیومارک برابر است با:

$$D_n = \frac{\gamma}{\beta \Delta T} \qquad (۳-۵)$$

E_n در معادله (۳-۲) تابعی از عوامل مختلف همچون دوران ، سرعت و شتاب در همان گام یا گام‌های زمانی قبلی است. این ضریب در روش نیومارک بتا برابر است با:

$$E_n = \dot{\theta}(t_{i-1}) + \Delta T\left[(1-\gamma)\ddot{\theta}(t_{i-1}) + (\gamma\beta_n)\right] \qquad (۳-۶)$$

β و γ اعداد ثابتی‌اند و به دقت و تغییر شتاب در هر گام وابسته‌اند. برای مثال اگر شتاب در هر گام زمانی به‌شکل خطی تغییر نماید، $\beta = \frac{1}{6}$ و $\gamma = \frac{1}{2}$ منظور می‌شود که در آینده به آن خواهیم پرداخت.



شکل(۲-۷) : گسترش یافته جرم وفنر سیستم یک درجه آزادی

از تعادل گشتاورها در مجموعه فنر- دمپر نتیجه می‌گردد:

$$\tau_0 = \tau_1 \qquad (۳-۷)$$

از رابطه گشتاورها در جرم نیز به‌دست می آید که:

$$\tau_2 - \tau_1 = I\ddot{\theta}_1 \qquad (۳-۸)$$

از آنجا که المان جرم صلب فرض می‌شود:

$$\theta_2 = \theta_1 \qquad (۳-۹)$$

بـرای ادغـام انتگـرال‌گیـری عـددی و روش‌هـای مـاتریس انتقـال معادلـه‌هـای (۳-۱) و (۳-۲) بایست در معادله‌های (۳-۸) و (۳-۹) قرار داده شوند:

$$\tau_0 = \tau_1 = k\left(\theta_1(t_i) - \theta_0(t_i)\right) + c\left[\left(D_1(t_i)\theta_1(t_i) + E_1(t_i)\right) - \left(D_0(t_i)\theta_0(t_i) + E_0(t_i)\right)\right] \qquad (۳-۱۰)$$

که اگر براساس θ_1 نوشته شود:

$$\theta_1 = \frac{(cD_0 + k)\theta_0}{(cD_1 + k)} + \frac{\tau_0}{(cD_1 + k)} + \frac{c(E_0 - E_1)}{(cD_1 + k)} \qquad (۳-۱۱)$$

معادله‌های (۳-۷) و (۳-۱۱) را به‌شکل ماتریسی در می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(cD_0 + k)}{(cD_1 + k)} & \frac{1}{(cD_1 + k)} & \frac{c(E_0 - E_1)}{(cD_1 + k)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \tau_0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۱۲)$$

U_{sd} مـاتریس انتقـال مجموعـه بـا بردارهـای حالـت انتقـال از نقطـه صـفر بـه نقطـه یـک تعریـف می‌گردد:

$$U_{sd} = \begin{bmatrix} \frac{(cD_0 + k)}{(cD_1 + k)} & \frac{1}{(cD_1 + k)} & \frac{c(E_0 - E_1)}{(cD_1 + k)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۱۳)$$

از آنجا که در سیستم یک درجه آزادی تنها یک وضعیت موجود است پس D_0 و E_0 صفر می‌شوند.

معادله (۳-۱) برای به‌دست آوردن ماتریس انتقال جرمm به معادله (۳-۸) افزوده می‌گردد:

$$\tau_2 - \tau_1 = I\left[A_1(t_i)\theta_n(t_i) + B_1(t_i)\right] \tag{۱۴-۳}$$

که τ_2 از آن به‌دست می‌آید:

$$\tau_2 = \tau_1 + IA_1(t_i)\theta_n(t_i) + IB_1(t_i) \tag{۱۵-۳}$$

بنابراین معادله‌های (۳-۹) و (۳-۱۵) را به‌شکل ماتریسی می‌شوند:

$$\begin{bmatrix}\theta_2\\ \tau_2\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ IA_1 & 1 & IB_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \tau_1\\ 1\end{bmatrix} \tag{۱۶-۳}$$

U_m در این روش، ماتریس انتقال جرمی از بردارهای حالت انتقال از نقطه یک به دو تعریف می‌گردد :

$$U_m = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ IA_1 & 1 & IB_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{۱۷-۳}$$

همچنین ماتریس U_τ که برای ماتریس انتقال گسسته، مانند روش قبل آن است:

$$U_\tau = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -T\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{۱۸-۳}$$

اینک با تعیین ماتریس‌های انتقال فنر- دمپر، جرم و گشتاور، ماتریس انتقال کل سیستم قابل محاسبه است.

روش جمع ماتریس‌ها در این روش نیز مانند روش غیرگسسته است؛ از نقطه‌ی پایانی آغاز و به نقطه‌ی اولیه ختم می‌گردد :

$$U_{sys} = U_\tau U_m U_{sd} \tag{۱۹-۳}$$

بردار حالت پایه می‌شود :

$$Z_{base} = \begin{bmatrix}\theta_{base}\\ \tau_{base}\\ 1\end{bmatrix} \tag{۲۰-۳}$$

و بردار حالت نهایی :

$$Z_{end} = \begin{bmatrix} \theta_{end} \\ \tau_{end} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۱)$$

بامنظورکردن شرایط مرزی زیر:

$$\tau_{end} = 0 \qquad (۳-۲۲)$$

$$\theta_{base} = 0 \qquad (۳-۲۳)$$

بردارهای حالت پایه و انتهایی خواهند شد:

$$Z_{base} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{base} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۴)$$

$$Z_{end} = \begin{bmatrix} \theta_{end} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۵)$$

با معلوم بودن U_{sys} :

$$Z_{end} = U_{sys} Z_{base} \qquad (۳-۲۶)$$

می‌توان U_{sys} را به‌شکل زیر بازنویسی کرد:

$$U_{sys} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۷)$$

با منظور کردن Z_{end} ، Z_{base} و U_{sys} در معادله‌ی(۳-۲۶):

$$\begin{bmatrix} \theta_{end} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{base} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۸)$$

θ_{end} و τ_{base} در سطر دوم معادله‌ی اخیر مجهول اند.

$$U_{22}\tau_{base} + U_{23} = 0 \qquad (۳-۲۹)$$

بردار حالت پایه خواهد شد:

$$Z_{base}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{-U_{23}}{U_{22}}\\ 1\end{bmatrix} \qquad (۳-۳۰)$$

با تعیین Z_{base} بردار حالت هر نقطه در سیستم قابل محاسبه است .

بردارحالت برای نقطه‌ی دو:

$$Z_2=Z_m=U_fU_mU_{sd}Z_{base} \qquad (۳-۳۱)$$

و بردار حالت نقطه‌ی یک:

$$Z_1=U_{sd}Z_{base} \qquad (۳-۳۲)$$

حالا با دراختیار داشتن شرایط ورودی یعنی θ_0 و $\dot{\theta}_0$ می‌توان جابجایی سیستم را در طول زمان به‌همراه یک خروجی در قلمرو زمان به‌دست آورد.

۳-۲- انتگرال‌گیری عددی و روش‌ها

بیشتر معادلات دیفرانسیل زمانی پاسخ دقیقی ندارند بنابراین روش انتگرال‌گیری عددی راهی مناسب برای به‌دست آوردن پاسخ با دقت قابل قبول است. دو نوع انتگرال‌گیری عددی وجود دارد: صریح[۹] و ضمنی[۱۰].

۳-۲-۱- روش صریح

روش‌صریح روشی مستقیم است بدین معنی که θ_{n+1} با دراختیار داشتن θ_n محاسبه می‌شود.

برای درک بهتر، مثال ساده‌ی زیر آورده می‌شود:

$$\dot{\theta}=f\left(\theta,t\right) \qquad (۳-۳۳)$$

9 - Explicit
10 - Implicit

با تقسم زمان به N گام ، Δtبرابر با گام زمانی شده و معادله‌ی (۳-۳۳) به‌شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\dot{\theta}_n = f\left(\theta_n, t_n\right) \qquad (۳-۳۴)$$

با استفاده از تعریف مشتق در گام زمانی n :

$$\dot{\theta}_n = \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\Delta t} \qquad (۳-۳۵)$$

با منظور کردن آن در معادله‌ی (۳-۳۴):

$$\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\Delta t} = f\left(\theta_n, t_n\right) \qquad (۳-۳۶)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t f\left(\theta_n, t_n\right) \qquad (۳-۳۷)$$

پس θ_{n+1} با داشتن θ_n قابل محاسبه است. این بدین معناست که با داشتن شرایط ورودی θ و $\dot{\theta}$، یک پاسخ با تقریب خوب در زمان t قابل محاسبه است.

۳-۲-۲- روش ضمنی

روش ضمنی روشی بازگشتی است که تفاوت آن با روش صریح در تعریف مشتقِ بکاررفته است. با فرض اینکه مشتق در گام n به‌شکل زیر تعریف شود:

$$\dot{\theta}_n = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta t} \qquad (۳-۳۸)$$

پس نتیجه می‌شود :

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta t} = f\left(\theta_n, t_n\right) \qquad (۳-۳۹)$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \Delta t f\left(\theta_n, t_n\right) \qquad (۳-۴۰)$$

با افزایش زیرنویس‌ها به‌اندازه‌ی یک واحد معادله‌ی زیر برای θ_{n+1} به‌دست می‌آید:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t f\left(\theta_{n+1}, t_{n+1}\right) \qquad (۴۱-۳)$$

پس برای محاسبه‌ی θ_{n+1} در هر گام معادله‌ی (۳-۴۱) باید حل گردد.

۳-۳- روش‌های انتگرال‌گیری عددی در روش ماتریس انتقال گسسته

پنج روش انتگرال‌گیری عددی به‌منظور استفاده در روش ماتریس انتقال گسسته بدین شرحند:

۱. فاکس_ اویلر
۲. ویلسون تتا
۳. نیومارک بتا
۴. هوبولت
۵. روش پیشنهادی

۳-۳-۱- روش فاکس _ اویلر[۱۲]

در میان روش‌های ارائه شده روش فاکس اویلر را می‌توان ساده‌ترین مورد دانست . در این روش، فرض بر ثابت بودن شتاب یعنی $\ddot{\theta}_n$ در طول هر گام زمانی است که برابر با شتاب نقطه‌ی پایانی در گام زمانی مربوطه فرض می‌شود. در این روش از بسط تیلور استفاده شده است. با فرض ثبات شتاب، تنها تا جمله‌ی سوم این بسط، عبارت‌ها غیر صفر خواهند بود. بسط تیلور بدین قرار است:

$$\theta\left(t_i\right) = \theta\left(t_{i-1}\right) + \Delta T \dot{\theta}\left(t_{i-1}\right) + \frac{\Delta T^2}{2} \ddot{\theta}\left(t_i\right) \qquad (۴۲-۳)$$

معادله بر اساس $\ddot{\theta}(t_i)$ می‌شود:

$$\ddot{\theta}\left(t_i\right) = \frac{2}{\Delta T^2}\left[\theta\left(t_i\right) - \theta\left(t_{i-1}\right) - \Delta T \dot{\theta}\left(t_{i-1}\right)\right] \qquad (۴۳-۳)$$

اینک لازم است معادله‌ی (۳-۴۳) به‌شکل مطلوب درآورده شود:

$$\ddot{\theta}_n\left(t_i\right) = A_n\left(t_i\right)\theta_n\left(t_i\right) + B_n\left(t_i\right) \qquad (۴۴-۳)$$

بدین ترتیب معادله‌ی (۳-۴۴) به‌شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{\theta}(t_i)=\frac{2}{\Delta T^2}\theta(t_i)-\frac{2}{\Delta T^2}\left[\theta(t_{i-1})+\Delta T\dot{\theta}(t_{i-1})\right] \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

از این معادله دو ضریب A_n و B_n برای روش ماتریس انتقال گسسته به‌دست می‌آیند .

ضرایب D_n و E_n نیز در معادله‌ی سرعت ظاهر می‌شوند. معادله‌ی (۳-۴۶) معادله‌ی سرعت دورانی است در حالتی که شتاب ثابت باشد:

$$\dot{\theta}(t_i)=\ddot{\theta}(t_i)\Delta T+\dot{\theta}(t_{i-1}) \qquad (۴۶\text{-}۳)$$

با افزودن معادله‌ی(۳-۴۵) به (۳-۴۶) :

$$\dot{\theta}(t_i)=\frac{2}{\Delta T}\theta(t_i)-\frac{2}{\Delta T}\left[\theta(t_{i-1})+\Delta T\dot{\theta}(t_{i-1})\right]+\dot{\theta}(t_{i-1}) \qquad (۴۷\text{-}۳)$$

معادله‌ی خطی شده سرعت :

$$\dot{\theta}_n(t_i)=D_n(t_i)\theta_n(t_i)+E_n(t_i) \qquad (۴۸\text{-}۳)$$

با تطبیق معادله‌های(۳-۴۷) و (۳-۴۸) نتیجه می‌شود:

$$\dot{\theta}(t_i)=\frac{2}{\Delta T}\theta(t_i)-\left[\frac{2}{\Delta T}\theta(t_{i-1})+\dot{\theta}(t_{i-1})\right] \qquad (۴۹\text{-}۳)$$

بر این اساس ضرایب خطی سازی در این روش خواهند شد:

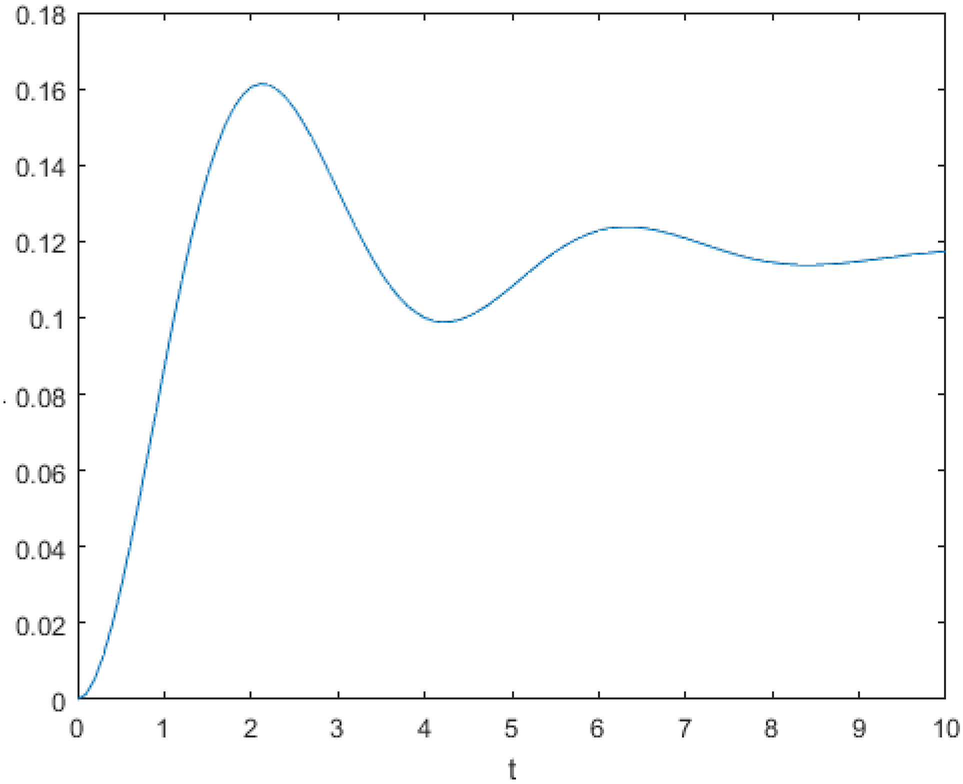
جدول (۳-۱) : ضرایب روش فاکس اویلر

$A_n(t_i)$	$\frac{2}{\Delta T^2}$
$B_n(t_i)$	$-\frac{2}{\Delta T^2}[\theta(t_{i-1})+\Delta T\dot{\theta}(t_{i-1})]$
$D_n(t_i)$	$\frac{2}{\Delta T}$
$E_n(t_i)$	$-[\frac{2}{\Delta T}\theta(t_{i-1})+\dot{\theta}(t_{i-1})]$

با مقادیر فرضی زیر برای سیستم دو درجه آزادی بیان شده نمودار حاصل به کمک نرم‌افزار متلب به‌دست می‌آید. این مقادیر برای هر پنج روش یکسانند.

جدول(۳-۲) : مقادیر اعمال شده در نمونه

جرم	M(kg)	[5,5]
فنریت	K(N/m)	[20,20]
میرایی	C(N/m^2)	[5,5]
گشتاور	**τ**(N.M)	[0,1]



شکل (۳-۱) : نمودار روش فاکس-اویلر

۳-۳-۲ روش نیومارک بتا[۱۲]

در روش فاکس اویلر فرض بر ثابت بودن شتاب بود. در روش نیومارک_ بتا، شتاب‌های زاویه‌ای تغییراتی دارند البته به‌شکل خطی.

پارامترهای β و γ در این روش ضرایب جمله‌ی مرتبه‌ی سوم بسط تیلور هستند که می‌توانند برای دریافت پاسخ بهتر تغییر نمایند. سری تیلور برای θ_{i+1} این بار تا مشتق مرتبه‌ی سوم نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\theta(t_{i+1}) &= \theta(t_i)+\Delta T\dot{\theta}(t_i)+\frac{\Delta T^2}{2}\ddot{\theta}(t_i)+\frac{\Delta T^3}{6}\dddot{\theta}(t_i)\\ \dot{\theta}(t_{i+1}) &= \dot{\theta}(t_i)+\Delta T\ddot{\theta}(t_i)+\frac{\Delta T^2}{2}\dddot{\theta}(t_i)\end{aligned} \tag{۵۰-۳}$$

β و γ به‌ترتیب در معادله براساس دوران و سرعت زاویه‌ای ظاهر می‌گردند:

$$\theta(t_{i+1}) = \theta(t_i)+\Delta T\dot{\theta}(t_i)+\frac{\Delta T^2}{2}\ddot{\theta}(t_i)+\left(\beta\Delta T^3\right)\dddot{\theta}(t_i) \tag{۵۱-۳}$$

$$\dot{\theta}(t_{i+1}) = \dot{\theta}(t_i)+\Delta T\ddot{\theta}(t_i)+\left(\gamma\Delta T^2\right)\dddot{\theta}(t_i) \tag{۵۲-۳}$$

با فرض اینکه شتاب بین گام‌ها بطور خطی تغییرکند:

$$\dddot{\theta}(t_i) = \frac{\ddot{\theta}(t_{i+1})-\ddot{\theta}(t_i)}{\Delta T} \tag{۵۳-۳}$$

حال با منظور کردن معادله‌ی (۳-۵۳) در معادله‌های (۳-۵۱) و (۳-۵۲):

$$\theta(t_{i+1}) = \theta(t_i)+\Delta T\dot{\theta}(t_i)+(0.5-\beta)\Delta T^2\ddot{\theta}(t_i)+\beta\Delta T^2\ddot{\theta}(t_{i+1}) \tag{۵۴-۳}$$

$$\dot{\theta}(t_{i+1}) = \dot{\theta}(t_i)+(1-\gamma)\Delta T\ddot{\theta}(t_i)+\gamma\Delta T\ddot{\theta}(t_{i+1}) \tag{۵۵-۳}$$

معادله‌های (۳-۵۴) و (۳-۵۵) برای محاسبه سرعت و شتاب به‌شکل زیر در می‌آیند:

$$\ddot{\theta}(t_{i+1}) = (\frac{1}{\beta \Delta T^2})(\theta(t_{i+1}) - \theta(t_i)) - (\frac{1}{\beta \Delta T})\dot{\theta}(t_i) - (\frac{1}{2\beta} - 1)\ddot{\theta}(t_i) \qquad (۳-۵۶)$$

$$\dot{\theta}(t_{i+1}) = (\frac{1}{\beta \Delta T})(\theta(t_{i+1}) - \theta(t_i)) - (\frac{\gamma}{\beta} - 1)\dot{\theta}(t_i) - \Delta T(\frac{\gamma}{2\beta} - 1)\ddot{\theta}(t_i) \qquad (۳-۵۷)$$

در ادامه برای استفاده از روش نیومارک_ بتا در روش ماتریس انتقال گسسته:

$$\ddot{\theta}(t_{i+1}) = (\frac{1}{\beta \Delta T^2})\theta(t_{i+1}) - (\frac{1}{\beta \Delta T^2})(\theta(t_i) + \Delta T\dot{\theta}(t_i) + (0.5 - \beta)\Delta T^2\ddot{\theta}(t_i)) \qquad (۳-۵۸)$$

$$\dot{\theta}(t_{i+1}) = (\frac{\gamma}{\beta \Delta T})\theta(t_{i+1}) + \dot{\theta}(t_i) + \Delta T[(1-\gamma)\ddot{\theta}(t_i) + \gamma B] \qquad (۳-۵۹)$$

در نهایت ضرایب در آن به‌شرح زیر به‌دست می‌آیند:

جدول(۳-۳) : ضرایب روش نیومارک بتا

$A_n(t_i)$	$\frac{2}{\beta \Delta T^2}$
$B_n(t_i)$	$-\frac{2}{\beta \Delta T^2}[\theta(t_{i-1}) + \Delta T\dot{\theta}(t_{i-1}) + (0.5-\beta)\Delta T^2\ddot{\theta}(t_{i-1})]$
$D_n(t_i)$	$\frac{\gamma}{\beta \Delta T}$
$E_n(t_i)$	$\dot{\theta}(t_{i-1}) + \Delta T[(1-\gamma) \times \ddot{\theta}(t_{i-1}) + \gamma B_n]$

β و γ بر اساس دقت مورد نیاز و پایداری سیستم قابل تغییرند. مانند موارد زیر:

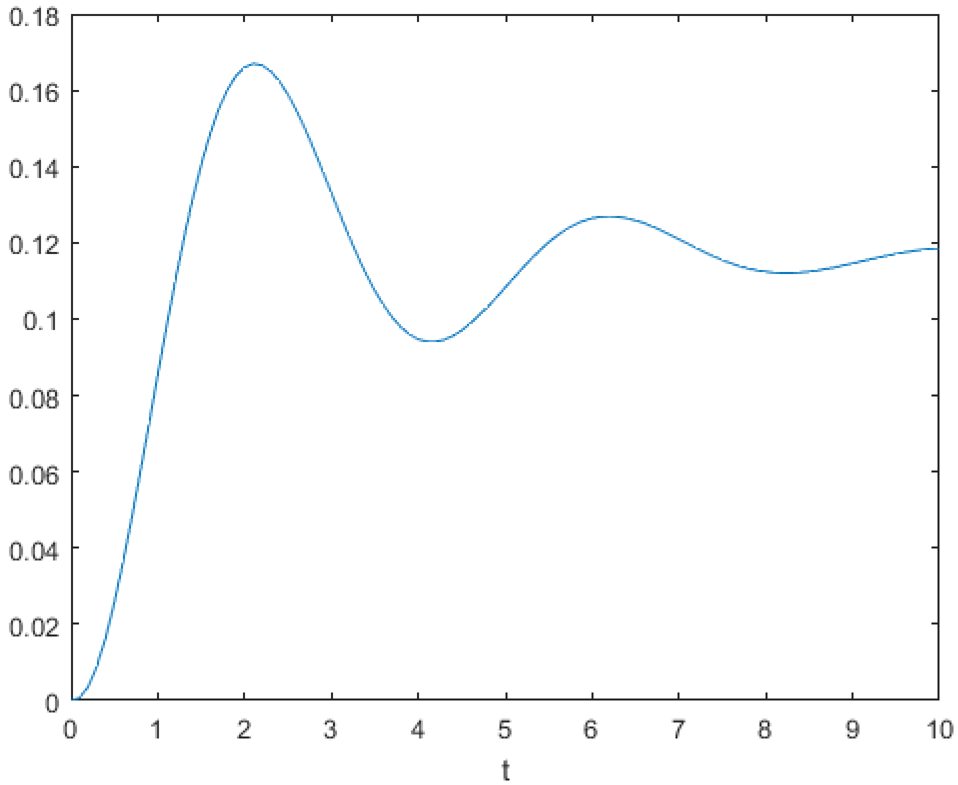
۱- $\beta = \frac{1}{6}, \gamma = 0.5$ بدین معناست که شتاب در هر گام به‌شکل خطی تغیر می‌کند.

۲- $\beta = 0, \gamma = 0.5$ در این حالت شتاب ثابت و برابر مقدارش در نقطه ابتدایی هر گام است.

۳- $\beta=\frac{1}{8},\gamma=0.5$ که در آن شتاب ثابت و برابر مقدارش در ابتدای گام و وسط بازه زمانی $(\ddot{\theta}(t_i):t_{i+1}-t_i+\frac{\Delta T}{2})$ و سپس تغییر می‌کند به شتاب نقطه پایانی $(\ddot{\theta}(t_{i+1}):t_i+\frac{\Delta T}{2}-t_{i+1})$

۴- $\beta=\frac{1}{4},\gamma=0.5$ بدین معناست که شتاب ثابت فرض می‌شود و برابر است با میانگین شتاب در نقاط ابتدا و انتها گام یعنی $(\frac{\ddot{\theta}(t_{i+1})+\ddot{\theta}(t_i)}{2})$.

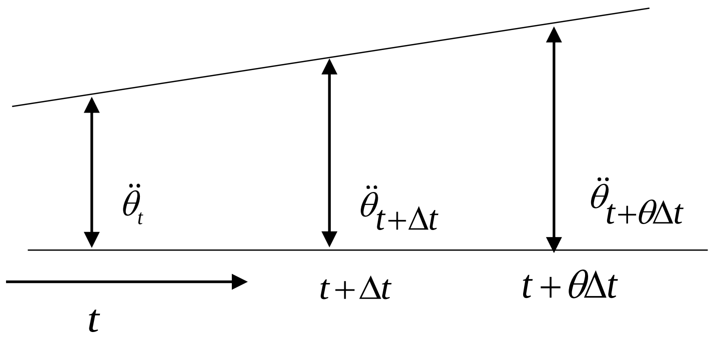
پاسخ های سیستم دو درجه آزادی بر پایه‌ی روش نیومارک_ بتا در روش ماتریس انتقال گسسته با مقادیر مختلف β در مقایسه بایکدیگر بسیار به هم نزدیکند. ولی درسیستم‌های پیچیده‌تر، کمی از دقت آنها کاسته می‌شود.



شکل(۳-۲) : نمودار روش نیومارک بتا

۳-۳-۳- روش ویلسون تتا[۱۲]

روش ویلسون تتا بر اساس تغییرات خطی شتاب *نسبت* به زمان تعریف گردیده است. در این روش دیگر از بسط تیلور استفاده نشده است. شکل زیر تغییر خطی شتاب را از زمان t تا $t+\theta\Delta T$ وقتی که $\theta \geq 1$ نشان می‌دهد:



شکل(۳-۳): تعریف شتاب در روش ویلسون تـ

از زمان t تا $t+\theta\Delta T$:

$$\ddot{\theta}_{t+T} = \ddot{\theta}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta T}(\ddot{\theta}_{t+\theta\Delta T} - \ddot{\theta}_t) \qquad (۶۰-۳)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله سرعت و جابجایی سیستم قابل استخراج است:

$$\dot{\theta}_{t+\tau} = \dot{\theta}_t + \ddot{\theta}_t\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta T}(\ddot{\theta}_{t+\theta\Delta T} - \ddot{\theta}_t) \qquad (۶۱-۳)$$

$$\theta_{t+\tau} = \theta_t + \dot{\theta}_t\tau + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_t\tau^2 + \frac{T^3}{6\theta\Delta T}(\ddot{\theta}_{t+\theta\Delta T} - \ddot{\theta}_t) \qquad (۶۲-۳)$$

با قرار دادن $\tau = \theta\Delta T$:

$$\dot{\theta}_{t+\theta\Delta T} = \dot{\theta}_t + \frac{\theta\Delta T}{2}(\ddot{\theta}_t + \ddot{\theta}_{t+\theta\Delta T}) \qquad (۶۳-۳)$$

$$\theta_{t+\theta\Delta T} = \theta_t + \theta\Delta T\dot{\theta}_t + \frac{\theta^2\Delta T^2}{6}(2\ddot{\theta}_t + \ddot{\theta}_{t+\theta\Delta T}) \qquad (۶۴-۳)$$

که با مرتب سازی خواهد شد:

$$\ddot{\theta}_{t+\theta\Delta T} = \frac{6}{\theta^2\Delta T^2}\theta_{t+\theta\Delta T} - \frac{6}{\theta^2\Delta T^2}\theta_t - \frac{6}{\theta\Delta T}\dot{\theta}_t - 2\ddot{\theta}_t \tag{۶۵-۳}$$

$$\dot{\theta}_{t+\theta\Delta T} = \frac{3}{\theta\Delta T}\theta_{t+\theta\Delta T} - \frac{3}{\theta\Delta T}\theta_t - \frac{\theta\Delta T}{2}\ddot{\theta}_t - 2\dot{\theta}_t \tag{۶۶-۳}$$

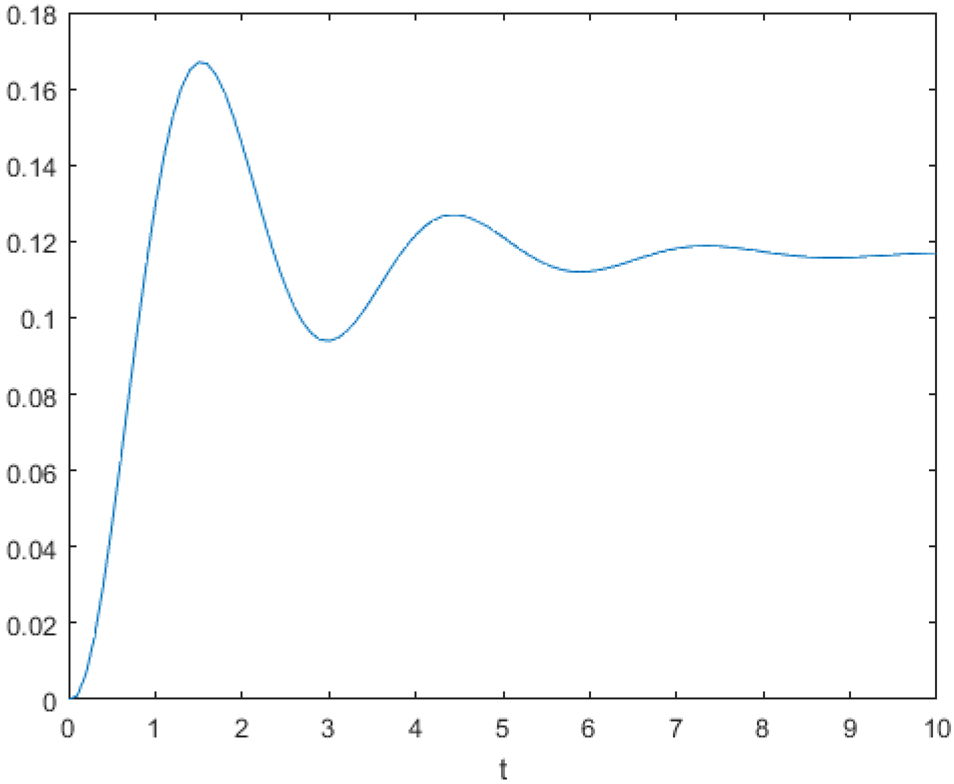
بدین ترتیب ضرایب این روش به‌دست می‌آیند:

جدول (۳-۴) : ضرایب روش ویلسون تتا

$A_n(t_i)$	$\frac{2}{\Delta T^2}$
$B_n(t_i)$	$-\frac{6}{(\theta\Delta T)^2}[\theta(t_{i-1}) + \theta\Delta T\dot{\theta}(t_{i-1}) + \frac{(\theta\Delta T)^2}{3}\ddot{\theta}(t_{i-1})]$
$D_n(t_i)$	$\frac{3}{\theta\Delta T}$
$E_n(t_i)$	$-\frac{3}{\theta\Delta T}[\theta(t_{i-1}) + \frac{2\theta\Delta T}{3}\dot{\theta}(t_{i-1}) + \frac{(\theta\Delta T)^2}{3}\ddot{\theta}(t_{i-1})]$

هنگامی که $\theta = 1$ است، روش ویلسون تتا برابر با روش نیومارک بتا در حالت $\beta = \frac{1}{6}$ و $\gamma = 0.5$ است

.



شکل(۳-۴) : نمودار روش ویلسون تتا

۳-۳-۴- روش هوبولت[۱۲]

روش هوبولت یک روش ضمنی است که مقدار دوران دوگام قبلی در آن موردنیاز است. معادلات زیر از سری تیلور گرفته شده‌اند:

$$\theta_t = \theta_{t+\Delta T} - \Delta T \dot{\theta}_{t+\Delta T} + \frac{\Delta T^2}{2} \ddot{\theta}_{t+\Delta T} - \frac{\Delta T^3}{6} \dddot{\theta}_{t+\Delta T} \tag{۶۷-۳}$$

$$\theta_{t-\Delta T} = \theta_{t+\Delta T} - 2\Delta T \dot{\theta}_{t+\Delta T} + \frac{(2\Delta T)^2}{2} \ddot{\theta}_{t+\Delta T} - \frac{(2\Delta T)^3}{6} \dddot{\theta}_{t+\Delta T} \tag{۶۸-۳}$$

$$\theta_{t-2\Delta T} = \theta_{t+\Delta T} - 3\Delta T \dot{\theta}_{t+\Delta T} + \frac{(3\Delta T)^2}{2} \ddot{\theta}_{t+\Delta T} - \frac{(3\Delta T)^3}{6} \dddot{\theta}_{t+\Delta T} \tag{۶۹-۳}$$

با خارج‌کردن عبارت‌های سرعت و شتاب از معادلات (۳-۶۷) تا (۳-۶۹)، خواهیم داشت :

$$\dot{\theta}_{t+\Delta T}=\frac{1}{6\Delta T}(11\theta_{t+\Delta T}-18\theta_t+9\theta_{t-\Delta T}-2\theta_{t-2\Delta T})$$ (۳-۷۰)

$$\ddot{\theta}_{t+\Delta T}=\frac{1}{\Delta T^2}(2\theta_{t+\Delta T}-5\theta_t+4\theta_{t-\Delta T}-\theta_{t-2\Delta T})$$ (۳-۷۱)

بدین ترتیب در حالتی که $i=1$ باشد ضرایب این روش به‌شرح زیر می‌گردند :

جدول (۳-۵) : ضرایب روش هوبولت در i =۱

$A_n(t_i)$	$\frac{6}{\Delta T^2}$
$B_n(t_i)$	$-\frac{2}{\Delta T^2}[3\theta(t_{i-1})+3\Delta T\dot{\theta}(t_{i-1})+\Delta T^2\ddot{\theta}(t_{i-1})]$
$D_n(t_i)$	$\frac{3}{\Delta T}$
$E_n(t_i)$	$-\frac{1}{2\Delta T}[6\theta(t_{i-1})+4\dot{\theta}(t_{i-1})\Delta t+\Delta T^2\ddot{\theta}\left(t_{i-1}\right)]$

در حالت $i=2$:

جدول(۳-۶) : ضرایب روش هوبولت در i =۲

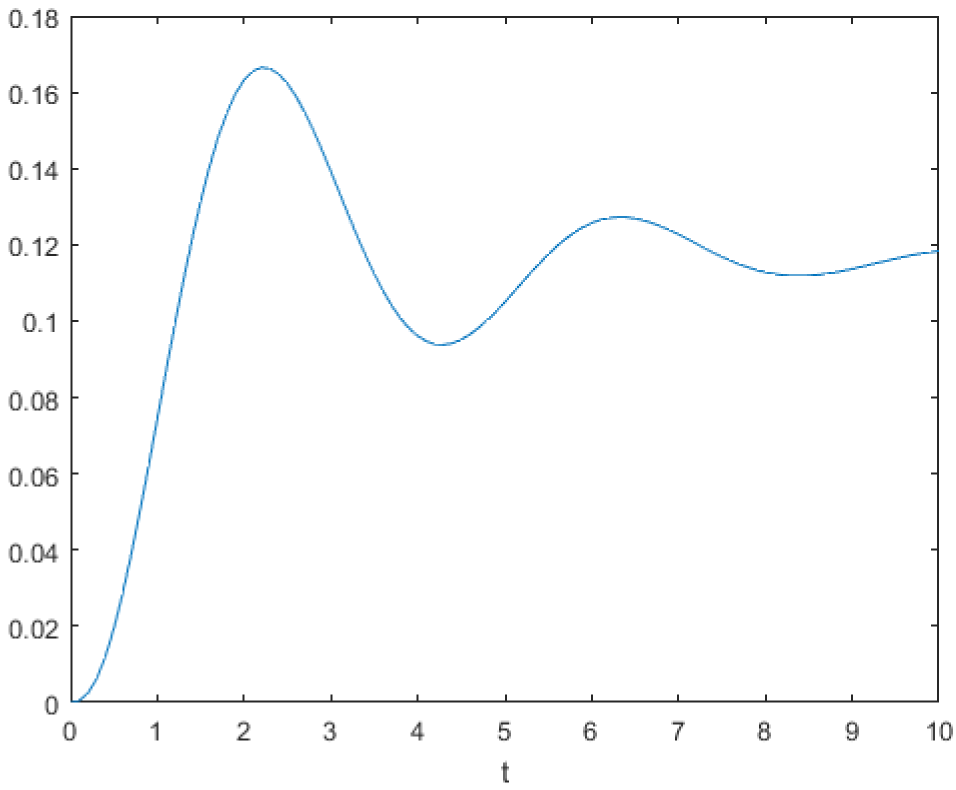
$A_n(t_i)$	$\frac{2}{\Delta T^2}$
$B_n(t_i)$	$-\frac{1}{\Delta T^2}[4\theta(t_{i-1})-2\theta(t_{i-2})+2\Delta T^2\ddot{\theta}(t_{i-2})]$
$D_n(t_i)$	$\frac{11}{6\Delta T}$
$E_n(t_i)$	$-\frac{1}{6\Delta T}[16\theta(t_{i-1})-5\theta(t_{i-2})+\Delta T^2\ddot{\theta}\left(t_{i-2}\right)]$

و برای حالت $i \geq 3$:

جدول (۳-۷) : ضرایب روش هوبولت در $i \geq ۳$

$A_n(t_i)$	$\frac{2}{\Delta T^2}$
$B_n(t_i)$	$-\frac{1}{\Delta T^2}[5\theta(t_{i-1})-4\theta(t_{i-2})+\theta(t_{i-3})]$
$D_n(t_i)$	$\frac{11}{6\Delta T}$
$E_n(t_i)$	$-\frac{1}{6\Delta T}[18\theta(t_{i-1})-9\theta(t_{i-2})+2\theta\left(t_{i-3}\right)]$

و نمودار این روش خواهد شد:



شکل(۳-۵) : نمودار روش هوبولت

در مقایسه این چهار روش یک سیستم بزرگ ۱۵درجه آزادی توسط اساتید سنکار و کومار بررسی شدند[۱۲]. این سیستم شامل جرم و فنر و بدون دمپر بود.

دقیق‌ترین پاسخ به روش نیومارک تعلق گرفت. در مورد مناسب‌ترین β و γ هم می‌توان گفت در هنگامی به‌دست می‌آید که $\beta = \frac{1}{8}$ باشد. در آن حالت شتاب ثابت و برابر مقدار نقطه‌ی آغازین در هر بازه‌ی زمانی است یعنی: $(\ddot{\theta}(t_i): t_i - t_i + \frac{\Delta T}{2})$ و در ادامه تا شتاب نقطه‌ی پایانی $(\ddot{\theta}(t_{i+1}): t_i + \frac{\Delta T}{2} - t_{i+1})$ بهترین نتیجه را می‌دهد.

۳-۳-۵- روش پیشنهادی[۱۳]

تمامی چهار روش بیان شده ابداع سال‌های پیش از دهه‌ی نود میلادی هستند. اینک به روشی جدید در خطی‌سازی پرداخته می‌شود. بسط تیلور برای دوران و سرعت زاویه‌ای بازنویسی می‌شود $[\alpha = \ddot{\theta}]$:

$$\theta(t_{i+1}) = \theta(t_i) + \Delta T \dot{\theta}(t_i) + \frac{\Delta T^2}{2}\alpha(t_i) + \frac{\Delta T^3}{6}\dot{\alpha}(t_i)$$

$$\dot{\theta}(t_{i+1}) = \dot{\theta}(t_i) + \Delta T \alpha(t_i) + \frac{\Delta T^2}{2}\dot{\alpha}(t_i)$$

حال بر اساس تعریف مشتق برای $\dot{\alpha}(t_i)$:

$$\dot{\alpha}(t_i) = \frac{\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_{i-1})}{2\Delta T} \quad (۳-۷۲)$$

نتیجه می‌شود:

$$\dot{\theta}(t_{i+1}) = \dot{\theta}(t_i) + \lambda_1 \alpha(t_i)\Delta T + \frac{\beta_1}{4}\alpha(t_{i+1})\Delta T - \frac{\gamma_1}{4}\alpha(t_{i-1})\Delta T \quad (۳-۷۳)$$

$$\theta(t_{i+1}) = \theta(t_i) + \dot{\theta}(t_i)\Delta T + \frac{\lambda_2}{2}\alpha(t_i)\Delta T^2 + \frac{\beta_2}{12}\alpha(t_{i+1})\Delta T^2 - \frac{\gamma_2}{12}\alpha(t_{i-1})\Delta T^2 \quad (۳-۷۴)$$

ضرایب λ، β و γ به‌منظور بالا بردن دقت پاسخ در معادله‌ی پایانی، قرار داده شده‌اند که مقدار آنها در ادامه‌ی کار تعیین می گردند.

بسط تیلور در مورد $\alpha(t_{n-1})$ و $\alpha(t_{n+1})$:

$$\alpha(t_{i-1})=\alpha(t_i)-\dot{\alpha}(t_i)\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{\alpha}(t_i)\Delta t^2-\frac{1}{6}\dddot{\alpha}(t_i)\Delta t^3 \quad (۷۵\text{-}۳)$$

$$\alpha(t_{i+1})=\alpha(t_i)+\dot{\alpha}(t_i)\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{\alpha}(t_i)\Delta t^2+\frac{1}{6}\dddot{\alpha}(t_i)\Delta t^3 \quad (۷۶\text{-}۳)$$

حال با قرار دادن آنها در رابطه‌های(۳-۷۲) و (۳-۷۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t_{i+1})&=\dot{\theta}(t_i)+(\lambda_1+\frac{\beta_1}{4}-\frac{\gamma_1}{4})\alpha(t_i)\Delta t+(\frac{\beta_1+\gamma_1}{4})\dot{\alpha}(t_i)\Delta t^2+(\frac{\beta_1-\gamma_1}{8})\ddot{\alpha}(t_i)\Delta t^3\\&+\frac{(\beta+\gamma)}{24}\dddot{\alpha}(t_i)\Delta t^4+\ \dots\end{aligned} \quad (۷۷\text{-}۳)$$

$$\begin{aligned}\theta(t_{i+1})&=\theta(t_i)+\dot{\theta}(t_i)\Delta t+(\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\beta_2}{12}-\frac{\gamma_2}{12})\alpha(t_i)\Delta t^2+(\frac{\beta_2+\gamma_2}{12})\dot{\alpha}(t_i)\Delta t^3\\&+\frac{(\beta_2-\gamma_2)}{24}\ddot{\alpha}(t_i)\Delta t^4+\frac{(\beta_2+\gamma_2)}{72}\dddot{\alpha}(t_i)\Delta t^5+\ \dots\end{aligned} \quad (۷۸\text{-}۳)$$

با تطابق دو معادله‌ی (۳-۷۷) و (۳-۷۸) با معادله‌های (۳-۵۰) روابط زیر بین ضرایب اضافه‌شده

بدست می‌آیند :

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{1+\gamma_1}{2}\\\beta_1&=2-\gamma_1\\\lambda_2&=\frac{2+\gamma_2}{3}\\\beta_2&=2-\gamma_2\end{aligned} \quad (۷۹\text{-}۳)$$

با اعمال این ضریب‌ها در معادله‌های (۳-۵۰) و (۳-۷۶) نتیجه خواهد شد :

$$\dot{\theta}(t_{i+1})=\dot{\theta}(t_i)+(\frac{1+\gamma_1}{2})\alpha(t)\Delta t+(\frac{2-\gamma_1}{4})\alpha(t_{i+1})\Delta t-\frac{\gamma_1}{4}\alpha(t_{i-1})\Delta t \quad (۸۰\text{-}۳)$$

$$\theta(t_{i+1})=\theta(t_i)+\dot{\theta}(t_i)\Delta t+(\frac{2+\gamma_2}{6})\alpha(t_i)\Delta t^2+(\frac{2-\gamma_2}{12})\alpha(t_{i+1})\Delta t^2-\frac{\gamma_2}{12}\alpha(t_{i-1})\Delta t^2 \quad (۸۱\text{-}۳)$$

حال بار دیگر بسط تیلور $\alpha(t_{n-1})$ و $\alpha(t_{n+1})$ اعمال می‌شوند:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t_{i+1})&=\dot{\theta}(t_i)+\alpha(t_i)\Delta t+\frac{1}{2}\dot{\alpha}(t_i)(\Delta t)^2+\frac{1}{4}(1-\gamma_1)\ddot{\alpha}(t_i)(\Delta t)^3\\&+\frac{1}{12}\dddot{\alpha}(t_i)(\Delta t)^4+o(\Delta t)^5+\ \dots\end{aligned} \quad (۸۲\text{-}۳)$$

$$\theta(t_{i+1}) = \theta(t_i) + \dot{\theta}(t_i)\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(t_i)(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\dot{\alpha}(t_i)(\Delta t)^3$$
$$+ \frac{1}{12}(1-\gamma_2)\ddot{\alpha}(t_i)(\Delta t)^4 + \frac{1}{36}\ddot{\alpha}(t_i)(\Delta t)^5 + o(\Delta t)^6 + \ ... \qquad (۸۳-۳)$$

واضح است که صحت روش به دو ضریب مستقل γ_1 و γ_2 بستگی دارد. مقایسه‌ی بسط تیلور $\dot{\theta}(t_{i+1})$ و $\theta(t_{i+1})$ یعنی معادلات (۳-۵۰) تا یک مرتبه‌ی بالاتر با معادلات (۳-۸۲) و (۳-۸۳) ما را به مقدار خطای کلی هدایت می کند:

$$E\left[\dot{\theta}(t_{i+1})\right] = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}-\gamma_1)\ddot{\alpha}(t_i)(\Delta t)^3 + o(\Delta t)^4$$
$$E\left[\theta(t_{i+1})\right] = \frac{1}{12}(\frac{1}{2}-\gamma_2)\ddot{\alpha}(t_i)(\Delta t)^4 + o(\Delta t)^5 \qquad (۸۴-۳)$$

حال اگر $\gamma_1 = \frac{1}{3}$ و $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ باشد مقدار خطا در هر مورد دوران و سرعت از مرتبه‌ی چهار خواهد بود که سه مرتبه بالاتر از روش‌های نیومارک بتا و ویلسون تتا است.

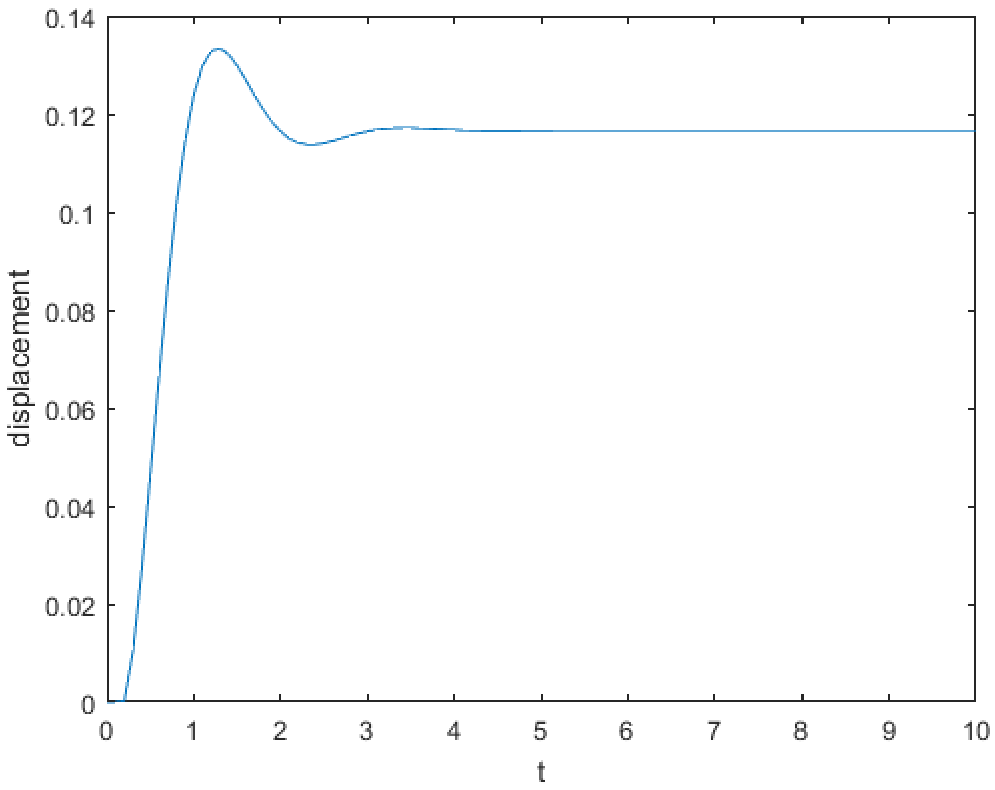
با تعیین دو مقدار γ_1 و γ_2 برای حالت ایده‌آل، مقادیر λ_1 و λ_2 و β_1 و β_2 نیز با کمک روابط (۳-۷۸) به‌دست می‌آیند. با قرار دادن آنها در روابط (۳-۷۳) و (۳-۷۴) و استخراج روابط خطی شده‌ی شتاب و سرعت ضرایب نهایی این روش محاسبه می‌شوند.

بدین ترتیب ضرایب نهایی این روش خواهند شد:

جدول(۳-۸) : ضرایب روش پیشنهادی

$A_n(t_i)$	$\frac{8}{\Delta T^2}$
$B_n(t_i)$	$-\frac{8}{\Delta t^2}\theta(t_{i-1}) - \frac{8}{\Delta t}\dot{\theta}(t_{i-1}) - \frac{10}{3}\ddot{\theta}(t_{i-1}) + \frac{1}{3}\ddot{\theta}(t_{i-2})$
$D_n(t_i)$	$\frac{10}{3\Delta T^2}$
$E_n(t_i)$	$-\frac{10}{3\Delta t^2}\theta(t_{i-1}) + (\frac{12\Delta t - 40}{12\Delta t})\dot{\theta}(t_{i-1}) + (\frac{2}{3}\Delta t - \frac{25}{18})\ddot{\theta}\left(t_{i-1}\right) + (\frac{5-3\Delta t}{36})\ddot{\theta}(t_{i-2})$

نمودار این روش بدین ترتیب به‌دست می‌آید :



شکل(۳-۶) : نمودار روش پیشنهادی

نمودارهای گذشته همه در حالت دو درجه آزادی که معادلات آنها شرح داده شد، توسط نرم افزار MATLAB به‌دست آمدند و این شیوه‌ی مدل‌سازی برای هر تعداد درجه آزادی قابل تعمیم است درصورتی که ماتریس‌های سختی فنر و گشتاور بطور یکسان و ماتریس جرم بطور متوازن انتخاب شده باشند.

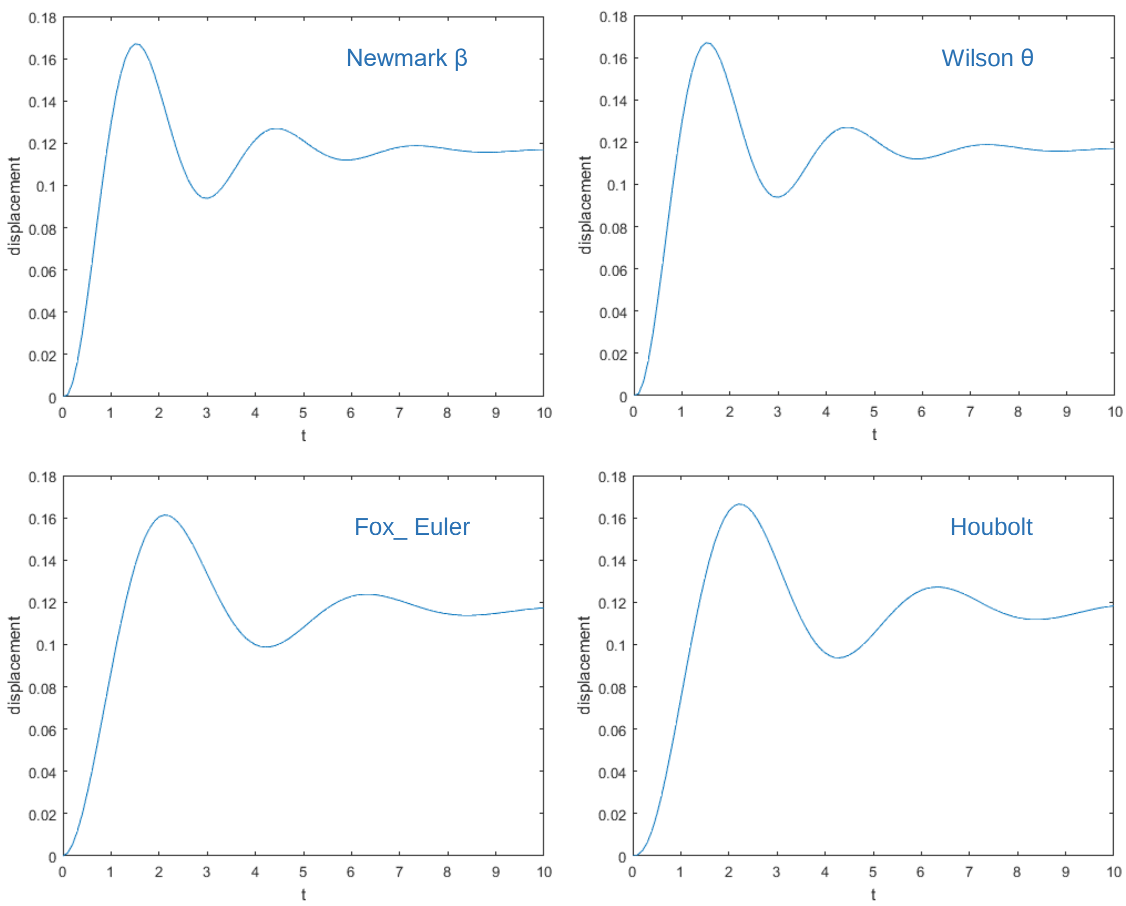
فصل چهار : نتیجه گیری

بدین ترتیب روش‌های مختلف عددی برای مدل‌سازی تیری انعطاف‌پذیر با ساختار بررسی گردید. روش‌های زیادی برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی مطرح است که هر کدام دارای مزایا و معایب خاص خود هستند.

روش ماتریس انتقال یکی از این دست روش‌هاست که در مدل‌سازی سیستم‌های بزرگ کارایی زیادی دارد. اندازه ماتریس‌ها را کاهش داده و به‌موجب آن حجم محاسبات را کاهش می‌دهد. همچنین به‌راحتی می‌توان به سیستم مورد نظر یک زیرسیستم اضافه یا کم کرد. این روش نیز مانند هر روشی محدودیت‌هایی دارد که بر کاربرد آن تأثیر منفی می‌گذارد. در این روش تنها می‌توان خروجی در قلمرو فرکانس دریافت نمود و نه پاسخ سیستم در حوزه‌ی زمان. اضافه بر آن اینکه، در استفاده از تبدیل لاپلاس، سیستم‌های غیرخطی قابل مدل شدن نیستند. برای فائق آمدن بر معایب روش ماتریس انتقال انتگرال‌گیری عددی با آن ادغام گردید . با استفاده از آن ، پاسخ واقعی سیستم در طول زمان قابل دست‌یابی شد. در روش ماتریس انتقال گسسته می‌توان خروجی در قلمرو زمان داشت. همچنین سیستم‌های غیرخطی نیز به‌وسیله آن مدل می‌گردند. روش گسسته مزایای روش کلاسیک را هم حفظ می‌کند. بدین معنا که در روش ماتریس انتقال گسسته نیز، ابعاد ماتریس‌ها کوچکتر، محاسبات کمتر و انعطاف‌پذیری زیاد است. روش‌های عددی قابل ترکیب با روش کلاسیک در این تحقیق بررسی گردیدند. هر روش عددی بسته به برخی عوامل مانند گام زمانی دقت متفاوتی دارند.

چهار روش کلاسیک عددی در روش ماتریس انتقال گسسته وارد شدند که چگونگی استفاده‌ی آنها توضیح داده شد. سپس به معرفی روشی نوین پرداخته شد و با استدلال بیان شد که میزان خطای آن به مراتب از روش‌های پیشین کمتر است.

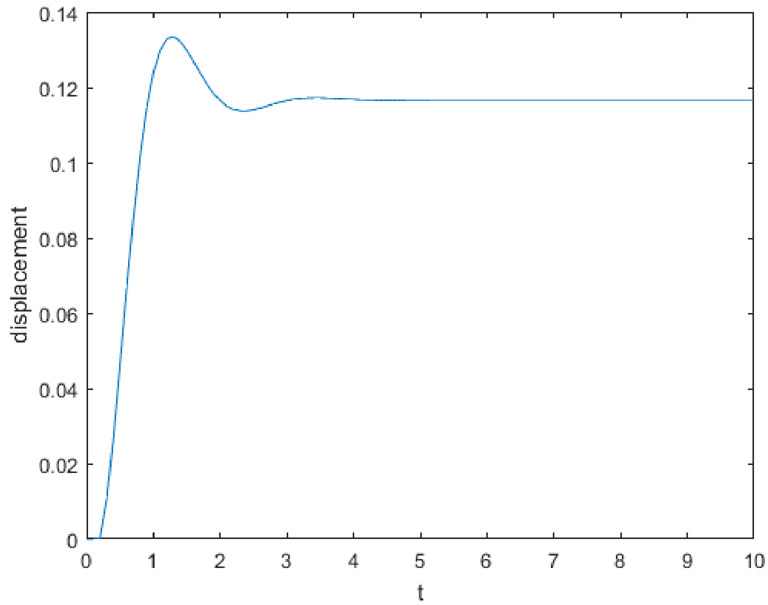
حال نتایج این پنج روش به شکل گسترده‌تر بررسی و مقایسه می‌گردند.



شکل (۴-۱): نمودار روش‌های کلاسیک در حالت دو درجه آزادی

در حالت دو درجه آزادی ، از بین روش‌های کلاسیک روش‌های نیومارک و ویلسون نتیجه بهتری داده‌اند. در روش فاکس اویلر شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض شده است که این موضوع با وجود سادگی روش، در دقت نتیجه تأثیر منفی می‌گذارد اما در روش نیومارک بتا با وارد شدن دو متغیر بتا و گاما در جمله سوم بسط تیلور بر دقت روش افزوده شد.

در حالت دو درجه همانطور که در شکل(۴-۲) آشکار است نتیجه‌ی روش نوین دارای برتری آشکاری بر روش‌های پیشین است:



شکل (۴-۲): نمودار روش نوین در حالت دو درجه آزادی

نمودار روش پیشنهادی نشان‌می دهدکه نتیجه، تنها پس ازسه ثانیه تثبیت شد. موردی که در روش‌های قدیمی، به بیش از ده ثانیه زمان نیاز داشت. ضمن آنکه این تثبیت تنها پس از دو بار نوسان شکل گرفته است. این روش توانست خطای‌کلی سیستم را به مراتب، سه مرتبه باالاتر از روش‌های گذشته، کاهش دهد و نتیجه را بطور محسوس بهبود بخشد.

درجه آزادی به ده افزایش می‌یابد.

جدول(۴-۱): مقادیر اعمال شده در نمونه آزمایشی

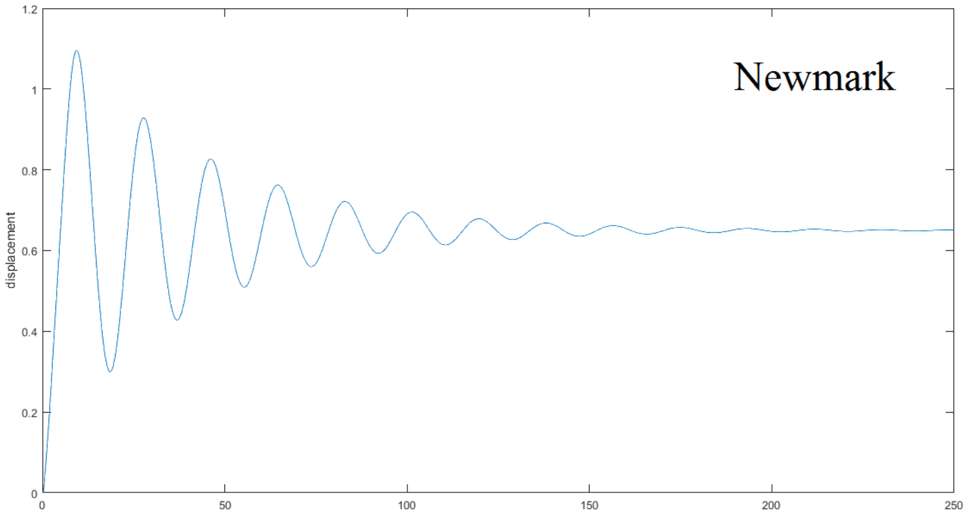
جرم	M(kg)	[1]
فنریت	K(N/m)	[20]
میرایی	C(N/m^2)	[5]
گشتاور	τ(N.m)	[0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]

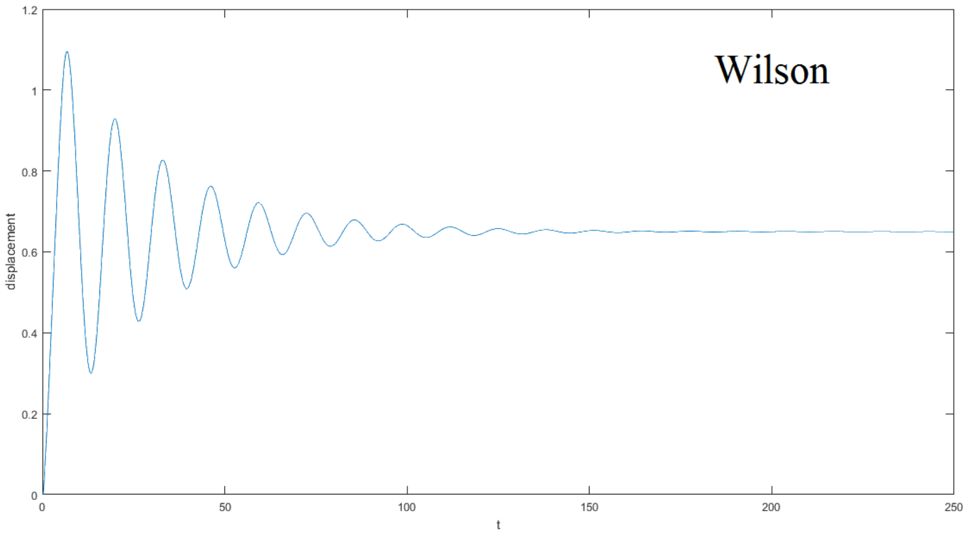
زمان انجام محاسبات در حالت ده درجه نسبت به دو درجه به شرح زیر است :

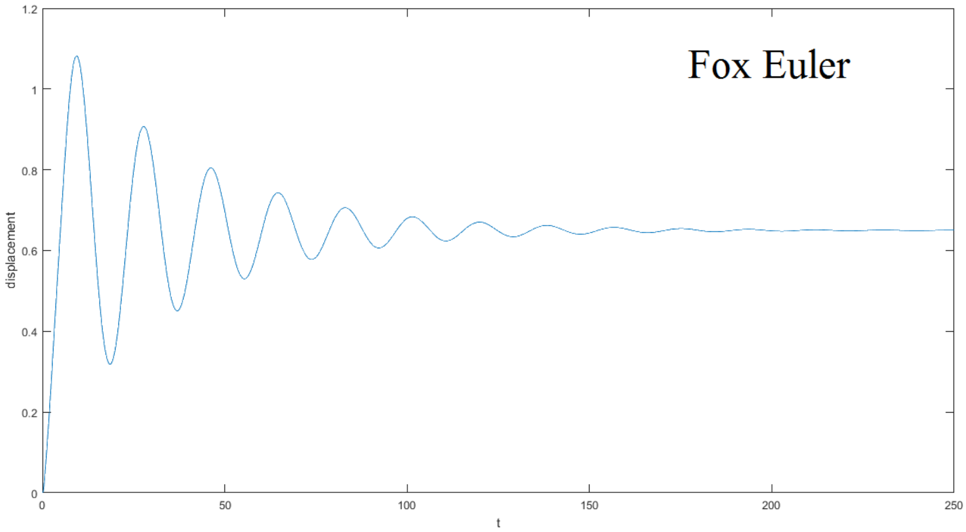
جدول(۴-۲): زمان انجام محاسبات و نسبت آنها در حالت دو و ده درجه آزادی

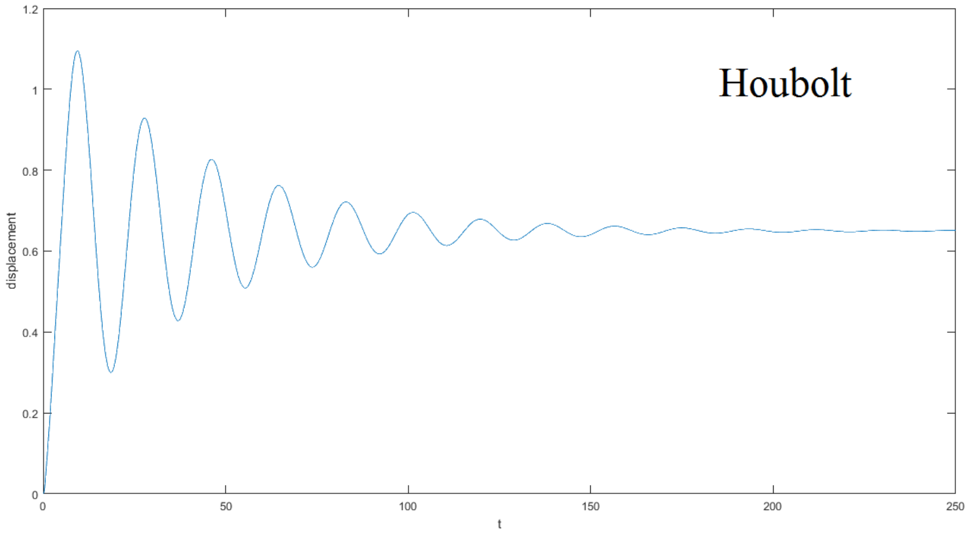
ثانیه	فاکس اویلر	نیومارک بتا	هوبولت	ویلسون تتا	روش پیشنهادی
دو درجه	۲/۴۱	۱/۹۶	۲/۴۹	۲/۰۹	۲/۷۱
ده درجه	۲/۶۲	۲/۴۳	۲/۵۸	۲/۴۵	۳/۵۳
نسبت	۱/۰۹	۱/۲۴	۱/۰۴	۱/۱۷	۱/۳۰

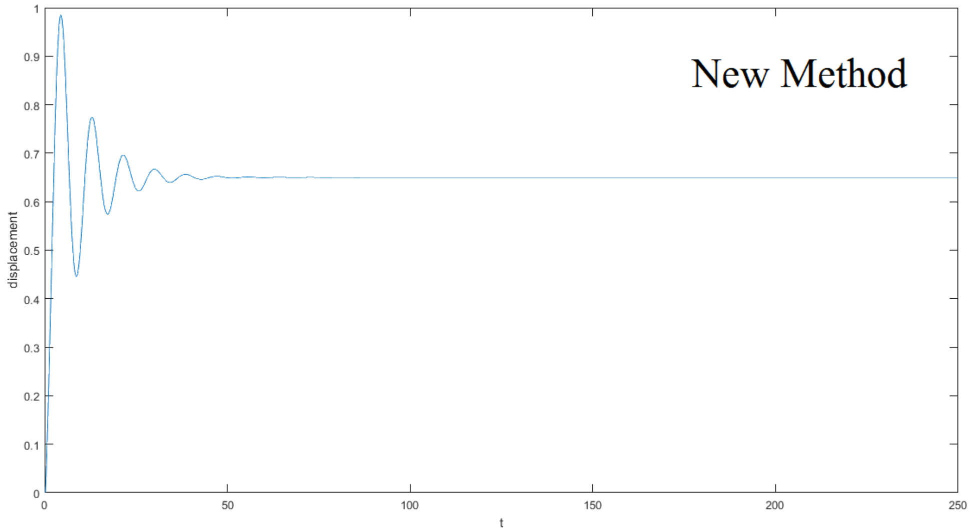
بیشترین افزایش زمان انجام محاسبات به روش پیشنهادی برمی‌گردد ولی با نگاهی به نمودار روش‌ها می‌توان به این نتیجه رسید که زمان تثبیت به عبارتی زمانی که پس از طی آن ارتعاشات نوک تیر به حد میرایی تقریبا صفر می‌رسد، در روش پیشنهادی بطور میانگین یک چهارم روش‌های دیگر است که این موضوع زمان محسبات افزایش یافته در این روش را توجیه می‌نماید. دامنه نوسانی روش‌های کلاسیک نیز حدود ۱/۱ بوده که در روش نوین به زیر یک رسیده است.


Newmark
displacement
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
50
100
150
200
250


Wilson
displacement
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
50
100
150
200
250
t


Fox Euler
displacement
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
50
100
150
200
250
t





شکل(۴-۳) : نمودارهای حالت ده درجه آزادی

باتوجه به تمامی مطالب بیان شده روش پیشنهادی می‌تواند جایگزین شایسته‌ای برای روش‌های عددی گذشته باشد.

منابع

[1] *Kumar A. S., Sankar T. S.; A new transfer matrix method for response analysis of large dynamic systems, Pergamon Journals Ltd, Vol. 23, No. 4, pp. 545-552, 1986.*

[2] Krauss R. W.; An Improved Technique for Modeling and Control of Flexible Structures, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Georgia University, USA, 2006.

[3] Krauss R. W.; Computationally efficient modeling of flexible robots using the transfer matrix method, Journal of Vibration and Control, Vol. 18, No. 5, pp. 596-608, 2011.

[4] Krauss R., Okasha M.; Discrete-Time Transfer Matrix Modeling of Flexible Robots under Feedback Control, American Control Conf, Washington, DC, USA, June 17-19, 2013.

[5] Horner G. C., Pilkey W. D.; The Riccati Transfer Matrix Method, Journal of Mechanical Design, Vol. 100, pp. 297-302, 1978.

[6] He B., Rui X., Wang G.; Riccati discrete time transfer matrix method for elastic beam undergoing large overall motion, Springer Science, Vol. 18, No. 4, pp. 579-598, 2007.

[7] Wang G., Rong B., Tao L., Rui X.; Riccati Discrete Time Transfer Matrix Method for Dynamic Modeling and Simulation of an Underwater Towed System, Journal of Applied Mechanics, Vol. 79, No. 4, 2012.

[8] Zhai W.M, Two simple fast integration methods for largescale dynamic problems in engineering. Int. J. Numer. Methods Eng, Vol. 39, pp. 4199–4214, 1996.

[9] Zhai W.M., Wang K.Y., Lin J.H., Modelling and experiment of railway ballast vibration. J. Sound Vib, Vol. 270, pp. 673–683, 2004.

[10] Zhou J., Zhou Y., A new simple method of implicit time integration for dynamic problems of engineering structures, Acta Mech Sin, Vol. 23, pp. 91–99, 2007.

[11] Rezaiee M., Sarafrazi R., A mixed and multi-step higher-order implicit time integration family, Mechanical Engineering Science, Vol. 224, pp. 2097- 2108, 2010.

[12] Vahid Alizadehyazdi, Stability of Discrete Time Transfer Matrix Method (DT_TMM),2016

[13] Jun Zhou , Youhe Zhou , A new simple method of implicit time integration for dynamic problems of engineering structures, 2007

ABSTRACT

In field of application of robots, the study of vibrations of the flexible arms used in these robots are important for their online control.The proposed flexible dynamic system for modeling includes a beam that is attached to an electric motor at it's base. When the engine is turned on, the beam begins to rotate and vibration. Triggered by the sudden onset of motion. since nonlinear finite element methods and numerical methods require increasing computational volume and slowing the robot arm control process, this thesis introduces the system is simulated with a number of rigid links with the ability to rotate between the two links.

The hobolt , fox-euler , newmark-beta and wilson-theta methods are classical and traditional methods of numerical integration that are examined in each. In these four classical methods, different approximations have been used to linearize the velocity and acceleration components and other nonlinear expressions. It would be a better way to have accuracy despite the ralative low computation. At the end a suggested method is presented.

Keywords: flexible robotic arm , transfer matrix , numerical antigrate

Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanic and Mechatronic
MSc Thesis in Mechatronic

Improve the transfer matrix method to implement the curve control of a flexible robotic arm

By: Mahdi Gholampour

Supervisor:
Dr. Mahdi Bamdad

September 2018